И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ
(ГЕОМЕТРИЯ)

Вписанные и описанные фигуры в пространстве

Москва 2008

ВВЕДЕНИЕ

Как подготовиться к экзаменам по геометрии и научиться решать стереометрические задачи на комбинации пространственных фигур? Казалось бы, для этого нужно решать задачи, предлагавшиеся на экзаменах в прошлые годы. Однако, если следовать только этому рецепту, то результат может оказаться вовсе не тем, который ожидается.

В каждом новом году экзаменационные задачи отличаются от задач прошлых лет, и из того, что Вы узнали, как решаются задачи, предлагавшиеся на экзаменах в прошлые годы, не следует, что Вы сможете решить другие задачи.

Важно, чтобы задачи, которые Вы решаете, готовясь к экзамену, носили развивающий, системный характер, создавали базу для решения других задач.

Анализ результатов вступительных экзаменов в ВУЗы, а также ЕГЭ в части геометрии показывает, что основные трудности решения задач по стереометрии связаны не столько с недостатками, вызванными незнанием формул и теорем или неумением их применять, сколько с недостаточно развитыми пространственными представлениями, неумением правильно изобразить пространственную ситуацию, связанную с комбинацией многогранников и круглых тел.

Здесь мы приведем задачи на комбинации пространственных фигур, нахождение радиусов вписанных и описанных сфер, элементов вписанных и описанных цилиндров и конусов. Для облегчения нахождения решений все задачи сопровождаются рисунками, на которых можно производить необходимые построения.

Наличие большого числа рисунков на комбинации пространственных фигур восполняет явный недостаток таких рисунков в учебниках и задачниках по геометрии.

Предлагаемые задачи не только развивают пространственные представления, но и лежат в основе решения многих других задач на вычисление площадей и объемов пространственных фигур, позволяют сформировать и отработать необходимые навыки решения этих задач. От того, как Вы научитесь решать эти базовые задачи, во многом зависит успешность решения многих других задач.

В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал.

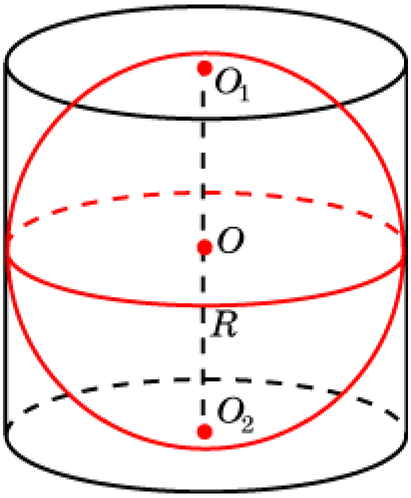
В конце книги помещены ответы и решения ко всем задачам. Однако не спешите смотреть ответ. Вне зависимости от того, удалось Вам решить задачу или нет, большую пользу для развития пространственных представлений оказывают размышления над задачей, анализ ее условия, проведение дополнительных построений, выяснение взаимного расположения многогранников и круглых тел, указанных в условии задачи, и даже просто разглядывание рисунка.

В качестве учебника по геометрии для подготовки к ЕГЭ рекомендуем использовать учебник:

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 10-11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2006.

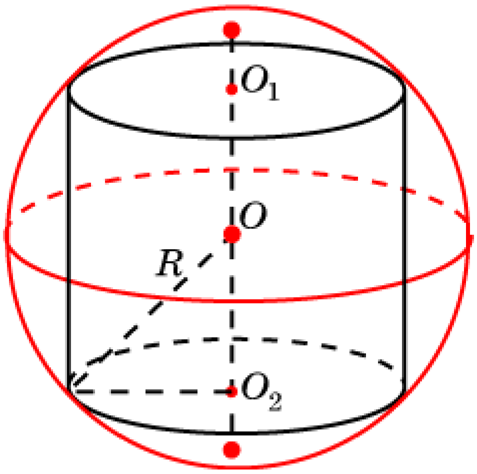
§ 1. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом цилиндр называется описанным около сферы.



В цилиндр можно вписать сферу, если высота цилиндра равна диаметру его основания. Ее центром будет точка O, являющаяся серединой отрезка, соединяющего центры оснований O_1 и O_2 цилиндра. Радиус сферы R будет равен радиусу окружности основания цилиндра.

Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около цилиндра.

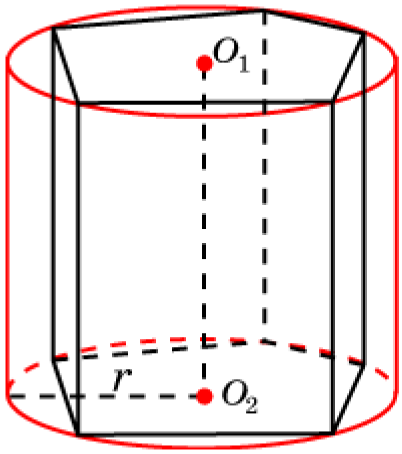


Около любого цилиндра можно описать сферу. Ее центром будет точка O, являющаяся серединой отрезка, соединяющего центры оснований O_1 и O_2 цилиндра. Радиус сферы R вычисляется по формуле

$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2},$$

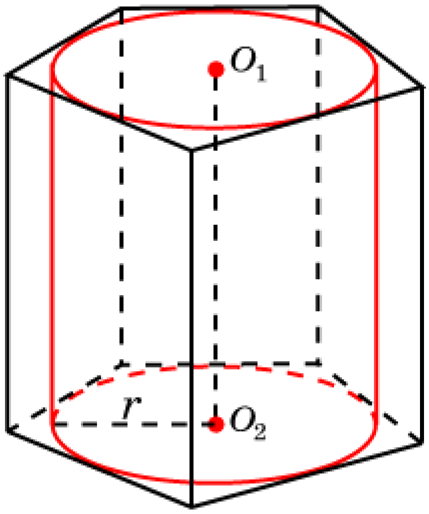
где h – высота цилиндра, r – радиус окружности основания.

Призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания вписаны в основания цилиндра. При этом цилиндр называется описанным около призмы.



Около прямой призмы можно описать цилиндр, если около ее оснований можно описать окружности. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, описанной около основания призмы. Высота цилиндра равна высоте призмы.

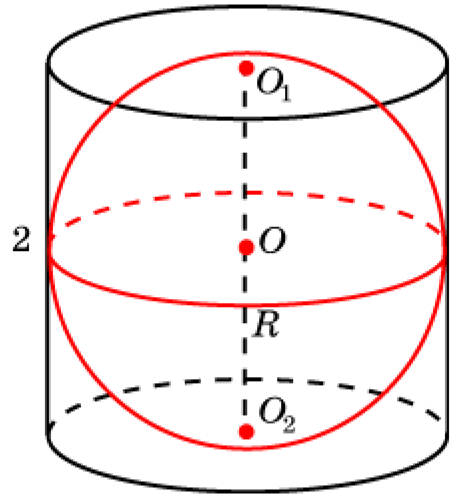
Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания описаны около оснований цилиндра. При этом цилиндр называется вписанным в призму.



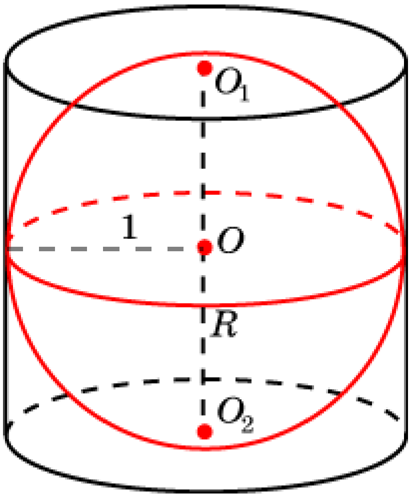
В прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Высота цилиндра равна высоте призмы.

Задачи

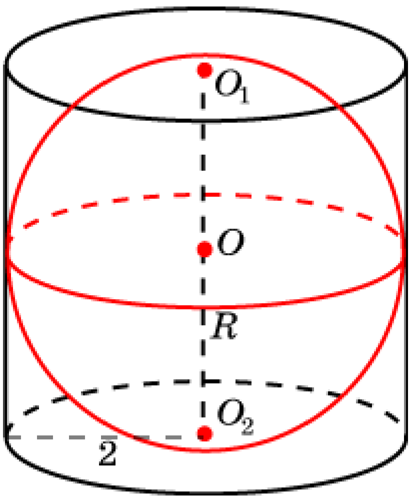
1. В цилиндр высоты 2 вписана сфера. Найдите ее радиус.



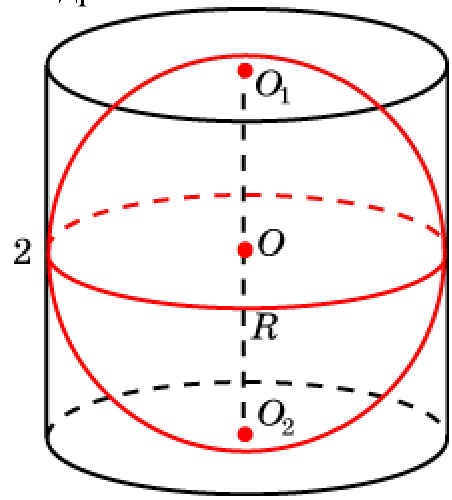
2. В цилиндр вписана сфера радиуса 1. Найдите высоту цилиндра.



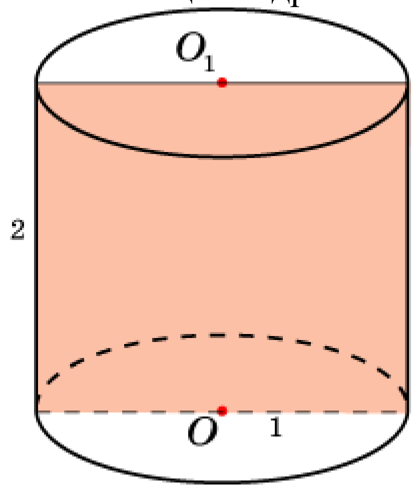
3. Радиус основания цилиндра равен 2. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы в него можно было вписать сферу?



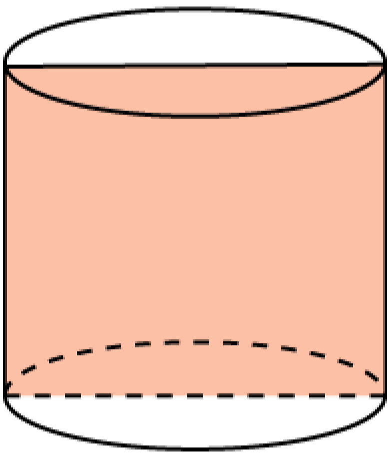
4. Высота цилиндра равна 2. Каким должен быть радиус его основания, чтобы в цилиндр можно было вписать сферу?



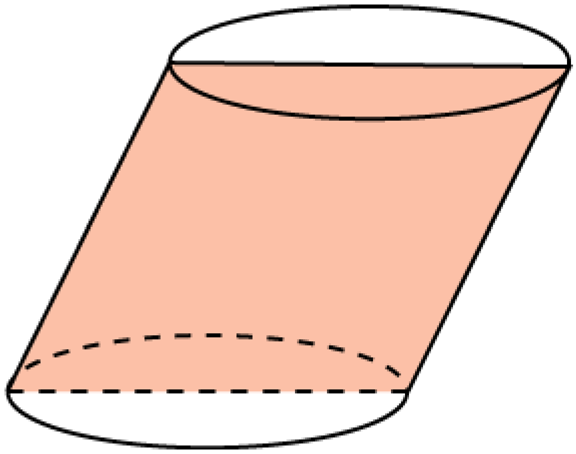
5. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник со сторонами 1 и 2. Можно ли в этот цилиндр вписать сферу?



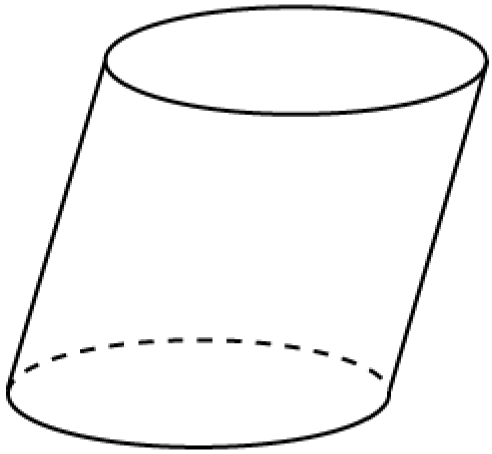
6. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Можно ли в этот цилиндр вписать сферу?



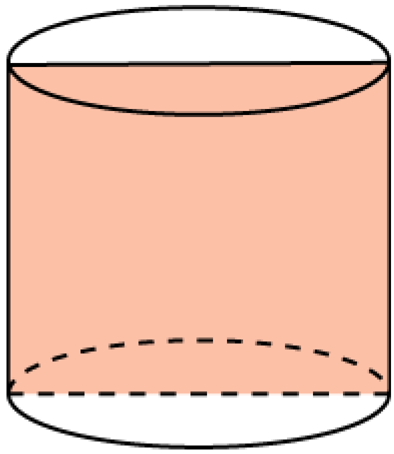
7. Можно ли вписать сферу в цилиндр, осевым сечением которого является ромб.



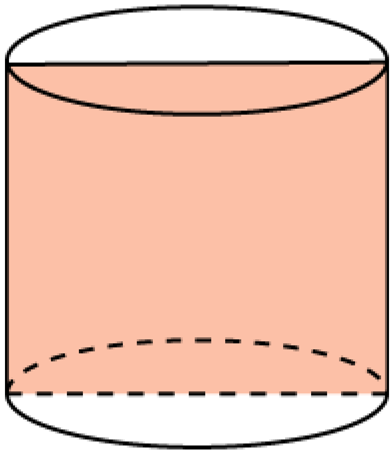
8. Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?



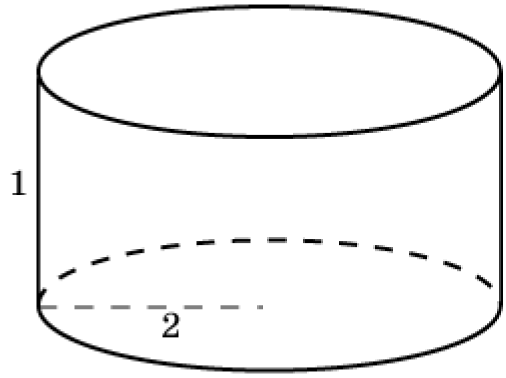
9. Периметр осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равен 8 см. Найдите радиус сферы.



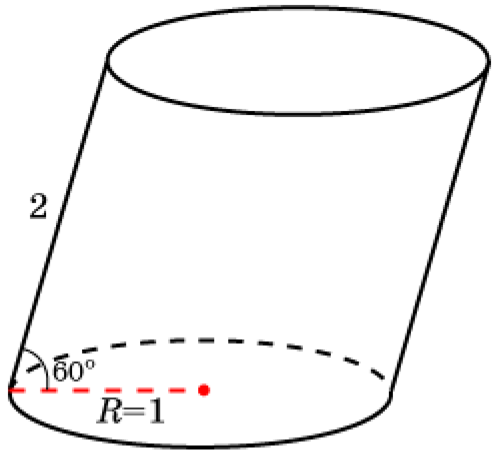
10. Площадь осевого сечения цилиндра, в который вписана сфера, равна 4 см^2. Найдите диаметр сферы.



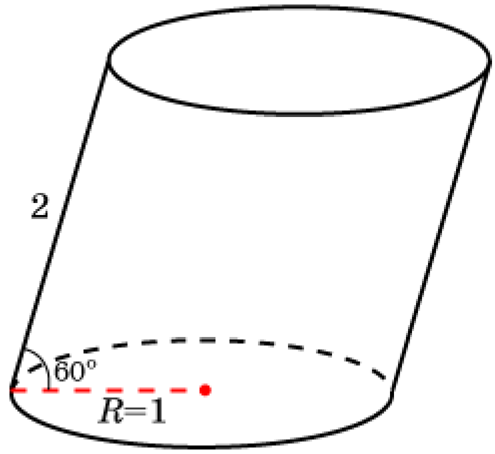
11. Какой наибольший радиус может быть у сферы, помещающейся в цилиндр, радиус основания которого равен 2, и высота 1.



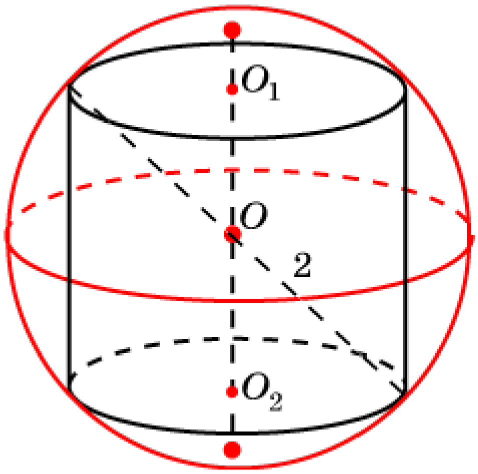
12. Можно ли сферу радиуса 1 поместить в наклонный цилиндр, радиус основания которого равен 1, а боковое ребро равно 2 и наклонено к плоскости основания под углом 60°.



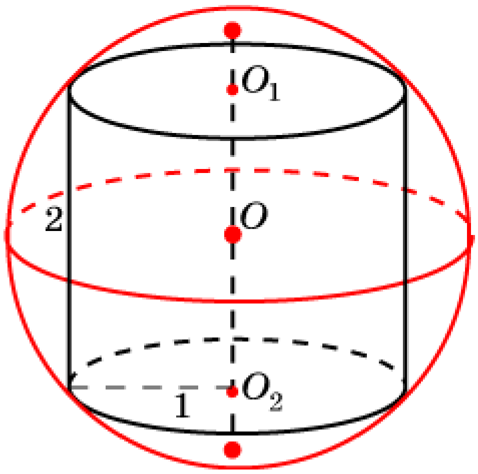
13. Какой наибольший радиус может быть у сферы, помещающейся в наклонный цилиндр, радиус основания которого равен 1, а боковое ребро равно 2, и наклонено к плоскости основания под углом 60°.



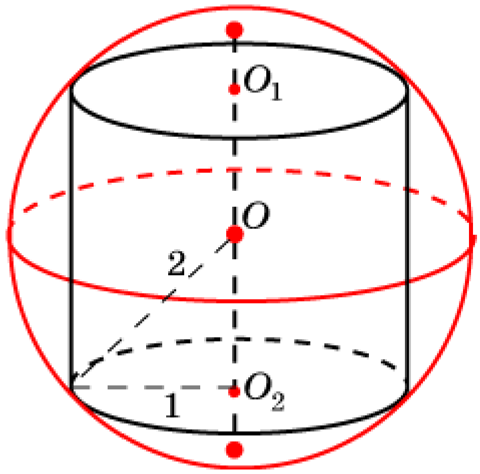
14. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2. Найдите радиус сферы, описанной около этого цилиндра.



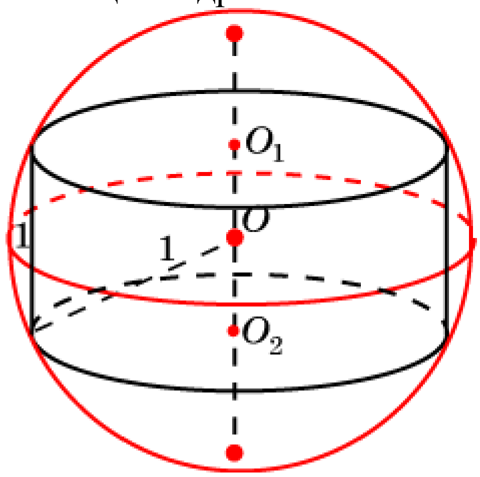
15. Около цилиндра высоты 2 и радиуса основания 1 описана сфера. Найдите ее радиус.



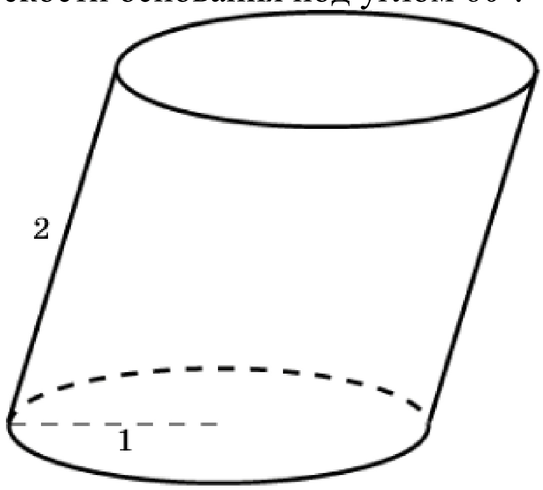
16. Около цилиндра, радиус основания которого равен 1, описана сфера радиуса 2. Найдите высоту цилиндра.



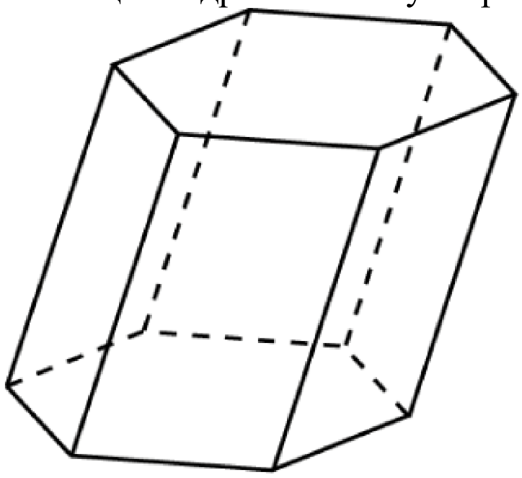
17. Около цилиндра, высота которого равна 1, описана сфера радиуса 1. Найдите радиус основания цилиндра.



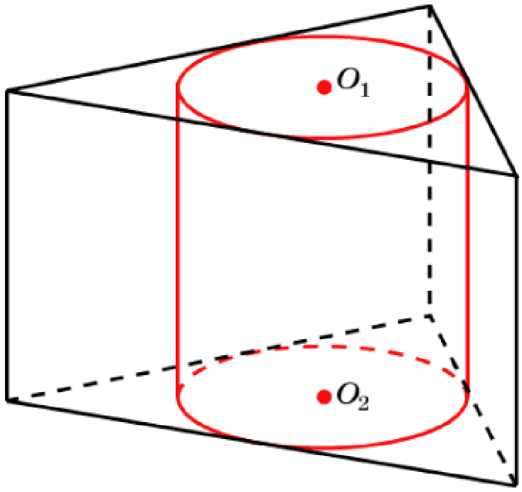
18. Найдите наименьший радиус сферы, в которую помещается наклонный цилиндр, радиус основания которого равен 1, образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 60°.



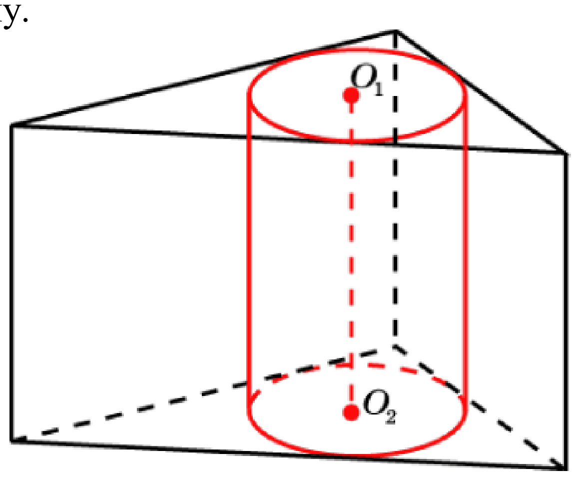
19. Можно ли вписать цилиндр в наклонную призму?



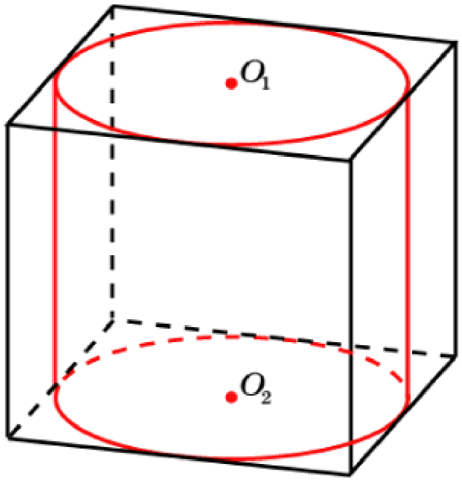
20. В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в эту призму.



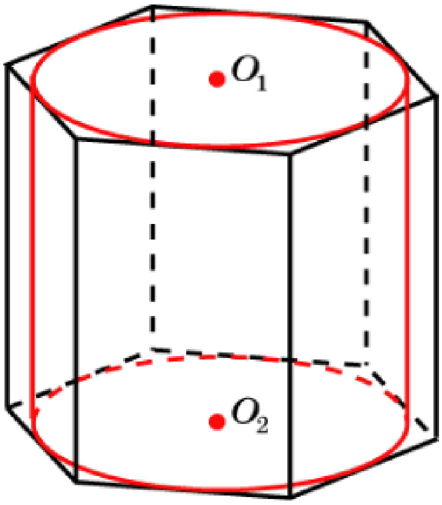
21. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в эту призму.



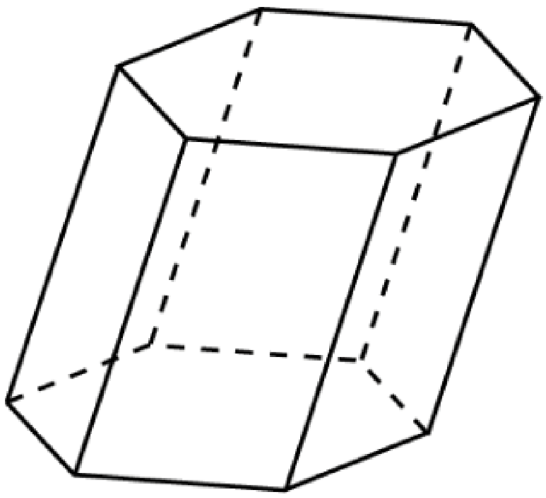
22. Найдите радиус окружности основания цилиндра, вписанного в единичный куб.



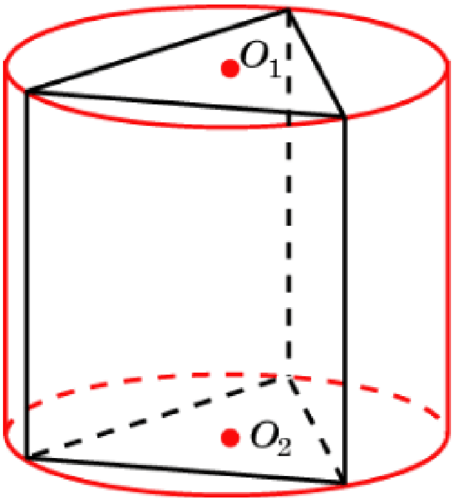
23. В правильную шестиугольную призму, со стороной основания 1, вписан цилиндр. Найдите радиус окружности основания этого цилиндра.



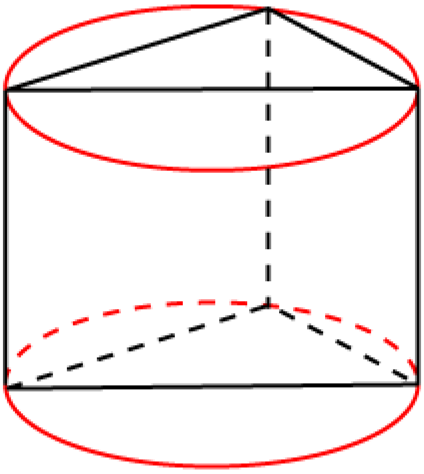
24. Можно ли описать цилиндр около наклонной призмы?



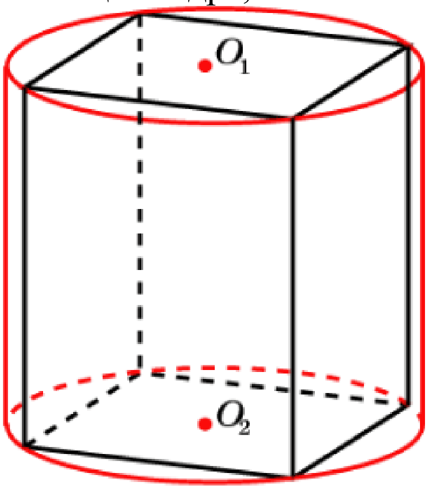
25. В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.



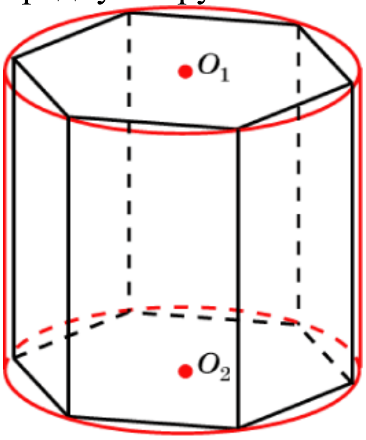
26. В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.



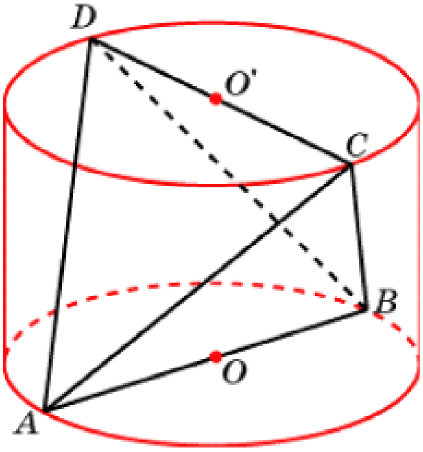
27. В основании прямой призмы квадрат со стороной 1. Найдите радиус окружности основания цилиндра, описанного около этой призмы.



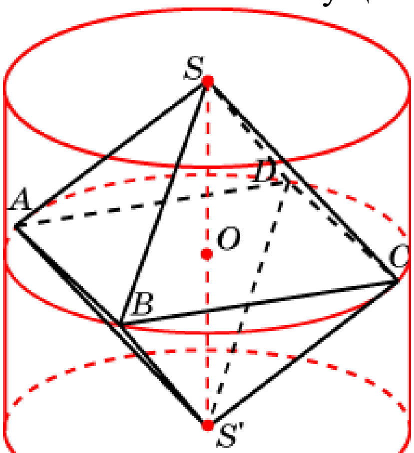
28. Около правильной шестиугольной призмы, со стороной основания 1, описан цилиндр. Найдите радиус окружности основания этого цилиндра.



29. Около единичного тетраэдра описан цилиндр так, что вершины тетраэдра принадлежат окружностям оснований цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.



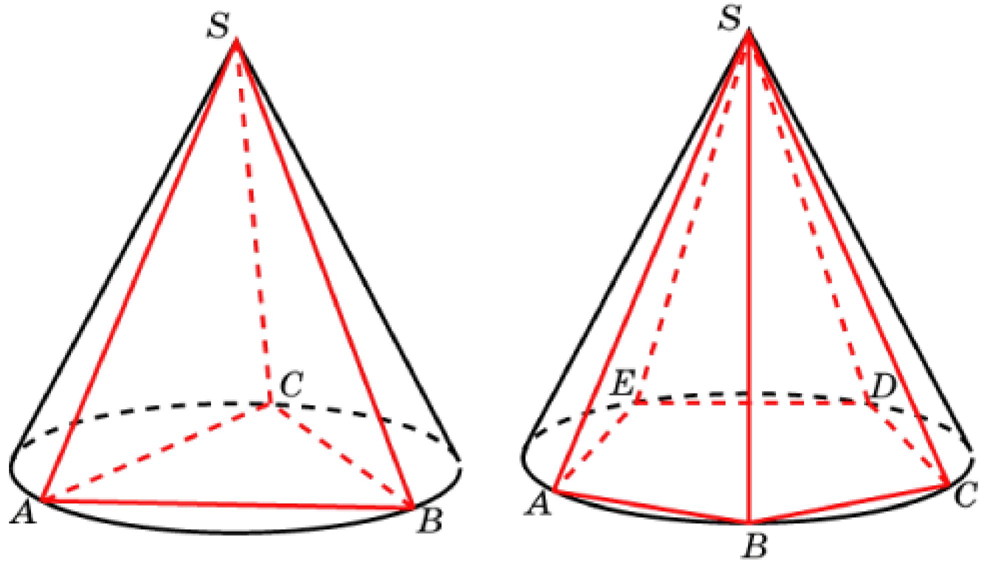
30. Около единичного октаэдра описан цилиндр так, что две противоположные вершины октаэдра находятся в центрах оснований цилиндра, а остальные вершины принадлежат боковой поверхности цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.



§ 2. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ КОНУСЫ

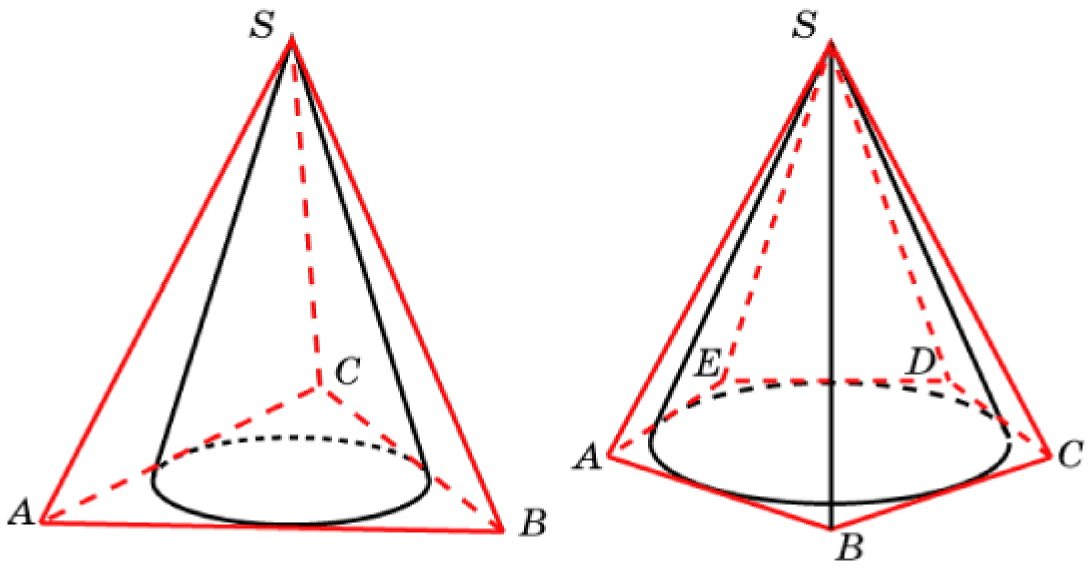
Пирамида называется вписанной в конус, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется описанным около пирамиды.

Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.



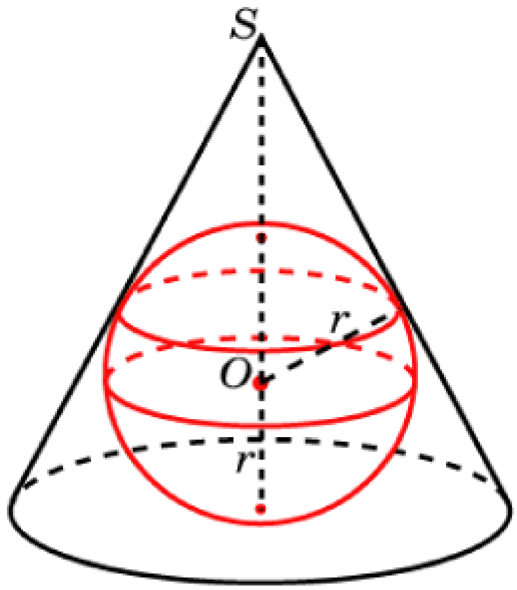
Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется вписанным в пирамиду.

