И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

50 ЗАДАЧ НА ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2009

Введение

Данное пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать задачи на доказательство по геометрии. Оно содержит пятьдесят задач, сформулированных в виде признаков равенства треугольников по трём элементам, включающим стороны, углы, высоты, медианы или биссектрисы треугольника. При этом используются обычные признаки равенства треугольников.

Особенностью предлагаемых задач является то, что это не просто задачи на доказательство. В них нужно самому выяснить, верно ли сформулированное утверждение. Если верно, то привести доказательство, если нет – дать контрпример.

Именно такие задачи характерны для исследовательской, творческой деятельности человека не только в математике, но и других различных областях знания. Не случайно, что многие научные проблемы формулируются в терминах задач с неопределённым условием.

Как правило, задачи с подобным неопределённым условием труднее, чем просто задачи на доказательство. Отсутствие уверенности в справедливости предложения, сформулированного в условии задачи, накладывает дополнительную психологическую трудность поиска решения. Но из этого не следует, что решением таких задач не следует заниматься на уроках математики. Наоборот, в них заложен большой образовательный и воспитательный потенциал. Они помогают более глубокому освоению изучаемого материала, учат отличать верное утверждение от неверного, развивают интуицию, логическое мышление, учат рассуждать, анализировать, аргументировать, доказывать.

Все включённые в пособие задачи сопровождаются рисунками, помогающими лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, при необходимости провести дополнительные построения, наметить план решения.

В конце пособия даны решения всех задач.

В качестве дополнительной литературы рекомендуем следующую книгу:

Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. – М.: БИНОМ, 2008.

В ней рассмотрены всевозможные построения треугольника по трём его элементам, включающим стороны, углы, биссектрисы, медианы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей, периметр.

Выясните, верны ли следующие утверждения.
Если да, докажите, если нет, приведите контрпример

1. Два треугольника равны, если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника.
2. Два треугольника равны, если две стороны и высота, опущенная на одну из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника.
3. Два треугольника равны, если две стороны и высота, опущенная на третью сторону, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника.
4. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на эту сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.
5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на сторону, противоположную данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.
6. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.
7. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, прилежащую к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.
8. Два треугольника равны, если два угла и высота, проведённая из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника.
9. Два треугольника равны, если два угла и высота, проведённая из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника.
10. Если сторона и две высоты, опущенные на две другие стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.
11. Если сторона и две высоты, одна из которых опущена на данную сторону, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.
12. Если угол и две высоты, опущенные на его стороны, одного треугольника соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.
13. Если угол и две высоты, одна из которых проведена из данного угла, одного треугольника, соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

14. Если две стороны и медиана, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.
15. Если две стороны и медиана, заключённая между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.
16. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.
17. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к стороне, противоположной данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.
18. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.
19. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.
20. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведённая из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.
21. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведённая из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.
22. Если сторона и две медианы, проведённые к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.
23. Если сторона и две медианы, одна из которых проведена к данной стороне, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.
24. Если угол и две медианы, проведённые к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.
25. Если угол и две медианы, одна из которых проведена из вершины данного угла, одного треугольника, соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.
26. Если две стороны и биссектриса, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.

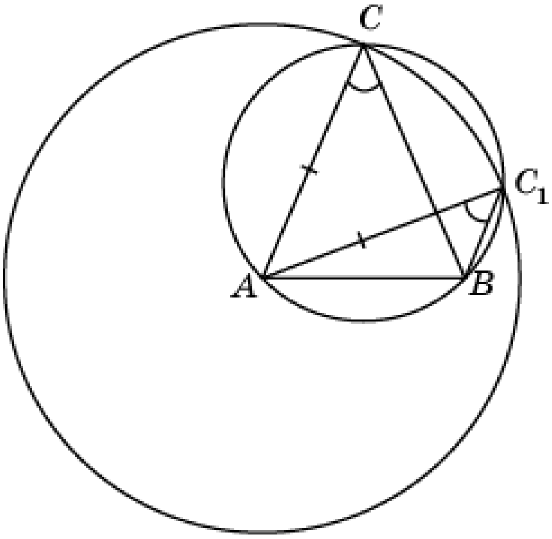
27. Ели две стороны и биссектриса, заключённая между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.
28. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведённая к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.
29. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу и биссектриса, проведённая из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.
30. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу и биссектриса, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.
31. Два треугольника равны, если два угла и биссектриса, проведённая из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и биссектрисе другого треугольника.
32. Два треугольника равны, если два угла и биссектриса, проведённая из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и биссектрисе другого треугольника.
33. Если у двух равнобедренных треугольников соответственно равны основания и опущенные на них высоты, то такие треугольники равны.
34. Если основание и высота, опущенная на боковую сторону, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и высоте другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.
35. Если основание и медиана, проведённая к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и медиане другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.
36. Если основание и биссектриса, проведённая к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и биссектрисе другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.
37. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведённые к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.
38. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведённые к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.
39. Два треугольника равны, если б**о**льшая сторона, медиана и высота, проведённые к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

40. Два треугольника равны, если бо́льшая сторона, биссектриса и высота, проведённые к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.
41. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведённые к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.
42. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведённые к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.
43. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведённые из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.
44. Два треугольника равны, если угол, биссектриса и высота, проведённые из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.
45. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведённые из вершин двух других углов, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.
46. Два треугольника равны, если меньший угол, медиана и высота, проведённые из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.
47. Два треугольника равны, если меньший угол, биссектриса и высота, проведённые из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.
48. Два треугольника равны, если угол, биссектриса, проведённая из его вершины, и высота, опущенная на сторону, прилежащую к этому углу, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.
49. Два треугольника равны, если три высоты одного треугольника соответственно равны трём высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.
50. Два треугольника равны, если три медианы одного треугольника соответственно равны трём медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

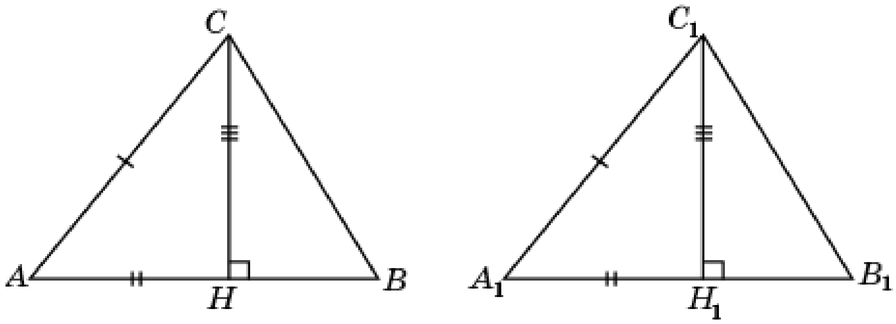
Решения

1. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим окружность и её хорду AB. С центром в точке A проведём другую окружность, пересекающую первую окружность в некоторых точках C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 AB – общая сторона, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

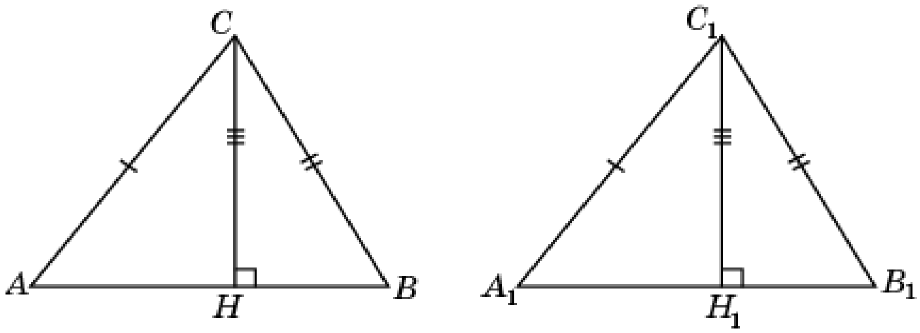


2. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

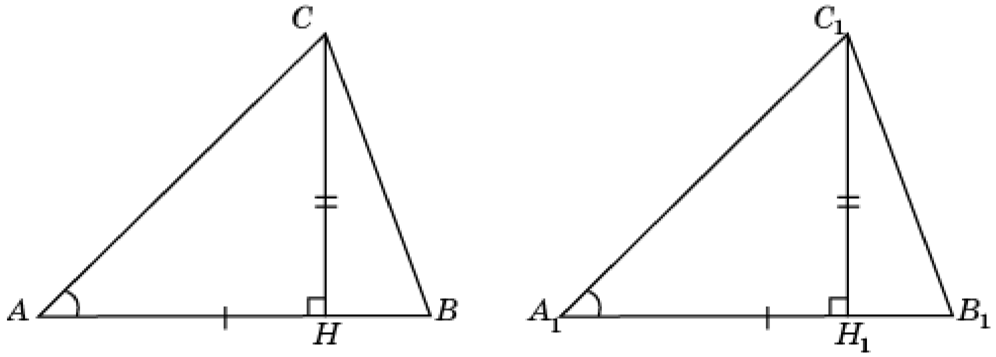
3. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Аналогично, из равенства треугольников BCH и $B_1C_1H_1$ следует, что $\angle BCH = \angle B_1C_1H_1$. Таким образом, $\angle C = \angle C_1$ и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

