И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

# ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ
# (ГЕОМЕТРИЯ)

## ОБЪЕМЫ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Москва 2008

# ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии собраны задачи на нахождение объемов и площадей поверхностей пространственных фигур, предназначенные для подготовки к Единому государственному экзамену, а также к конкурсным экзаменам по математике.

Как показывает анализ результатов ЕГЭ прошлых лет, основная трудность при решении стереометрических задач связана не столько с недостатками, вызванными незнанием формул и теорем или неумением их применять, сколько с недостаточно развитыми пространственными представлениями, неумением правильно изобразить пространственную ситуацию, указанную в задаче.

Для облегчения восприятия условия задач и нахождения решений, а также с целью развития пространственных представлений учащихся, все предлагаемые задачи сопровождаются рисунками, на которых можно производить необходимые построения. При этом особое внимание уделяется рисункам к задачам на комбинации пространственных фигур.

Наличие большого числа рисунков пространственных фигур восполняет явный недостаток таких рисунков в учебниках и задачниках по геометрии.

В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал.

В конце книги даны ответы и решения ко всем задачам. Однако не спешите смотреть ответ. Вне зависимости от того, удалось Вам решить задачу или нет, большую пользу для развития пространственных представлений оказывают размышления над задачей, анализ ее условия, проведение дополнительных построений, выяснение взаимного расположения многогранников и круглых тел, указанных в условии задачи, и даже просто разглядывание рисунка.

В качестве учебника по геометрии для подготовки к ЕГЭ рекомендуем использовать учебник:

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2008.

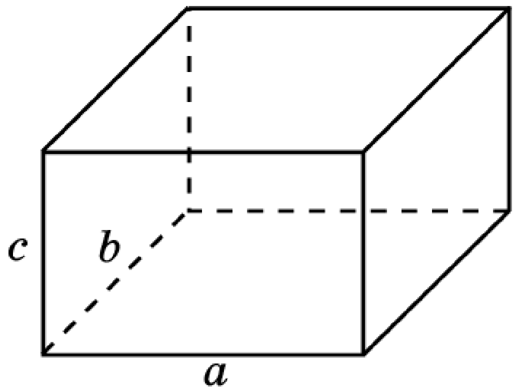
Этот учебник имеет гриф «Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации» и входит в Федеральный перечень учебников базового и профильного уровней обучения.

## I. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т.е. имеет место формула

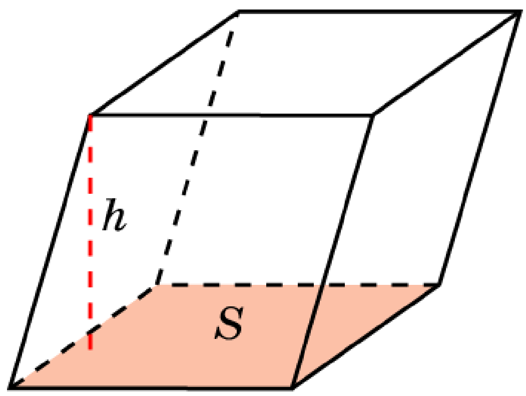
$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где $a$, $b$, $c$ – длины ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины.



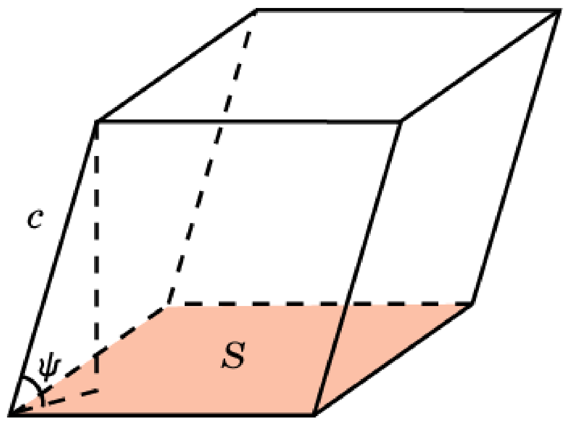

Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади $S$ грани параллелепипеда на высоту $h$, проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h.$$



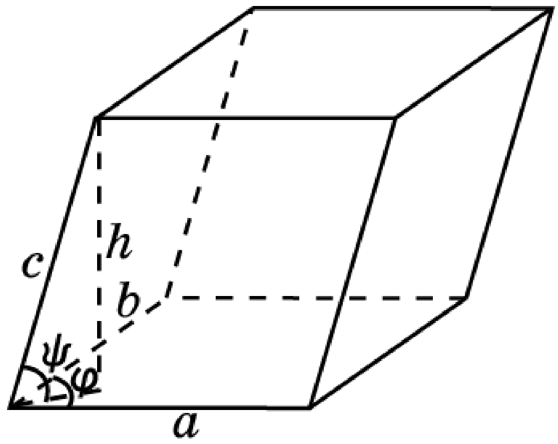

Если ребро параллелепипеда равно $c$ и образует с гранью площади $S$ угол $\psi$, то объем параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c \cdot \sin\psi.$$



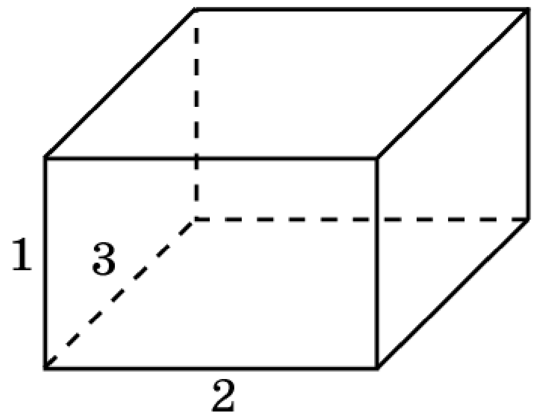
Пусть ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны *a*, *b*, *c*. Ребра *a* и *b* образуют угол $\varphi$, а ребро *c* наклонено к плоскости ребер *a* и *b* под углом $\psi$. Тогда объем *V* параллелепипеда выражается формулой

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi.$$

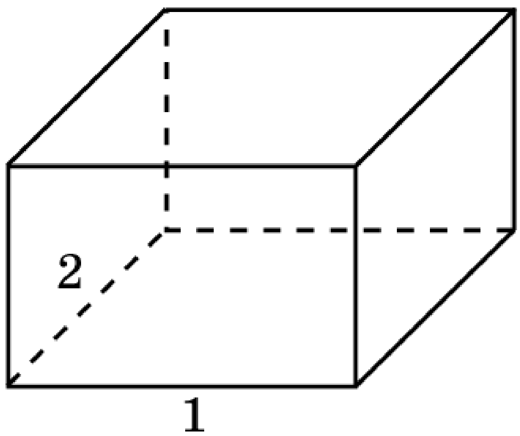



**Упражнения**

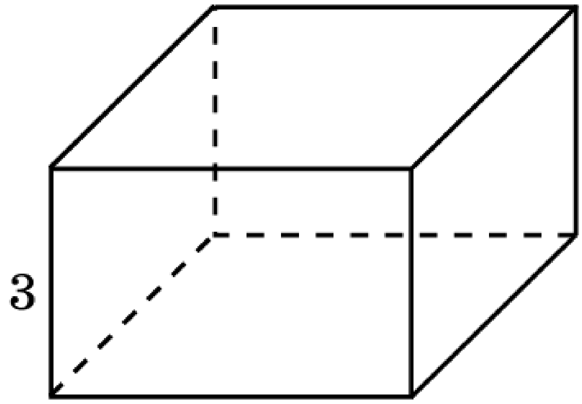
1. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



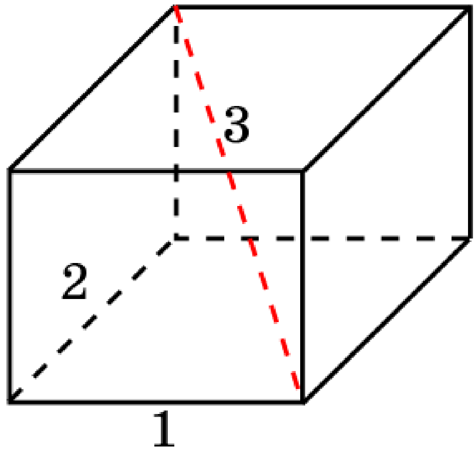

2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



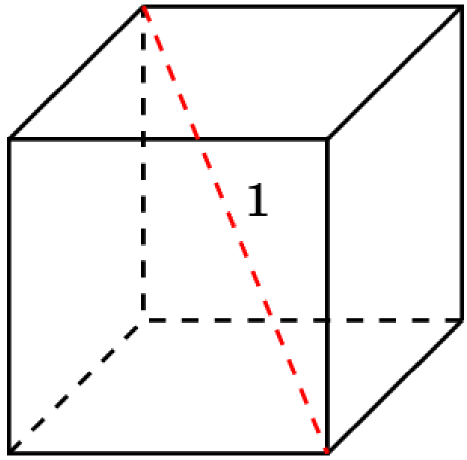
3. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



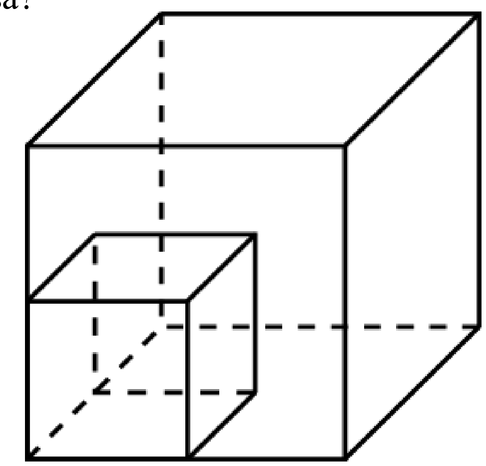

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



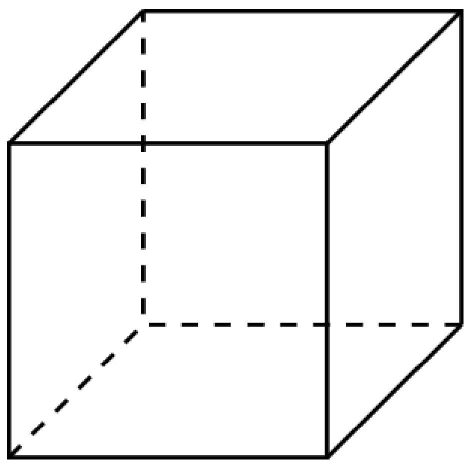

5. Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



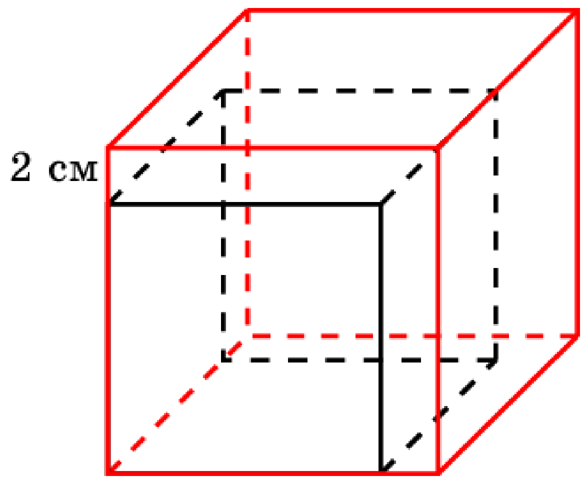
6. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в два раза?



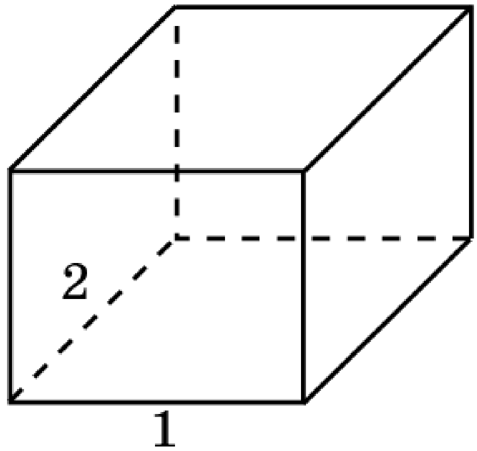
7. Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



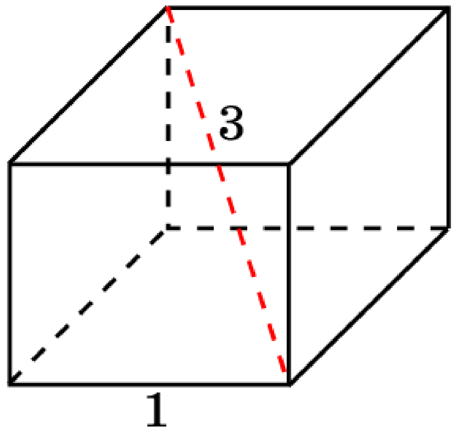
8. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 $см^2$. Найдите ребро куба.



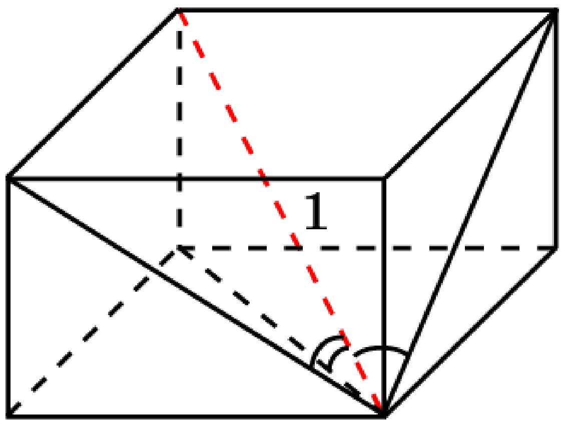
9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



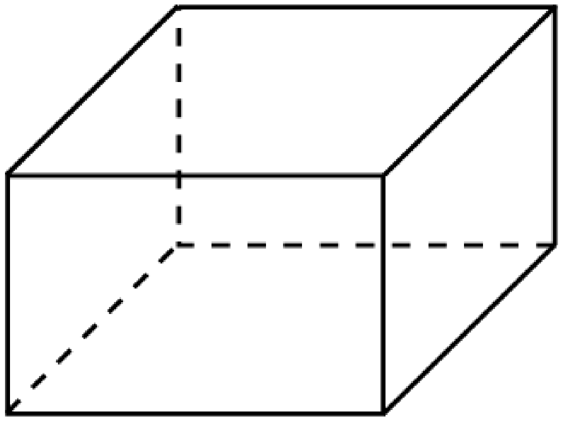

10. Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.



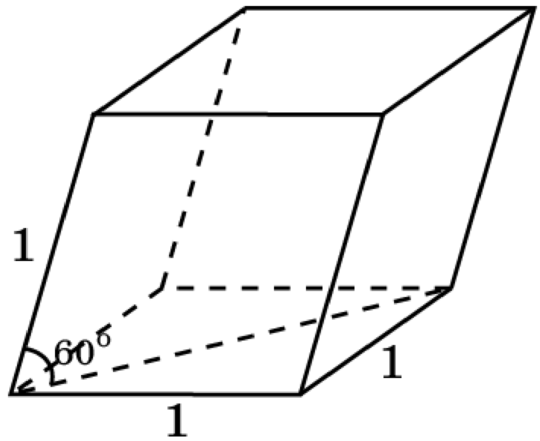

11. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы $30^{\circ}$, $30^{\circ}$ и $45^{\circ}$ с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



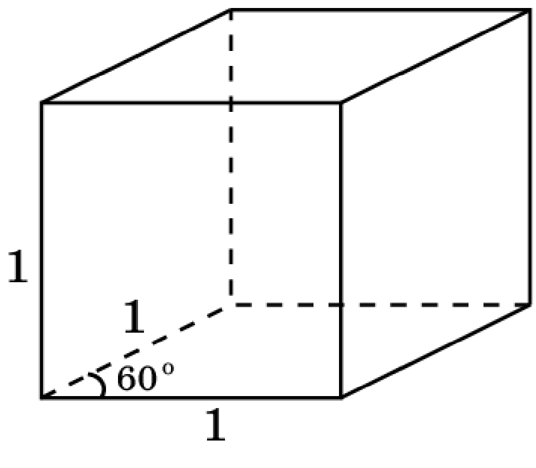
12. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



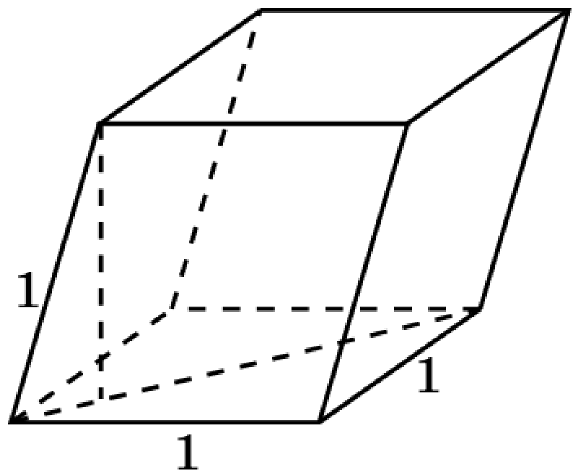
13. Две противоположные грани параллелепипеда – квадраты со стороной 1. Соединяющее их ребро равно 1 и наклонено к плоскостям этих граней под углом 60º. Найдите объем параллелепипеда.



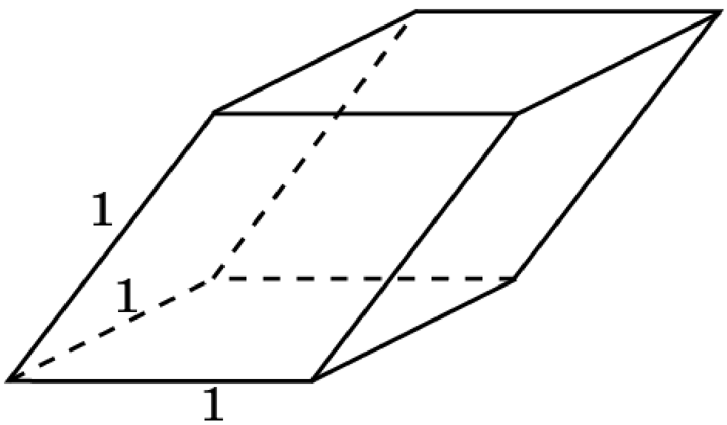

14. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60º. Одно из ребер параллелепипеда перпендикулярно этой грани и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



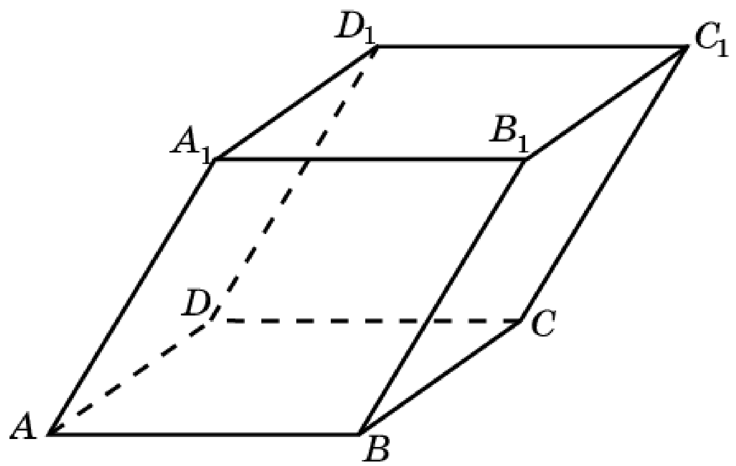
15. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



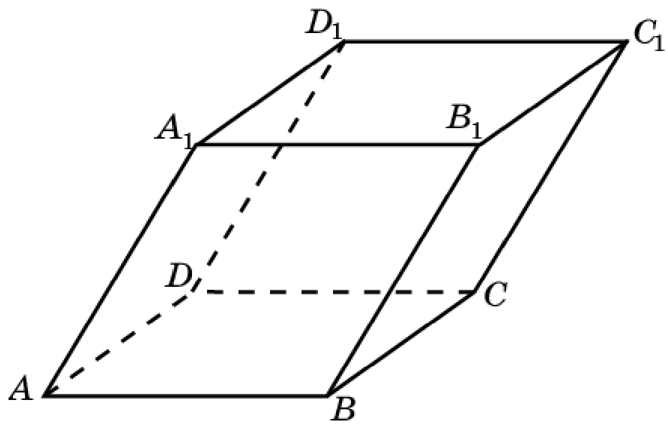

16. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 и острыми углами при этой вершине 60°. Найдите объем параллелепипеда.



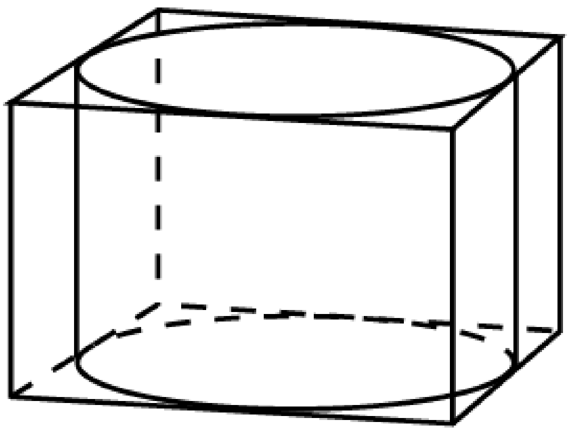

17. В параллелепипеде две грани имеют площади $S_1$ и $S_2$, их общее ребро равно $a$, и они образуют между собой двугранный угол $150^{\circ}$. Найдите объем параллелепипеда.



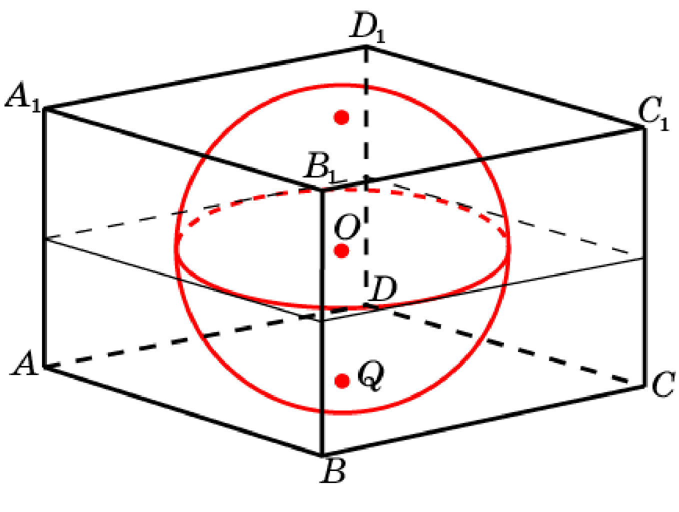
18. В параллелепипеде две грани являются прямоугольниками с площадями 20 см$^2$ и 24 см$^2$. Угол между их плоскостями равен 30$^o$. Еще одна грань этого параллелепипеда имеет площадь 15 см$^2$. Найдите объем параллелепипеда.



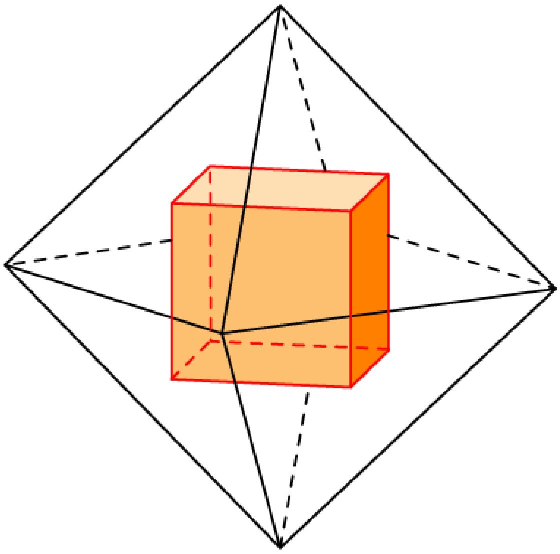

19. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



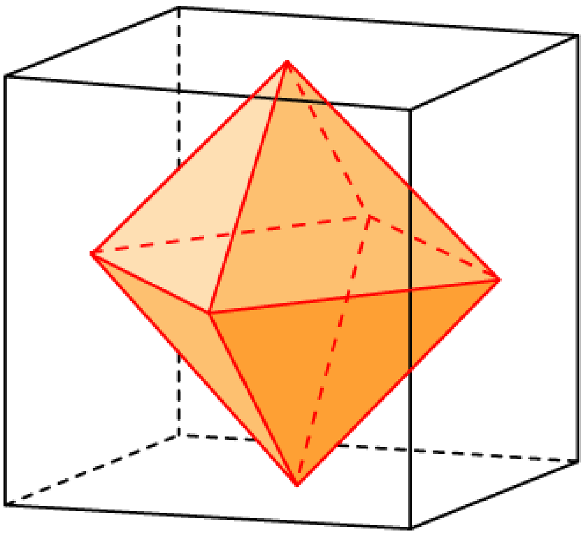
20. Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.



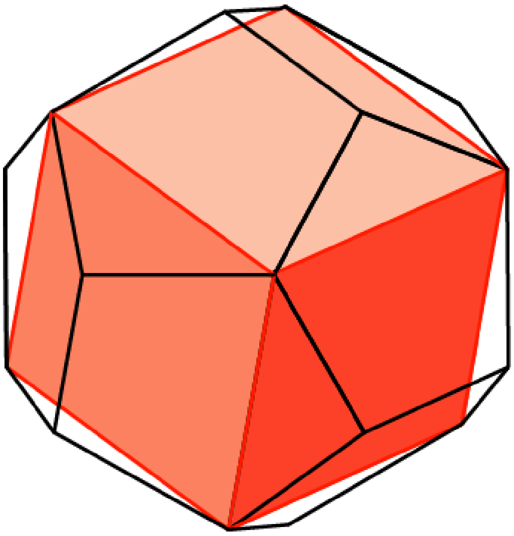
21. Найдите объем куба, вписанного в единичный октаэдр.



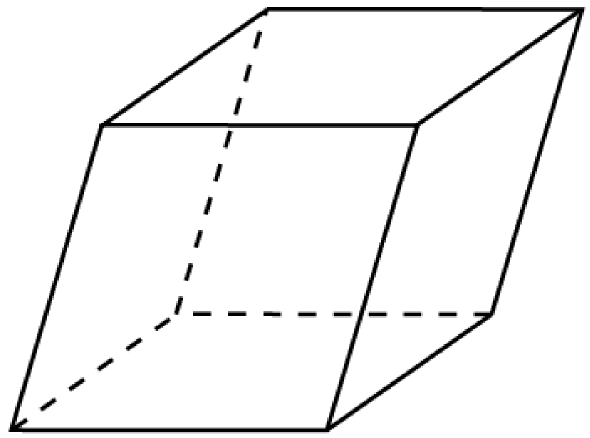
22. Найдите объем куба, описанного около единичного октаэдра.



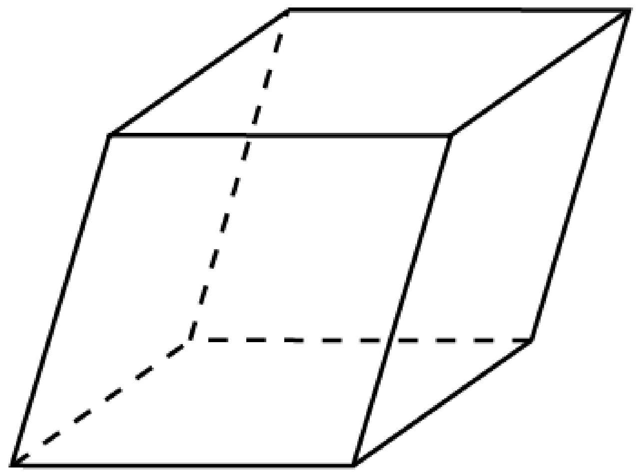
23. Найдите объем куба, вписанного в единичный додекаэдр.



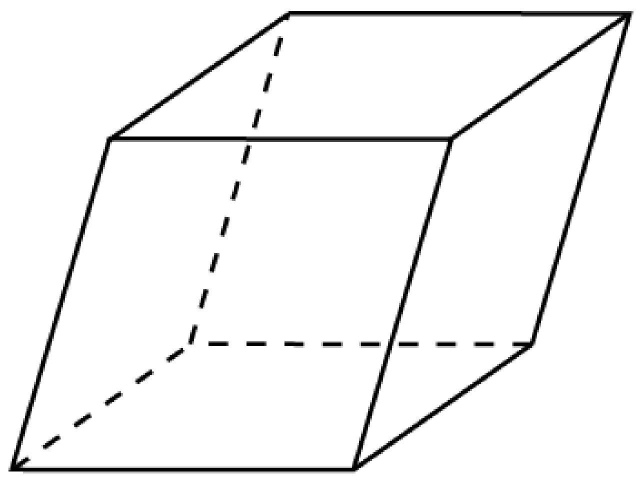
24. Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть меньше 1, а объем параллелепипеда быть больше 100?



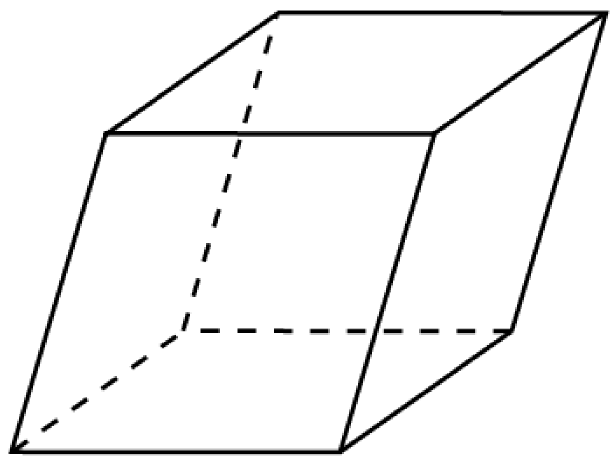
25. Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть больше 100, а объем параллелепипеда быть меньше 1?



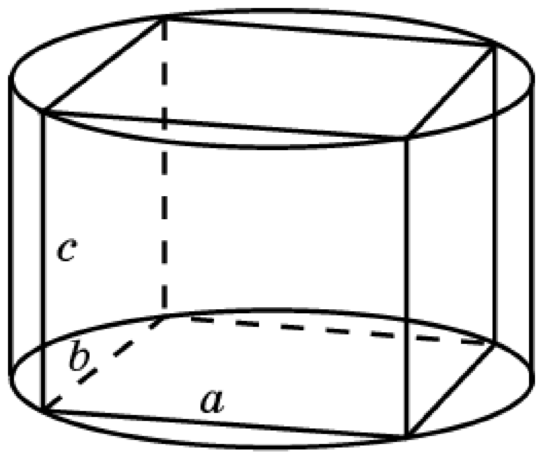
26. Сколько имеется плоскостей, делящих параллелепипед на две равновеликие части?



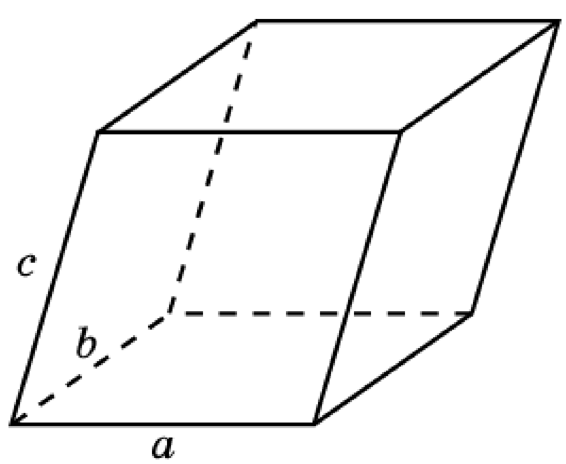
27. Четыре грани параллелепипеда – прямоугольники со сторонами 1 и 2. Какой наибольший объем может иметь этот параллелепипед?



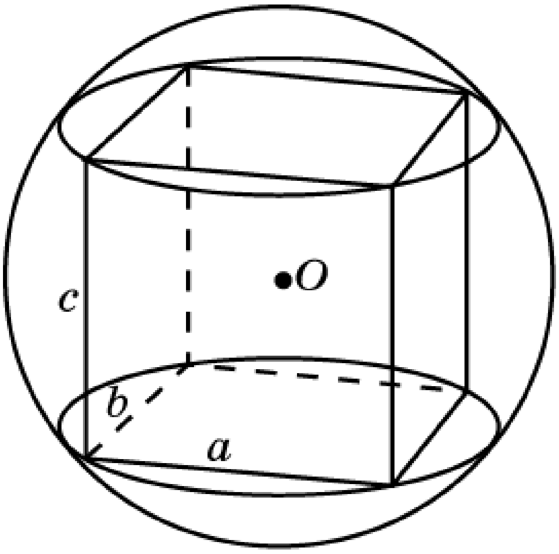
28. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, вписанный в прямой цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1?




29. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?



30. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, вписанный в сферу радиуса 1?

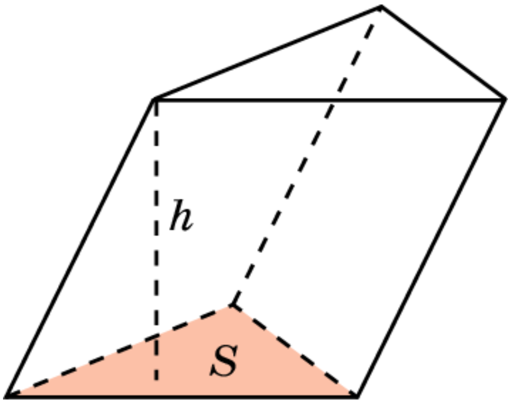


## II. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

Напомним, что объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

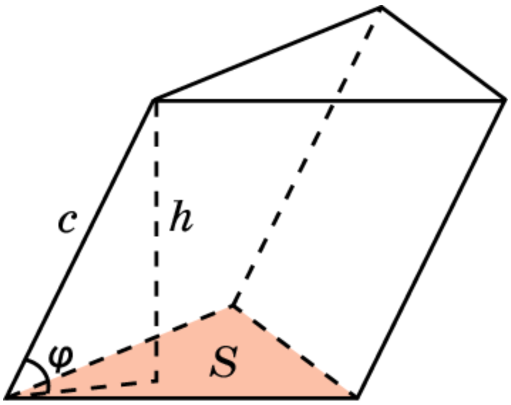
где $S$ – площадь основания призмы, $h$ – ее высота.




Если боковое ребро призмы равно $c$ и наклонено к плоскости основания под углом $\varphi$, то объем призмы вычисляется по формуле

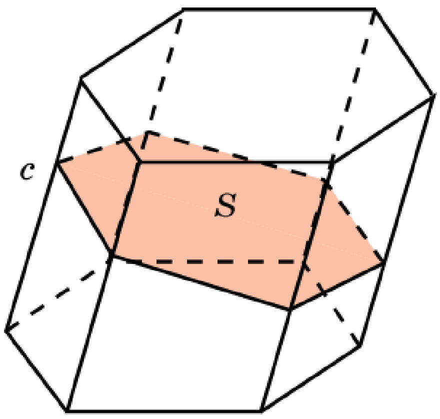
$$V = S \cdot c \cdot \sin\varphi,$$

где $S$ – площадь основания призмы.



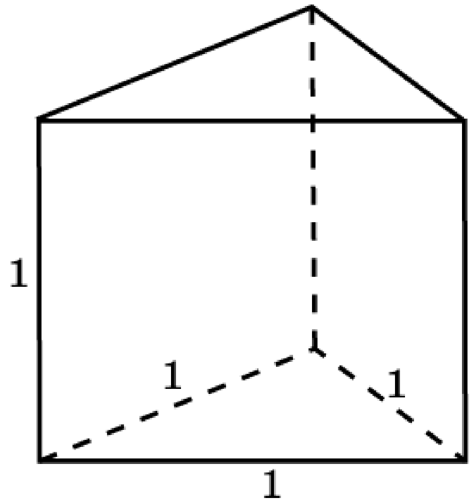

Если боковое ребро призмы равно $c$, а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади $S$, то объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c.$$

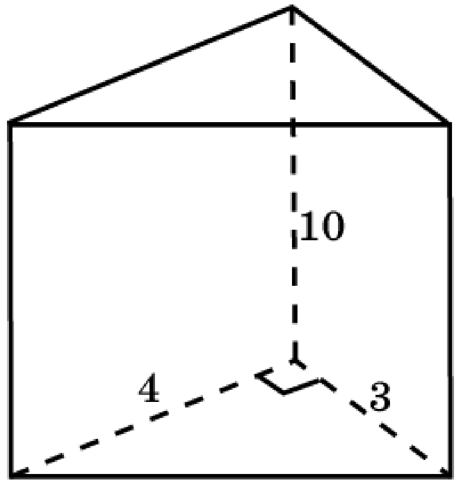


## Упражнения

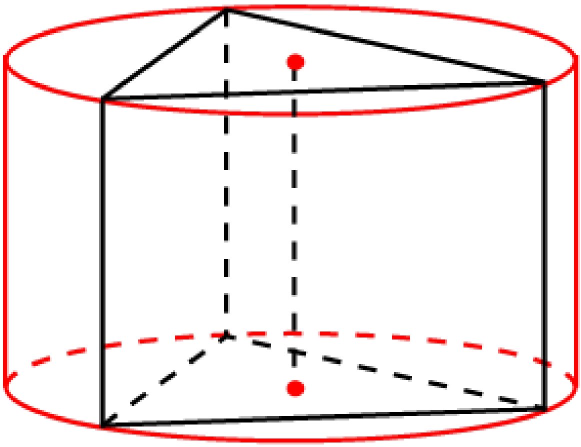
1. Найдите объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



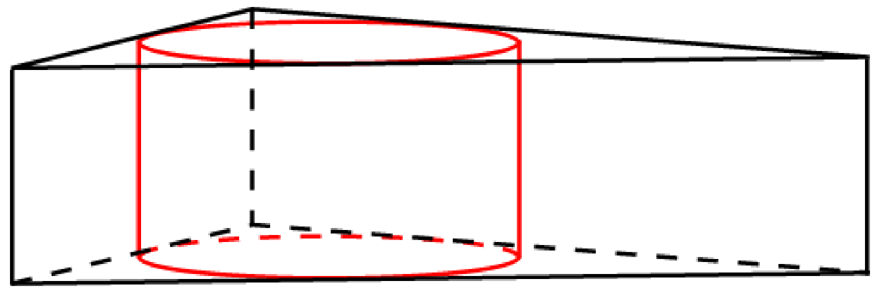

2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, боковое ребро равно 10. Найдите объем призмы.



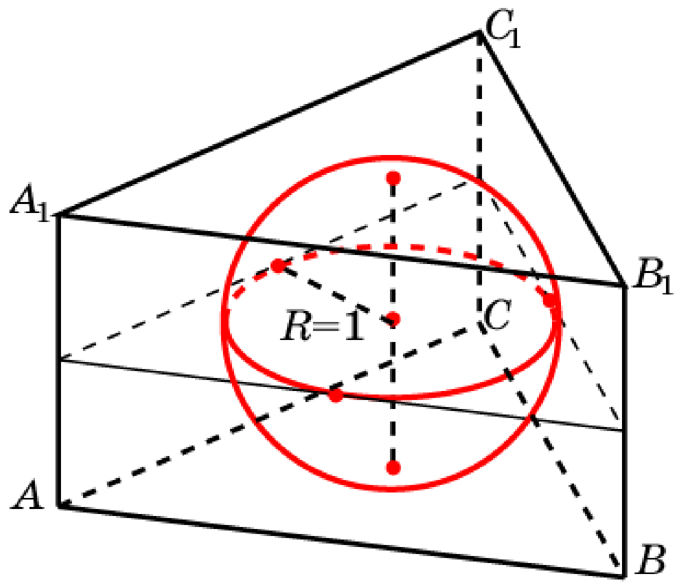

3. Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.



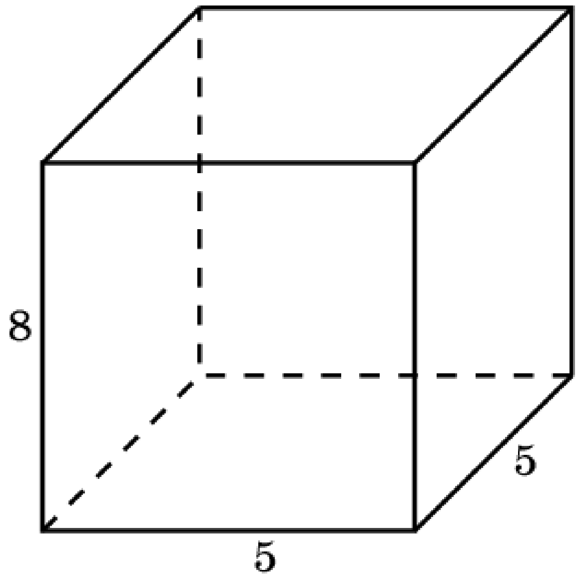
4. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.



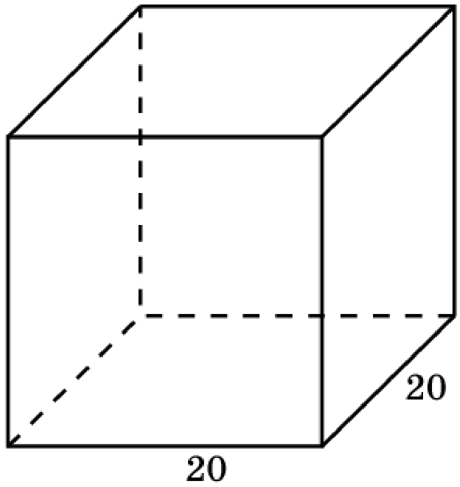
5. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около единичной сферы.



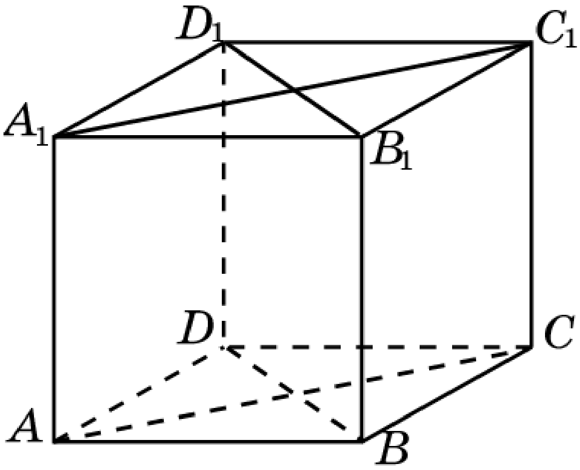

6. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а боковое ребро 8 см.



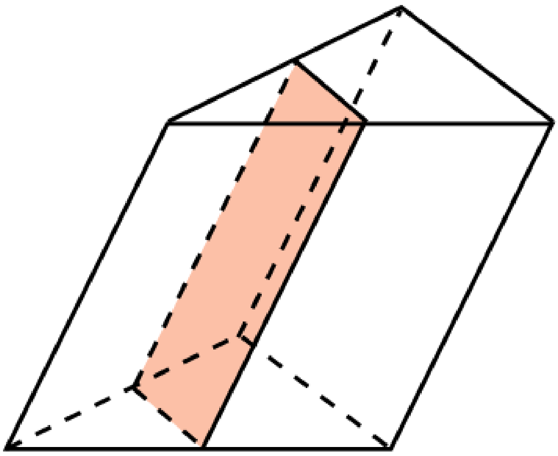
7. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см, а объем 4800 см$^2$.



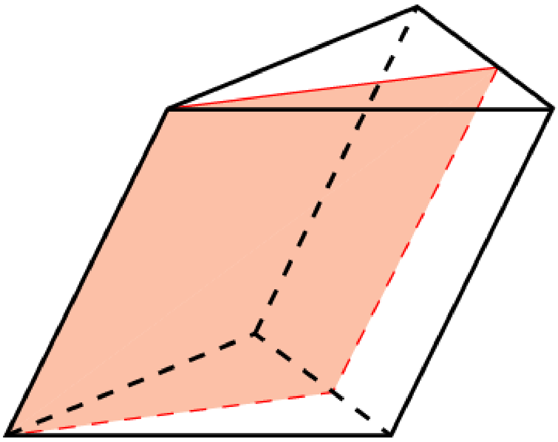

8. Основание прямой призмы – ромб, площадь которого равна 1 м$^2$. Площади диагональных сечений равны 3 м$^2$ и 6 м$^2$. Найдите объем призмы.