В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.



Сфера называется вписанной в конус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.

В любой конус (прямой, круговой) можно вписать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

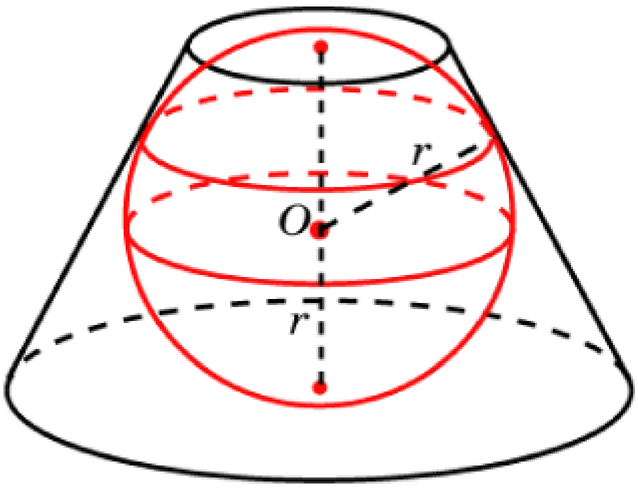


Напомним, что радиус r окружности, вписанный в треугольник, находится по формуле

$$r = \frac{S}{p},$$

где S – площадь, p – полупериметр треугольника.

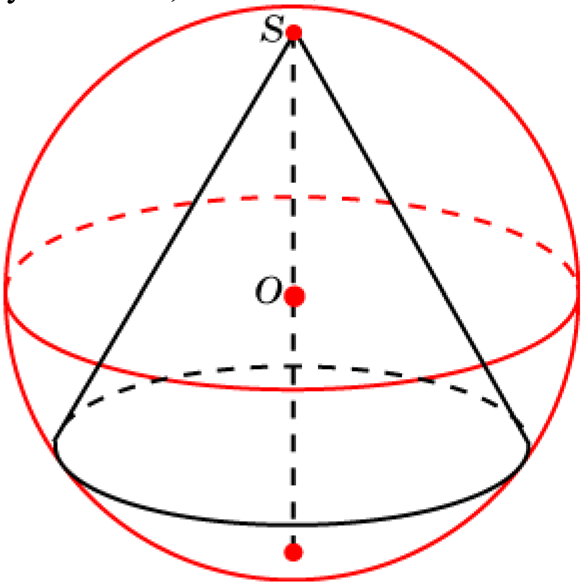
Сфера называется вписанной в усеченный конус, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом усеченный конус называется описанным около сферы.



В усеченный конус можно вписать сферу, если в его осевое сечение можно вписать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу вписанной сферы.

Сфера называется описанной около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом конус называется вписанным в сферу.

Около любого конуса (прямого, кругового) можно описать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющимся осевым сечением конуса.

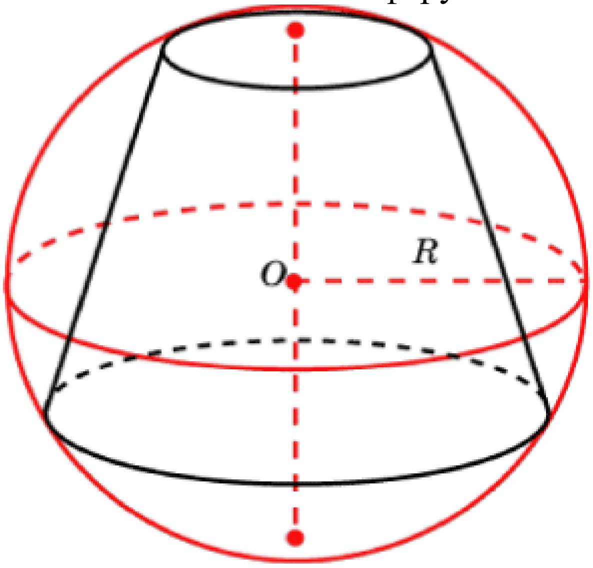


Напомним, что радиус R окружности, описанной около треугольника, находится по формуле

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где S – площадь, a, b, c – стороны треугольника.

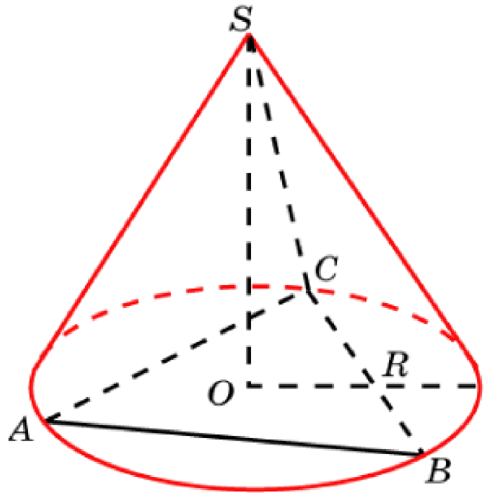
Сфера называется описанной около усеченного конуса, если окружности оснований усеченного конуса лежат на сфере. При этом усеченный конус называется вписанным в сферу.



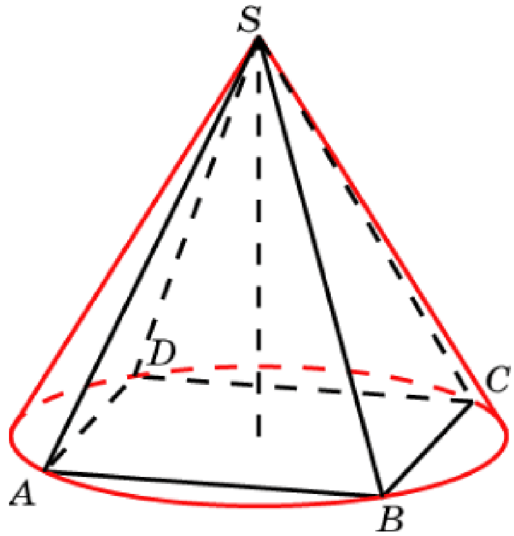
Около усеченного конуса можно описать сферу, если около его осевого сечения можно описать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу описанной сферы.

Задачи

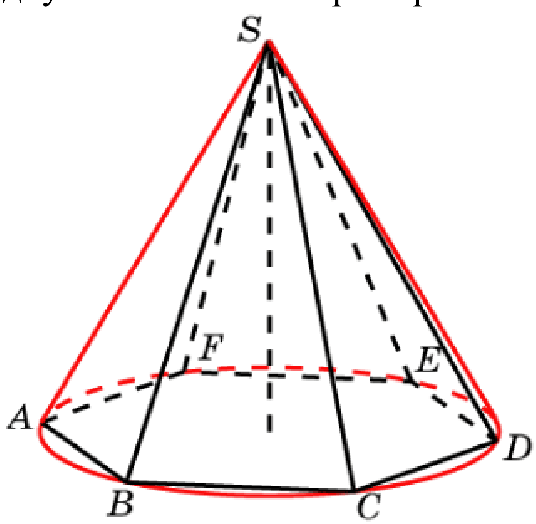
1. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



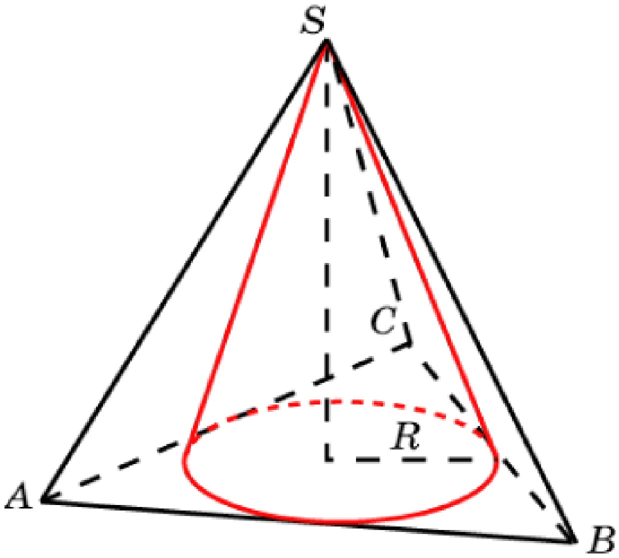
2. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



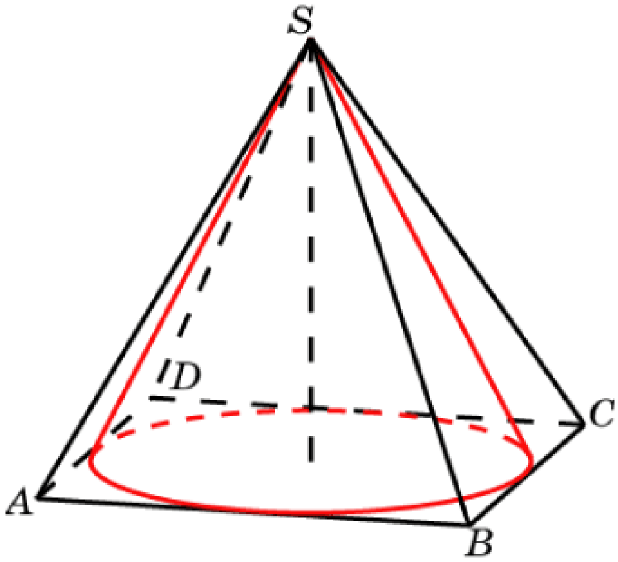
3. Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



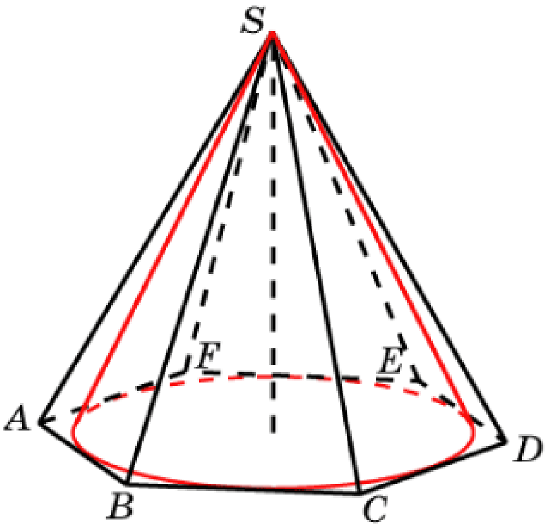
4. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



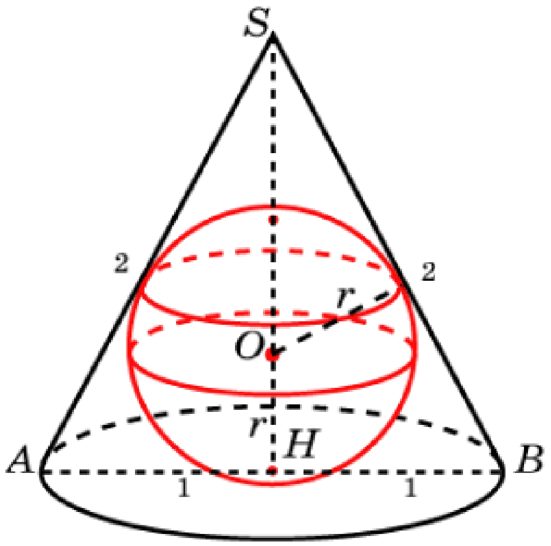
5. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



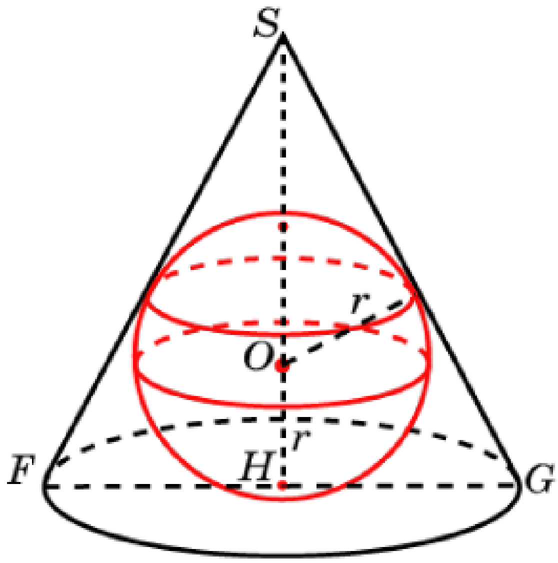
6. Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



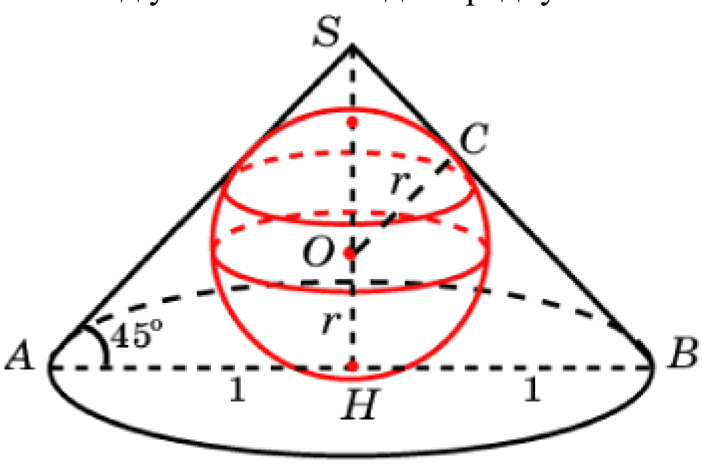
7. В конус, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, вписана сфера. Найдите ее радиус.



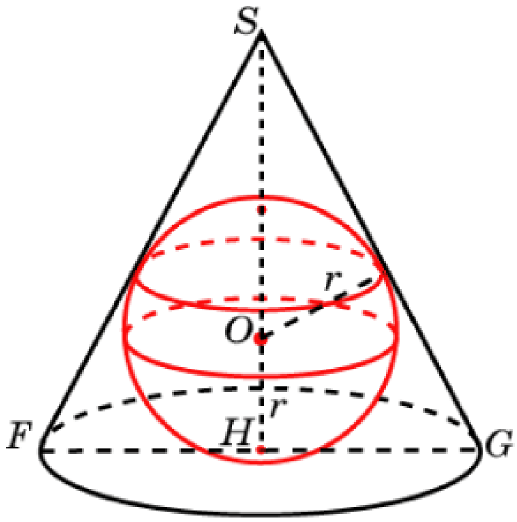
8. В конус, радиус основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите высоту конуса.



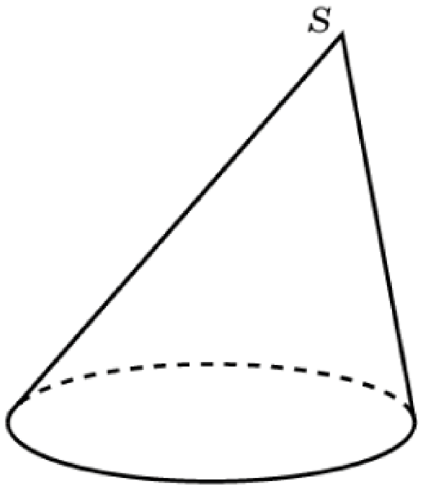
9. Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус вписанной сферы.



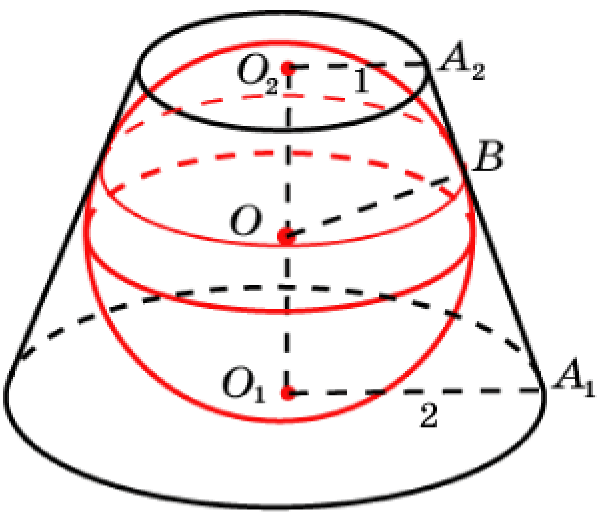
10. Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус вписанной сферы.



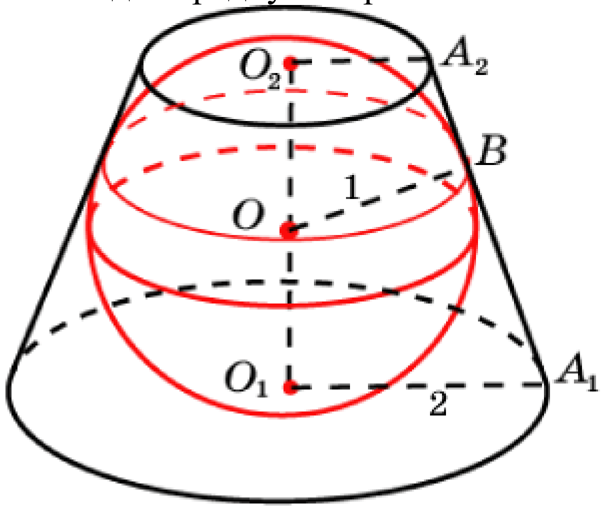
11. Можно ли вписать сферу в наклонный конус?



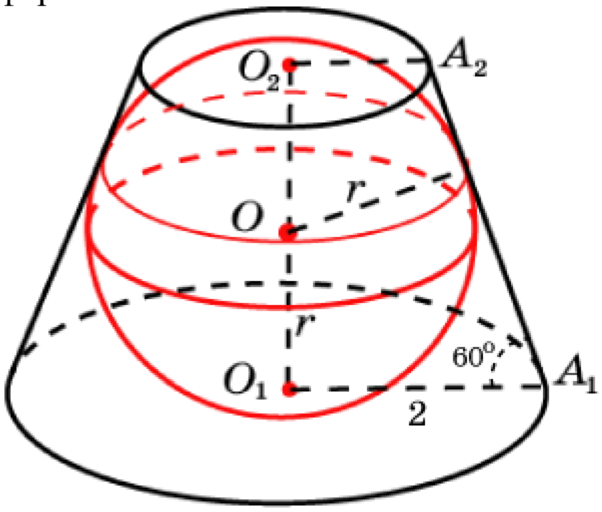
12. В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту усеченного конуса.



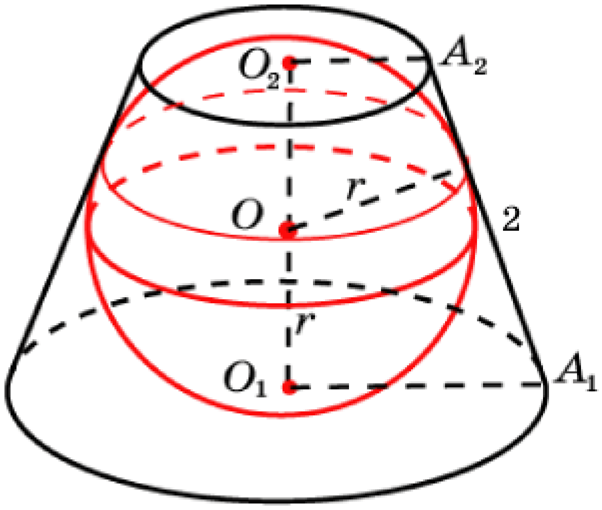
13. В усеченный конус, радиус одного основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите радиус второго основания.



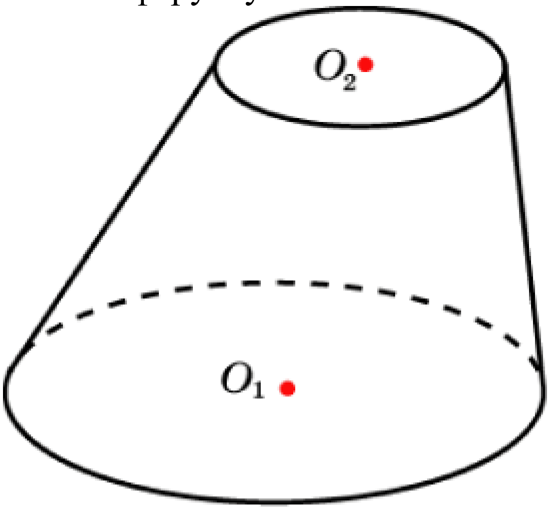
14. В усеченном конусе радиус большего основания равен 2, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус вписанной сферы.



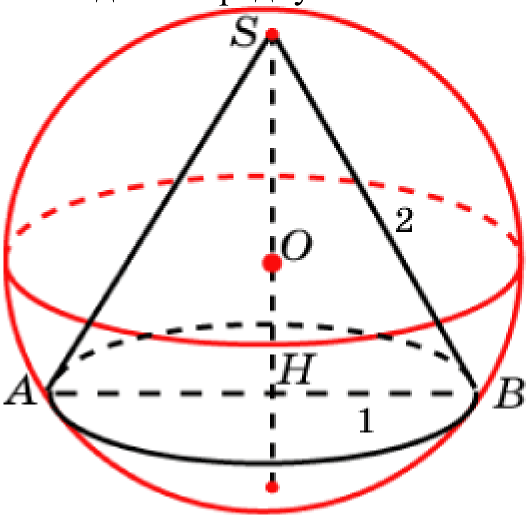
15. Образующая усеченного конуса равна 2, площадь осевого сечения 3. Найдите радиус вписанной сферы.



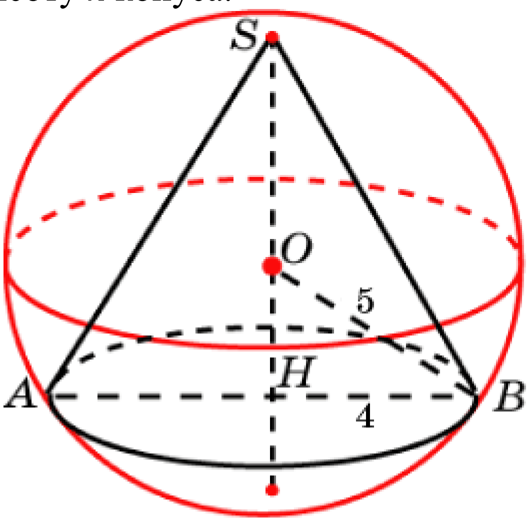
16. Можно ли вписать сферу в усеченный наклонный конус.



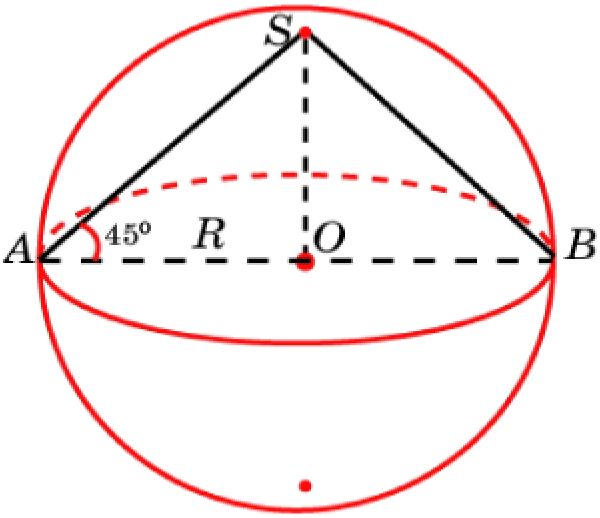
17. Около конуса, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.



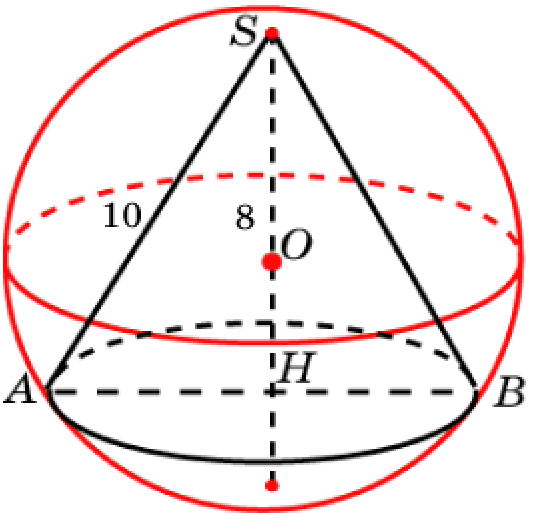
18. Около конуса, радиус основания которого равен 4, описана сфера радиуса 5. Найдите высоту *h* конуса.



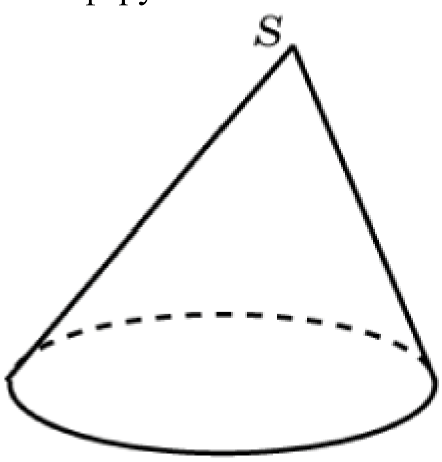
19. Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45^{o}. Найдите радиус описанной сферы.



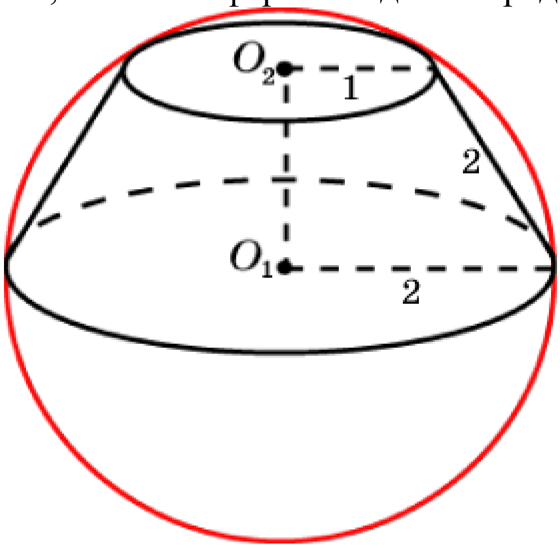
20. Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус описанной сферы.



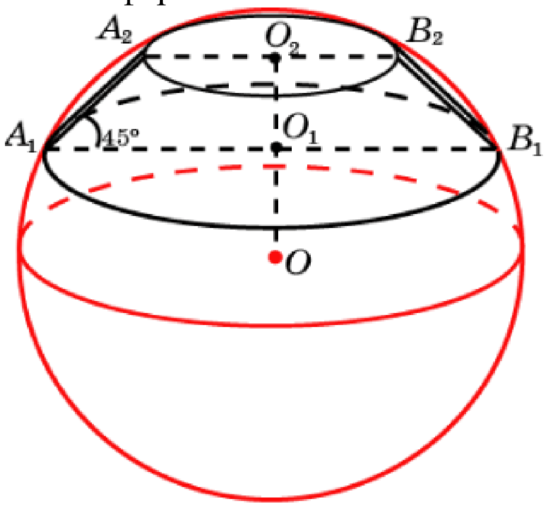
21. Можно ли описать сферу около наклонного конуса?



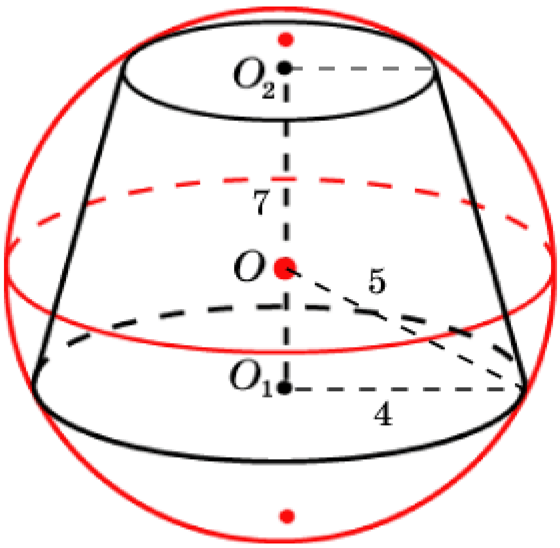
22. Около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.



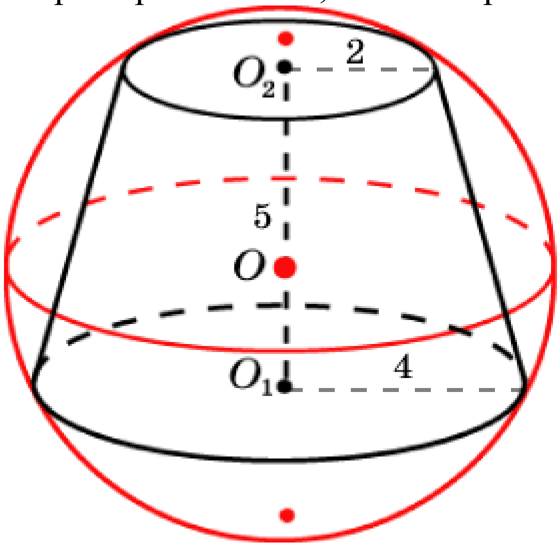
23. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1, образующая равна 2 и составляет угол 45° с плоскостью другого основания. Найдите радиус описанной сферы.



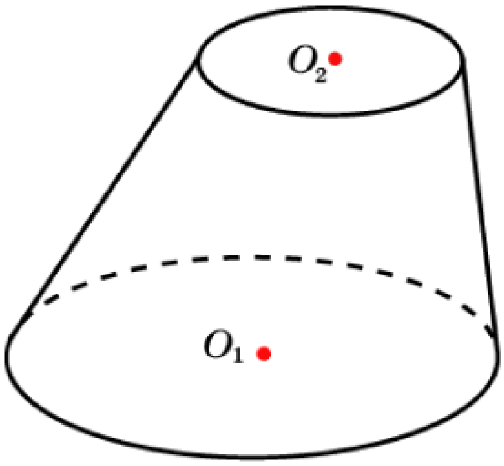
24. Радиус одного основания усеченного конуса равен 4, высота 7, радиус описанной сферы 5. Найдите радиус второго основания усеченного конуса.



25. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 4, а высота равна 5.

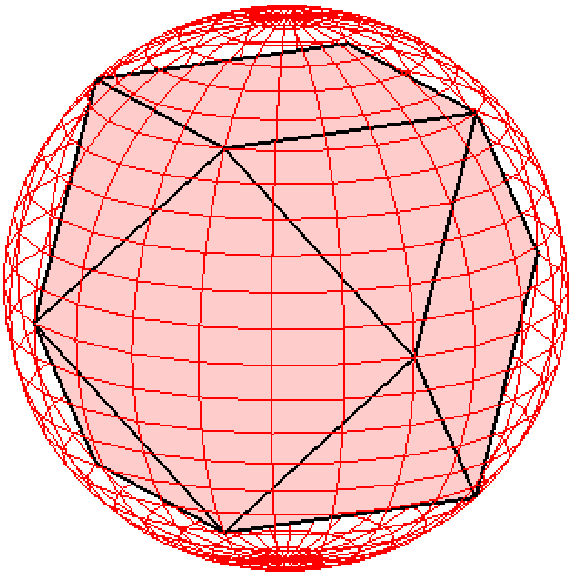


26. Можно ли описать сферу около усеченного наклонного конуса.



§ 3. СФЕРА, ОПИСАННАЯ ОКОЛО МНОГОГРАННИКА

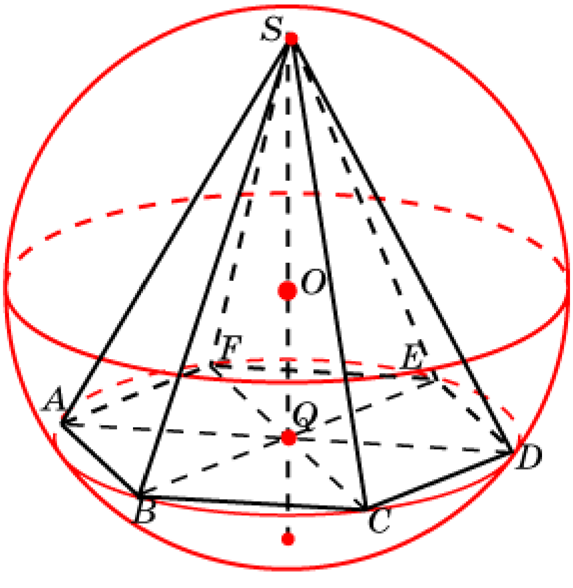
Сфера называется описанной около многогранника, если она содержит все вершины этого многогранника. Сам многогранник называется вписанным в сферу.



Если около многогранника можно описать сферу, то около каждой его грани можно описать окружность. Эта окружность является пересечением описанной сферы и плоскости грани многогранника.

Таким образом, то что около граней многогранника можно описать окружности является необходимым условием для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу.

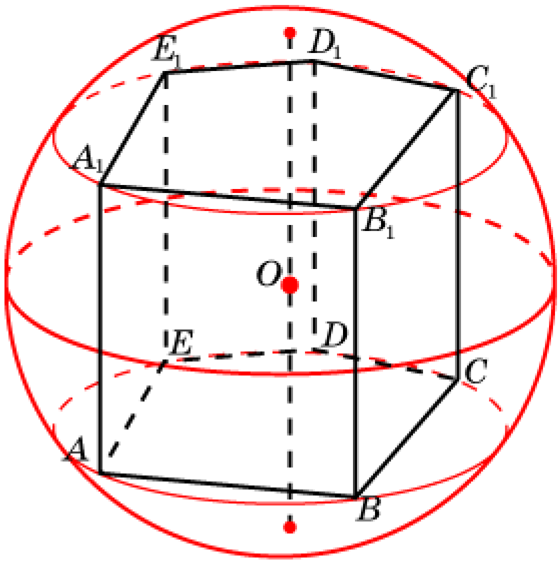
В некоторых случаях это условие является и достаточным. Так, например, около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой пирамиды можно описать окружность.



Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность. Ее центром будет точка O, являющаяся серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы. Радиус сферы R вычисляется по формуле

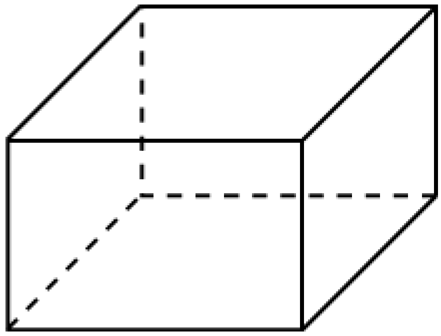
$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2},$$

где h – высота призмы, r – радиус окружности, описанной около основания призмы.

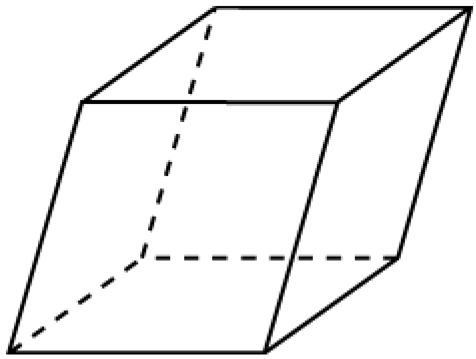


Задачи

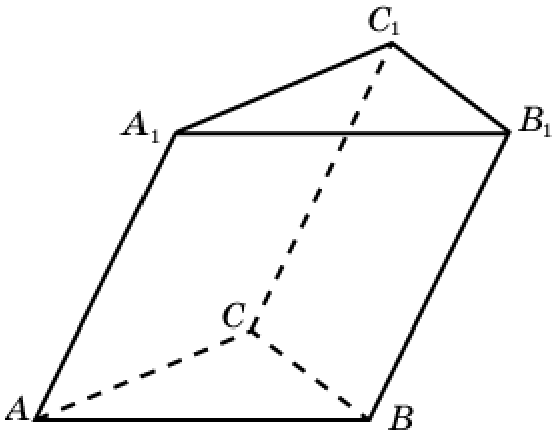
1. Можно ли описать сферу около прямоугольного параллелепипеда?