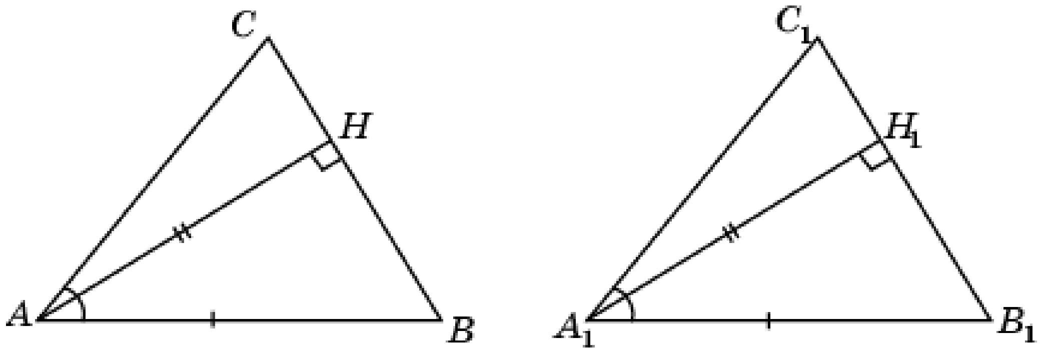
4. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны



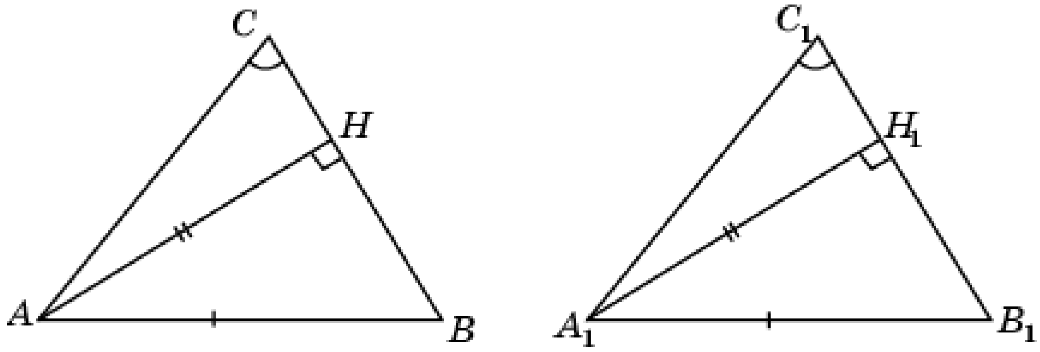
по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

5. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

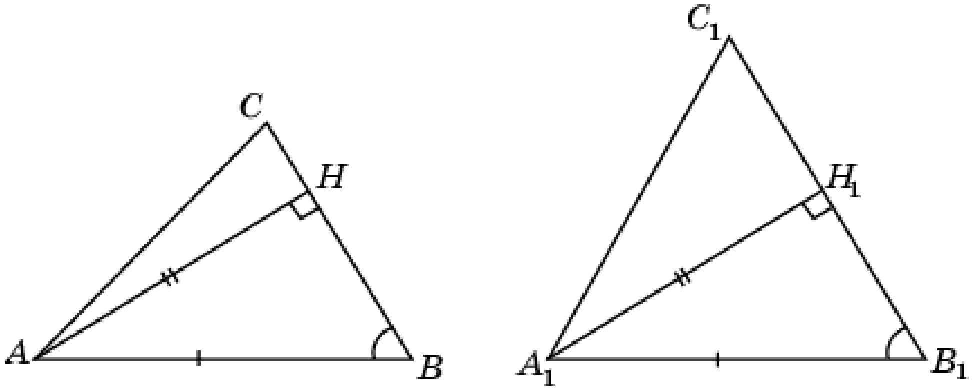
6. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



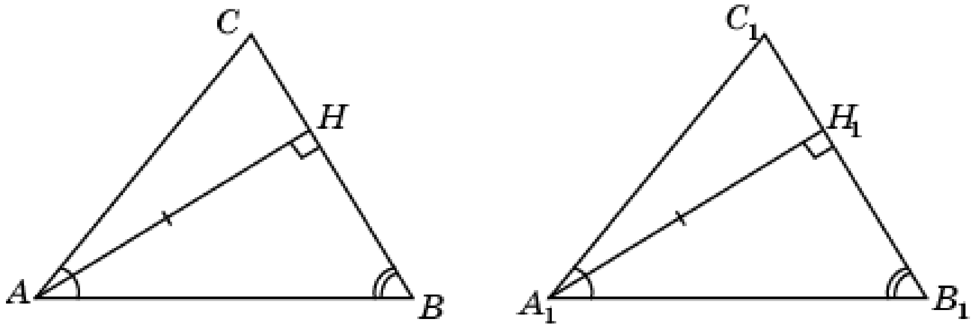
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$, откуда $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

7. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$, в которых $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$, $AH = A_1H_1$, $AB = A_1B_1$. На продолжениях сторон BH и B_1H_1 отложим неравные отрезки соответственно HC и H_1C_1. Тогда в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, высоты AH и A_1H_1 равны, однако сами треугольники не равны.

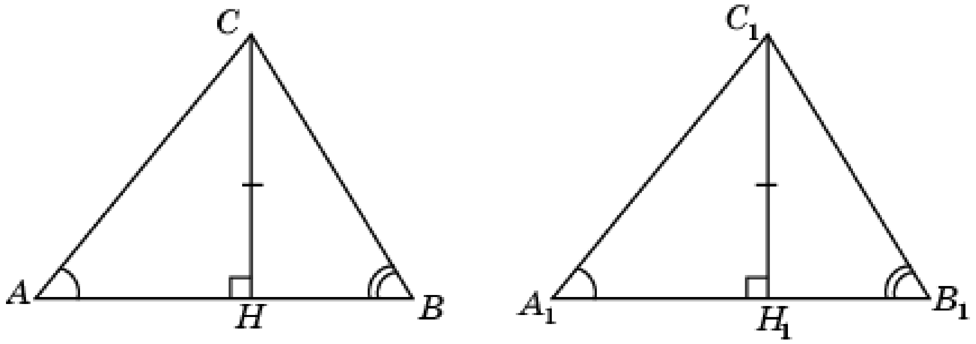


8. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



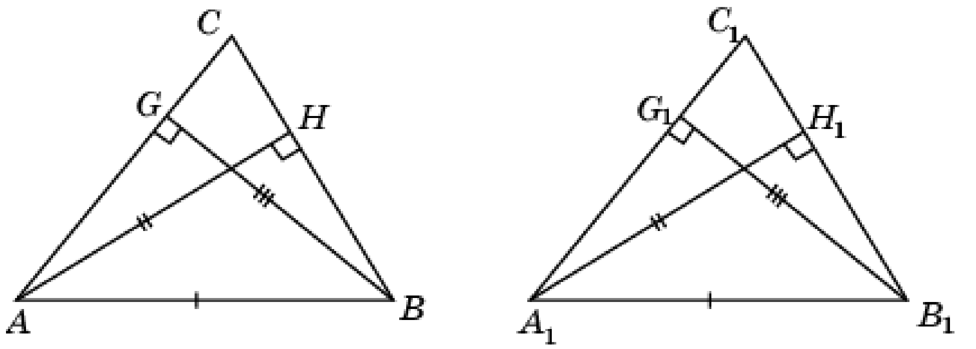
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

9. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Кроме того, из равенства углов A и A_1, B и B_1 следует равенство углов C и C_1. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

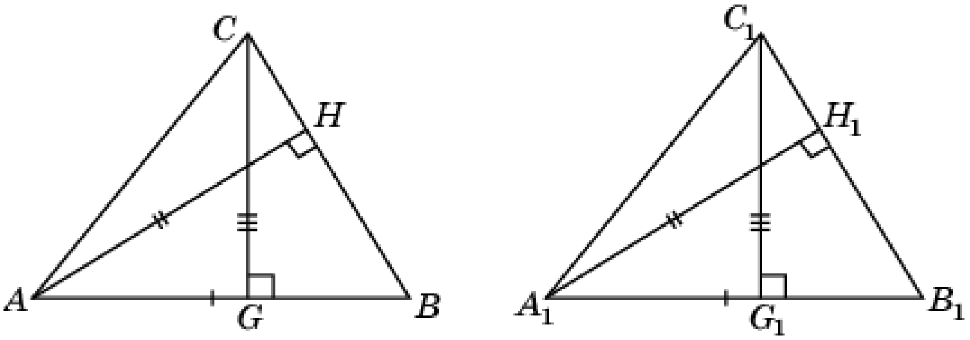
10. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Аналогично, из равенства треугольников ABH и $A_1B_1H_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

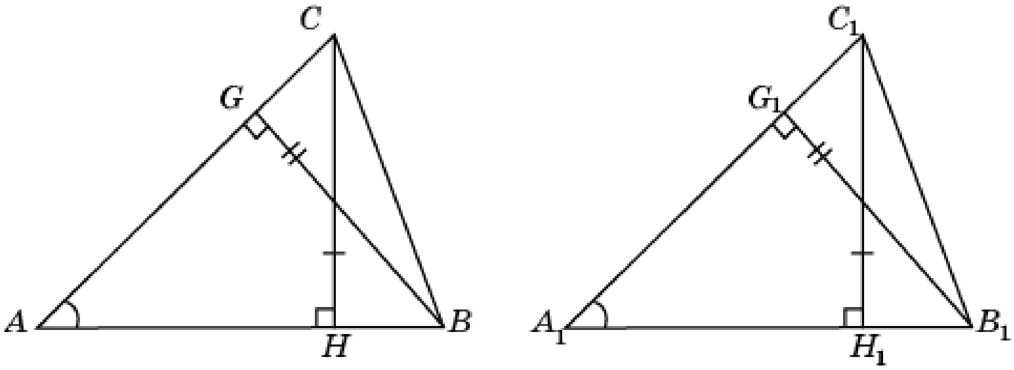
Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

11. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота CG равна высоте C_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