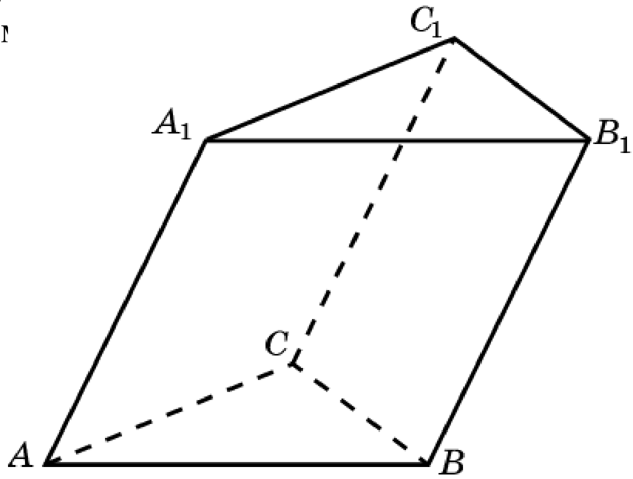

9. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



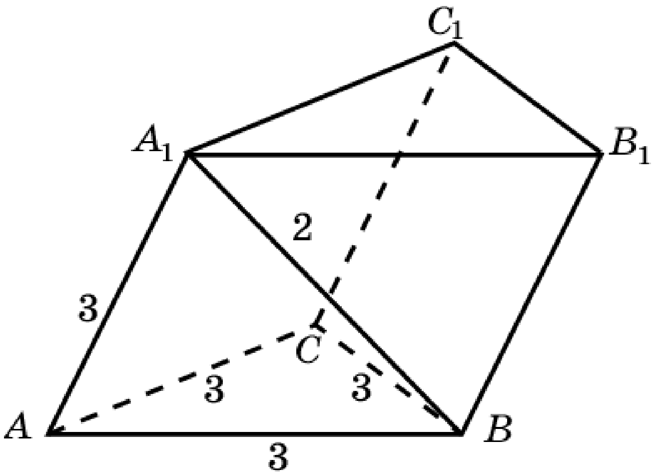
10. Треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противолежащей ему боковой грани в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



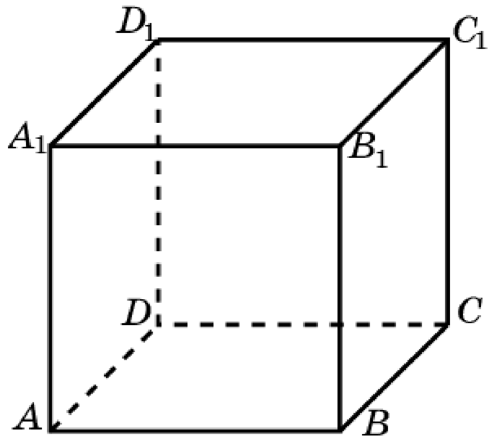
11. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна $Q$, а расстояние от нее до противоположного ребра равно $d$. Найдите объем



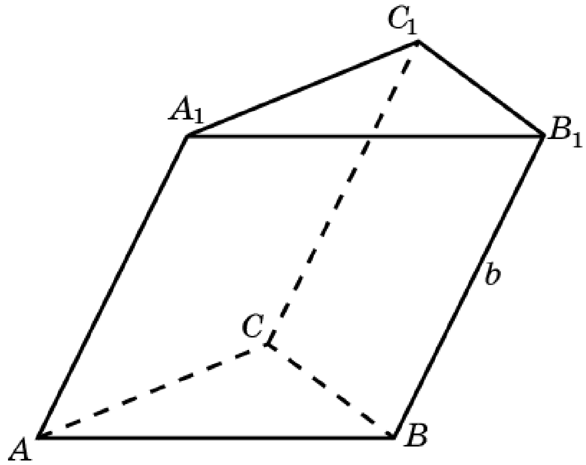

12. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.



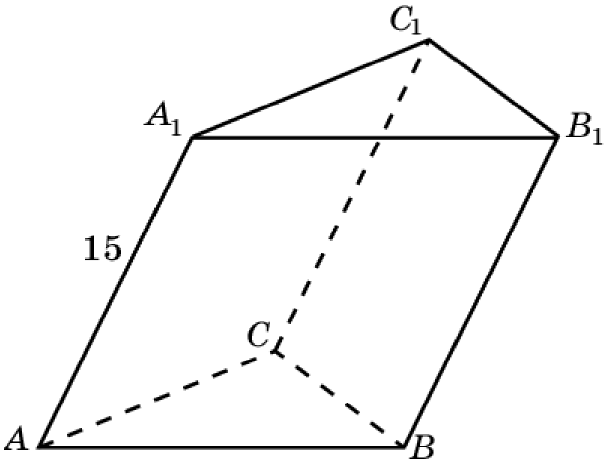
13. От единичного куба $A…D_1$ отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$, параллельно ребру $AA_1$. Найдите объем оставшейся части.



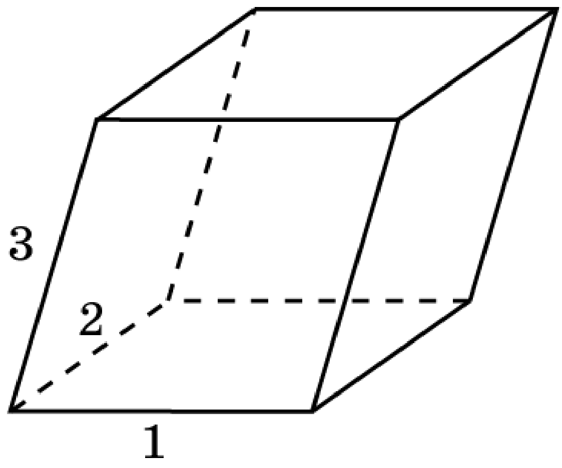

14. В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное $b$. Площади этих граней равны $S_1$ и $S_2$. Найдите объем призмы.



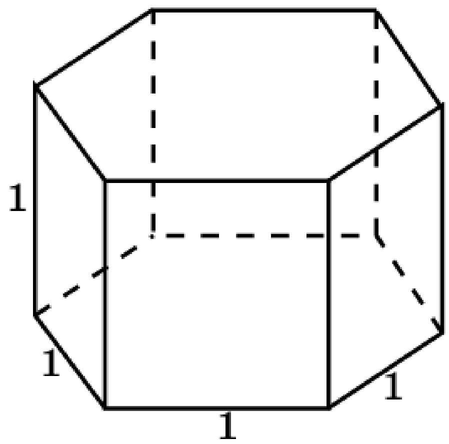

15. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.



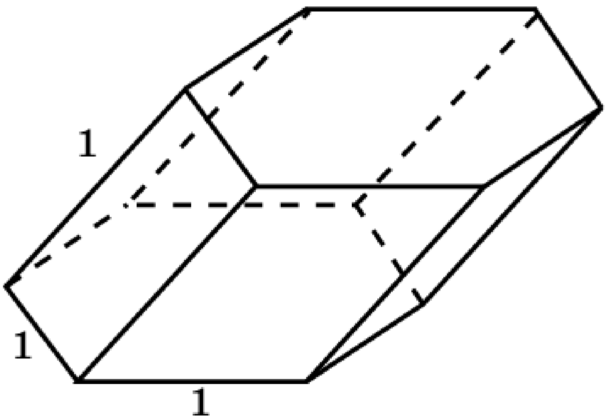
16. Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 1, 2 и острым углом 30°. Боковые ребра равны 3 и составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.



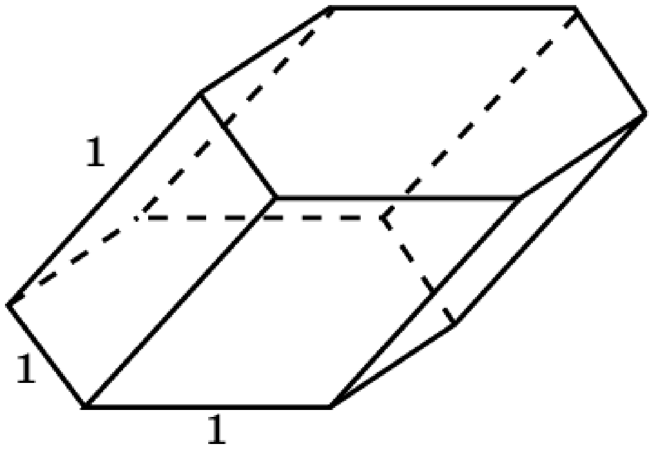

17. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.



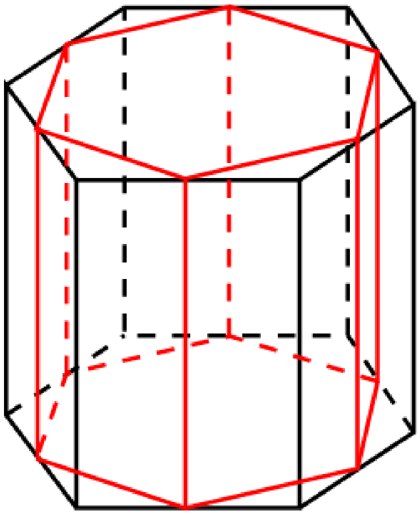

18. Найдите объем призмы, в основании которой лежит правильный шестиугольник, все ее ребра равны 1, и боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30°.



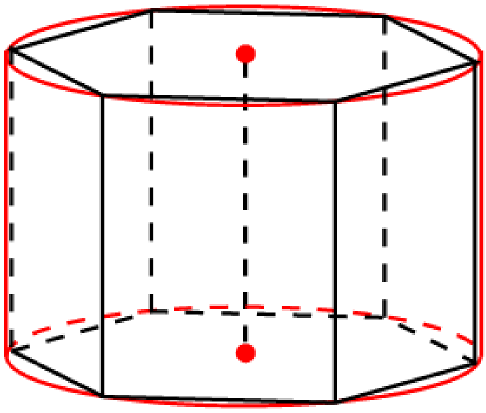
19. В основании призмы лежит правильный шестиугольник. Все ее ребра равны 1. Одна из боковых граней является прямоугольником и наклонена к плоскости основания под углом $30^{o}$. Найдите объем призмы.



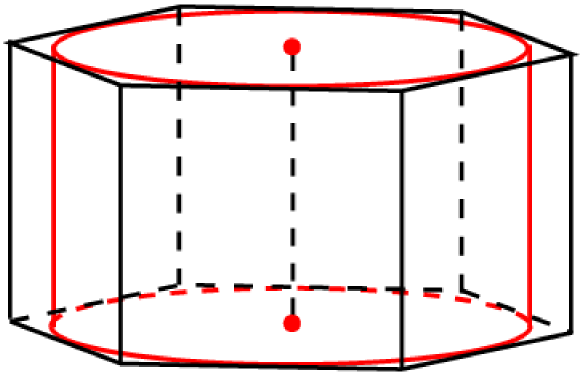

20. Объем правильной шестиугольной призмы равен *V*. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.



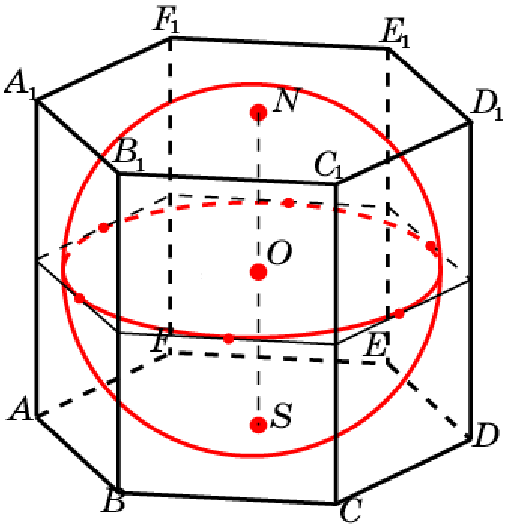
21. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.



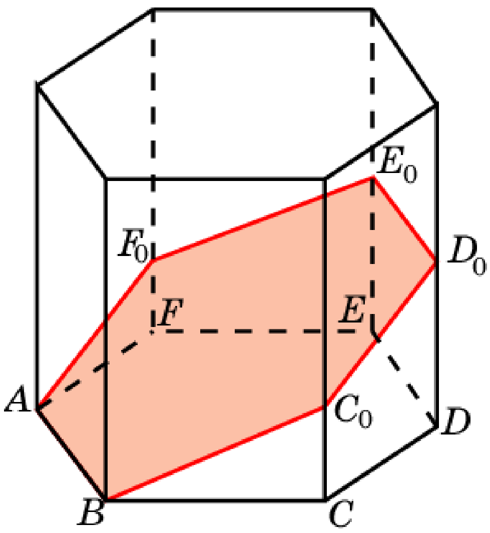
22. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.



23. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около единичной сферы.



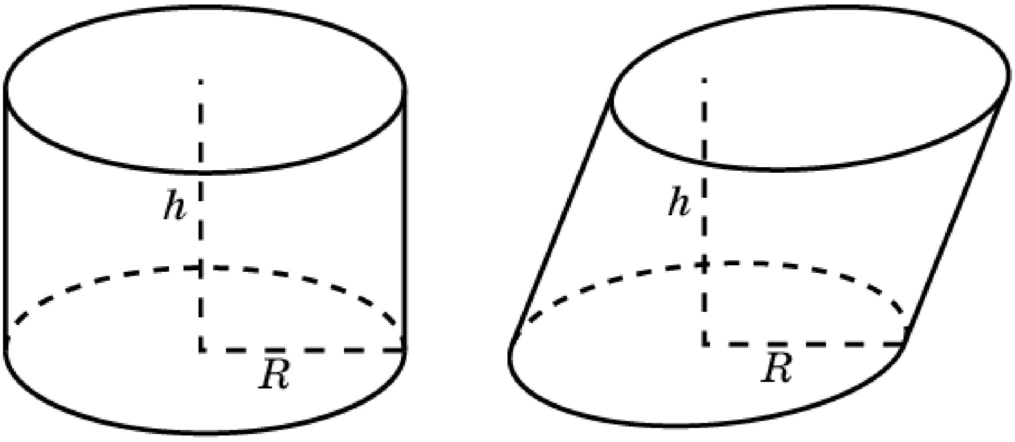

24. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 1, боковое ребро – 2. Через сторону основания проведено сечение плоскостью под углом 30° к этому основанию. Найдите объем части призмы, отсекаемой этой плоскостью.



## III. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

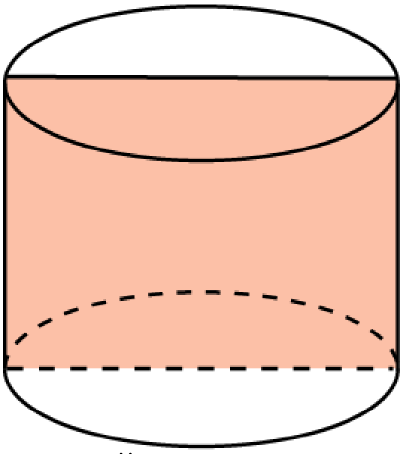
Объем цилиндра, высота которого равна $h$ и радиус основания $R$, вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

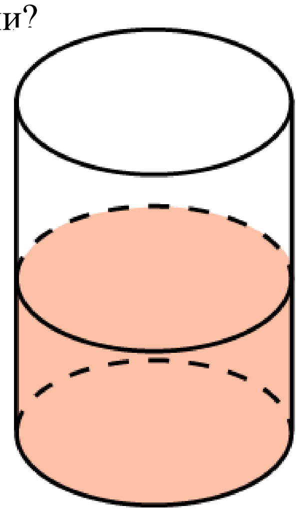



### Упражнения

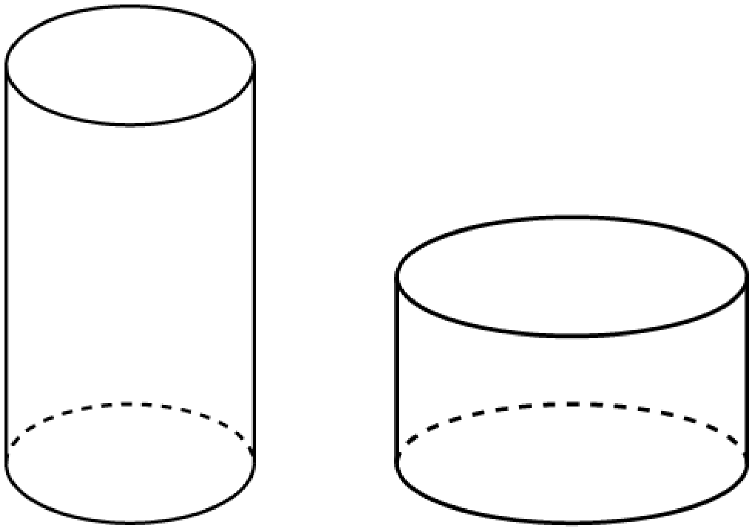
1. Осевое сечение цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.



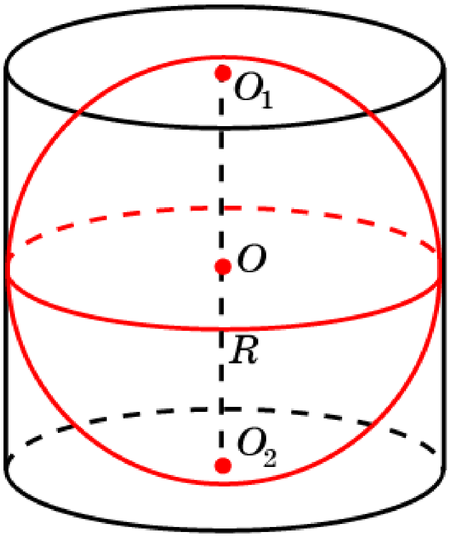
2. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?



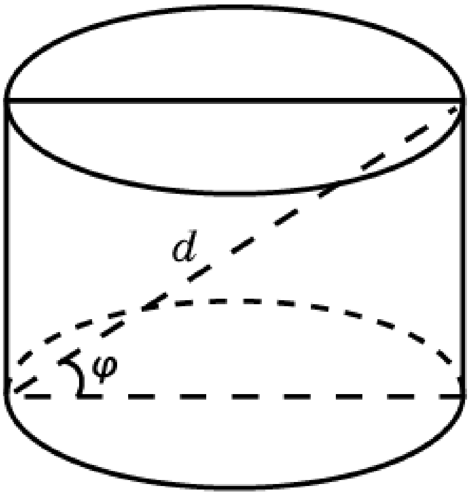
3. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?



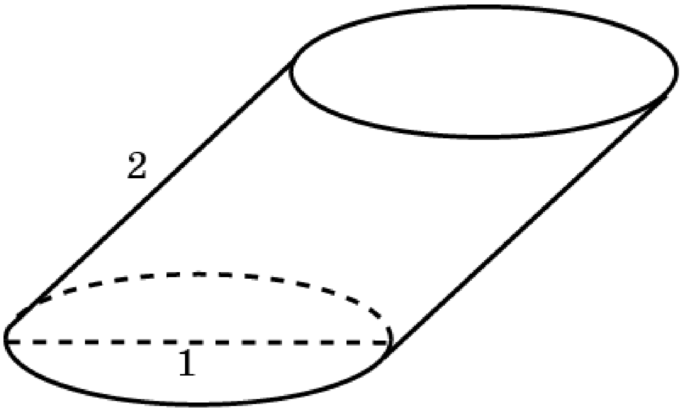
4. Найдите объем цилиндра, описанного около единичной сферы.




5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $d$ и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.

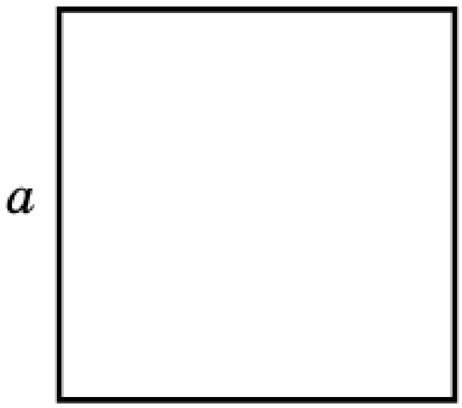


6. Диаметр основания цилиндра равен 1. Образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом $60^{\circ}$. Найдите объем цилиндра.

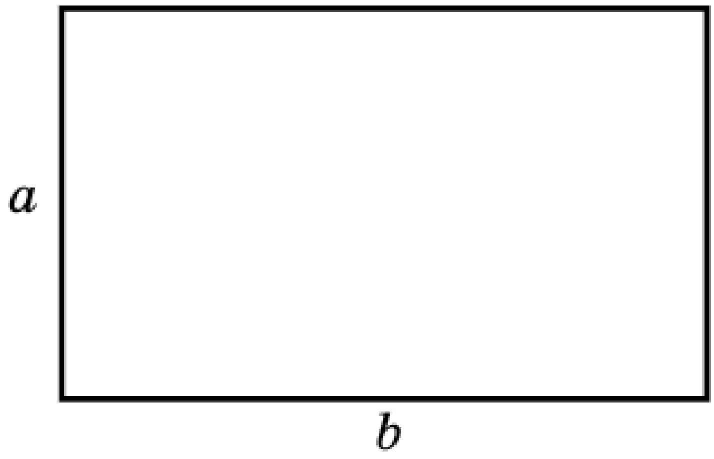



7. Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найдите объем цилиндра.

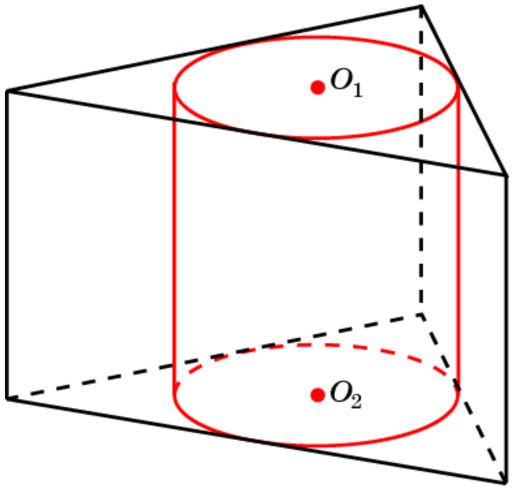

8. Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной $a$.



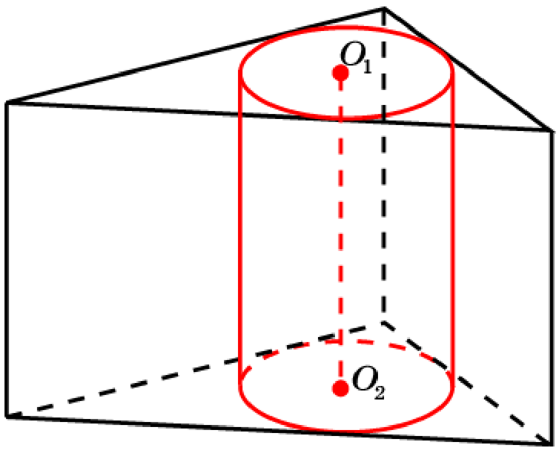
9. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон $a$ и $b$. Как относятся объемы цилиндров?



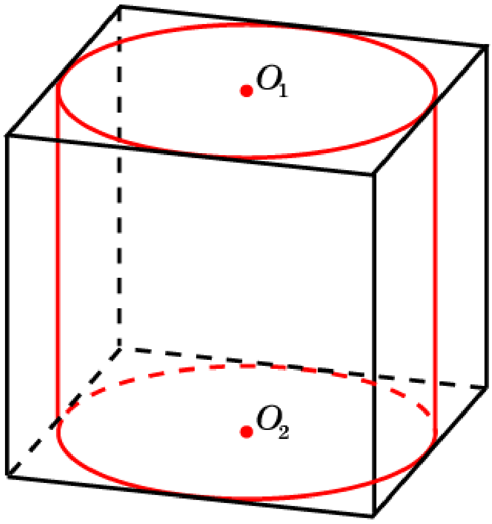

10. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем цилиндра.



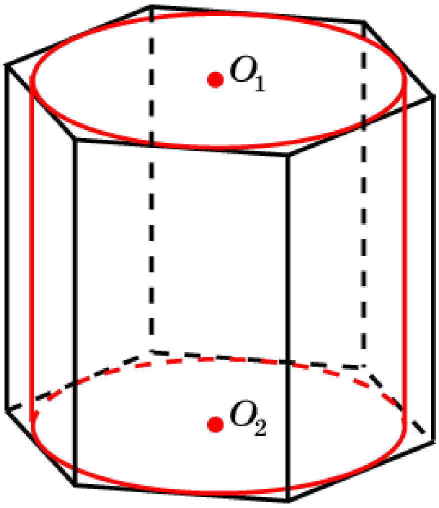

11. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра призмы равны 1. Найдите объем цилиндра.



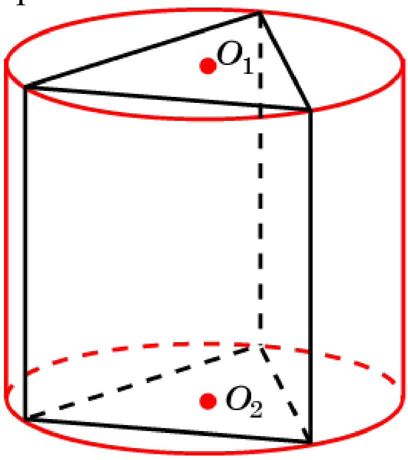
12. Найдите объем цилиндра, вписанного в единичный куб.



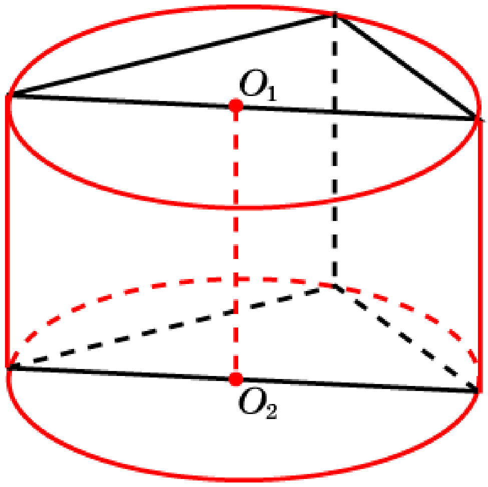

13. В правильную шестиугольную призму со стороной основания 1 и боковым ребром 2 вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.



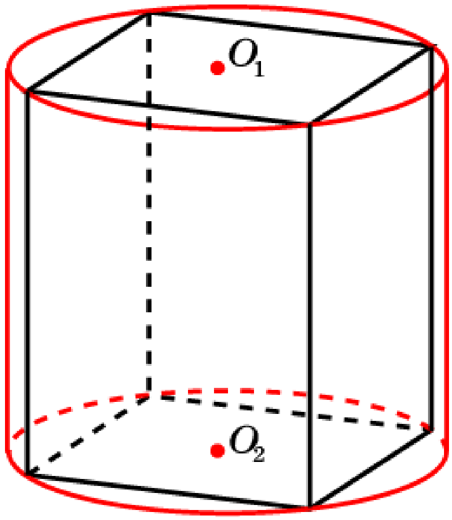

14. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра равны 3. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



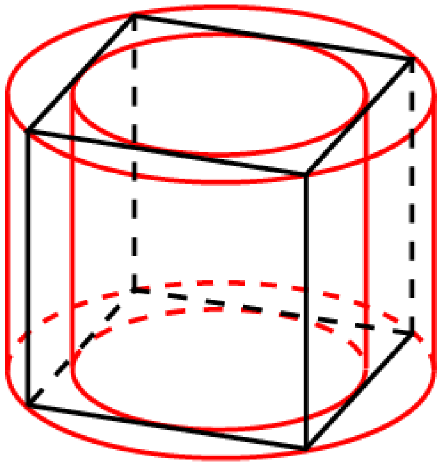
15. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 5. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



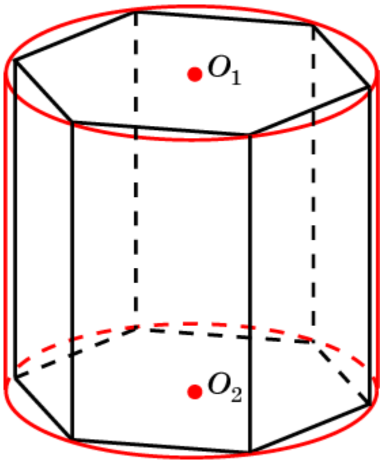

16. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Боковые ребра равны 2. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



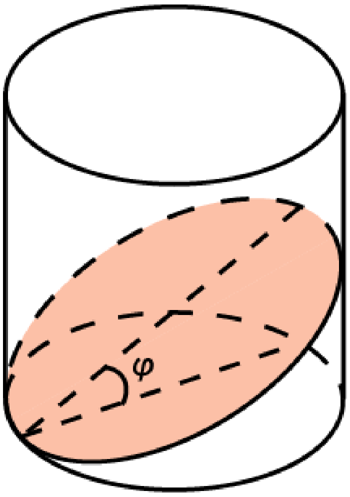

17. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?



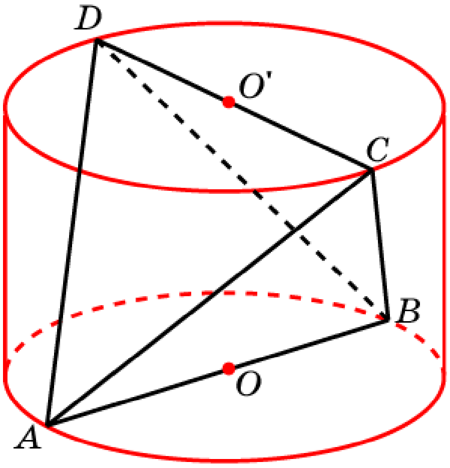
18. Около правильной шестиугольной призмы со стороной основания 1 описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем этого цилиндра.



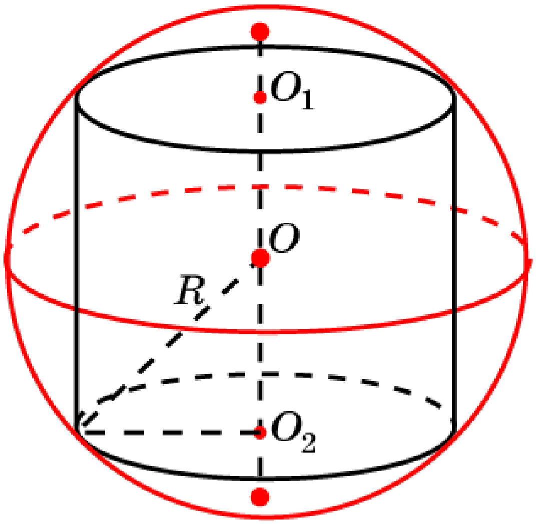

19. Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен $R$. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.



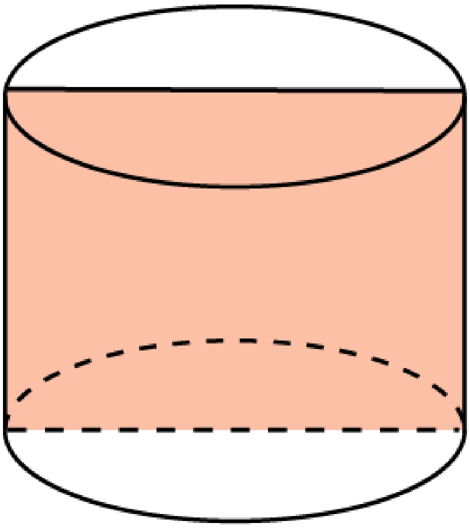

20. Найдите объем цилиндра, зная, что скрещивающиеся ребра правильного единичного тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра.



21. Какой наибольший объем может иметь цилиндр, вписанный в единичную сферу?

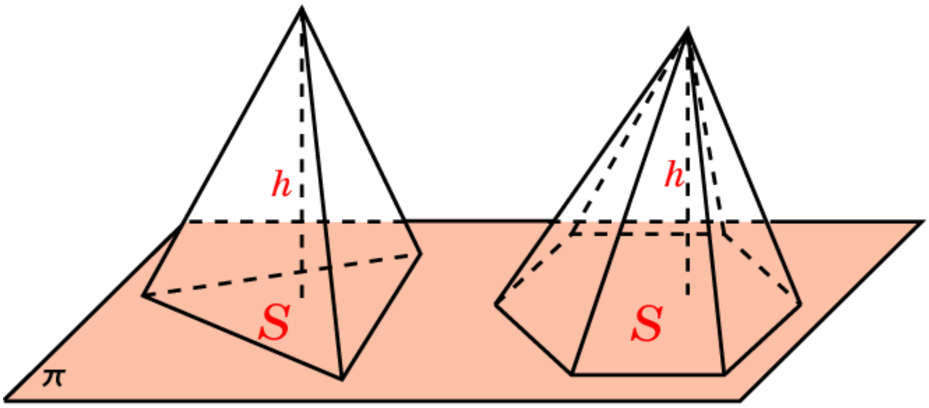



22. Какой наибольший объем может иметь цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 1?



# IV. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

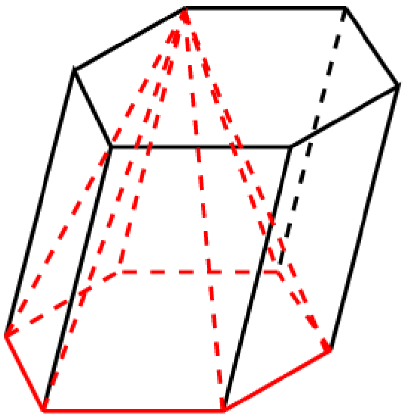
Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.



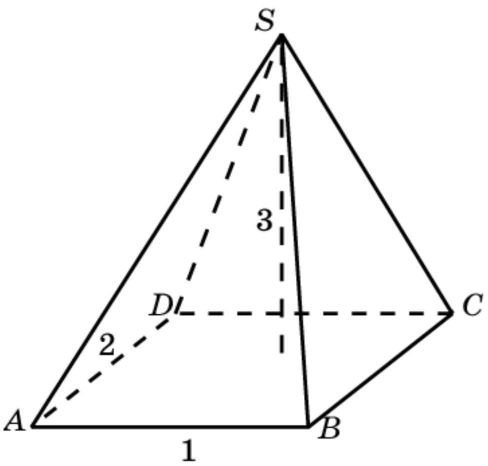

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S \cdot h}$$

## Упражнения

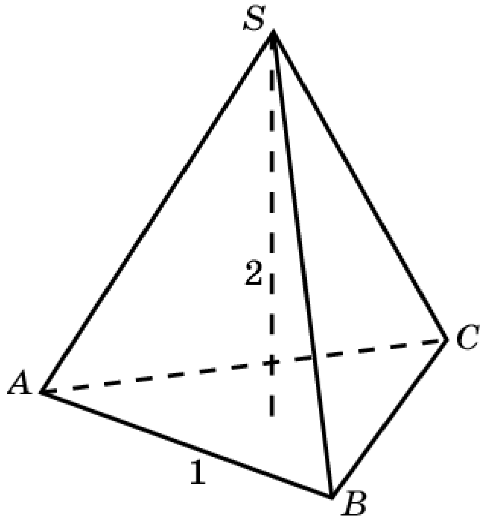
1. Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?



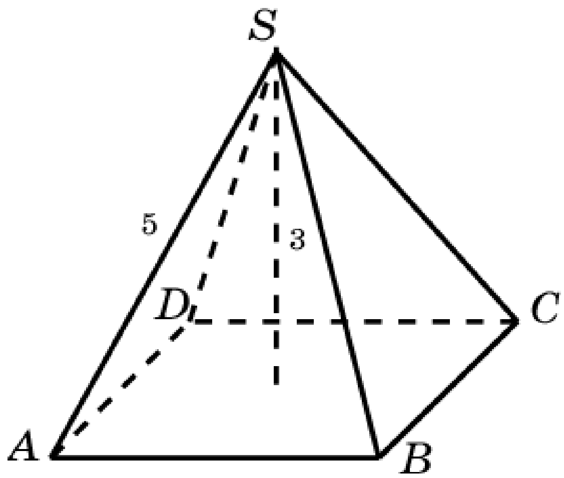
2. Найдите объем пирамиды, высота которой 3, а в основании - прямоугольник со сторонами 1 и 2.



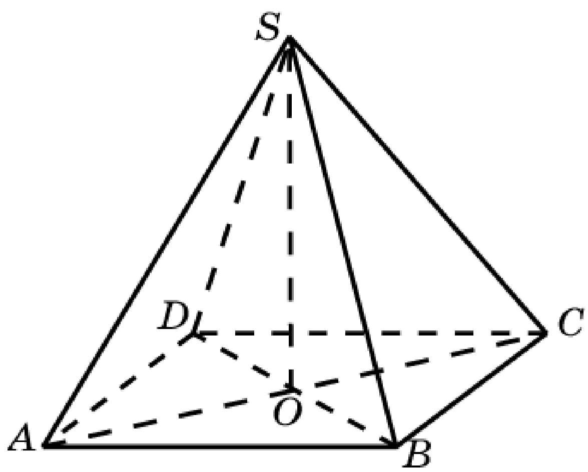
3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, высота – 2.



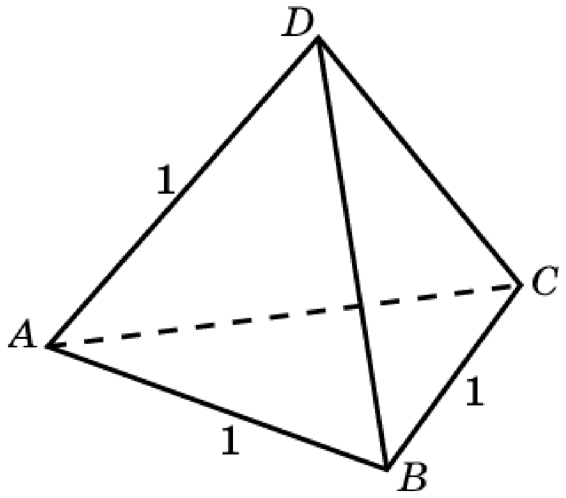

4. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.



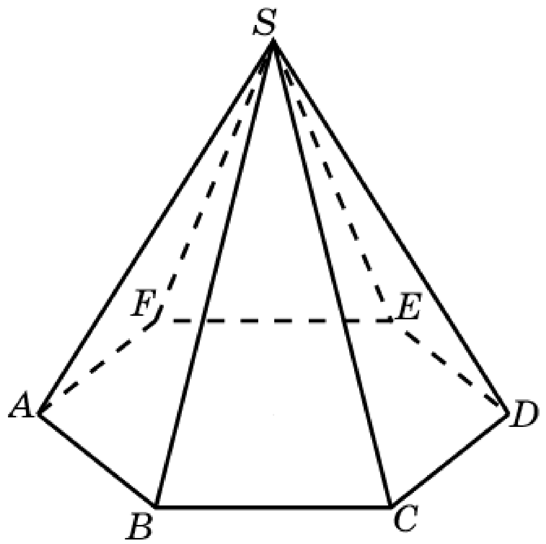

5. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.



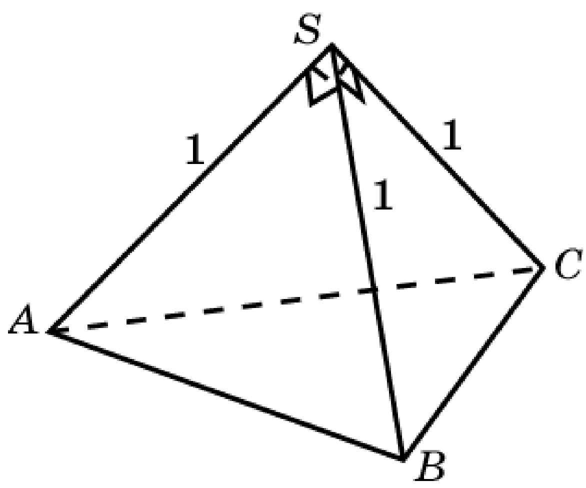
6. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром, равным 1.



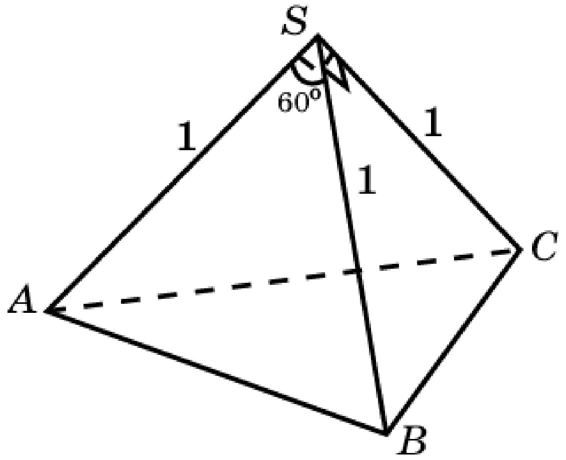

7. Объем правильной шестиугольной пирамиды равен 6 см$^3$. Сторона основания равна 1 см. Найдите боковое ребро.



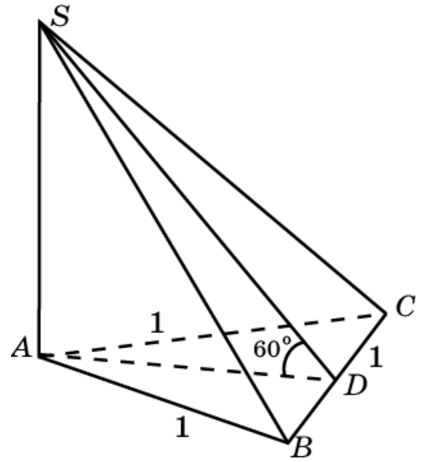

8. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1. Найдите объем пирамиды.



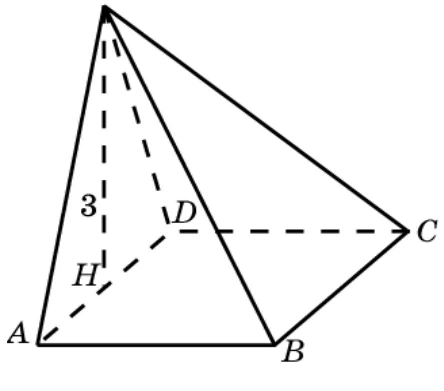
9. Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна 1, а плоские углы при вершине равны 60°, 90° и 90°.



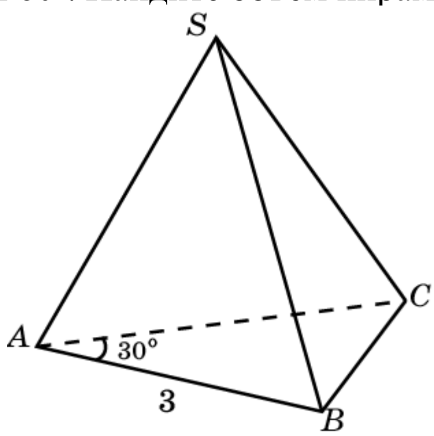

10. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60°. Найдите объем пирамиды.



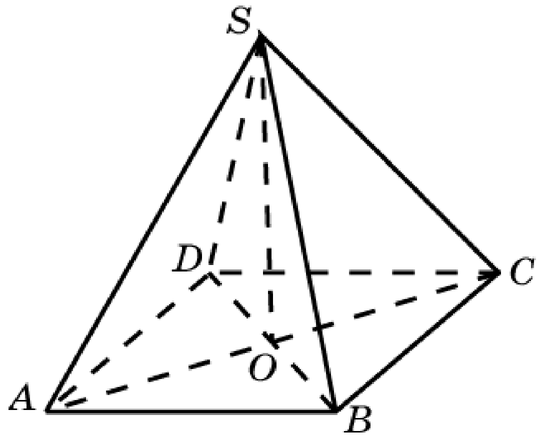

11. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 3. Найдите объем пирамиды.



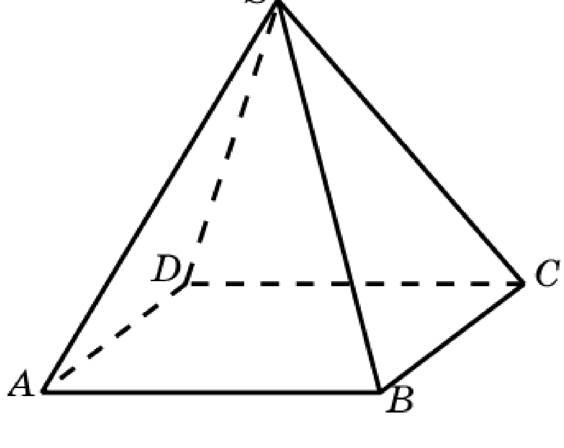
12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен $30^{o}$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60^{o}$. Найдите объем пирамиды.



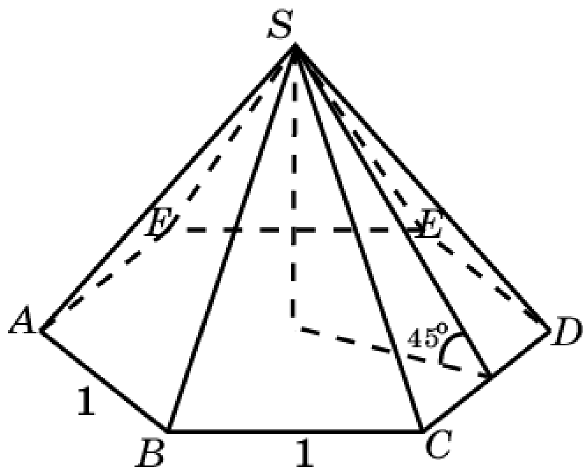

13. Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом $30^{o}$. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.