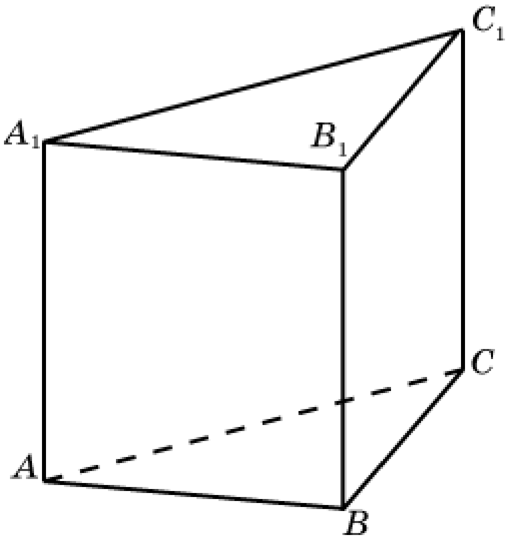
2. Можно ли описать сферу около наклонного параллелепипеда?



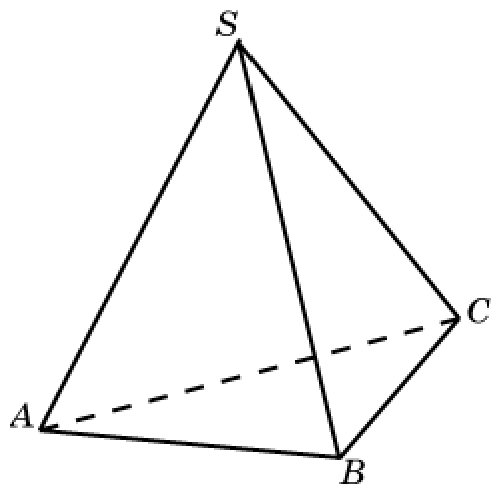
3. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?



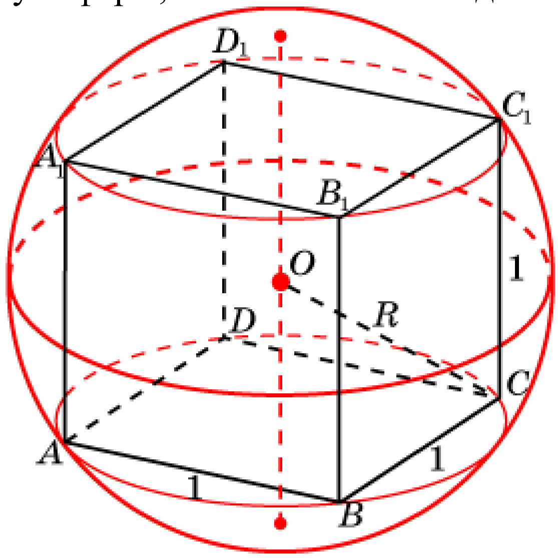
4. Может ли центр сферы, описанной около призмы, находится вне этой призмы?



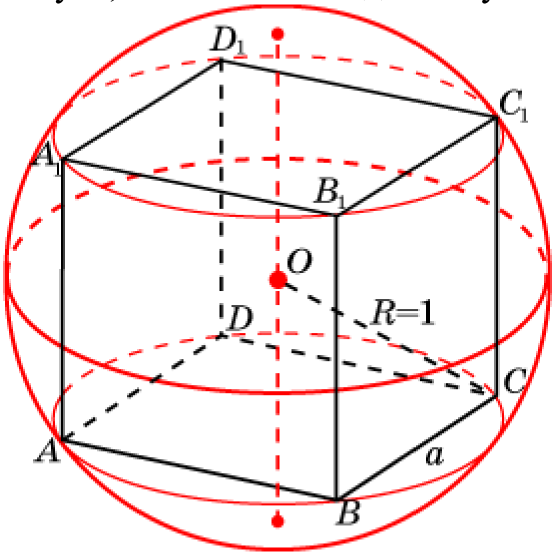
5. Может ли центр сферы, описанной около пирамиды, находится вне этой пирамиды?



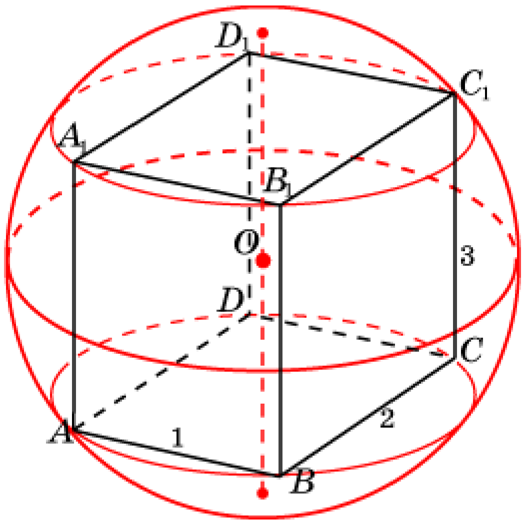
6. Найдите радиус сферы, описанной около единичного куба.



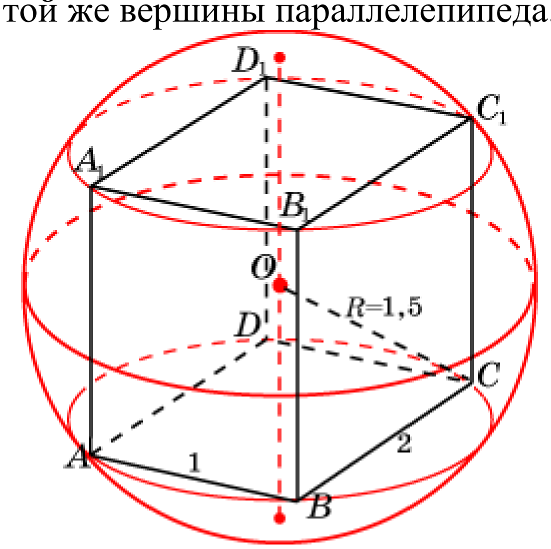
7. Найдите ребро куба, вписанного в единичную сферу.



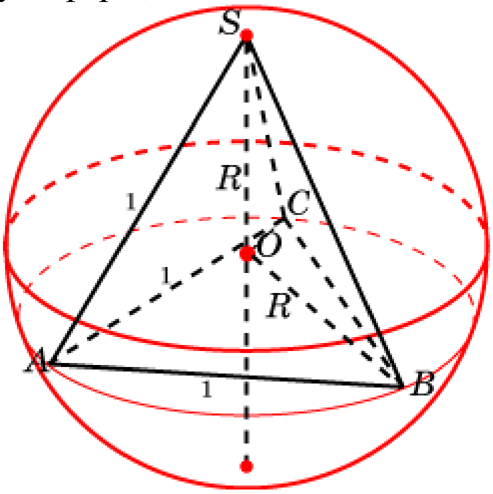
8. Найдите радиус сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3.



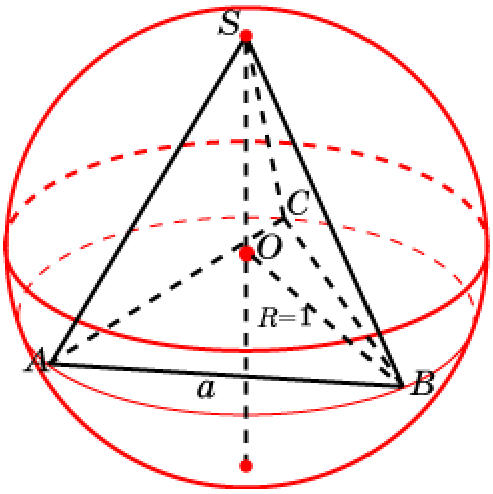
9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Радиус описанной сферы равен 1,5. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины параллелепипеда.



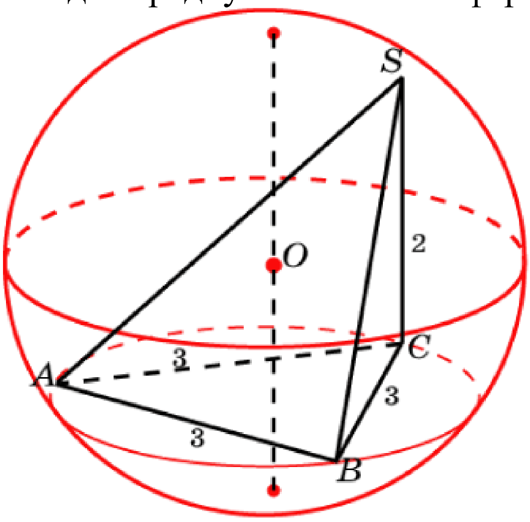
10. Найдите радиус сферы, описанной около единичного тетраэдра.



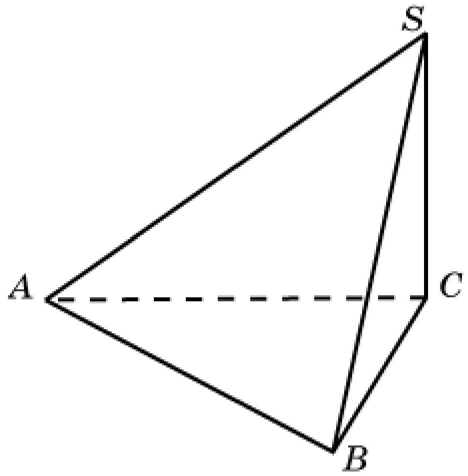
11. Найдите ребро правильного тетраэдра, вписанного в единичную сферу.



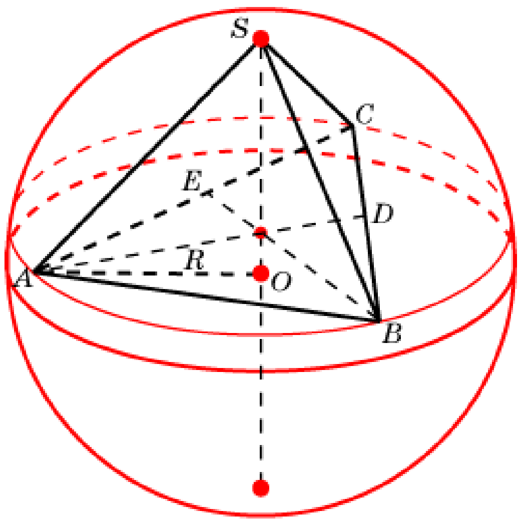
12. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3. Одно из боковых ребер равно 2 и перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус описанной сферы.



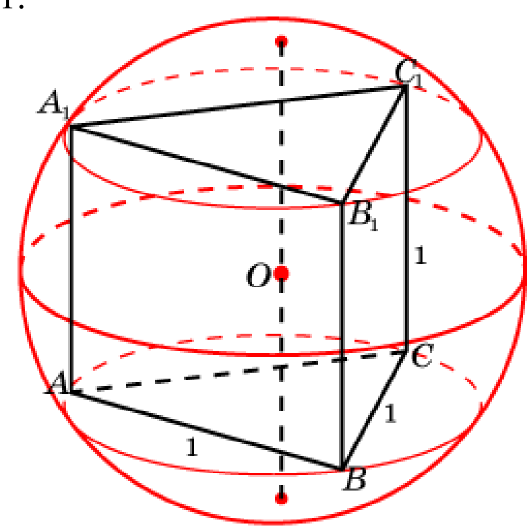
13. На рисунке изображена пирамида $SABC$, для которой ребро SC равно 2 и перпендикулярно плоскости основания ABC, угол ACB равен 90°, $AC = BC = 1$. Постройте центр сферы, описанной около этой пирамиды, и найдите ее радиус.



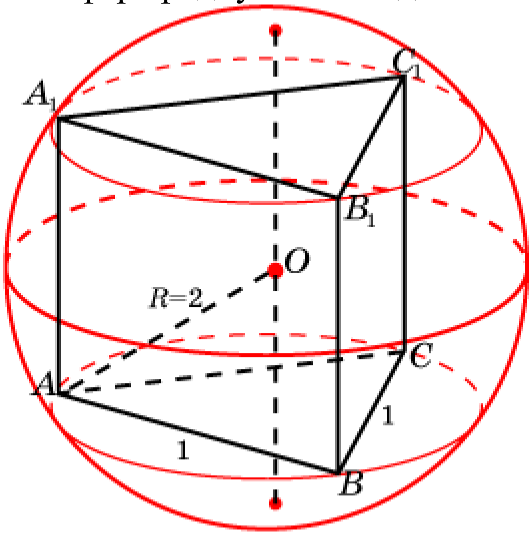
14. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 1, и плоские углы при вершине равны 90°.



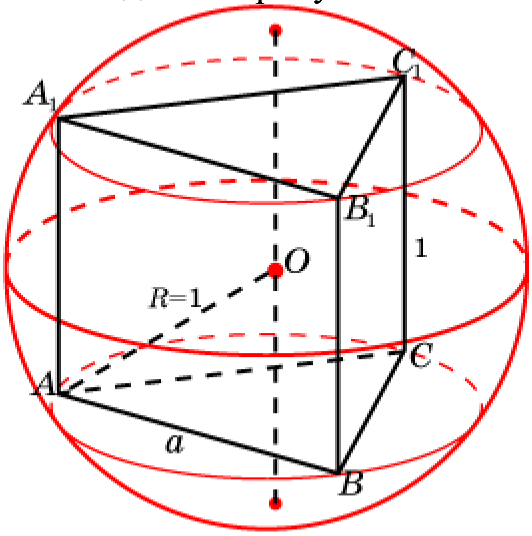
15. Найдите радиус сферы, описанной около правильной призмы, все ребра которой равны 1.



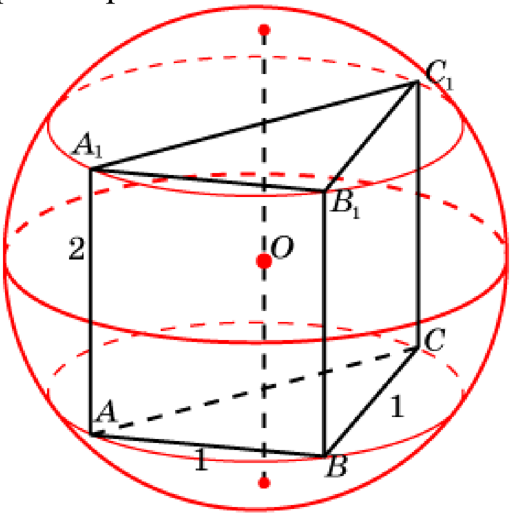
16. Около правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 1, описана сфера радиуса 2. Найдите высоту призмы.



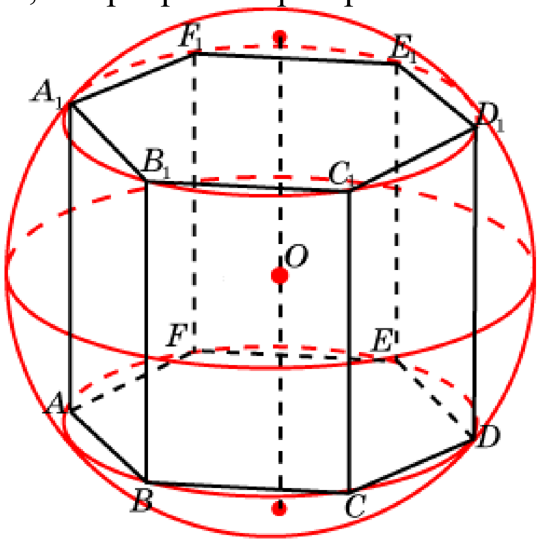
17. Около правильной треугольной призмы, высота которой равна 1, описана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания призмы.



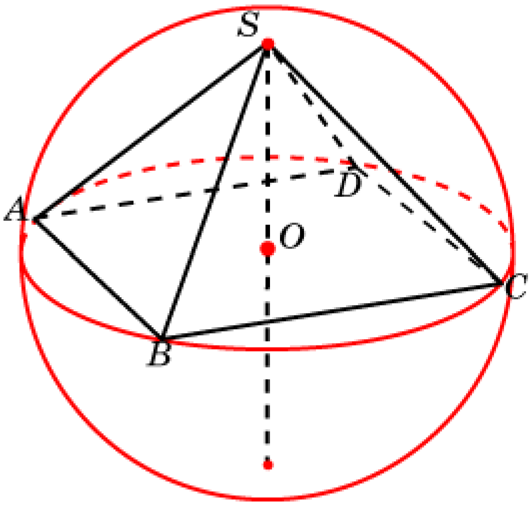
18. Найдите радиус сферы, описанной около прямой треугольной призмы, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1, и высота призмы равна 2.



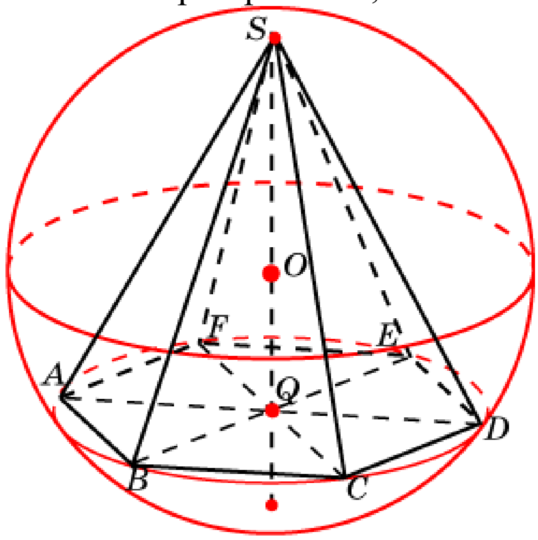
19. Найдите радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.



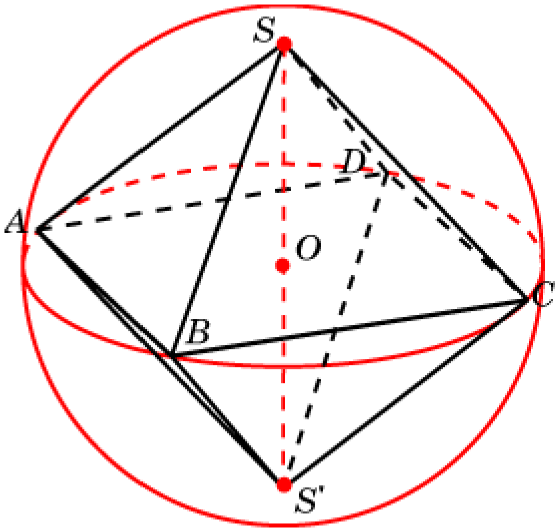
20. Найдите радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.



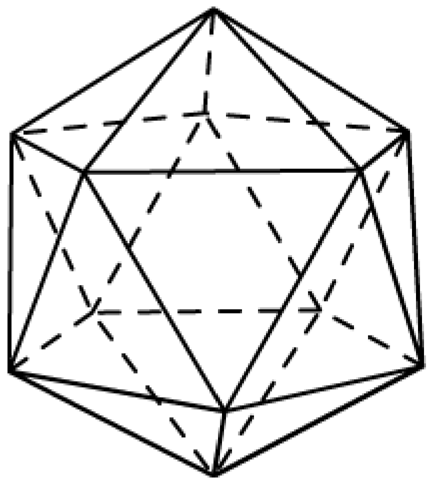
21. Найдите радиус сферы, описанной около правильной 6-угольной пирамиды, ребра основания которой равны 1, а боковые ребра 2.



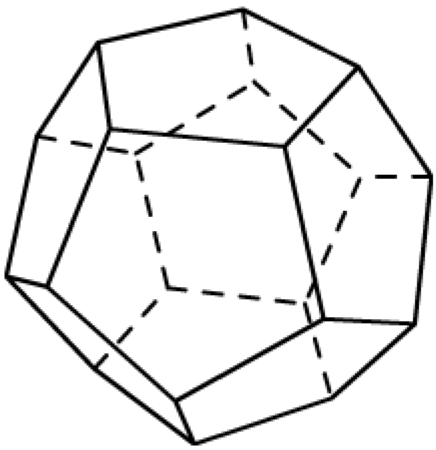
22. Найдите радиус сферы, описанной около единичного октаэдра.



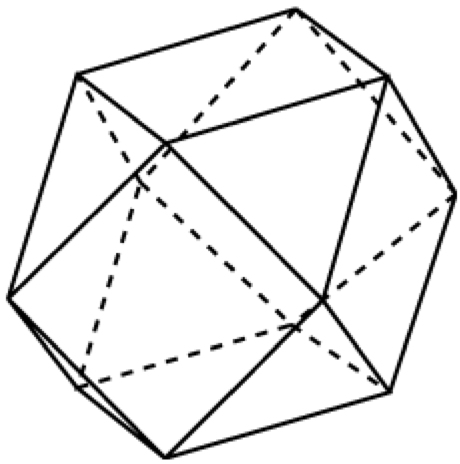
23. Найдите радиус сферы, описанной около единичного икосаэдра.



24. Найдите радиус сферы, описанной около единичного додекаэдра.



25. На рисунке изображен кубооктаэдр – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов (как у куба) и восемь треугольников (как у октаэдра). Найдите радиус сферы, описанной около единичного кубооктаэдра.

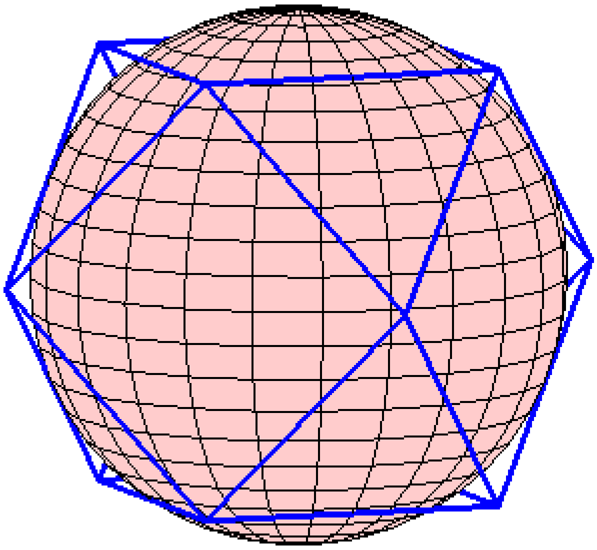


26. Приведите пример выпуклого многогранника, около каждой грани которого можно описать окружность, а около самого многогранника нельзя описать сферу.

§ 4. СФЕРА, ПОЛУВПИСАННАЯ В МНОГОГРАННИК

Сфера называется полувписанной в многогранник, если она касается всех его ребер.

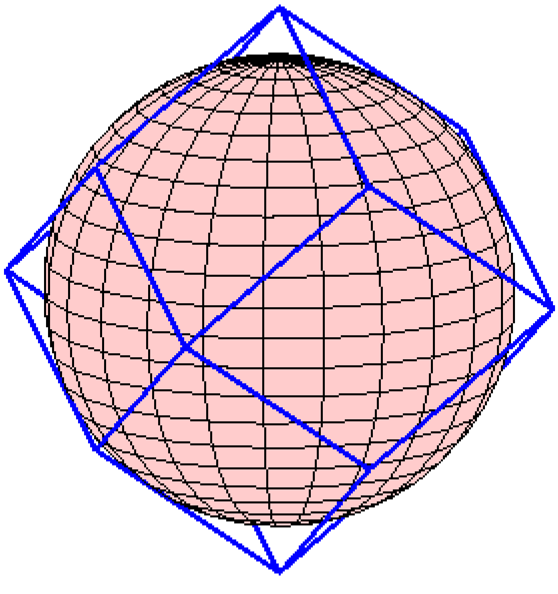
Центром полувписанной сферы является точка, равноудаленная от всех ребер многогранника.



Ясно, что если у многогранника существует полувписанная сфера, то в каждую его грань можно вписать окружность. Причем, окружности, вписанные в соседние грани касаются общего ребра в одной и той же точке.

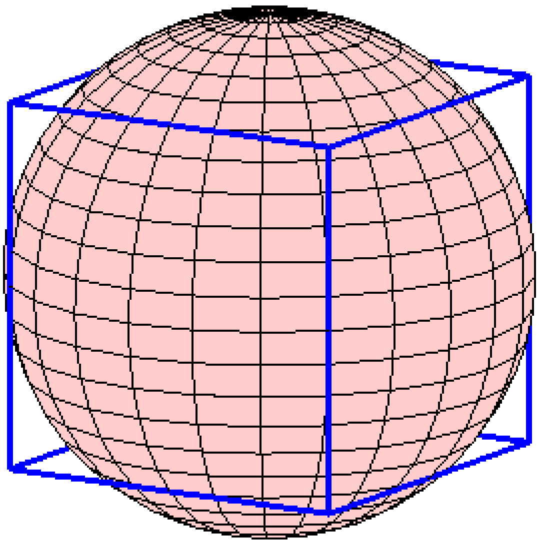
Рассмотрим еще один многогранник – ромбододекаэдр. Его гранями являются двенадцать ромбов.

Для получения ромбододекаэдра возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть равных 4-х угольных пирамид с вершинами в центре куба. Приложим эти пирамиды основаниями к граням второго куба. Образовавшийся многогранник будет ромбододекаэдром.

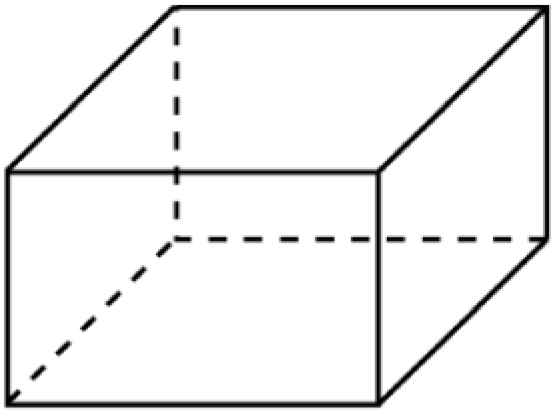


Задачи

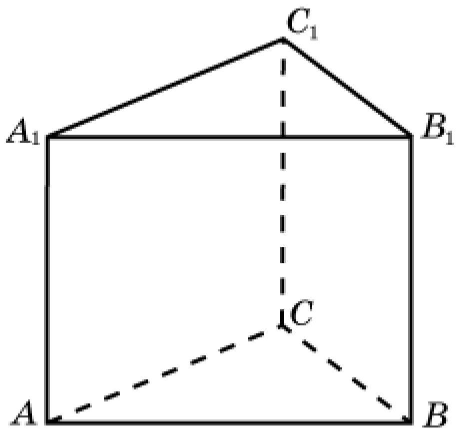
1. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный куб.



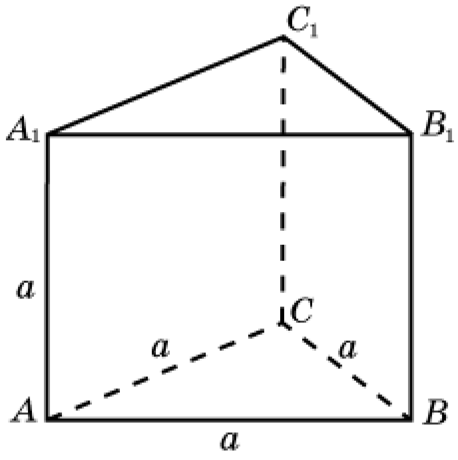
2. Существует ли полувписанная сфера у прямоугольного параллелепипеда?



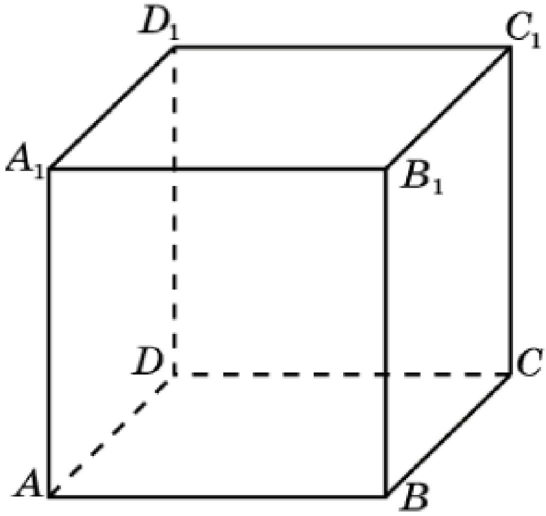
3. Докажите, что из треугольных призм полувписанная сфера может быть только у правильной треугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.



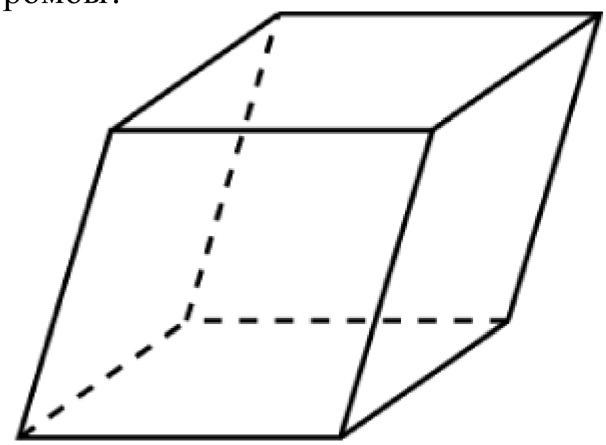
4. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильную треугольную призму с ребрами, равными a.



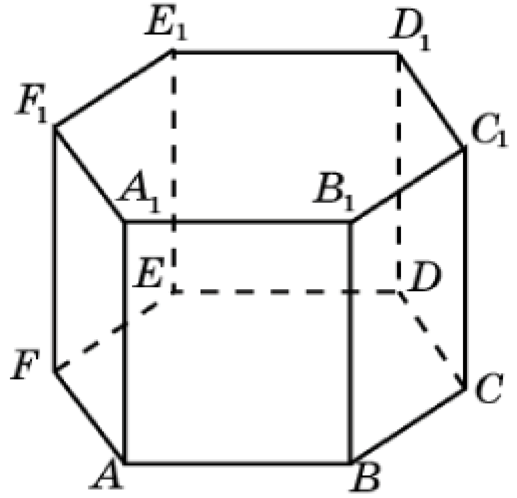
5. Докажите, что из четырехугольных призм полувписанная сфера может быть только у куба.



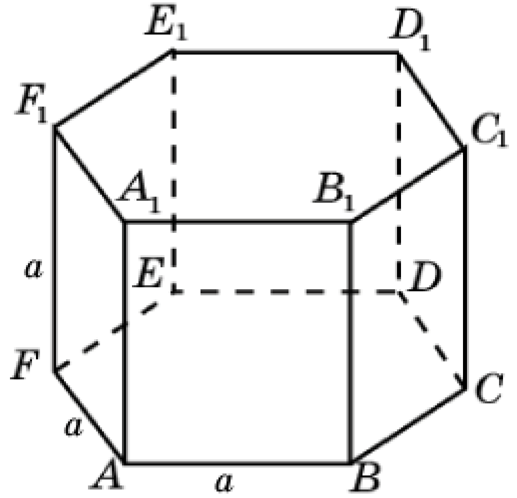
6. Существует ли полувписанная сфера у наклонного параллелепипеда, все грани которого ромбы?



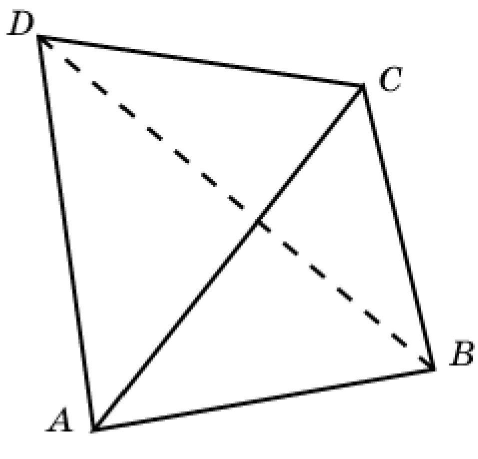
7. Докажите, что из шестиугольных призм полувписанная сфера может быть только у правильной шестиугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.



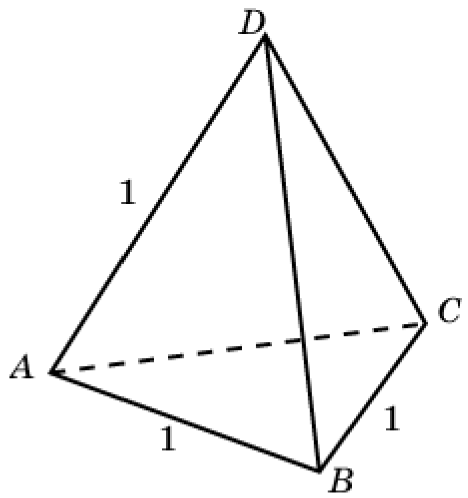
8. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильную шестиугольную призму с ребрами, равными a.



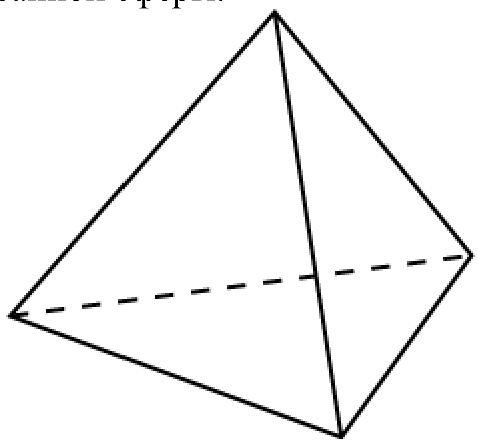
9. Докажите, что если у тетраэдра существует полувписанная сфера то суммы его противоположных ребер равны.



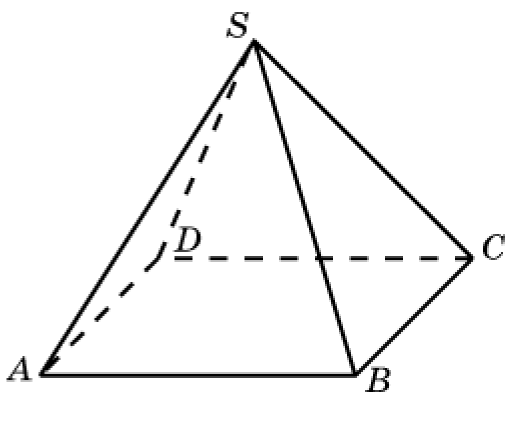
10. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильный тетраэдр с ребром 1.



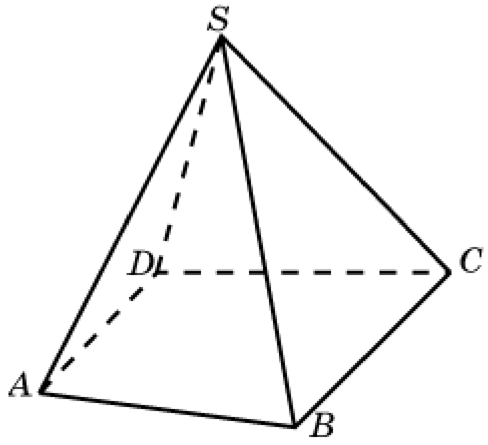
11. Приведите пример тетраэдра (треугольной пирамиды), для которой не существует полувписанной сферы.