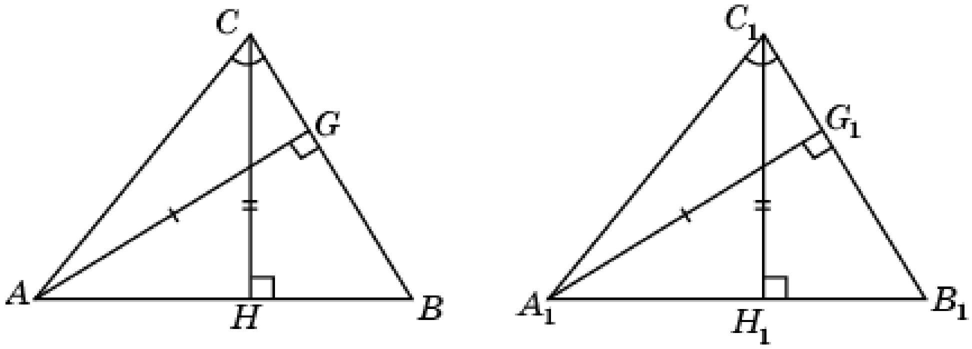
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Прямоугольные треугольники BCG и $B_1C_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $BC = B_1C_1$.Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

12. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, высота CH равна высоте C_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$.Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

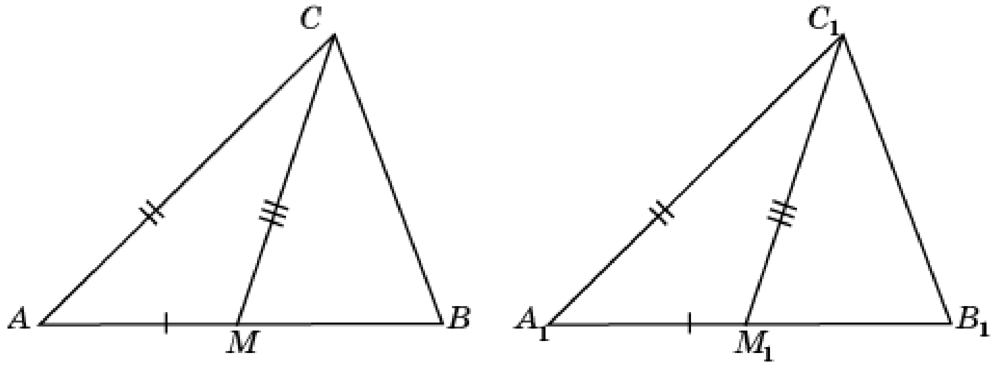
13. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



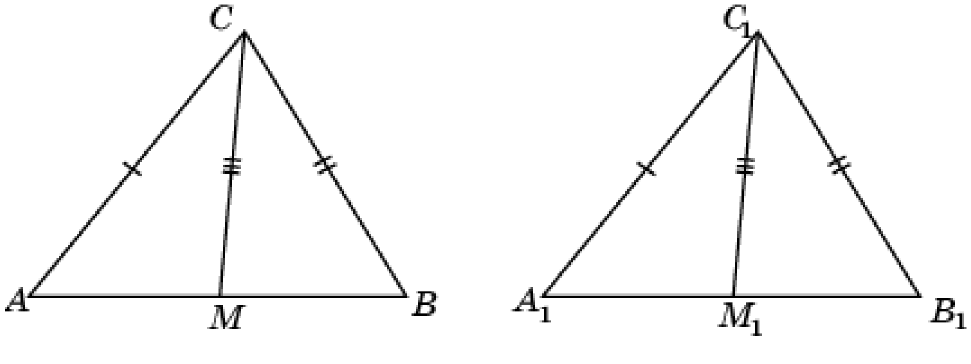
Действительно, прямоугольные треугольники ACG и $A_1C_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

14. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

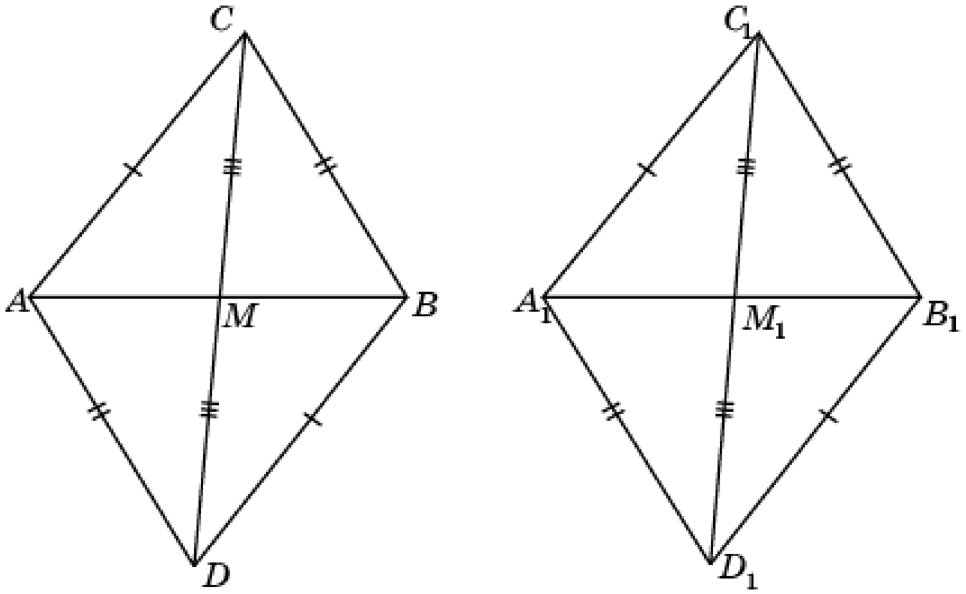
Действительно, треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трём сторонам. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.



15. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

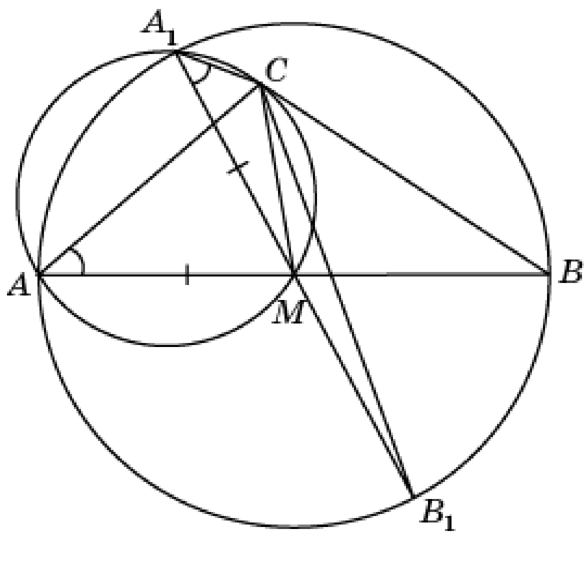


Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$.



Тогда четырёхугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle\ A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle\ B_1C_1D_1$. Значит, $\angle C = \angle C_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

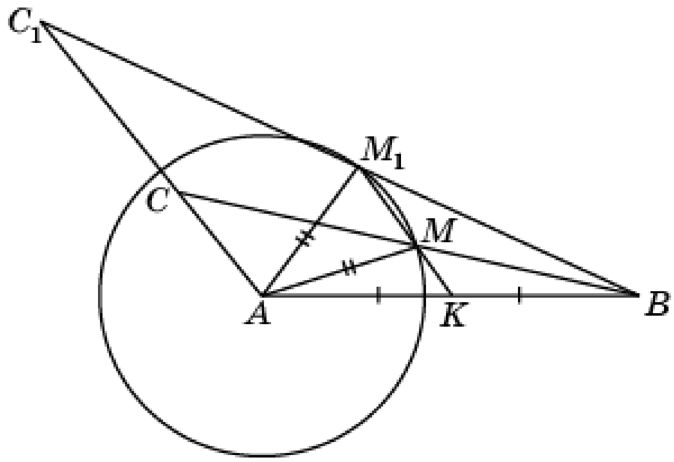
16. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.



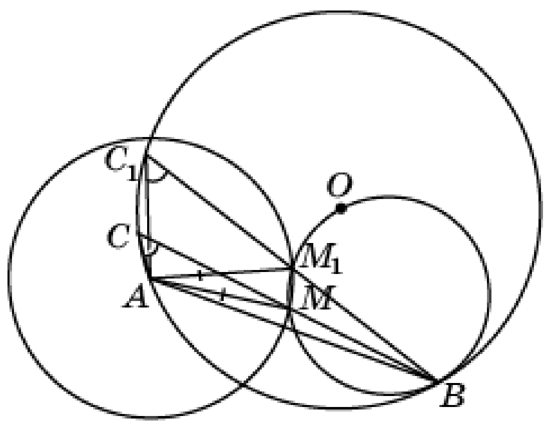
Для этого рассмотрим окружность с центром в точке M. Проведём два диаметра AB и A_1B_1. Через точки A, A_1, M проведём ещё одну окружность и выберем на ней точку C, как показано на рисунке. В треугольниках ABC и A_1B_1C $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, медиана CM общая. Однако треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

17. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим угол и окружность с центром в вершине A этого угла.