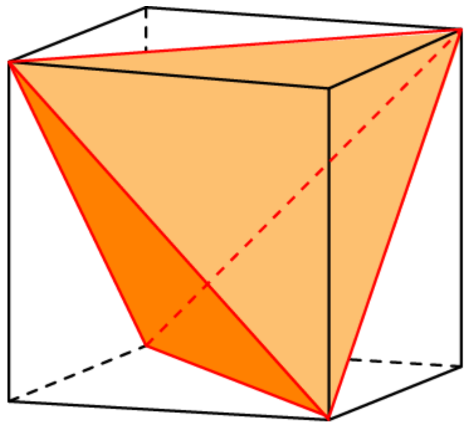

14. Пирамида, объем которой равен 1, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.



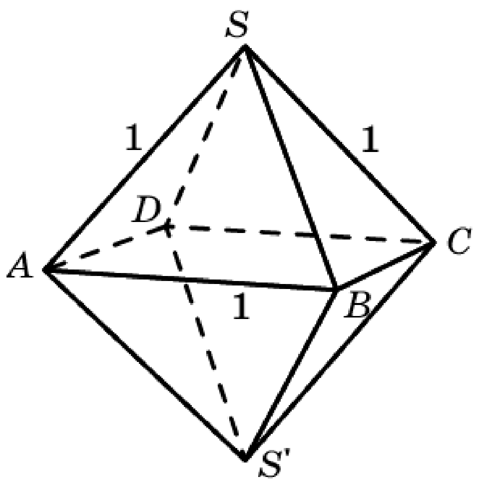
15. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 1, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



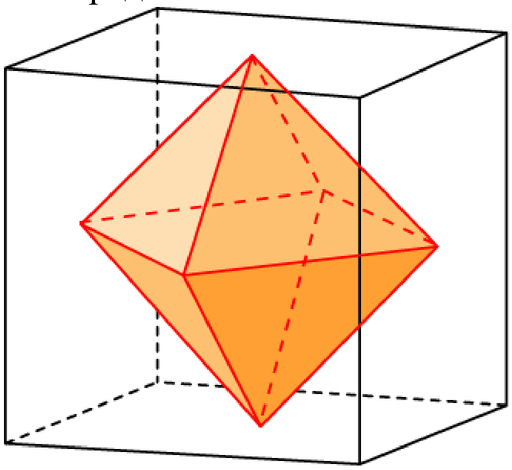

16. В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.



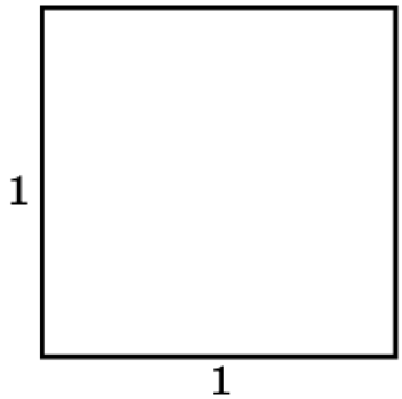
17. Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.



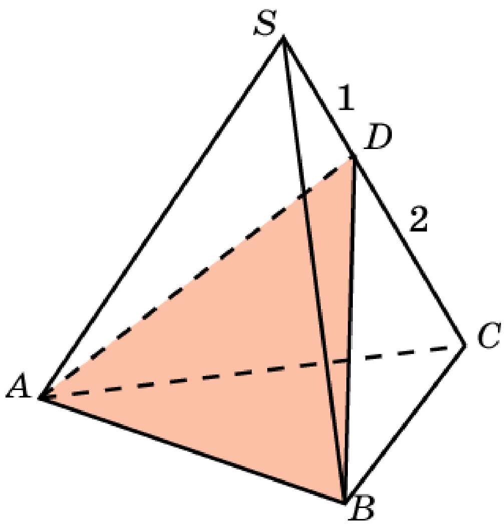
18. Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.



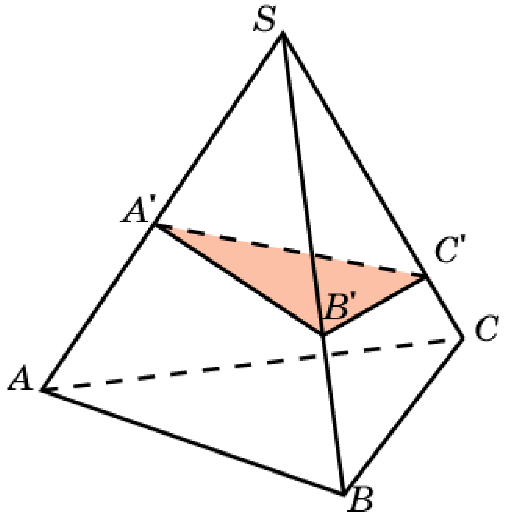
19. Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 1. Найдите объем этой пирамиды.



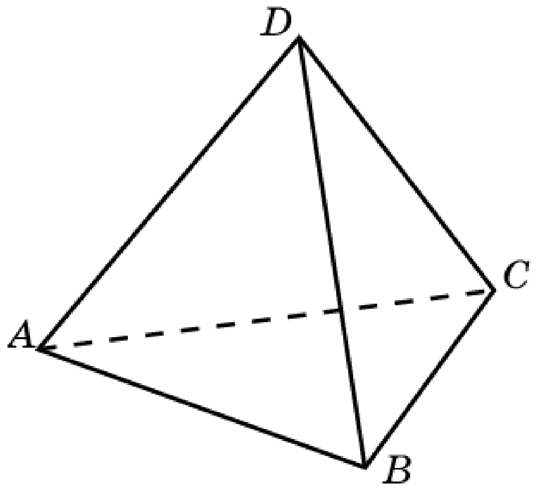

20. Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении 1 : 2, считая от вершины. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?



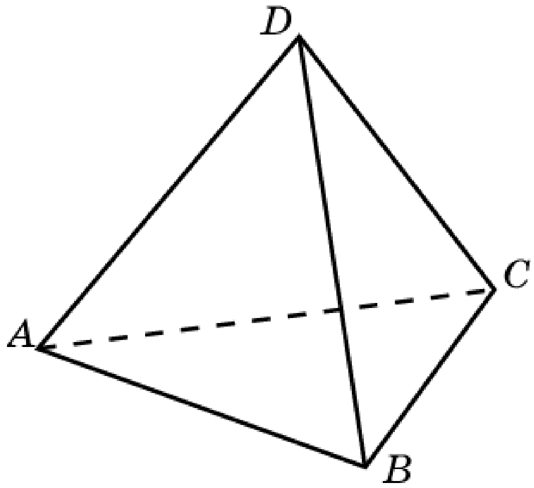
21. Плоскость пересекает ребра *SA, SB, SC* треугольной пирамиды *SABC* в точках *A’, B’, C’* соответственно. Найдите объем пирамиды *SA’B’C’*, если объем исходной пирамиды равен 1 и *SA’* : *SA* = 1 : 2, *SB’* : *SB* = 2 : 3, *SC’* : *SC* = 3 : 4.



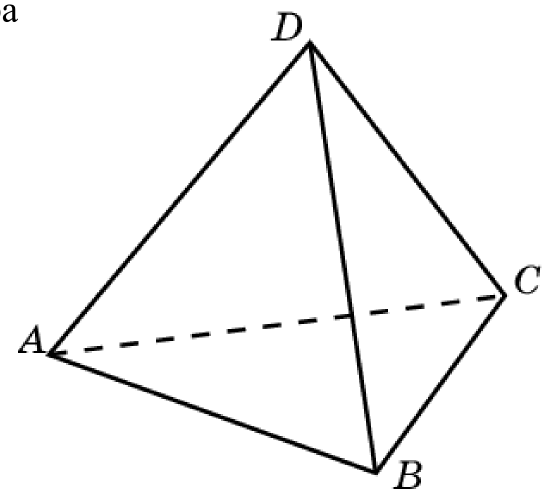

22. Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.



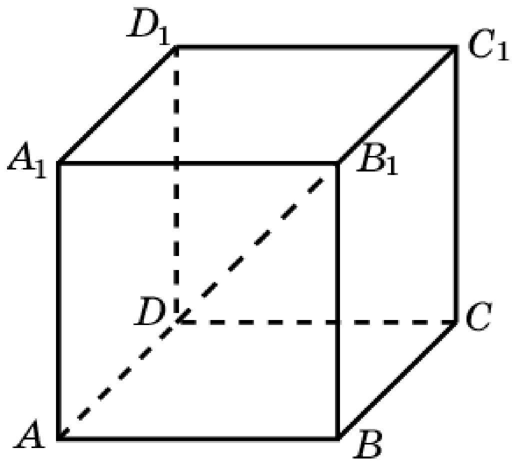

23. Два противоположных ребра тетраэдра образуют угол $60^{\circ}$ и равны 2. Расстояние между ними равно 3. Найдите объем тетраэдра.



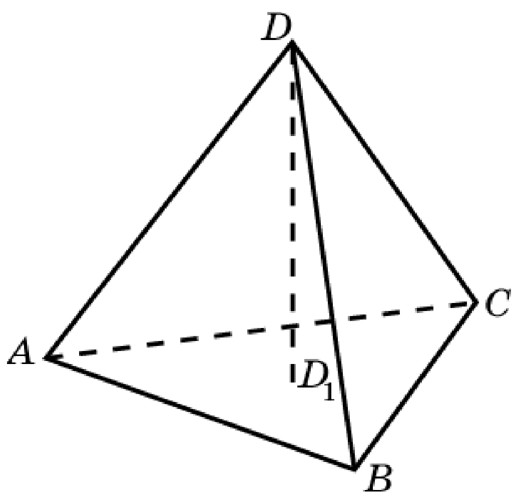
24. Одно ребро тетраэдра равно 6. Все остальные ребра равны 4. Найдите объем тетра



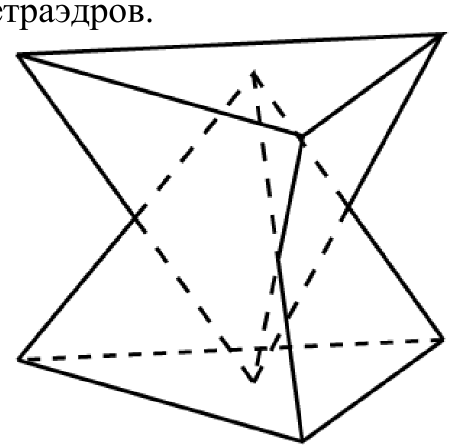

25. Куб $A \ldots D_1$ с ребром $a$ повернут вокруг диагонали $DB_1$ на угол 60°. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.



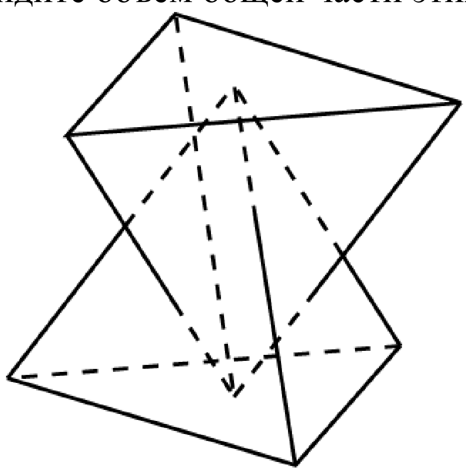

26. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $a$ повернут на 60° вокруг высоты $DD_1$. Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.



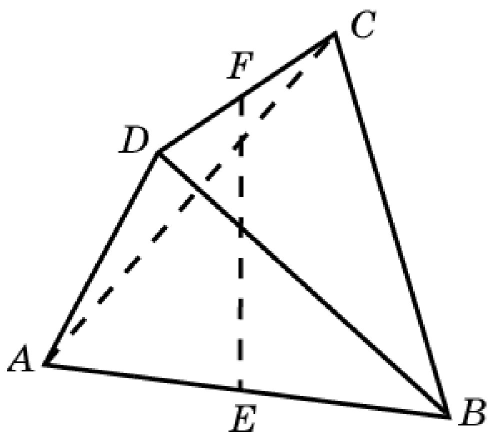
27. Два правильных тетраэдра с ребрами $a$ имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



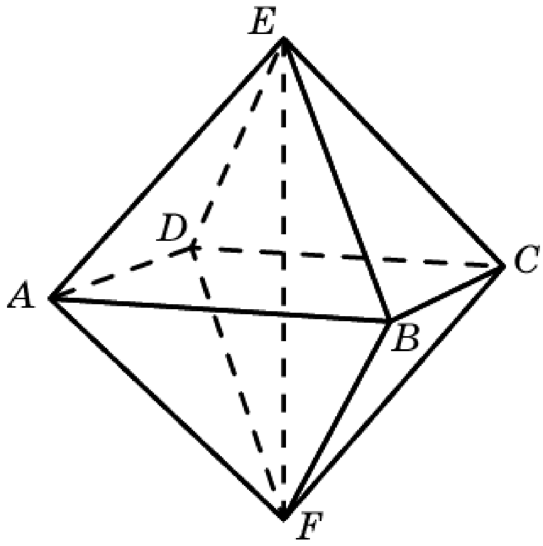
28. Два правильных тетраэдра с ребрами $a$ имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



29. Правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром $a$ повернут на 90° вокруг прямой $EF$, соединяющего середины двух противоположных ребер. Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.

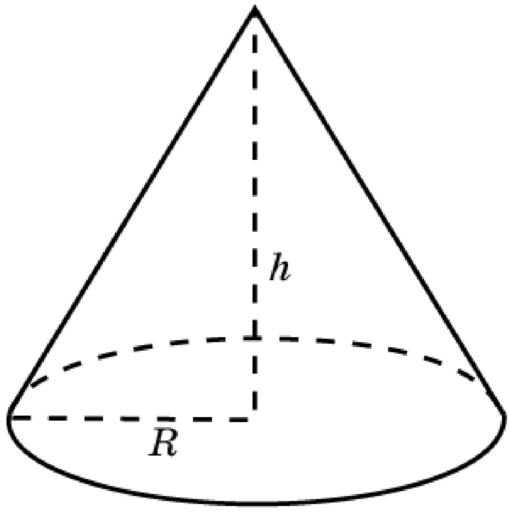


30. Октаэдр с ребром 1 повернут вокруг прямой $EF$, соединяющей противоположные вершины, на угол $45^{\circ}$. Найдите объем общей части исходного октаэдра и повернутого?



## V. ОБЪЕМ КОНУСА

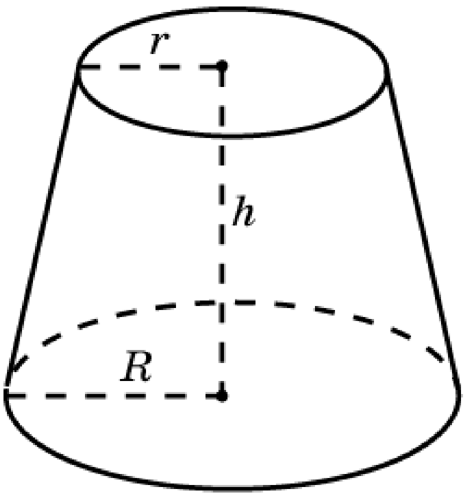
Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.




$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

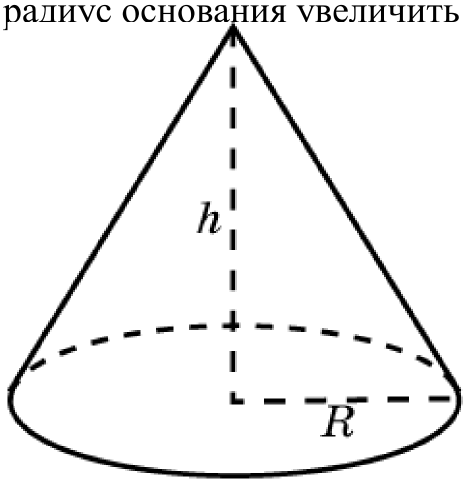
Объем усеченного конуса, основания которого – круги радиусов $R$ и $r$, а высота равна $h$, выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2).$$

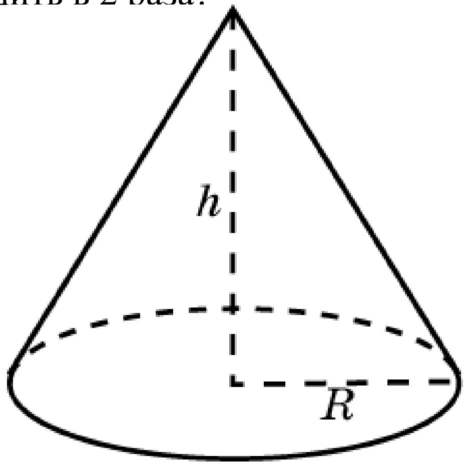


## Упражнения

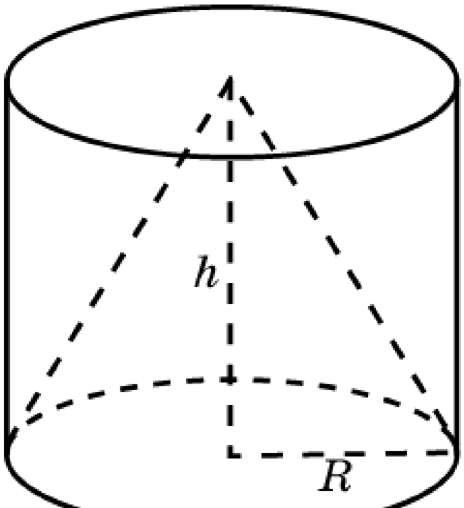
1. Во сколько раз увеличится объем конуса, если его: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?



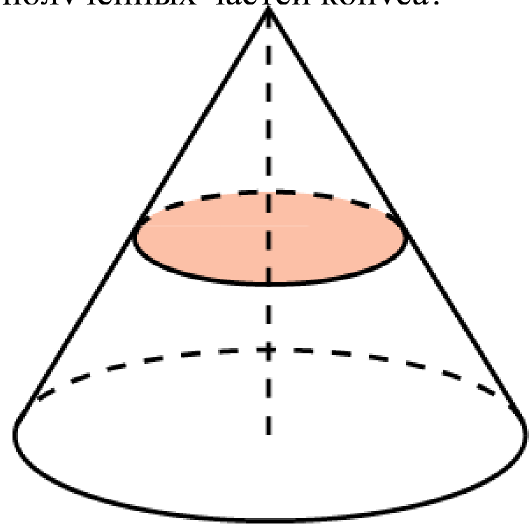

2. Изменится ли объем конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?



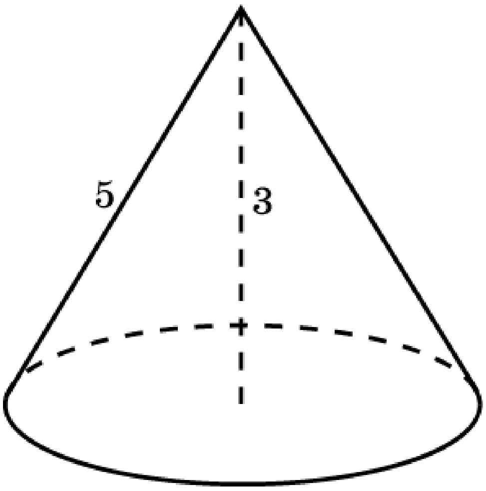

3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 120 $\pi$ см$^3$.



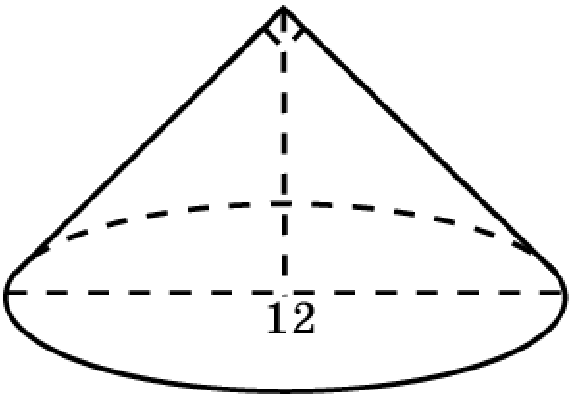
4. Объем конуса равен 1. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?



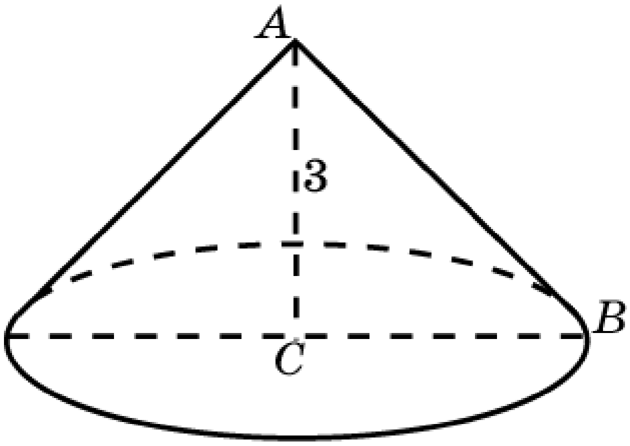
5. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.



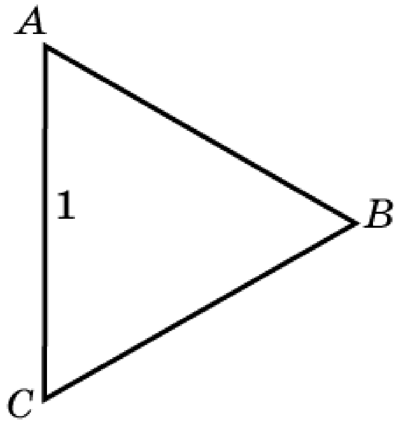

6. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения - 90°. Вычислите объем конуса.



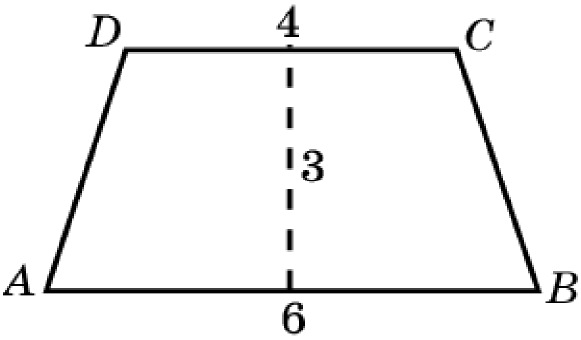
7. Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.



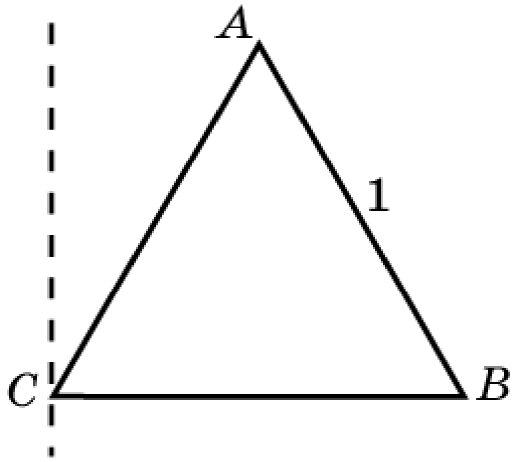

8. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны, равной 1. Найдите объем тела вращения.



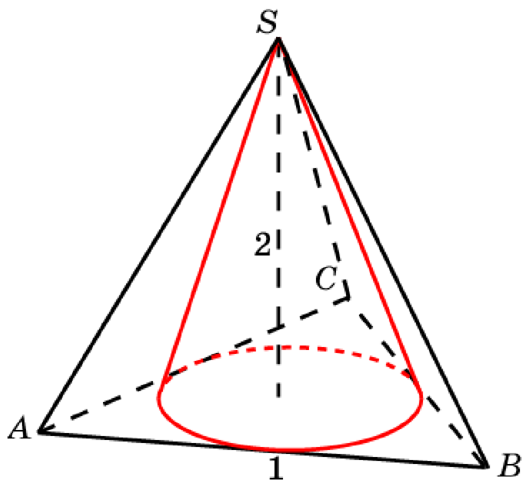

9. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота – 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объем тела вращения.



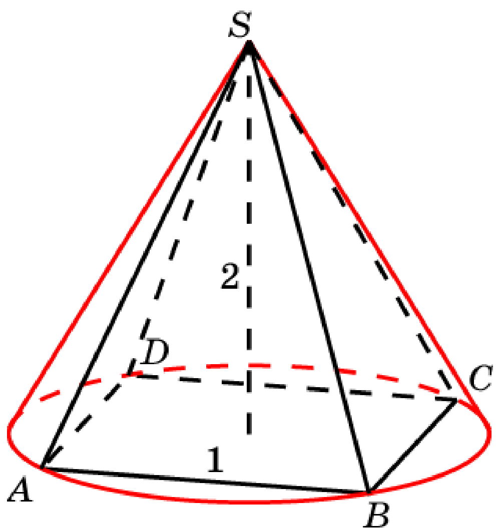
10. Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.



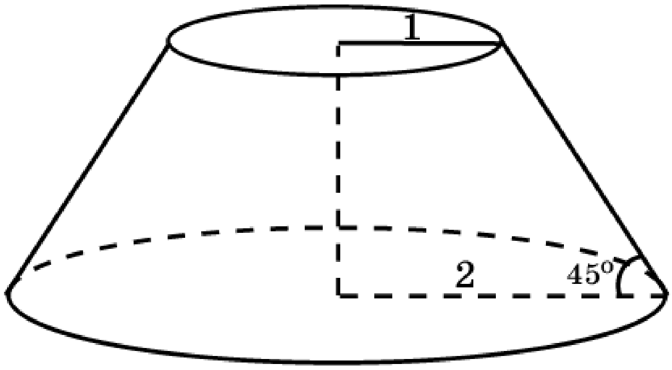

11. Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания 1 и высотой 2. Найдите его объем.



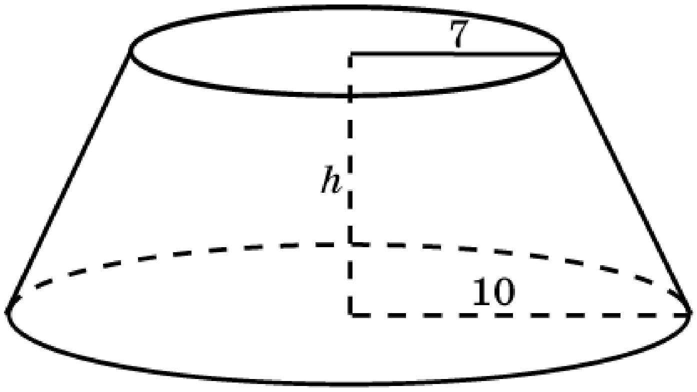

12. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 1 и высотой 2. Найдите его объем.



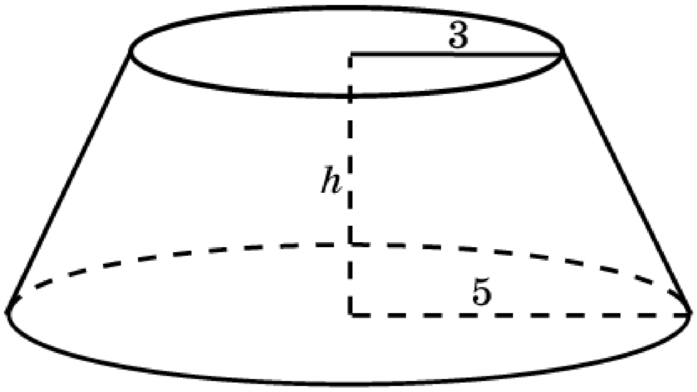
13. Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 2. Образующая наклонена к основанию под углом $45^{\circ}$. Найдите его объем.



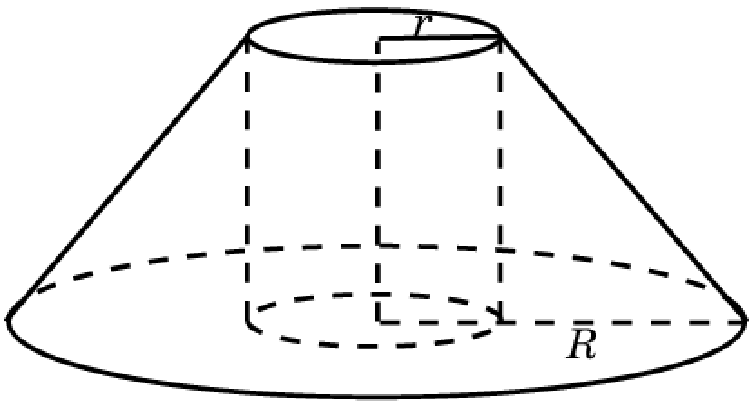

14. Объем усеченного конуса равен $584\pi$ см$^3$, а радиусы оснований равны 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.



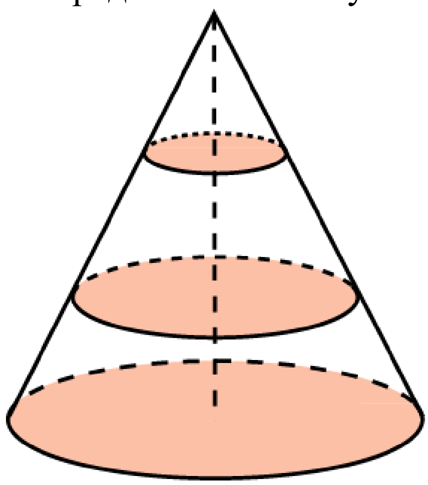

15. Усеченный конус, у которого радиусы оснований равны 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?



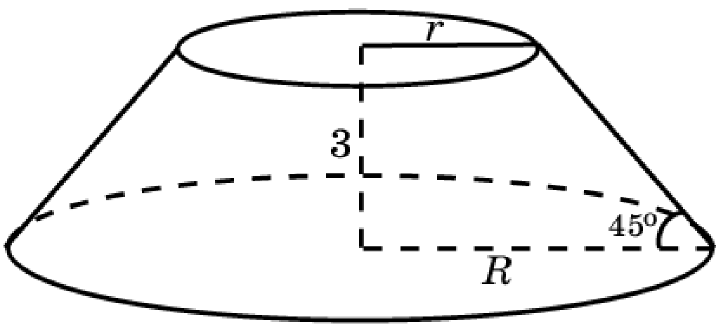
16. На меньшем основании усеченного конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания. Объем цилиндра составляет седьмую часть объема усеченного конуса. Найдите зависимость между радиусами оснований усеченного конуса.



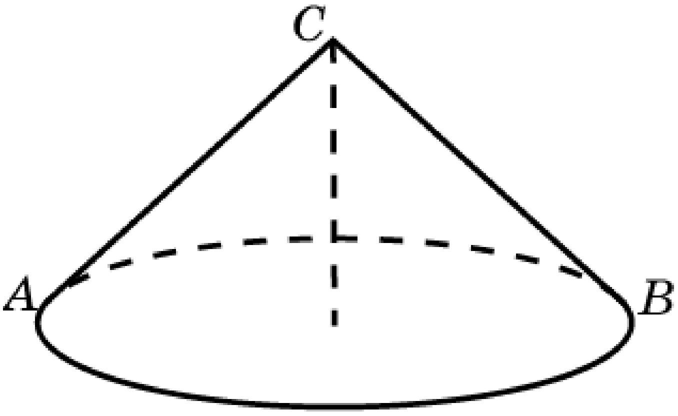

17. Объем конуса равен 1. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.



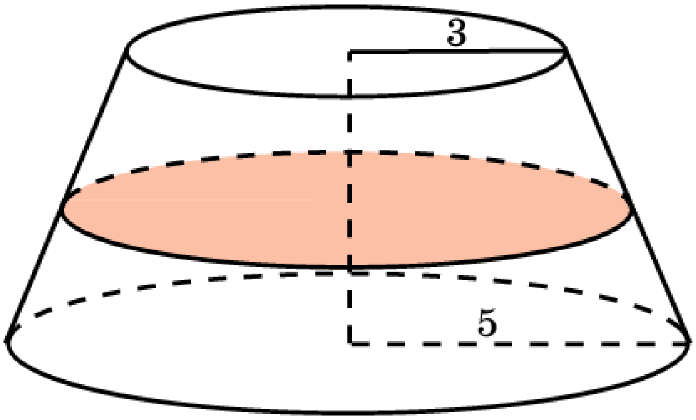
18. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите его объем.



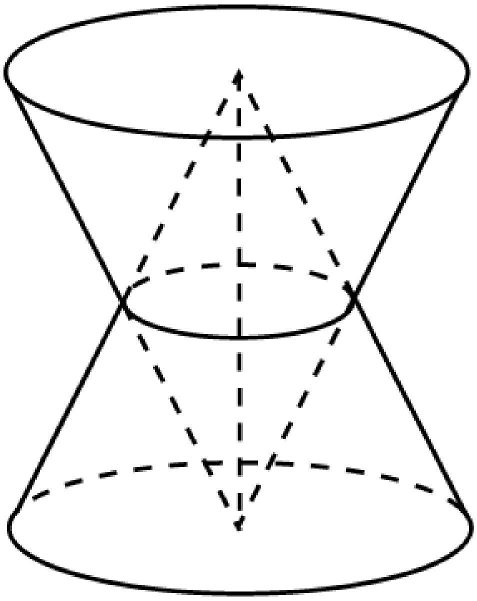
19. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площади 9 см$^2$. Найдите объем конуса.



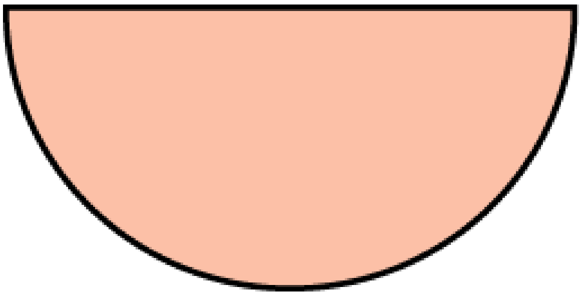

20. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 5 см. Найдите отношение объемов частей усеченного конуса, на которые он делится средним сечением.



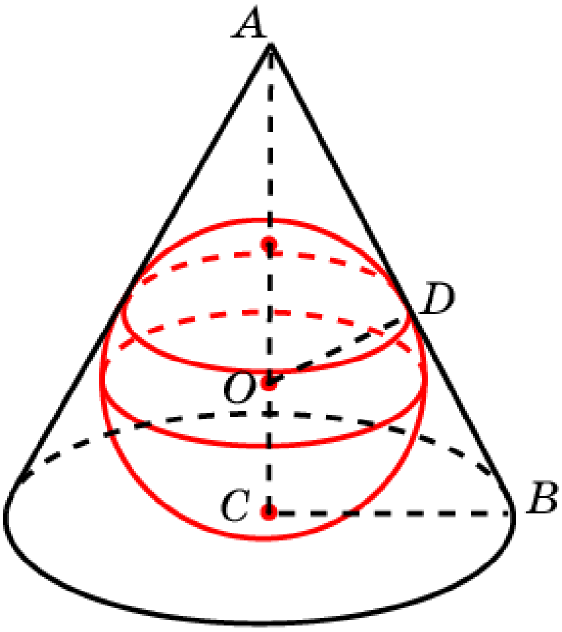

21. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найдите объем их общей части, если объем каждого конуса равен 1.



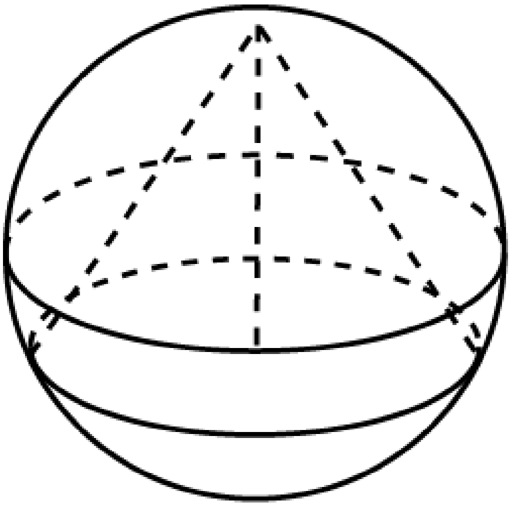
22. Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиуса 2. Найдите объем конуса.



23. В конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар радиуса 1. Найдите объем конуса.



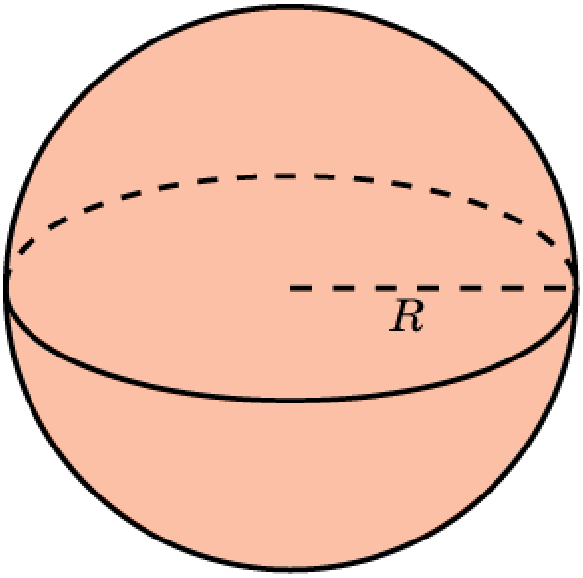

24. В сферу радиуса 5 вписан конус высота которого равна 8. Найдите объем конуса.



## VI. ОБЪЕМ ШАРА

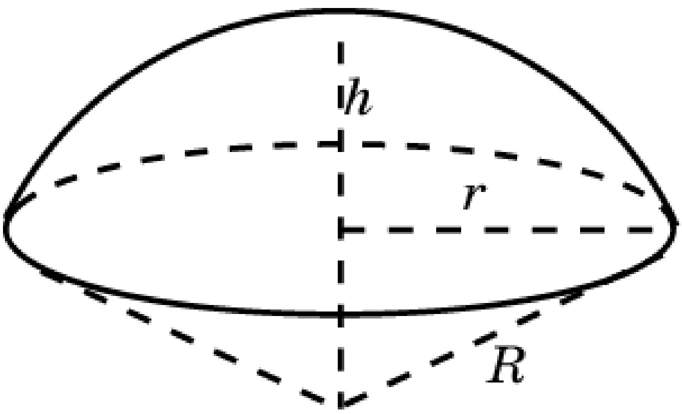
Объем шара радиуса $R$ выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



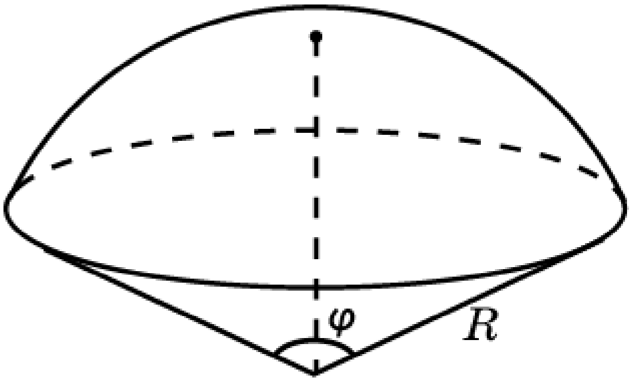

Объем шарового сегмента высоты $h$, отсекаемого от шара радиуса $R$, выражается формулой

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$



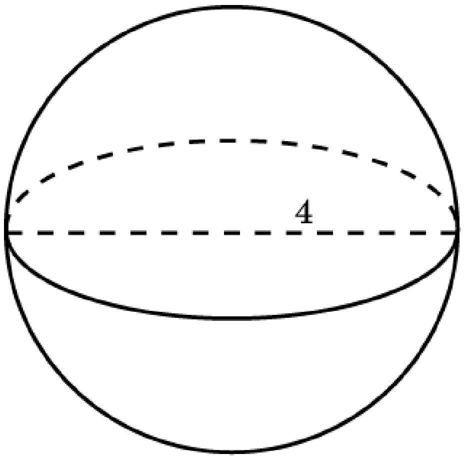
Объем шарового сектора радиуса $R$ и углом φ при вершине выражается формулой

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\frac{\varphi}{2}).$$

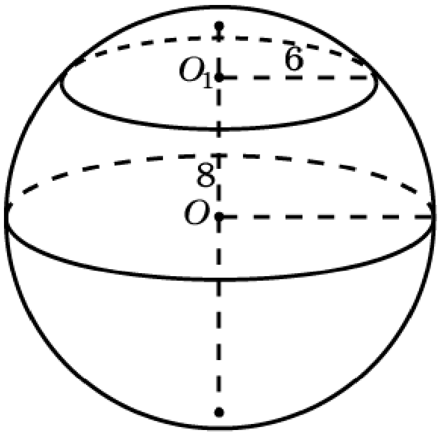



**Упражнения**

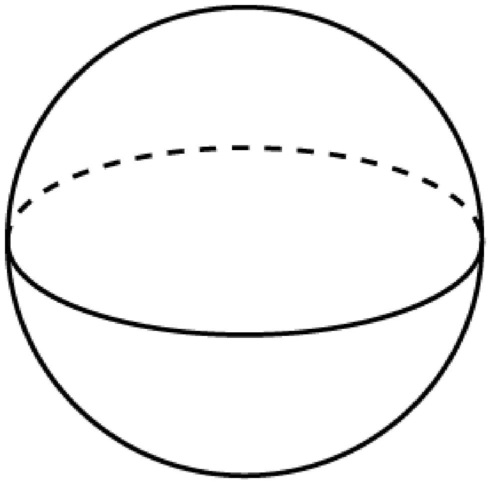
1. Найдите объем шара, диаметр которого равен 4 см.



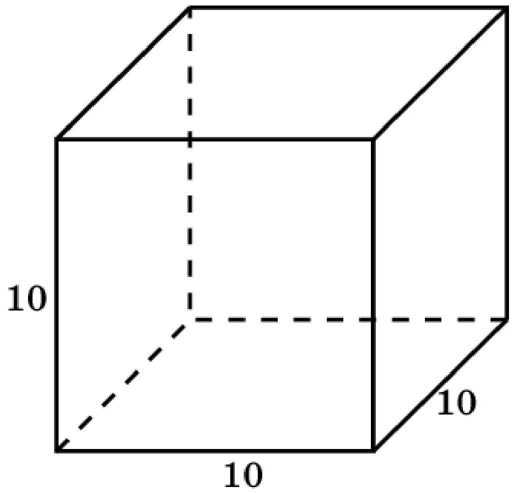

2. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.



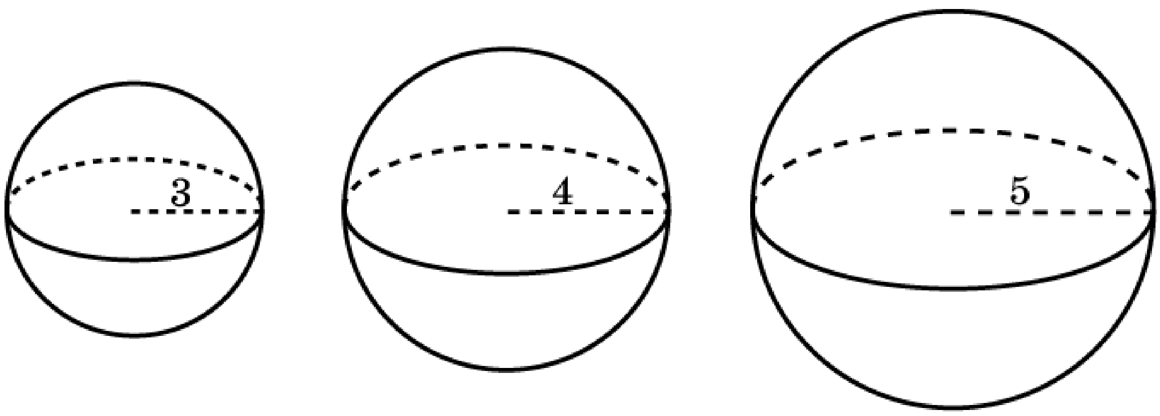
3. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?



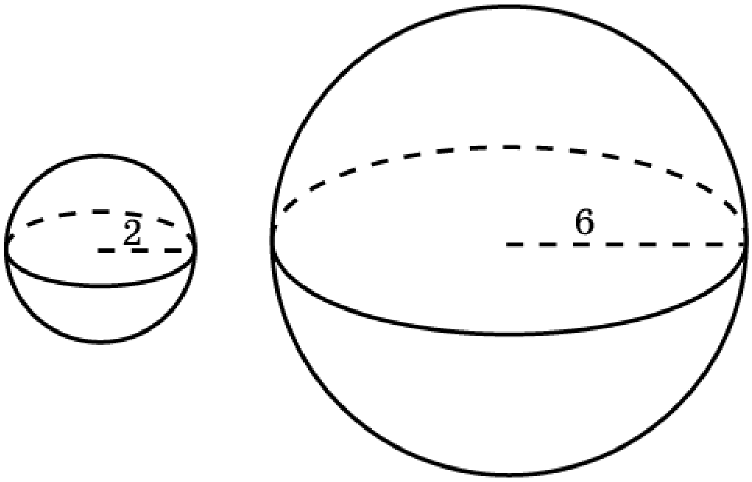
4. Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)



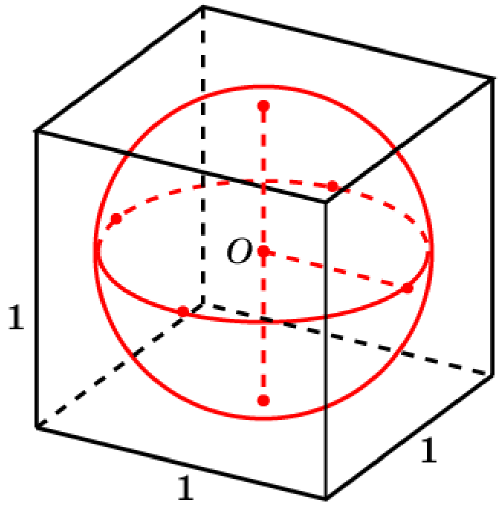

5. Радиусы трех шаров равны 3 см, 4 см и 5 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.