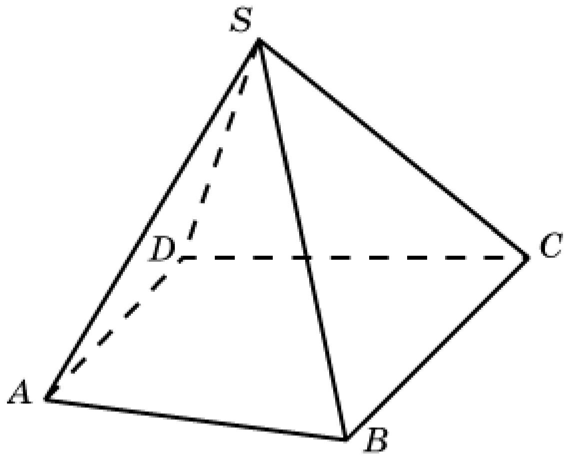
12. Найдите радиус сферы, полувписанной в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1.



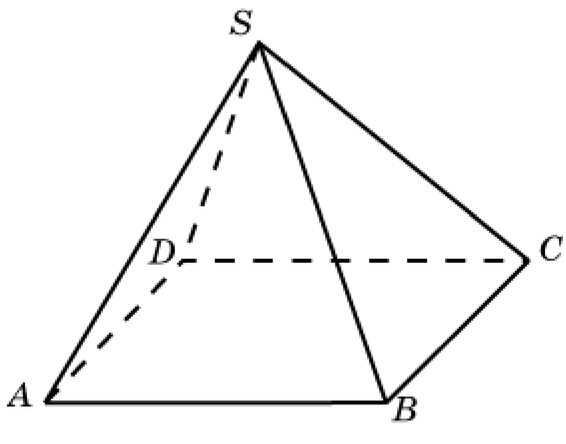
13. Докажите, что если для четырехугольной пирамиды существует полувписанная сфера, то суммы противоположных сторон ее основания равны.



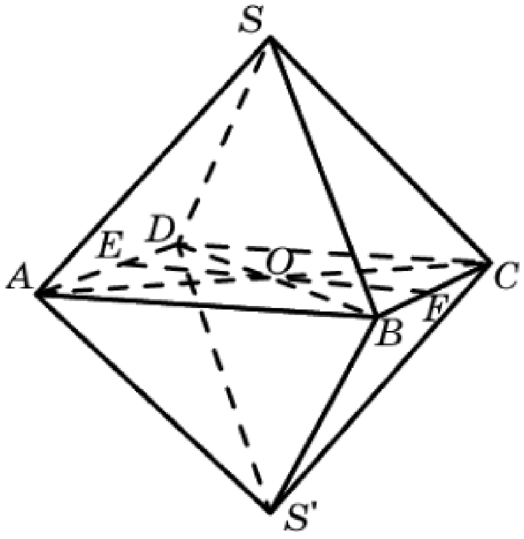
14. Докажите, что если для четырехугольной пирамиды *SABCD* существует полувписанная сфера, то выполняются следующие равенства:
$SA + BC = AB + SC$, $SB + CD = BC + SD$, $SC + AD = CD + SA$, $SD + AB = AD + SB$.



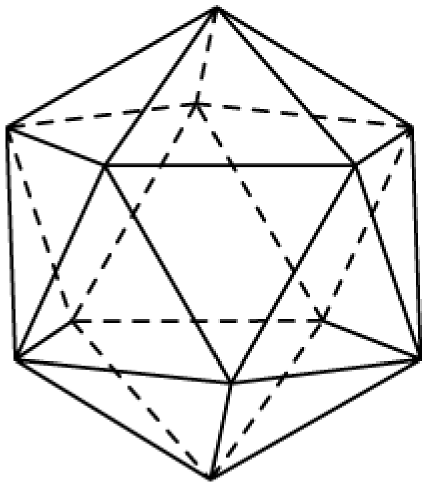
15. Приведите пример четырехугольной пирамиды, для которой не существует полувписанной сферы.



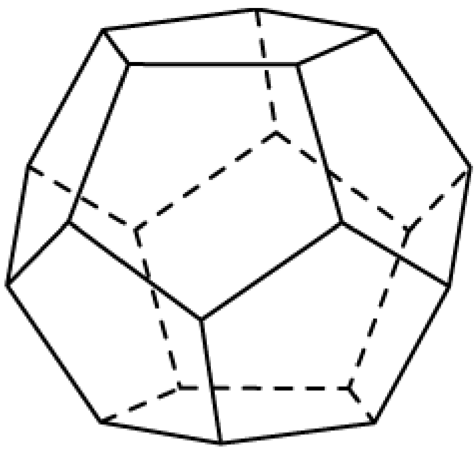
16. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в октаэдр с ребром 1.



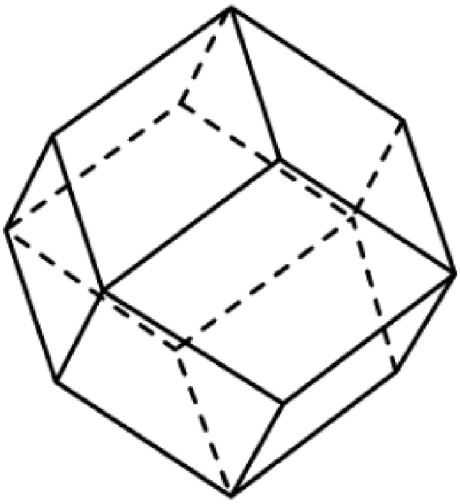
17. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в икосаэдр с ребром 1.



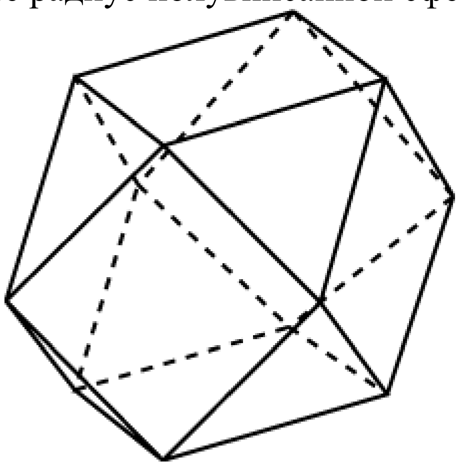
18. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в додекаэдр с ребром 1.



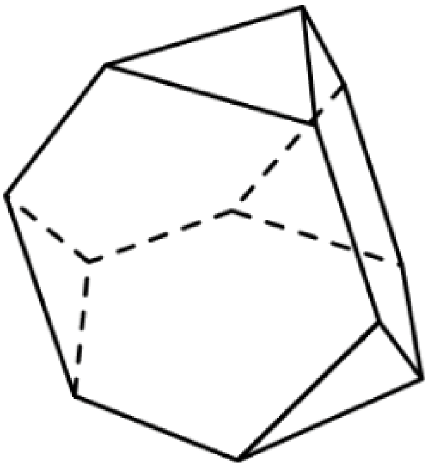
19. На рисунке изображен ромбододекаэдр. Его гранями являются двенадцать ромбов. Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в ромбододекаэдр с ребром 1.



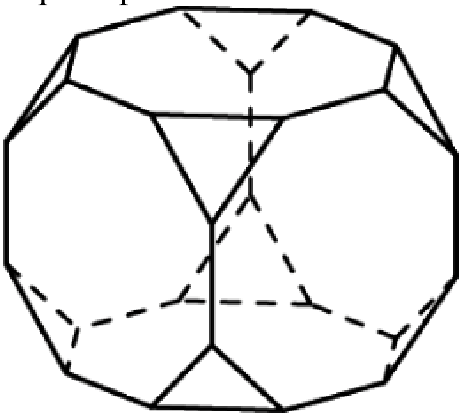
20. На рисунке изображен кубооктаэдр – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов (как у куба) и восемь треугольников (как у октаэдра). Найдите радиус полувписанной сферы.



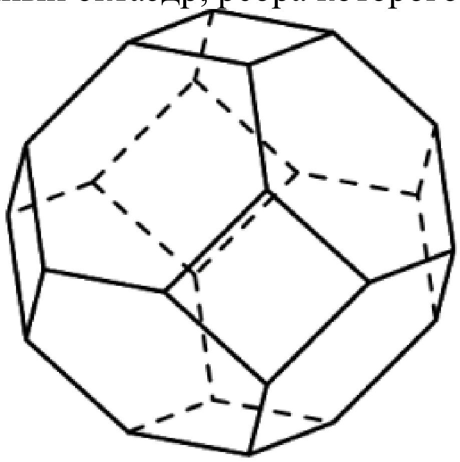
21. На рисунке изображен усеченный тетраэдр, получаемый отсечением от углов правильного тетраэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр, ребра которого равны 1.



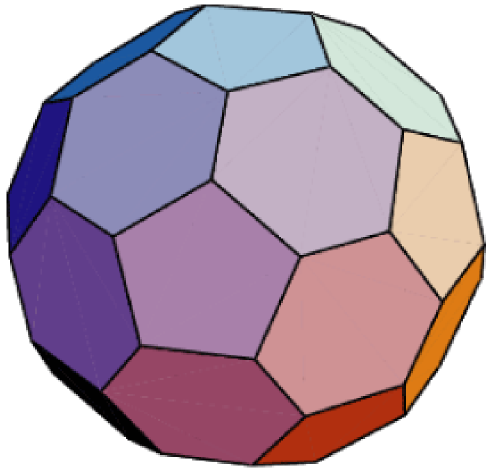
22. На рисунке изображен усеченный куб, получаемый отсечением от углов куба треугольных пирамид, гранями которого являются правильные восьмиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный куб, ребра которого равны 1.



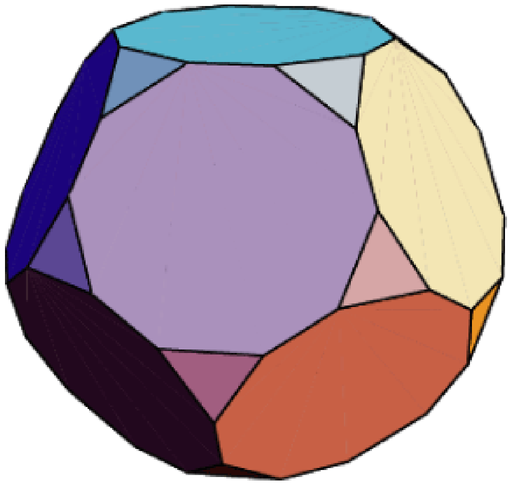
23. На рисунке изображен усеченный октаэдр, получаемый отсечением от углов октаэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный октаэдр, ребра которого равны 1.



24. На рисунке изображен усеченный икосаэдр, получаемый отсечением от углов икосаэдра пятиугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и пятиугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный икосаэдр, ребра которого равны 1.

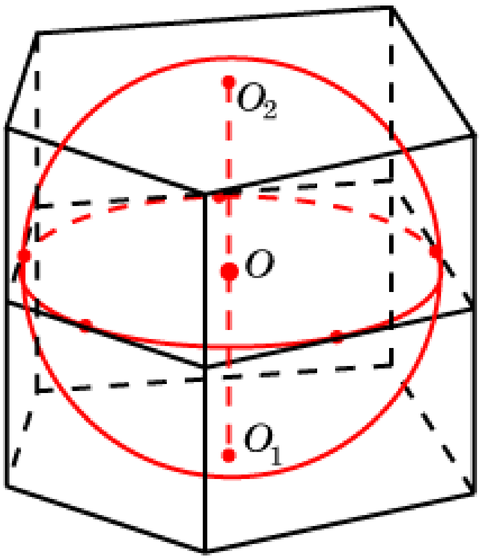


25. На рисунке изображен усеченный додекаэдр, получаемый отсечением от углов додекаэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные десятиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный додекаэдр, ребра которого равны 1.



§ 5. СФЕРА, ВПИСАННАЯ В МНОГОГРАННИК

Сфера называется вписанной в многогранник, если она касается плоскостей всех его граней. Сам многогранник называется описанным около сферы.

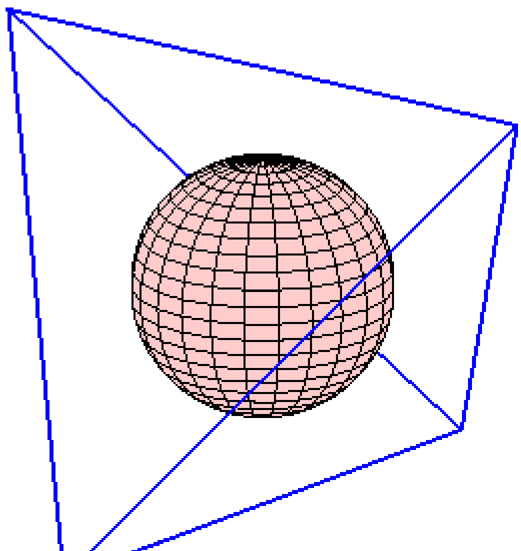


В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности.

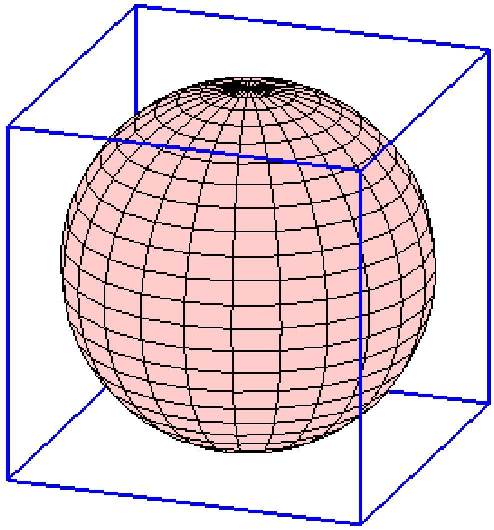
Напомним, что радиус r окружности, вписанный в многоугольник, находится по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр многоугольника.

Сферу можно вписать в правильные многогранники:

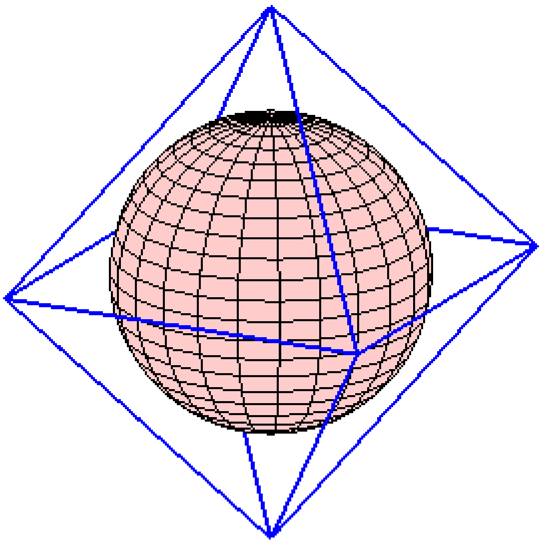
а) тетраэдр;



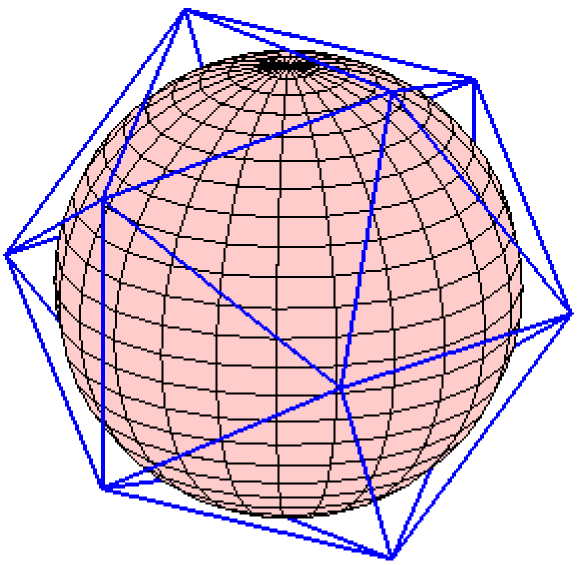
б) куб;



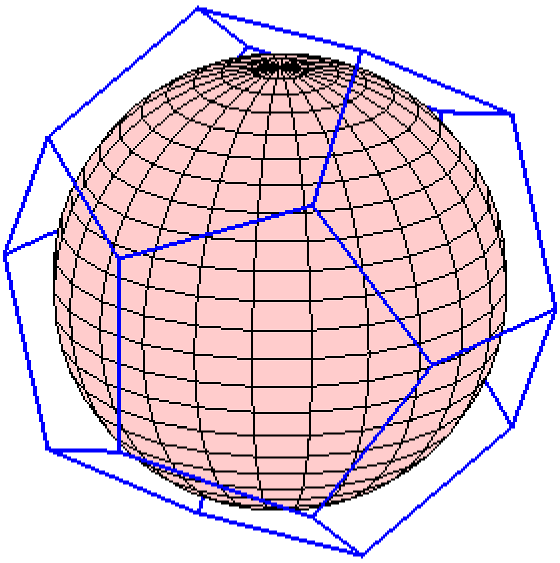
в) октаэдр;



г) икосаэдр;



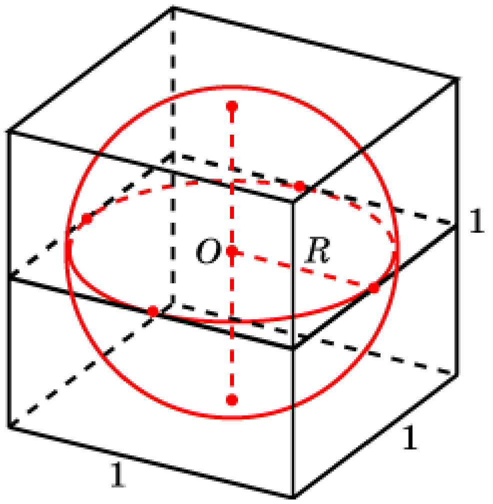
д) додекаэдр;



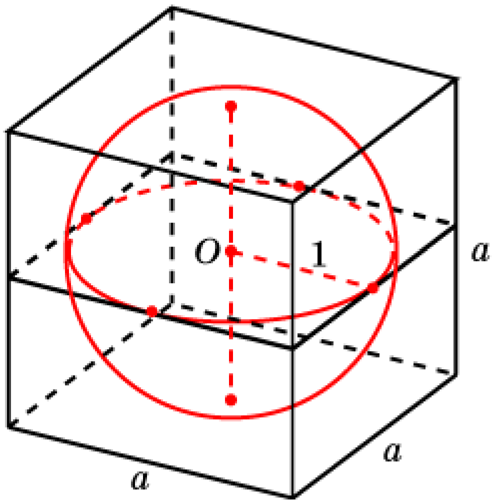
правильные *n*-угольные пирамиды и другие многогранники.

Задачи

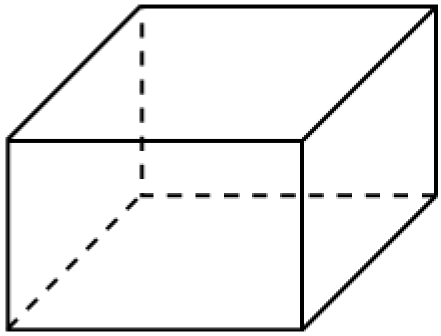
1. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный куб.



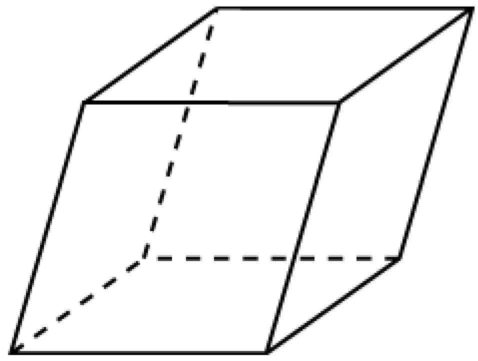
2. В куб вписана сфера радиуса 1. Найдите ребро куба.



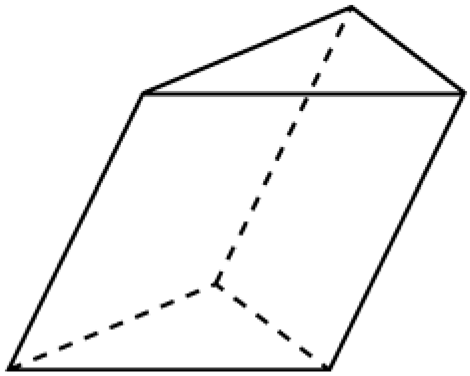
3. Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед, отличный от куба?



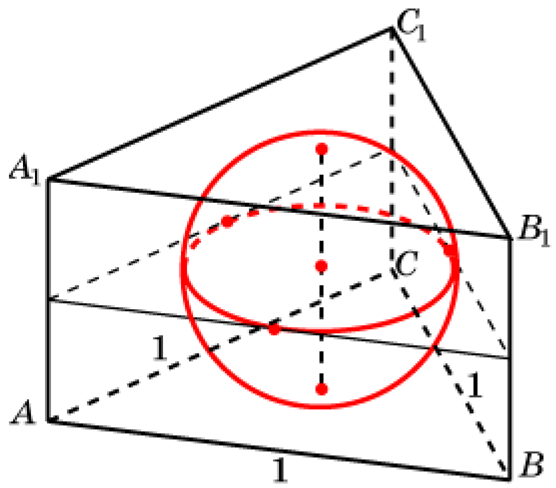
4. Можно ли вписать сферу в наклонный параллелепипед, все грани которого ромбы?



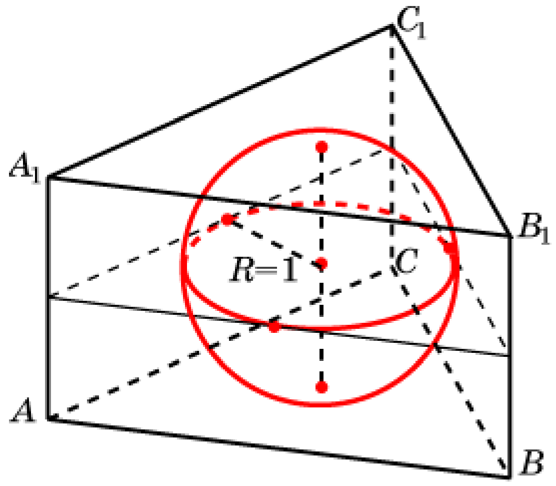
5. Можно ли вписать сферу в наклонную треугольную призму?



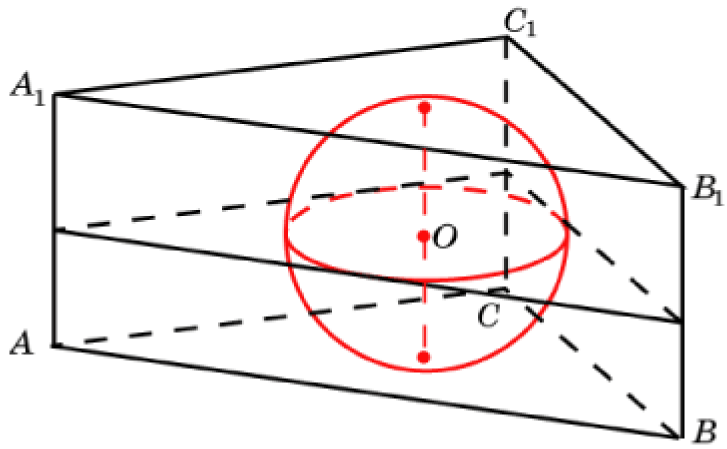
6. Найдите высоту правильной треугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если ребро основания призмы равно 1.



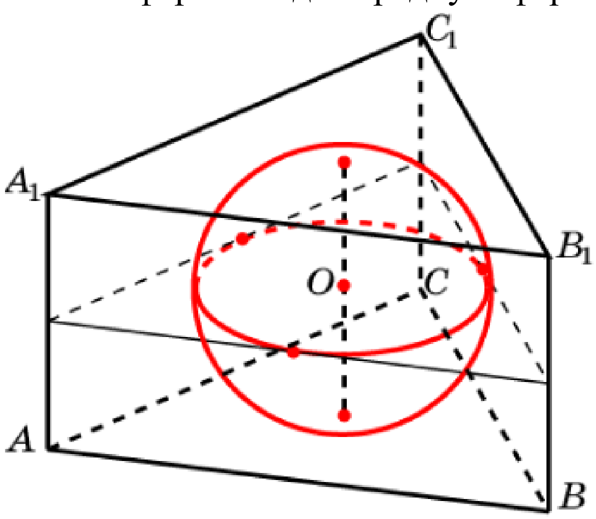
7. В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.



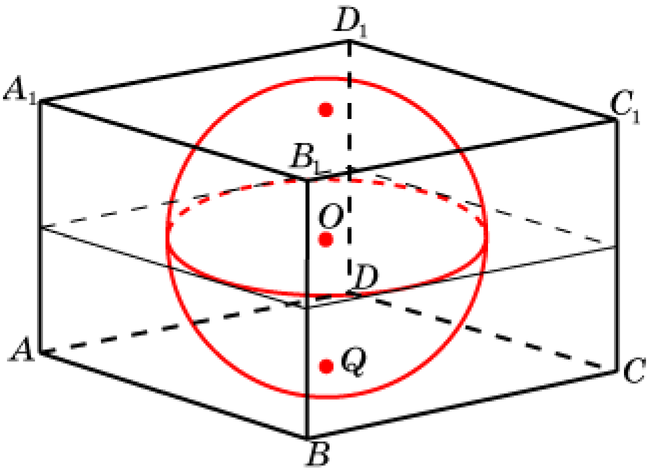
8. В призму, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



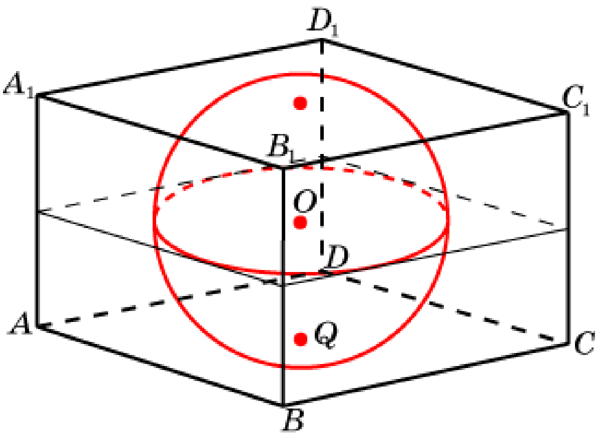
9. В призму, в основании которой равнобедренный треугольник со сторонами 2, 3, 3, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



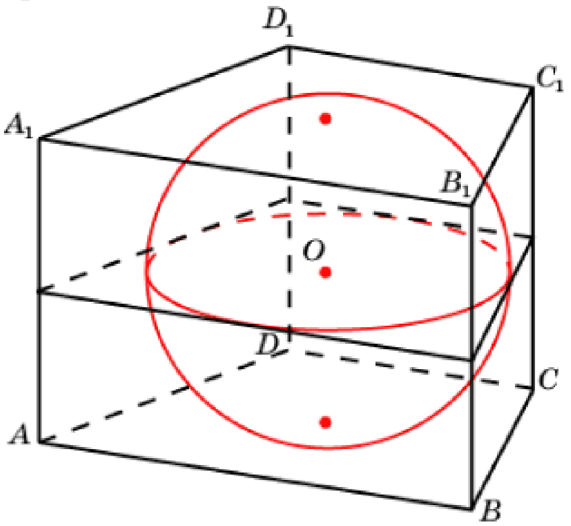
10. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



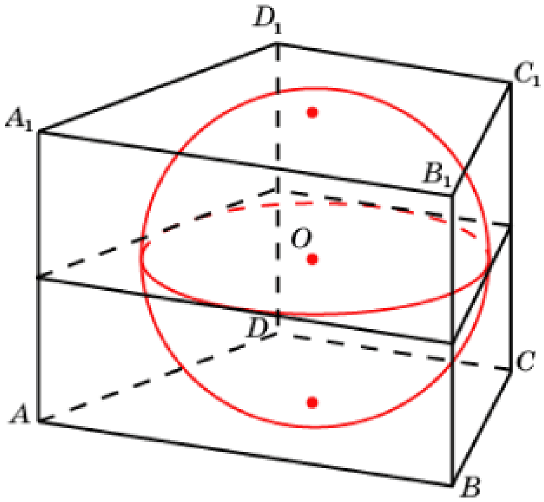
11. Единичная сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб с острым углом 60°. Найдите сторону основания a и высоту призмы h.



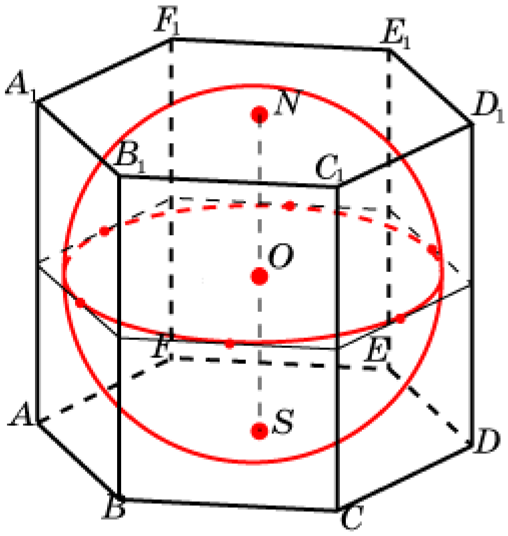
12. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой трапеция. Высота трапеции равна 2. Найдите высоту призмы и радиус вписанной сферы.



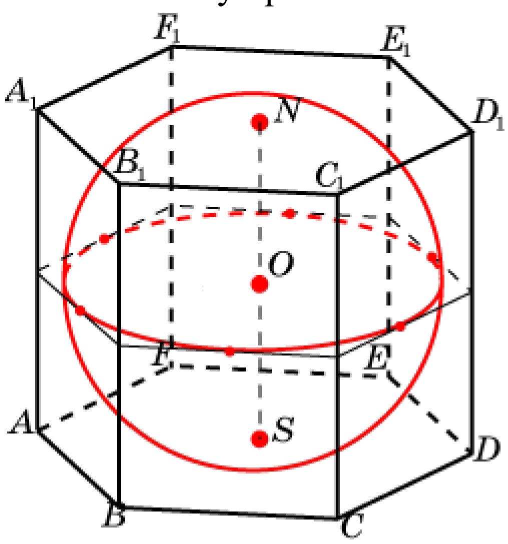
13. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой четырехугольник, периметра 4 и площади 2. Найдите радиус вписанной сферы.



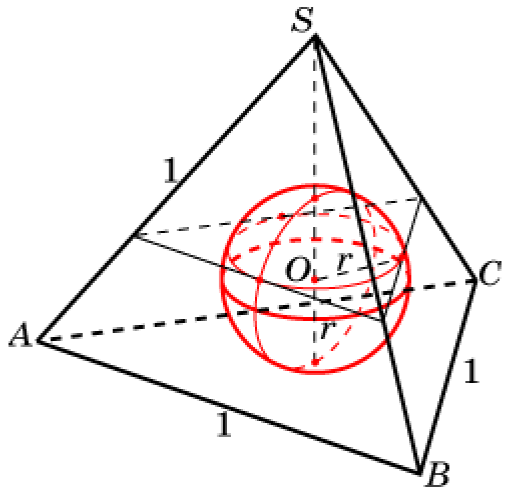
14. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если сторона основания призмы равна 1.



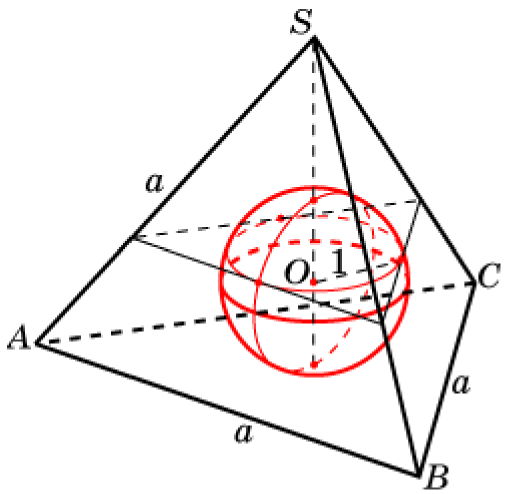
15. В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.



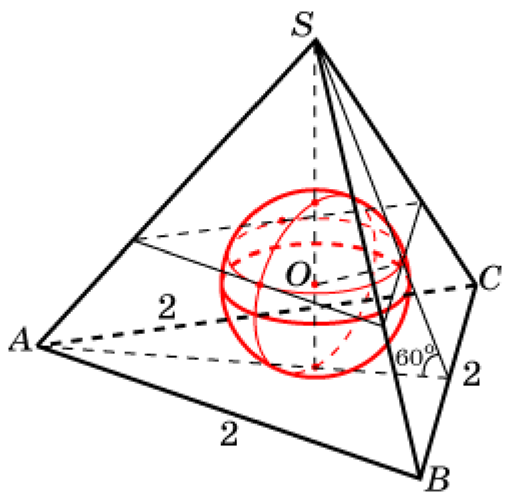
16. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный тетраэдр.



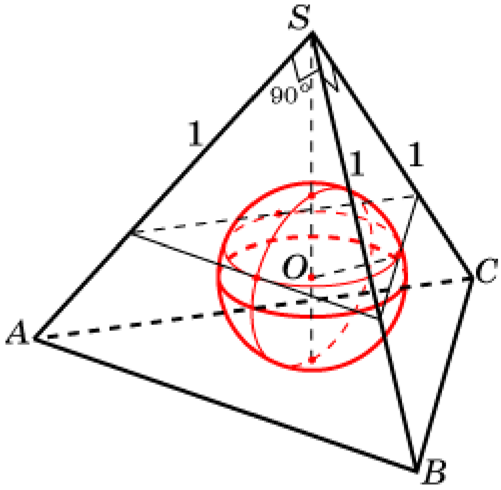
17. В правильный тетраэдр вписана единичная сфера. Найдите ребро этого тетраэдра.



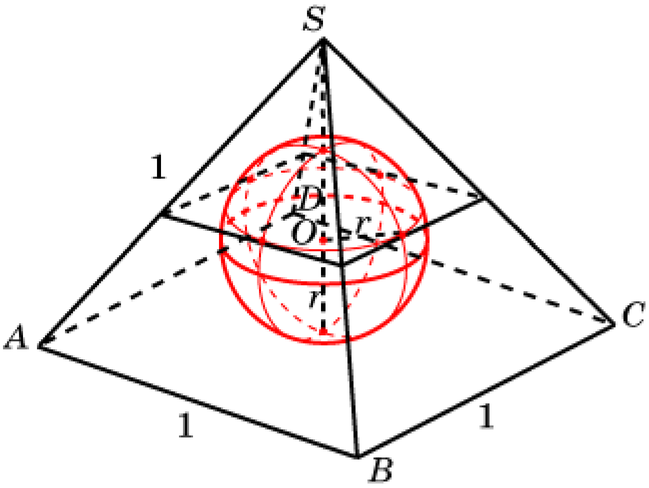
18. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2, и двугранные углы при основании равны 60°.