На одной стороне угла отложим отрезок AB и через его середину K проведём прямую, параллельную другой стороне и пересекающую окружность в точках M и M_1. Через точку B проведём прямые BM и BM_1, пересекающие сторону угла соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 угол A общий, AB – общая сторона, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

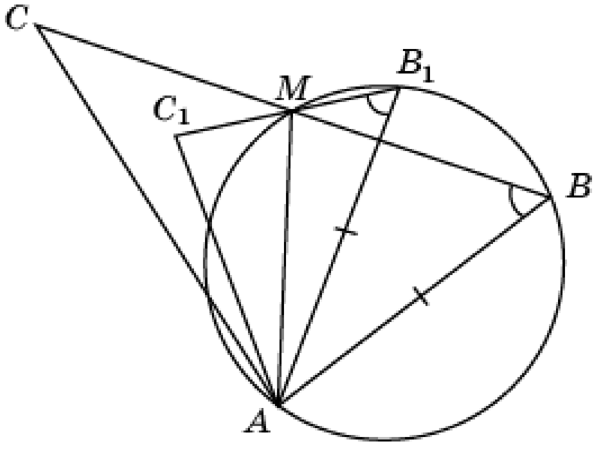


18. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим окружность с центром в точке O и окружность в два раза меньшего радиуса, касающуюся первой окружности внутренним образом в точке B. Напомним, что эта окружность без точки B является геометрическим местом середин хорд первой окружности, проходящих через точку B. Проведём хорду AB и окружность с центром в точке A, пересекающую вторую окружность в точках M и M_1. Проведём прямые BM и BM_1, пересекающие первую окружность соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB общая, $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и AM_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

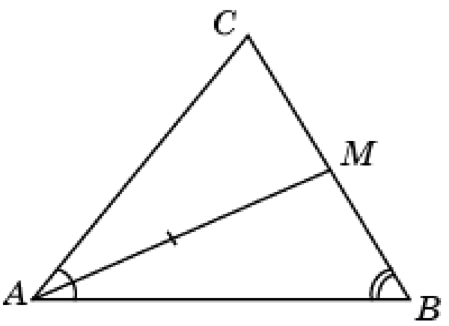


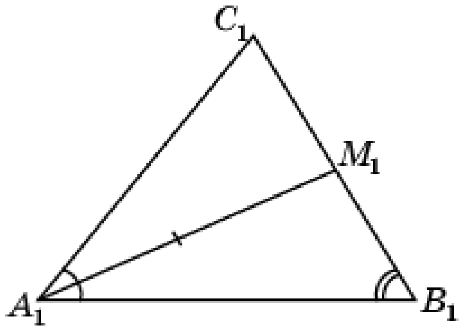
19. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим окружность и проведём равные хорды AB и AB_1. Через точку M окружности проведём прямые BM и B_1M и отложим на них

отрезки MC и MC_1 соответственно равные BM и B_1M. В треугольниках ABC и AB_1C_1 $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM общая, однако треугольники ABC и AB_1C_1 не равны.

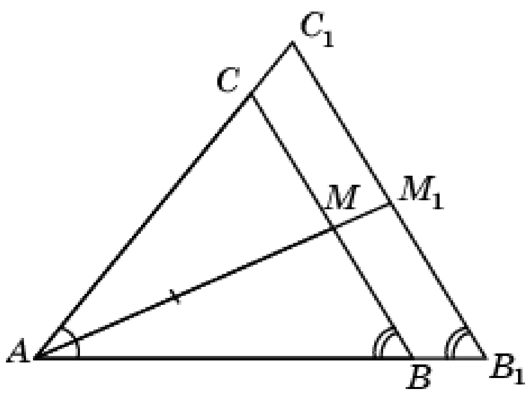


20. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.





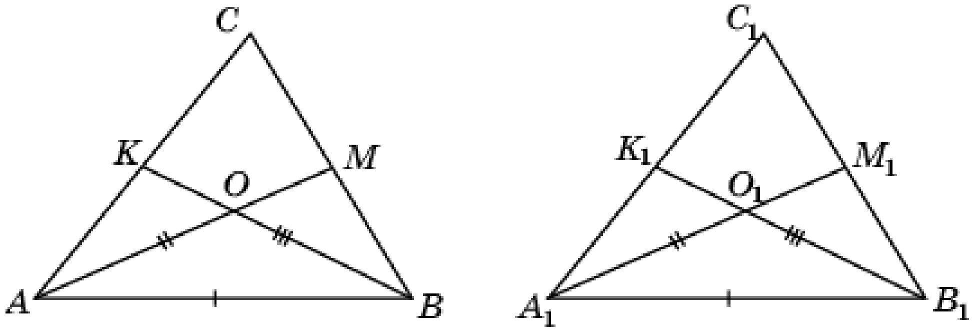
Действительно, из равенства углов следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Напомним, что преобразование подобия переводит медиану в медиану. Если бы $AB \neq A_1B_1$, то $AM \neq A_1M_1$, что противоречит условию.



Значит, $AB = A_1B_1$ и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

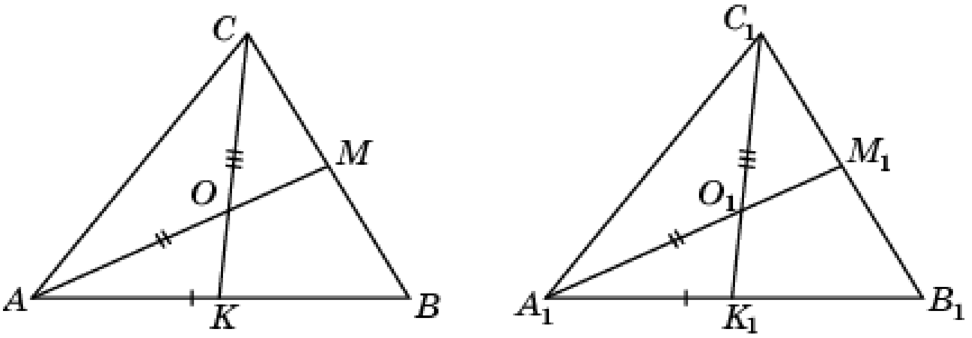
21. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

22. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана BK равна медиане B_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, пусть O, O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$ и, значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

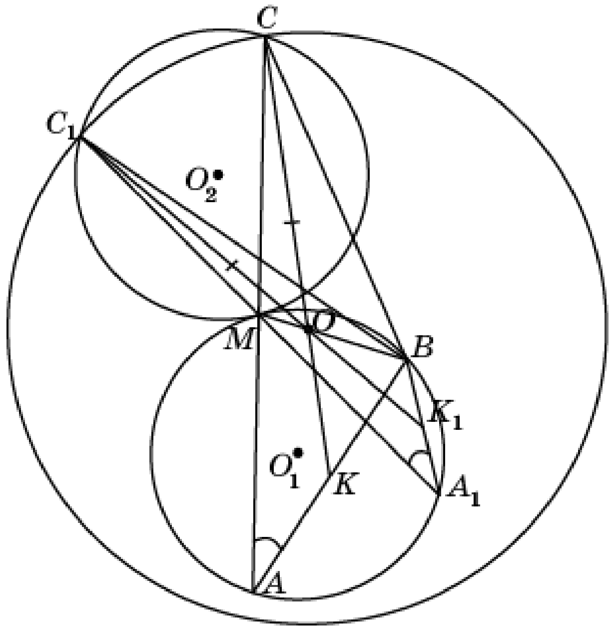
23. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана CK равна медиане C_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



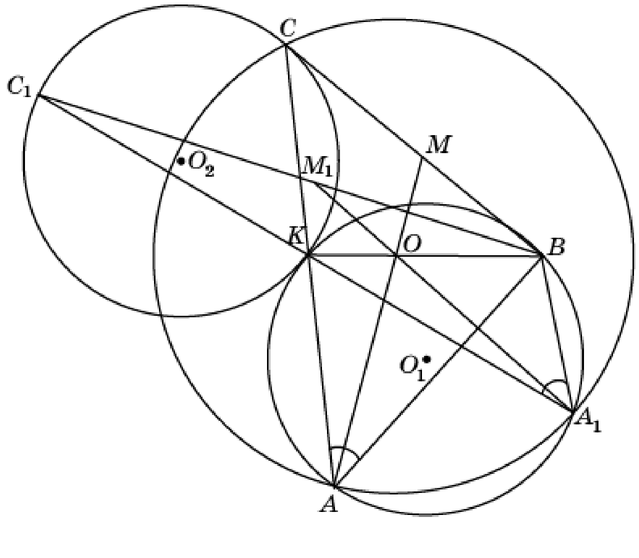
Действительно, пусть O, O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то треугольники AKO и $A_1K_1O_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle KAO = \angle K_1A_1O_1$ и, значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $MB = M_1B_1$ и, следовательно, $BC = B_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

24. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке M. Проведём в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведём отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведём в нем медиану CK и обозначим O точку, делящую её в отношении 2:1, считая

от вершины C. Проведём окружность с центром в точке O радиуса OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведём прямую C_1M и обозначим A_1 точку её пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, так как равны отрезки CO и C_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BM общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

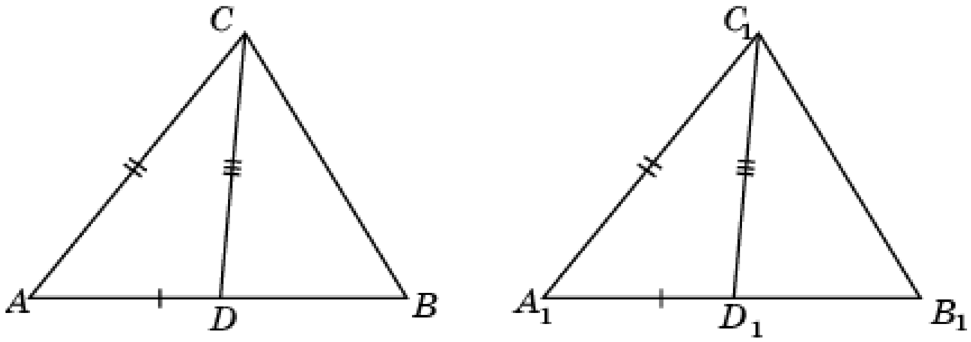


25. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке K.