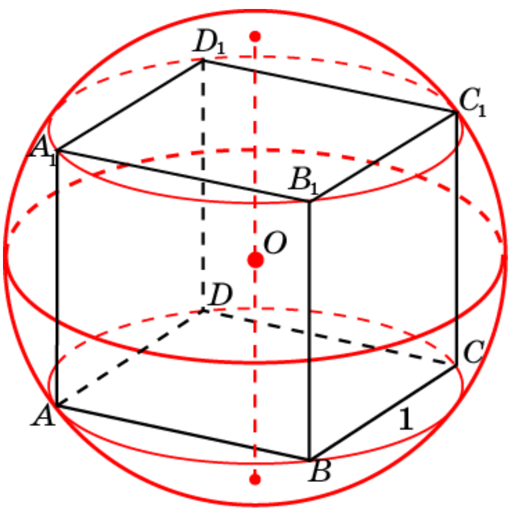
6. Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?



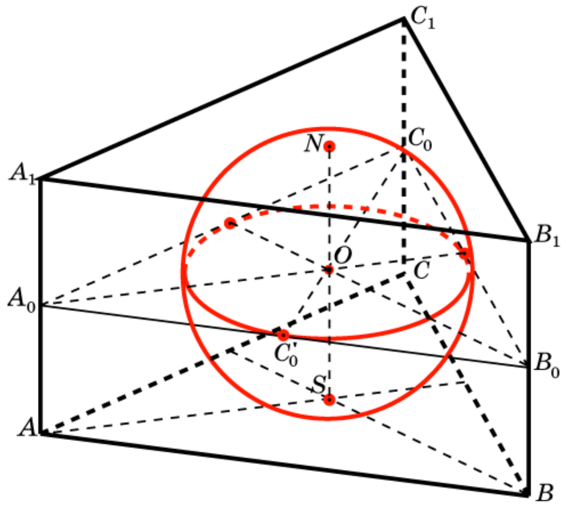

7. Найдите объем шара, вписанного в куб с ребром, равным единице.



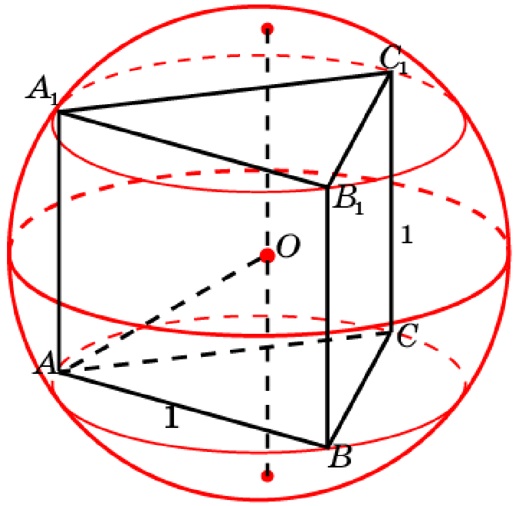

8. Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным единице.



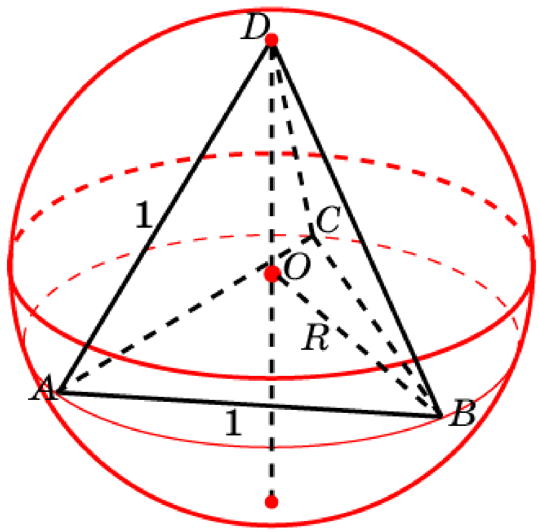
9. Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 1.



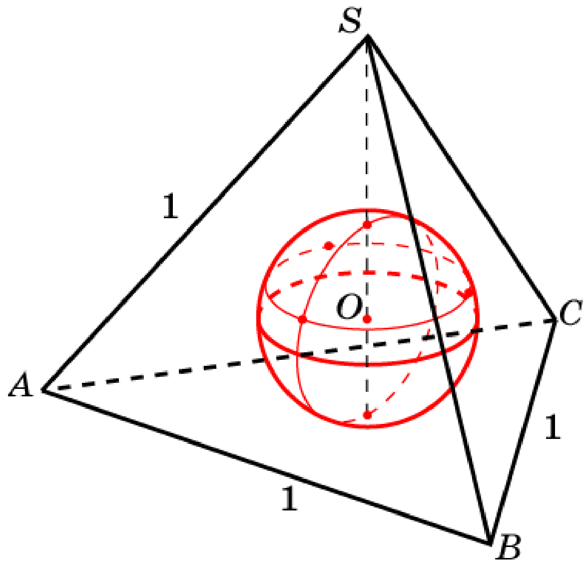

10. Найдите объем шара, описанного около правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1.



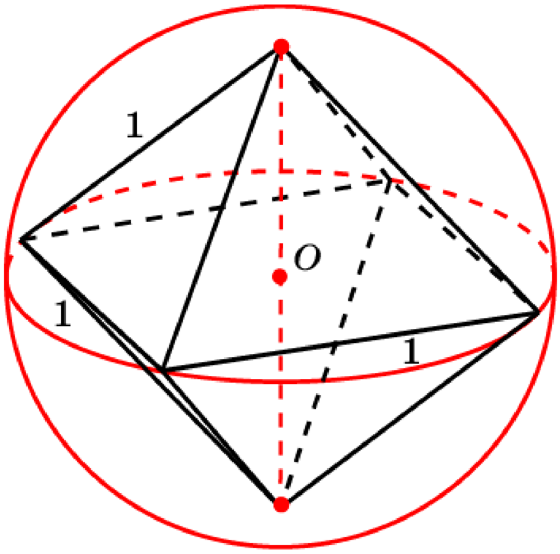

11. Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром 1.



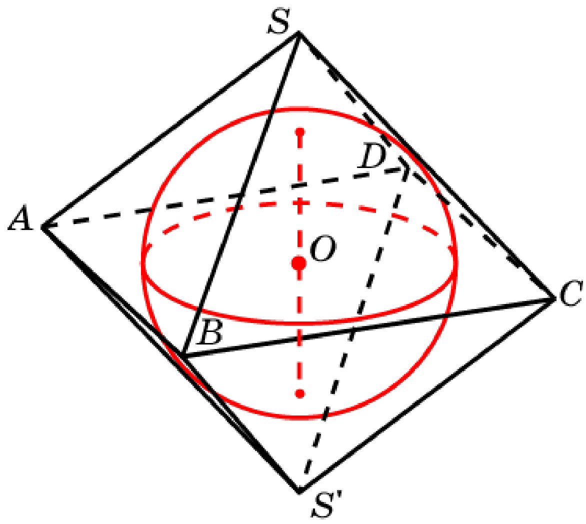
12. Найдите объем шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром 1.



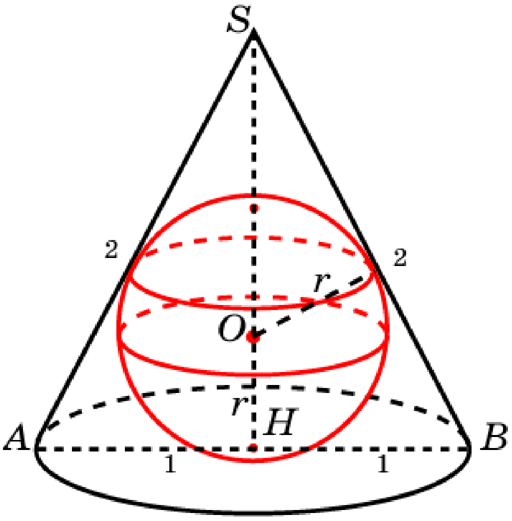

13. Найдите объем шара, описанного около октаэдра с ребром 1.



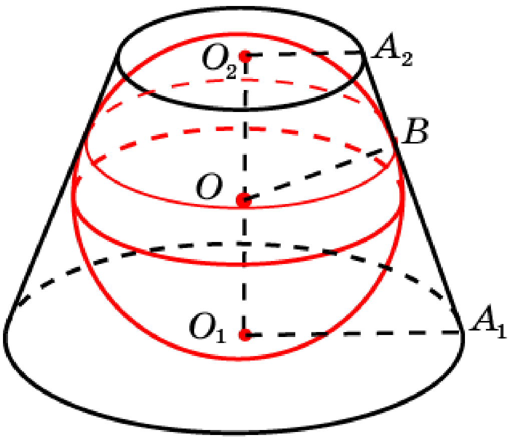

14. Найдите объем шара, вписанного в октаэдр с ребром 1.



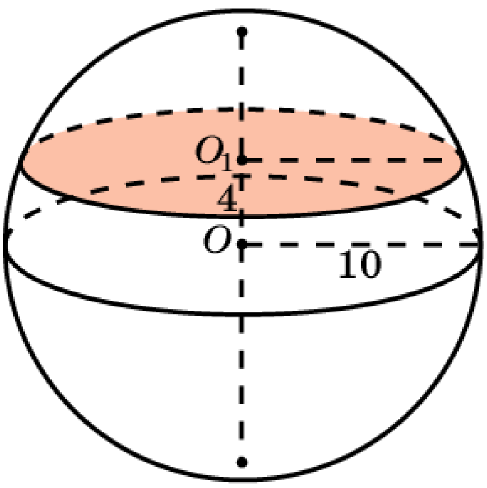
15. В конус, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, вписан шар. Найдите его объем.



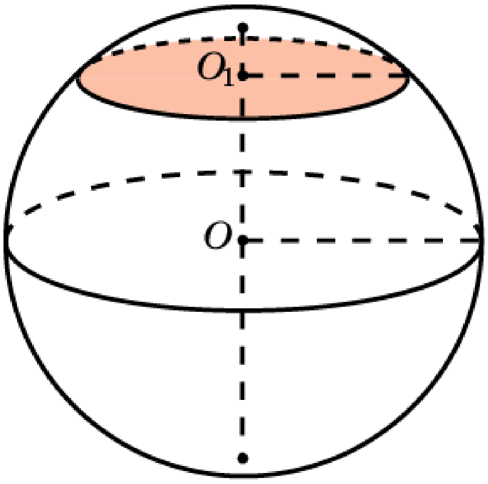

16. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписан шар. Найдите его объем.



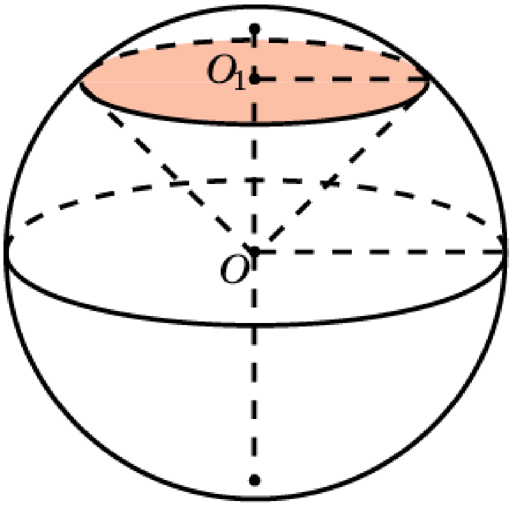

17. Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.



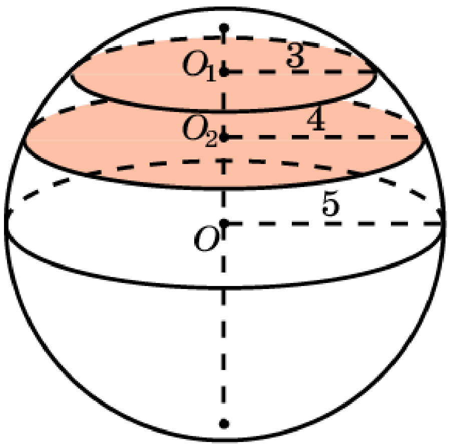
18. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

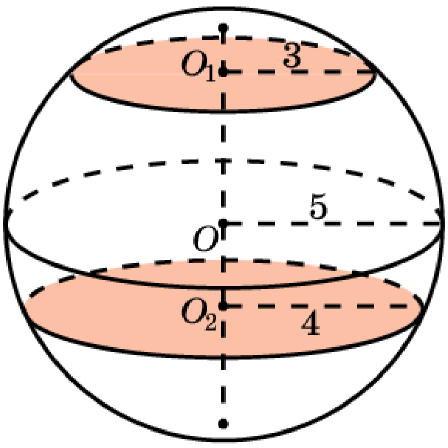



19. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара 75 см?

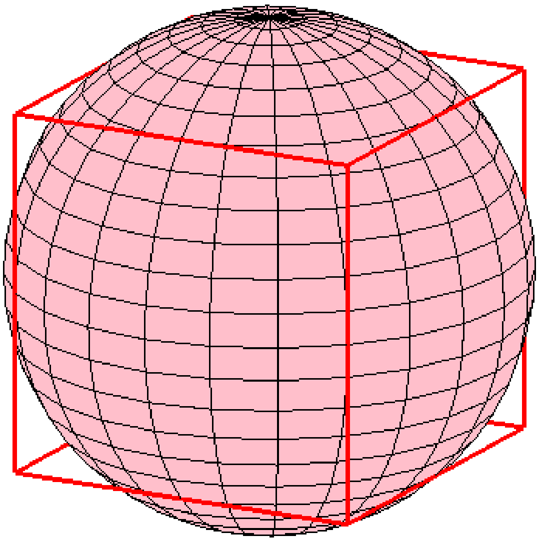



20. Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара - 5 см. (Рассмотрите два случая.)



21. Шар касается всех двенадцати ребер куба с ребром 1. Найдите объем части шара, заключенной внутри этого куба.

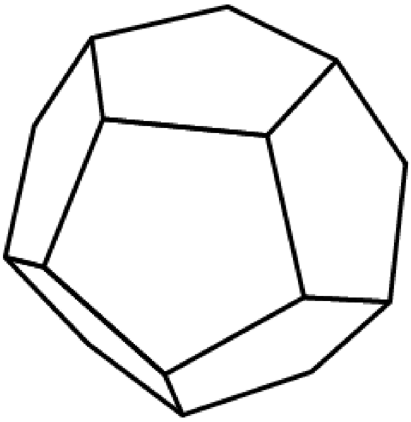
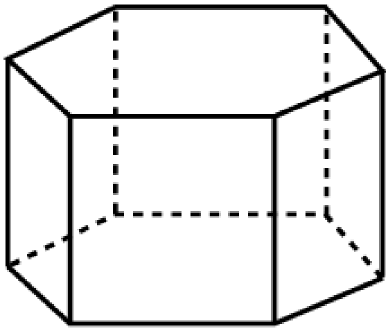
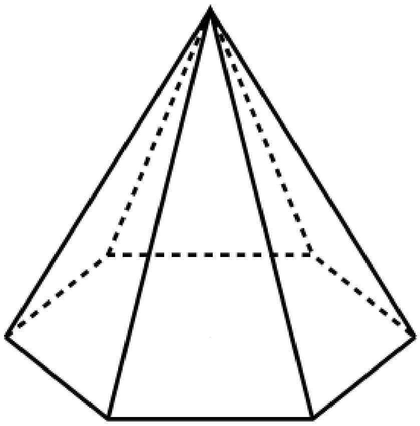


# VII. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

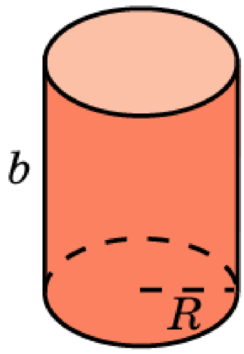
Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

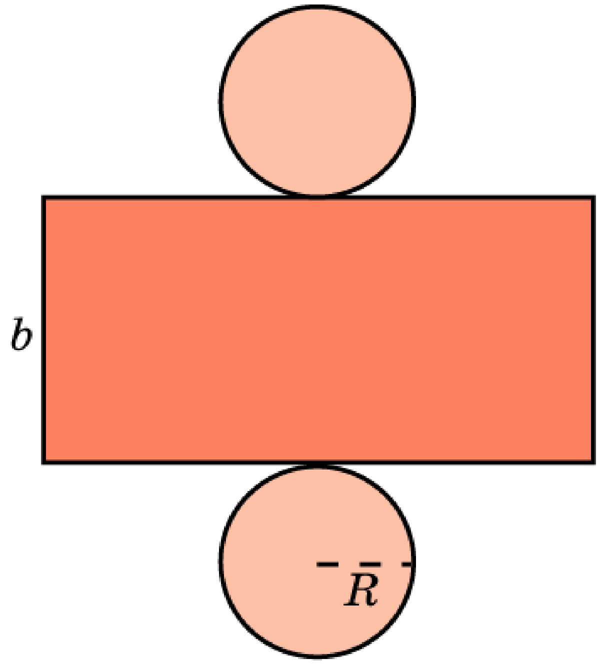
Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.

Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен $R$ и образующая равна $b$, выражается формулой

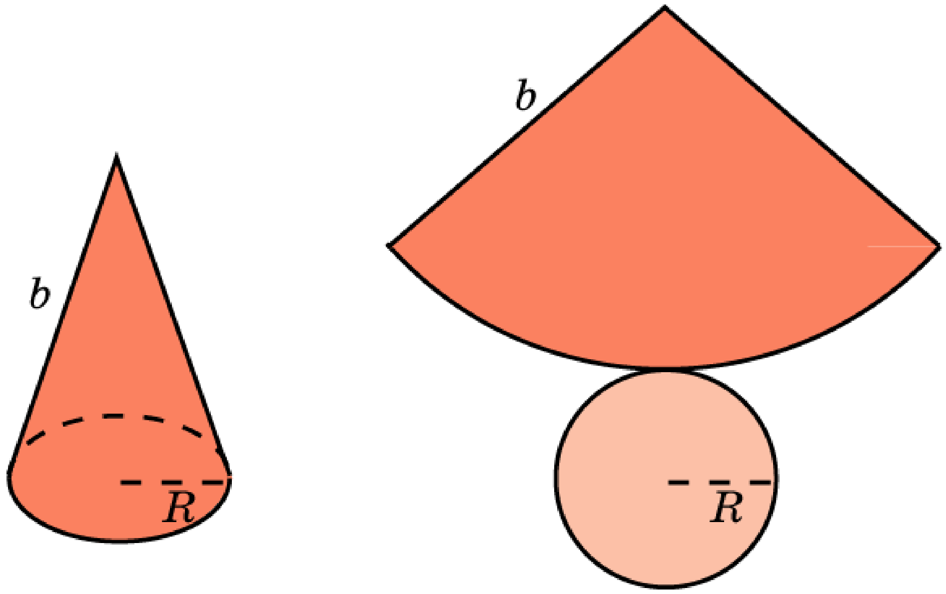
$$S = 2\pi R(R+b).$$



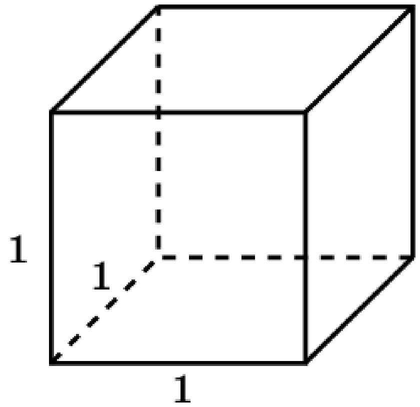
Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен $R$ и образующая равна $b$, выражается формулой

$$S = \pi R(R + b).$$

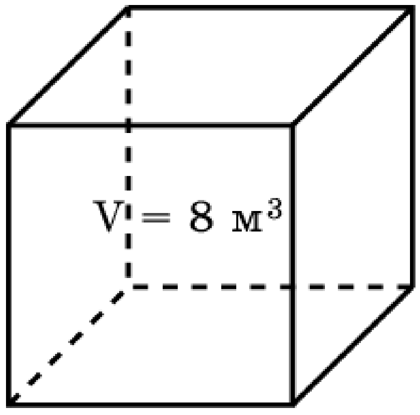



**Упражнения**

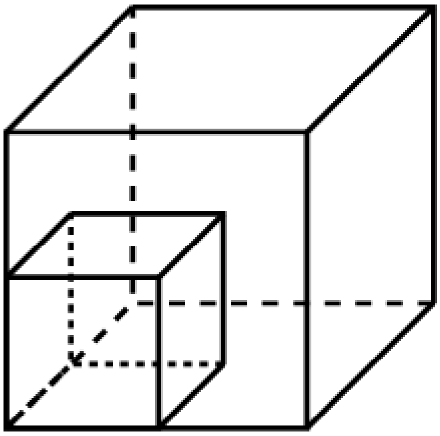
1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?



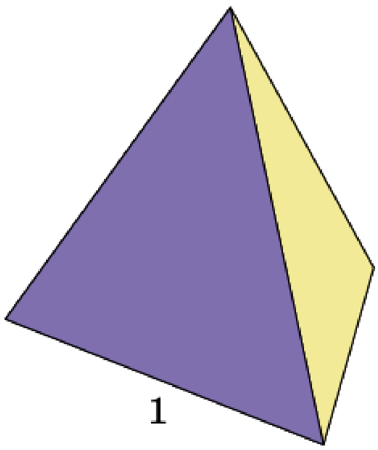

2. Объем куба равен 8 $м^3$. Найдите площадь его поверхности.



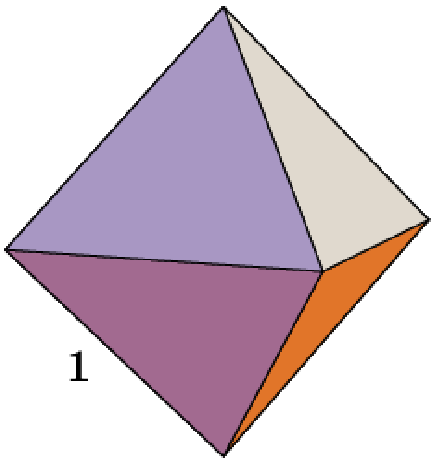
3. Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) *n* раз?



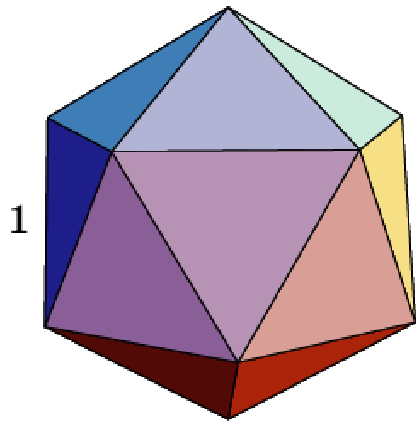
4. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?



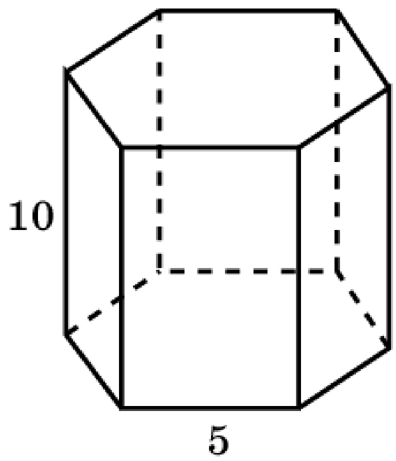

5. Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?



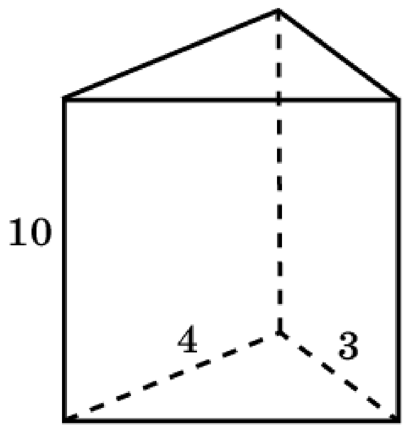
6. Чему равна площадь поверхности икосаэдра с ребром 1?



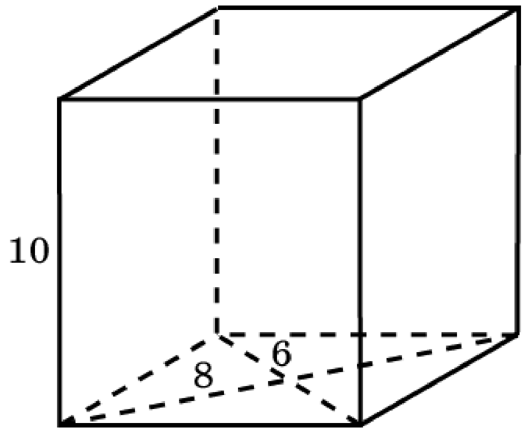

7. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.



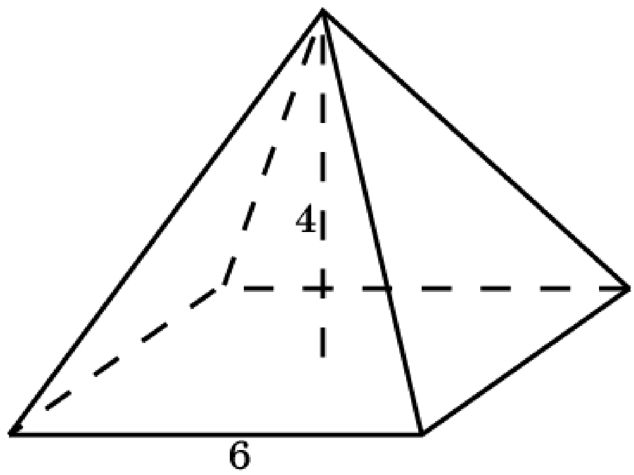

8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.



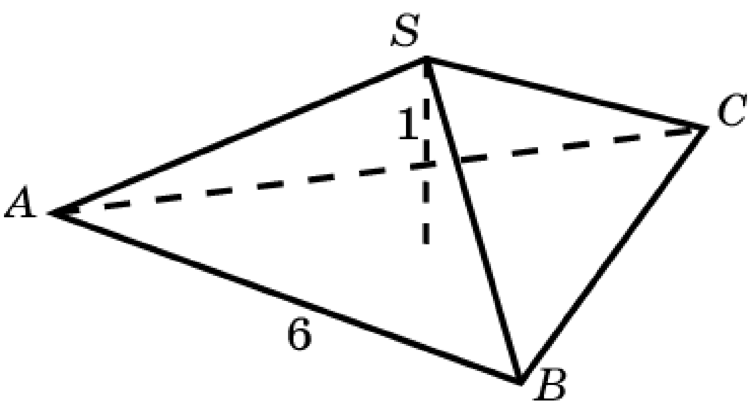
9. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см.



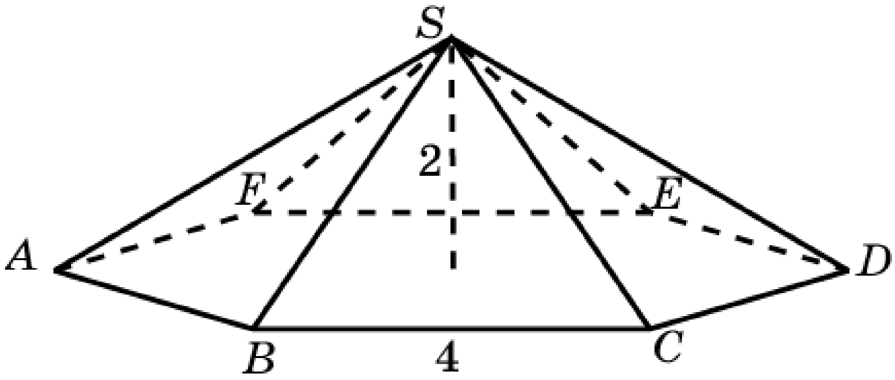

10. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.



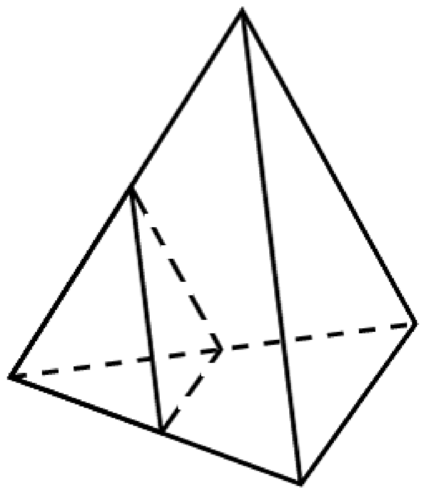

11. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.



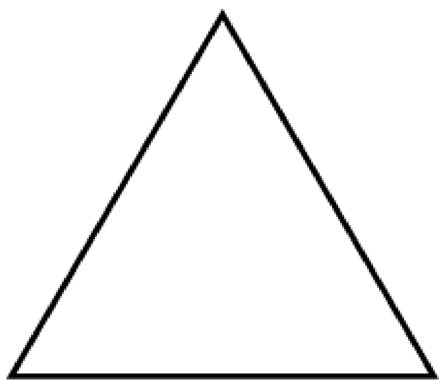
12. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 4  см и высотой 2 см.



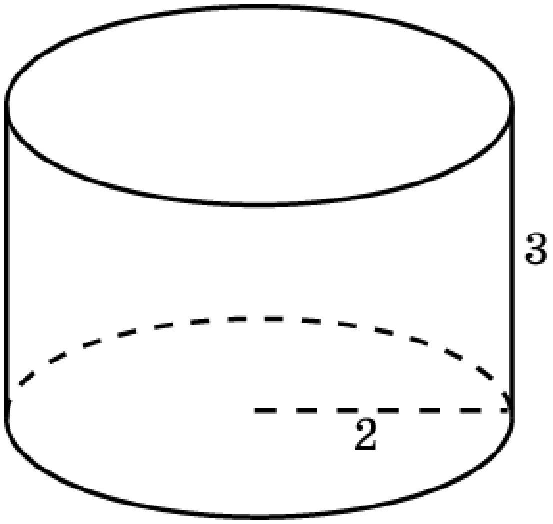

13. Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все ее ребра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?



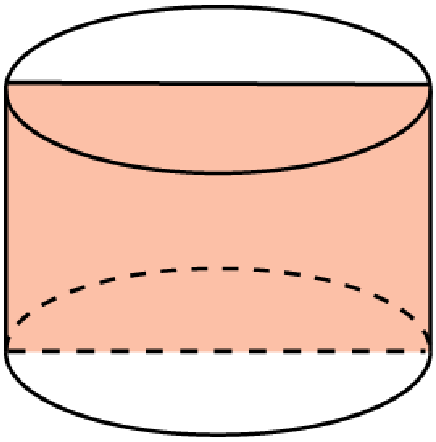
14. Развёртка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см$^2$. Найдите площадь грани пирамиды.



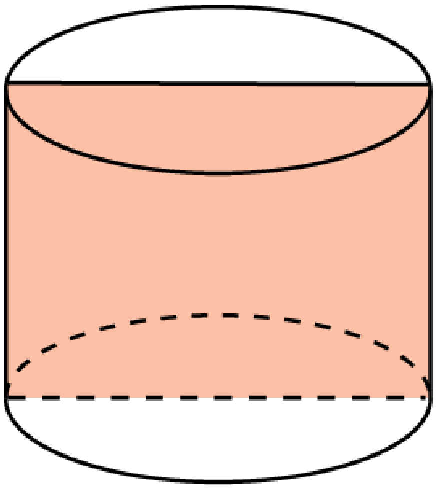
15. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



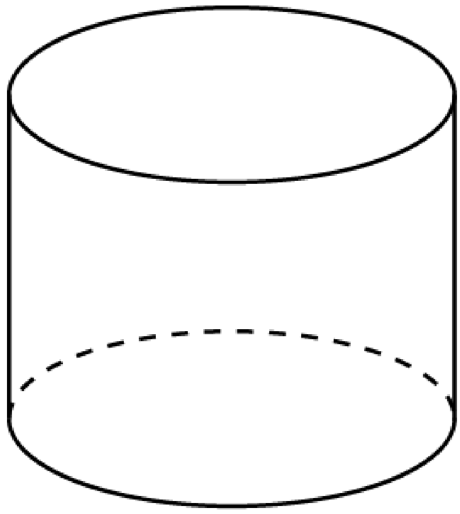

16. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м$^2$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



17. Осевое сечение цилиндра - квадрат. Площадь основания равна 1. Найдите площадь поверхности цилиндра.

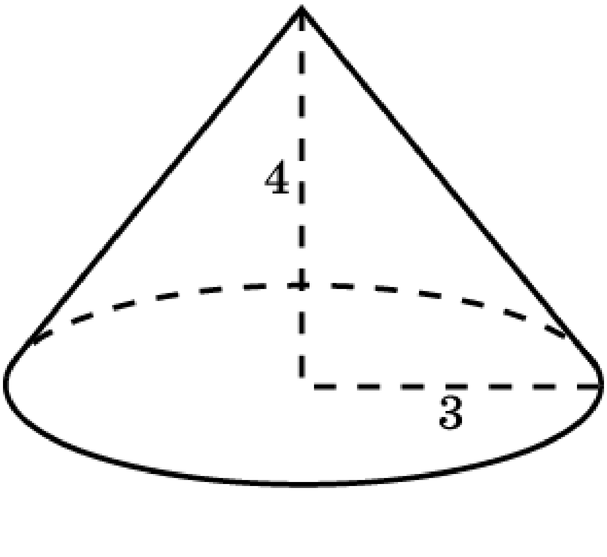


18. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания цилиндра.

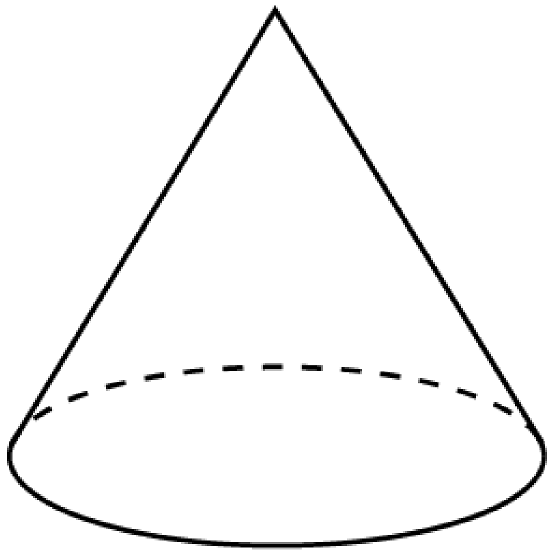


19. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника вокруг его неравных сторон. Равны ли у этих цилиндров площади: а) боковых; б) полных поверхностей?

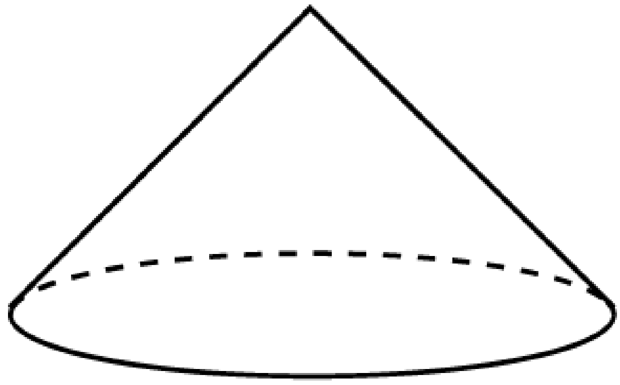
20. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.



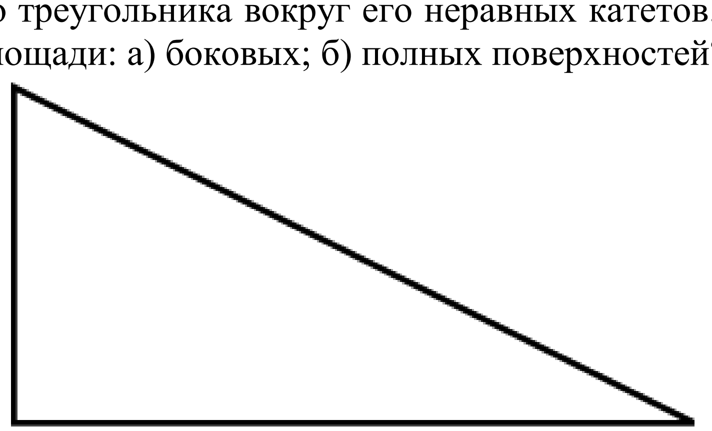
21. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.



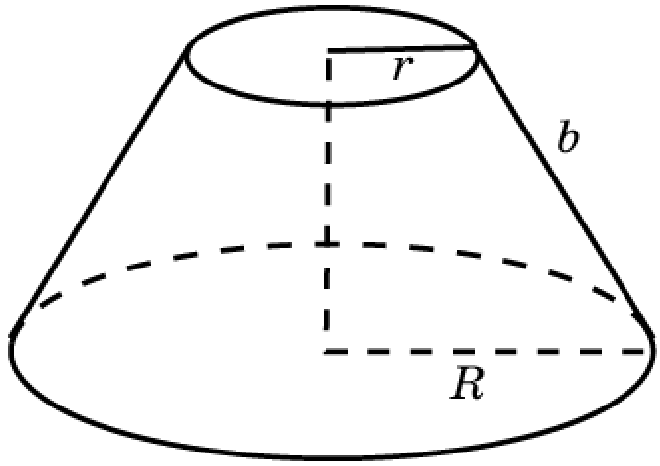
22. Образующая конуса равна 4 дм, а угол при вершине осевого сечения равен $90^{o}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



23. Два конуса образованы вращением одного и того же прямоугольного треугольника вокруг его неравных катетов. Равны ли у этих конусов площади: а) боковых; б) полных поверхностей?



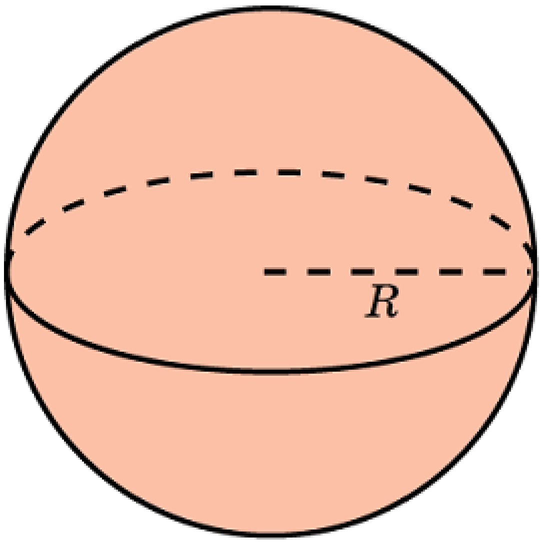
24. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований равны $R$ и $r$, а образующая равна $b$.



## VIII. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

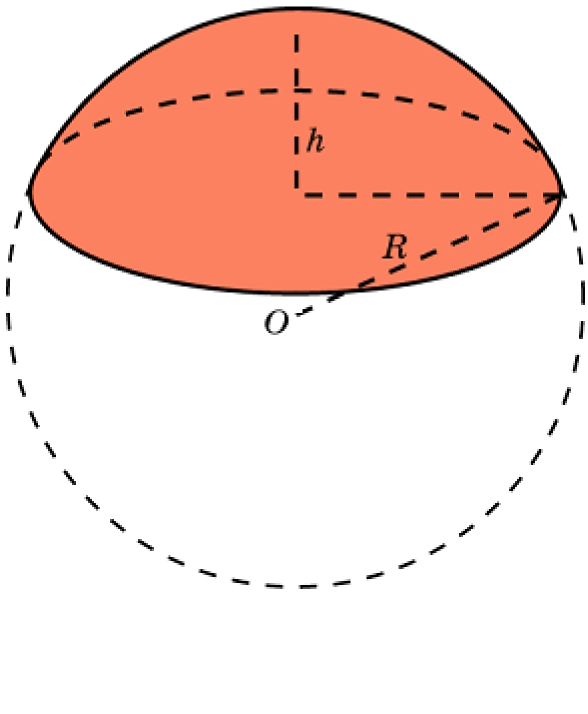
Площадь поверхности шара радиуса $R$ выражается формулой

$$S = 4\pi R^2.$$



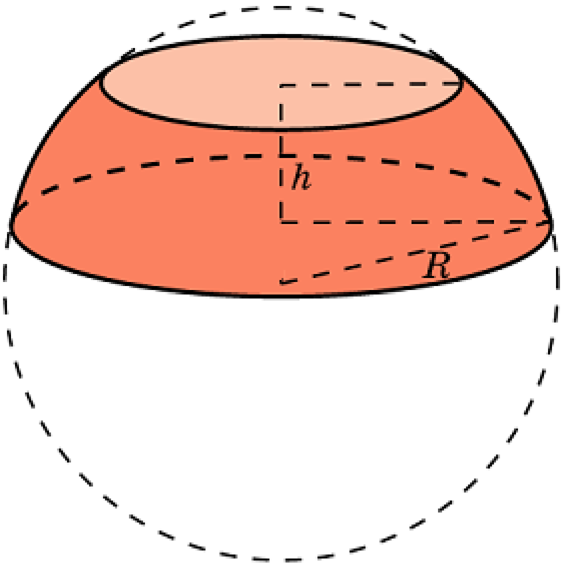

Площадь боковой поверхности шарового сегмента радиуса $R$ и высотой $h$ выражается формулой

$$S = 2\pi Rh.$$



Площадь боковой поверхности шарового пояса радиуса $R$ и высотой $h$ выражается формулой

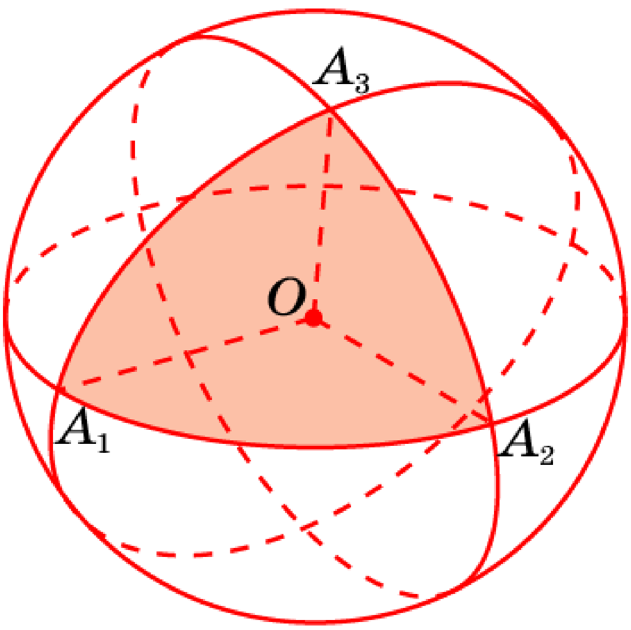
$$S = 2\pi Rh.$$




Площадь сферического $n$-угольника $A_1 \ldots A_n$ на сфере с центром $O$ и радиусом $R$ выражается формулой

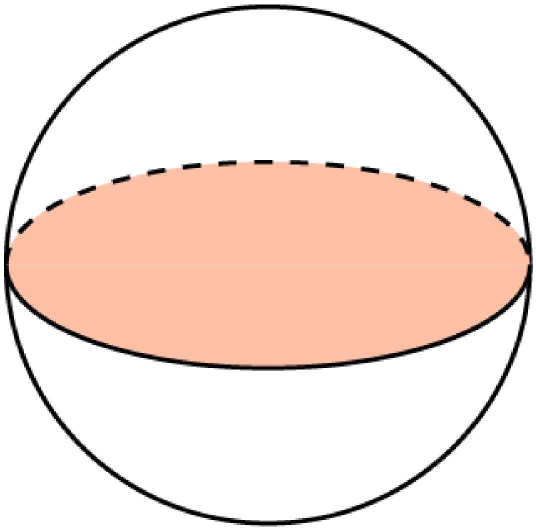
$$S(A_1 \ldots A_n) = (\angle A_1 + \ldots + \angle A_n - \pi(n-2))R^2,$$

где $A_1$, …, $A_n$ – углы сферического многоугольника, равные соответствующим двугранным углам многогранного угла $OA_1 \ldots A_n$

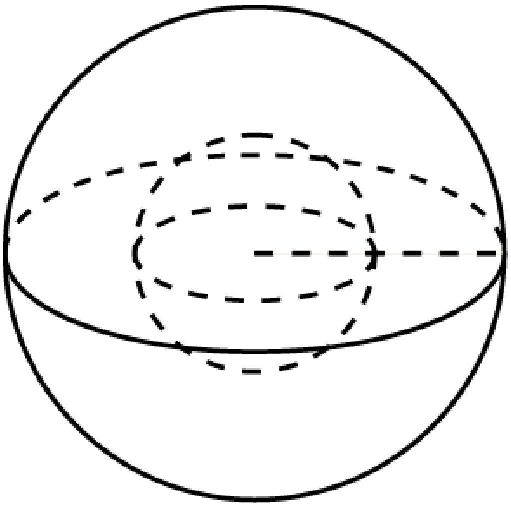


## Упражнения

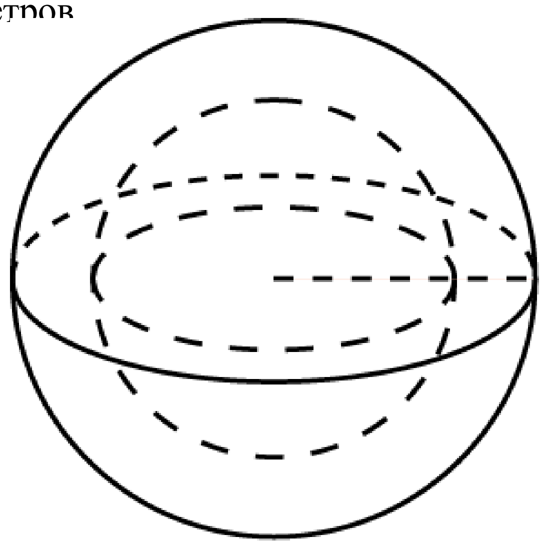
1. Площадь большого круга шара равна 3 см$^2$. Найдите площадь поверхности шара.



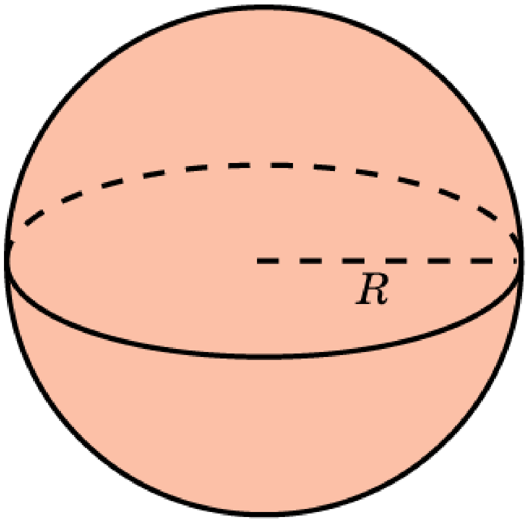
2. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) $n$ раз?



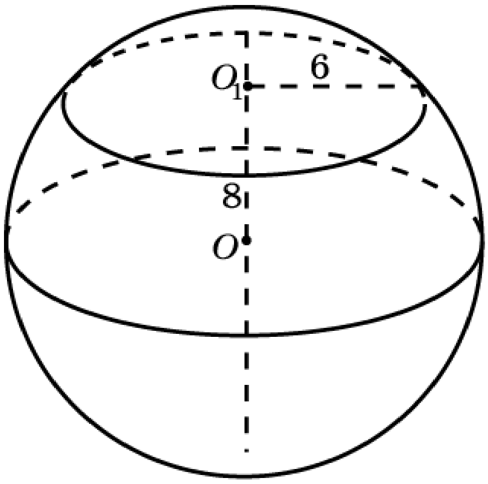
3. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4:9. Найдите отношение их диаметров



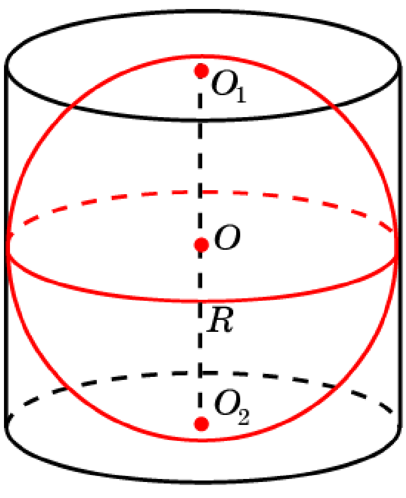
4. Объем шара равен $288\pi$ дм$^3$. Найдите площадь его поверхности.



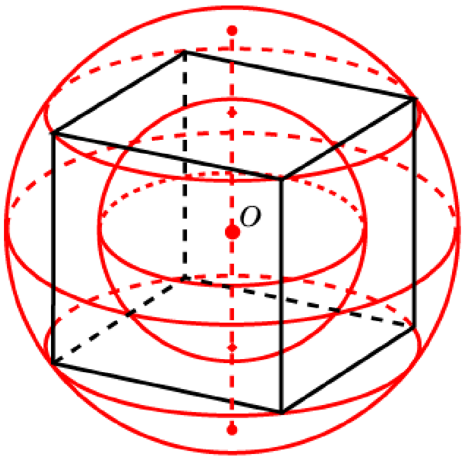

5. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.



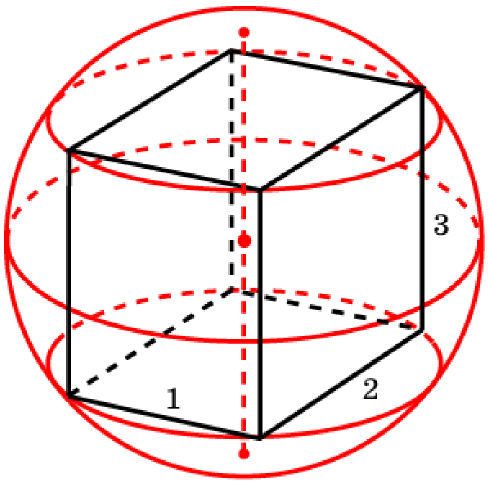

6. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.



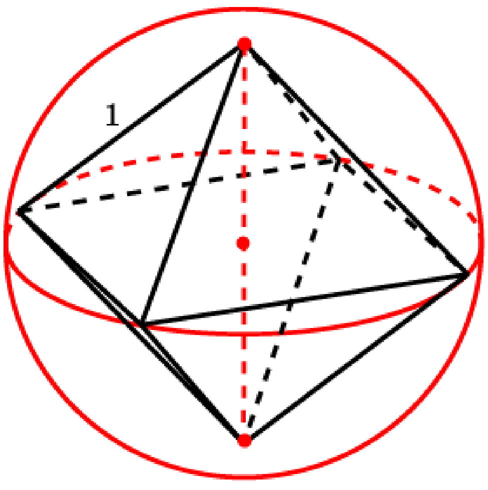
7. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?



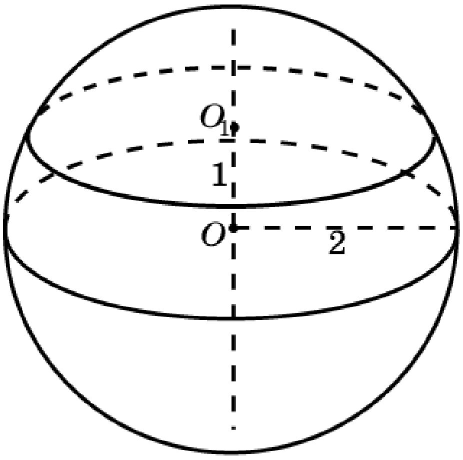

8. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 дм, 2 дм и 3 дм, описан шар. Найдите площадь его поверхности.



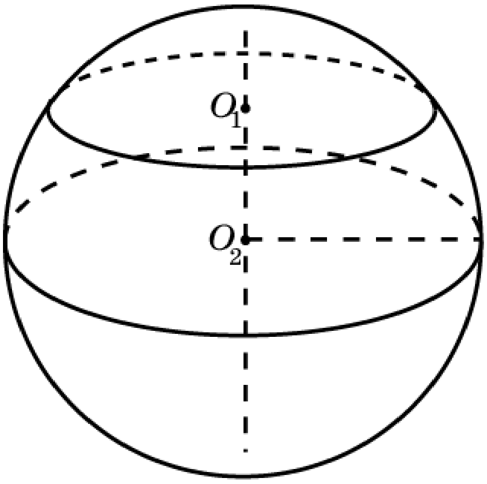

9. Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.



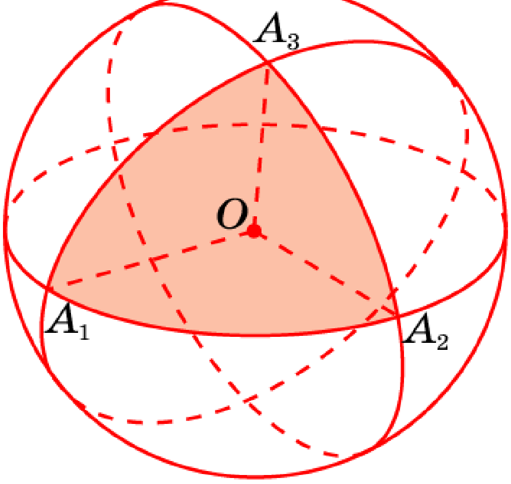
10. Найдите площадь боковой поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара, радиус которого равен 2, плоскостью, проходящей на расстоянии 1 от центра шара.



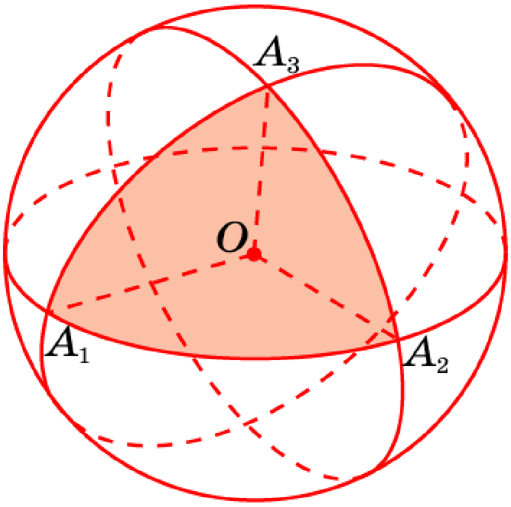

11. Шар радиуса 1 пересечен двумя параллельными плоскостями, которые делят перпендикулярный им диаметр шара в отношении 1:2:3. Найдите площадь поверхности шара, заключенную между секущими плоскостями.



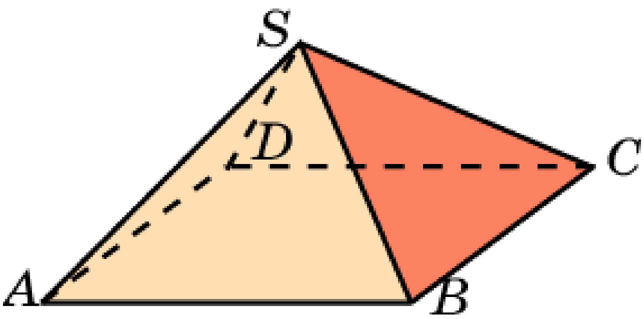

12. Найдите площадь сферического треугольника на единичной сфере, углы которого равны: а) $90^{\circ}$; б) $90^{\circ}$; в) $90^{\circ}$.



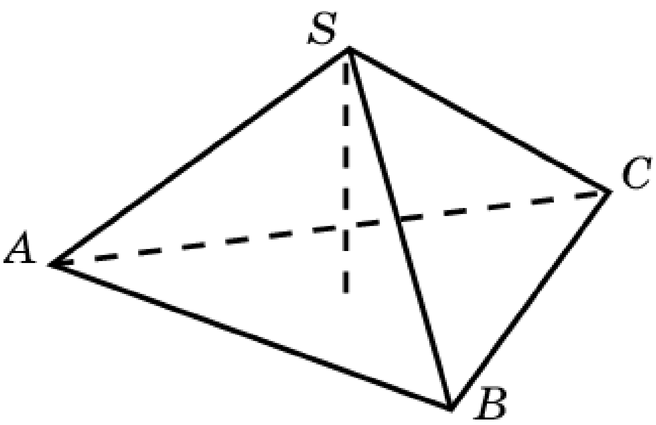
13. Найдите площадь сферического треугольника на единичной сфере, углы которого равны: а) $80^{\circ}$; б) $90^{\circ}$; в) $100^{\circ}$.



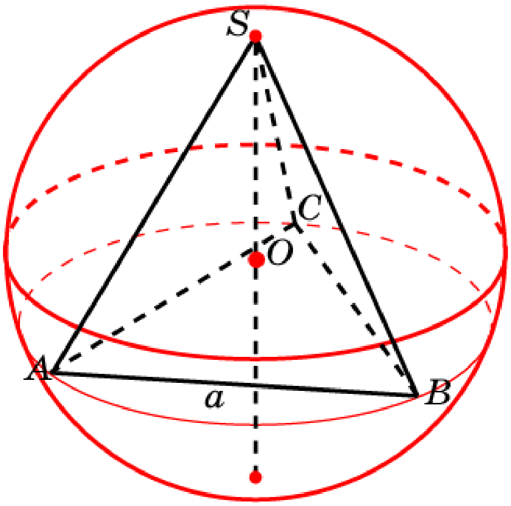

14. Центром единичной сферы является вершина правильной четырехугольной пирамиды с ребром основания 2 и высотой 1. Найдите площадь части сферы, заключенной внутри пирамиды.




15. Центром единичной сферы является вершина правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 1, а высота $\frac{1}{3}$. Найдите площадь части сферы, заключенной внутри пирамиды.



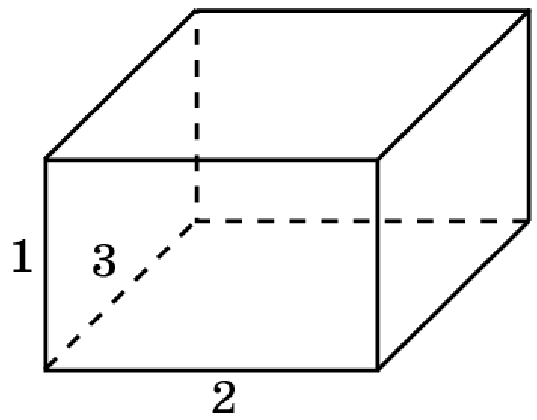
16. В сферу радиуса 1 вписан правильный тетраэдр, и три его грани, исходящие из одной вершины, продолжены до пересечения со сферой. Найдите площадь части поверхности сферы, заключенной внутри образовавшегося трехгранного угла.



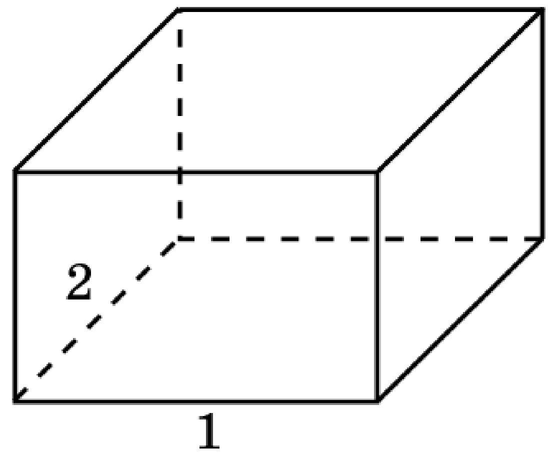
# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

## I. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

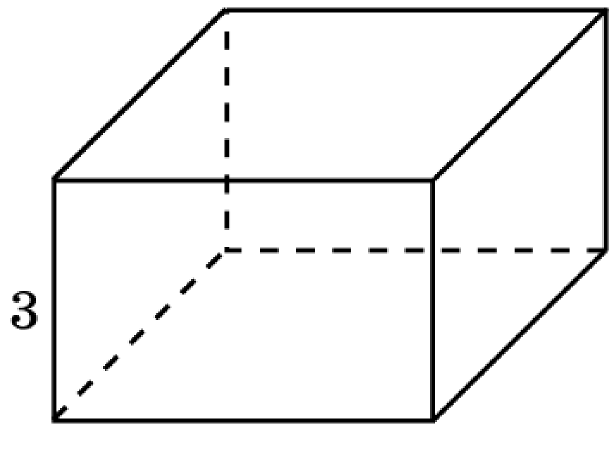
1. Объем параллелепипеда равен 6.



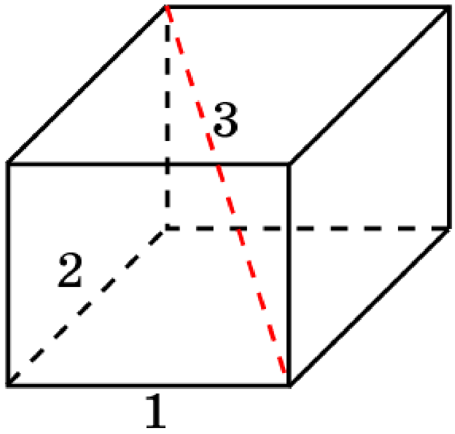

2. Третье ребро параллелепипеда равно 1,5.



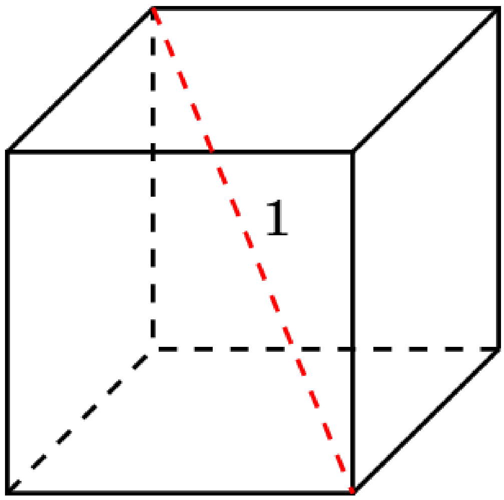

3. Объем параллелепипеда равен 6.



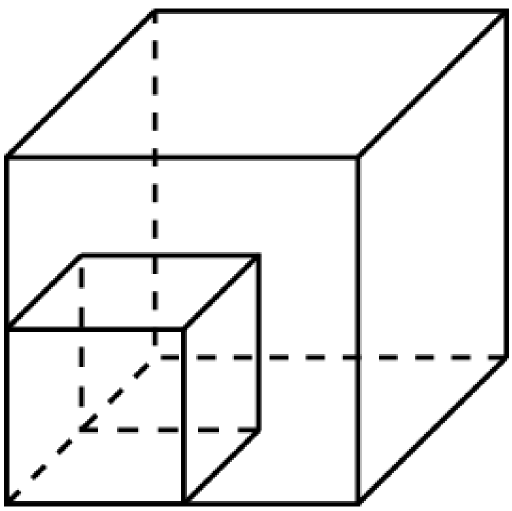
4. Третье ребро параллелепипеда равно 2. Объем параллелепипеда равен 4.



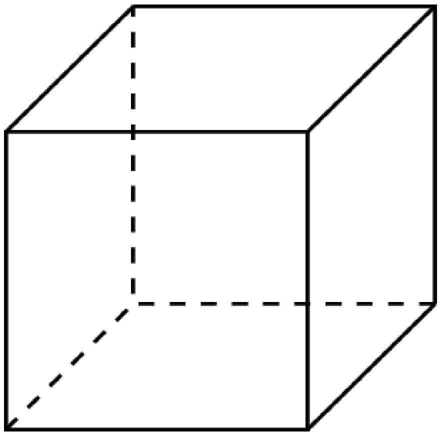

5. Ребро куба равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Объем куба равен $\frac{\sqrt{3}}{9}$.



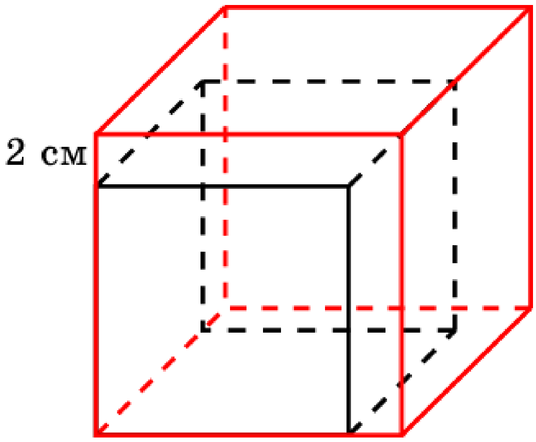

6. Объем куба увеличится в 8 раз.



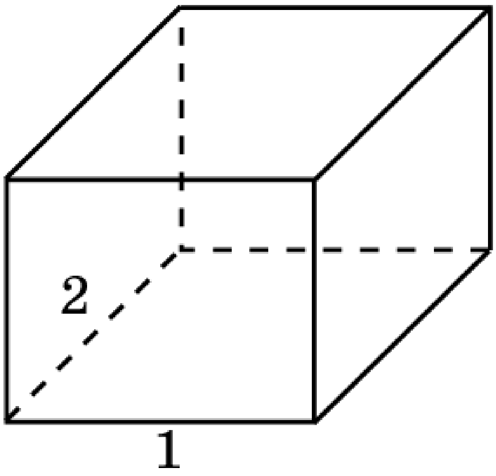
7. Площадь грани куба равна $\frac{1}{6}$. Ребро куба равно $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Объем куба равен $\frac{\sqrt{6}}{36}$.



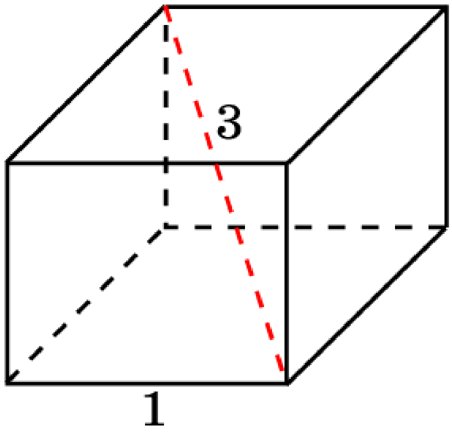
8. Пусть ребро куба равно $x$. Тогда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$. Откуда $x = 3$. Таким образом, искомое ребро куба равно 3 см.



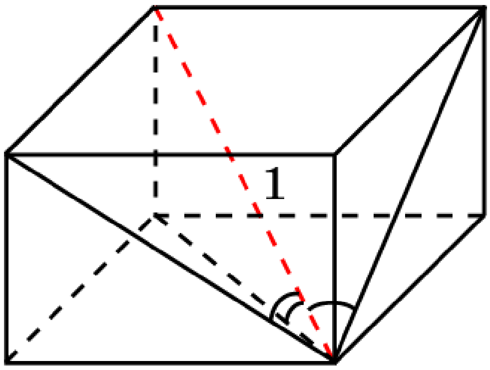

9. Пусть третье ребро параллелепипеда равно $x$. Тогда площадь поверхности будет равна $4 + 6x$. Следовательно, $x = 1$. Объем параллелепипеда будет равен 2.



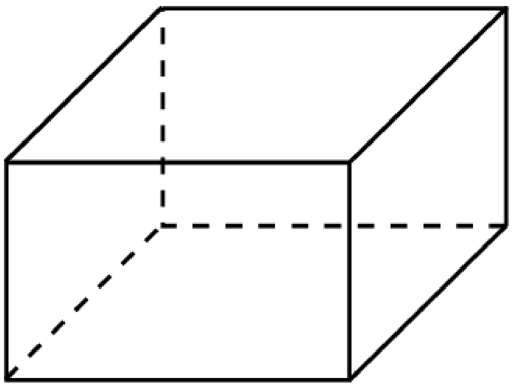
10. Пусть второе ребро параллелепипеда равно $x$. Тогда третье ребро будет равно $\sqrt{8-x^2}$. Площадь поверхности будет равна $2x+2\sqrt{8-x^2}+2x\sqrt{8-x^2}$. Приравнивая это выражение к 16, получим $x$ = 2. Третье ребро будет равно 2, и, следовательно, искомый объем равен 4.



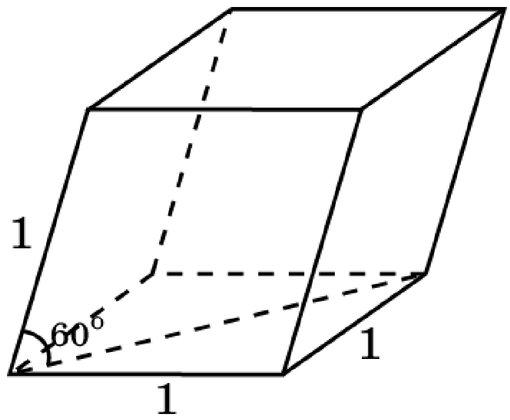

11. Ребра параллелепипеда равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$.



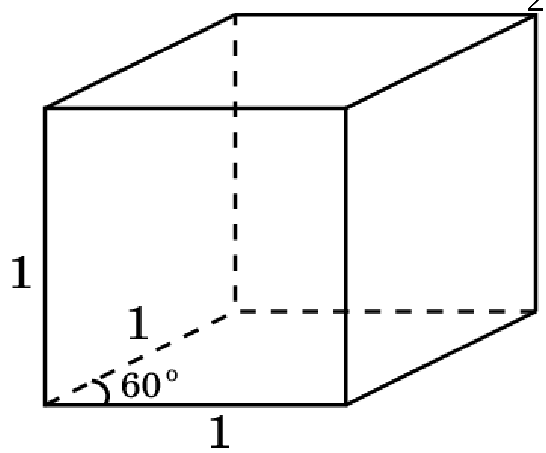

12. Пусть ребра параллелепипеда равны $x$, $y$, $z$. Тогда $xy$ = 1, $xz$ = 2, $yz$ = 3. Решая эти уравнения, находим $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $z=\sqrt{6}$. Объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.



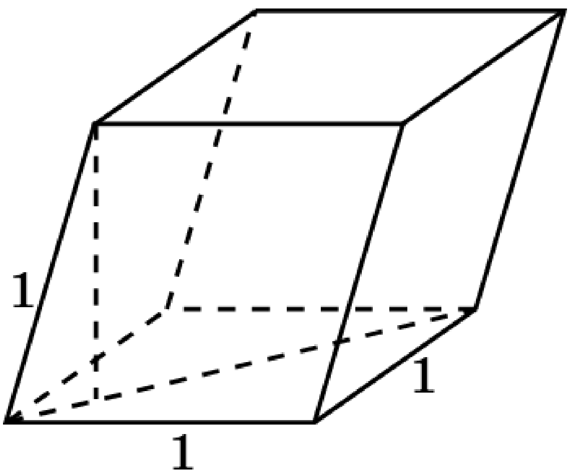
13. Высота параллелепипеда равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его объем равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



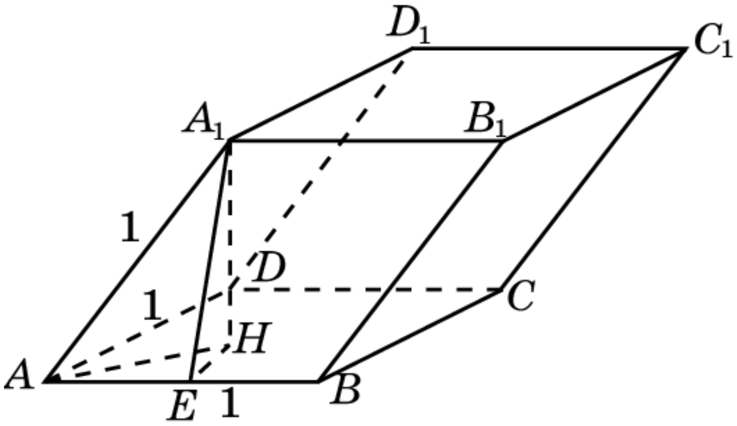

14. Площадь грани параллелепипеда равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его объем равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



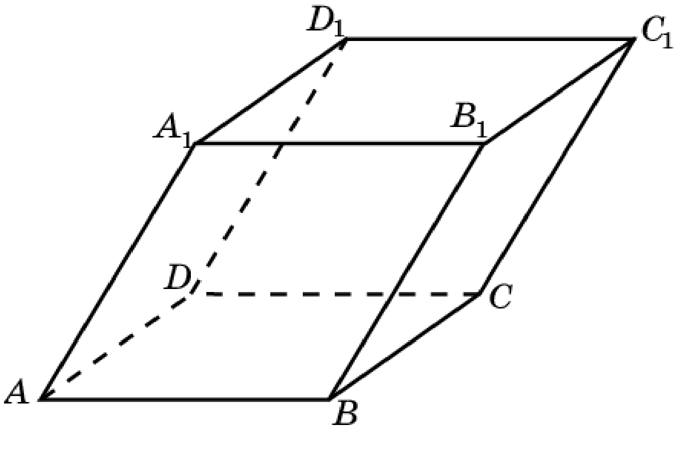

15. Площадь грани параллелепипеда равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота, опущенная на эту грань, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объем параллелепипеда равен $\frac{3}{4}$.



16. Площадь грани $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота $A_1E$ грани $ABB_1A_1$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. В треугольнике $AEH$ угол $A$ равен $30^{\circ}$, $AE = \frac{1}{2}$. Значит, $EH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и, следовательно, высота $A_1H$ равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Таким образом, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



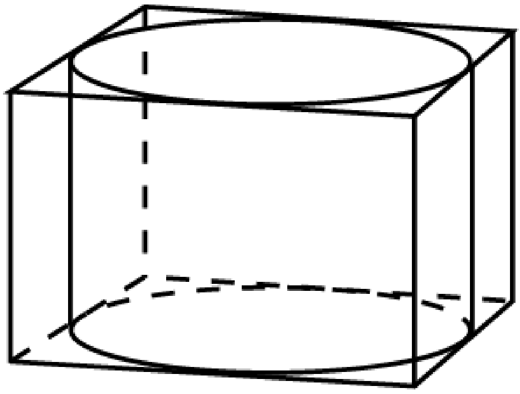

17. Пусть площади граней $ABCD$ и $BCC_1B_1$ равны $S_1$ и $S_2$ соответственно, ребро $BC$ равно $a$. Тогда высота параллелограмма $BCC_1B_1$ равна $\frac{S_2}{a}$. Высота параллелепипеда, проведенная к грани $ABCD$, равна $\frac{S_2}{2a}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$



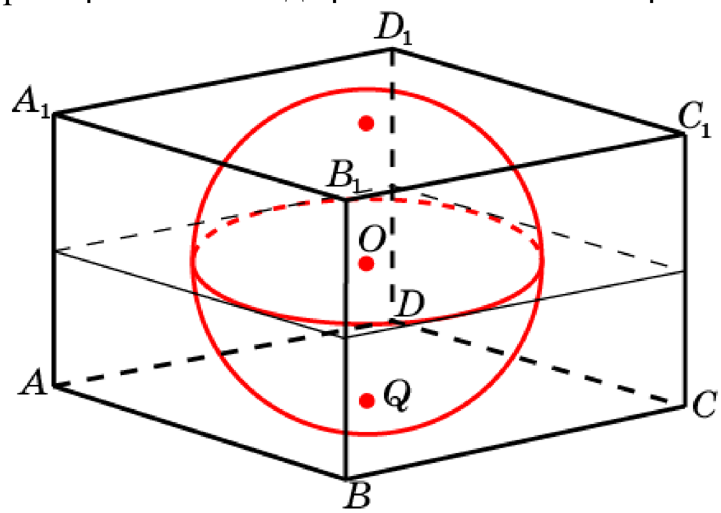

18. Пусть площади граней $ABCD$ и $ADD_1A_1$ равны 20 см$^2$ и 24 см$^2$ соответственно. Тогда площадь грани $ABB_1A_1$ равна 15 см$^2$, а угол $A_1AB$ равен $30^{\circ}$. Пусть $AD = x$. Тогда $AB = \frac{20}{x}$, $AA_1 = \frac{24}{x}$. Имеем равенство $\frac{20}{x} \cdot \frac{24}{x} \cdot \frac{1}{2} = 15$. Откуда находим $x$ = 4 см. Высота, проведенная к грани $ABCD$,

равна половине ребра $AA_1$ и равна 3 см. Следовательно, объем параллелепипеда равен 60 см$^3$.

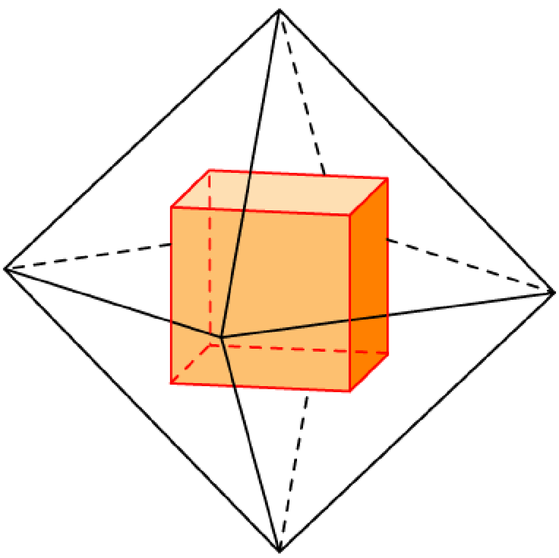
19. Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.



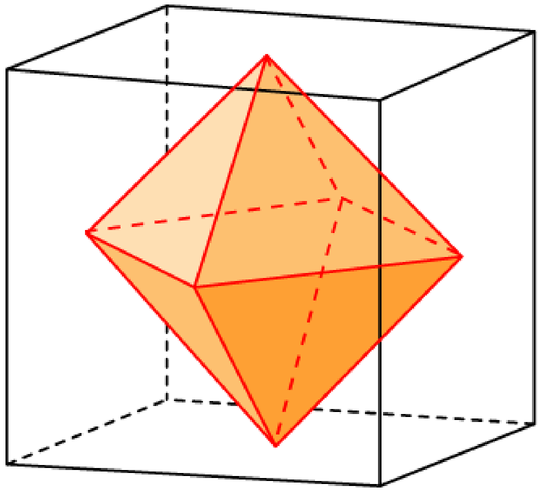
20. Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.



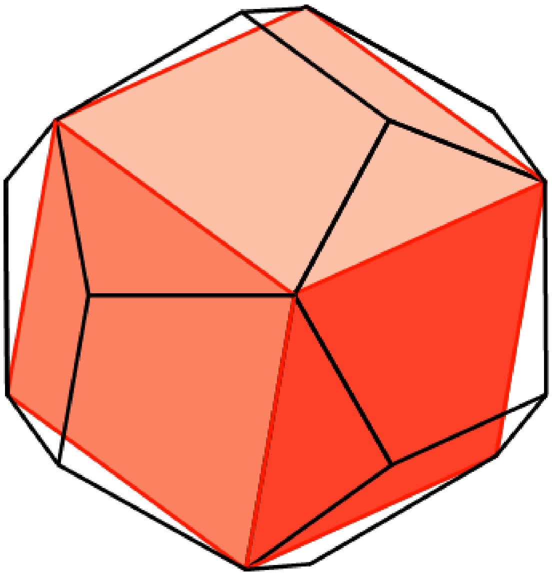

21. Ребро куба равно $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Объем куба равен $\frac{2\sqrt{2}}{27}$



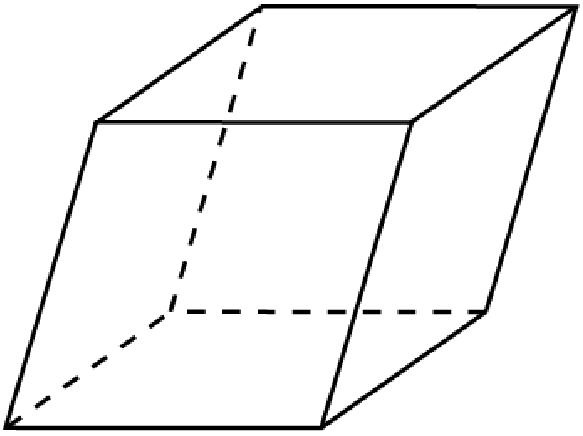
22. Ребро куба равно $\sqrt{2}$. Объем куба равен $2\sqrt{2}$.



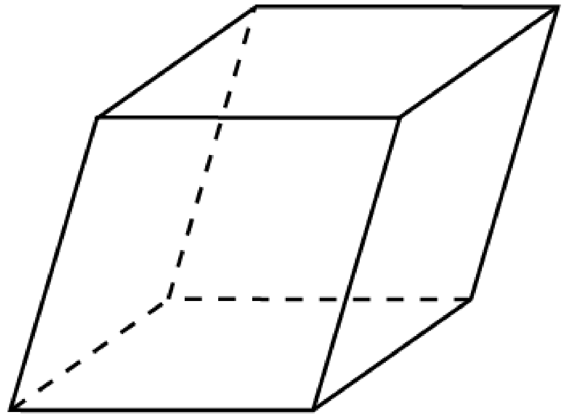
23. Ребро куба равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Объем куба равен $2+\sqrt{5}$.



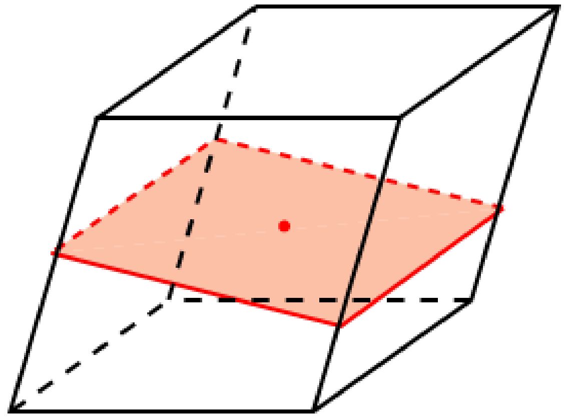
24. Нет, объем будет меньше 1.



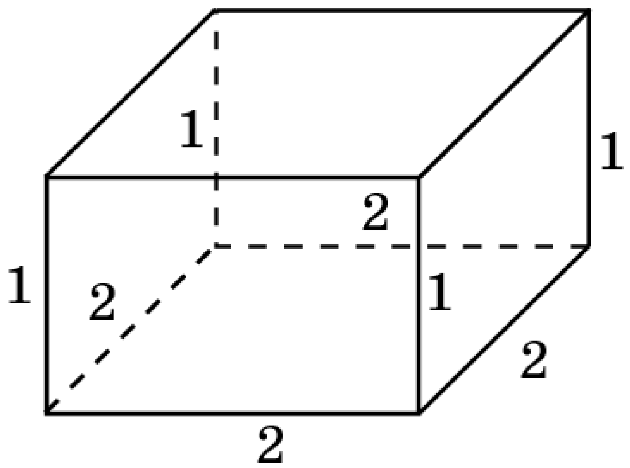
25. Да.



26. Бесконечно много плоскостей, проходящих через центр симметрии параллелепипеда.

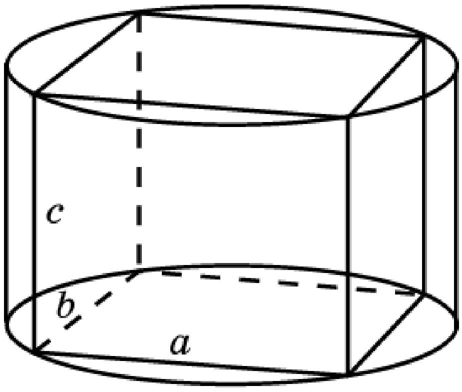


27. Искомым параллелепипедом является прямоугольный параллелепипед, у которого две оставшиеся грани – квадраты со стороной 2. Его объем равен 4.

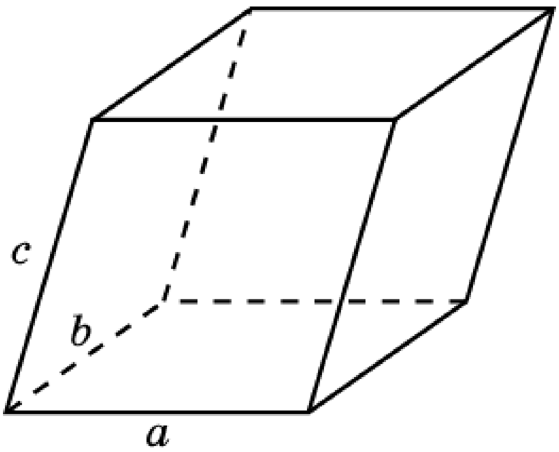


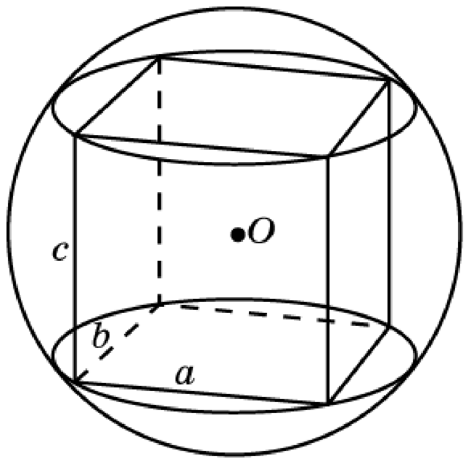

28. Обозначим длины реоер, выходящих из одной вершины $a$, $b$, $c$. Заметим, что $c = 1$ и $a^2 + b^2 = 4$. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего

арифметического и, следовательно, имеет место неравенство $ab \le 2$. Значит, наибольший объем равен 2 в случае, если $a = b = \sqrt{2}, c = 1$.




29. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины *a*, *b*, *c*. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е. $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$. Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб с ребром $\frac{1}{3}$.

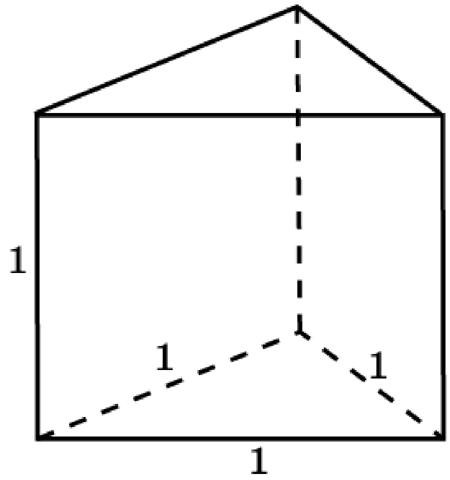


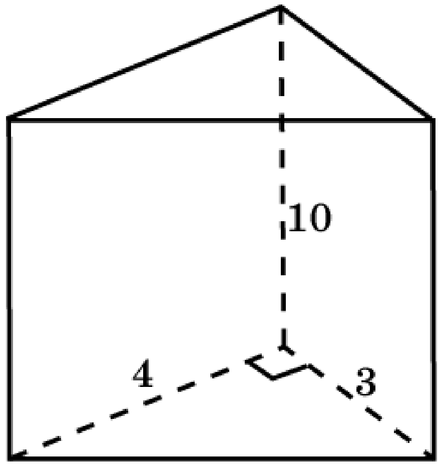

30. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины *a*, *b*, *c*. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Следовательно, имеет место неравенство $abc \le \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Значит, наибольший объем равен $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ в случае, если параллелепипед – куб.

## II. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

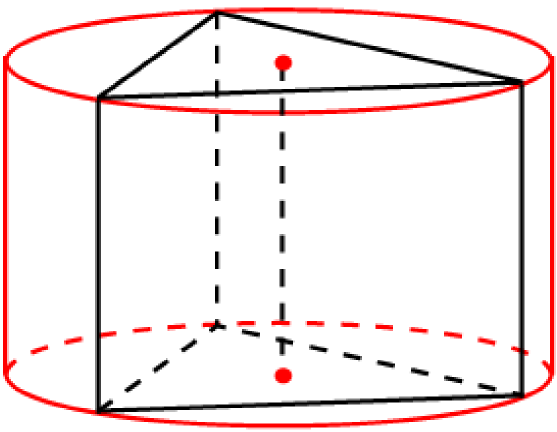
1. Площадь основания призмы равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ее объем равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



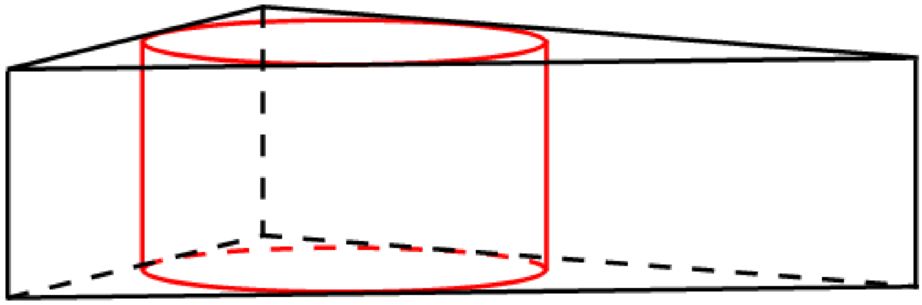

2. Площадь основания призмы равна 6. Объем призмы равен 60.