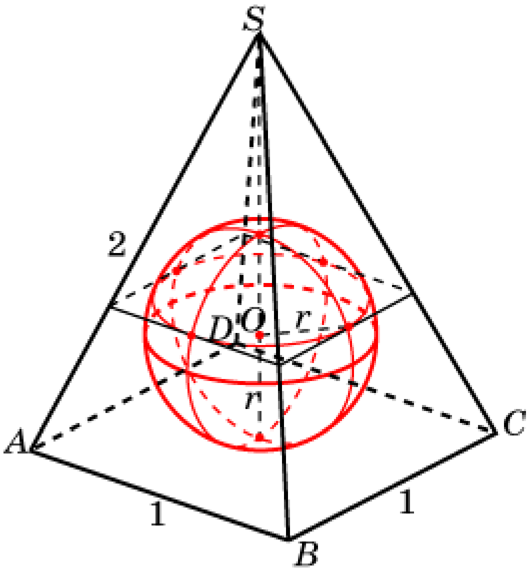
19. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, боковые ребра которой равны 1, и плоские углы при вершине равны 90°.



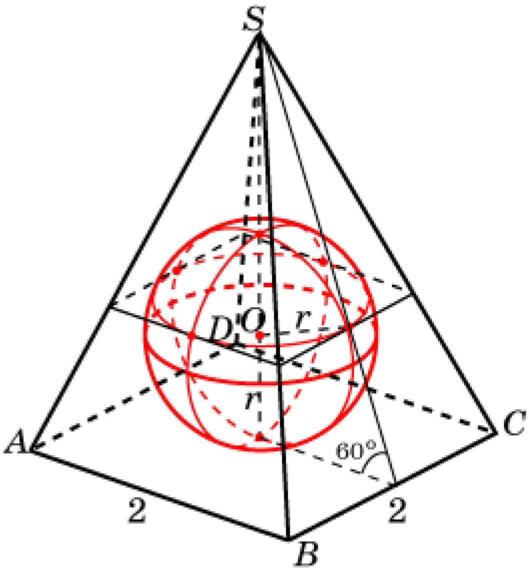
20. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1.



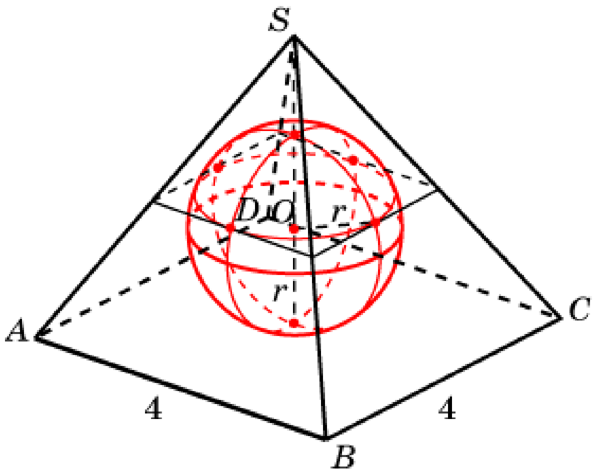
21. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро 2.



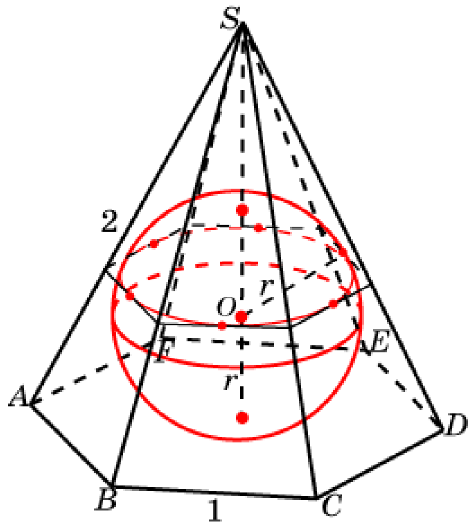
22. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 2, и двугранные углы при основании равны 60°.



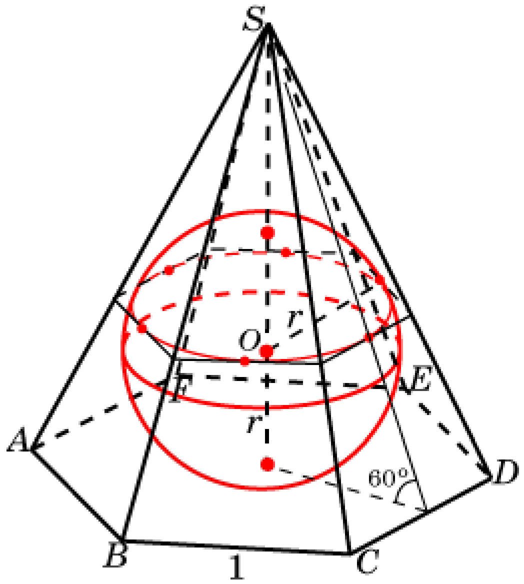
23. Единичная сфера вписана в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4. Найдите высоту пирамиды.



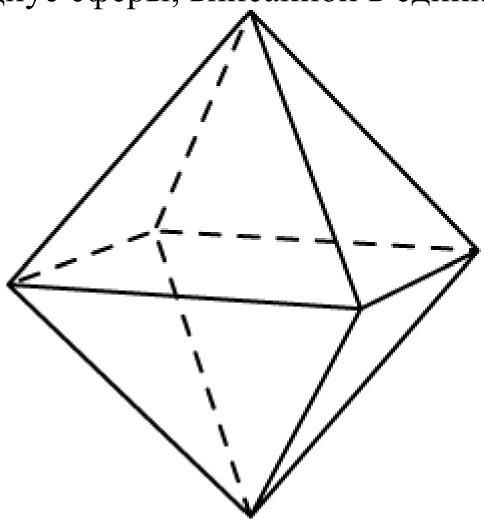
24. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребра основания равны 1, а боковые ребра 2.



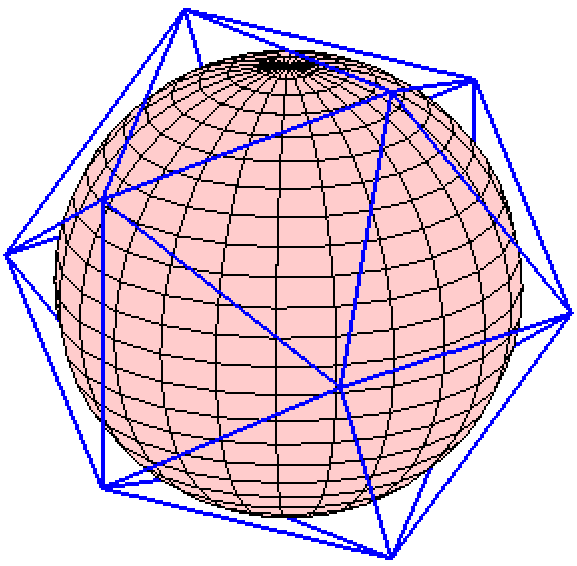
25. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, у которой ребра основания равны 1, и двугранные углы при основании равны 60°.



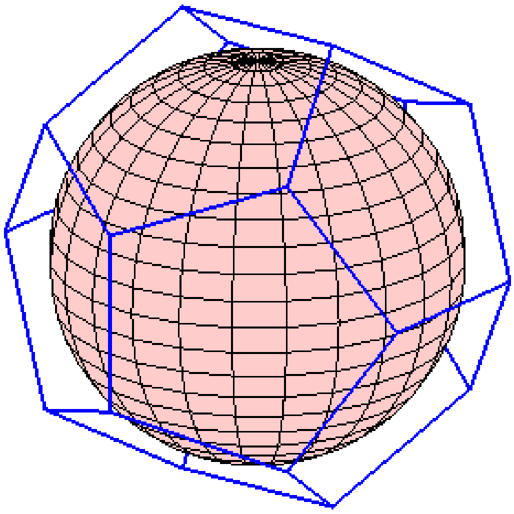
26. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный октаэдр.



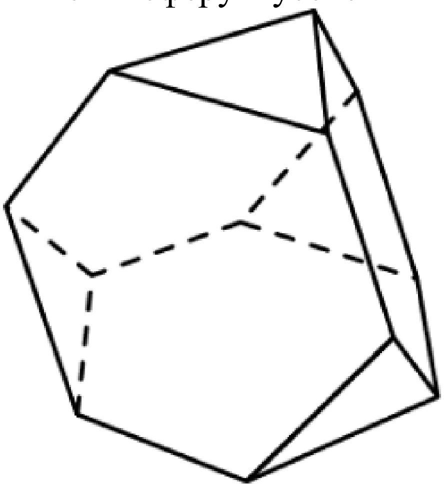
27. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный икосаэдр.



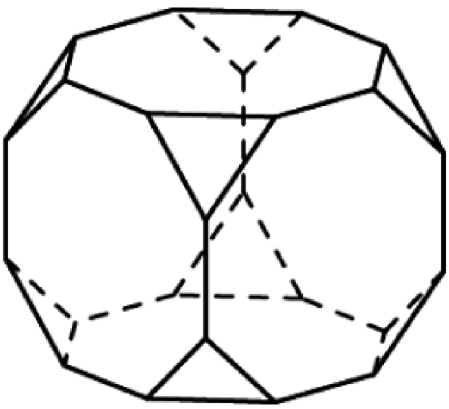
28. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный додекаэдр.



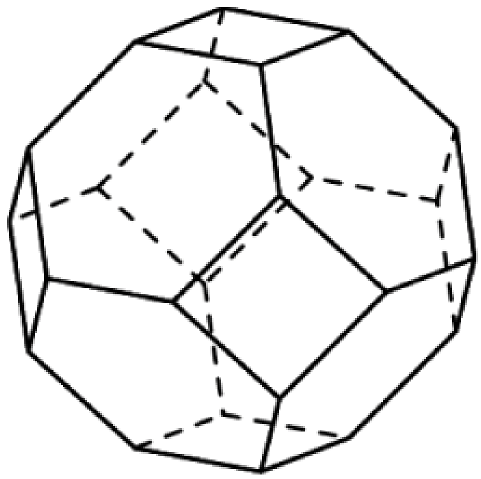
29. На рисунке изображен усеченный тетраэдр, получаемый отсечением от углов правильного тетраэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Можно вписать сферу в усеченный тетраэдр?



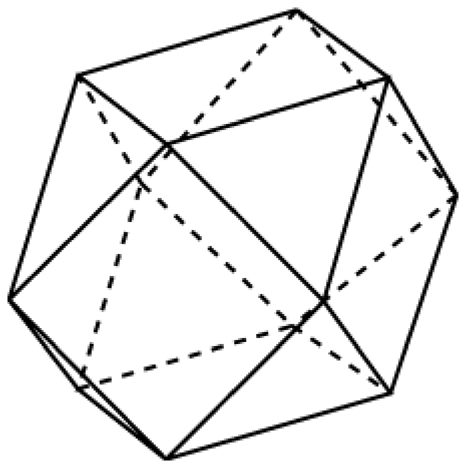
30. На рисунке изображен усеченный куб, получаемый отсечением от углов куба треугольных пирамид, гранями которого являются правильные восьмиугольники и треугольники. Можно ли вписать сферу в усеченный куб?



31. На рисунке изображен усеченный октаэдр, получаемый отсечением от углов октаэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Можно ли вписать сферу в усеченный октаэдр?



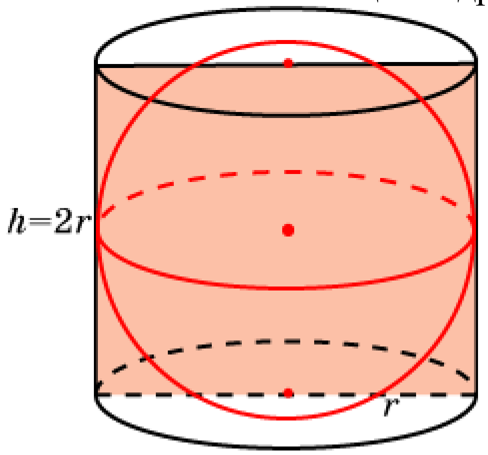
32. На рисунке изображен кубооктаэдр – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов (как у куба) и восемь треугольников (как у октаэдра). Можно ли вписать сферу в кубооктаэдр?



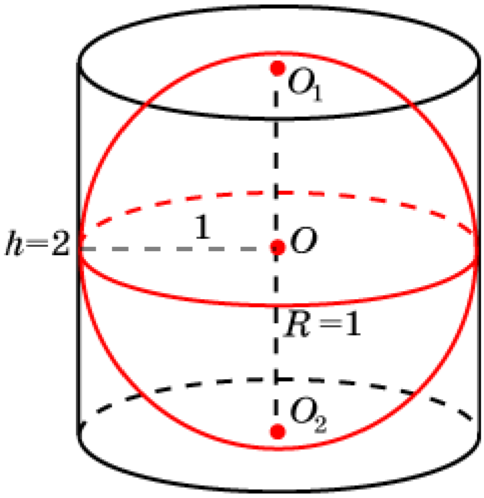
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§ 1. Вписанные и описанные цилиндры

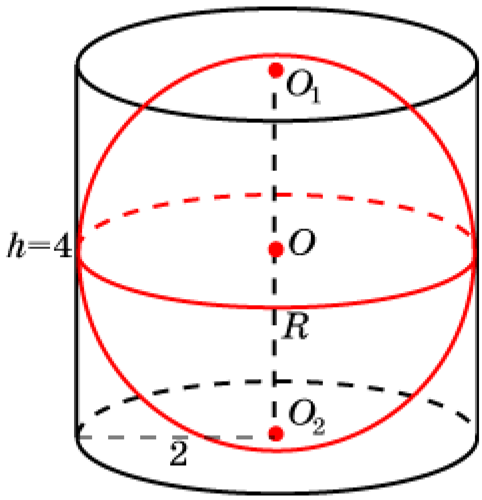
1. Радиус сферы R равен половине высоты цилиндра, т.е. $R = 1$.



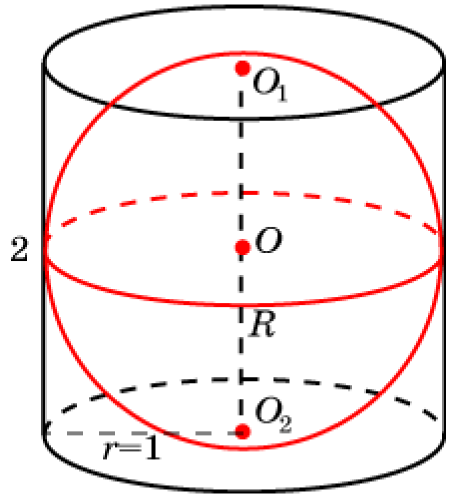
2. Высота h цилиндра равна удвоенному радиусу вписанной сферы, т.е. $h = 2$.



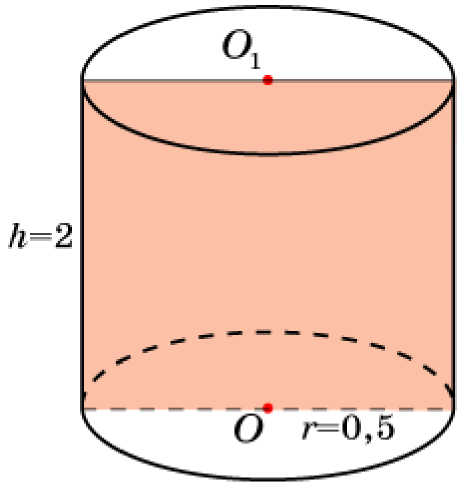
3. Высота h цилиндра должна быть равна удвоенному радиусу основания цилиндра, т.е. $h = 4$.



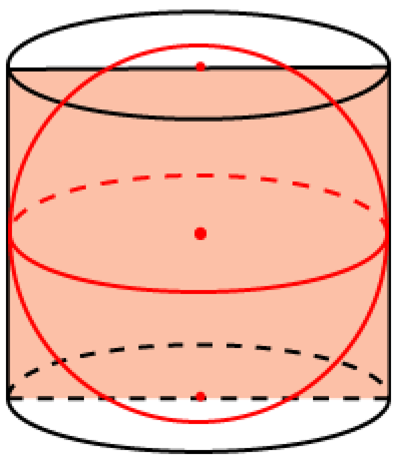
4. Радиус r основания цилиндра должен быть равен половине его высоты, т.е. $r = 1$.



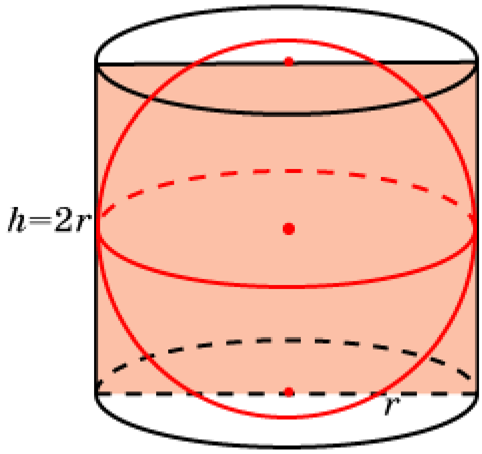
5. Нет. Радиус r основания цилиндра не равен половине высоты h цилиндра.



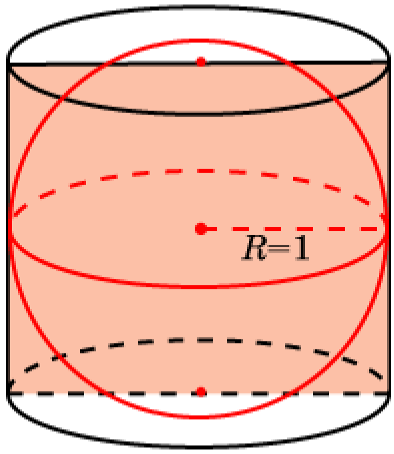
6. Да. Радиус r основания цилиндра равен половине высоты h цилиндра.



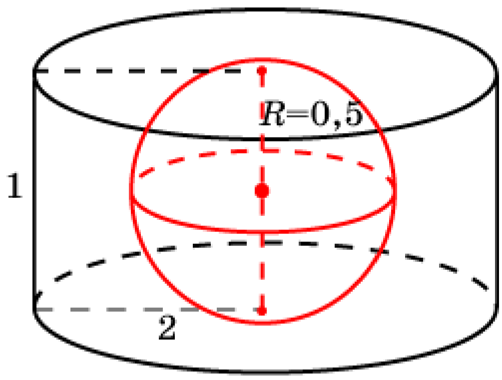
7. Можно, только в случае, если ромб является квадратом.



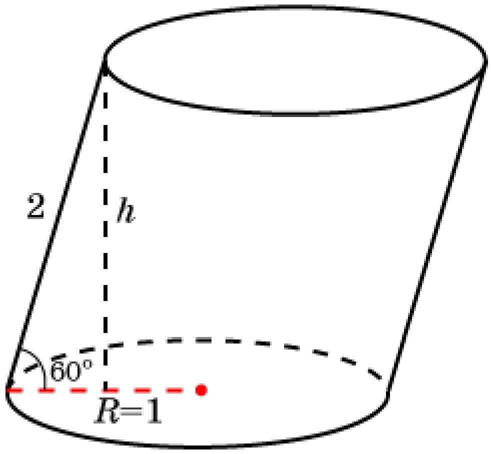
8. Нет. **9.** Радиус *R* сферы равен 1.



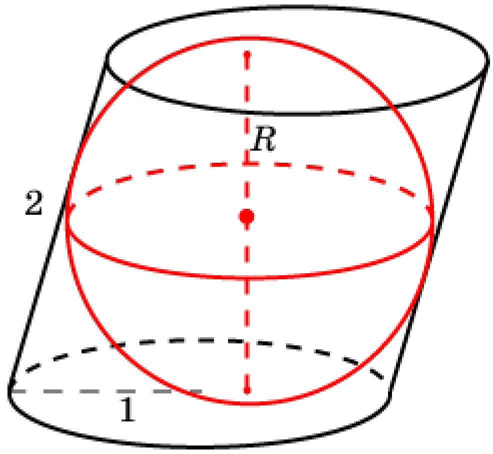
10. Диаметр сферы равен 2 см. **11.** Наибольший радиус равен 0,5 см.



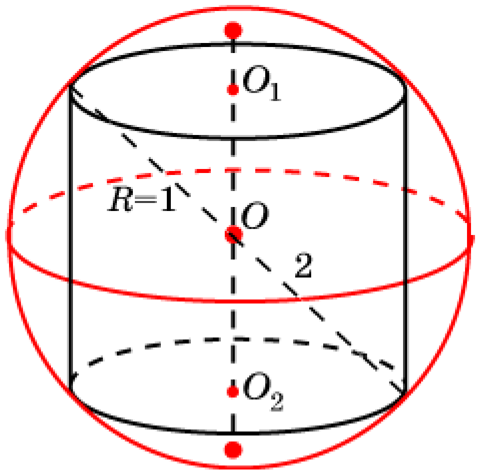
12. Нет, так как высота цилиндра равна $\sqrt{3}$, что меньше диаметра сферы.



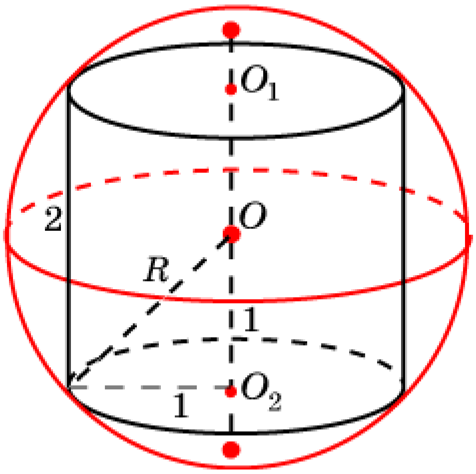
13. Наибольший радиус R равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



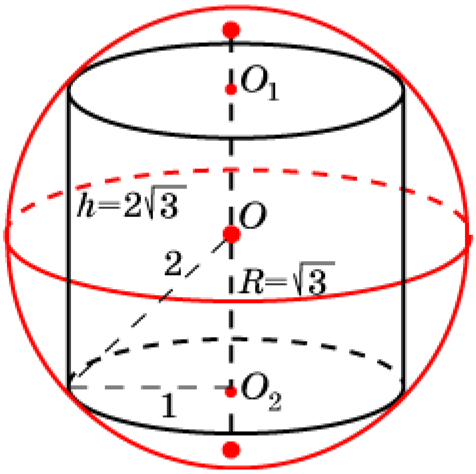
14. Радиус R сферы равен 1.



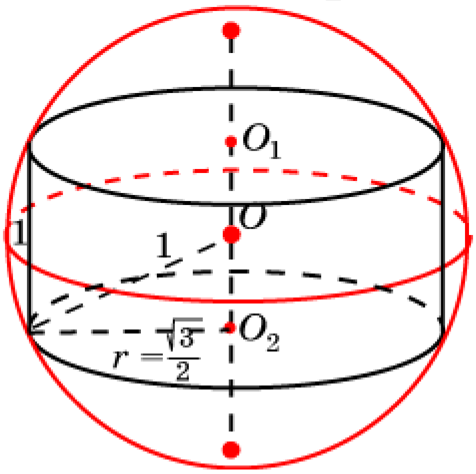
15. Радиус R сферы равен $\sqrt{2}$.



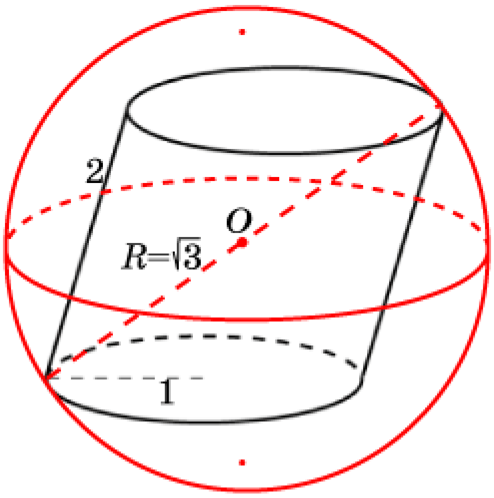
16. Высота h цилиндра равна $2\sqrt{3}$.



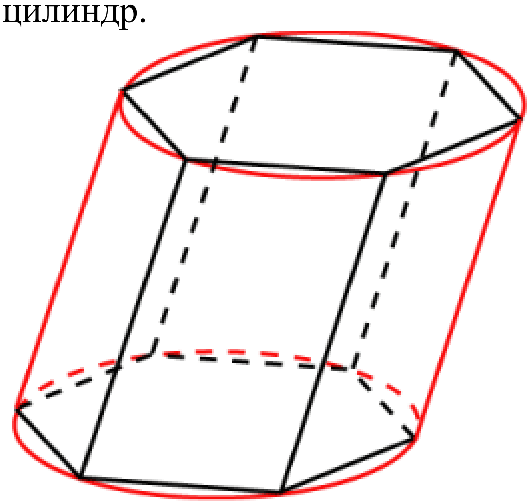
17. Радиус r основания цилиндра равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



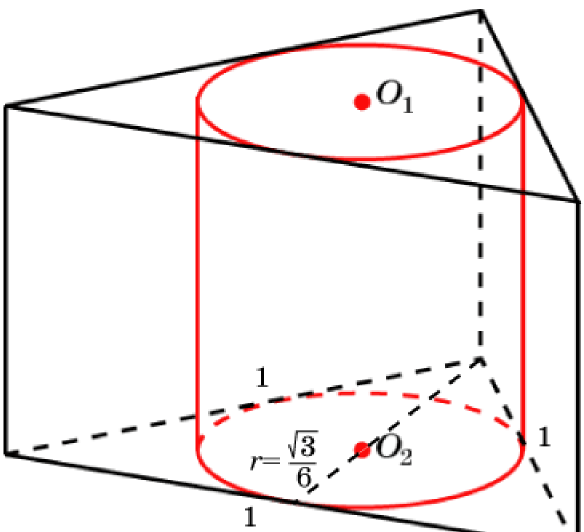
18. Наименьший радиус R сферы равен $\sqrt{3}$.



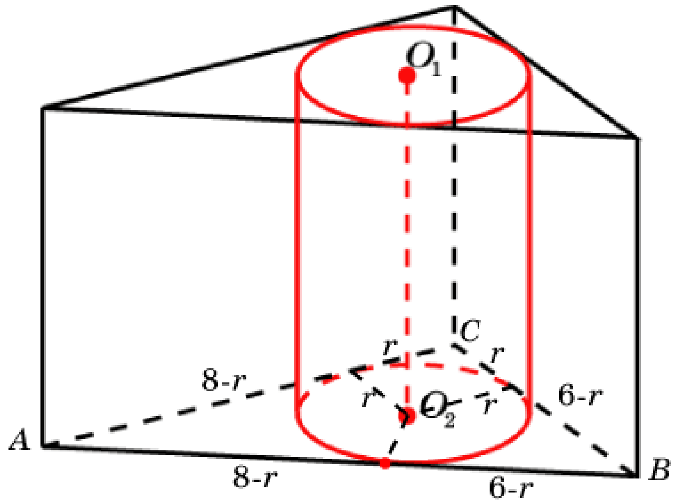
19. Да, наклонный цилиндр.



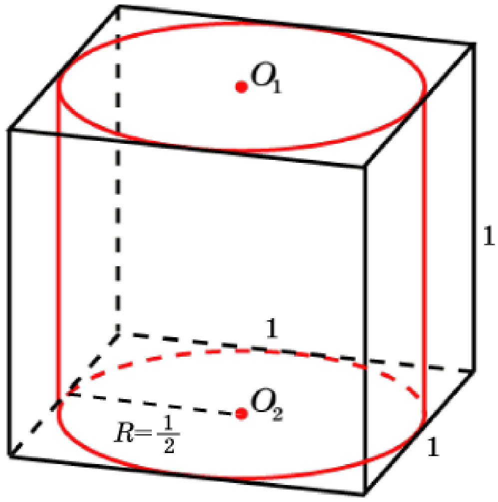
20. Радиус *r* окружности основания вписанного цилиндра равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



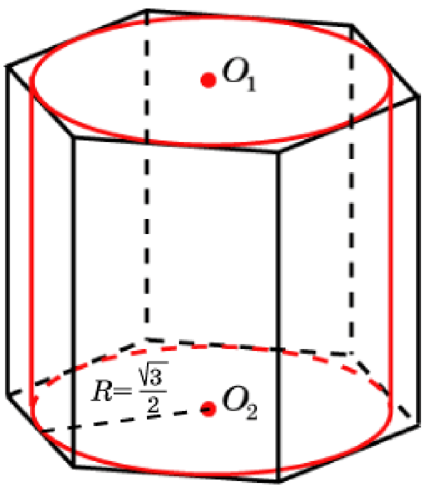
21. Радиус *r* окружности основания вписанного цилиндра равен 2.



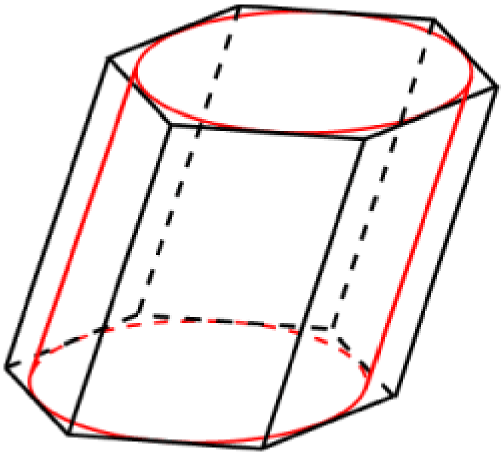
22. Радиус r окружности основания вписанного цилиндра равен $\dfrac{1}{2}$.



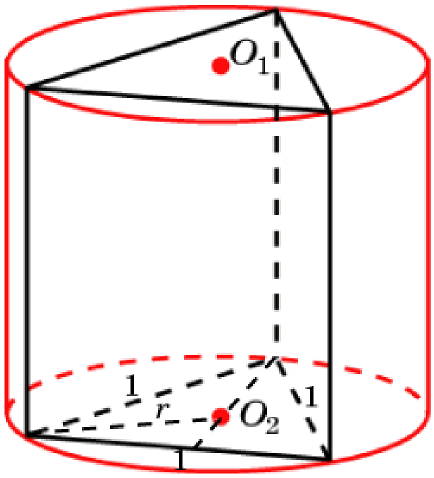
23. Радиус r окружности основания вписанного цилиндра равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



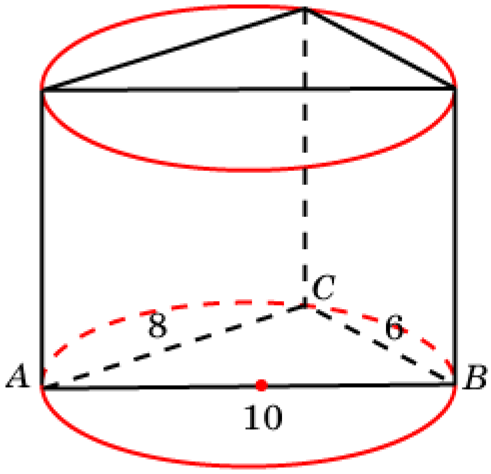
24. Да, наклонный цилиндр.



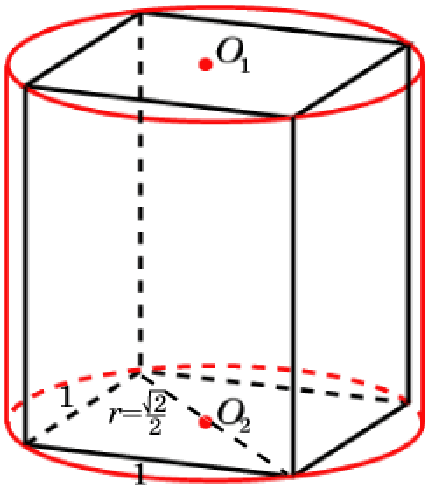
25. Радиус r основания описанного цилиндра равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



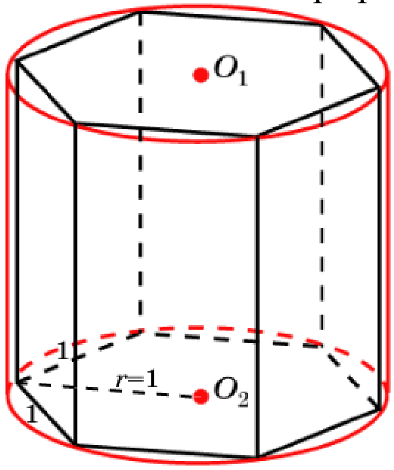
26. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 10. Радиус r основания описанного цилиндра равен половине гипотенузы и равен 5.



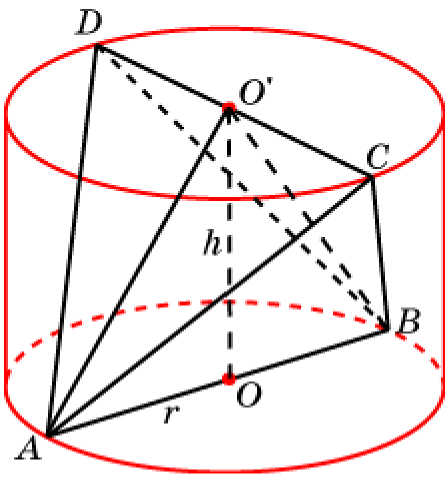
27. Радиус r основания описанного цилиндра равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



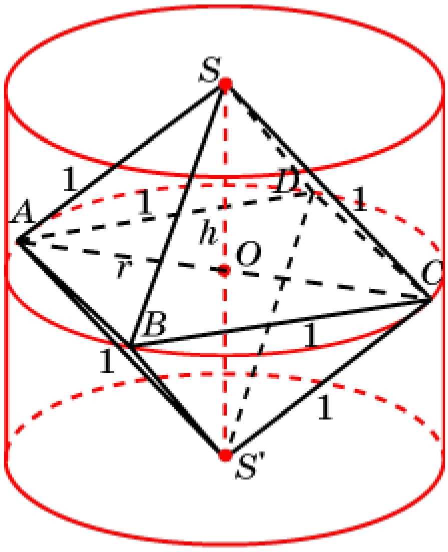
28. Радиус r основания описанного цилиндра равен 1.



29. Радиус r основания описанного цилиндра равен $\frac{1}{2}$, высота h цилиндра равна высоте $O'O$ треугольника ABO', в котором $AB = 1$, $AO' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

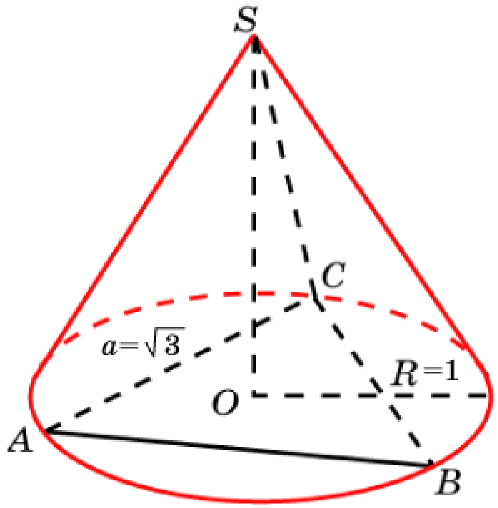


30. Радиус r основания описанного цилиндра равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, высота h цилиндра равна $\sqrt{2}$.

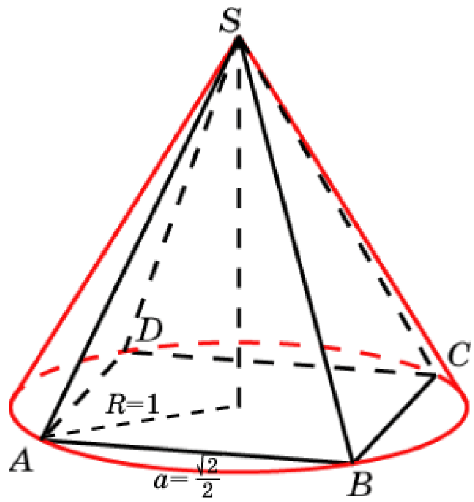


§ 2. Вписанные и описанные конусы

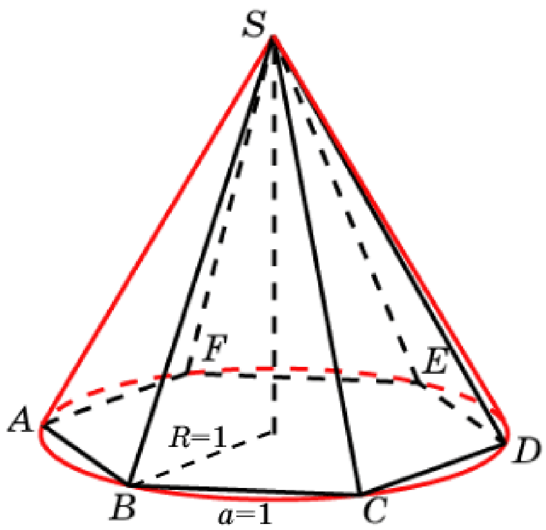
1. Сторона a основания правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, равна $\sqrt{3}$.



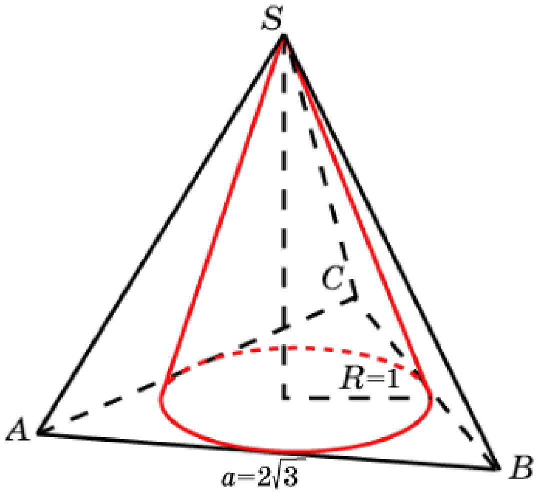
2. Сторона a основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



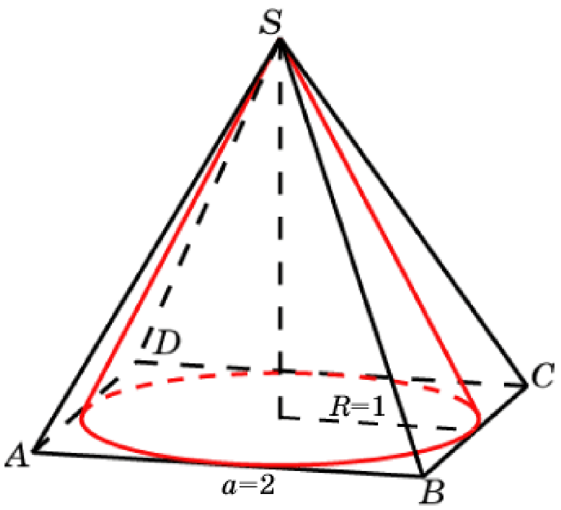
3. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, равна 1.



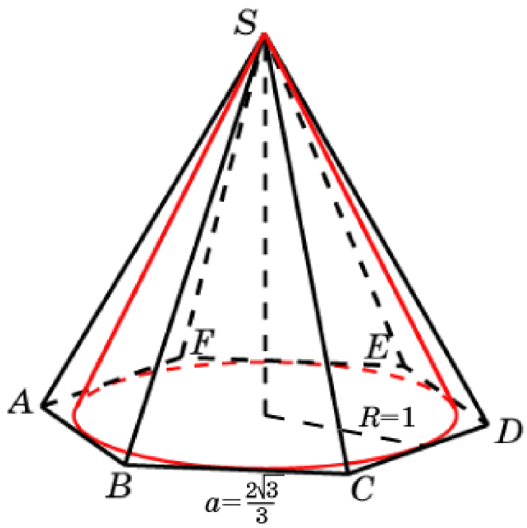
4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, равна $2\sqrt{3}$.



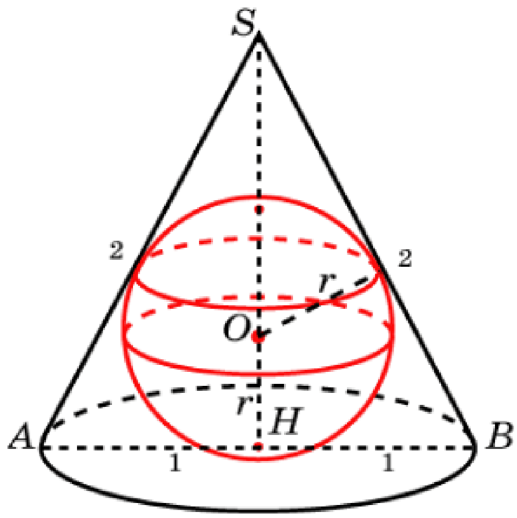
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса, равна 2.



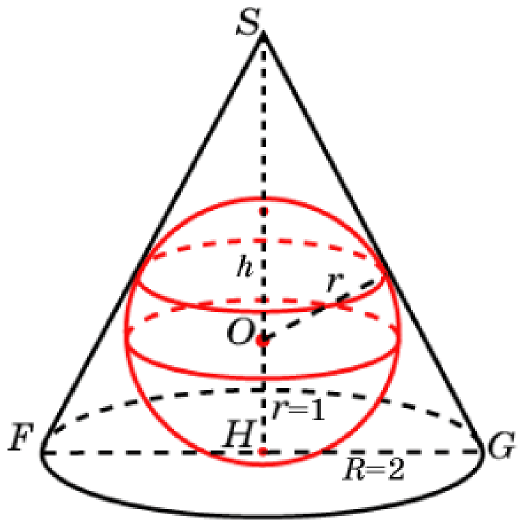
6. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды, описанной около конуса, равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



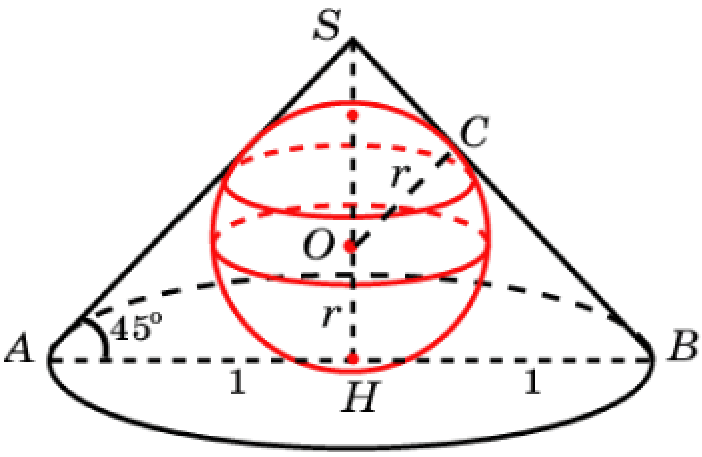
7. Напомним, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, находится по формуле $r=\frac{S}{p}$, где S – площадь треугольника, p – его полупериметр. В нашем случае $S=\sqrt{3}$, p = 3. Следовательно, радиус сферы, вписанной в конус, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



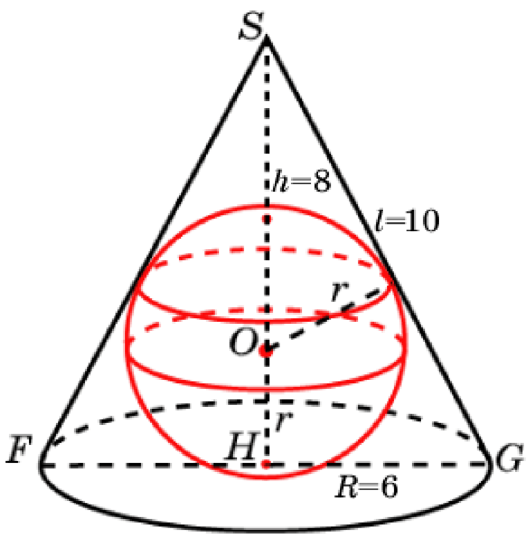
8. Обозначим h высоту SH конуса. Из формулы $r=\frac{S}{p}$ следует, что $h=\frac{2rp}{a}$, где r = 1, a = FG = 4, p = $2+\sqrt{4+h^2}$. Решая уравнение $2h=2+\sqrt{4+h^2}$, находим $h=\frac{8}{3}$.



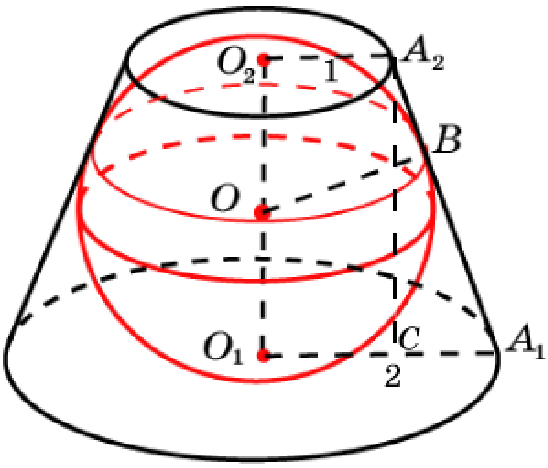
9. Высота SH конуса равна 1. Образующая $\sqrt{2}$. Полупериметр p равен $1+\sqrt{2}$. По формуле $r=\frac{S}{p}$, имеем $r=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.



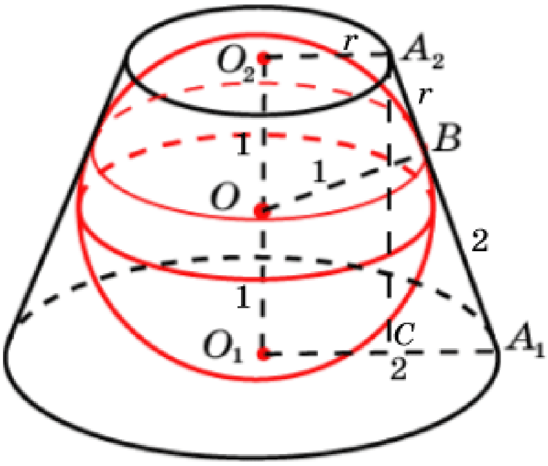
10. Радиус R основания конуса равен 6. Площадь треугольника SFG равна 48, полупериметр 16. По формуле $r = \dfrac{S}{p}$, имеем $r = 3$.



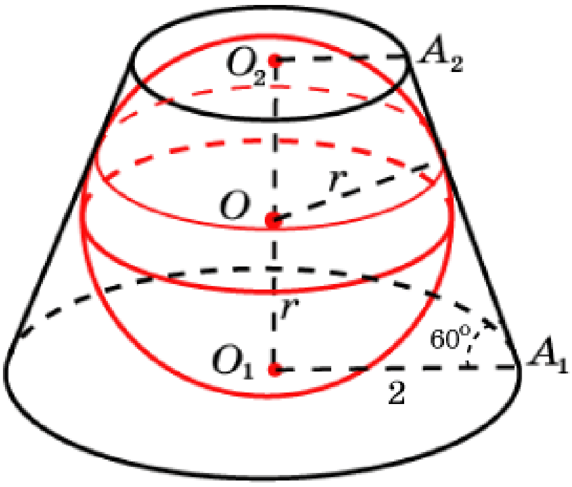
11. Нет. **12.** Имеем: $A_1B = A_1O_1 = 2$, $A_2B = A_2O_2 = 1$. Следовательно, $A_1A_2 = 3$, $A_1C = 1$. $h = O_1O_2 = A_2C = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1C^2} = 2\sqrt{2}$, $r = \sqrt{2}$.



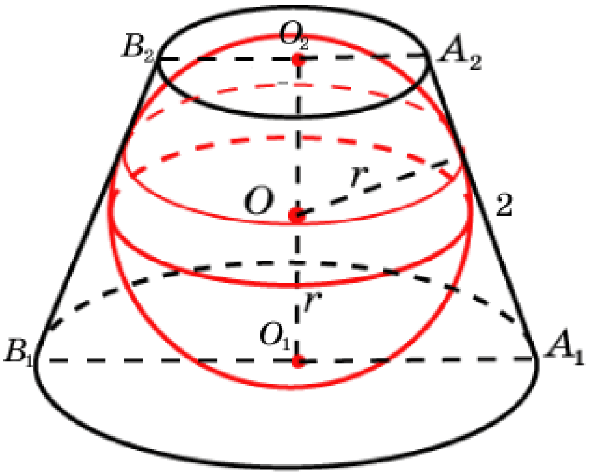
13. Пусть $A_1O_1 = 2$. Обозначим $r = A_2O_2$. Имеем: $A_1A_2 = 2+r$, $A_1C = 2 - r$. По теореме Пифагора, имеет место равенство $O_1O_2^2 = A_1A_2^2 - A_1C^2$, из которого следует, что выполняется равенство $4 = (2 + r)^2 - (2 - r)^2$. Решая полученное уравнение относительно r, находим $r = \frac{1}{2}$.



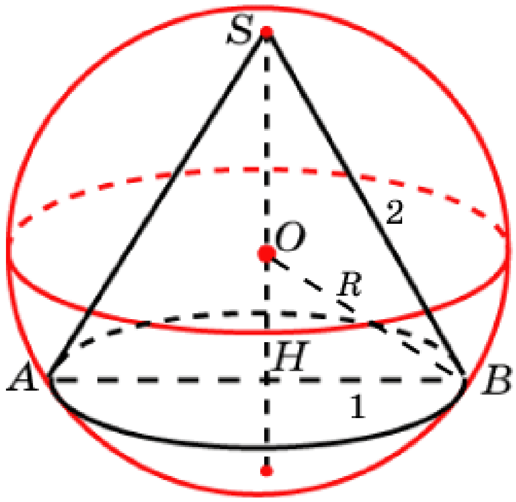
14. Заметим, что осевым сечением конуса, из которого получен усеченный конус, является равносторонний треугольник со стороной 2. Радиус r сферы, вписанной в усеченный конус, равен радиусу окружности, вписанной в этот равносторонний треугольник, т.е. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



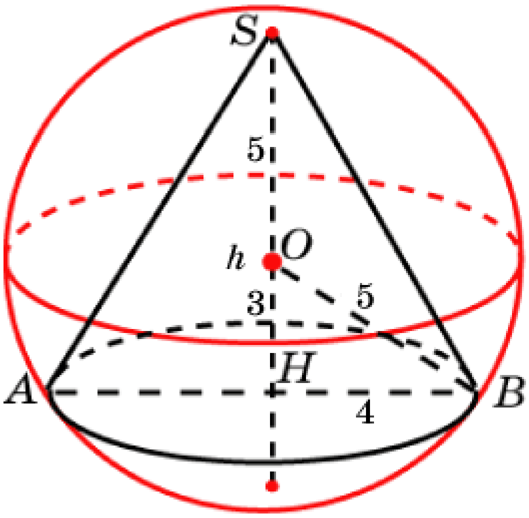
15. Воспользуемся формулой $r = \frac{S}{p}$, где S – площадь осевого сечения, p – полупериметр. В нашем случае $S = 3$. Для нахождения полупериметра напомним, что для четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны. Значит, полупериметр трапеции $A_1A_2B_2B_1$ равен удвоенной образующей цилиндра, т.е. $p = 4$. Следовательно, $r = \frac{3}{4}$.



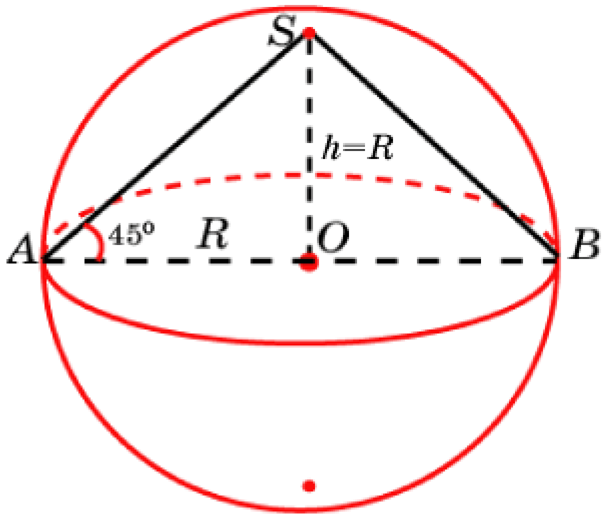
16. Нет. **17.** Треугольник *SAB* равносторонний со стороной 2. Высота *SH* равна $\sqrt{3}$. Площадь *S* равна $\sqrt{3}$. По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$, получаем $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



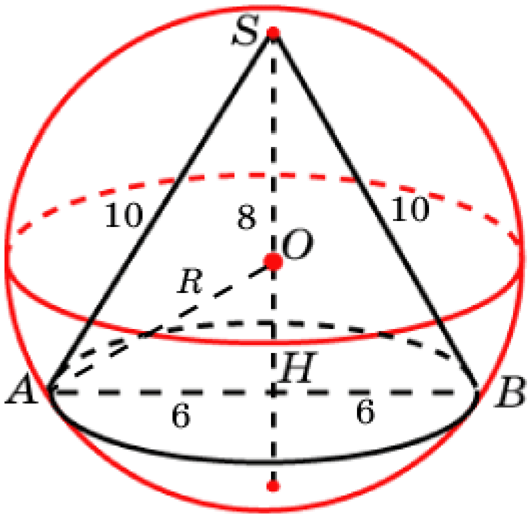
18. Имеем, $OB = 5$, $HB = 4$. Следовательно, $OH = 3$. Учитывая, что $SO = OB = 5$, получаем $h = 8$.



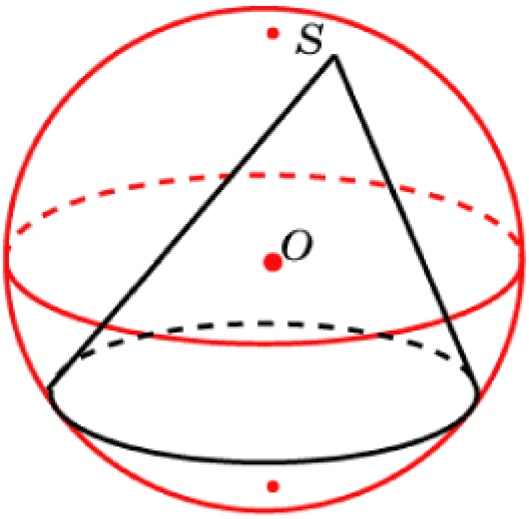
19. Треугольник *SAB* – прямоугольный, равнобедренный. Следовательно, радиус *R* описанной сферы равен радиусу основания цилиндра, т.е. $R = 1$.



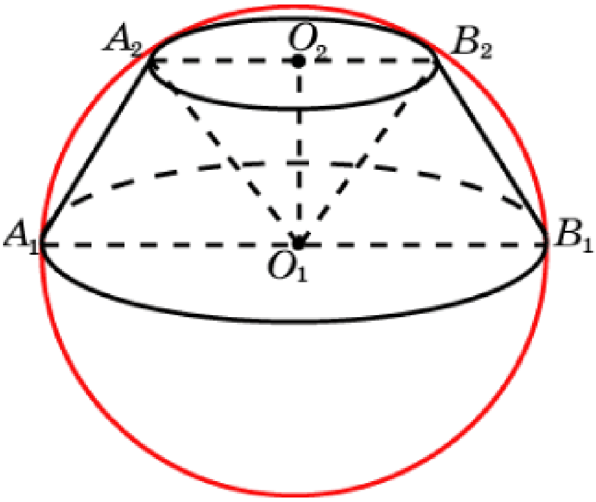
20. В треугольнике *SAB* имеем: *SA* = *SB* = 10, *SH* = 8. По теореме Пифагора, *AH* = 6 и, следовательно, *S* = 48. Используя формулу $R = \dfrac{abc}{4S}$, получаем $R = 6\dfrac{1}{4}$.



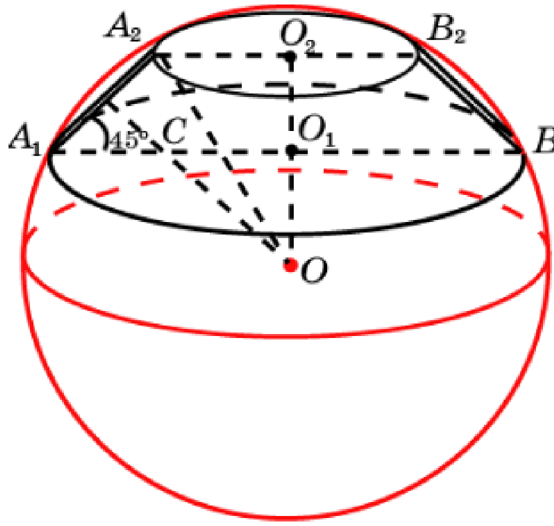
21. Да.



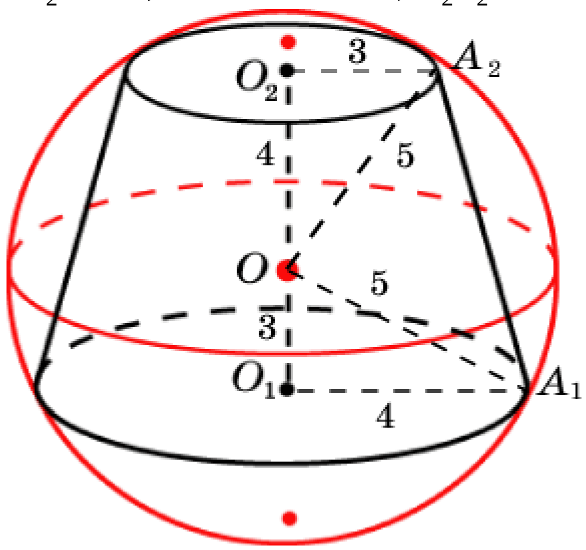
22. Заметим, что $A_1O_1B_2O_2$ и $O_1B_1B_2A_2$ – ромбы. Треугольники $A_1O_1A_2$, $O_1A_2B_2$, $O_1B_1B_2$ – равносторонние и, значит, A_1B_1 –диаметр. Следовательно, R =2.



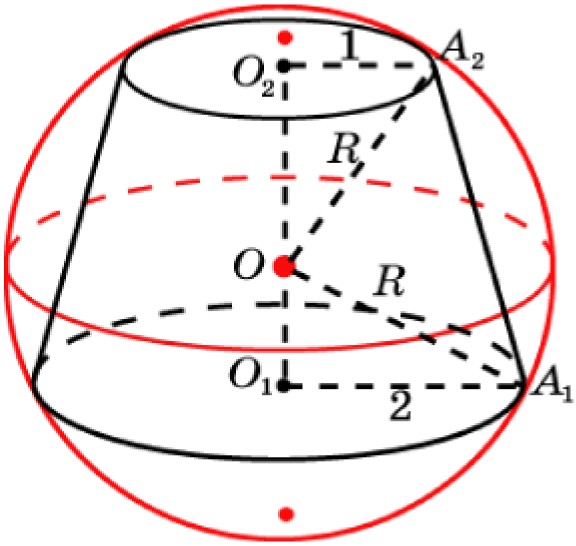
23. Имеем A_2O_2 = 1, A_1A_2 = 2, O_1O_2 = $\sqrt{2}$, OO_1 = O_1C A_2O_2 = 1. Следовательно, OO_2 = 1 + $\sqrt{2}$ и, значит, $R = AO_2 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.



24. Имеем OO_1 = 3, OO_2 = 4 и, следовательно, O_2A_2 = 3.



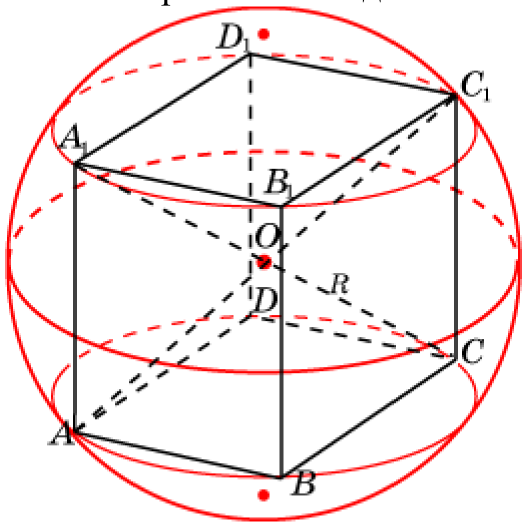
25. Обозначим R радиус описанной сферы. Тогда $OO_1 = \sqrt{R^2 - 4}$, $OO_2 = \sqrt{R^2 - 1}$. Учитывая, что $O1O2$ = 6, имеем равенство $5 = \sqrt{R^2 - 4} + \sqrt{R^2 - 1}$. Решая его относительно R, находим $R = \dfrac{\sqrt{221}}{5}$.



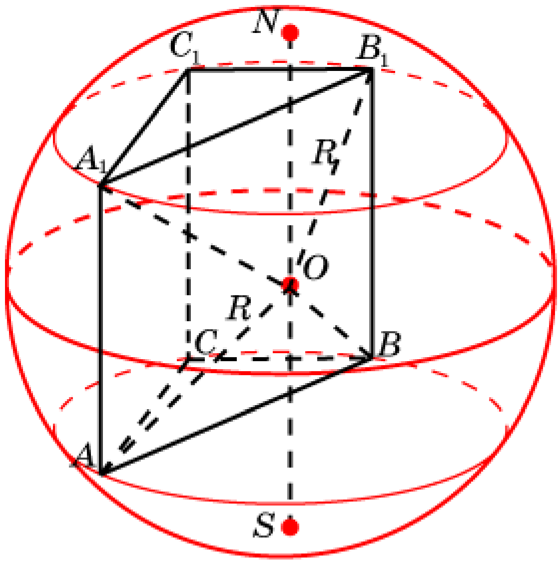
26. Нет.

§ 3. Сфера, описанная около многогранника

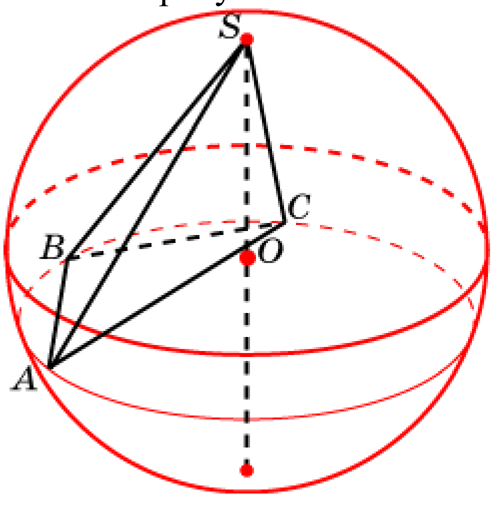
1. Да. Ее центром является точка пересечения диагоналей, а радиус равен половине диагонали параллелепипеда.



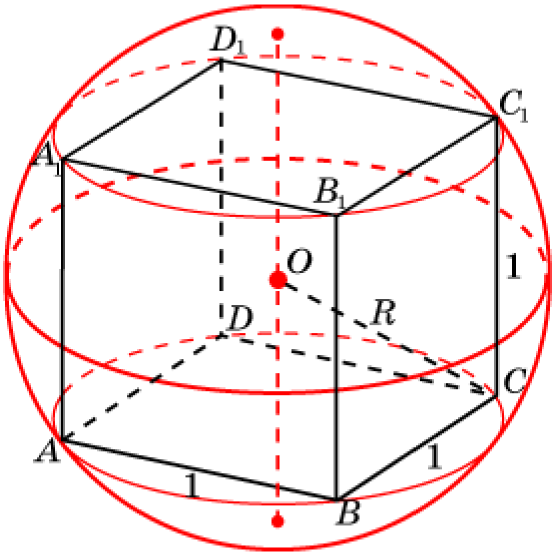
2. Нет. **3.** Нет. **4.** Да, если в основании призмы – тупоугольный треугольник. Соответствующий пример представлен на рисунке.



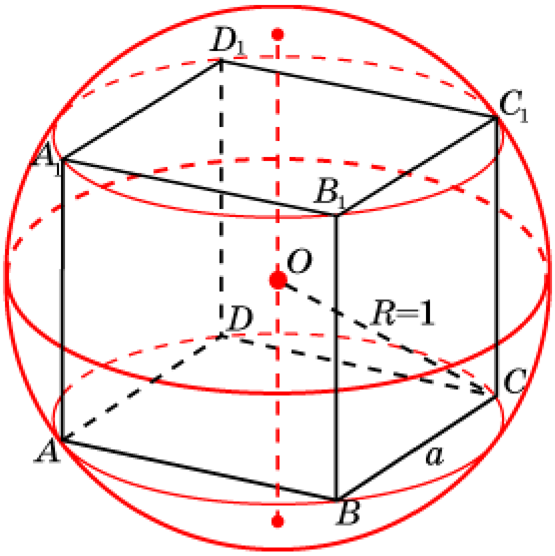
5. Да. Пример представлен на рисунке.



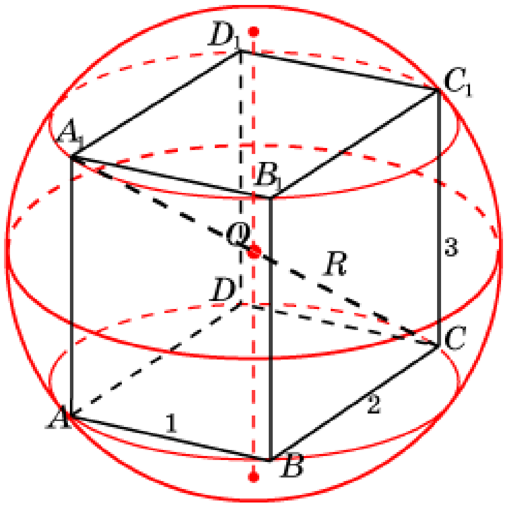
6. Радиус R сферы, описанной около единичного куба равен половине диагонали этого куба, т.е. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



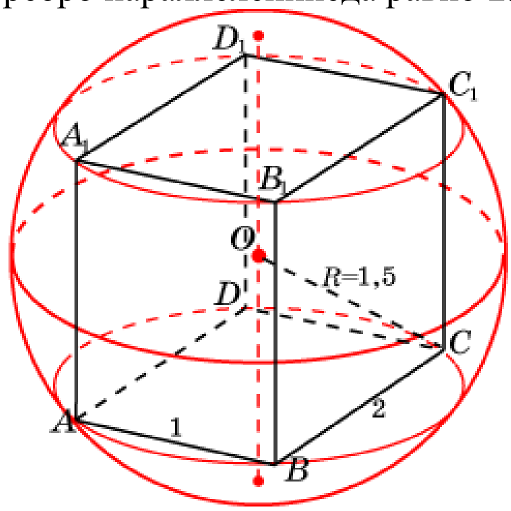
7. Из предыдущей задачи следует, что если ребро куба равно a, то радиус описанной сферы равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Решая уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 1$, находим $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



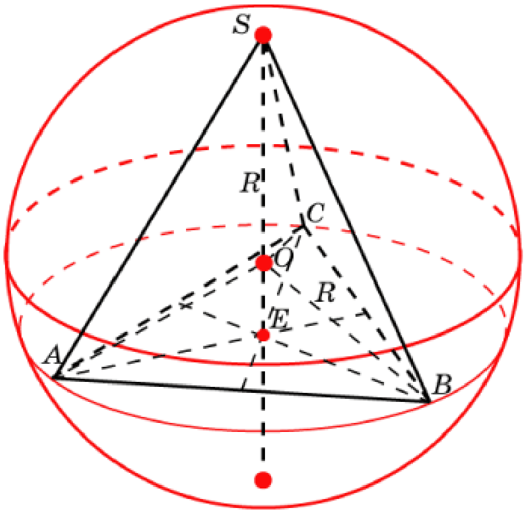
8. Радиус R сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда равен половине его диагонали, т.е. $R = \sqrt{14}$.



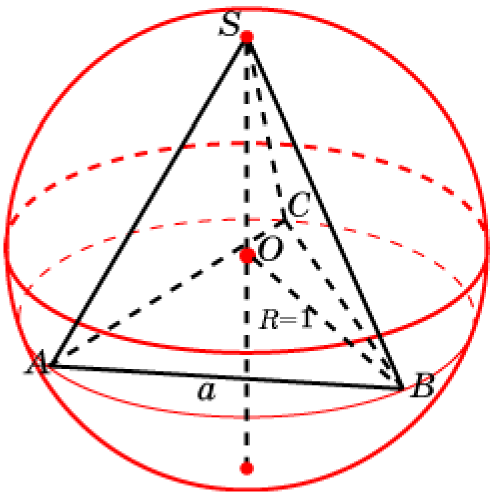
9. Диагональ параллелепипеда равна 3. Из теоремы Пифагора следует, что искомое третье ребро параллелепипеда равно 2.



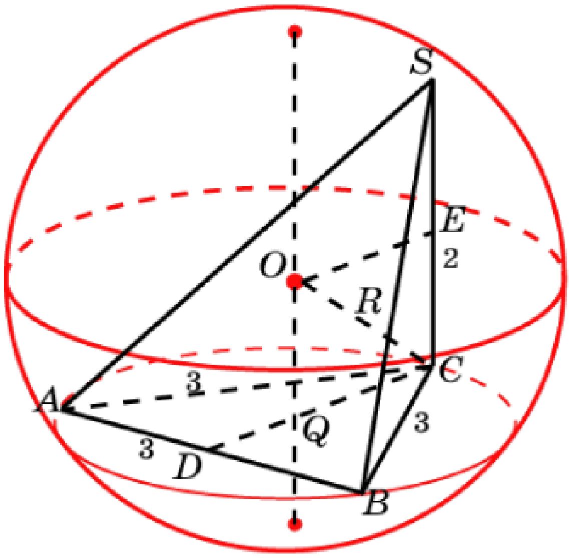
10. В тетраэдре *SABC* имеем: $BE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $SE = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. В прямоугольном треугольнике *OBE* имеем: $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2$. Решая это уравнение относительно *R*, находим $R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



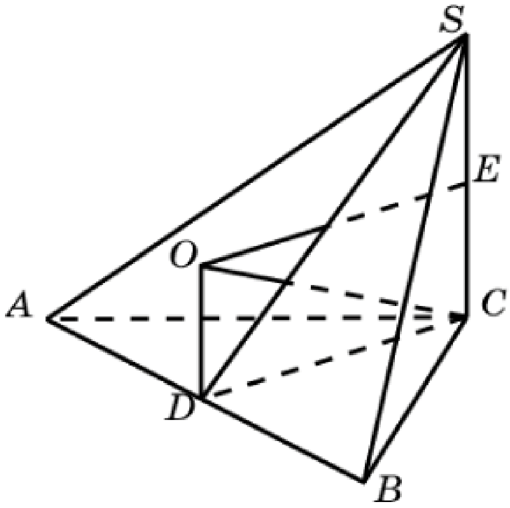
11. Из предыдущей задачи следует, что если ребро тетраэдра равно a, то радиус описанной сферы равен $\frac{\sqrt{6}}{4}a$. Решая уравнение $\frac{\sqrt{6}}{4}a = 1$, находим $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.



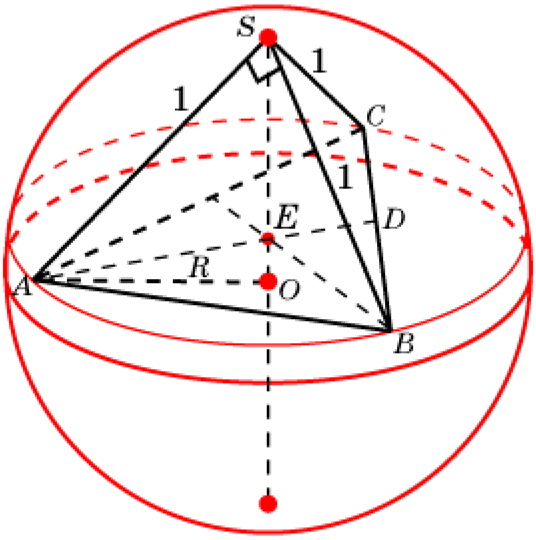
12. Пусть O – центр описанной сферы, Q – центр окружности, описанной около основания, E – середина SC. Четырехугольник $CEOQ$ – прямоугольник, в котором CE = 1, CQ = $\sqrt{3}$. Следовательно, R=OC=2.



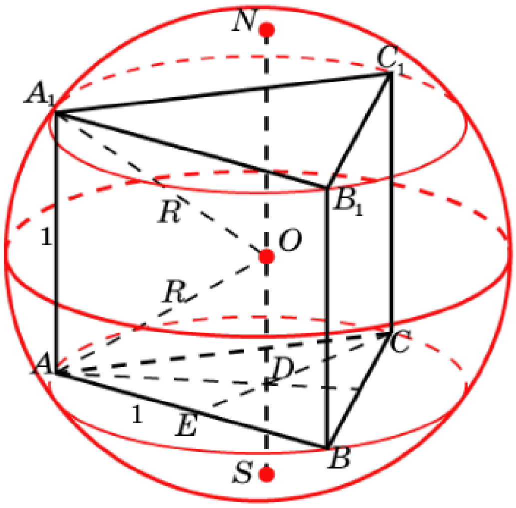
13. Через середину D ребра AB проведем прямую, параллельную SC. Через середину E ребра SC проведем прямую параллельную CD. Их точка пересечения O будет искомым центром описанной сферы. В прямоугольном треугольнике OCD имеем: OD = $\frac{1}{2}$, CD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. По теореме Пифагора, находим $R = OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



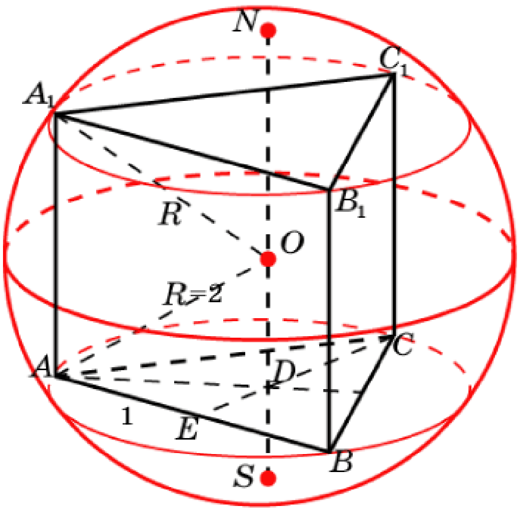
14. В тетраэдре $SABC$ имеем: $AB = \sqrt{2}$, $AE = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $SE = \frac{\sqrt{3}}{3}$. В прямоугольном треугольнике OAE имеем: $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(R - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2$. Решая это уравнение относительно R, находим $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



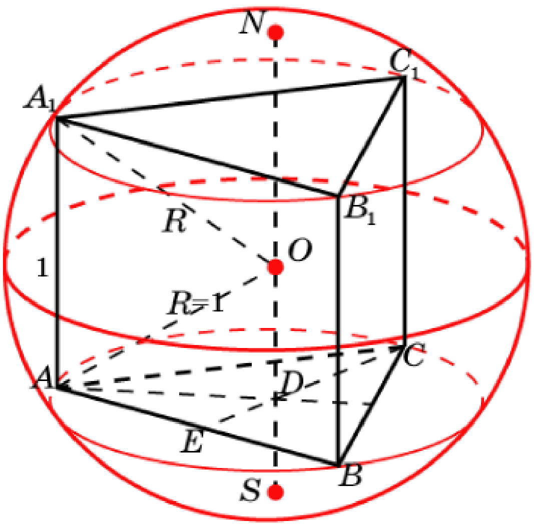
15. Имеем: $AA_1 = 1$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $OD = \frac{1}{2}$. Следовательно, $R = AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$.



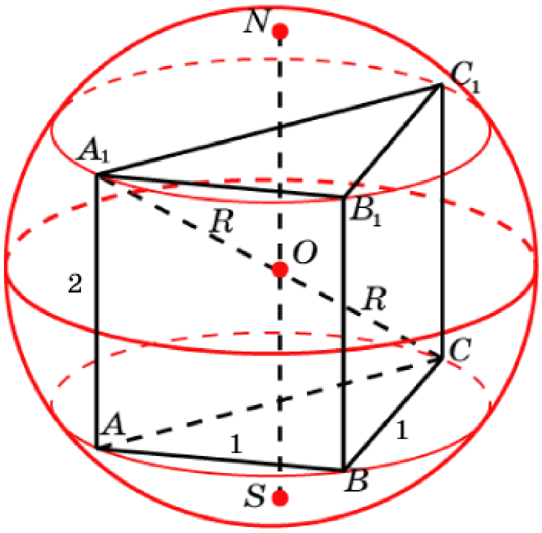
16. Имеем: $AO = 2$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $h = AA_1 = 2OD = 2\sqrt{AO^2 - AD^2} = 2\sqrt{4 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{33}}{3}$.



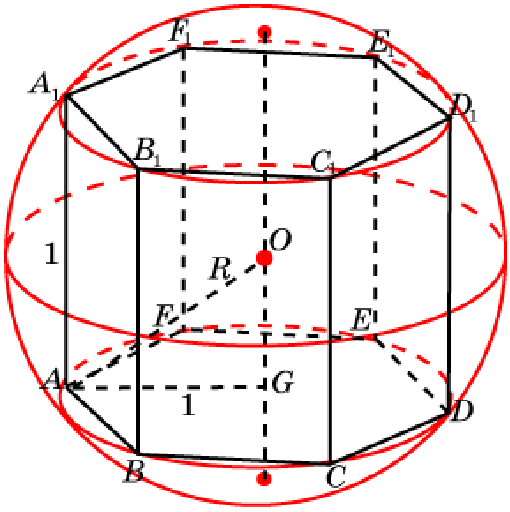
17. Имеем: $AO = 1$, $OD = \frac{1}{2}$. Следовательно, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, сторона основания $AB = \frac{3}{2}$.



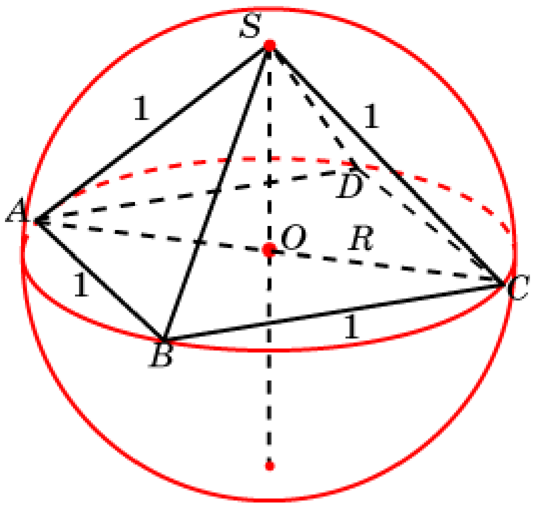
18. Радиус сферы R равен половине диагонали A_1C прямоугольника ACC_1A_1. Имеем: AA_1 = 2, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, $R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



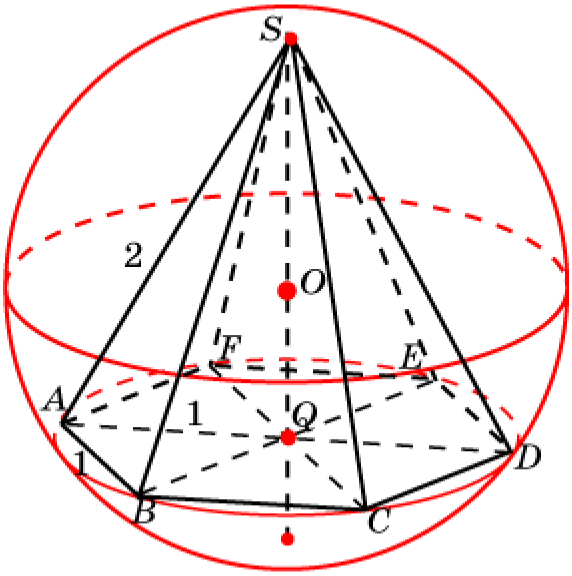
19. Имеем AG = 1, $OG = \dfrac{1}{2}$.Следовательно, R=AO= $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



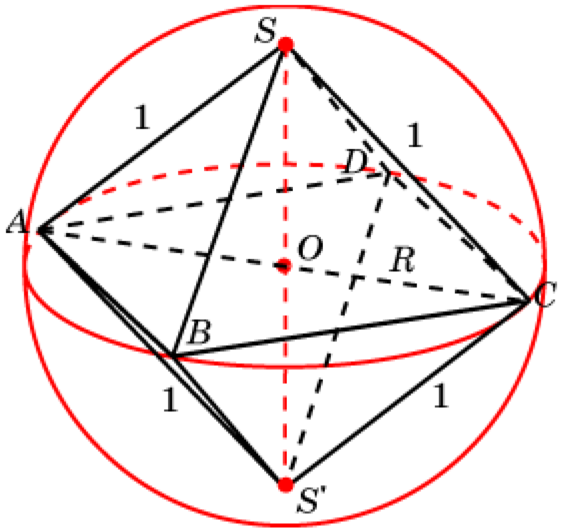
20. Радиус R описанной сферы равен половине диагонали квадрата $ABCD$, т.е. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



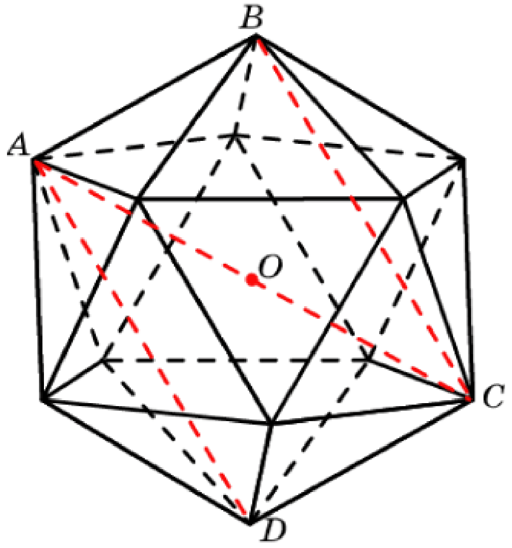
21. Треугольник SAD – равносторонний со стороной 2. Радиус R описанной сферы равен радиусу окружности, описанной около треугольника SAD. Следовательно, $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



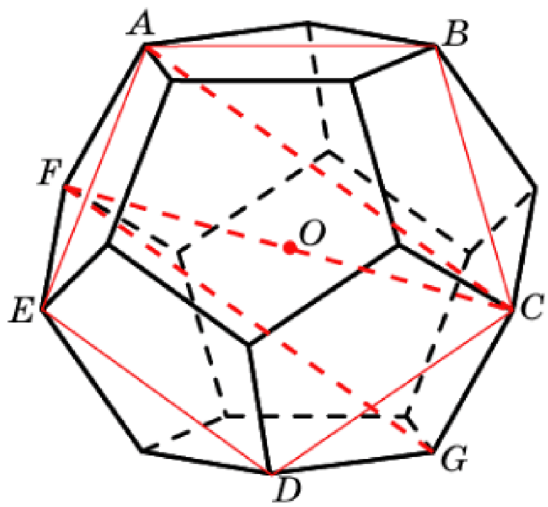
22. Радиус R описанной сферы равен половине диагонали квадрата $ABCD$ со стороной 1. Следовательно, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



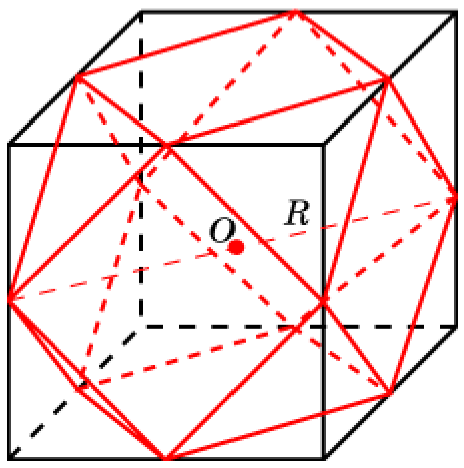
23. В прямоугольнике $ABCD$ AB = CD = 1, BC и AD – диагонали правильных пятиугольников со сторонами 1. Следовательно, BC = AD = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. По теореме Пифагора AC = $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Искомый радиус равен половине этой диагонали, т.е. $R = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.



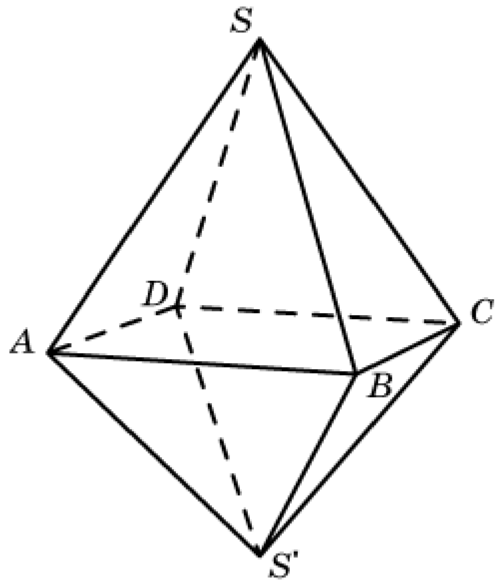
24. $ABCDE$ – правильный пятиугольник со стороной $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В прямоугольнике $ACGF$ AF = CG = 1, AC и FG – диагонали пятиугольника $ABCDE$ и, следовательно, AC = FG = $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. По теореме Пифагора FC = $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{2}$. Искомый радиус R равен половине этой диагонали, т.е. R = $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}$.



25. Напомним, что кубооктаэдр получается из куба отсечением правильных треугольных пирамид с вершинами в вершинах куба и боковыми ребрами, равными половине ребра куба. Если ребро кубоктаэдра равно 1, то ребро соответствующего куба равно $\sqrt{2}$. Радиус описанной сферы равен расстоянию от центра куба до середины его ребра, т.е. равен 1.

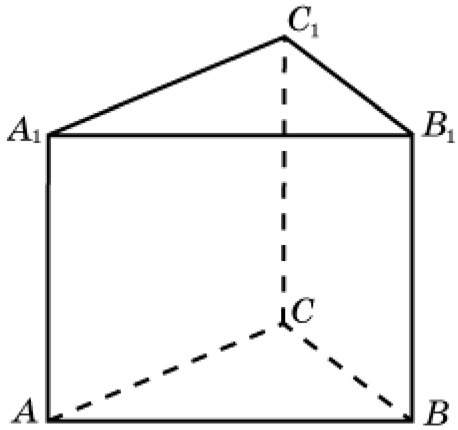


26. Сферу нельзя описать, например, около бипирамиды, составленной из двух правильных четырехугольных пирамид с общим основанием и разными высотами.

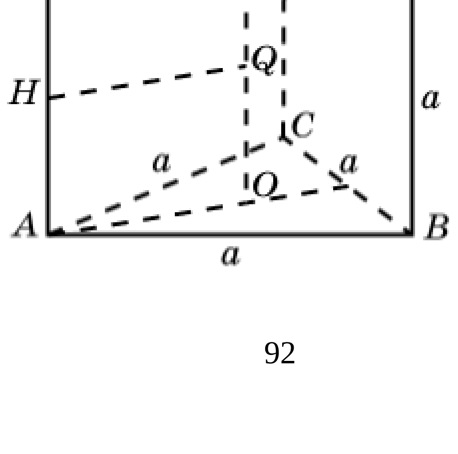


§ 4. Сфера, полувписанная в многогранник

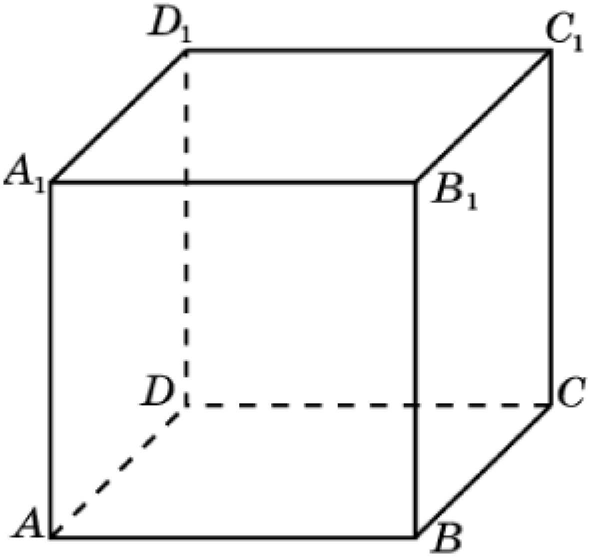
1. Радиус сферы, полувписанной в единичный куб, равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** Из прямоугольных параллелепипедов полувписанная сфера существует только у куба. **3.** Если у треугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра перпендикулярны этим плоскостям и, значит, боковые грани – квадраты. Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной треугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.



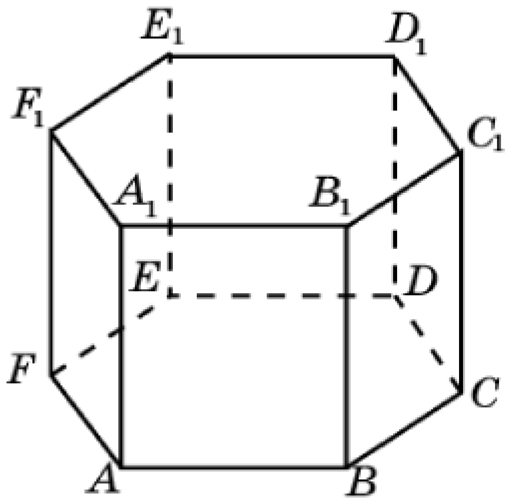
4. Обозначим Q середину отрезка OO_1, соединяющего центры оснований. Эта точка является центром описанной около призмы сферы. Равнобедренные треугольники с вершиной в точке Q, основаниями которых служат ребра призмы, равны и, следовательно, равны расстоянию от точки Q до этих ребер, т.е. Q является центром полувписанной сферы. В треугольнике AQA_1 высота QH равна отрезку OA и равна $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.



5. Если у четырехугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра, перпендикулярны основаниям и, значит, боковые грани – квадраты. Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной четырехугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания, т.е. у куба.

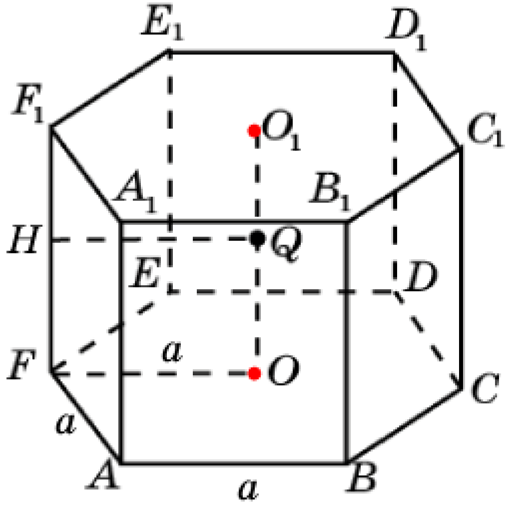


6. Нет. **7.** Если у шестиугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра перпендикулярны этим плоскостям и, значит, боковые грани – квадраты. Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной шестиугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.

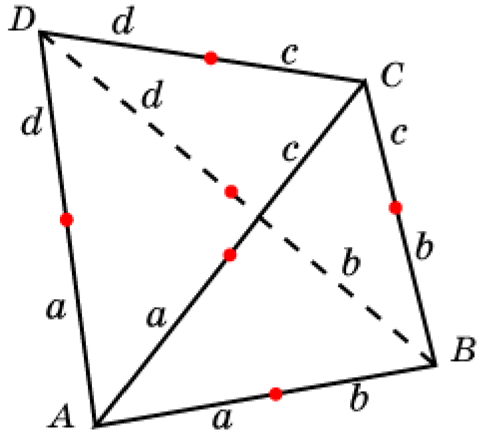


8. Обозначим Q середину отрезка, соединяющего центры O, O_1 оснований призмы. Ясно, что расстояние от Q до ребер призмы равно

a. Таким образом, Q –центр, а a – радиус искомой полувписанной сферы.

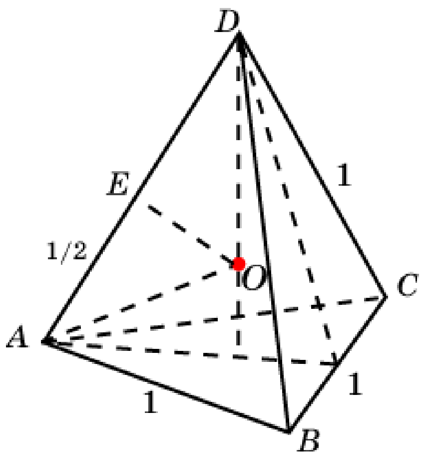


9. Пусть у тетраэдра $ABCD$ существует полувписанная сфера. Обозначим через a, b, c и d расстояния от соответствующих вершин тетраэдра до точек касания. Тогда $AB = a + b$, $CD = c + d$. Следовательно, $AB + CD = a + b + c + d$. Аналогично, $AC + BD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$. Таким образом, суммы противоположных ребер тетраэдра равны.

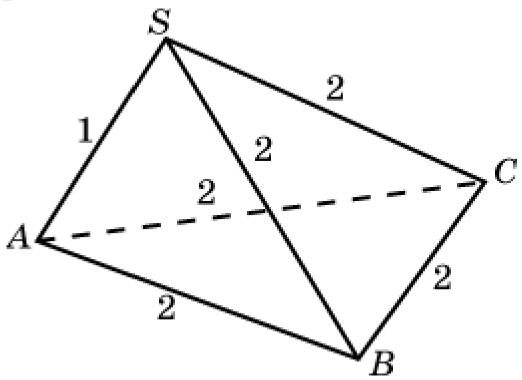


10. Пусть O – центр описанной сферы правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1. Воспользуемся тем, что радиус описанной сферы равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Треугольник AOD равнобедренный, $AD = 1$, $AO = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Высота OH этого треугольника равна расстоянию от точки O до ребра AD. По теореме Пифагора находим $OH = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{6}{16} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

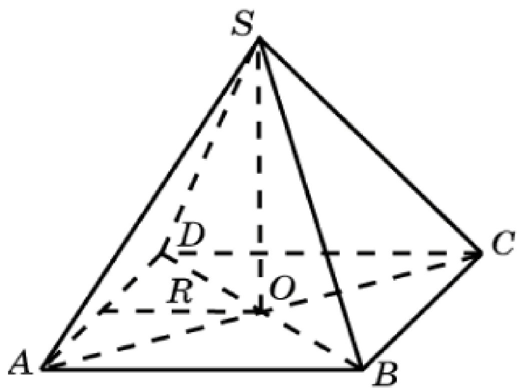
Из равенства равнобедренных треугольников с вершиной O, основаниями которых служат ребра тетраэдра, следует, что расстояния от точки O до всех ребер тетраэдра равны, т.е. точка O является центром полувписанной сферы, а ее радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



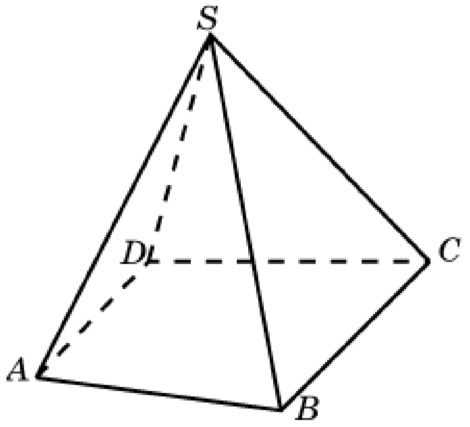
11. Рассмотрим тетраэдр, у которого одно ребро равно 1, а все остальные ребра равны 2. Для него не выполняется условие, указанное в упражнении 9. Следовательно, для этого тетраэдра не существует полувписанной сферы.



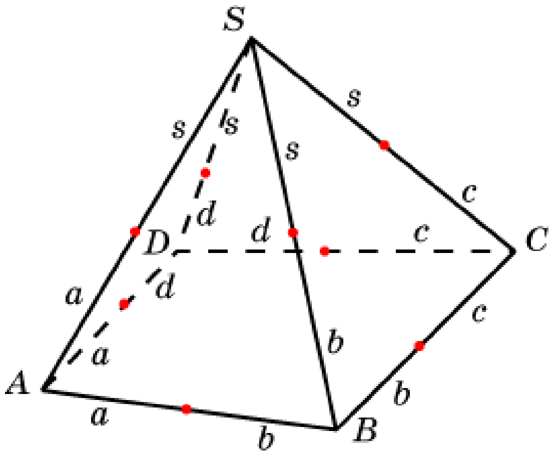
12. Пусть O – центр основания призмы. Расстояния от O до ребер призмы равны $\frac{1}{2}$. Следовательно, радиус R полувписанной сферы равен $\frac{1}{2}$.



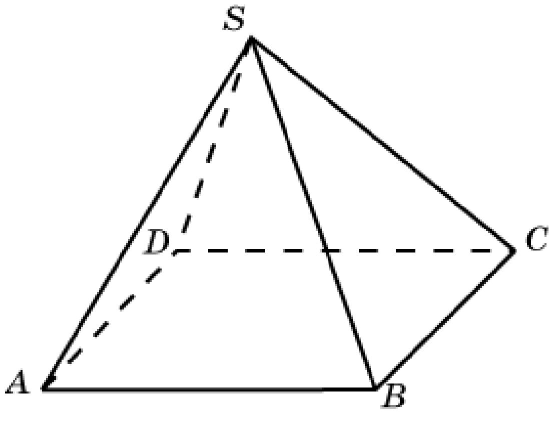
13. Если сфера полувписана в четырехугольную пирамиду, то у четырехугольника, лежащего в основании этой пирамиды, существует вписанная окружность. Следовательно, суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.



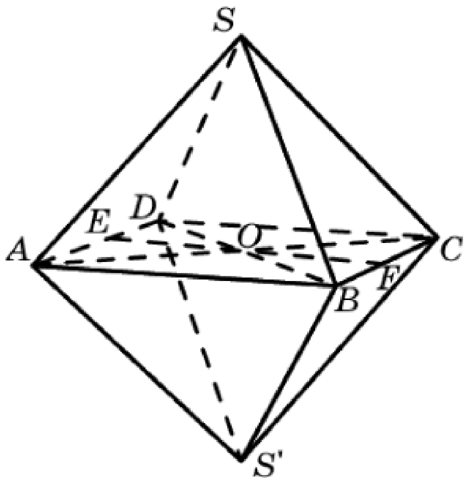
14. Пусть у пирамиды *SABCD* существует полувписанная сфера. Обозначим через *a*, *b*, *c*, *d* и *s* расстояния от соответствующих вершин пирамиды до точек касания. Тогда $SA = a + s$, $BC = b + c$. Значит, $SA + BC = a + b + c + s$. Аналогично, $AB + SC = a + b + c + s$. Следовательно, выполняется равенство $SA + BC = AB + SC$. Таким же образом доказывается выполнимость и других указанных равенств.



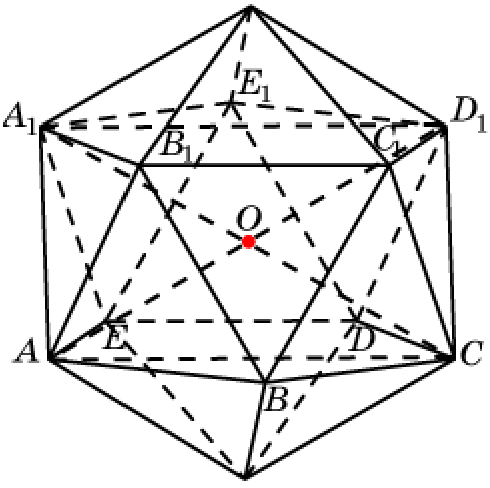
15. Рассмотрим, например, четырехугольную пирамиду, в основании которой лежит прямоугольник, отличный от квадрата, и все боковые ребра равны. Поскольку в прямоугольник нельзя вписать окружность, то у данной пирамиды не существует полувписанной сферы.



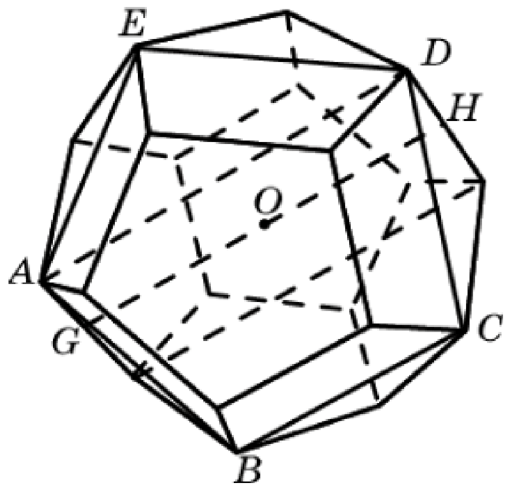
16. Пусть O – центр описанной сферы единичного октаэдра. Расстояние от O до ребер октаэдра равны и равны половине ребра, т.е. O будет центром полувписанной сферы, радиус которой равен $\frac{1}{2}$.



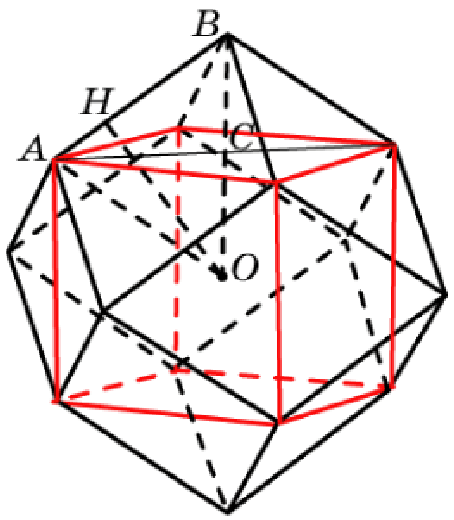
17. Обозначим O центр описанной сферы. Расстояния от O до ребер икосаэдра равны половине диагонали AC правильного пятиугольника $ABCDE$ со стороной 1. Учитывая, что эта диагональ равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получаем, что радиус R полувписанной сферы с центром O равен $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.



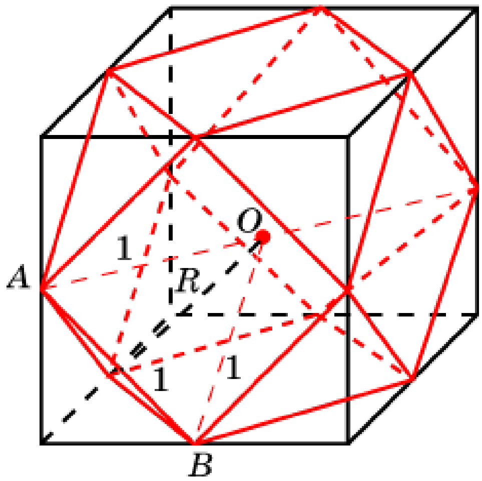
18. Обозначим O центр описанной сферы. Расстояния от O до ребер додекаэдра равны OH и равны половине диагонали AD правильного пятиугольника $ABCDE$, сторона которого равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, радиус полувписанной сферы с центром O равен $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.



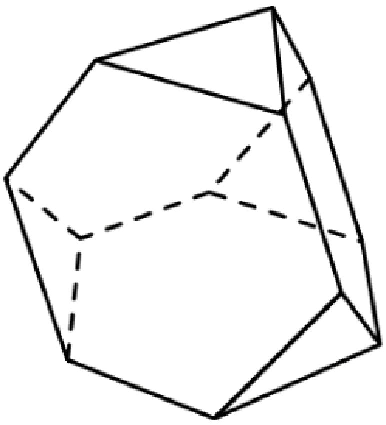
19. Обозначим O центр куба, вписанного в ромбододекаэдр. Ребро куба будет равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Расстояния от точки O до ребер ромбододекаэдра равны высоте OH треугольника OAB, в котором $OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. $OA = AB = 1$, Отрезок AC перпендикулярен OB и равен $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Откуда $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



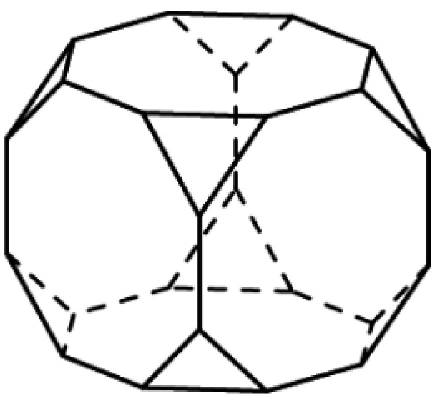
20. Напомним, что кубооктаэдр получается из куба отсечением правильных треугольных пирамид с вершинами в вершинах куба и боковыми ребрами, равными половине ребра куба. Если ребро кубоктаэдра равно 1, то ребро соответствующего куба равно $\sqrt{2}$. В треугольнике AOB все стороны равны 1, а его высота равна радиусу R полувписанной сферы. Следовательно, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



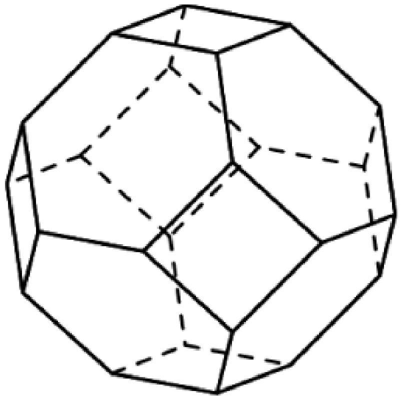
21. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного тетраэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего тетраэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, искомый радиус R равен $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



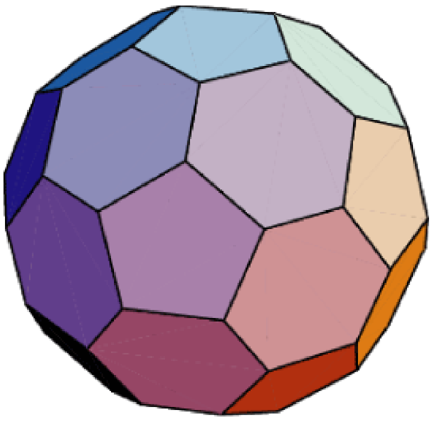
22. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного куба равен радиусу полувписанной сферы соответствующего куба, ребра которого равны $1+\sqrt{2}$. Следовательно, искомый радиус R равен $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.



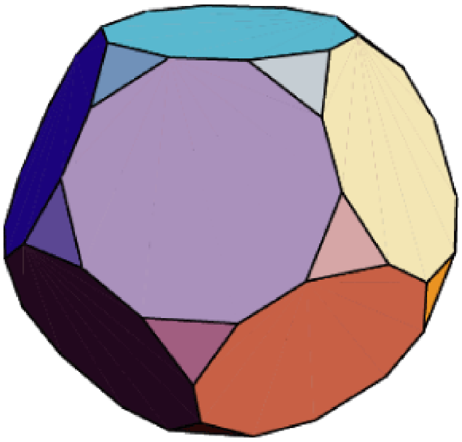
23. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного октаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего октаэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, искомый радиус R равен $\frac{3}{2}$.



24. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного икосаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего икосаэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, искомый радиус R равен $\frac{3+3\sqrt{5}}{4}$.

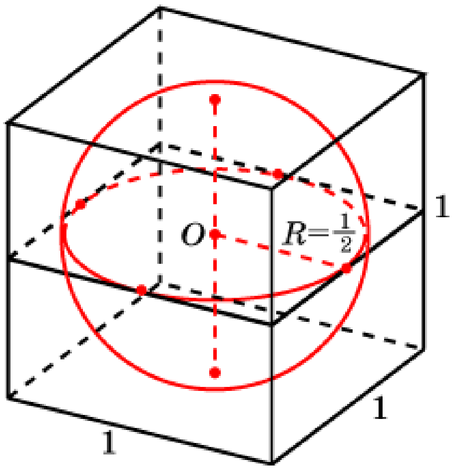


25. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного додекаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего додекаэдра, ребра которого равны $\sqrt{5}$. Следовательно, искомый радиус R равен $\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$.

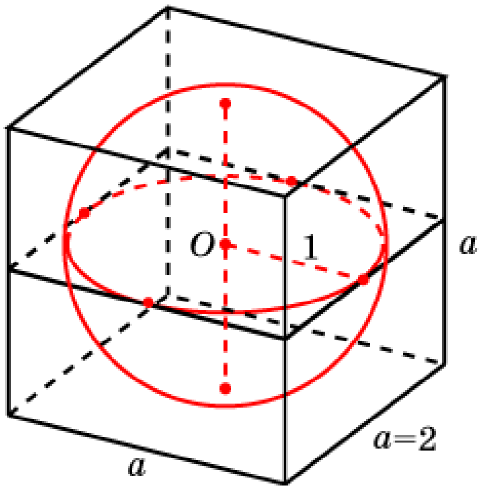


§ 5. Сфера, вписанная в многогранник

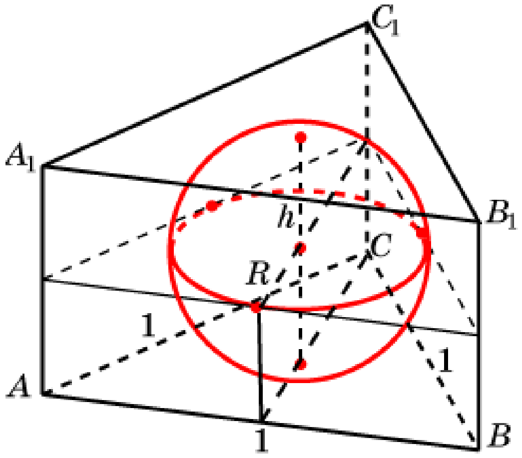
1. Радиус сферы, вписанной в единичный куб, равен $\frac{1}{2}$.



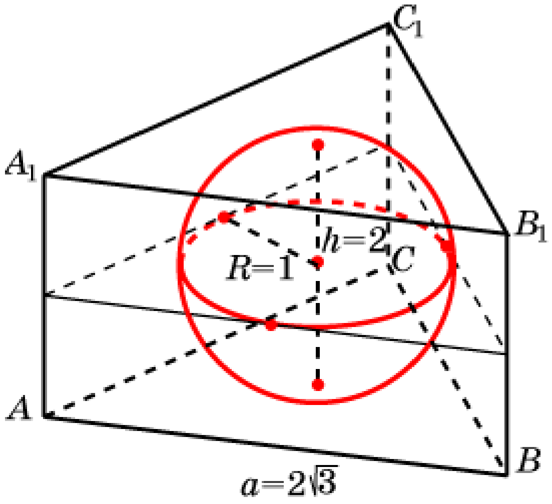
2. Ребро куба, описанного около единичной сферы, равно 2.



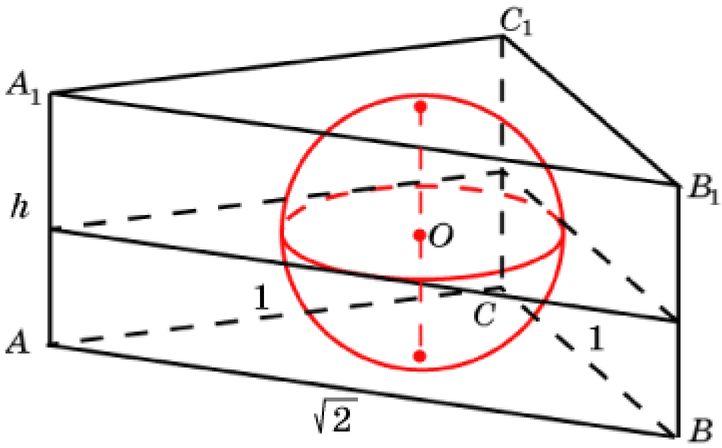
3. Нет. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Радиус R сферы, вписанной в призму, равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. В нашем случае $R = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Высота h призмы равна удвоенному радиусу вписанной сферы, т.е. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



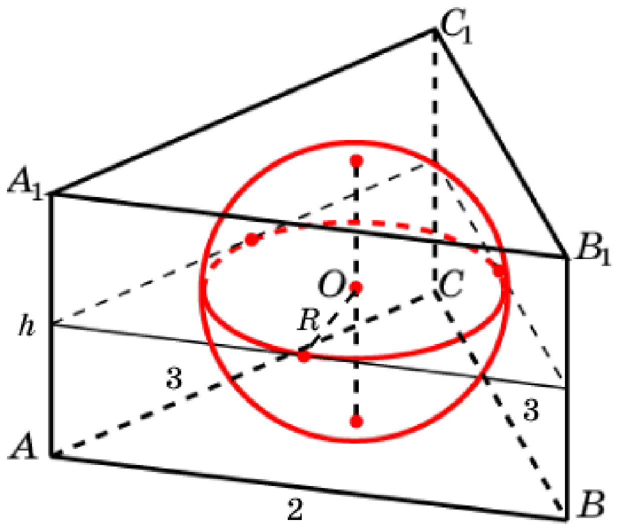
7. Сторона a основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Высота h призмы равна 2.



8. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}$, периметр $2+\sqrt{2}$. Воспользуемся формулой для нахождения радиуса R окружности, вписанной в треугольник $R=\frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. Получим $R=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Высота h призмы равна $2-\sqrt{2}$.

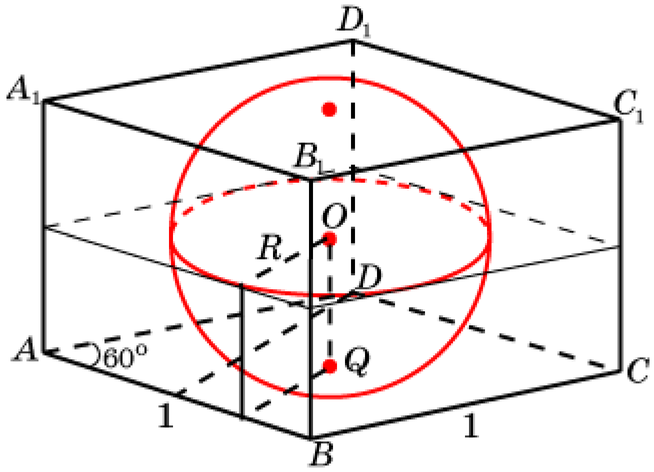


9. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{2}$, периметр равен 8. Воспользуемся формулой $R=\frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. Получим $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота h призмы равна $\sqrt{2}$.

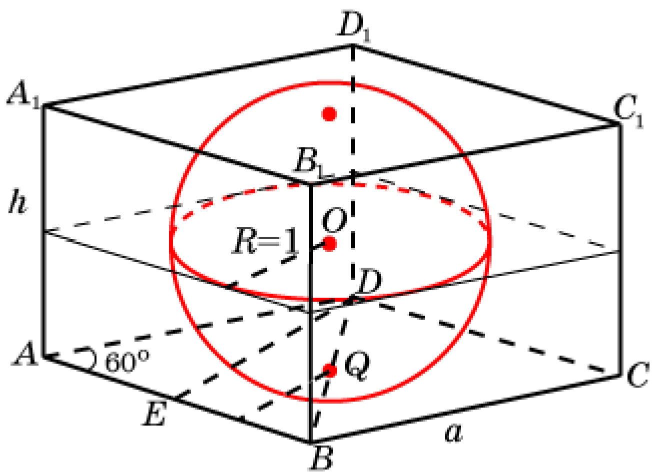


10. Радиус R сферы равен половине высоты DG основания, т.е. $R = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

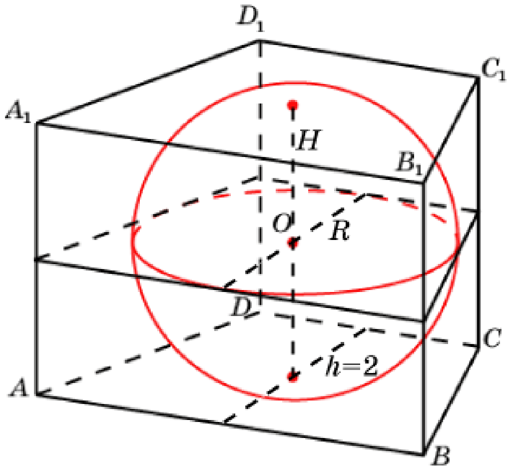
Высота h призмы равна диаметру сферы, т.е. $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



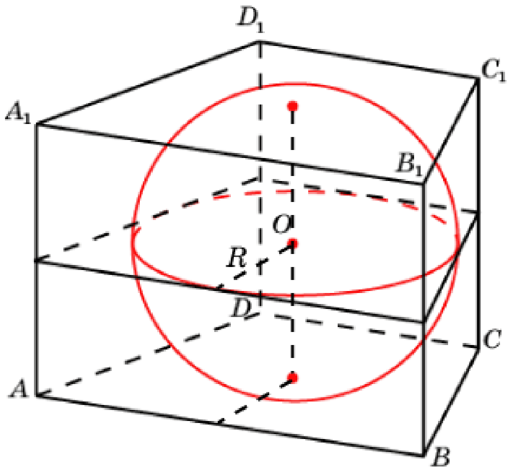
11. Треугольник ABD = равносторонний. Его высота DE равна диаметру вписанной сферы, т.е. DE = 2. Следовательно, сторона a этого треугольника равна $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Высота h призмы равна 2.



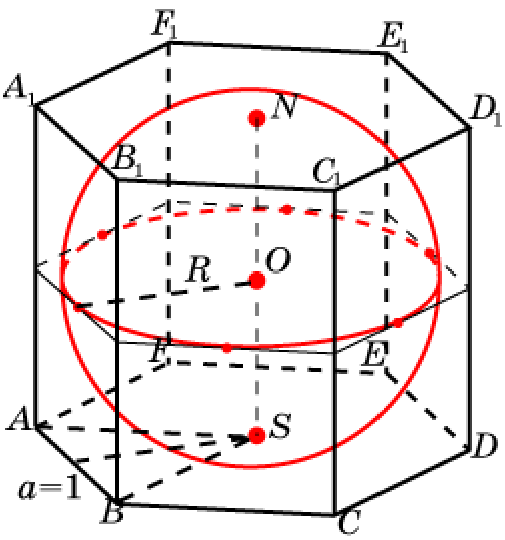
12. Радиус R вписанной сферы равен половине высоты h трапеции $ABCD$, т.е. R =1. Высота призмы H равна удвоенному радиусу сферы, т.е. H = 2.



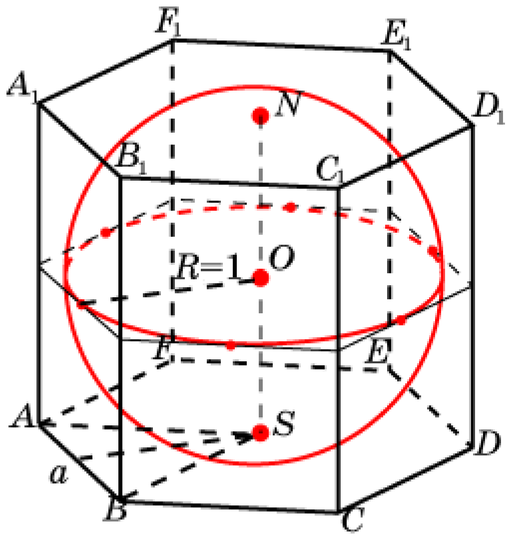
13. Радиус R сферы, вписанной в призму равен радиусу окружности основания призмы. Радиус окружности, вписанной в многоугольник равен площади этого многоугольника деленой на его полупериметр. Следовательно, R = 1.



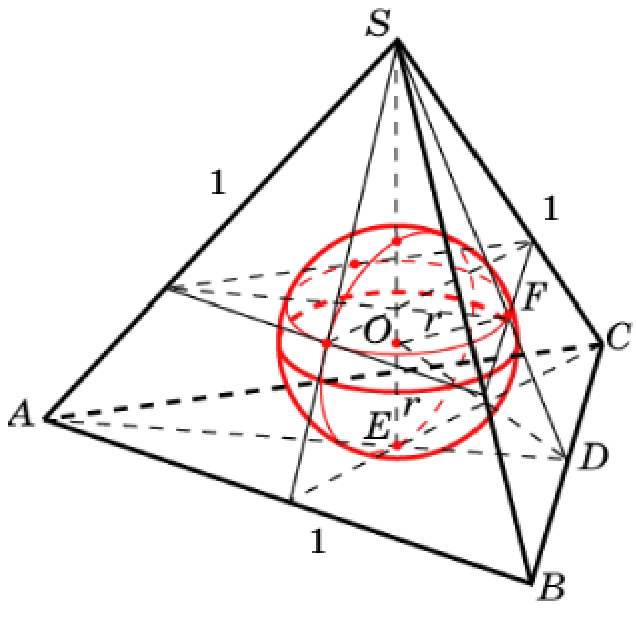
14. Радиус R сферы равен высоте треугольника ABS со стороной 1, т.е. $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Высота h призмы равна удвоенному радиусу, т.е. $h=\sqrt{3}$.



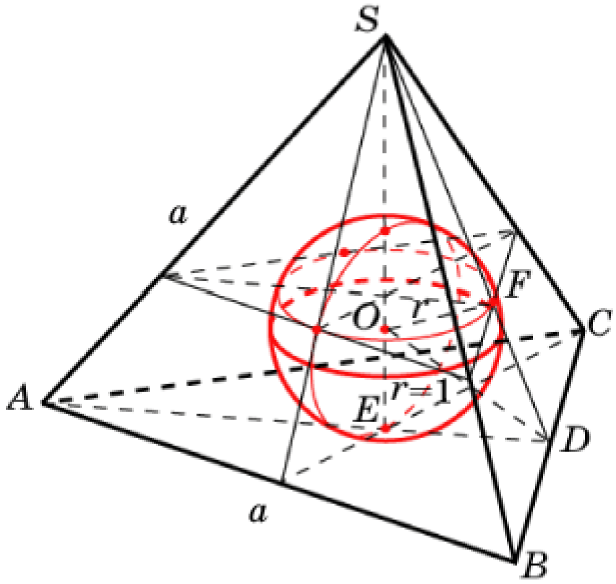
15. В равностороннем треугольнике ABS высота равна 1. Следовательно, его сторона a равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Высота призмы равна 2.



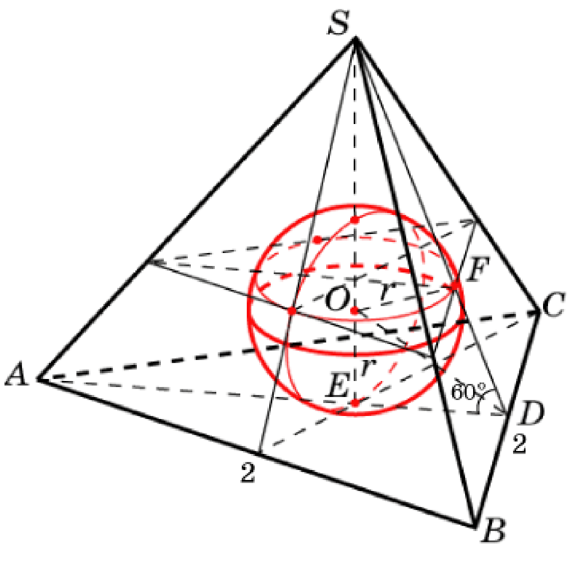
16. В тетраэдре $SABCD$ имеем: $SD = AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора, находим $SE = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Треугольники SDE и SOF подобны. Следовательно, имеет место равенство $OF : OS = DE : DS$, т.е. $r : \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - r\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая это уравнение относительно r, находим $r = \frac{\sqrt{6}}{12}$.



17. Из предыдущей задачи следует, что если ребро тетраэдра равно a, то радиус вписанной сферы равен $\frac{\sqrt{6}}{12}a$. Решая уравнение $\frac{\sqrt{6}}{12}a = 1$, находим $a = 2\sqrt{6}$.

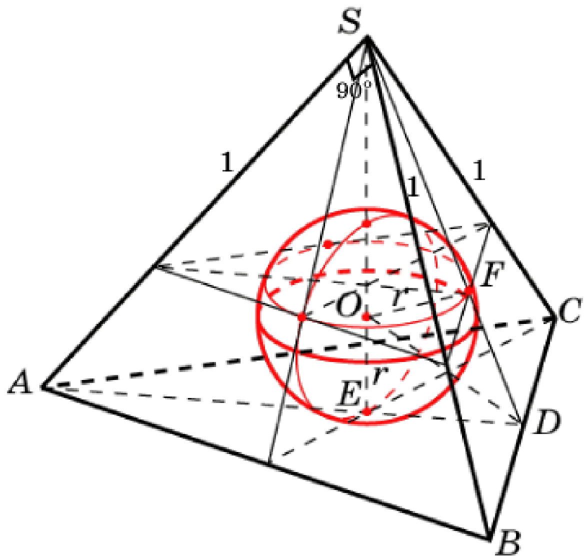


18. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса сферы r = OE имеет место равенство $OE = DE \cdot tg\angle ODE$. Учитывая, что $DE = \sqrt{3}$, $tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, получаем $r = \frac{1}{3}$.

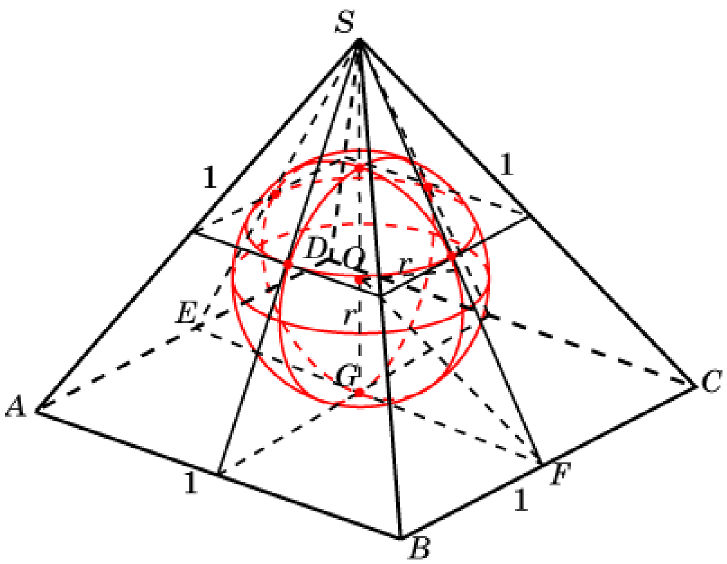


19. В тетраэдре $SABCD$ имеем: AB = BC = AC = $\sqrt{2}$, SD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, DE = $\frac{\sqrt{6}}{6}$. По теореме Пифагора, находим SE = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Треугольники SDE и SOF подобны. Следовательно, имеет место равенство OF : OS = DE :

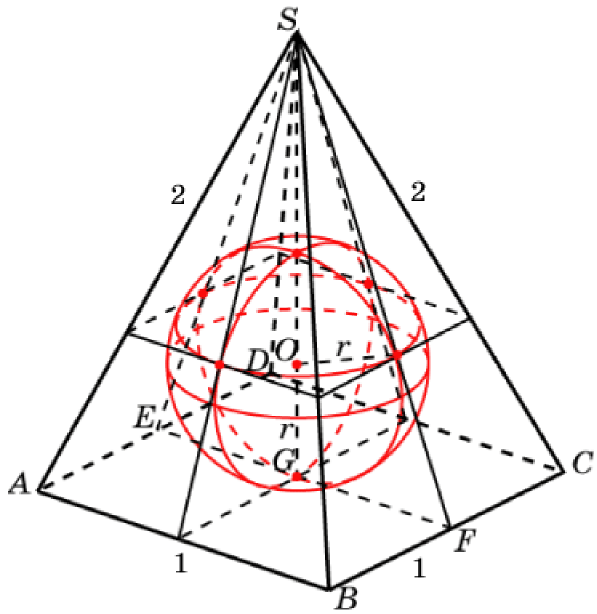
DS, т.е. $r:\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-r\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}:\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решая это уравнение относительно r, находим $r=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.



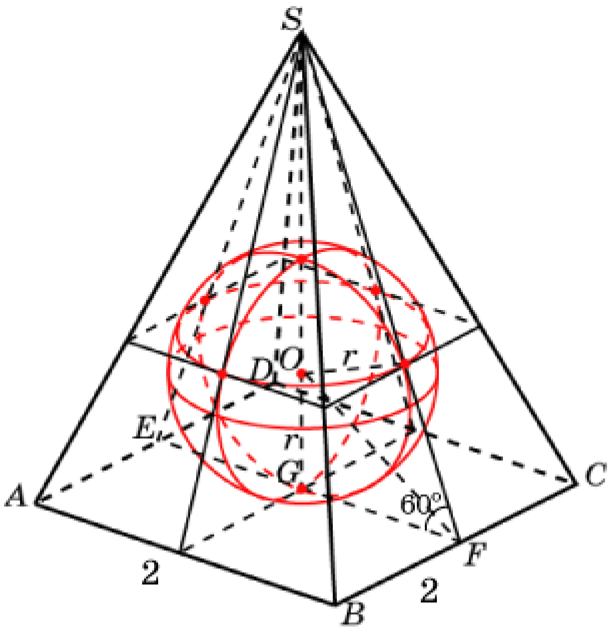
20. Радиус r вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SEF, в котором $SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EF = 1$, $SG = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула: $r=\frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $p = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



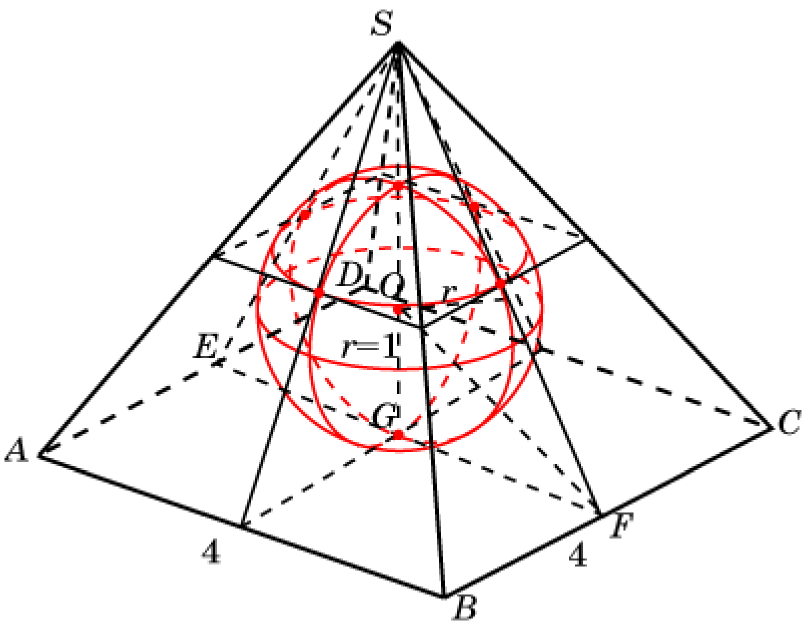
21. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник *SEF*, в котором $SE = SF = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $EF = 1$, $SG = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$. Воспользуемся тем, что для радиуса *r* окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула $r = \dfrac{S}{p}$,, где *S* – площадь, *p* – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$, $p = \dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$. Следовательно, $\dfrac{\sqrt{14}(\sqrt{15}-1)}{28}$.



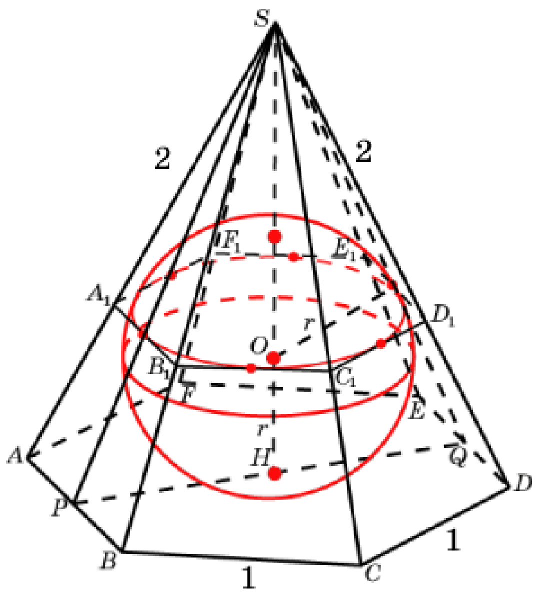
22. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса $r = OG$ вписанной сферы имеет место равенство $OG = FG \cdot tg\angle OFG$. Следовательно, $r = tg30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



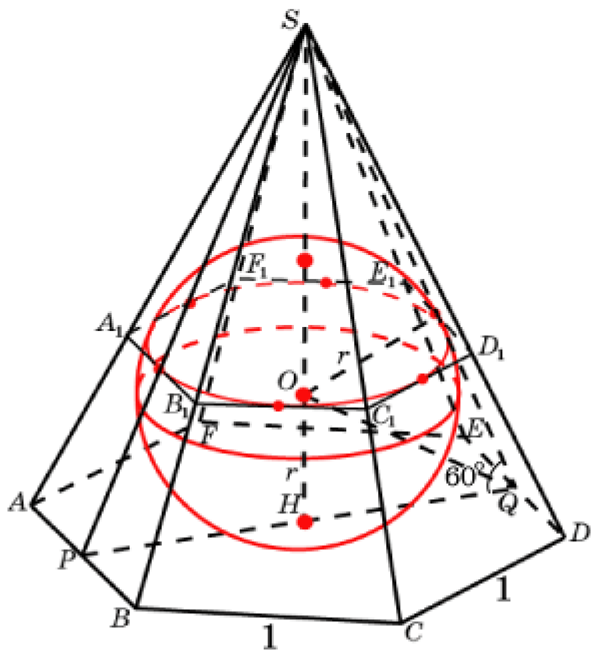
23. Обозначим высоту SG пирамиды h. Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SEF, в котором $SE = SF = \sqrt{h^2+4}$, EF=4. Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула $r = \frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = 2h$, $p = \sqrt{h^2+4}+2$. Следовательно, имеем равенство $\sqrt{h^2+4}+2 = 2h$, из которого находим $h = \frac{8}{3}$.



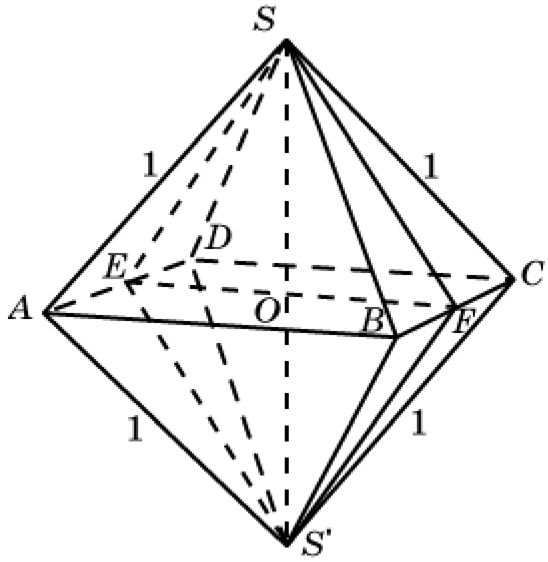
24. Радиус r сферы равен радиусу окружности, вписанной в треугольник SPQ, в котором $SP = SQ = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $PQ= SH =\sqrt{3}$. Воспользуемся тем, что для радиуса r окружности, вписанной в треугольник, имеет место формула $r = \frac{S}{p}$, где S – площадь, p – полупериметр треугольника. В нашем случае $S = \frac{3}{2}$, $p = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $r = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$.



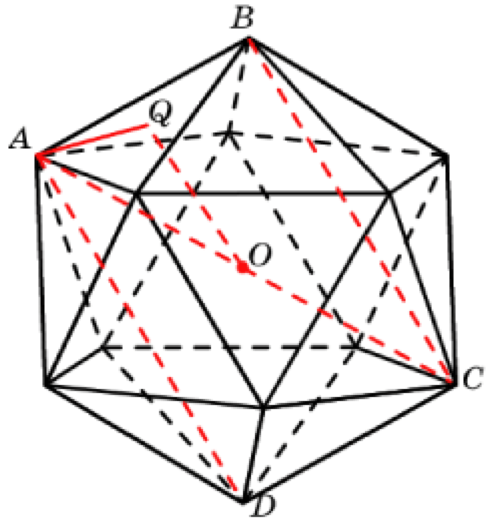
25. Воспользуемся тем, что центр вписанной сферы является точкой пересечения биссектральных плоскостей двугранных углов при основании пирамиды. Для радиуса $r = OH$ сферы имеет место равенство $OH = QH \cdot tg\angle OQH$. Следовательно, $r = \frac{\sqrt{3}}{2} tg 30° = \frac{1}{2}$.



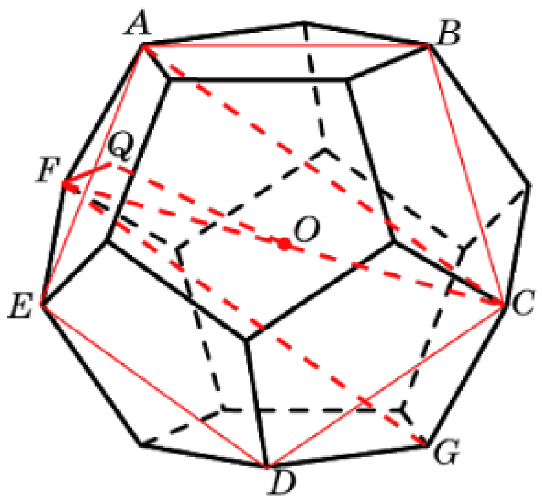
26. Радиус r сферы, вписанной в октаэдр равен радиусу окружности, вписанной в ромб $SES'F$, в котором $SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, EF=1, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота ромба, опущенная из вершины E , равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Искомый радиус r равен половине высоты, и равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



27. Воспользуемся тем, что радиус $r = OA$ описанной сферы равен $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Радиус AQ окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OAQ, получим $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$.

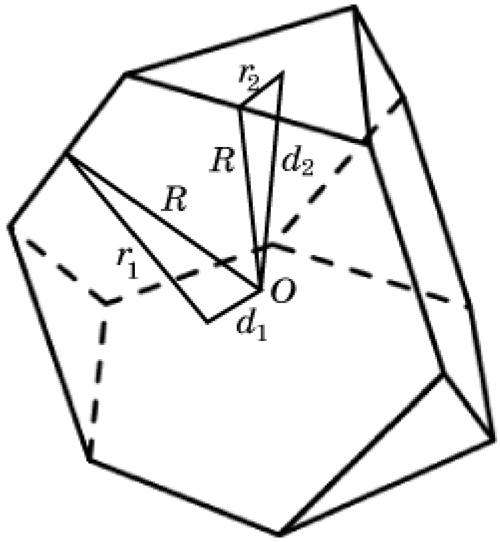


28. Воспользуемся тем, что радиус $r = OF$ описанной сферы равен $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}$. Радиус FQ окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1, равен $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OFQ, получим $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

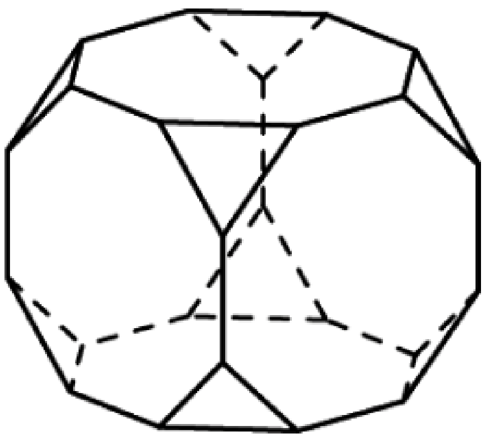


29. Заметим, что центр O сферы, вписанной в усеченный тетраэдр должен совпадать с центром сферы, вписанной в тетраэдр, который, как было показано в предыдущем параграфе, совпадает с центром сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр. Расстояния d_1,

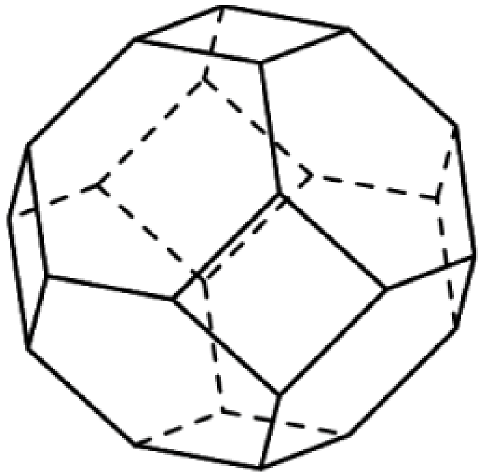
d_2 от точки O до шестиугольной и треугольной граней вычисляются по теореме Пифагора: $d_1 = \sqrt{R^2 - r_1^2}$, $d_2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$, где R – радиус полувписанной сферы, r_1, r_2 – радиусы окружностей, вписанных в шестиугольник и треугольник, соответственно. Поскольку $r_1 > r_2$, то $d_1 < d_2$ и, следовательно, сферы, вписанной в усеченный тетраэдр, не существует.



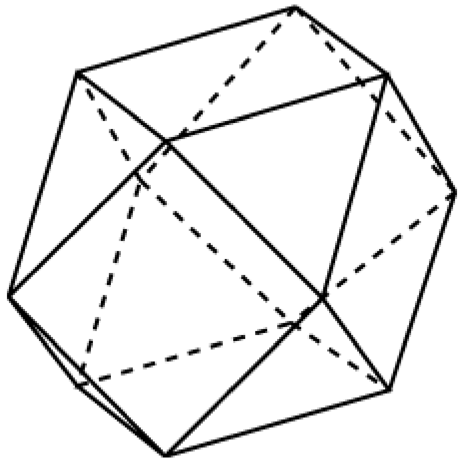
30. Сферы, вписанной в усеченный куб, не существует. Доказательство аналогично доказательству задачи 29.



31. Сферы, вписанной в усеченный октаэдр, не существует. Доказательство аналогично доказательству задачи 29.



32. Сферы, вписанной в кубооктаэдр, не существует. Доказательство аналогично доказательству задачи 29.



СОДЕРЖАНИЕ