Проведём в одной из них хорду AB и прямую AK, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведём отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведём в нем медиану BK и обозначим O точку, делящую её в отношении 2:1, считая от вершины B. Проведём окружность радиуса OA, пересекающую первую окружность в точке A_1. Проведём прямую A_1K и обозначим C_1 точку её пересечения со второй окружностью. Получим треугольник A_1BC_1, в котором O – точка пересечения медиан. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, так как равны отрезки AO и A_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BK общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

26. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Обозначим $AB = A_1B_1 = c$, $AC = A_1C_1 = b$, $CD = C_1D_1 = l$, $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$. Докажем, что $a = a_1$. Из этого будет следовать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут равны по трём сторонам. Воспользуемся формулой для биссектрисы треугольника

$$l^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2}.$$

Покажем, что, при фиксированных b и c, большему значению a соответствует большее значение l биссектрисы. Производная правой части, как функции от a, равна

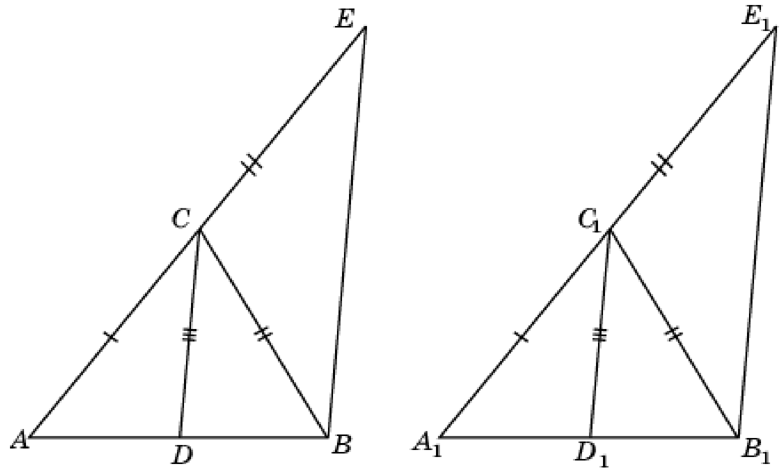
$$b - \frac{c^2b(b-a)}{(a+b)^3}.$$

Из неравенства треугольника следует, что $b - a < c$ и $a + b > c$. Откуда получаем, что производная больше нуля, значит, функция строго возрастает, т.е. большему значению a соответствует большее значение l. Таким образом, из равенства биссектрис следует равенство сторон a и a_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам.

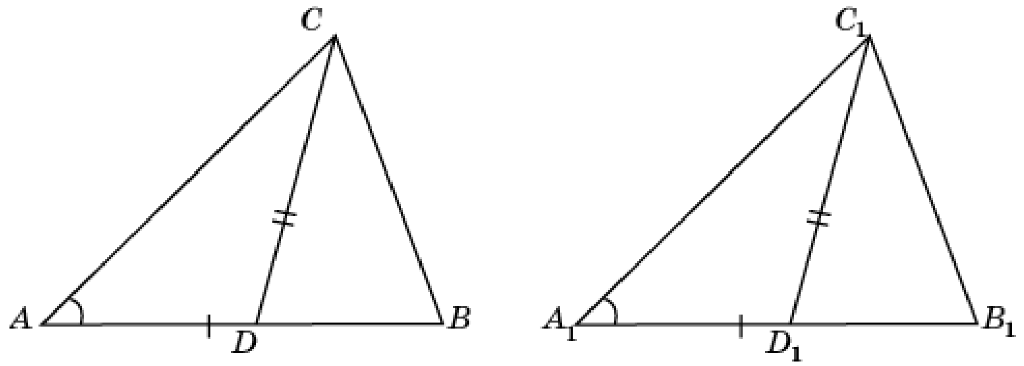
27. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$. Тогда $BE = CD\frac{AE}{AC}$, $B_1E_1 = C_1D_1\frac{A_1E_1}{A_1C_1}$.

Треугольники BCE и $B_1C_1E_1$ равны по трём сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$. Треугольники ABE и $A_1B_1E_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам.

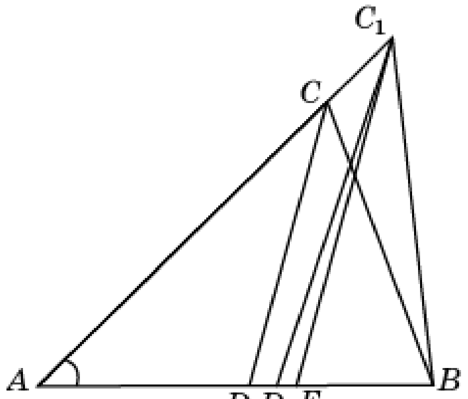


28. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

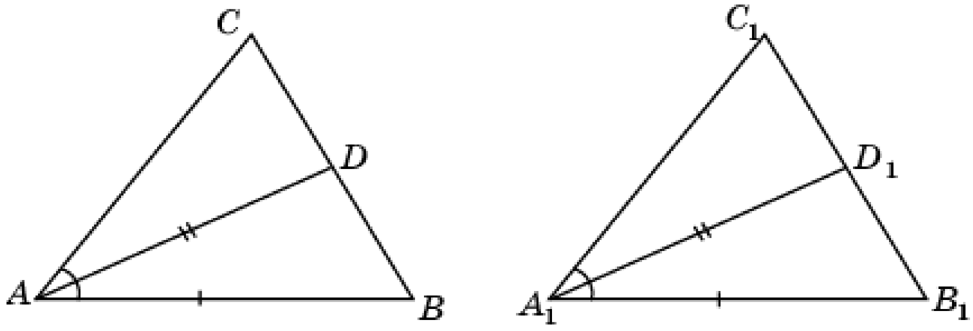


Отложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.

Предположим, что $AC \geq BC$. Через вершину C_1 проведём прямую C_1E, параллельную прямой CD. Точка D_1 будет лежать между точками D и E. При этом $CD < C_1E < C_1D_1$. Аналогично доказывается, что $CD < C_1D_1$ в случае, если $AC < BC$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать, значит, данные треугольники равны.

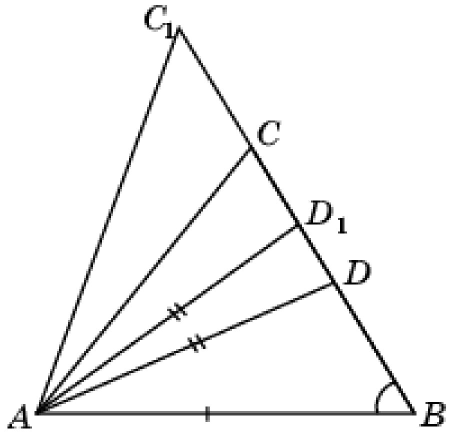


29. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

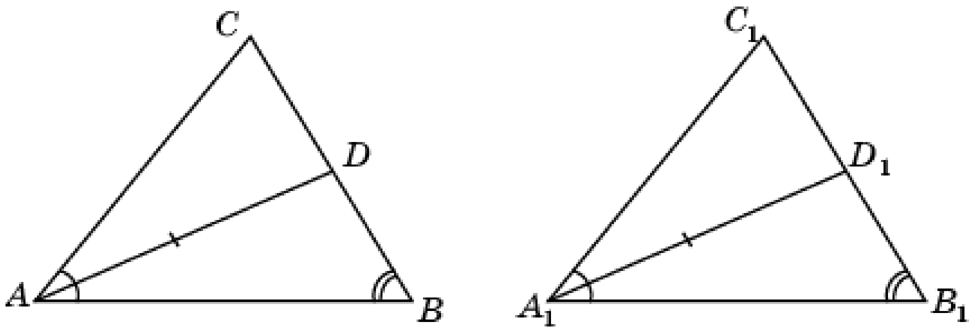
30. Пример треугольников, изображённых на рисунке, показывает, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.



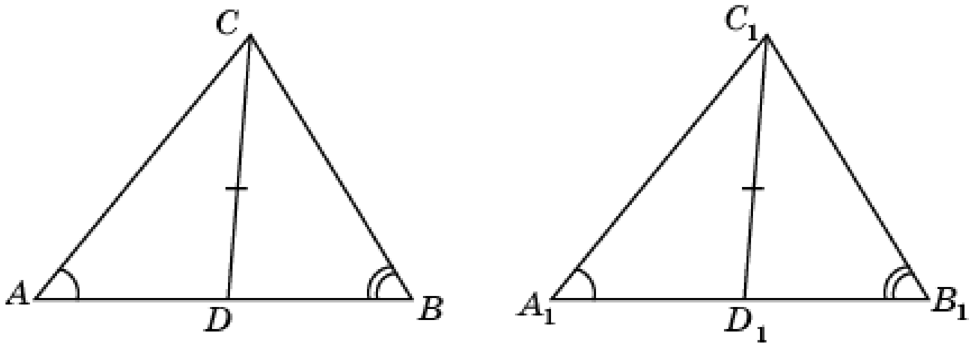
Действительно, в треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ – общий, AB – общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

31. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

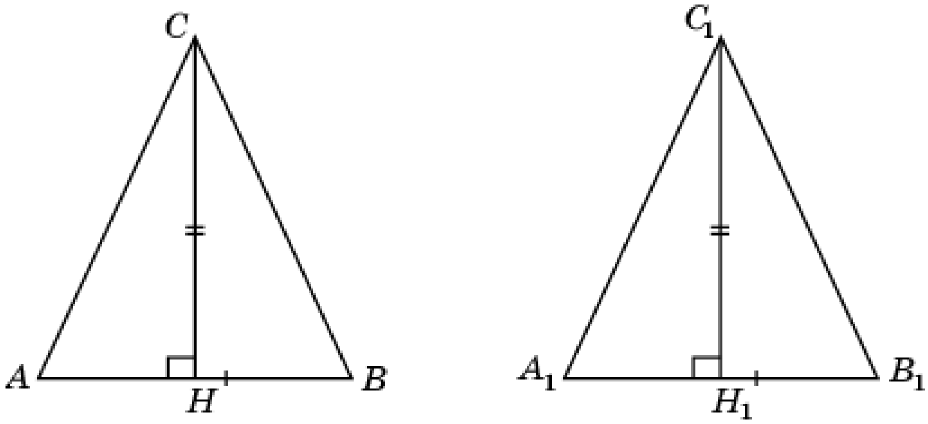


32. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



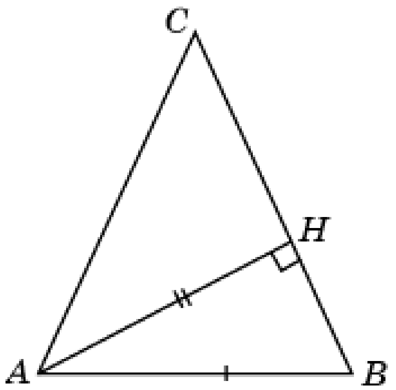
Действительно, треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

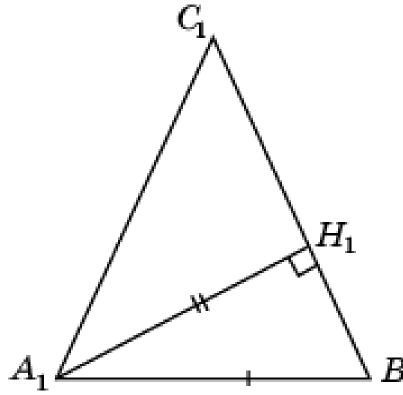
33. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты CH, C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам.

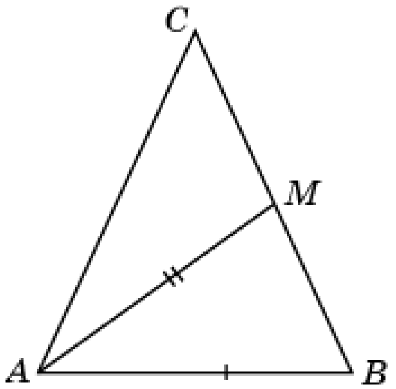
34. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты AH, A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

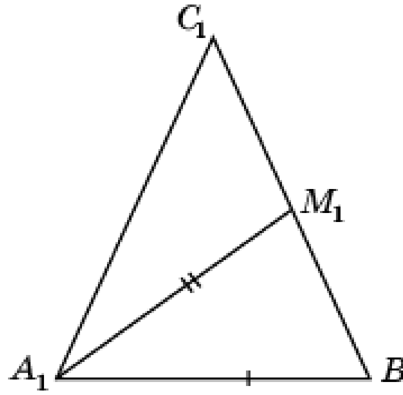




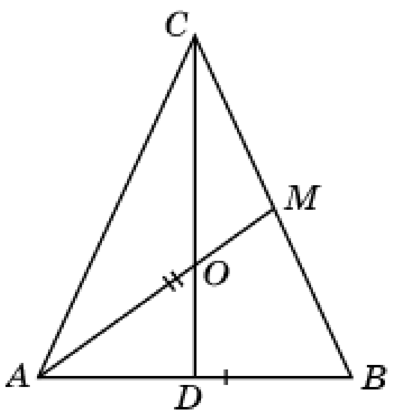
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

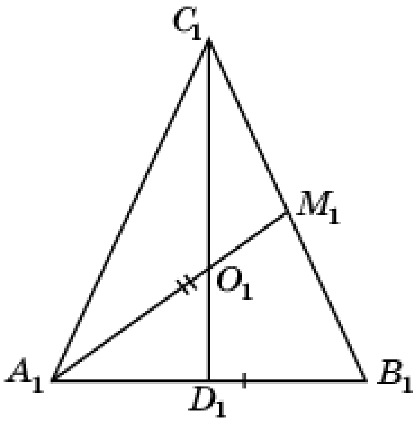
35. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и медианы AM, A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.





Проведём медианы CD и C_1D_1. Точки их пересечения с медианами AM и A_1M_1 обозначим соответственно O и O_1.

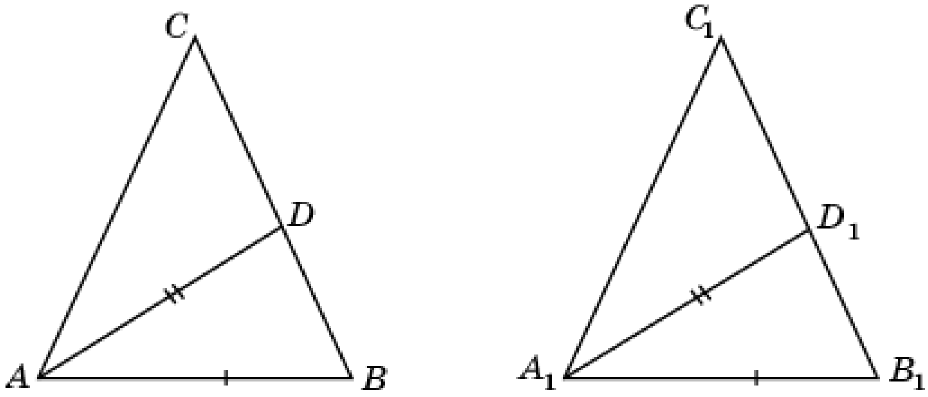




Прямоугольные треугольники AOD и $A_1O_1D_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle OAD = \angle O_1A_1D_1$. Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$

равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

36. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и биссектрисы AD, A_1D_1. Докажем, что эти треугольники равны.



Для этого докажем, что при увеличении боковой стороны равнобедренного треугольника и постоянном основании биссектриса, проведённая к боковой стороне, увеличивается. Предположим, что $AB = 1$, $AC = a$. Тогда для биссектрисы l имеет место формула

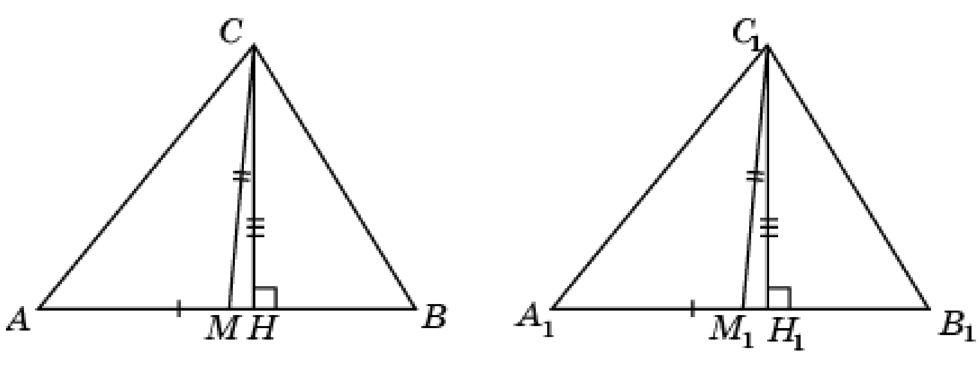
$$l^2 = a - \frac{a^3}{(a+1)^2}.$$

Производная функции, стоящей в правой части этого равенства, равна

$$1 - \frac{a^3+3a^2}{(a+1)^3}.$$

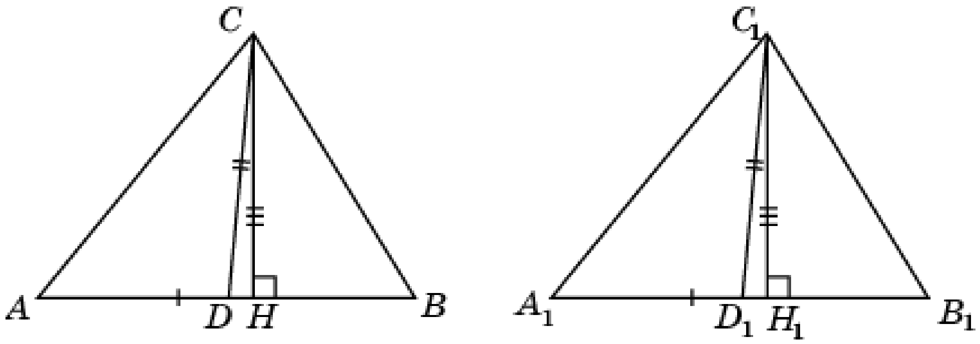
Эта производная больше нуля для всех положительных a. Следовательно, большей боковой стороне соответствует большая биссектриса. Равенство биссектрис равнобедренных треугольников с равными основаниями возможно только в случае равенства боковых сторон, т.е. в случае равенства самих треугольников.

37. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

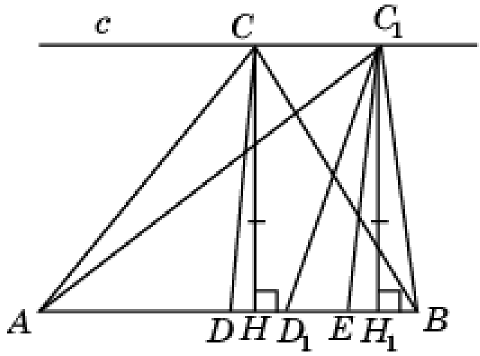


Действительно, прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CMH = \angle C_1M_1H_1$ и, значит, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

38. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

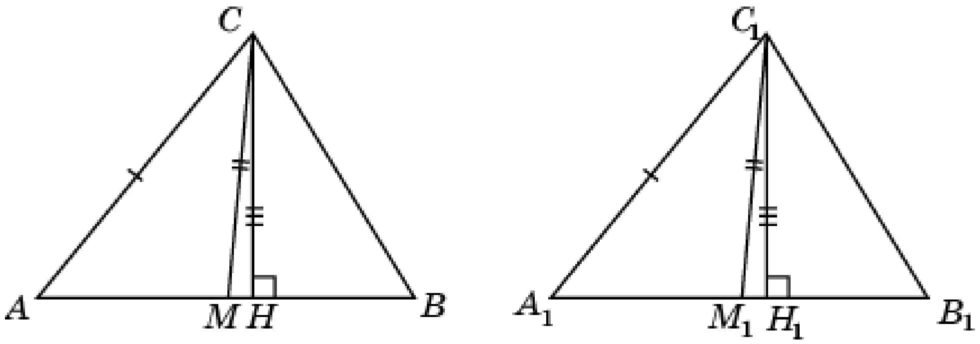


Предположим, что $AC \geq BC$ и $A_1C_1 \geq B_1C_1$. Отложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.



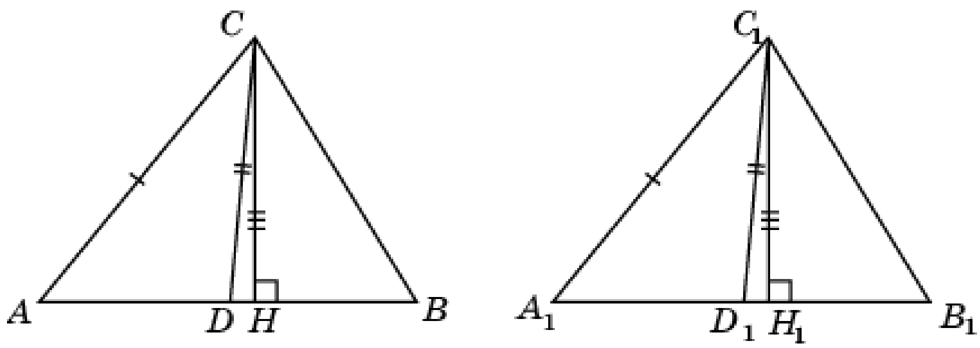
Проведём прямую C_1E, параллельную CD. Угол ACB больше угла AC_1B, угол AC_1E больше угла ACD. Следовательно, угол AC_1E больше угла BC_1E и, значит, точка D_1 лежит между точками A и E. Следовательно, $DH < D_1H_1$ и, значит, $CD < C_1D_1$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать и, значит, данные треугольники равны.

39. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $MH = M_1H_1$. Так как сторона AC больше стороны BC треугольника ABC, то точка M лежит внутри отрезка AH. Так как сторона A_1C_1 больше стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то точка M_1 лежит внутри отрезка A_1H_1. Следовательно, $AM = A_1M_1$ и, значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

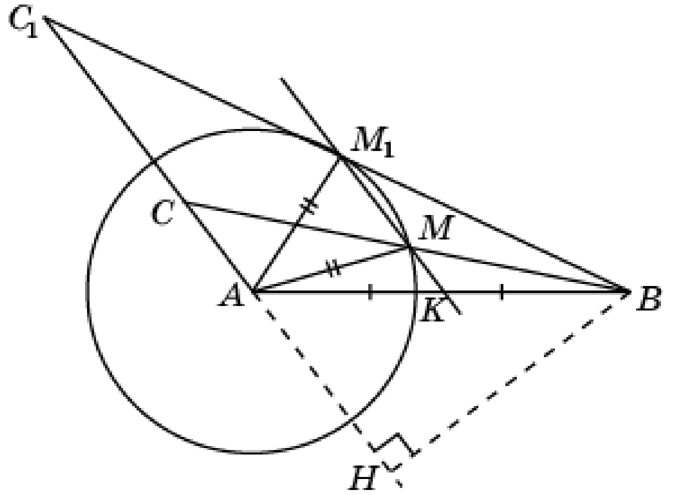
40. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, биссектрисы CD, C_1D_1 равны, высоты CH, C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



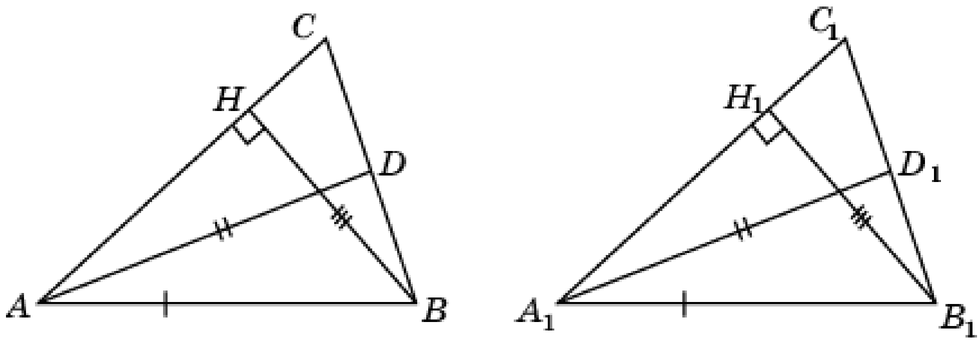
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Прямоугольные треугольники DCH и $D_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle DCH = \angle D_1C_1H_1$. Так как сторона AC больше стороны BC треугольника ABC, то точка D лежит внутри отрезка AH. Так как сторона A_1C_1 больше стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то точка D_1 лежит внутри отрезка A_1H_1. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

41. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

Рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности. Отложим на его стороне отрезок AB, больший диаметра, и через его середину K проведём прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1. Проведём прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB – общая, высота BH – общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

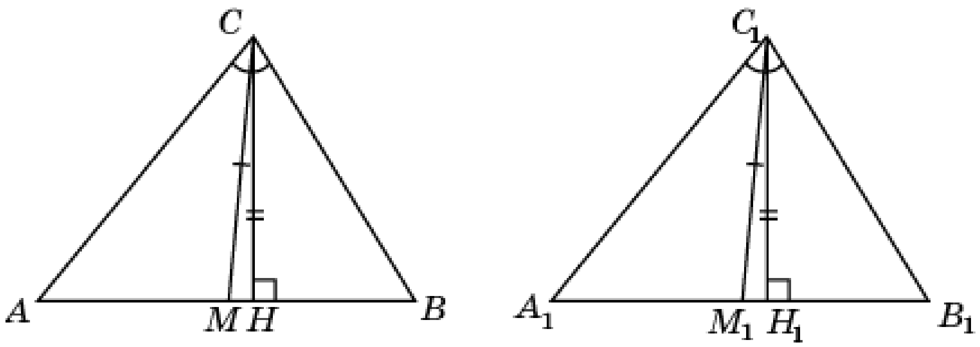


42. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

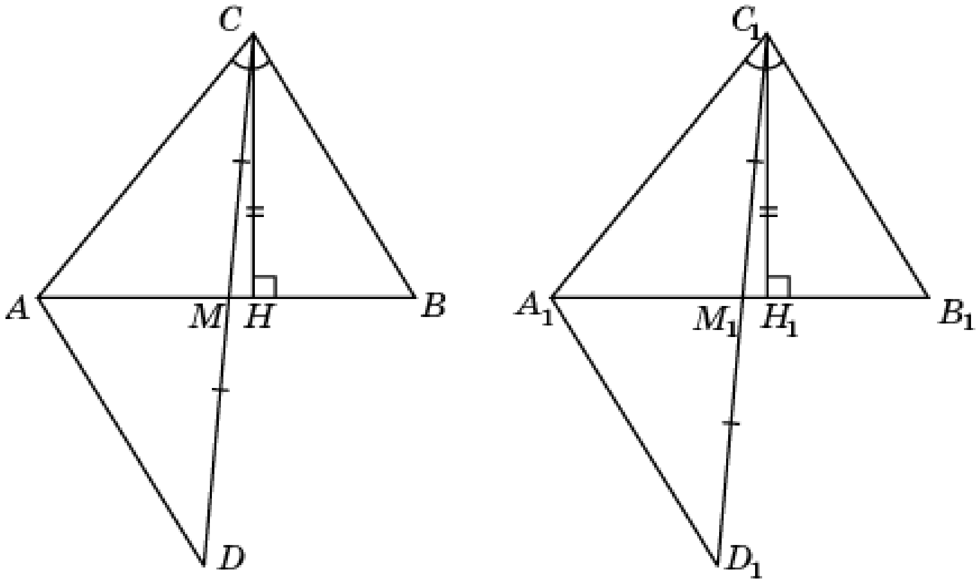


Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

43. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

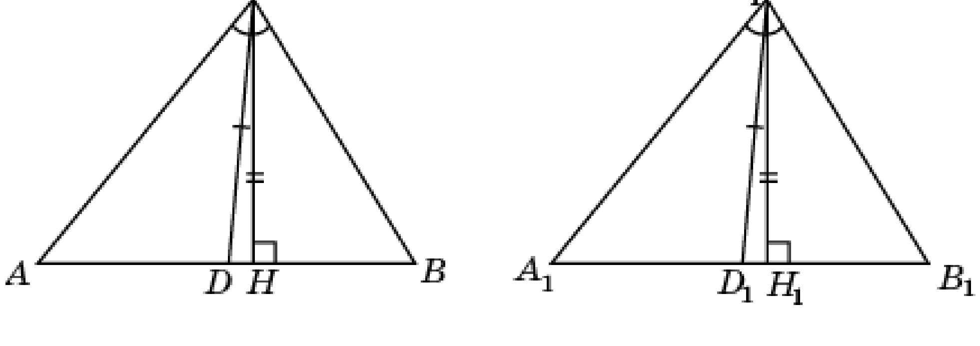


Действительно, прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Отложим на продолжении медиан отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$.