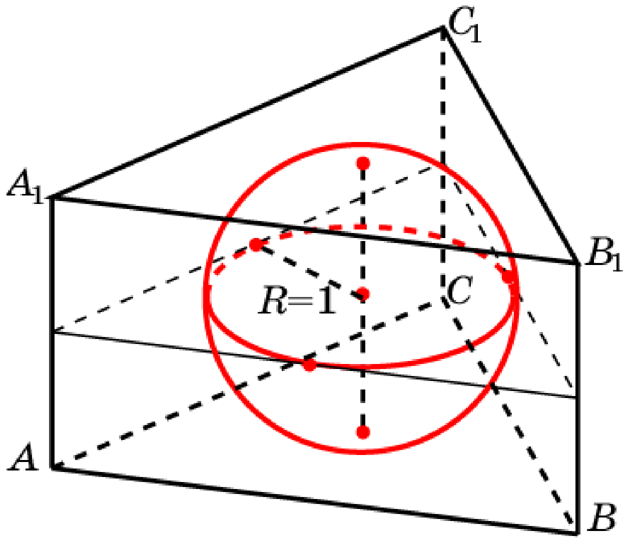

3. Сторона основания призмы равна $\sqrt{3}$. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



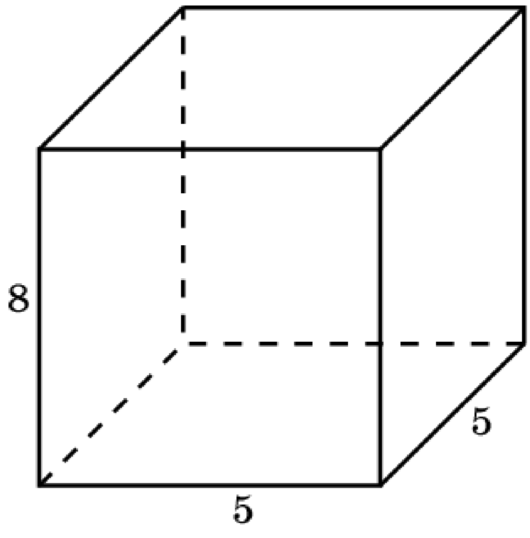
4. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $3\sqrt{3}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{3}$.



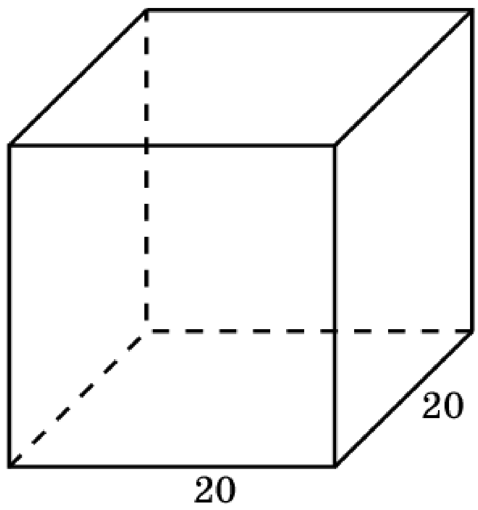
5. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $3\sqrt{3}$. Высота призмы равна 2. Следовательно, объем призмы равен $6\sqrt{3}$.



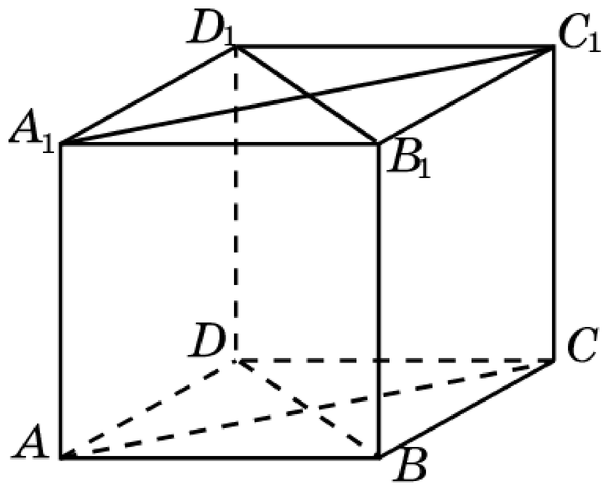

6. Объем равен 200 см$^3$.



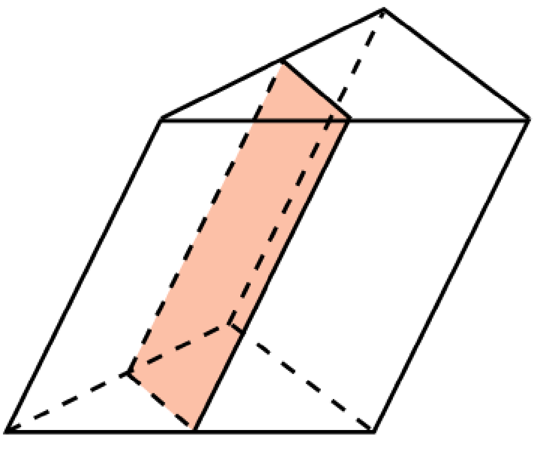
7. Площадь основания призмы равна 400 см$^2$. Боковое ребро равно 12 см.



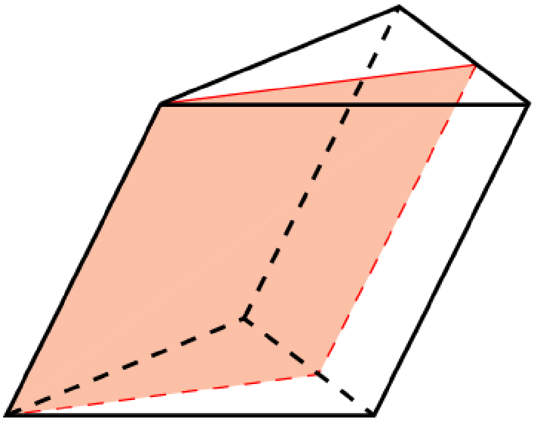

8. Пусть $x$, $y$ – диагонали основания, $h$ – высота призмы. Тогда $xy = 2$, $xh = 3$, $yh = 6$. Откуда $h = 3$. Объем призмы равен 3 м$^3$.



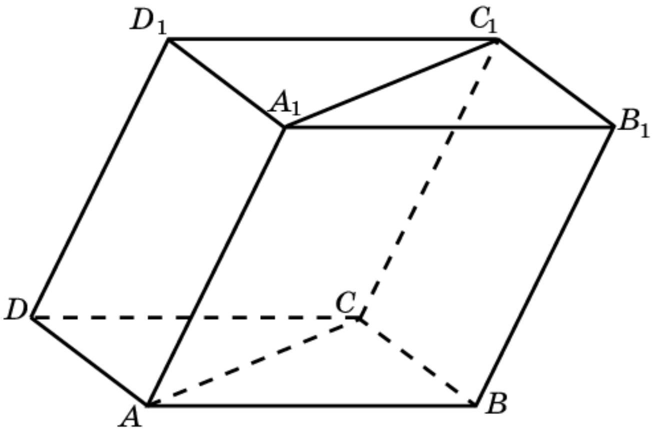

9. Отношение объемов равно 1:3.



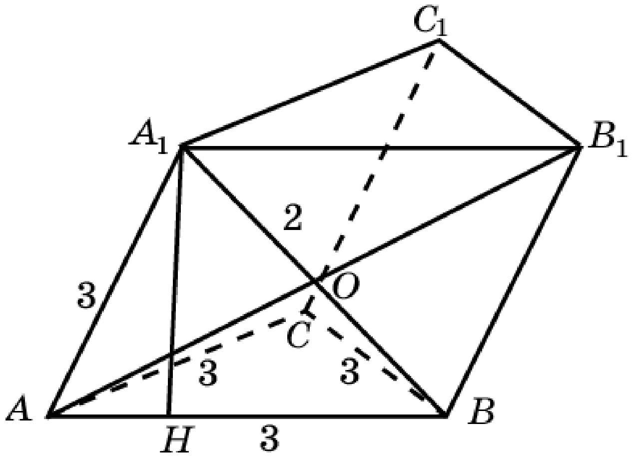
10. Отношение объемов равно $m:n$.



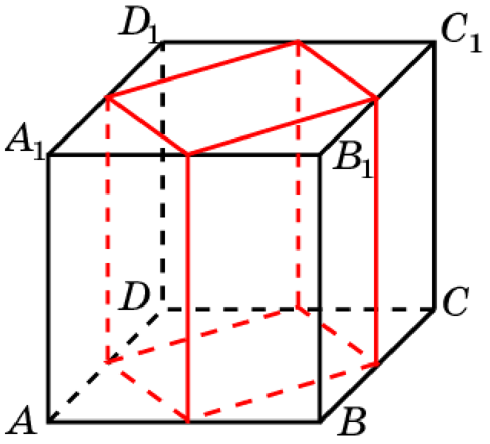
11. Пусть площадь грани $BCC_1B_1$ равна $Q$. Расстояние от этой грани до прямой $AA_1$ равно $d$. Достроим призму до параллелепипеда $A\ldots D_1$. Его объем равен $Q\cdot d$. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{1}{2}Q\cdot d$.



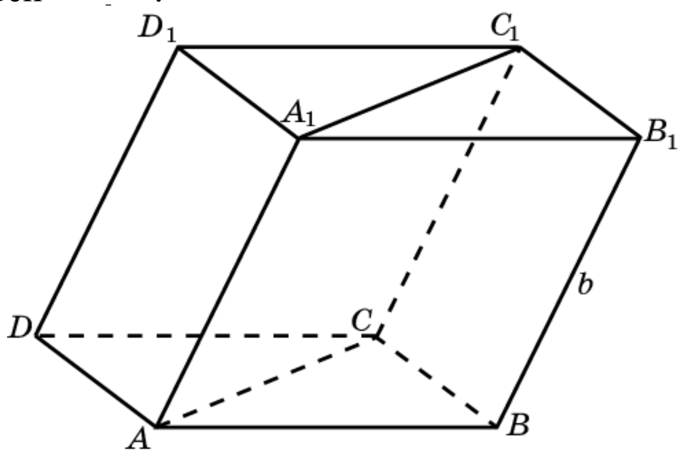

12. Пусть грань $ABB_1A_1$ перпендикулярна плоскости основания $ABC$. Проведем диагональ $AB_1$. Имеем: $AO = 2\sqrt{2}$, площадь ромба $ABB_1A_1$ равна $4\sqrt{2}$, высота $A_1H$ равна $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{6}$.



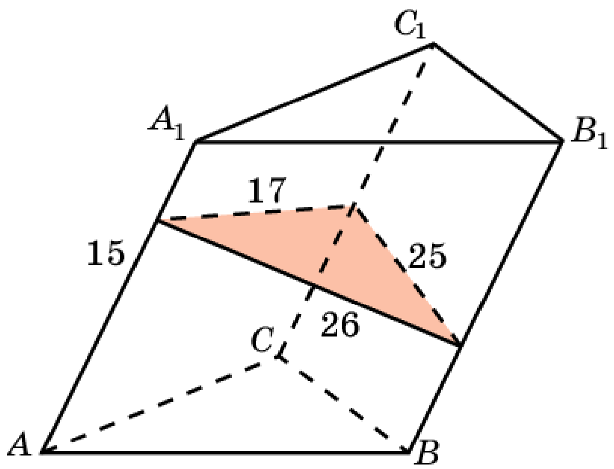
13. Объем оставшейся части равен $\frac{1}{2}$.



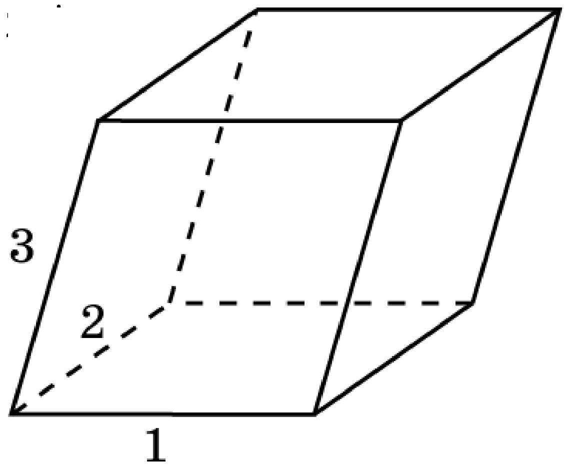

14. Достроим призму до параллелепипеда $A \ldots D_1$. Его объем равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{b}$. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{}$.



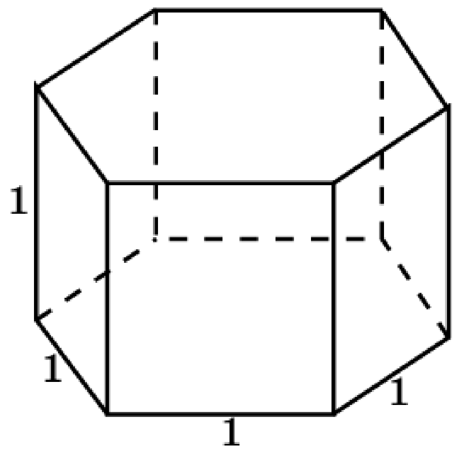

15. Проведем сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Используя формулу Герона найдем площадь сечения. Она равна 204 см$^2$. Объем призмы равен 3060 см$^3$.



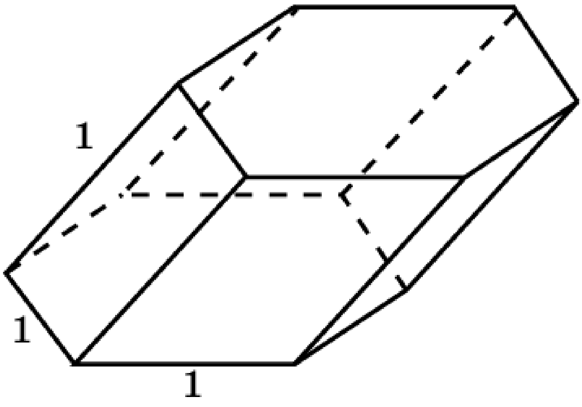
6. Площадь основания призмы равна 1. Высота равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Объем призмы равен $\frac{3\sqrt{2}}{\text{[illegible]}}$.



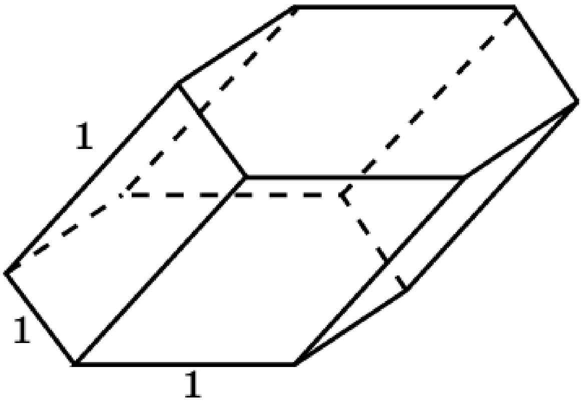

17. Площадь основания призмы равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



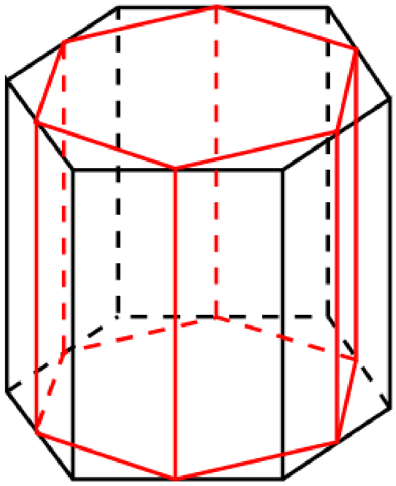

18. Площадь основания призмы равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Высота равна $\frac{1}{2}$. Объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



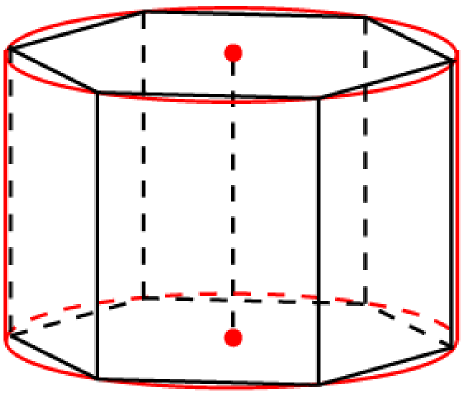
19. Площадь основания призмы равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Высота равна $\frac{1}{2}$. Объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



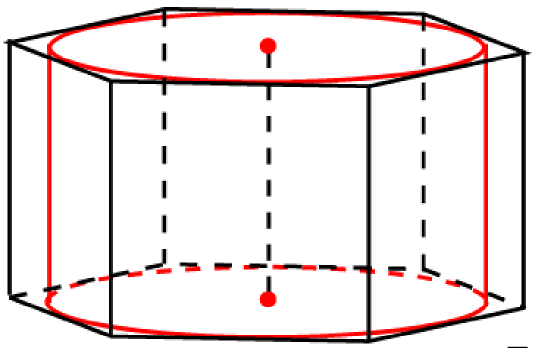

20. Объем призмы равен $\frac{3V}{4}$.



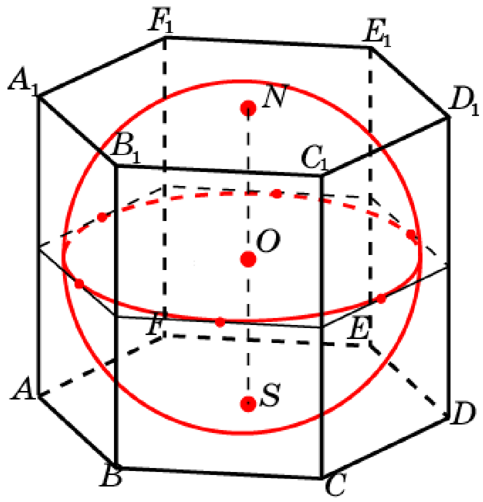
21. Сторона основания призмы равна 1. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



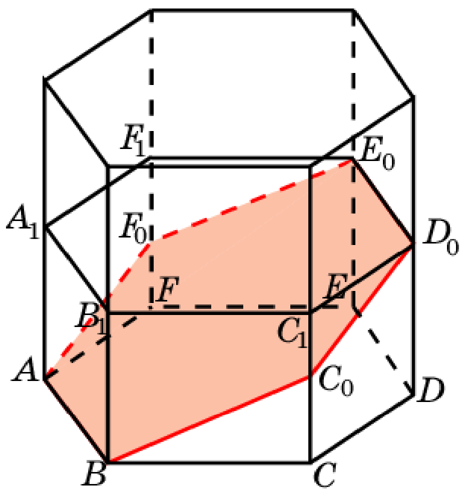
22. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Площадь основания равна $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $2\sqrt{3}$.



23. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Площадь основания равна $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна 2. Следовательно, объем призмы равен $4\sqrt{3}$.

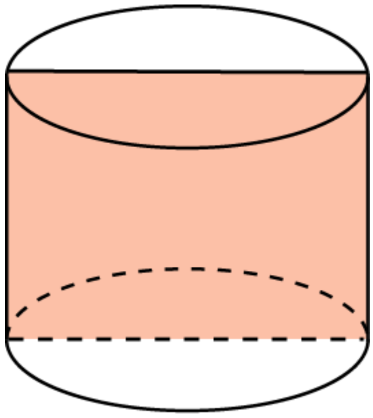



24. Искомый объем равен половине объема правильной шестиугольной призмы, сторона основания и высота которой равны 1. Следовательно, объем части призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

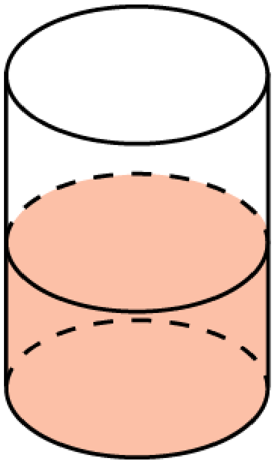


## III. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

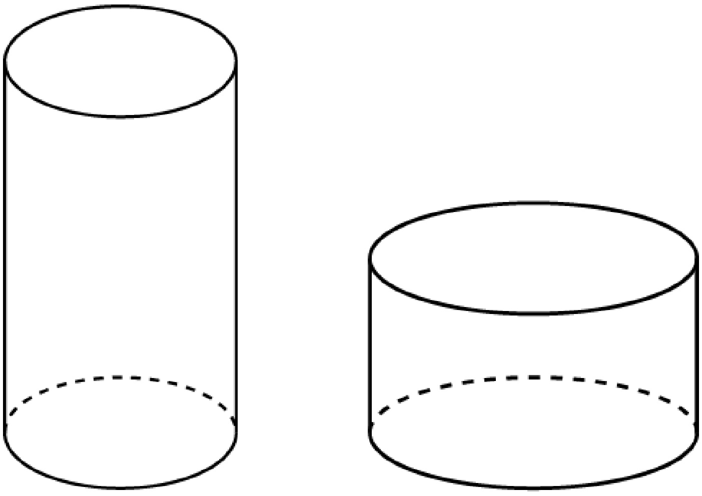
1. Площадь основания цилиндра равна $\frac{\pi}{4}$ см$^2$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi}{4}$ см$^3$.



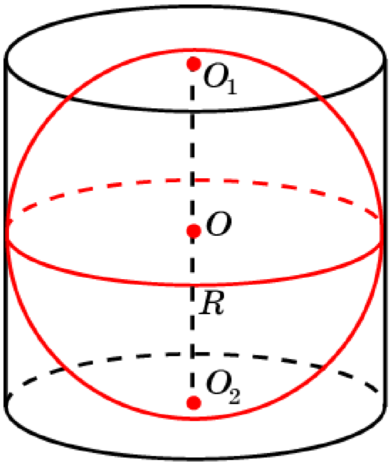
2. Площадь основания цилиндра равна $\frac{81\pi}{4}$ см$^2$. Объем детали равен $243\pi$ см$^3$.



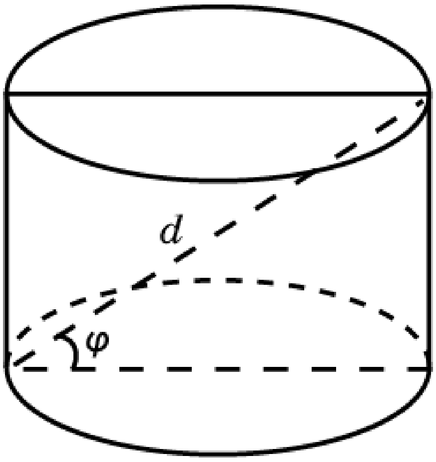
3. Вместительней та кружка, которая шире.



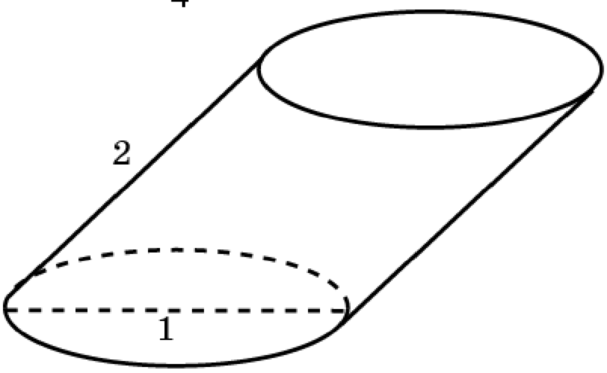
4. Площадь основание цилиндра равна $\pi$. Объем цилиндра равен $2\pi$.




5. Диаметр основания цилиндра равен $d \cdot \cos\varphi$. Площадь основания равна $\frac{\pi d^2 \cos^2 \varphi}{4}$. Высота цилиндра равна $d \cdot \sin\varphi$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi d^3 \cos^2 \varphi \cdot \sin\varphi}{4}$.



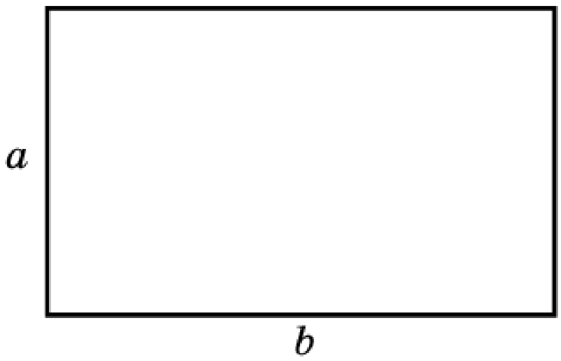

6. Площадь основания цилиндра равна $\frac{\pi}{4}$. Высота цилиндра равна $\sqrt{3}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.



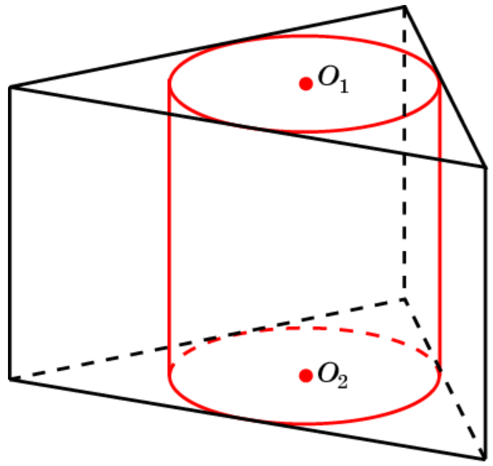
7. В зависимости от выбора основания цилиндра, объем цилиндра равен $\frac{1}{\pi}$ или $\frac{1}{2\pi}$.


8. При вращении квадрата со стороной $a$ получается цилиндр, радиус основания которого равен $a$ и высота равна $a$. Объем этого цилиндра равен $\pi a^3$.

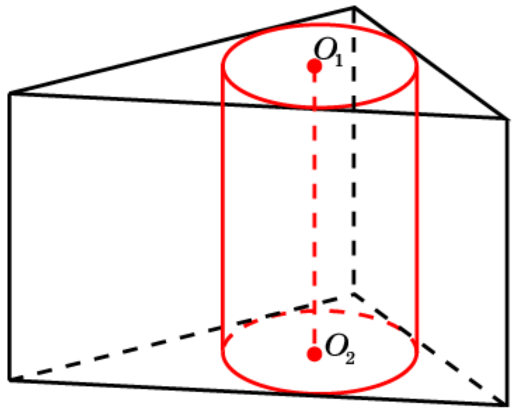

9. Объемы цилиндров относятся как $a$:$b$.



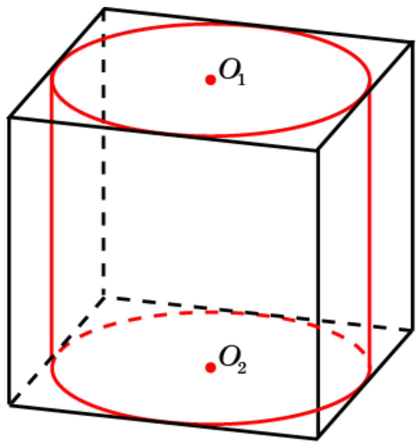
10. Радиус основания цилиндра равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$, высота равна 2. Объем цилиндра равен $\frac{\pi}{6}$.



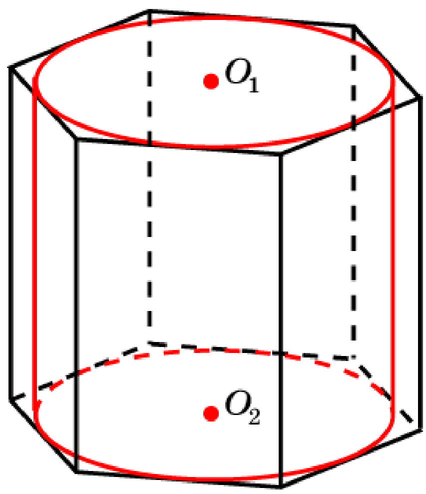

11. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 1. Объем цилиндра равен $4\pi$.



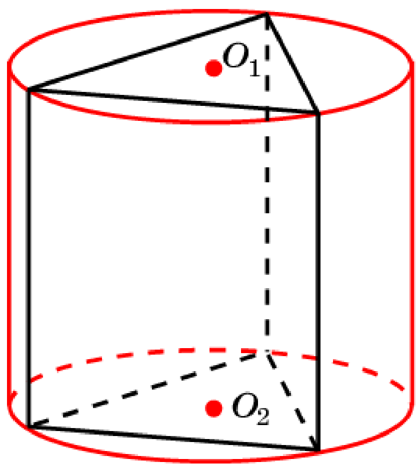

12. Радиус основания цилиндра равен $\frac{1}{2}$, высота равна 1. Объем цилиндра равен $\frac{\pi}{4}$.



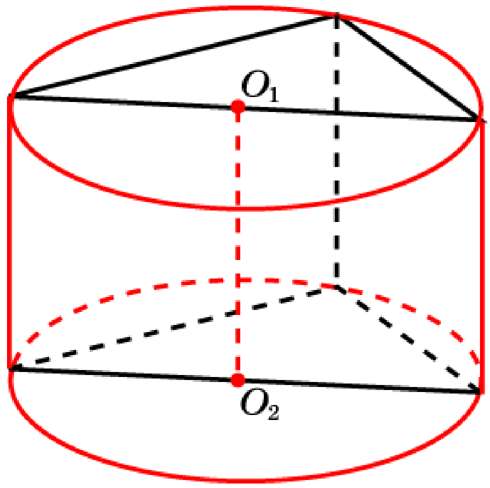
13. Радиус основания цилиндра равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, высота равна 1. Объем цилиндра равен $\frac{3\pi}{2}$.



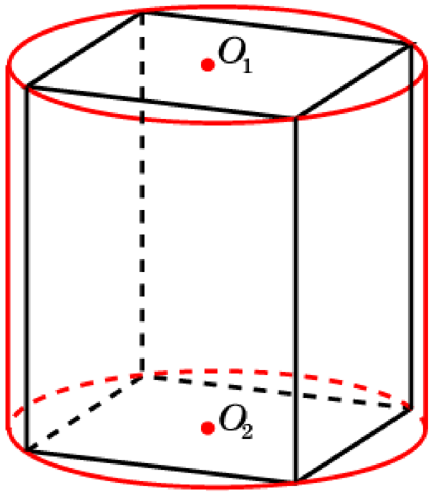

14. Радиус основания цилиндра равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Объем цилиндра равен $\pi$.



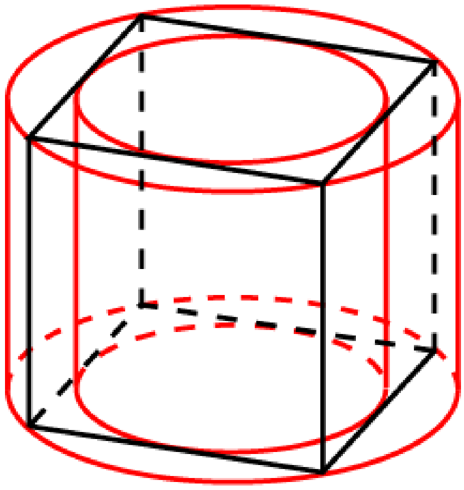

15. Радиус основания цилиндра равен 5. Объем цилиндра равен $125\pi$.



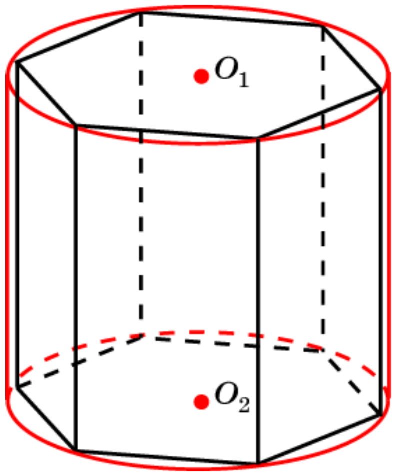
16. Радиус основания цилиндра равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем цилиндра равен $\pi$.



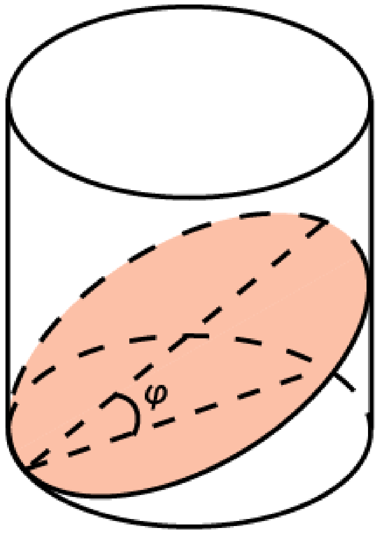

17. Объем описанного цилиндра в 2 раза больше объема вписанного цилиндра.



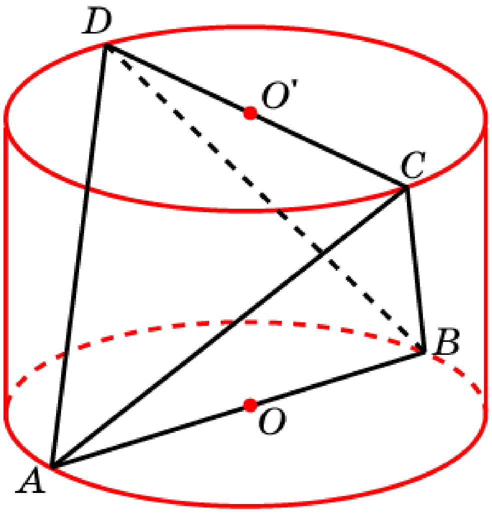
18. Радиус основания цилиндра равен 1. Объем цилиндра равен $2\pi$.



19. Объем отсекаемой части равен половине объема цилиндра, радиус основания которого равен $R$ и высота равна $2R \cdot tg\varphi$. Объем этой части равен $\pi R^3 tg\varphi$.

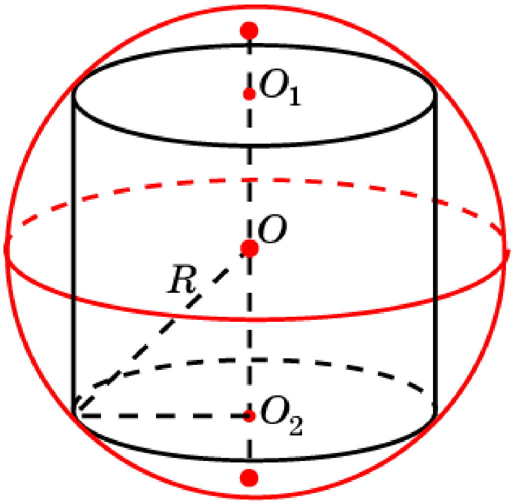



20. Площадь основания цилиндра равна $\frac{\pi}{4}$, а его образующая равна расстоянию между скрещивающимися рёбрами правильного единичного тетраэдра, которое равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Искомый объём равен $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

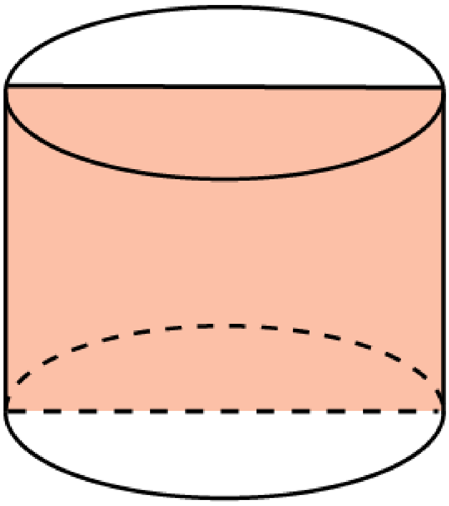



21. Обозначим $x$ половину высоты цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра будет равен $\sqrt{1-x^2}$. Объем цилиндра равен $\pi(1-x^2)2x$. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)=\pi(1-x^2)2x$ на отрезке $[0,1]$ воспользуемся производной. Производная $f'(x)=\pi(2-6x^2)$ обращается в ноль в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, в которой функция

принимает наибольшее значение, равное $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$. Таким образом, наибольший объем равен $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

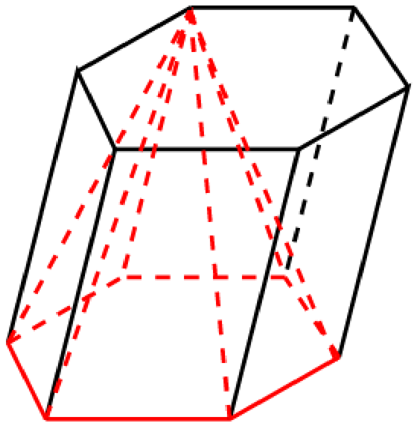



22. Обозначим $x$ диаметр основания цилиндра. Тогда его высота равна $\frac{1}{x}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi x}{4}$. Функция $f(x) = \frac{\pi x}{4}$ неограниченно возрастает и, следовательно, цилиндра наибольшего объема не существует.

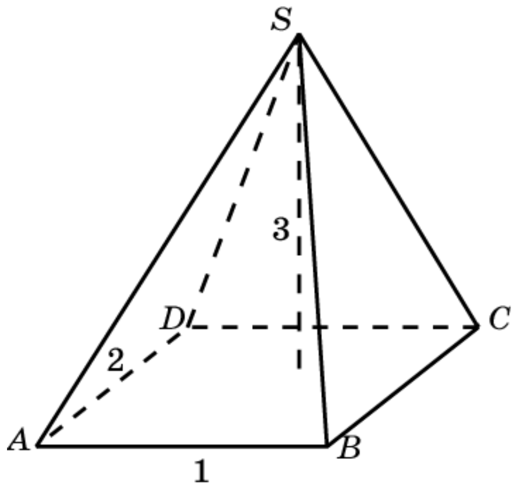


## IV. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

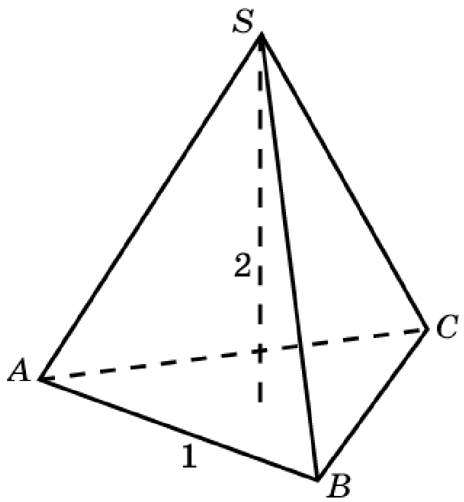
1. Объем пирамиды составляет одну треть объема призмы.



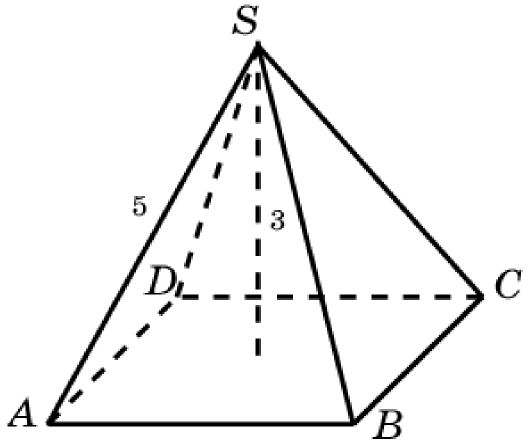
2. Объем пирамиды равен 2.



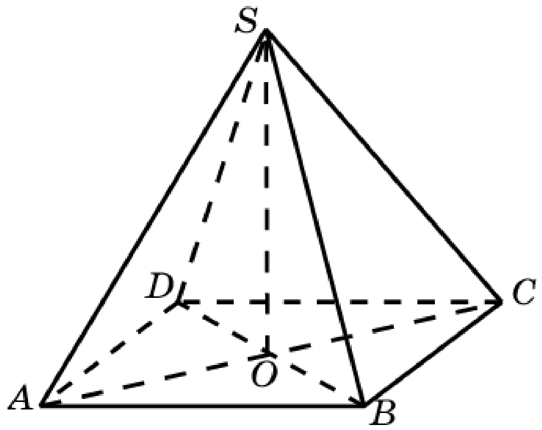

3. Площадь основания пирамиды равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Объем равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



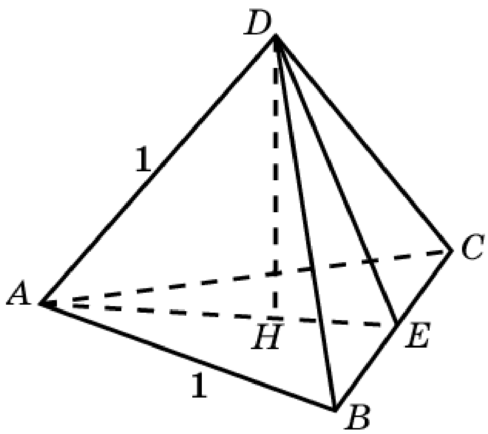
4. Площадь основания пирамиды равна 32 м$^2$. Объем равен 32 м$^3$.



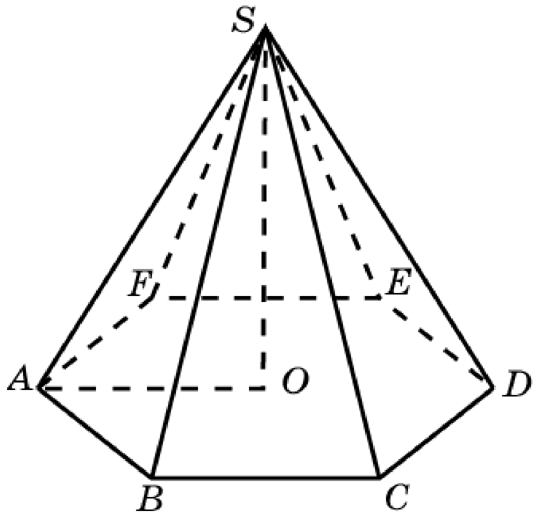

5. Пусть *ACS* – правильный треугольник со стороной 1. Его высота *SO* равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Сторона основания пирамиды равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем призмы равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.



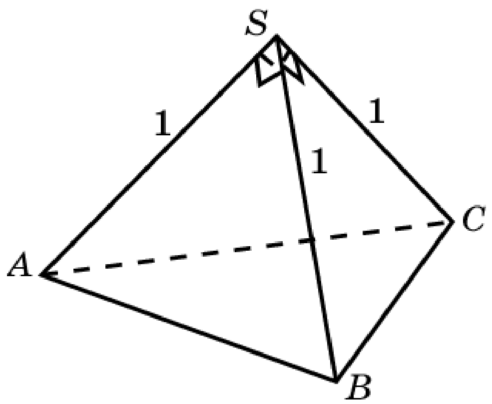

6. Пусть *E* – середина ребра *BC.* В треугольнике *ADE* $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота *DH* равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Площадь треугольника *ABC* равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{12}$.



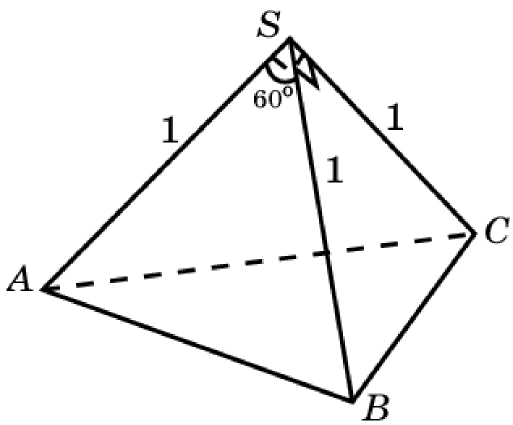
7. Площадь основания пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см$^2$. Высота $SO$ равна $4\sqrt{3}$ см. Боковое ребро равно 7 см.



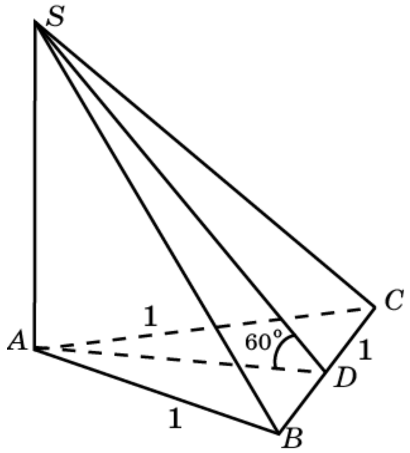

8. Примем треугольник $ABS$ за основание пирамиды. Тогда $SC$ будет высотой. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$.



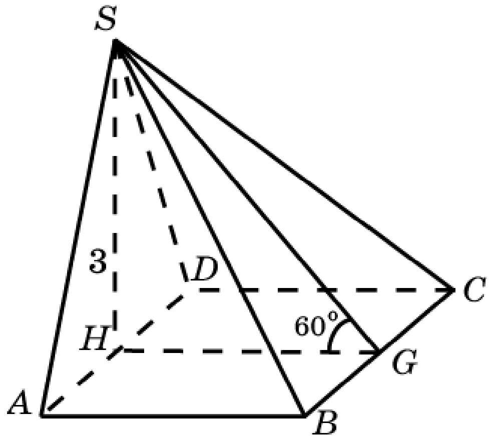

9. Примем треугольник $ABS$ за основание пирамиды. Тогда $SC$ будет высотой. Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.



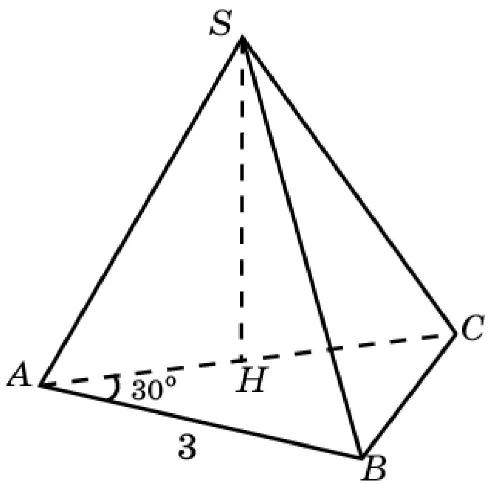
10. Площадь треугольника *ABC* равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Высота *SA* равна $\frac{3}{2}$. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{8}$.



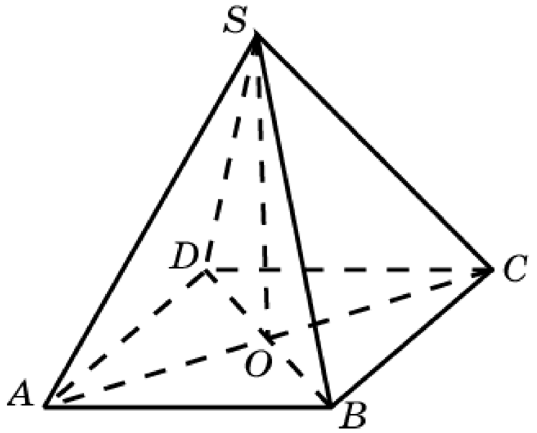

11. Треугольник *SAD* равносторонний со стороной $2\sqrt{3}$, $AB = GH = \sqrt{3}$. Площадь прямоугольника *ABCD* равна 6. Следовательно, объем пирамиды равен 6.



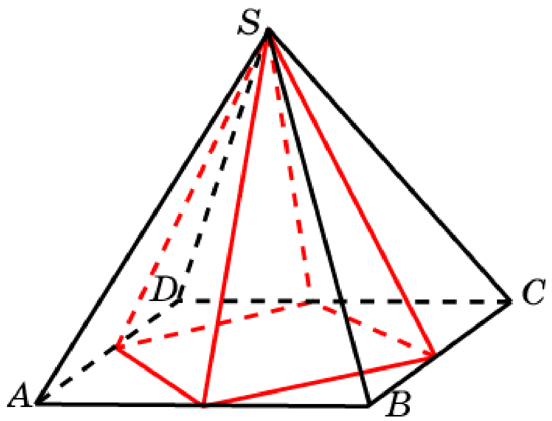

12. Площадь треугольника *ABC* равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Основанием высоты *SH* служит середина *AB*. Треугольник *SAB* – равносторонний со стороной, равной $2\sqrt{3}$. Его высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



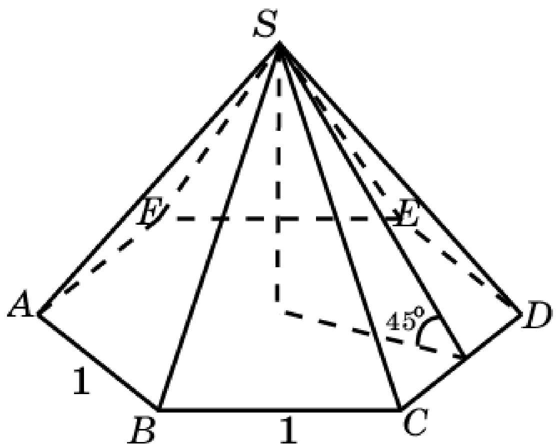
13. Площадь основания пирамиды равна 120 см$^2$. Сторона основания равна 13 см. Высота ромба равна $\frac{120}{13}$ см. Высота пирамиды равна $\frac{20\sqrt{3}}{13}$ см. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{800\sqrt{3}}{13}$ см$^3$.



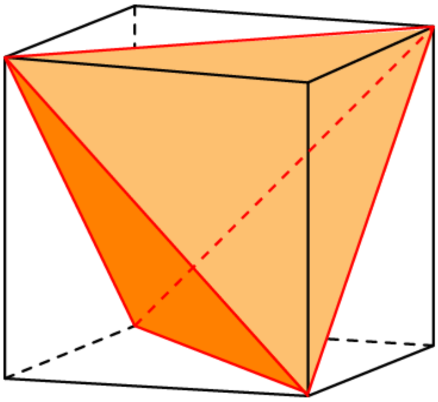

14. Объем оставшейся части равен $\frac{1}{2}$.



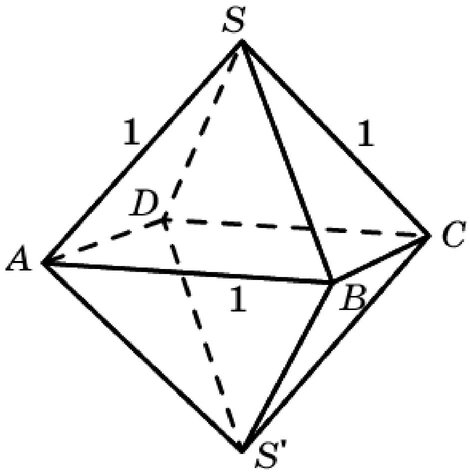

15. Площадь основания пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объем равен $\frac{3}{4}$.



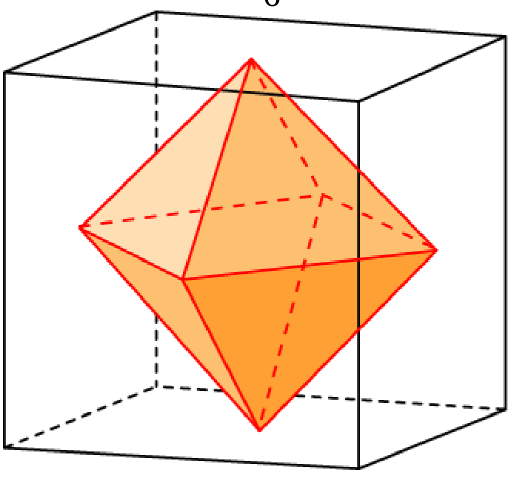
16. Тетраэдр получается отсечением от куба четырех пирамид, каждая объемом $\frac{1}{6}$. Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}$.



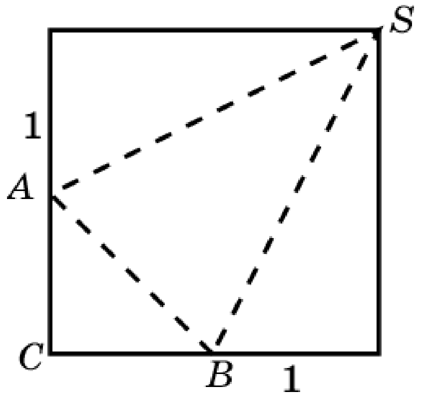
17. Октаэдр состоит из двух равных правильных четырехугольных пирамид со стороной основания 1 и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем октаэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



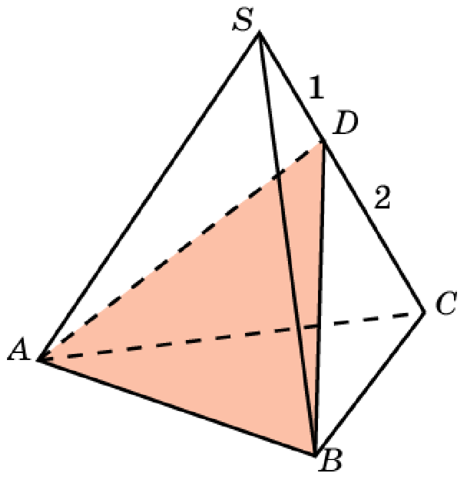

18. Ребро октаэдра равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Используя предыдущую задачу, получаем, что объем октаэдра равен $\frac{1}{6}$.



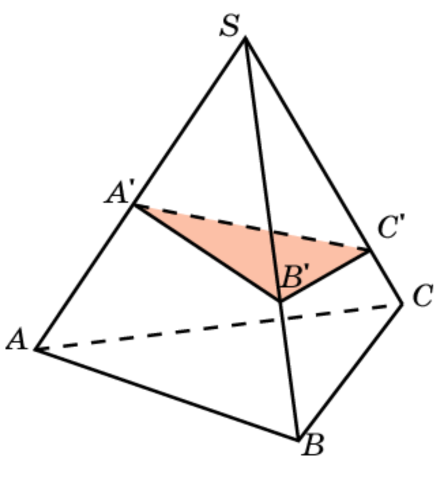
19. Основанием пирамиды будет прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами, равными 0,5. Высота пирамиды будет равна стороне квадрата. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{1}{24}$.



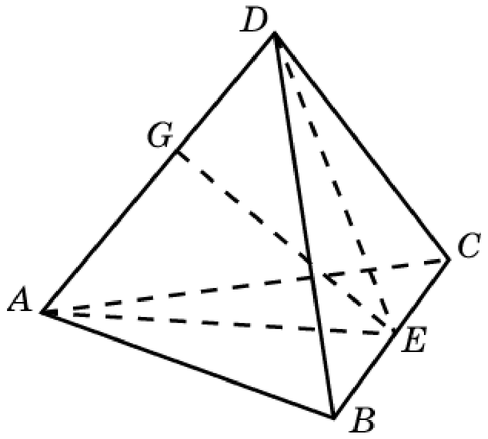

20. Объем пирамиды делится в отношении 1:2.



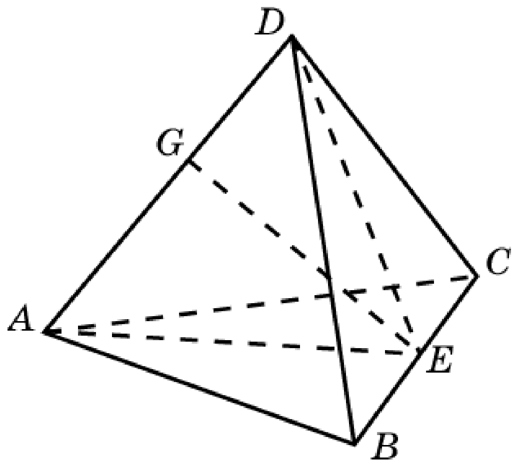

21. Площадь треугольника $SA'B'$ составляет одну треть площади треугольника $SAB$. Высота, опущенная из точки $C'$, составляет три четверти высоты пирамиды $SA'B'C'$, опущенной из вершины $C$. Следовательно, объем пирамиды $SA'B'C'$ равен $\frac{1}{4}$.



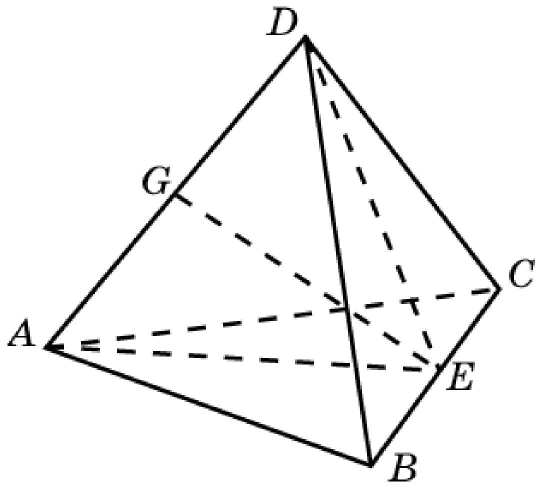
22. Пусть $AD$ перпендикулярно $BC$. Проведем сечение $ADE$, перпендикулярное $BC$. Площадь треугольника $ADE$ равна 3. Объем пирамиды равен 3.



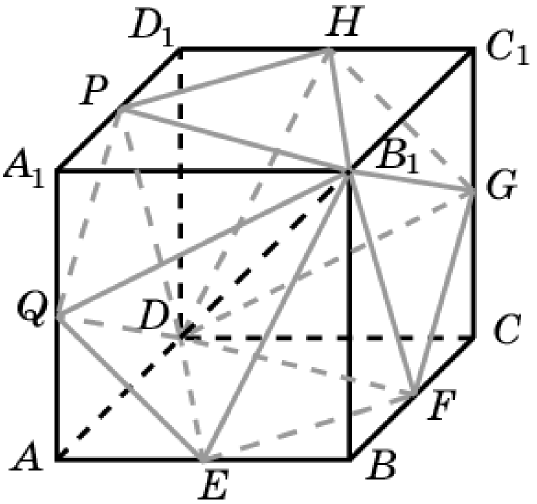

23. Пусть угол между ребрами $AD$ и $BC$ тетраэдра равен $60^{\circ}$. Проведем их общий перпендикуляр $EG$. Площадь треугольника $ADE$ равна 3. Угол между прямой $BC$ и плоскостью $ADE$ равен $60^{\circ}$. Объем пирамиды равен $\sqrt{3}$.



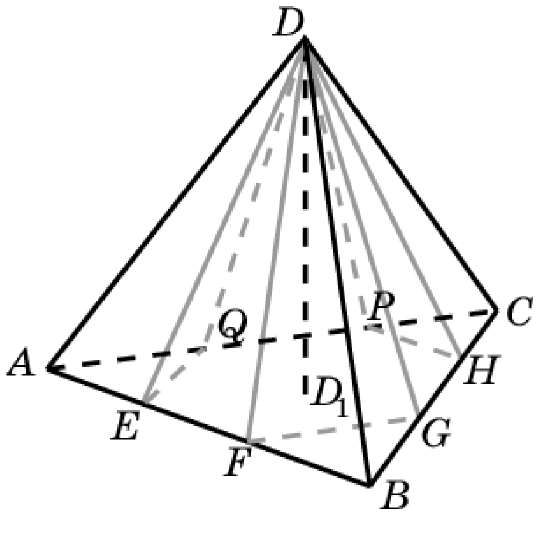

24. Пусть в тетраэдре $ABCD$ ребро $BC = 6$. Обозначим $E$ середину $BC$. $AE = DE = \sqrt{7}$. Высота $EG$ треугольника $ADE$ равна $\sqrt{3}$. Его площадь равна $2\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $4\sqrt{3}$.



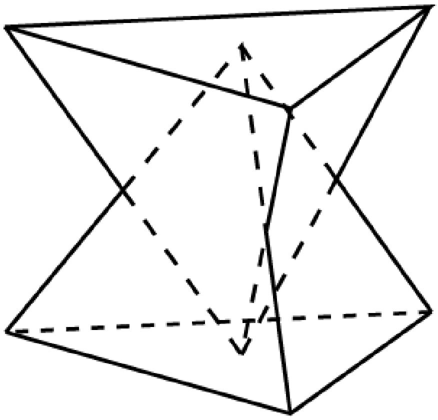
25. Общей частью исходного куба и повернутого является правильная 6-ая бипирамида, состоящая из двух правильных 6-х пирамид с вершинами $D$, $B_1$ и общим основанием $EFGHPQ$. стороны общего основания пирамид равны $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а их высоты равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем этой бипирамиды равен $\frac{3a^3}{4}$.



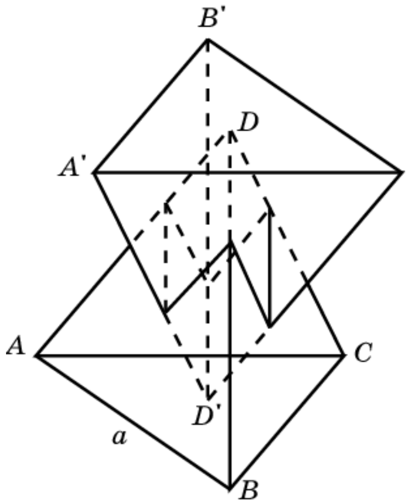

26. Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является правильная шестиугольная пирамида с вершиной $D$ и основанием $EFGHPQ$. Сторона основания равна $\frac{a}{3}$, высота пирамиды равна $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.



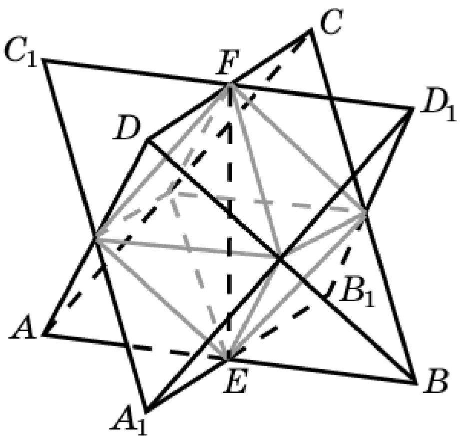

27. Общей частью является правильная треугольная бипирамида со стороной основания $\frac{a}{2}$ и высотой $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.



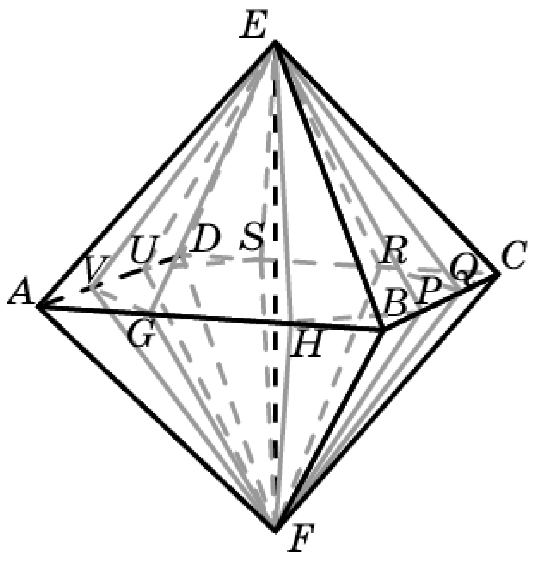
28. Общей частью является параллелепипед, все грани которого – ромбы с острым углом 60°. Ребра параллелепипеда равны $\frac{a}{3}$. Его объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.




29. Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является октаэдр (правильная 4-я бипирамида с вершинами *E* и *F*) с ребром $\frac{a}{2}$. Искомый объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

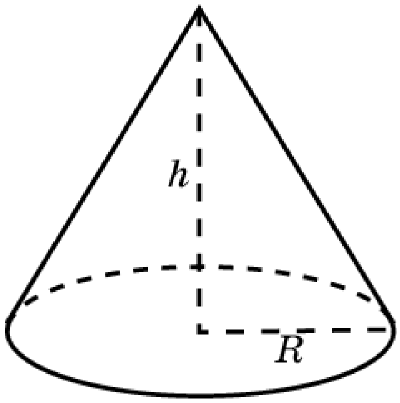


30. Общей частью исходного октаэдра и повернутого является правильная 8-я бипирамида с вершинами *E*, *F* и основанием *GHPQRSUV* Площадь основания равна $2\sqrt{2}-2$, высота равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем общей части равен $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.

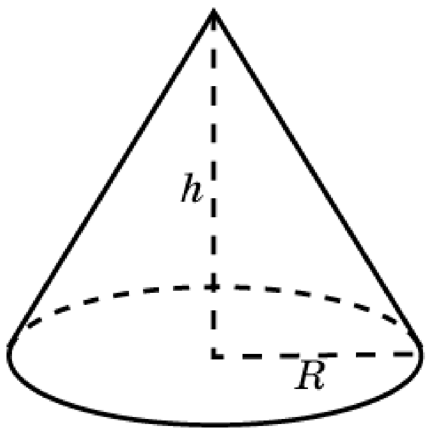


## V. ОБЪЕМ КОНУСА

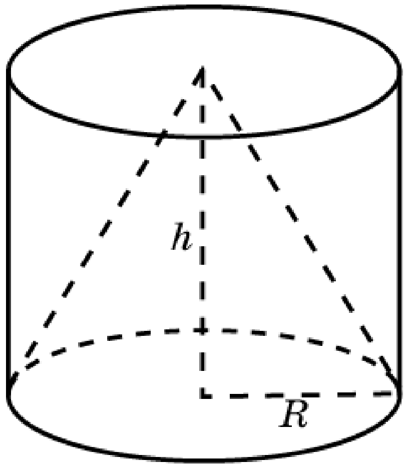
1. Увеличится в: а) 3 раза; б) 4 раза.



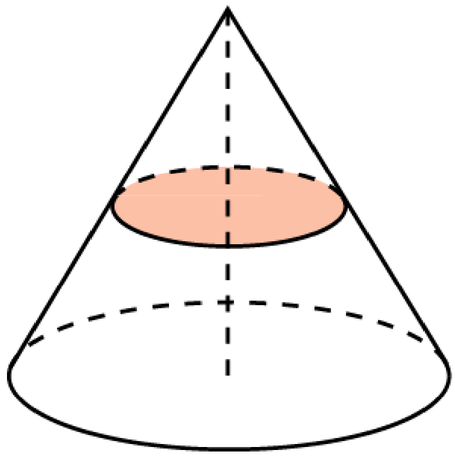

2. Увеличится в 2 раза.



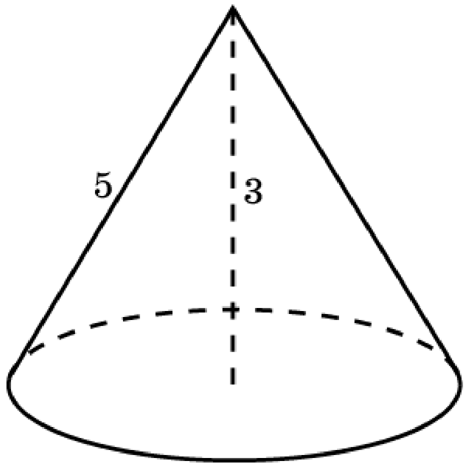

3. Объем конуса равен $40\pi$ см$^3$.



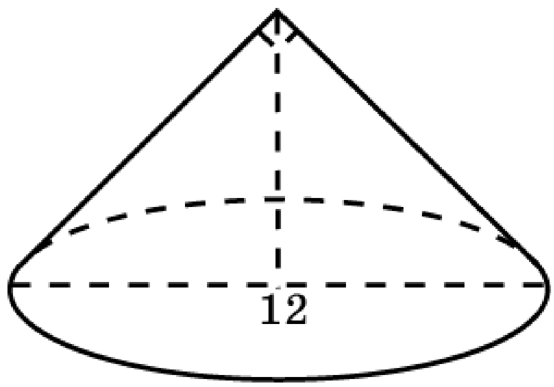
4. Объем конуса делится в отношении 1:7.



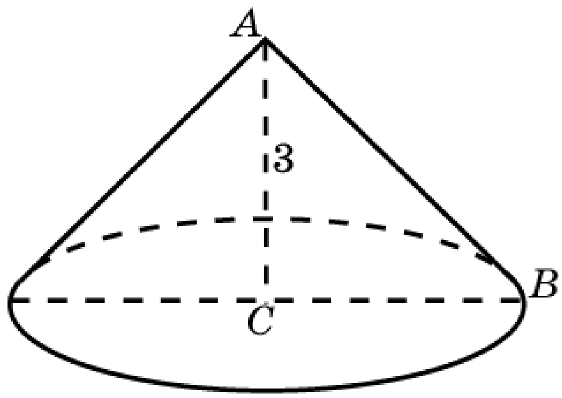
5. Радиус основания конуса равен 4 см. Объем равен $16\pi$ см$^3$.



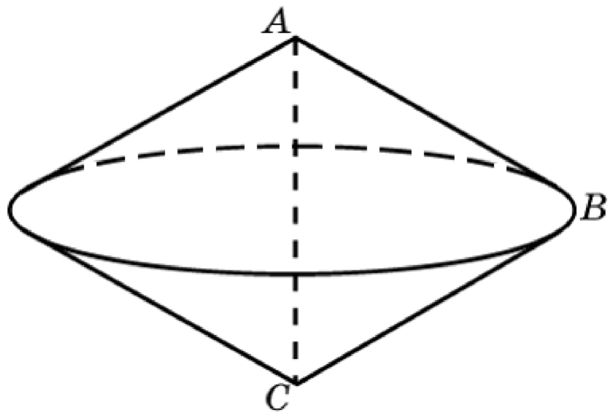

6. Радиус основания конуса равен 6 см. Высота равна 6 см. Объем равен $72\pi$ см$^3$.



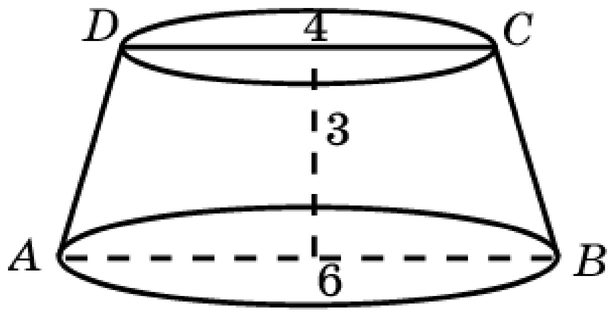
7. Радиус основания конуса равен 3 см. Высота равна 3 см. Объем равен $9\pi\,см^3$.



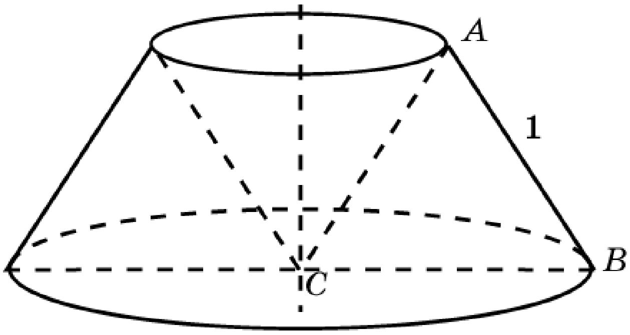

8. Тело вращения состоит из двух равных конусов с радиусами оснований $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и высотами, равными $\frac{1}{2}$. Объем тела равен $\frac{\pi}{4}$.



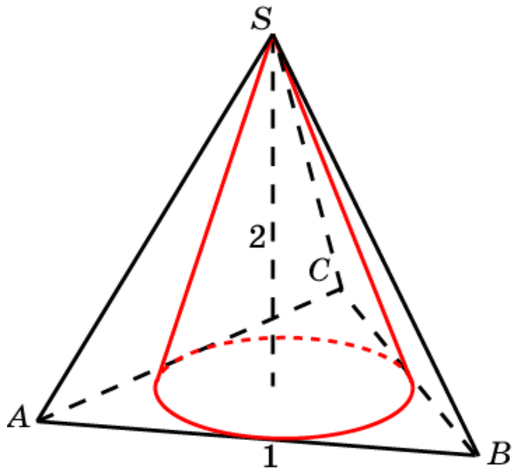

9. Телом вращения является усеченный конус, радиусы оснований которого равны 3 см и 2 см, высота равна 3 см. Его объем равен $19\pi\,см^3$.



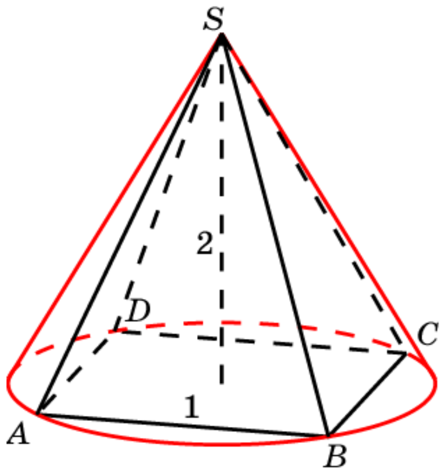
10. Телом вращения является усеченный конус (радиусы оснований которого равны 1 и 0,5, высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$), из которого вырезан конус с радиусом основания 0,5 и высотой $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объем этого тела равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.



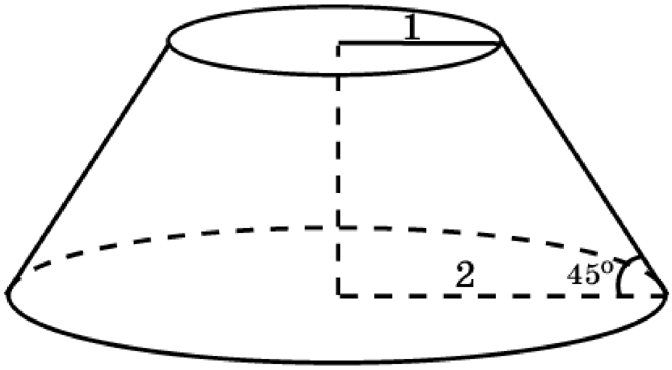

11. Радиус основания конуса равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Высота равна 2. Объем равен $\frac{\pi}{18}$.



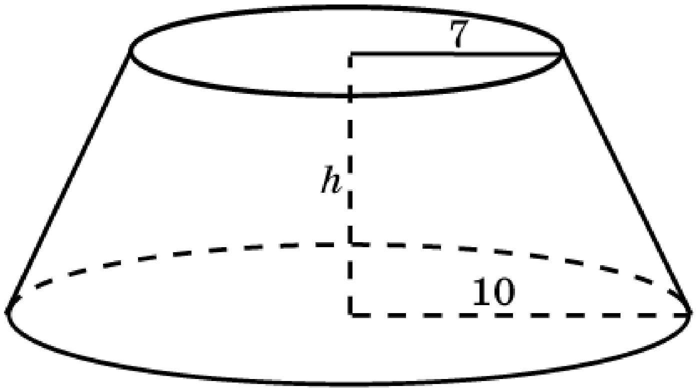

12. Радиус основания конуса равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота равна 2. Объем равен $\frac{\pi}{3}$.



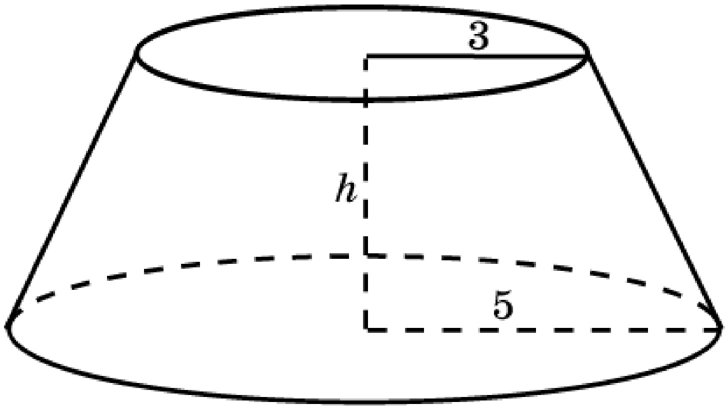
13. Высота усеченного конуса равна 1. Объем равен $\frac{7\pi}{3}$.



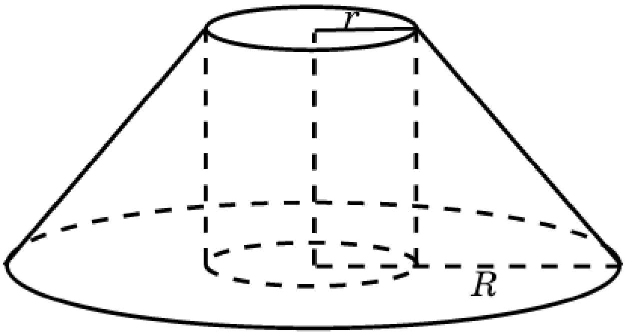

14. Высота усеченного конуса равна 8 см.



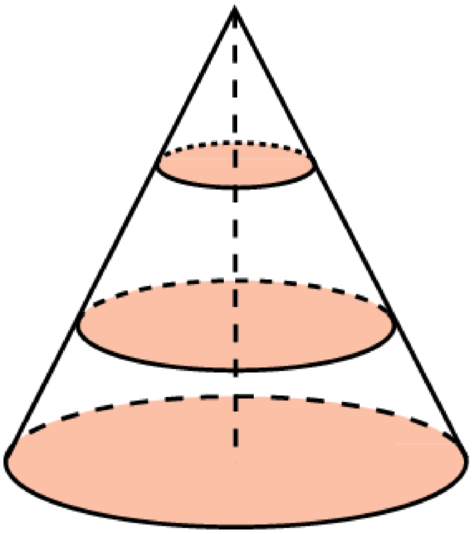

15. Радиус основания конуса равен 7 см.



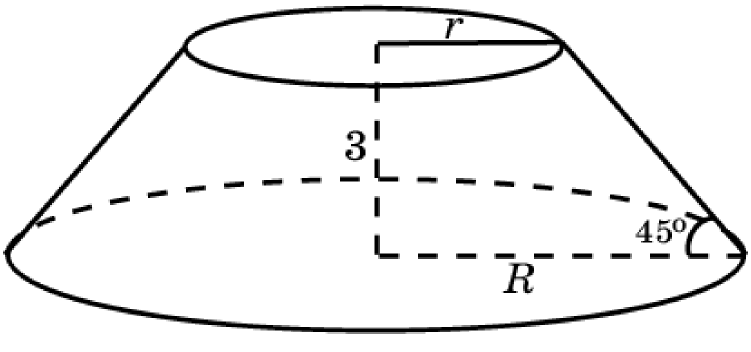
16. $R = 4r$.



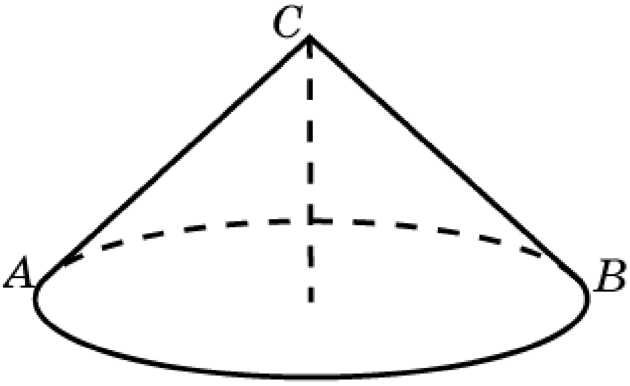

17. Объем средней части конуса равен $\frac{7}{27}$.



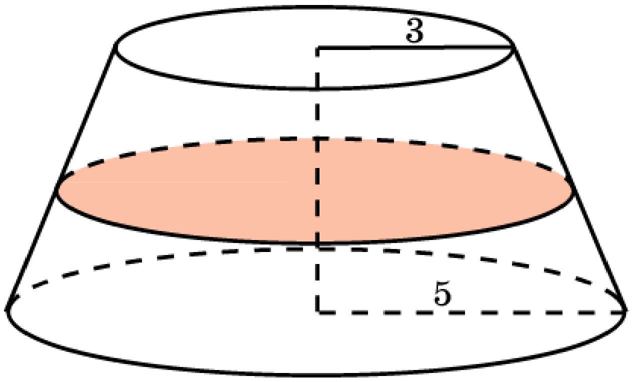
18. Объем усеченного конуса равен $63\pi$.



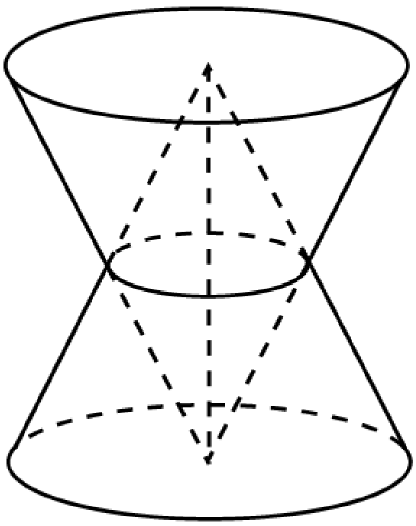
19. Радиус основания конуса равен 3 см, высота равна 3 см. Объем равен $9\pi$ см$^3$.



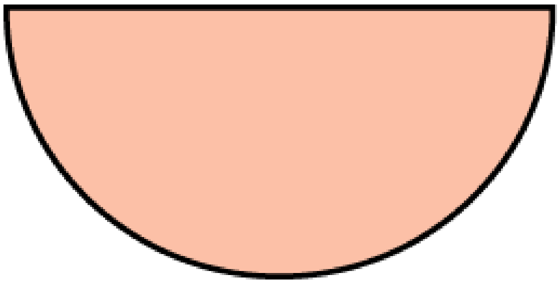

20. Отношение объемов равно 37:61.



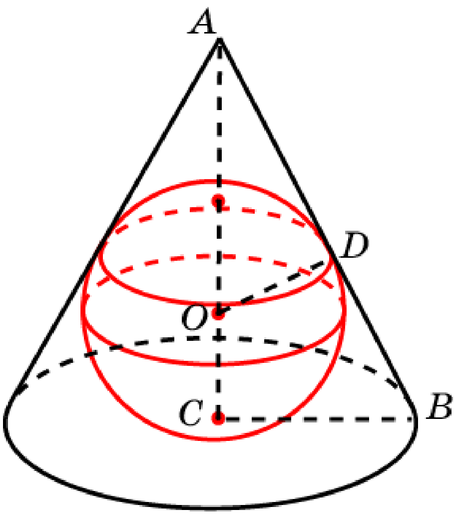

21. Общей частью является тело, составленное из двух равных конусов, радиусы оснований и высоты которых в два раза меньше радиусов оснований и высот данных конусов. Объем этого тела равен $\frac{1}{4}$.



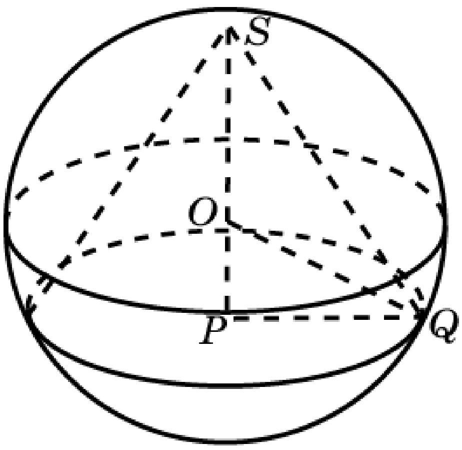
22. Радиус основания конуса равен 1. Высота равна $\sqrt{3}$. Объем равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.



23. Треугольники $ABC$ и $AOD$ подобны. Следовательно, $\frac{BC}{AC}=\frac{OD}{AD}$. Пусть $AO = x$. Имеем: $BC = 2$, $AC = 1+x$, $OD = 1$, $AD = \sqrt{x^2-1}$. Откуда находим $x=\frac{5}{3}$. Таким образом, высота конуса равна $\frac{8}{3}$. Объем конуса равен $\frac{32\pi}{9}$.

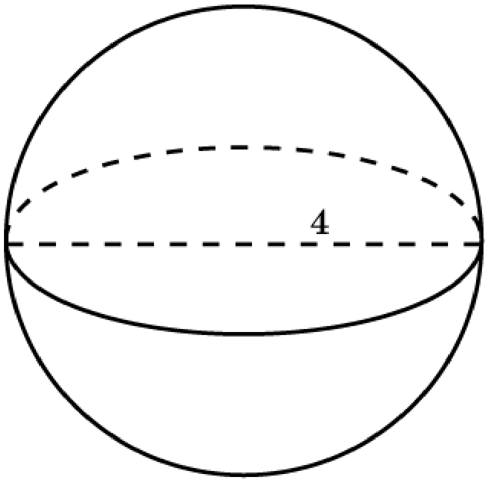



24. Пусть $O$ – центр сферы, $PQ$ – радиус основания конуса. В прямоугольном треугольнике $OPQ$ имеем: $OQ = 5$, $OP = 3$. Следовательно, $PQ = 4$. Объем конуса равен $\frac{128\pi}{3}$.

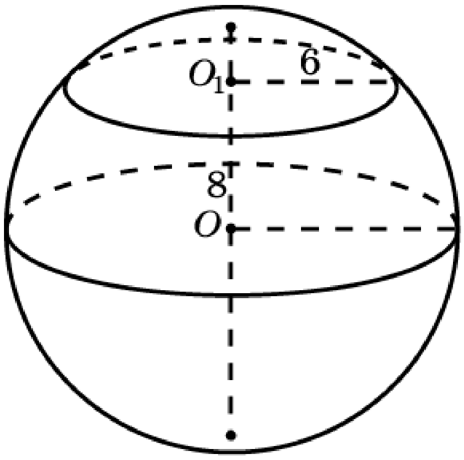


## VI. ОБЪЕМ ШАРА

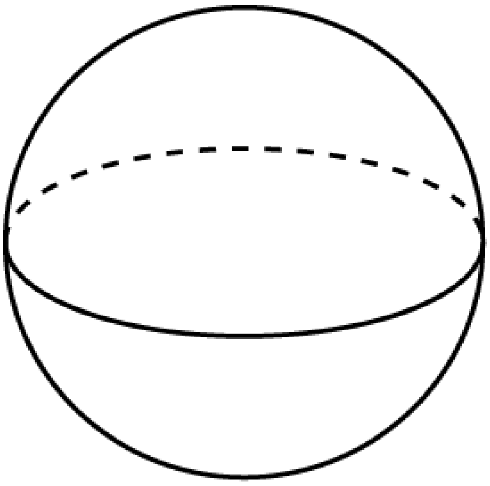
1. Объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$ см$^3$.



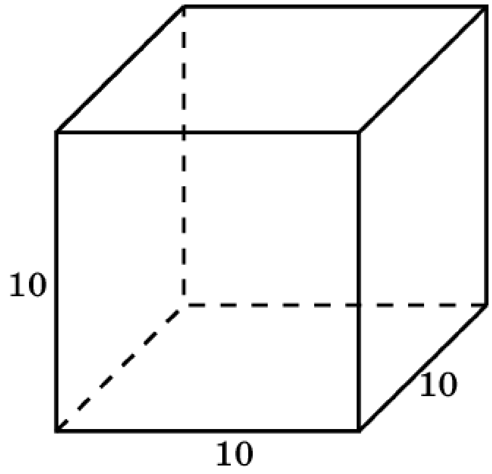

2. Радиус шара равен 10 см. Объем шара равен $\frac{4000}{3}\pi$ см$^3$.



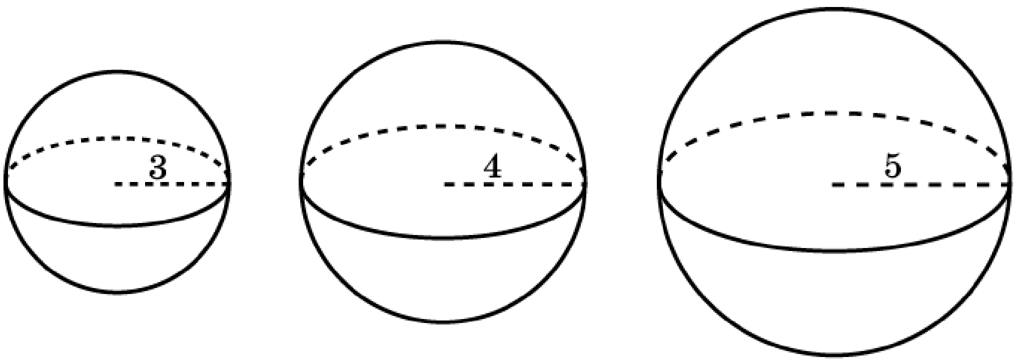

3. Увеличится в: а) 27 раз; б) 64 раза.



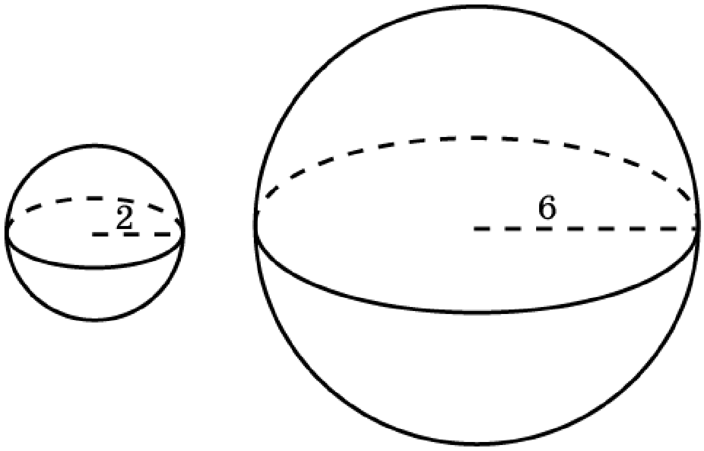
4. Радиус шара равен $5\sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}}$ см.



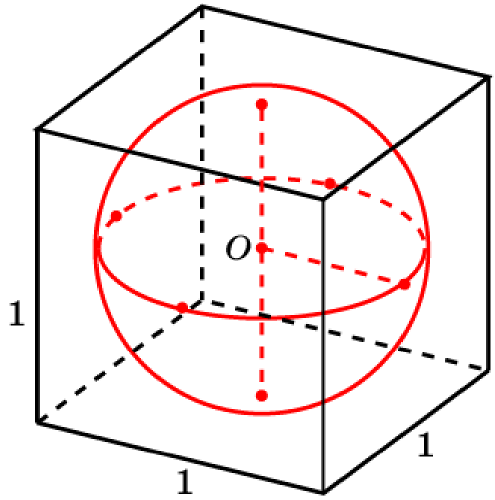

5. Радиус шара равен 6 см.



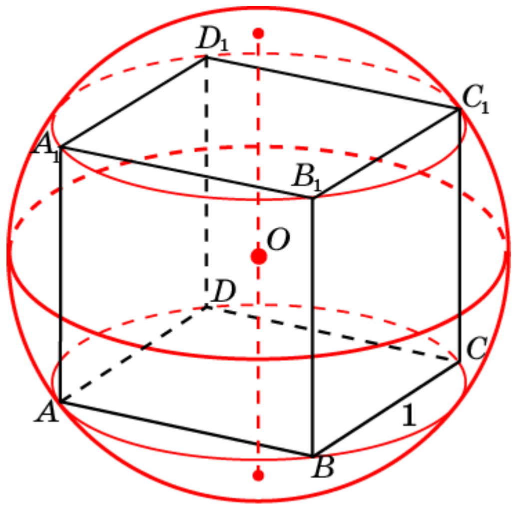

6. 27 шаров.



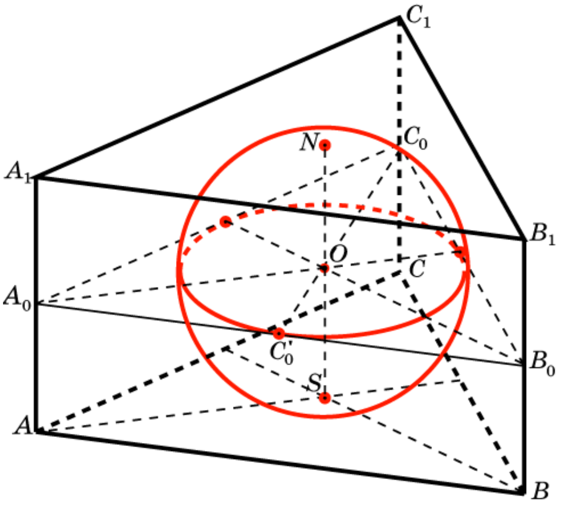
7. Радиус шара равен 0,5. Объем шара равен $\frac{\pi}{6}$.



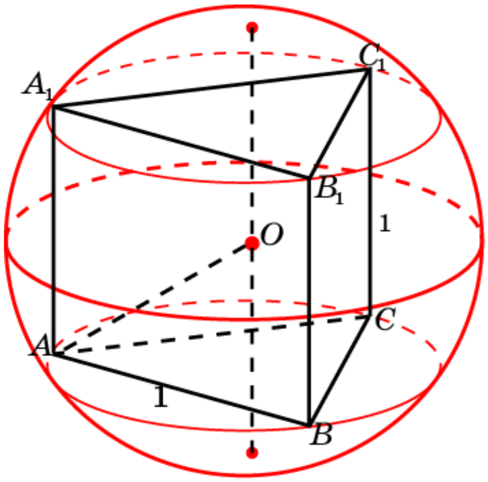

8. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объем шара равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.



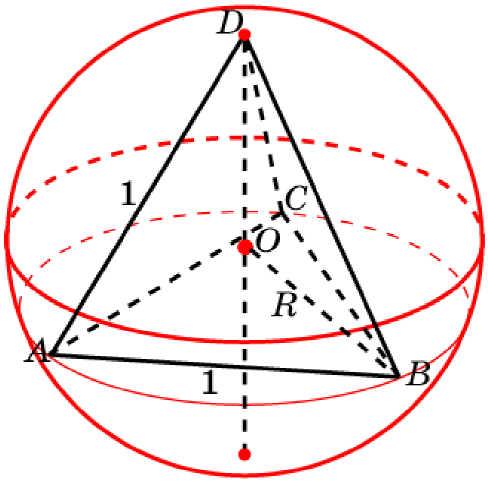

9. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Объем шара равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{54}$.



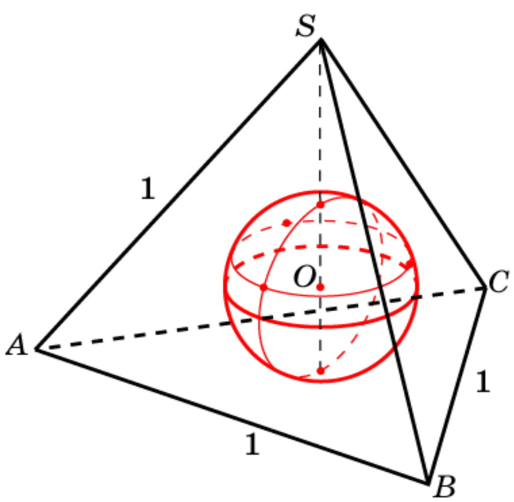
10. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{21}}{6}$. Объем шара равен $\frac{7\sqrt{21}}{54}\pi$.



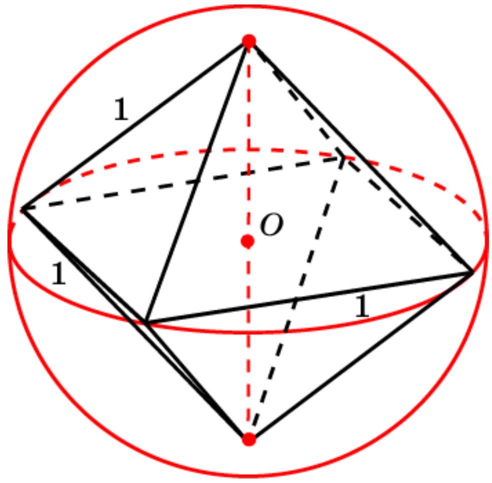

11. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Объем шара равен $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$.



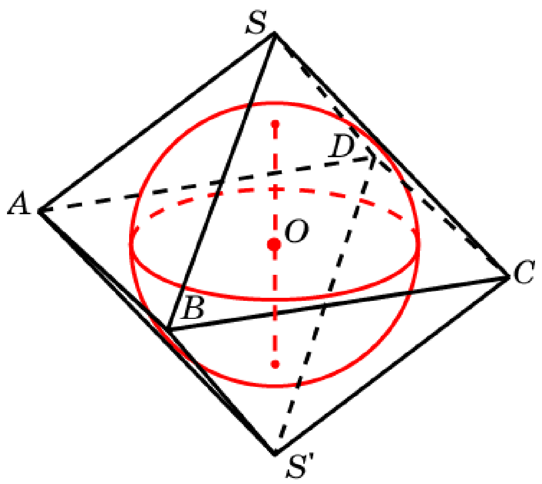

12. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{6}}{12}$. Объем шара равен $\frac{\sqrt{6}}{216}\pi$.



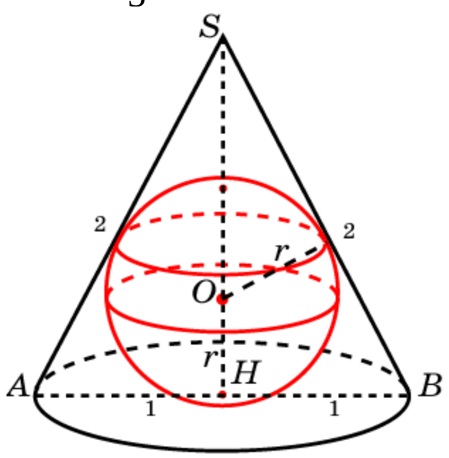
13. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем шара равен $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.



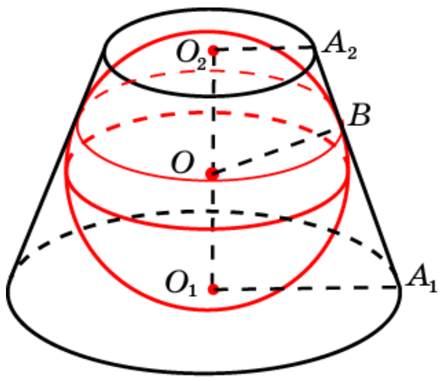

14. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Объем шара равен $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi$.



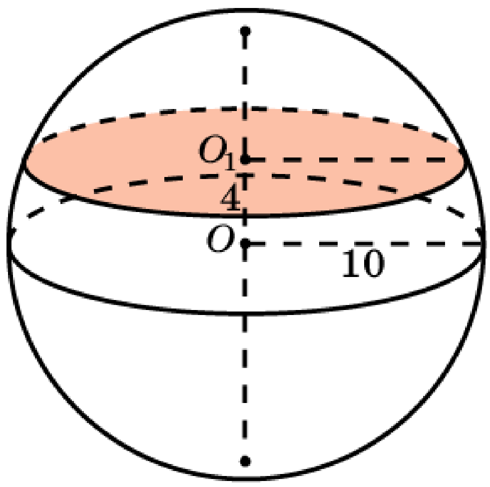

15. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Объем шара равен $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.



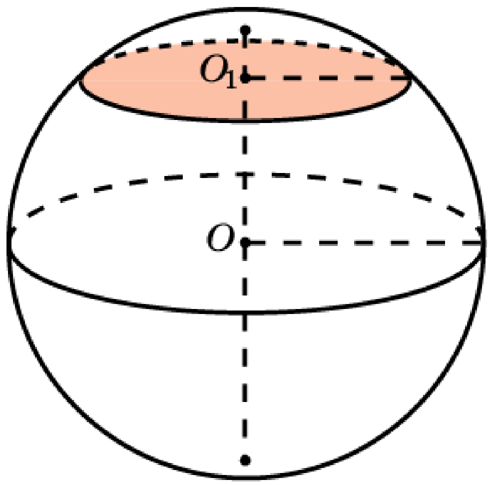
16. Радиус шара равен $\sqrt{2}$. Объем шара равен $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$.



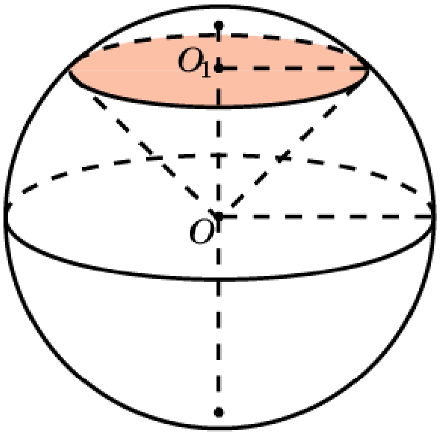

17. Высота шарового сегмента равна 6 см. Объем сегмента равен $288\pi\,см^3$.



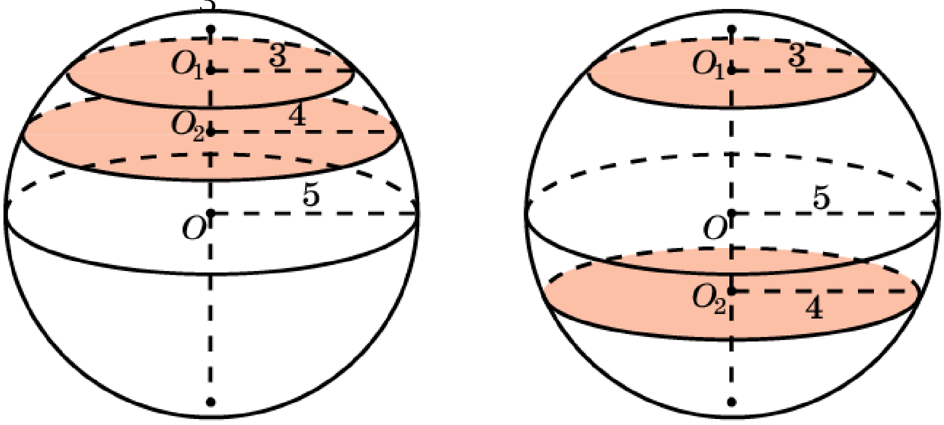

18. $\frac{7}{250}$.



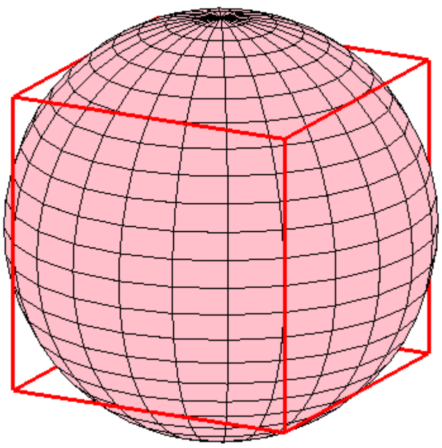
19. $112500\pi$ см$^3$.




20. Если центр шара лежит между основаниями пояса, то $\frac{434}{3}\pi$ см$^3$. В противном случае $\frac{38}{3}\pi$ см$^3$.

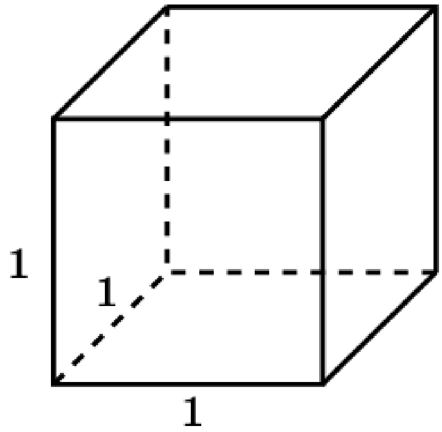



21. Часть шара, заключенная внутри куба, получается отсечением от шара радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ шести шаровых сегментов, высоты $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Объем каждого такого сегмента равен $\frac{4\sqrt{2}-5}{24}\pi$. Объем части шара равен $\frac{15-8\sqrt{2}}{12}\pi$.

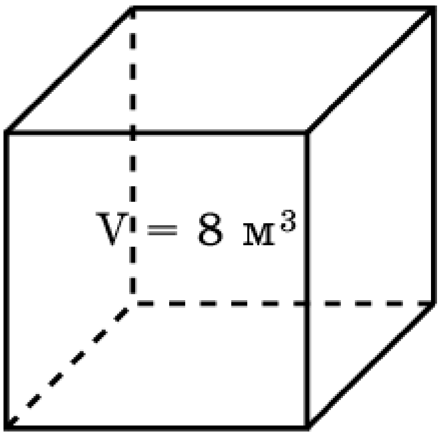


# VII. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

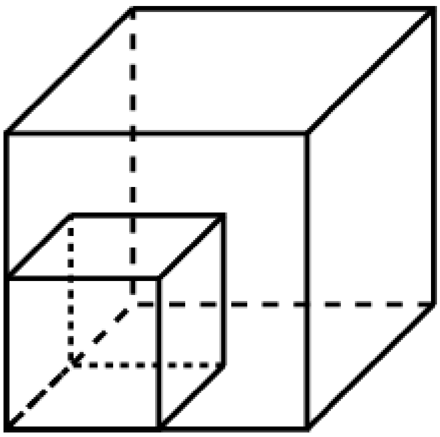
1. Площадь поверхности куба равен 6.



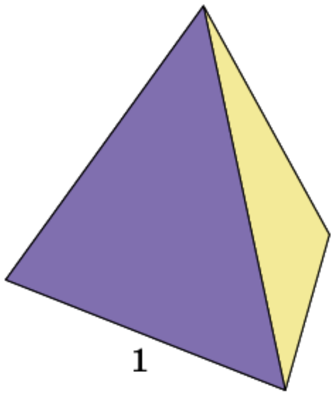

2. Площадь поверхности куба равна 24 м$^2$.



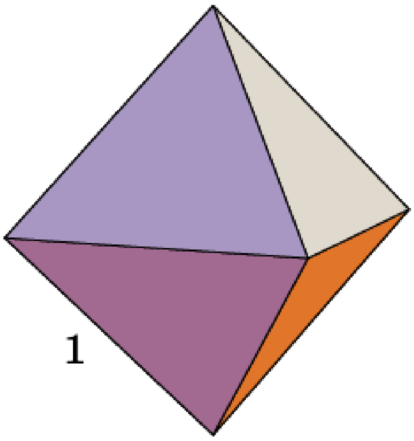

3. Увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) $n^2$ раз.



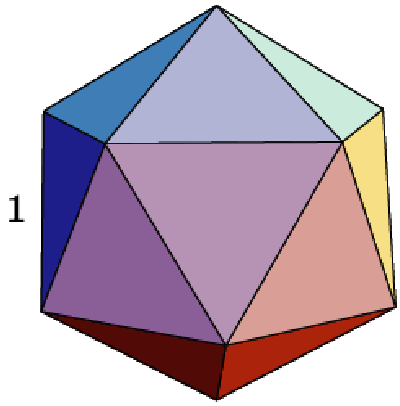
4. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна $\sqrt{3}$.



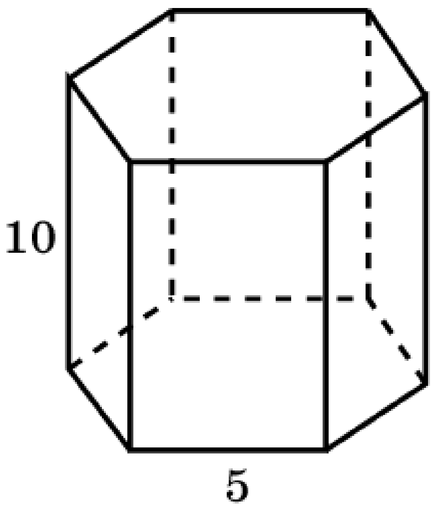

5. Площадь поверхности октаэдра равна $2\sqrt{3}$.



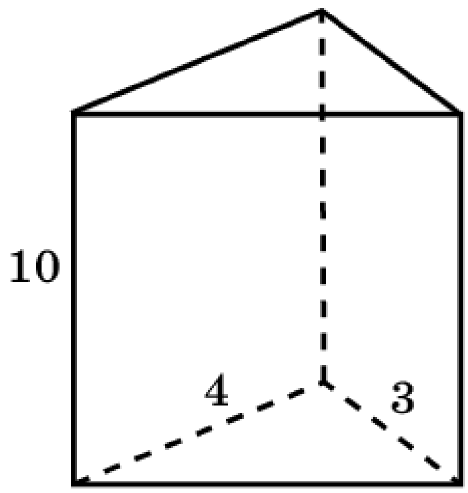

6. Площадь поверхности икосаэдра равна $5\sqrt{3}$.



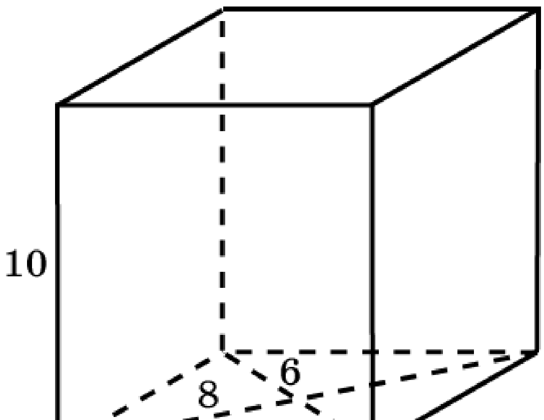
7. Площадь поверхности призмы равна 300 см$^2$.



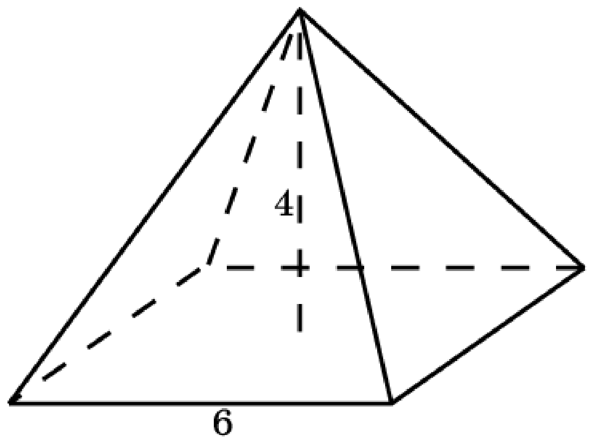

8. Площадь поверхности призмы равна 132 см$^2$.



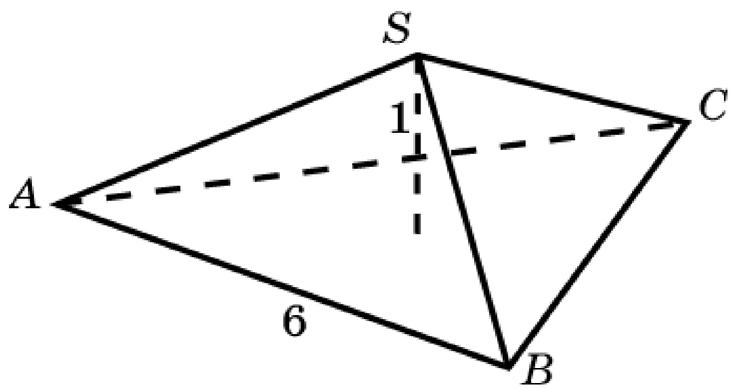

9. Площадь поверхности призмы равна 248 см$^2$.



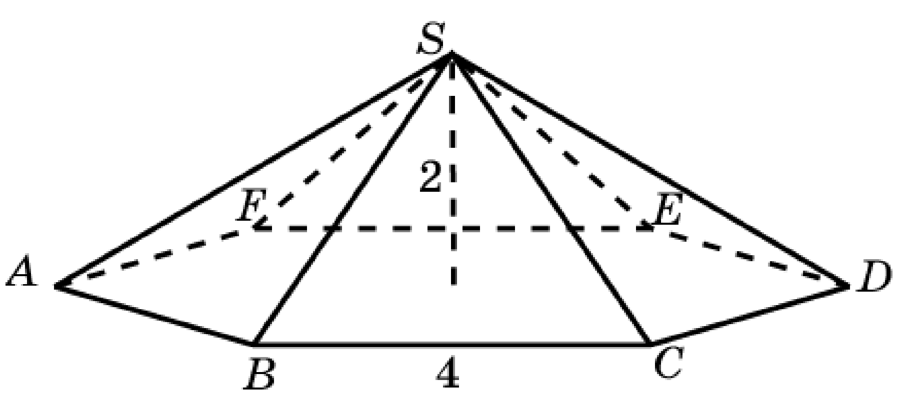
10. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 60 см$^2$.



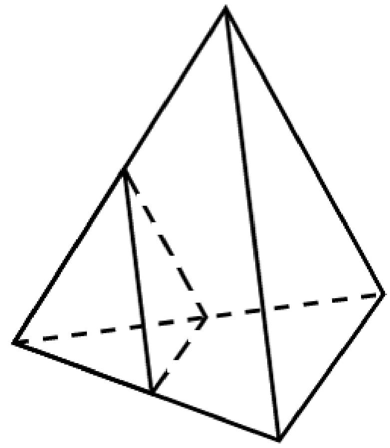

11. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 18 см$^2$.



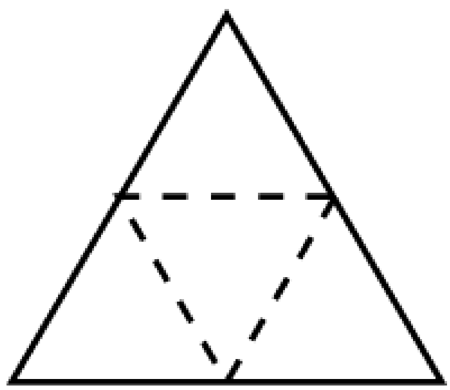

12. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 48 см$^2$.



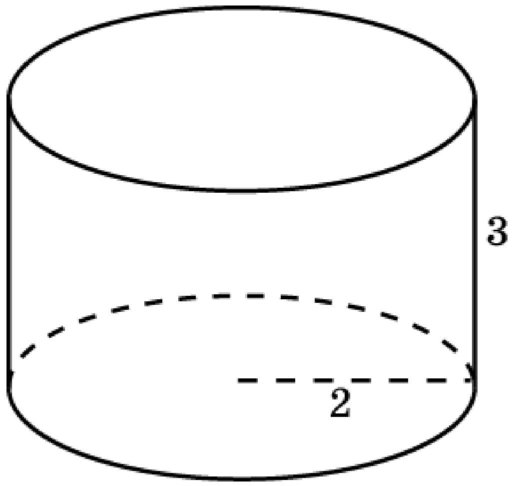
13. а) Увеличатся в 4 раза; б) уменьшатся в 25 раз.



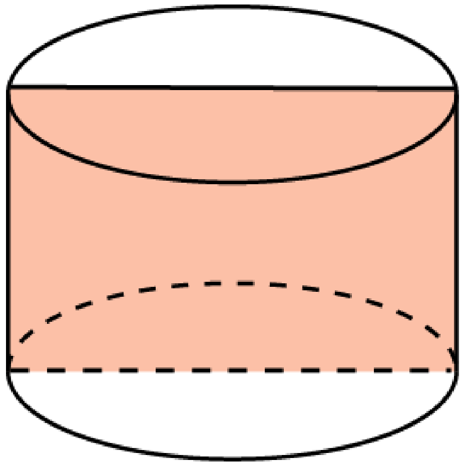
14. Площадь грани равна 20 см$^2$.



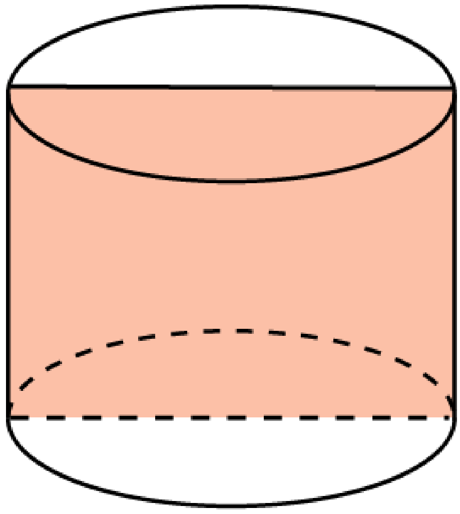
15. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\pi$ м$^2$.



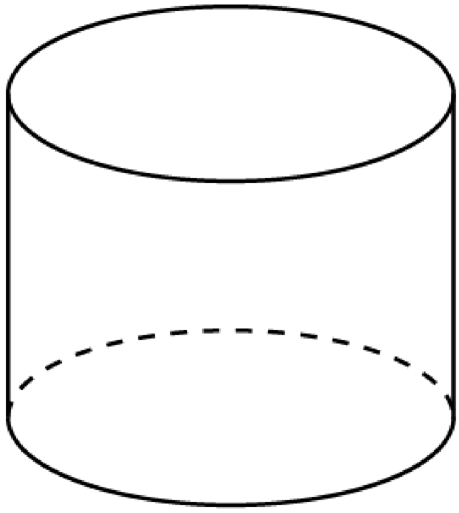
16. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $4\pi$ м$^2$.



17. Площадь поверхности цилиндра равна 6.

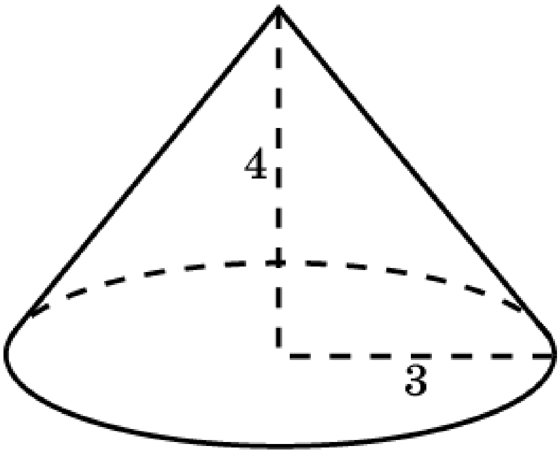


18. Диаметр основания цилиндра равен 4.

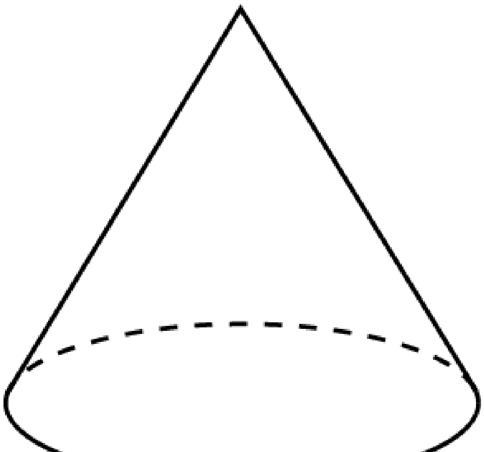


19. а) Да; б) нет.

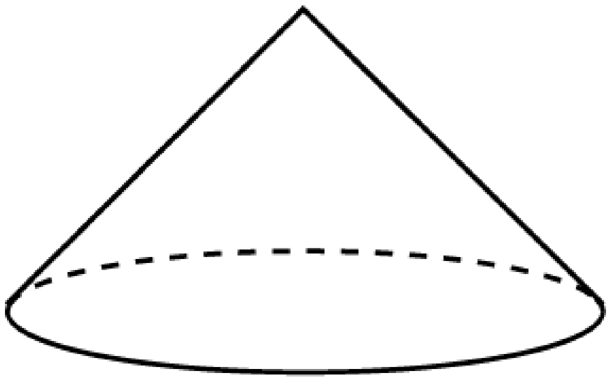
20. Площадь поверхности конуса равна $24\pi$ м$^2$.



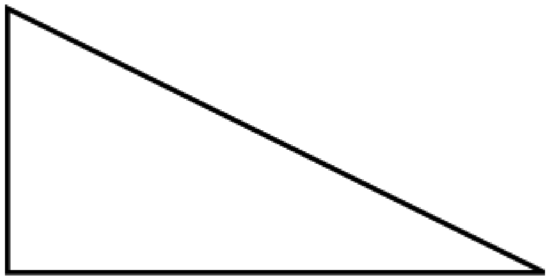

21. Угол между образующей и плоскостью основания конуса равен $60^\circ$.



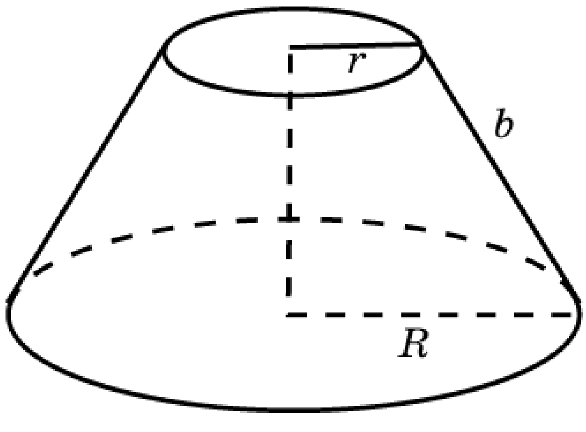
22. Площадь боковой поверхности конуса равна $8\sqrt{2}\pi$ дм$^2$.



23. а), б) Нет.

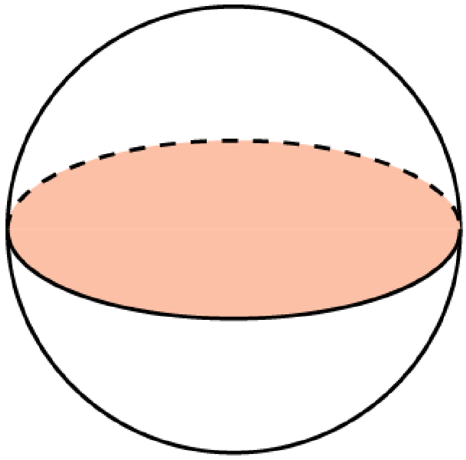


24. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $\pi(R + r)b$.

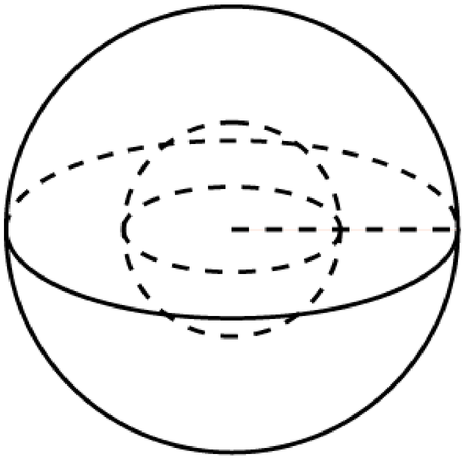


## VIII. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

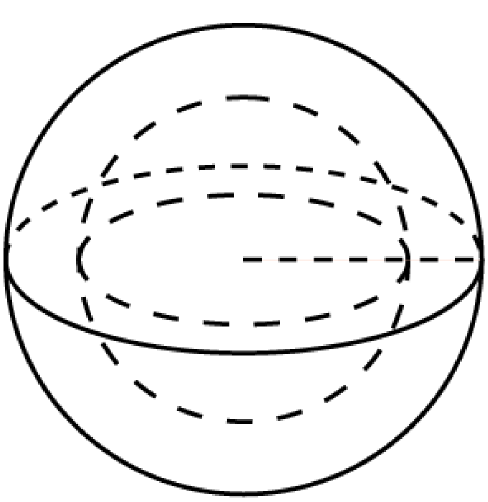
1. Площадь поверхности шара равна 12 см$^2$.



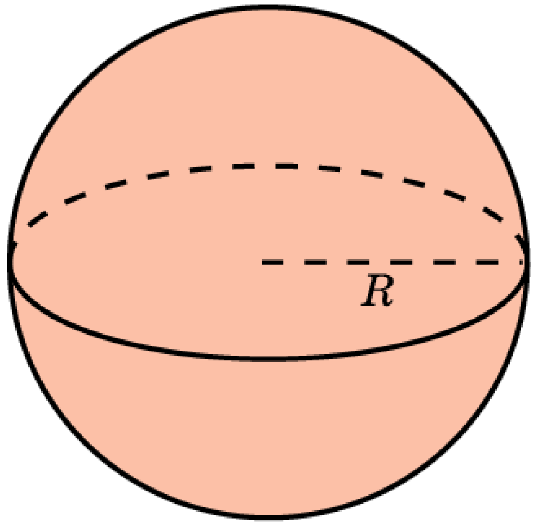
2. Площадь поверхности шара увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) $n^2$ раз.



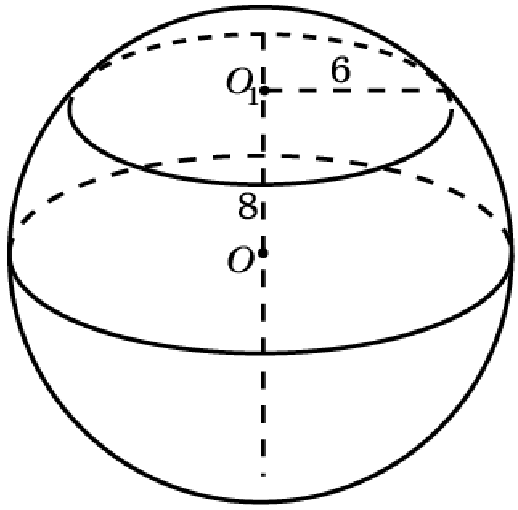
3. Отношение диаметров равно 2:3



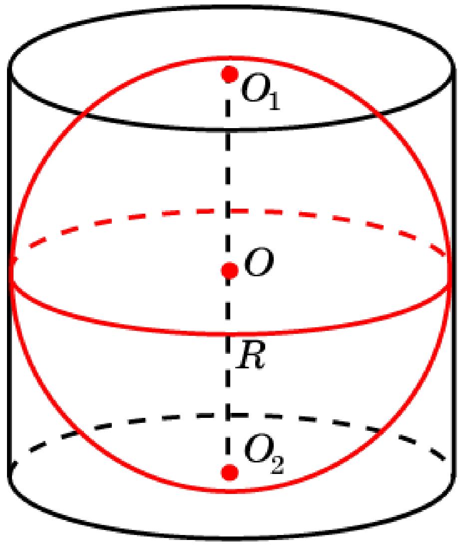
4. Площадь поверхности шара равна $144\pi$ дм$^2$.



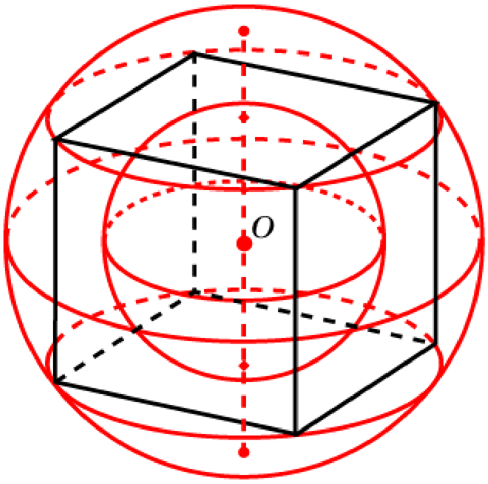

5. Радиус шара равен 10 см. Площадь поверхности шара равна $400\pi$ см$^2$.



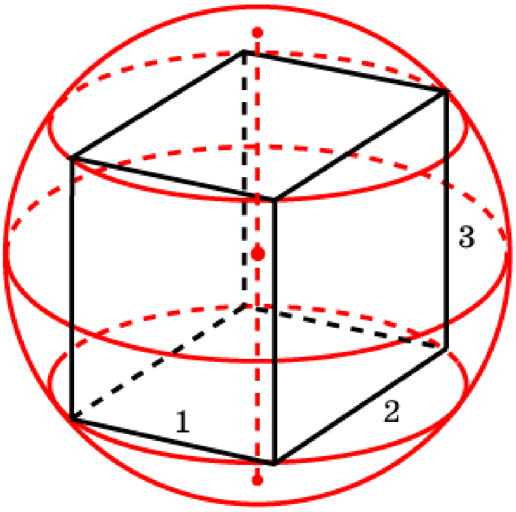

6. Отношение объемов и площадей поверхностей равно 2:3.



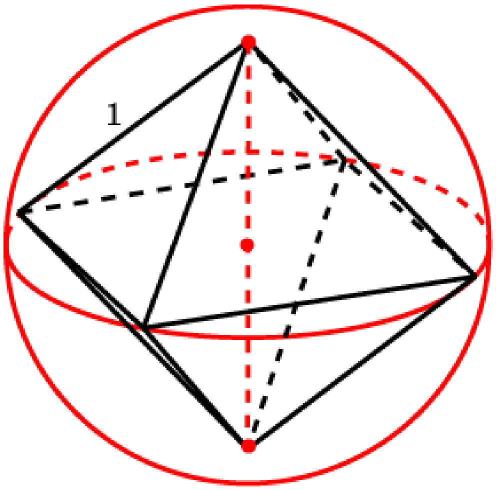
7. Площадь поверхности описанного шара в 3 раза больше площади поверхности вписанного шара.



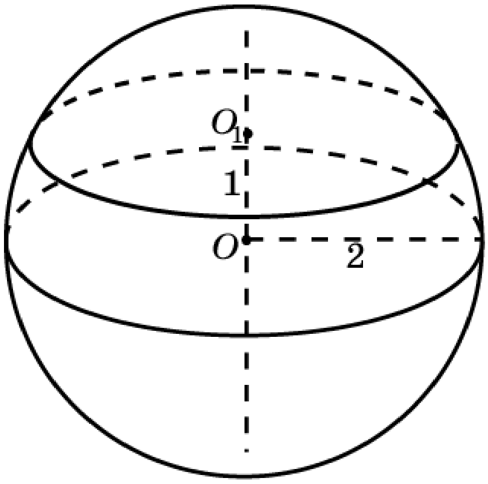

8. Радиус шара равен $\frac{\sqrt{14}}{2}$ дм. Площадь поверхности шара равна 14 дм$^2$.



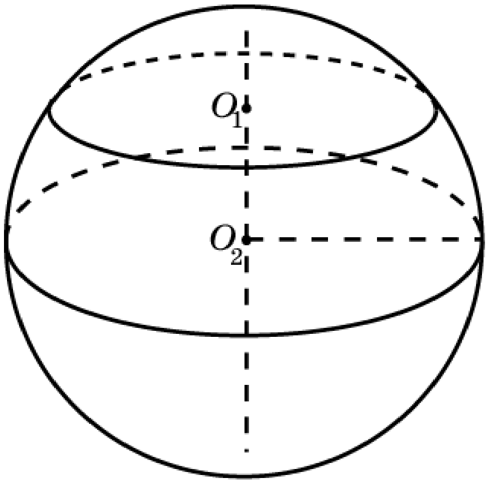

9. Радиус шара равен $\sqrt{2}$ дм. Площадь поверхности шара равна $8\pi$ дм$^2$.



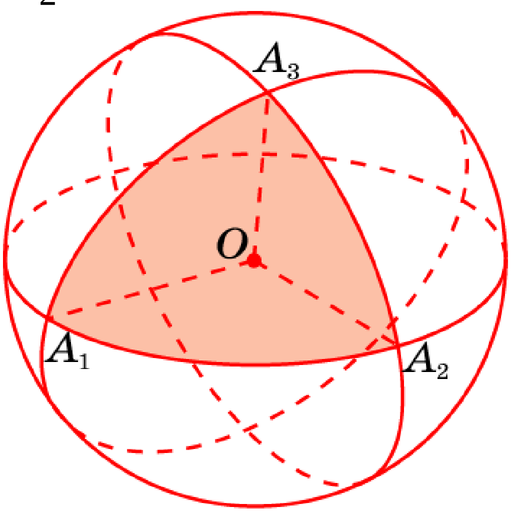
10. Площадь боковой поверхности шарового сегмента равна $4\pi$.



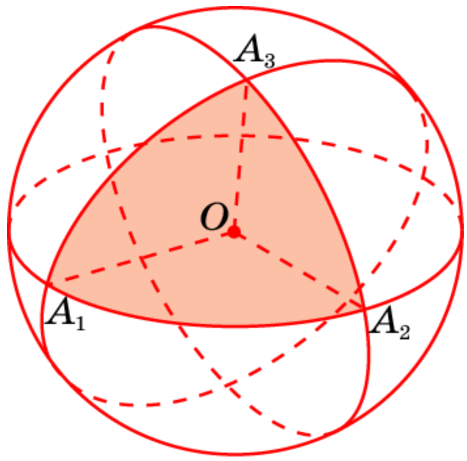

11. Площадь поверхности части шара равна $\frac{4}{3}\pi$.



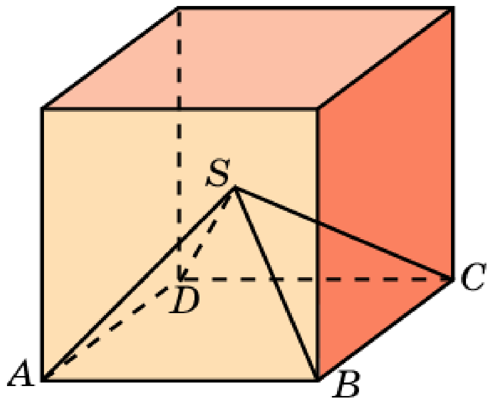

12. Данный треугольник составляет одну восьмую часть единичной сферы. Следовательно, его площадь равна одной восьмой площади единичной сферы, т.е. $\frac{\pi}{2}$.



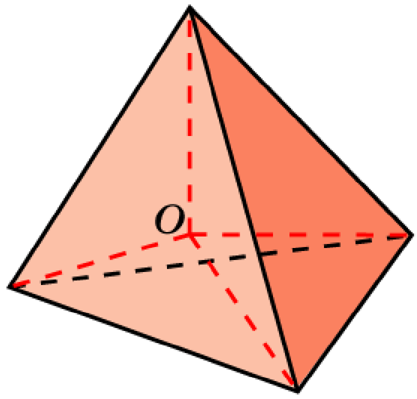
13. Переходя от градусов к числам, получим, что углы сферического треугольника равны: а) $\frac{4\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{5\pi}{9}$. Площадь сферического треугольника равна $\frac{\pi}{2}$.



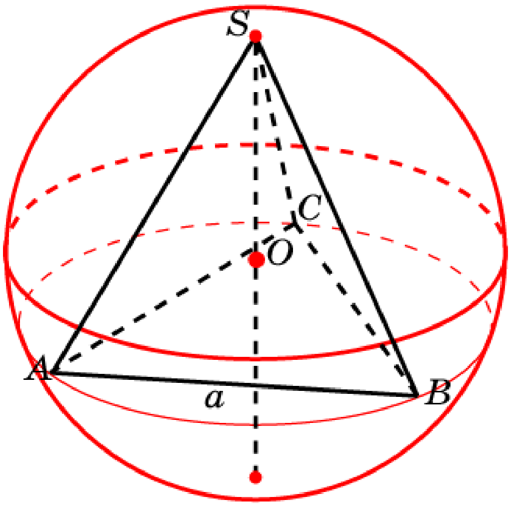

14. Величина четырехгранного угла составляет одну шестую часть пространства. Искомая площадь равна $\frac{2\pi}{3}$.




15. Указанные пирамиды разбивают правильный тетраэдр на четыре равные пирамиды с вершинами в центре $O$ тетраэдра. Следовательно, 3-гранный угол при вершине пирамиды составляет одну четвертую часть угла в $360^{\circ}$, т.е. равен $90^{\circ}$. Искомая площадь равна $\frac{\pi}{4}$.



16. Сфера является объединением четырех сферических треугольников, соответствующих трехгранным углам тетраэдра, и шести сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам тетраэдра. Обозначим площади этих сферических треугольника и двуугольника $x$ и $y$. Тогда $4x + 6y = 4\pi$ (площадь сферы) $x + 3y = \frac{4}{3}\pi$ (площадь сегмента). Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим $x = \frac{2}{3}\pi$.




СОДЕРЖАНИЕ