Из равенства углов CAD и $C_1A_1D_1$ следует равенство отрезков AM и A_1M_1. Значит, $AB = A_1B_1$. Кроме того, из равенства треугольников AMC и $A_1M_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними) следует равенство сторон AC и A_1C_1 и углов A и A_1. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

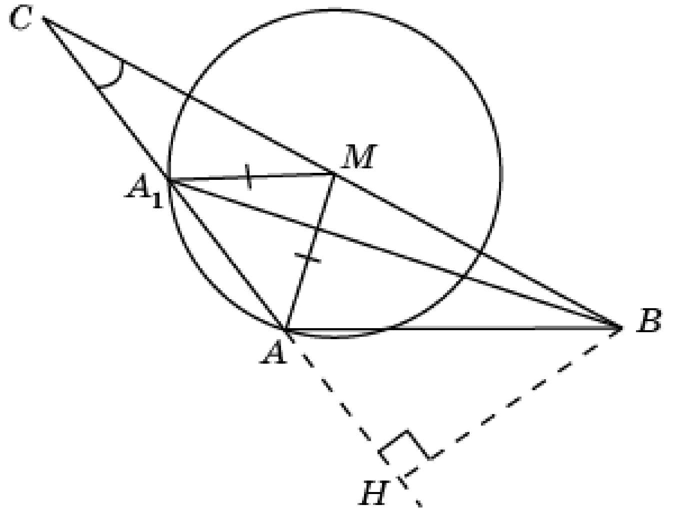
44. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



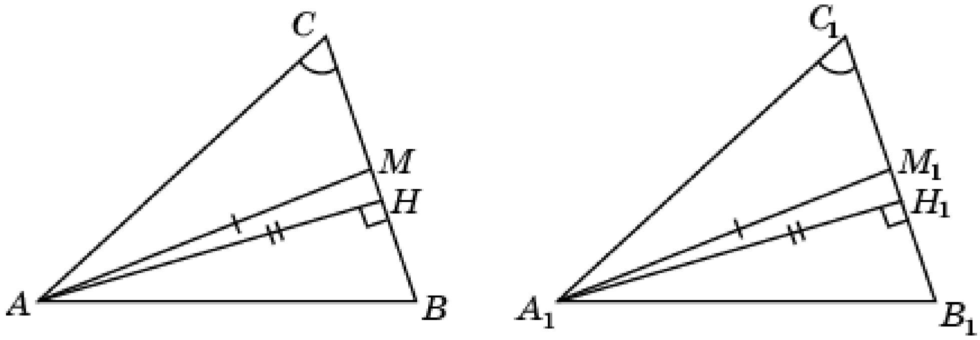
Действительно, прямоугольные треугольники CDH и $C_1D_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CDH = \angle C_1D_1H_1$. Значит, $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

45. Приведём пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

Рассмотрим треугольник ABC. Проведём окружность с центром в середине M стороны BC и радиусом AM. Обозначим A_1 точку пересечения этой окружности со стороной AC. В треугольниках ABC и A_1BC $\angle C$ – общий, медианы AM и A_1M равны, высота BH – общая. Однако треугольники ABC и A_1BC не равны.



46. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

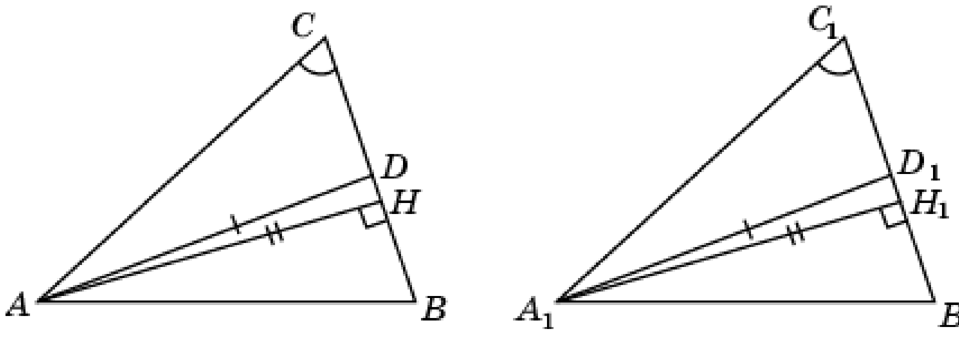


Действительно, прямоугольные треугольниках ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $CH = C_1H_1$. Прямоугольные треугольниках AMH и $A_1M_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $MH = M_1H_1$. Так как угол C меньше угла B треугольника ABC, то точка M лежит внутри отрезка CH. Так как угол

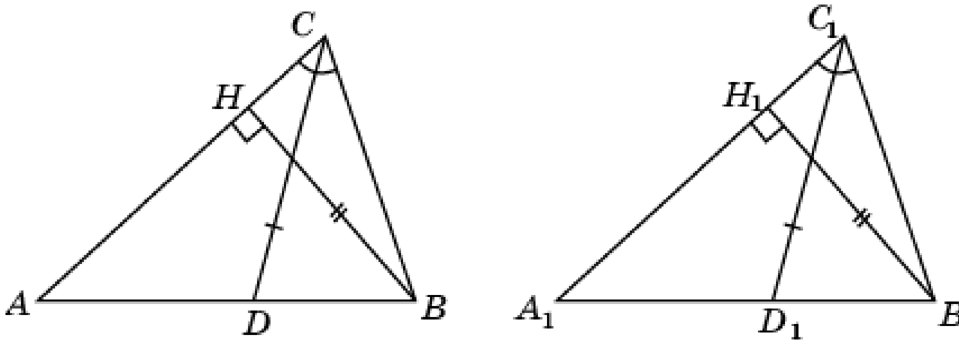
C_1 меньше угла B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то точка M_1 лежит внутри отрезка C_1H_1. Следовательно, $CM = C_1M_1$, и тогда $BC = B_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

47. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$. Прямоугольные треугольники ADH и $A_1D_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $\angle DAH = \angle D_1A_1H_1$. Так как угол C меньше угла B треугольника ABC, то точка D лежит внутри отрезка CH. Так как угол C_1 меньше угла B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то точка D_1 лежит внутри отрезка C_1H_1. Следовательно, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, тогда и $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

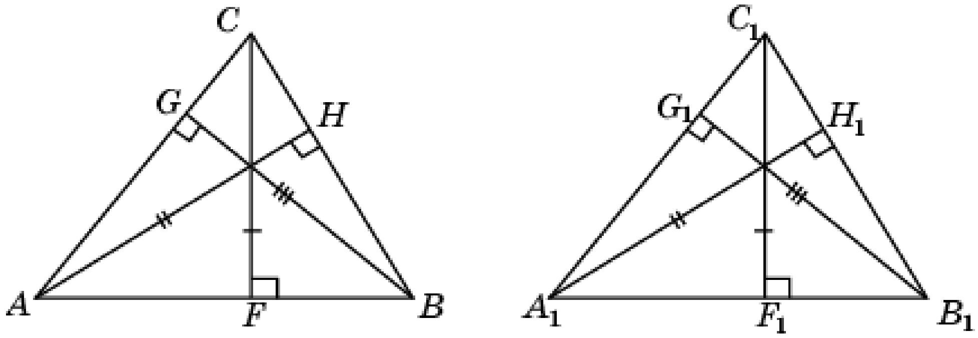


48. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



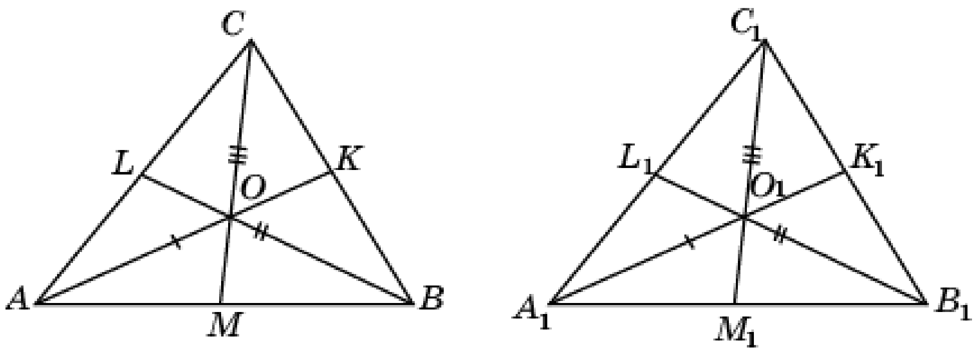
Действительно, прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $BC = B_1C_1$. Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

49. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны высоты AH и A_1H_1, BG и B_1G_1, CF и C_1F_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Обозначим стороны треугольников соответственно a, b, c и a_1, b_1, c_1, а соответствующие высоты h_a, b_b, h_c и h_{1a}, h_{1b}, h_{1c}. Имеют место равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ и $a_1h_{1a} = b_1h_{1b} = c_1h_{1c}$. Разделив почленно первые равенства на вторые, получим равенства $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, из которых следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Так как соответствующие высоты этих треугольников равны, то они не только подобны, но и равны.

50. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны медианы AK и A_1K_1, BL и B_1L_1, CM и C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Заметим, что медианы OM и O_1M_1 треугольников ABO и $A_1B_1O_1$ равны, так как они составляют одну третью часть соответствующих медиан данных треугольников.

По признаку равенства треугольников, доказанному нами под номером 15, треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны, значит, $AB = A_1B_1$.

Аналогично доказывается, что $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам.