И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

Г Е О М Е Т Р И Я

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для общеобразовательных учреждений

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

9 КЛАСС

МНЕМОЗИНА

Москва 2009

Настоящая тетрадь по геометрии предназначена для работы в 9-м классе по учебнику: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2008.

Она соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений и будет полезна для более эффективной организации учебного процесса: при изучении теоретического материала, решении задач, выполнении классных и домашних работ, при проведении различного рода самостоятельных и индивидуальных заданий для учащихся, а также при подготовке к выпускным экзаменам.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята! Вы изучаете один из самых увлекательных и важных разделов математики - геометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием форм, формирует необходимые пространственные представления, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А.Д.Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в которой они взаимно организуют и направляют друг друга ("...лёд и пламень не столь различны меж собой").

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в измерении геометрических величин (длин, углов, площадей).

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И.Кеплера, Р.Декарта, Л.Эйлера, Н.И.Лобачевского и многих других.

Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора". Вот какой замечательной наукой вы занимаетесь.

Данное пособие начинается с пункта 57. Пункты 1 – 56 были рассмотрены в Рабочих тетрадях для 7 и 8 классов тех же авторов. Весь собранный в пособии материал разбит на отдельные пункты. В каждом из них даны задания, которые могут быть использованы как для классной, так и для домашней работ, а также для самостоятельных и индивидуальных работ. Задания подобраны и представлены таким образом, чтобы освободить вас от вспомогательной и непроизводительной работы, например, копирования условий задачи или чертежа, от выполнения несущественных дополнительных построений и т.п. Упражнения весьма разнообразны. В ряде из них вам нужно будет выбрать верные (или неверные) утверждения из предложенных. В других нужно будет заполнить пропуски в формулировках определений, доказательствах теорем или в решениях задач. Много, так называемых, задач по готовому чертежу. В них нужно ответить на предложенный вопрос, или выполнить дополнительные построения, или самим сформулировать и решить задачу. Решение предложенных задач поможет вам в изучении курса геометрии.

Желаем успехов в изучении геометрии!

57. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

57.1. Закончите предложения.

1) За единицу измерения площади принимается ________________

____

____.

Он называется ____

____.

2) Площадь фигуры – это ____________________________________

____

____

____.

3) Две фигуры называются равновеликими, если ________________

____.

57.2. Сформулируйте свойства площадей.

Свойство 1. ____

____

____.

Свойство 2. ____

____

____

____

____.

57.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади прямоугольника.

Формулировка.____
____
____
____

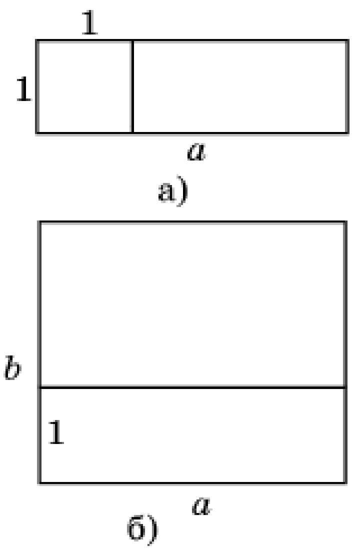


Рис. 1

Дано ____________________________
____
____

Доказать ______________________
____
____

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда одна из смежных сторон равна единице, а другая равна *a* (рис. 1, а). Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение единичного_____________________ на такое же число
____

Если единичный отрезок укладывается в стороне ______ раз, то единичный квадрат будет укладывается в прямоугольнике также ________ раз. Следовательно, площадь этого прямоугольника будет равна ________.

Рассмотрим теперь общий случай прямоугольника со сторонами a и b (рис. 1, б). Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение прямоугольника со сторонами a и 1 на ____.

Поскольку единичный отрезок укладывается в стороне b раз, то прямоугольник со сторонами a и 1 будет укладываться ____.

Так как в каждом из них единичный квадрат укладывается _______ раз, то в исходном прямоугольнике единичный квадрат будет укладываться _____________ раз, т.е. площадь прямоугольника равна произведению ____.

57.4. Запишите и объясните формулу для вычисления площади: а) прямоугольника; б) квадрата.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

57.5. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну из его сторон увеличить в 2 раза: б) одну из его сторон уменьшить в 5 раз; в) одну из его сторон уменьшить в 3 раза, а другую увеличить в 8 раз?

Ответ. Площадь: а) _______________________________________;

б) ____;

в) ____.

57.6. Как изменится площадь квадрата, если: а) его сторону уменьшить в 4 раза: б) его сторону увеличить в 9 раз; в) периметр уменьшить в 2 раза; г) периметр увеличить в 3 раза?

Ответ. Площадь: а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

57.7.

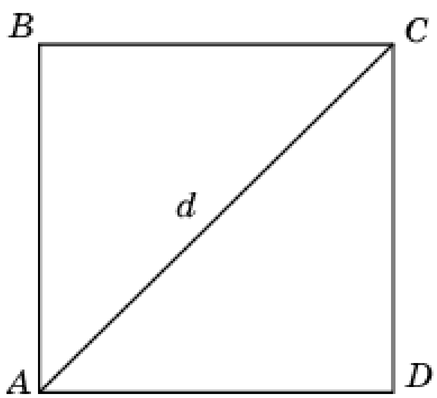


Рис. 2

Дано: $ABCD$ – квадрат (рис. 2);

$AC=d$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение. ______________________

____

____

____.

57.8. Изобразите квадрат и произвольный прямоугольник.

57.9. Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника, катет которого равен a.

Дано: __________

_______________.

Найти: _________.

Решение. ____

____

____.

57.10. Постройте квадрат, площадь которого была бы в: а) 4; б) 2 раза больше площади данного квадрата (рис. 3).

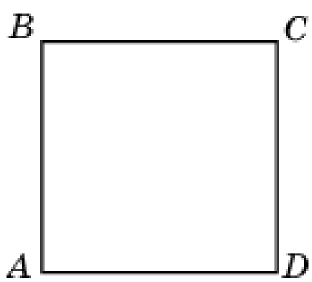


Рис. 3

Решение. Сторона искомого квадрата равна: а) _______________;

б) ____.

57.11. Постройте квадрат, площадь которого была бы в: а) 4; б) 2 раза меньше площади данного квадрата (рис.4).

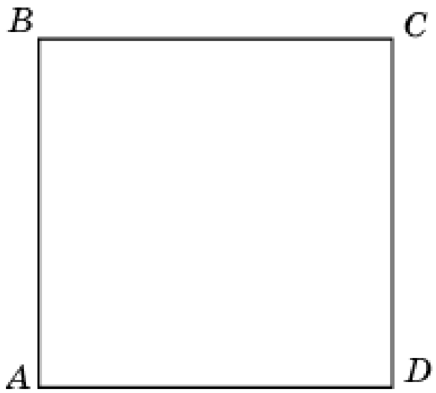


Рис. 4

Решение. Сторона искомого квадрата равна: а) _______________;

б) ____.

57.12. Постройте равновеликие квадрат и прямоугольник.

Решение. ____

____

____.

57.13. Земельный прямоугольный участок содержит 200 га. Длина участка равна 8 км. Найдите периметр его границы. Сформулируйте практическую задачу на языке математики.

Дано: ___________

_________________.

Найти: __________.

Формулировка. ____

____

____.

Решение. ____

____

____.

57.14. Прямоугольный и квадратный участки земли равновелики. Ширина прямоугольного участка равна 32 м, сторона кавдратного равна 40 м. Граница какого участка будет короче и на сколько?

Дано: ______________________

____________________________.

Найти:____________________.

Решение. ____

____

____

____

____.

57.15. Проиллюстрируйте формулу:

а) $(a+b)\cdot c=ac+bc$;

б) $(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$;

в) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

а)

б)

в)

Решение. а) ____

____;

б) ____

____;

в) ____

____.

57.16. Постройте квадрат, площадь которого равна: а) сумме; б) разности площадей данных квадратов (рис. 5).

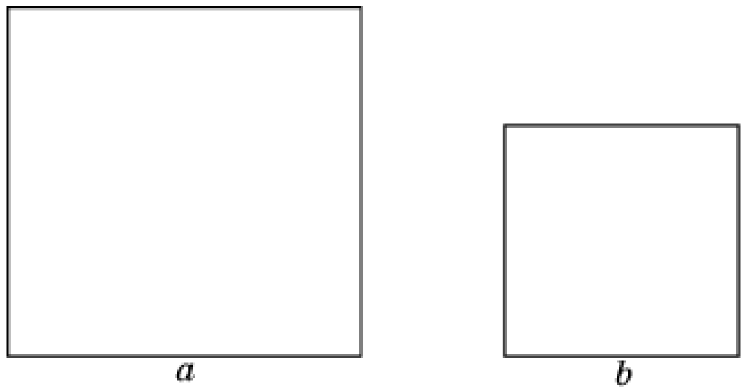


Рис. 5

Построение. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

57.17. Постройте квадрат, равновеликий данному прямоугольнику (рис. 6).

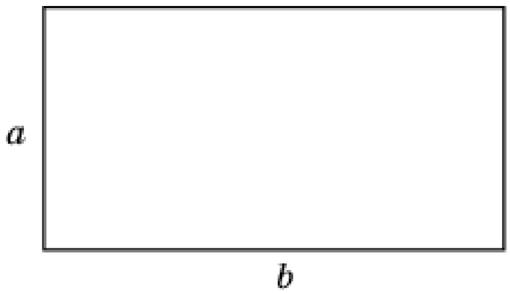


Рис. 6

Построение. ____

____

____

____.

57.18. Постройте квадрат, равновеликий 5 данным квадратам (рис. 7).

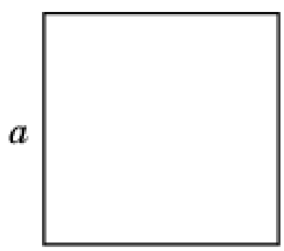


Рис. 7

Построение. ____

____

____

____.

57.19. Постройте квадрат, равновеликий $\frac{2}{5}$ данного квадрата (рис. 8).

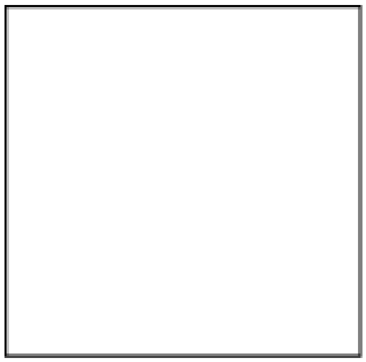


Рис. 8

Построение.

57.20. Постройте квадрат, площадь которого равна $5a^2+3b^2$, где a и b – данные отрезки (рис. 9).

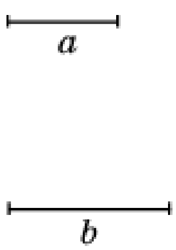


Рис. 9

Построение.

58. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

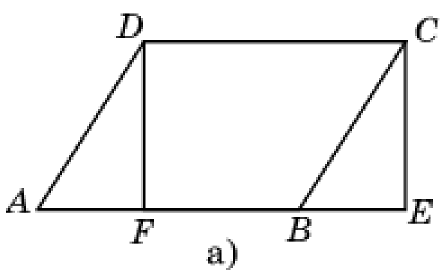
58.1. Закончите предложения.

1) Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого ____.

2) Высотой параллелограмма называется ______________________ ____.

58.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади параллелограмма.

Формулировка.____ ____ ____.



Дано: *ABCD* - параллелограмм ____________________________.

Доказать:____________________.

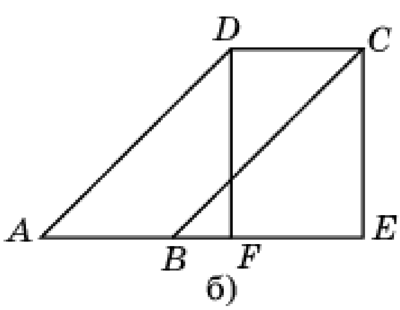


Рис. 10

Доказательство. Построим прямоугольник *FECD*, имеющий ту же сторону *CD* и высоту *DF*. Докажем, что этот прямоугольник и параллелограмм ____________________. Рассмотрим два случая, когда точка *F* лежит: а) внутри отрезка *AB*; б) вне отрезка *AB*.

а) Параллелограмм будет составлен из ________________________ и ________________________. Прямоугольник составлен из ___________________ и _________________________. Причём треугольник ________ равен треугольнику ________ (по ____). Следовательно, площадь параллелограмма равна площади ________________________, т.е. равна произведению ______________________________________, проведённую к __________________________________.

б) ____
____
____
____.

58.3. Сформулируйте и докажите следствие из теоремы о площади параллелограмма.

Формулировка____
____
____.

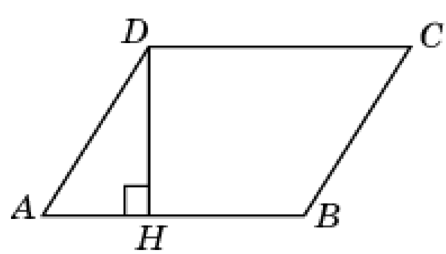


Рис. 11

Дано: *ABCD* - параллелограмм
________________________________.

Доказать___________________.

Доказательство. ____
____
____
____.

58.4. Запишите формулы для нахождения площади параллелограмма.

Ответ. 1) ____

____;

2) ____

____.

58.5. На рисунке 12 найдите равновеликие фигуры.

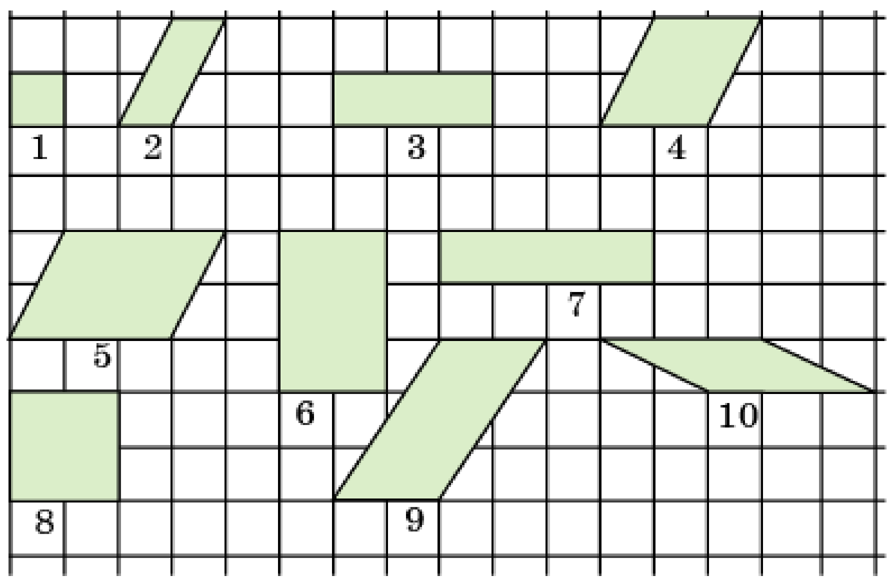


Рис. 12

Ответ. ____

____.

58.6. Нарисуйте параллелограмм со сторонами a и b (рис. 13), который имеет наибольшую площадь. Ответ объясните.

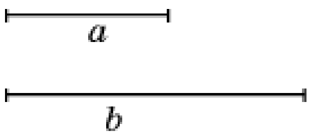


Рис. 13

Решение. ____

____

____.

58.7. Постройте параллелограмм, равновеликий данному прямоугольнику (рис. 14).

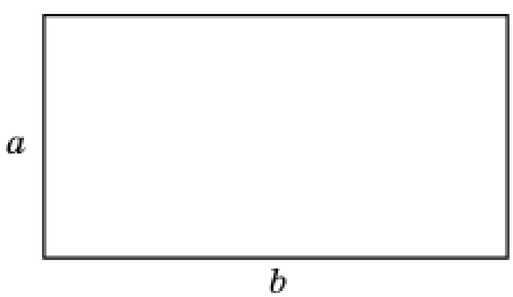


Рис. 14

Построение. ____

____

____.

58.8. Постройте прямоугольник, равновеликий данному параллелограмму (рис. 15).

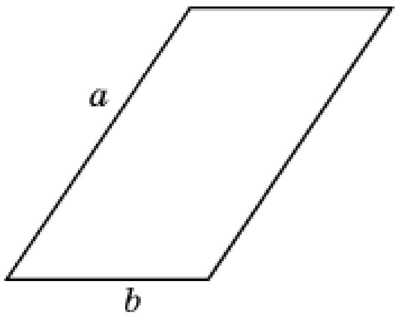


Рис. 15

Построение. ____

____

____.

58.9. Постройте параллелограмм, площадь которого была бы в 2 раза: а) меньше; б) больше площади данного параллелограмма (рис.16).

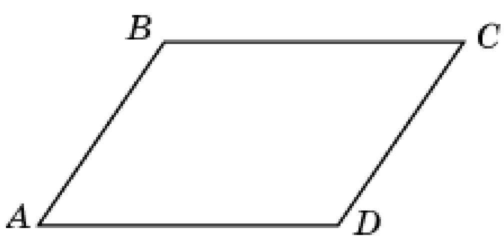


Рис. 16

Построение. а) ____

____;

б) ____

____.

58.10. Постройте ГМ вершин параллелограммов, равновеликих данному параллелограмму *ABCD* (рис. 17) и имеющих с ним общую сторону *AB*.

Рис. 17

Построение. ____

____

____.

58.11. Постройте квадрат, равновеликий данному параллелограмму (рис. 18).

Рис. 18

Построение. ____

____

____.

58.12. Квадрат и ромб имеют равные периметры. Найдите углы ромба, если его площадь в 2 раза меньше площади квадрата.

Дано: ____

____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____.

58.13. Через точку пересечения диагоналей: а) квадрата; б) прямоугольника; в) ромба; г) параллелограмма (рис. 19) проведите прямую, которая делит его на две равновеликие фигуры. Сколько решений имеет задача?

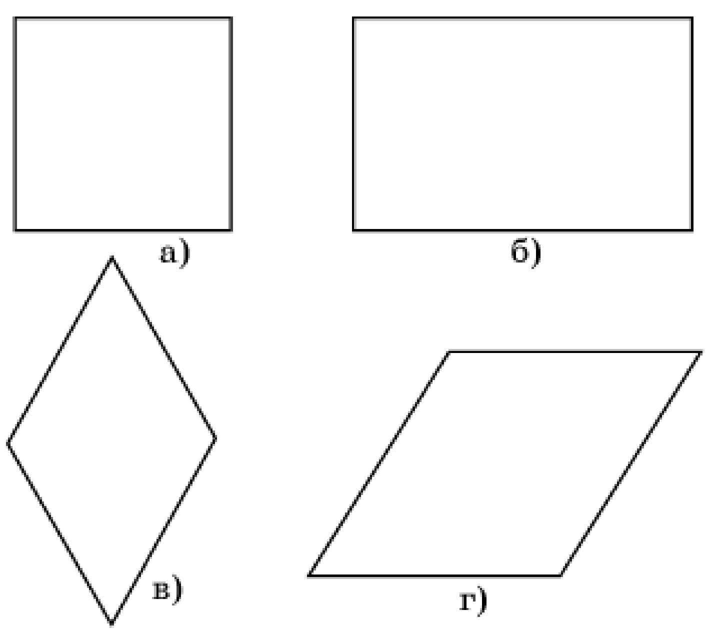


Рис. 19

Построение. Точка пересечения диагоналей: а) квадрата; б) прямоугольника; в) ромба; г) параллелограмма является центром его ______________________________

____________________, значит, ______________________________

____

____. Задача имеет ____решений.

58.14. Проведите прямую, которая разделит данную фигуру: а) квадрат с вырезанной дырой в виде ромба; б) параллелограмм с вырезанной квадратной дырой: в) ромба с вырезанным параллелограммом; г)прямоугольник с вырезанным прямоугольником (рис. 20). Сколько решений имеет задача? Как должны быть расположены данный многоугольник и «дыра», чтобы задача имела бесконечно много решений? Сделайте соответствующий рисунок.

Построение. Учитывая решение предыдущей задачи 58.13, имеем

____

____

____.

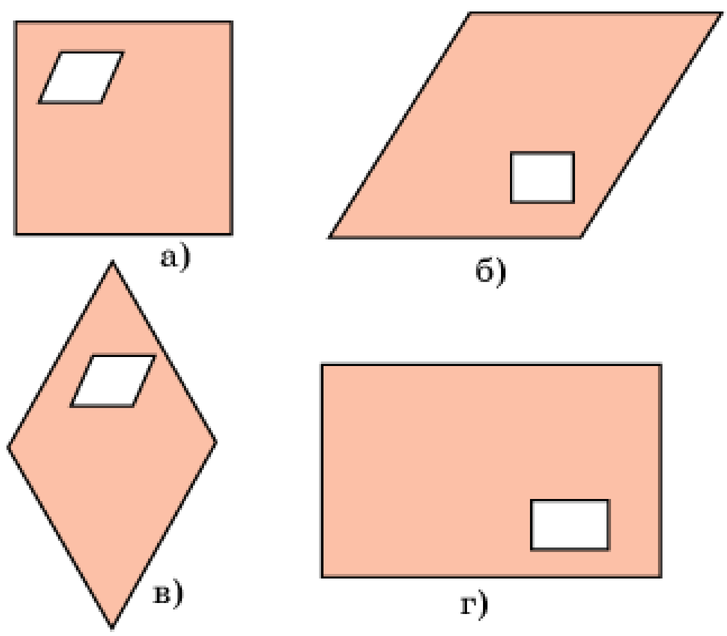


Рис. 20

58.15.

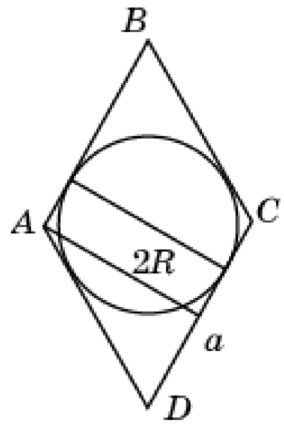


Рис. 21

Дано: $ABCD$ – ромб: $AB=a$;
радиус вписанной
окружности равен R.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.______________

____

____.

58.16. Постройте параллелограмм $ABEF$, равновеликий данному параллелограмму $ABCD$ (рис. 22) и имеющий данный $\angle BAF=\alpha$. При любои ли заданном α задача имеет решение? Сколько решений имеет задача?

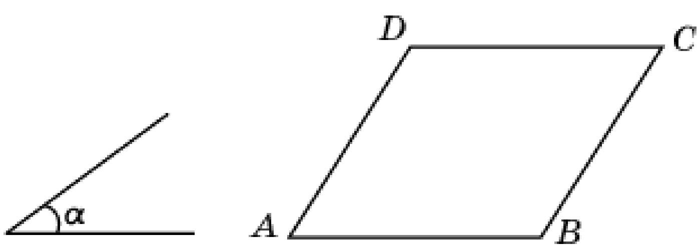


Рис. 22

Построение. Отложим $\angle BAF=\alpha$, $F \in DC$ и ___________________

____

____

____

____.

58.17. Постройте параллелограмм $ABEF$, равновеликий данному параллелограмму $ABCD$ (рис. 23) и имеющий данную сторону $BE=a$. При любом ли заданном a задача имеет решение? Сколько решений имеет задача?

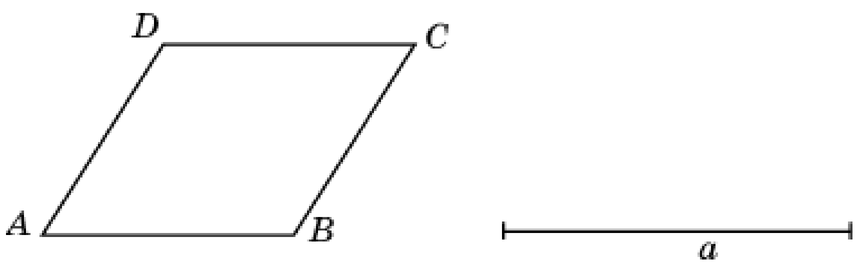


Рис. 23

Построение. Проведём окр.(A, a), назовём F=окр.(A, a)$\cap DC$, затем отложим FE=_____. ____

____

____

____.

58.18.

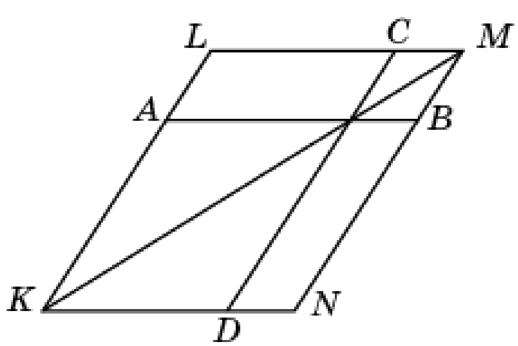


Рис. 24

Дано: $KLMN$ - параллелограмм; $AB||KN$; $CD||KL$.

Найти: Равновеликие параллелограммы (рис. 24).

Ответ. ________________________

____

____

____.

58.19. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 25). Докажите, что прямоугольники со сторонами AE, AF и AG, EF равновелики.

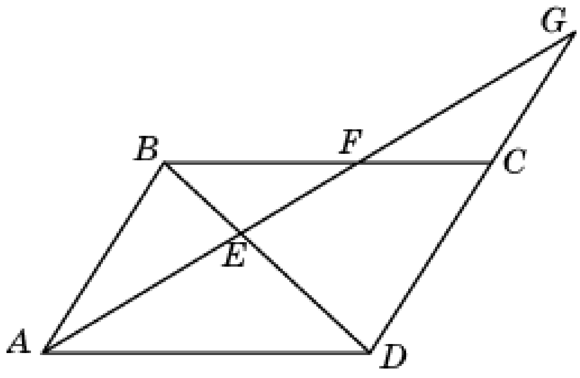


Рис. 25

Дано: ______________

____

____________________.

Доказать: ___________

____________________.

Решение. Нужно доказать, что $AE \cdot AF =$________________. Для этого рассмотрим треугольники ABF и GDA, они ______________, так как ____,

отсюда $\frac{AF}{AG} = \frac{BF}{\_\_\_}$ (1).

Аналогично, рассмотрим треугольники BEF и ________________, они ____________________, так как ________________

____,

значит, $\frac{BF}{DA} = \frac{EF}{\_\_\_}$ (2).

Из равенств (1) и (2) получаем, что $\frac{AF}{AG} =$____, т.е.

____

____.

58.20. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 26), $a \parallel b$, $AH \perp DF$ и $EP \perp DF$. Докажите, что данный параллелограмм $ABCD$ равновелик четырёхугольнику $AEPH$.

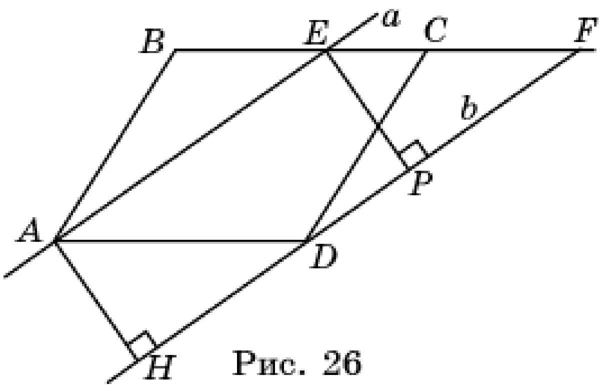


Рис. 26

Дано: ______________
____
____________________.
Доказать: ___________
____________________.

Решение. Рассмотрим треугольники DCF и ABE, они __________, так как ____.
Рассмотрим треугольники AHD и EPF, они тоже __________, так как ____.
Теперь рассмотрим четырёхугольник $ABFH$: $S_{ABFH}=S_{ABCD}+S_{DCF}+S_{AHD}$, но с другой стороны, $S_{ABFH}=S_{AEPH}+$________+________.
Следовательно, ____,
так как по доказанному _______________________________________
____.
Итак, $S_{ABCD}=$____.

59. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

59.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади треугольника.

Формулировка.____

____

____.

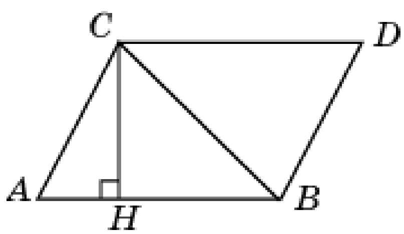


Рис. 27

Дано: ΔABC; $CH \perp AB$.

Доказать: ___________.

Доказательство. Достроим данный треугольник ABC до ____________________________________. Треугольники ABC и _______________ равны. Следовательно, их площади __________. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади ____. Сторона AB параллелограмма равна стороне ____________________, а высота, проведённая к этой стороне, равна ________________________________. Следовательно, площадь треугольника ABC равна ____.

59.2. Сформулируйте и докажите следствия из теоремы о площади треугольника.

Следствие 1.

Формулировка.____

____

____.

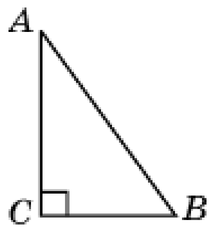


Рис. 28

Дано: ________________

______________________.

Доказать: ___________.

Доказательство. ____

____

____.

Следствие 2.

Формулировка.____

____

____.

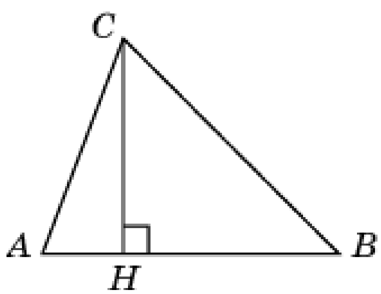


Рис. 29

Дано: ________________

______________________.

Доказать: ___________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____.

59.3*. Запишите и докажите формулу Герона.

Формула.____

____

____.

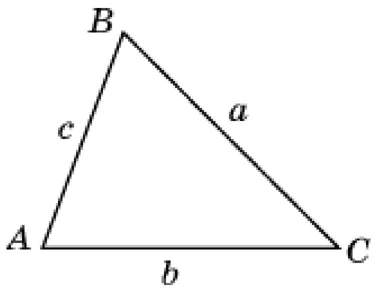


Рис. 30

Дано: ________________

____

______________________.

Доказать: ____________

______________________.

Доказательство. Воспользуемся выведенной формулой для нахождения площади треугольника, а именно, $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$. Выразим $\sin C$ через стороны треугольника по ________________________, тогда

$c^2=$____.

Отсюда $\cos C=$____. Значит,

$\sin^2 C=$__________________=(___________________)$\cdot$(________________)

$$=\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2b^2}.$$

Учитывая, что $a+b+c=$_____, $a+b-c=$__________, $c+a-b=$________,

$c-a+b=$________, получаем $\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем $S=$_______________________________________.

59.4. Запишите формулы для нахождения площади треугольника.

Ответ.____

____

____

____.

59.5. На рисунке 31 найдите равновеликие треугольники.

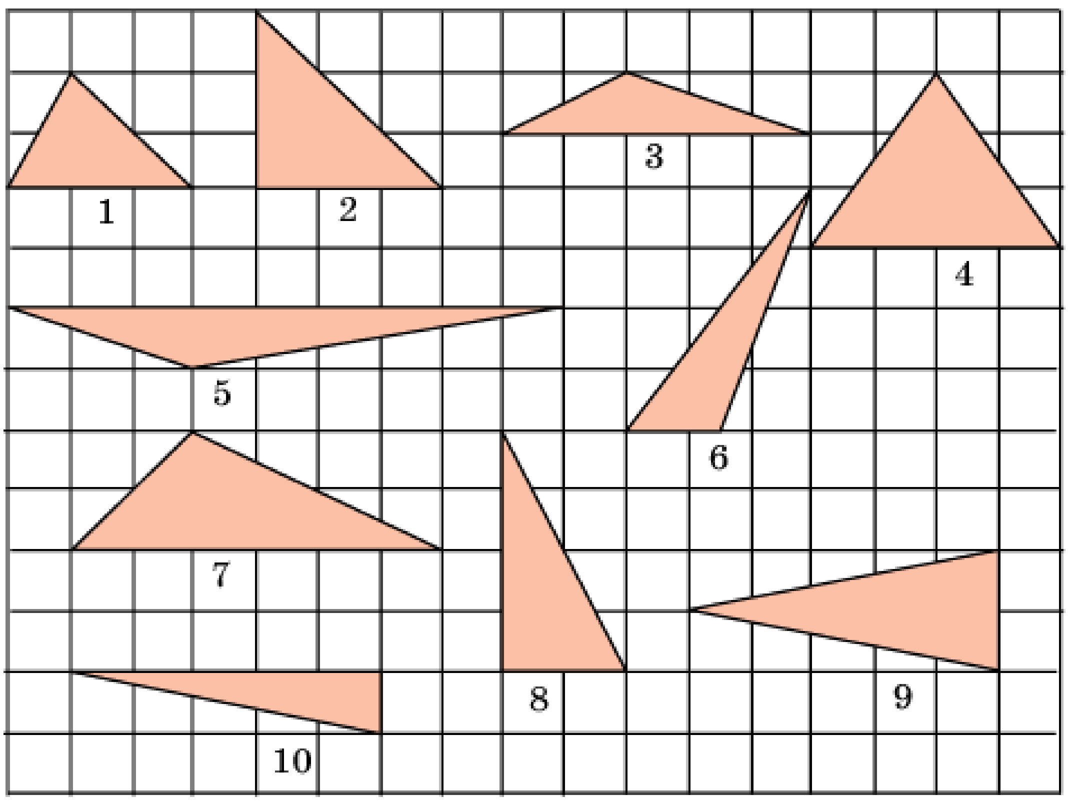


Рис. 31

Ответ.____

____.

59.6. Найдите площадь треукгольника *ABC* (рис. 32).

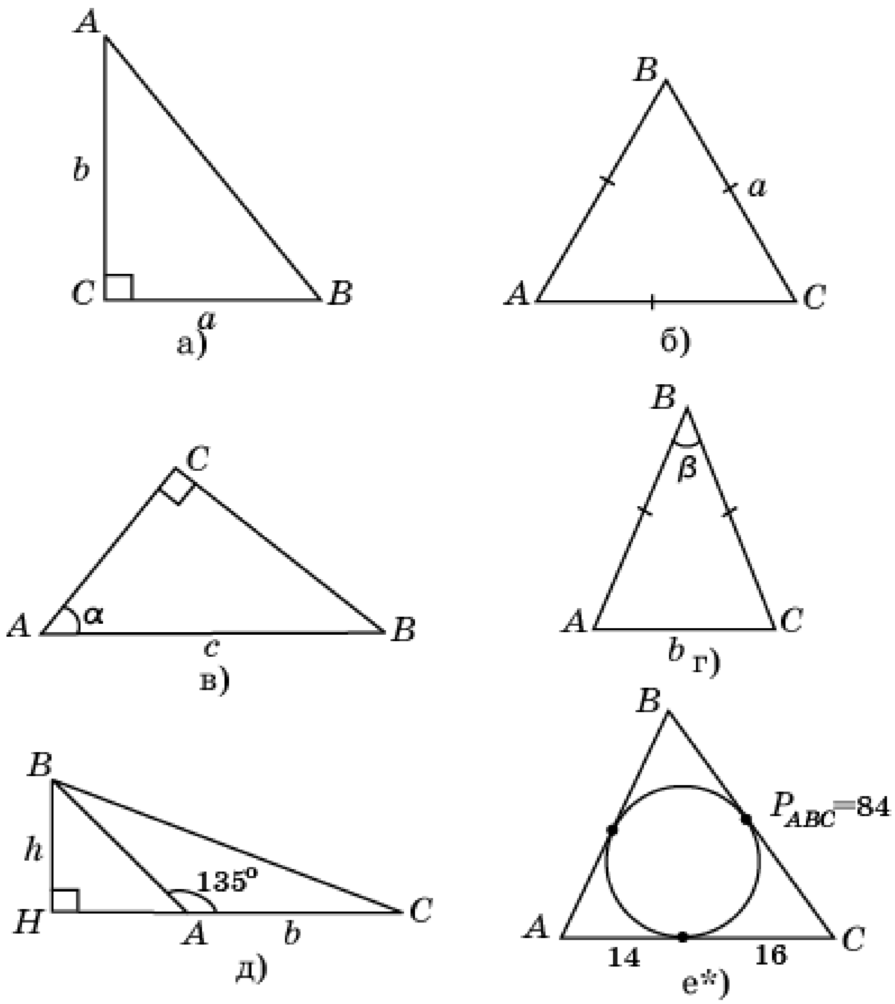


Рис. 32

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

59.7. Постройте треугольник со сторонами a и b (рис. 33), который имеет нибольшую площадь. Ответ поясните.

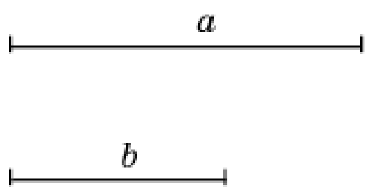


Рис. 33

Ответ.____.

59.8. Постройте треугольник, площадь которого в два раза: а) меньше: б) больше площади данного треугольника (рис. 34).

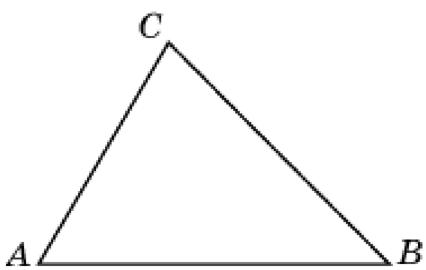


Рис. 34

Построение. а) ____;

б) ____.

59.9. Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму (рис.35).

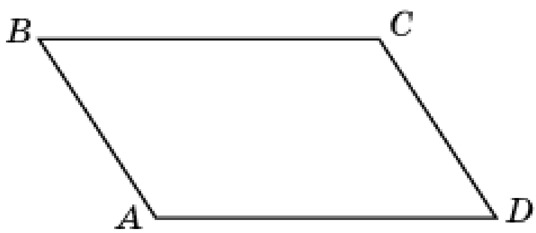


Рис. 35

Построение.____

____

____

____.

59.10. Постройте параллелограмм, равновеликий данному треугольнику (рис. 36).

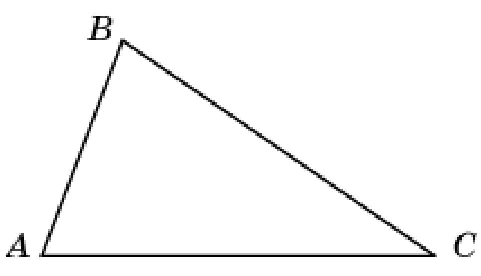


Рис. 36

Построение.____

____

____

____.

59.11. Данный треугольник (рис. 37) разделите на: а) две; б) три равновеликие части.

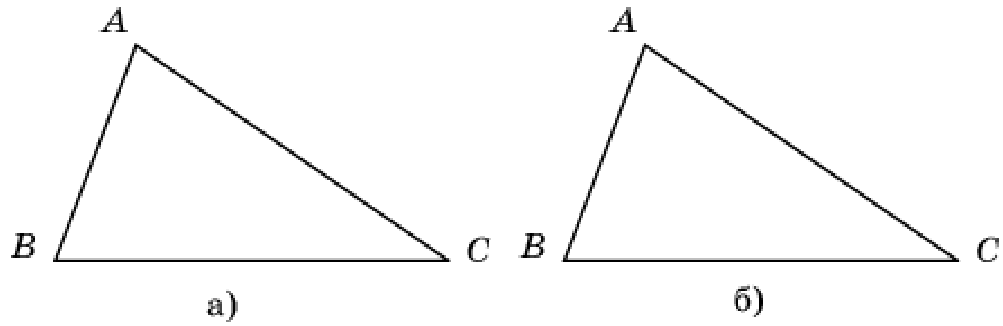


Рис. 37

Построение. а) ____

____;

б) ____

____.

59.12. Разделите данный треугольник ABC (рис. 38) на две равновеликие части прямой, параллельной стороне AB.

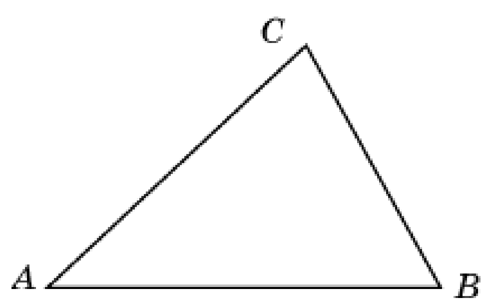


Рис. 38

Построение.____

____

____

____.

59.13. Найдите внутри данного треугольника *ABC* (рис. 39) такую точку *M*, чтобы треугольники *AMB*, *BMC* и *AMC* были равновеликими.

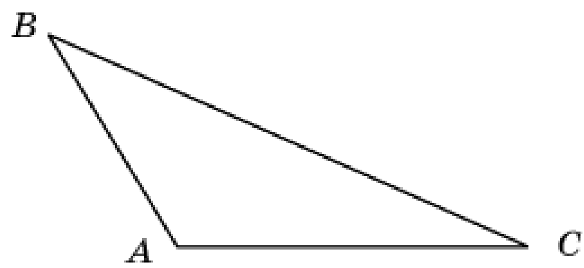


Рис. 39

Построение.____

____

____.

59.14. Разделите данный параллелограмм *ABCD* (рис. 40) отрезками, выходящими из вершины *A* на: а) две; б) три; в) четыре; г) пять равновеликих частей.

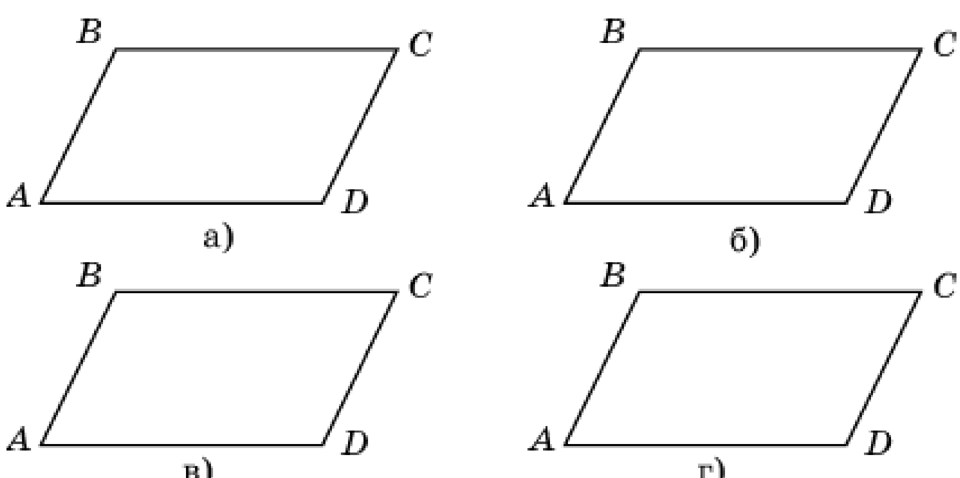


Рис. 40

Построение. а) ____;

б) ____

____;

в) ____;

г) ____

____.

59.15. Постройте треугольник, площадь которого: а) в два раза меньше; б) в два раза больше; в) равна площади данного квадрата (рис. 41).

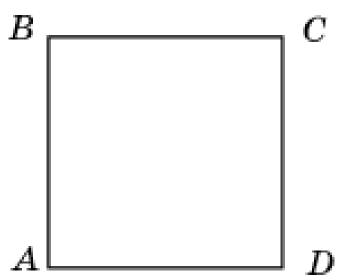


Рис. 41

Построение. Обозначим через a сторону данного квадрата, тогда:

а) $\frac{1}{2}a^2=$ ____;

б) $2a^2=$ ____;

в) $a^2=$ ____.

59.16. Постройте ГМ вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику ABC (рис. 42) и имеющих с ним общую сторону BC.

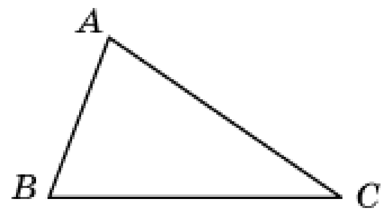


Рис. 42

Построение.____

____

____.

59.17. Докажите, что $r=\dfrac{2S}{P}$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник, S и P – его соответственно площадь и периметр.

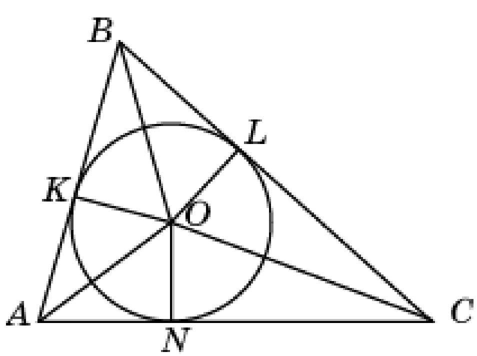


Рис. 43

Дано:__________________________

________________________________.

Доказать:______________________

________________________________.

Решение. Назовём O – центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC, K, L и M – точки касания с его сторонами. Тогда S_{AOB}=____________________, откуда ___________________________________.

59.18. Докажите, что $R = \frac{abc}{4S}$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника, a, b и c – его стороны, S – площадь.

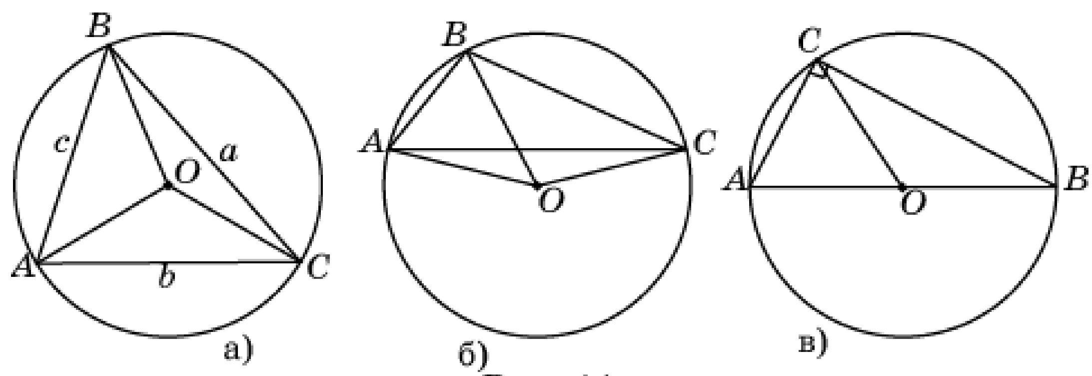


Рис. 44

Дано: ____

____

Доказать: ____

____

Решение.____

____

____.

60. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

60.1. Закончите предложения.

1) Трапецией называется__________________________________

____.

2) Высотой трапеции называется______________________________

____.

3) Средней линией трапеции называется________________________

____,

60.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади трапеции.

Формулировка.____

____

____.

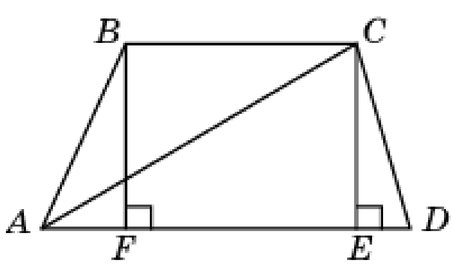


Рис. 45

Дано:________________________

____

Доказать:_____________________.

Доказательство.____

____

____

____

____.

60.3. Сформулируйте и докажите следствие из теоремы о площади трапеции.

Формулировка.____

____

____.

Дано:__________________________

____

Доказать:_______________________.

Доказательство.____

____

____.

60.4. Запишите формулу для вычисления площади трапеции.

Ответ.____

____

____.

60.5. Как изменится площадь трапеции, если её основания и высоту: а) увеличить; б) уменьшить в два раза?

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

60.6. На рисунке 46 изображена трапеция *ABCD* с основаниями *AB* и *CD*. Проведите её диагонали и найдите равновеликие треугольники.

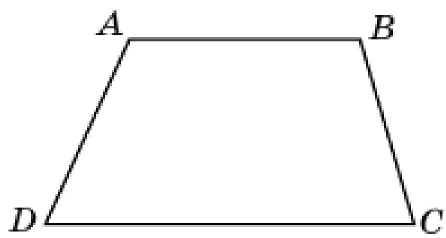


Рис. 46

Ответ. ____

____.

60.7. Заполните таблицу.

Верхнее основание трапеции	5 см	2 дм	80 см	
Нижнее основание трапеции	3 см	6 дм		1000 см
Высота трапеции	4 см		4 см	20 дм
Площадь трапеции		28 дм^2	22 см^2	30 м^2

60.8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, у которой углы A и D равны соответственно $90°$ и $45°$. Найдите её площадь, если $BC=2$ и $AD=4$.

Дано: ______________________________

____

____________________________________.

Найти: ______________________________

Решение. ____

____

____

____

____.

60.9. По рисунку 47, где $BC||AD$, сформулируйте и решите задачу.

Формулировка. ____

____

____.

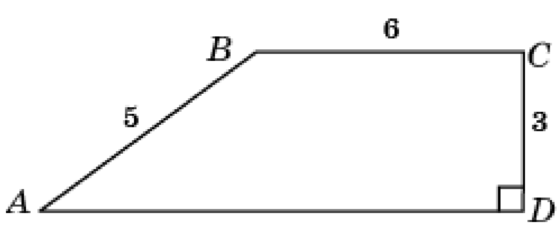


Рис. 47

Дано: ______________________________

____

____

Найти: ______________________________

Решение. ____

____

____

____

____.

60.10. Не производя измерений, найдите площади многоугольников, изображённых на рисунке 48.

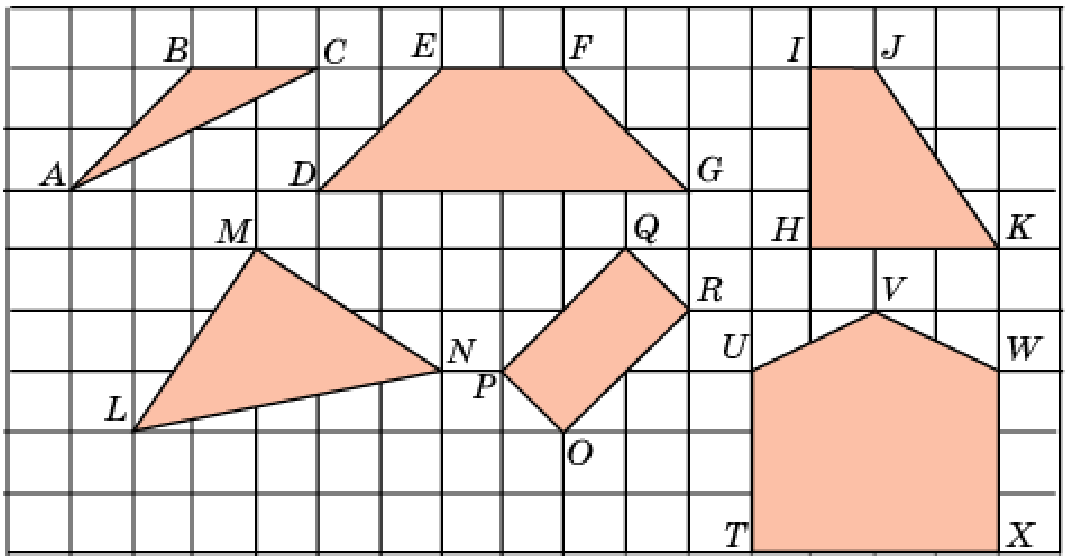


Рис. 48

Ответ. ____

____

____

____

____

____.

60.11. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD (рис. 49), $AM=MD$. Найдите площадь треугольника CBM, если площадь данной трапеции равна Q.

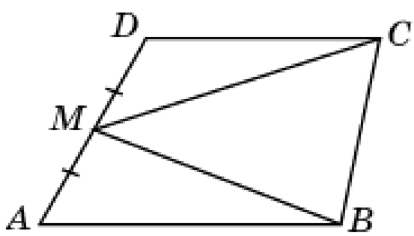


Рис. 49

Дано:______________________________

____

_____________________________________.

Найти:______________________________

Решение.____

____

____

____.

60.12. В трапеции $ABCD$ (рис. 50) на отрезке, который соединяет середины её оснований AD и BC, взята произвольная точка K. Она соединена с вершинами трапеции. Докажите равновеликость треугольников AKB и CKD.

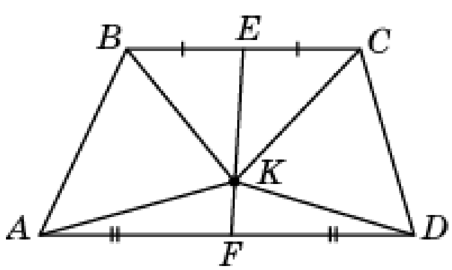


Рис. 50

Дано:______________________________

____

____________________________________.

Доказать:____________________________

____

Решение. ____

____

____

____

____.

60.13. Разделите данную трапецию (рис. 51) на две равновеликие части прямой, перпендикулярной её основаниям.

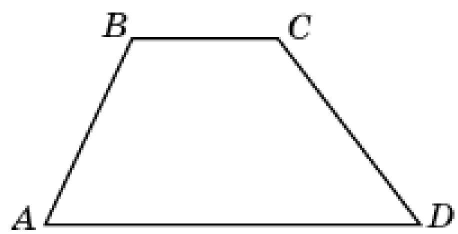


Рис. 51

Построение. ____

____

____

____.

60.14. Докажите, что любая прямая, проходящая через середину средней линии трапеции, делит её на две равновеликие части.

Дано:____________________________

____

________________________________.

Доказать:________________________

____

Решение. ____

____

____

____

____.

60.15. Постройте параллелограмм, равновеликий данной трапеции (рис. 52).

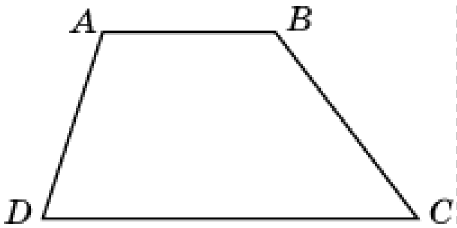


Рис. 52

Построение. ____

____

____

____

____.

60.16. Постройте прямоугольник, равновеликий данной трапеции (рис. 53).

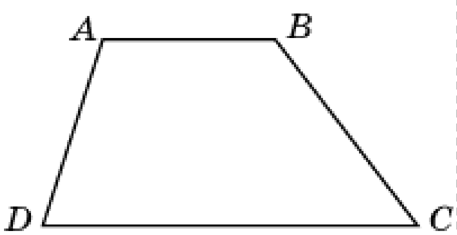


Рис. 53

Построение. ____

____

____

____

____.

60.17. В трапеции $ABCD$ ($AB||CD$) диагонали пересекаются в точке O (рис. 54), точки K, L, M и N – середины отрезков соответственно AO, BO, CO и DO. Определите вид четырёхугольника $KLMN$ и сравните его периметр и площадь соответственно с периметром и площадью данной трапеции.

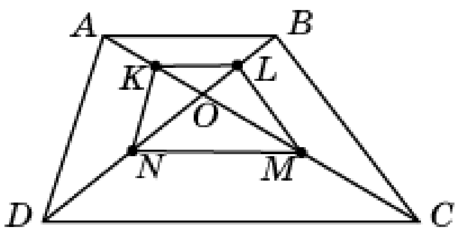


Рис. 54

Дано:______________________________

____

__________________________________.

Определиь:_________________________.

Сравнить:__________________________

__________________________________.

Решение. ____

____

____

____

____.

60.18. В трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) $AB=CD$, $\angle D=60°$, $AD=10$ и $BC=4$. Найдите её площадь.

Дано:______________________________

____

__________________________________.

Найти:_____________________________

Решение. ____

____

____

____

____.

60.19. От участка земли в форме трапеции нужно отделить треугольный участок таким образом, чтобы его площадь была равна площади оставшейся части. Как нужно поставить изгородь?

Решение. ____

____

____

____

____.

60.20. Участок земли в форме трапеции нужно разделить на четыре равновеликих участка таким образом, чтобы каждый из них имел форму трапеции. Как нужно поставить изгородь?

Решение. ____

____

____

____

____.

61. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

61.1. Закончите предложения.

Площадь произвольного многоугольника можно находить, разбивая его на ______________________________.
При этом ____
____.

61.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади многоугольника.

Формулировка.______________________________________
____
____
____.

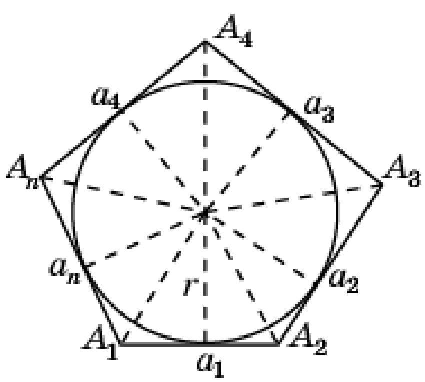


Рис. 55

Дано:____________________________
____
____________________________.

Доказать:_________________________
____

Доказательство. Многоугольник, описанный около окружности, можно представить составленным из____________________________
____
____
____
____
____
____.

61.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, следствие из теоремы о площади многоугольника.

Формулировка.____

____

____.

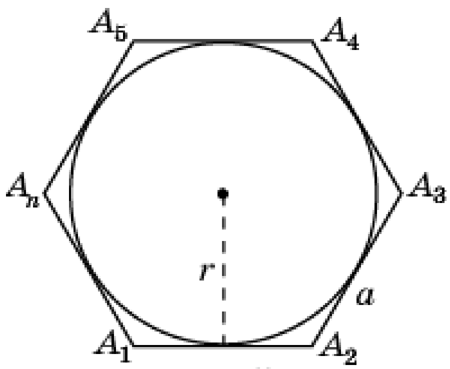


Рис. 56

Дано:__________________________

_______________________________.

Доказать:______________________

____

Доказательство._________________

____

____

____

____

____.

61.4. Найдите площадь правильного единичного шестиугольника.

Дано:__________________________

_______________________________.

Найти:_________________________.

Решение.____

____

____

____

____.

61.5. По рисунку 57 сформулируйте и решите задачу, где $ABCD$ – квадрат.

Формулировка. ____

____

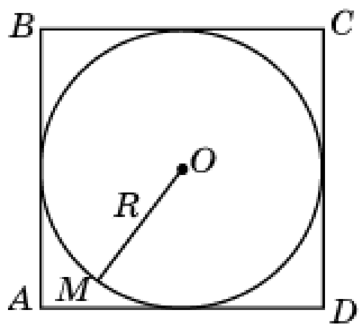


Рис. 57

Дано:____________________________

____________________________________.

Найти:___________________________.

Решение.__________________________

____

____

____

____.

61.6. По рисунку 58 сформулируйте и решите задачу, где $A_1 \ldots A_8$ – правильный восьмиугольник.

Формулировка. ____

____

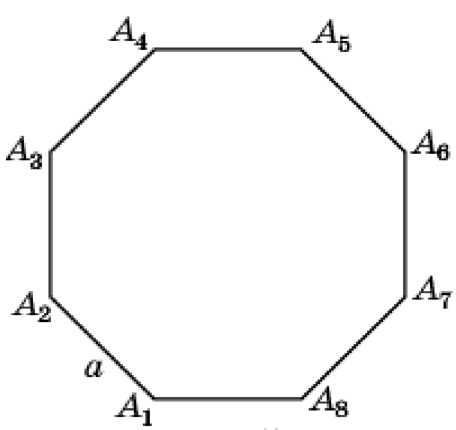


Рис. 58

Дано:____________________________

____________________________________.

Найти:___________________________.

Решение.__________________________

____

____

____

____

____.

61.7. Докажите, что площадь четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей (рис. 59).

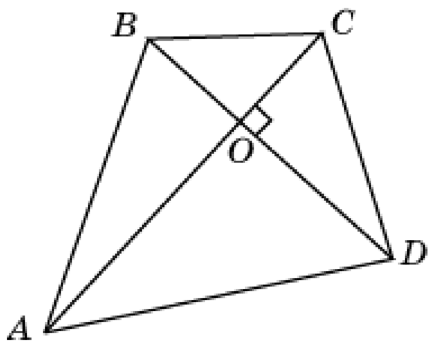


Рис. 59

Дано: ______________________________

__________________________________.

Доказать: _________________________.

Решение. __________________________

____

____

____

____

____.

61.8. Найдите площадь ромба, если его сторона и одна из диагоналей равны соответственно 13 и 24.

Дано: ______________________________

__________________________________.

Найти: ____________________________.

Решение. ____

____

____

____

____.

61.9. Докажите, что площадь четырёхугольника равна произведению его диагоналей на синус угла между ними.

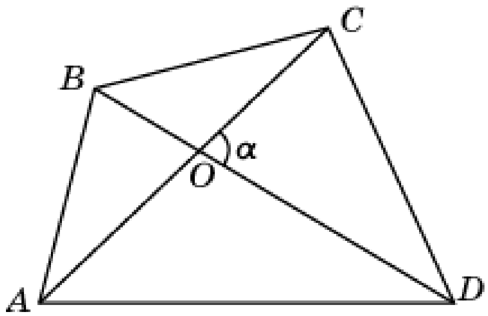


Рис. 60

Дано:__________________________

__________________________________.

Доказать:________________________.

Решение. Положим, что $AC=d_1$, $BD=d_2$, тогда ___________________

____

____

____

____.

61.10. Найдите площадь четырёхугольника с диагоналями, равными 6, 11 и углом между ними: а) $45°$; б) $120°$.

Дано:____

____.

Найти:____

____.

Решение.____

____

____

____

____.

61.11. Найдите площади фигур, изображённых на рисунке 61, где площадь одной клетки равна 1 кв. ед.

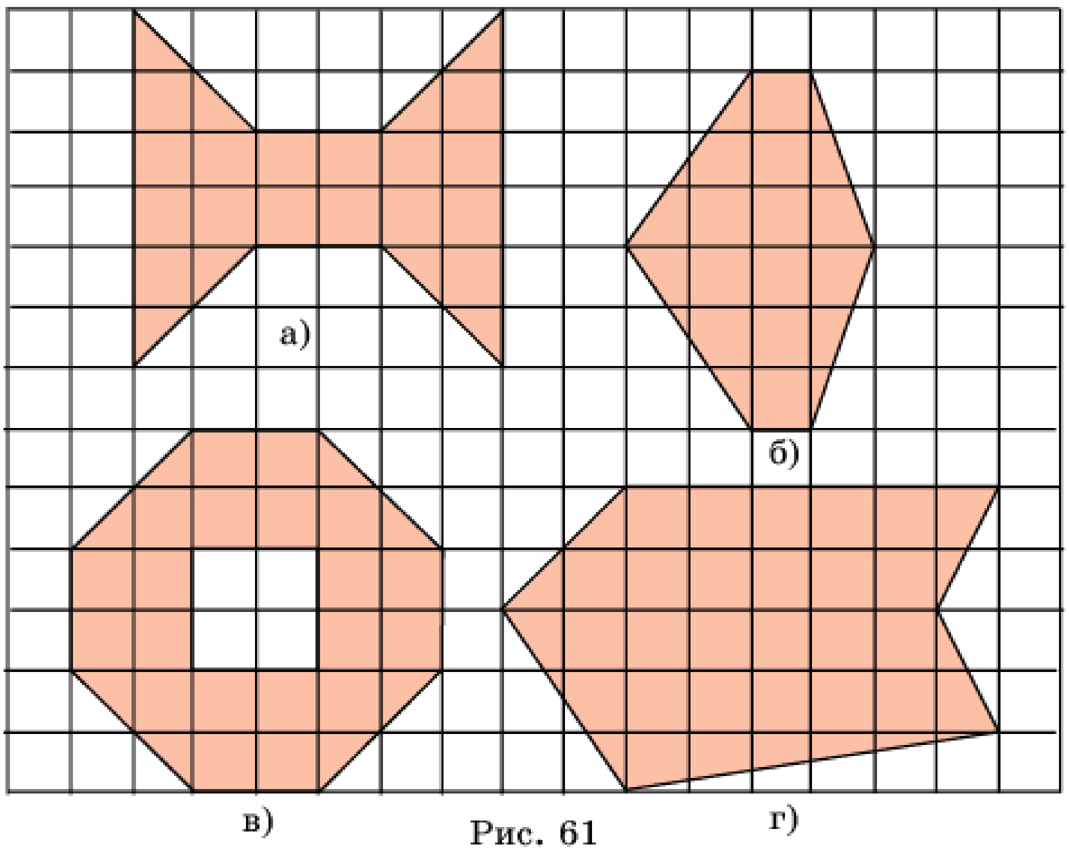


Рис. 61

Ответ.____

____

____

____

____.

61.12. Площадь правильного шестиугольника равна Q. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ.____

____

____.

61.13. В шестиугольнике $ABCDEF$ (рис. 62) противоположные стороны равны и параллельны. Найдите площадь треугольника ACE, если площадь данного шестиугольника равна Q.

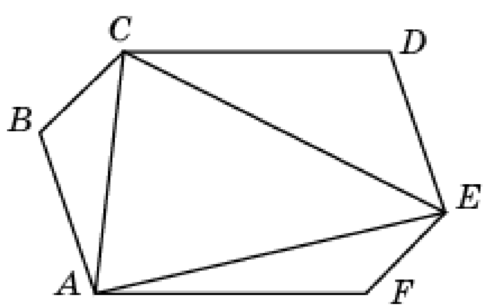


Рис. 62

Дано:___________________________

____

______________________________.

Найти:_______________________.

Решение. Проведём внутри данного шестиугольника луч с вершиной в точке A и параллельный BC, отложим на нём $AM=BC$ и соединим точку M с точками C и E. Четырёхугольник $ABCM$ будет

____

____

____

____

____.

61.14. На рисунке 63 изображён параллелограмм $ABCD$, точки E и F – середины его сторон соответственно AD и CD. Докажите, что заштрихованная площадь в два раза больше незаштрихованной площади.

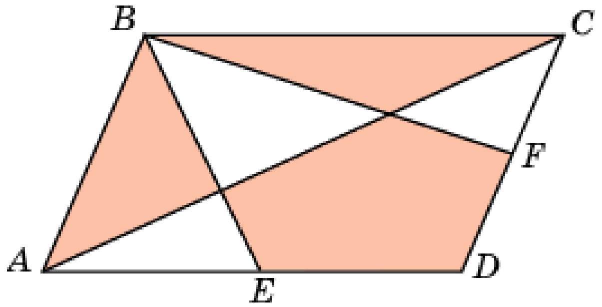


Рис. 63

Дано:____________________
____
_________________________.
Доказать:________________
_________________________.

Решение. Проведём диагональ BD и обозначим точку её пересечения с AC через O. Тогда __________________________________
____
____.

61.15.

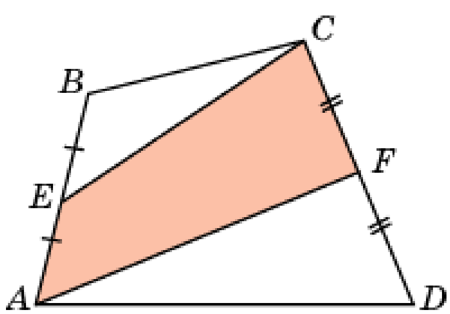


Рис. 64

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник;
$AE=EB$, $CF=FD$; $S_{ABCD}=Q$.
Найти: S_{AECF}.

Решение. Проведём диагональ AC, тогда площади треугольников ACE и BCE __________________, так как ___________________________.
Аналогично, площади треугольников ______________________________
____
____
____.

61.16. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ (рис. 65). Найдите площадь заштрихованного четырёхугольника, если E, F – середины противоположных сторон данного четырёхугольника, и его площадь равна Q.

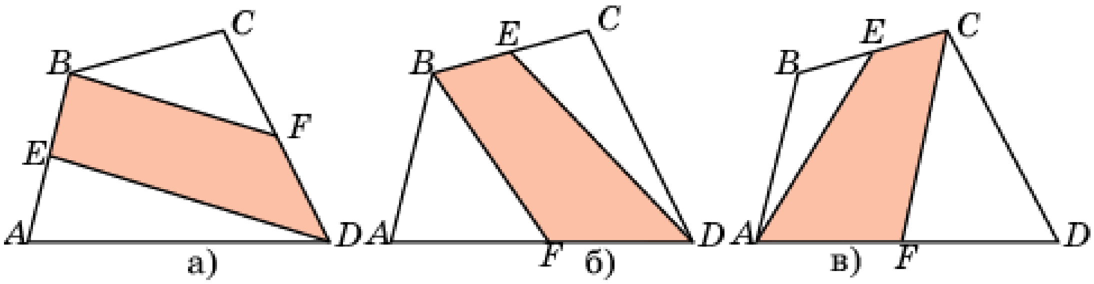


Рис. 65

Ответ. ____

____

____.

61.17. Разделите правильный шестиугольник (рис. 66) на две равновеликие части прямой, проходящей через точку M, взятую: а) внутри него; б) на его стороне.

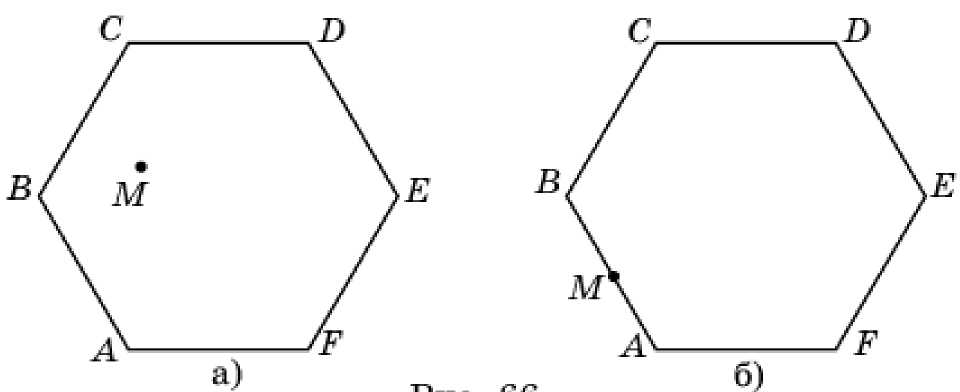


Рис. 66

Построение. Любая прямая, проходящая через центр симметрии фигуры, делит её на ____

____

____.

61.18. Найдите площадь правильного n-угольника со стороной a.

Дано: ____.

Найти: ____.

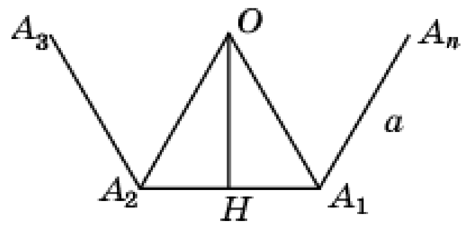


Рис. 67

Решение. Пусть дан правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$ (рис. 67), где O – центр окружности, описанной около него. Проведём $OH \perp A_1A_2$.

____

____

____

____.

61.19. Из вершины C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 68) проведите прямую, которая разделит его на две равновеликие части.

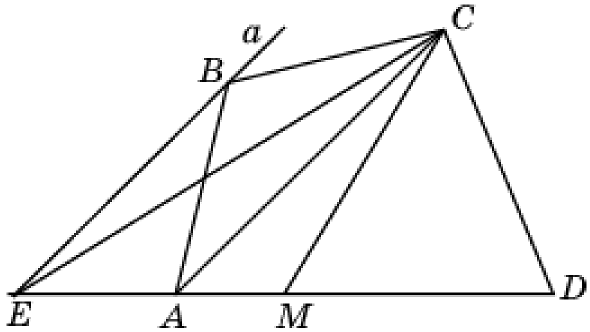


Рис. 68

Построение. Проведём диагональ AC и через точку B проведём прямую $a||AC$, E – точка ____.
Соединим точки E и C, тогда S_{ABC}=______, так как _________________.
S_{ECD}= S_{ECA}+ _______, S_{ABCD}= S_{ABC}+_______, значит, _______=______, т.е. треугольник ____ и четырёхугольник _____ равновелики.
Находим точку M – середину ED, CM – искомая прямая, так как
____.

61.20. Из вершины C пятиугольника $ABCDE$ (рис. 69) проведите прямую, которая разделит его на две равновеликие части.

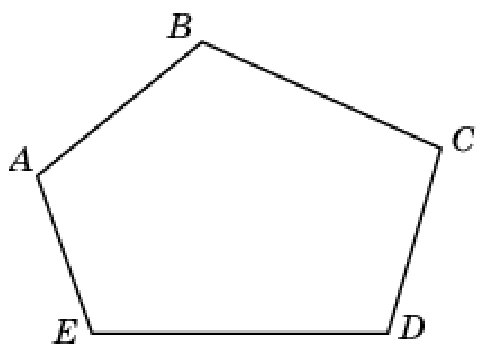


Рис. 69

Построение. ____
____
____
____
____
____.

62. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

62.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площади круга.

Формулировка.____

____

____.

Дано: ____.

Доказать: ____.

Доказательство.____

____

____

____.

62.2. Запишите формулу для вычисления площади круга (S), если его: а) радиус равен R; б) диаметр равен D.

Ответ. а) ____;

б) ____.

62.3. Закончите предложения.

1) Круговым сектором, или просто сектором, называется _______

____.

2) Круговым сегментом, или просто сегментом, называется _____

____.

3) Кольцом называется ______________________________________

____

____.

62.4. Запишите формулу для нахождения площади сектора (рис. 70).

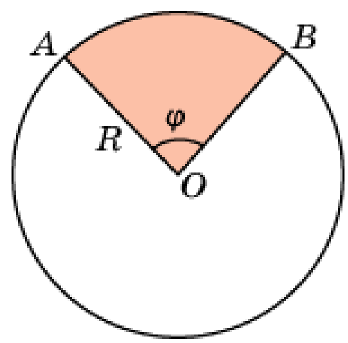


Рис. 70

Ответ. ____.

62.5. Запишите формулу для нахождения площади сегмента (рис. 71).

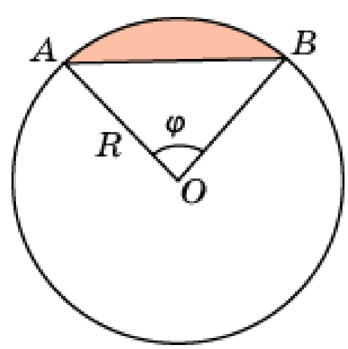


Рис. 71

Ответ. ____.

62.6. Запишите формулу для нахождения площади скольца (рис. 72).

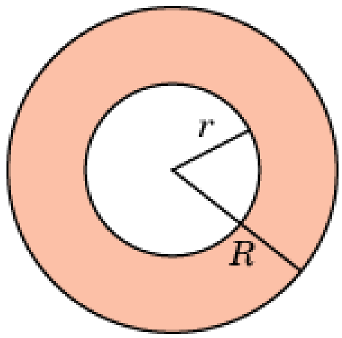


Рис. 72

Ответ. ______________________________

___________________________________.

62.7. Заполните таблицу.

Радиус круга	0,1 дм			
Диаметр круга		5 см		
Длина окружности круга			144π мм	
Площадь круга				25π м^2

62.8. Найдите площадь круга, вписанного в единичный равносторонний треугольник.

Решение.____

____

____

____.

62.9. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника с катетами 8 см и 6 см.

Решение.____

____

____

____

____.

62.10. Найдите площади фигур, изображённых на рисунке 73, если площадь одной клетки равна 1 кв. ед.

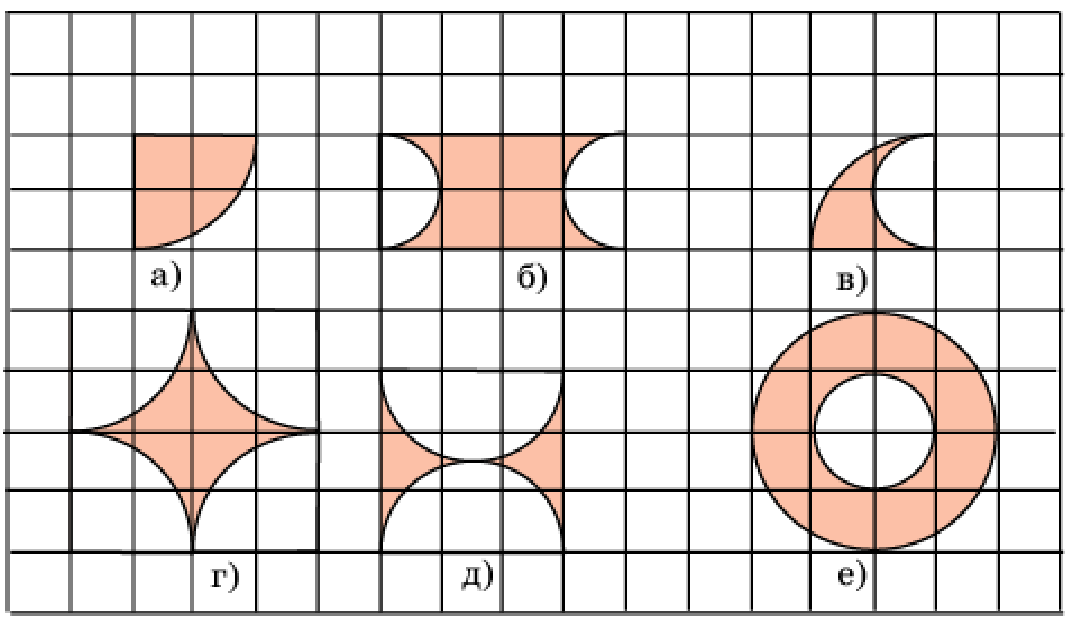


Рис. 73

Ответ. а)____;

б)____;

в)____;

г)____;

д)____;

е) ____.

62.11. Найдите отношение радиусов кругов, у которых: а) длины окружностей равны C и c; б) площади равны Q и q.

Ответ. а)____;

б)____.

62.12. Сформулируйте и решите задачу по рисунку 74.

Формулировка. ____________________________________

____

____

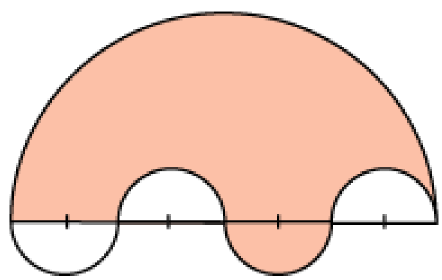


Рис. 74

Дано:____.

Найти:____.

Решение. ____

____

____

____.

62.13. Постройте круг, площадь которого равна площади данного полукруга (рис. 75).

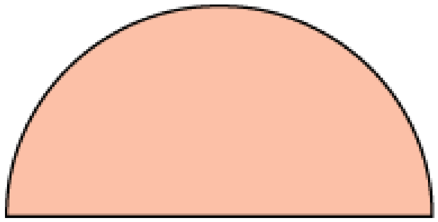


Рис. 75

Построение.____

____

____

____.

62.14. Постройте круг, площадь которого равна: а) сумме; б) разности площадей двух данных кругов (рис. 76).

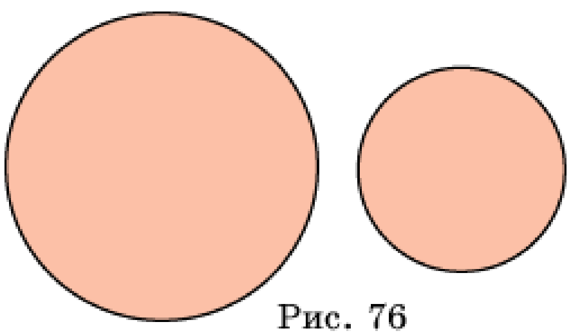


Рис. 76

Построение. Назовём радиусы данных кругов R и r, тогда площадь искомого круга равна: а)___________; б)____________, значит, его радиус равен: а)_______; б)_______. Его можно построить как: а) гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами ____;

б)____

____.

62.15. Разделите данный круг (рис. 77) соответствующей концентрической окружностью на две равновеликие части.

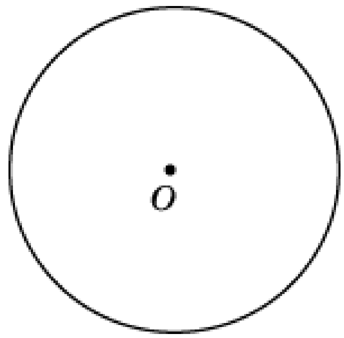


Рис. 77

Построение. Обозначим R и x – радиусы соответственно данного и искомого кругов, тогда πx^2=____________, значит, x=___________. Таким образом, чтобы найти x, нужно___________________________

____.

62.16. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если дан единичный круг (рис. 78).

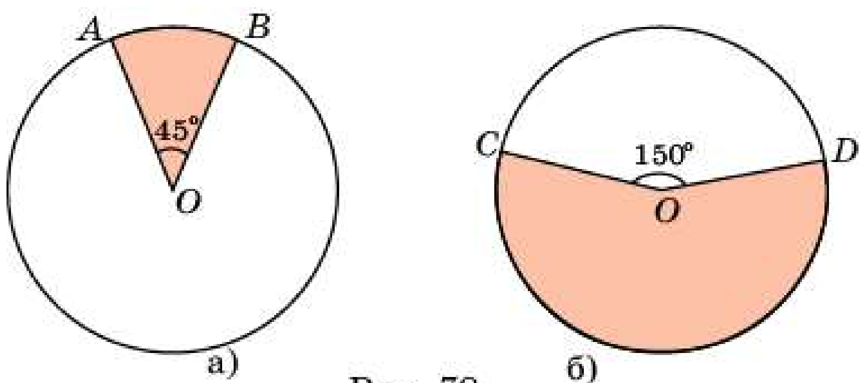


Рис. 78

Ответ. а)____

____;

б)____

____.

62.17. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если дан единичный круг (рис. 79).

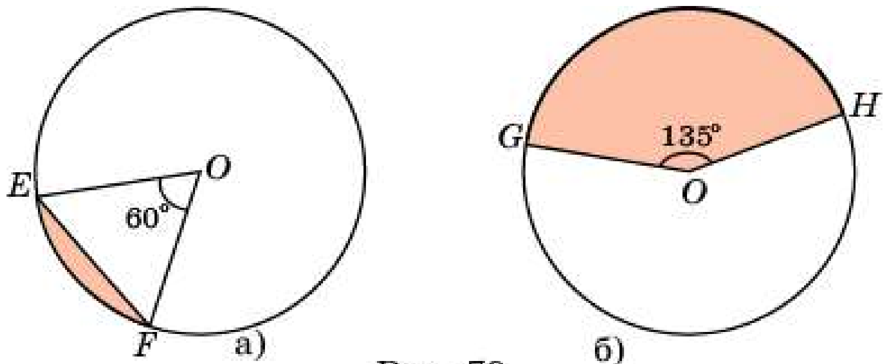


Рис. 79

Ответ. а)____

____;

б)____

____.

62.18. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если даны единичные круги (рис.80).

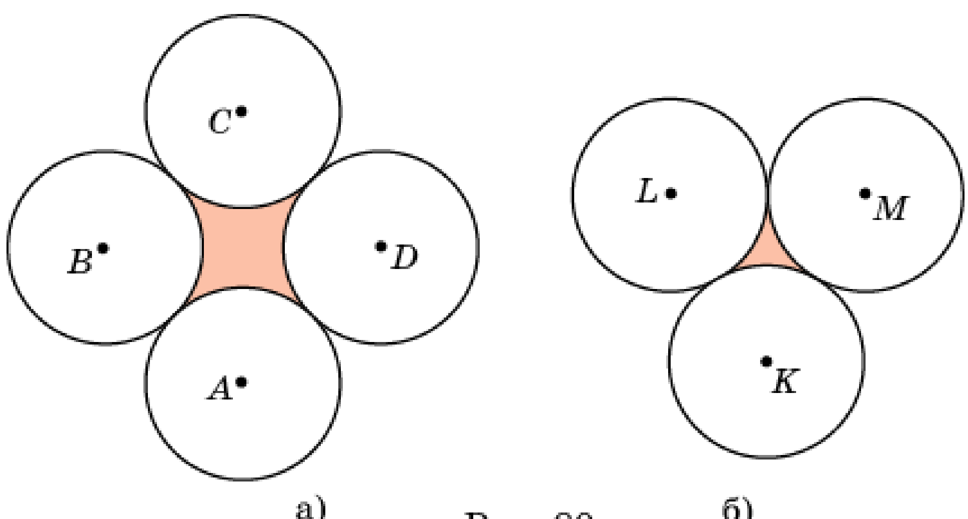


Рис. 80

Ответ. а) Четырёхугольник *ABCD* является ____________________,

____

____;

б) треугольник *KLM* является _________________________, ____________

____

____.

62.19. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 81, если площадь одной клетки равна 1 кв. ед.

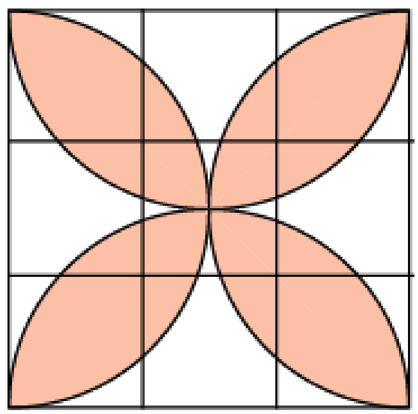


Рис. 81

Ответ. ____

____.

63. ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ФИГУР

63.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о площадях подобных фигур.

Формулировка. ____

____

____.

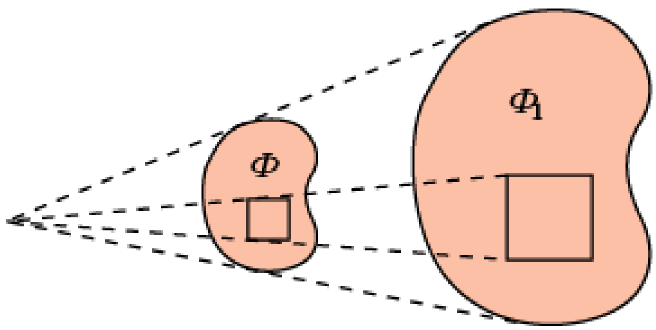


Рис. 82

Дано:____________________

________________________.

____

________________________.

Доказать.________________

________________________.

Доказательство.____

____

____

____

____.

63.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, следствие из теоремы о площадях подобных фигур.

Формулировка. ____

____

____.

Дано:____.

Доказать:____.

Доказательство.____

____.

63.3. Заполните пропуски.

Отношение сторон двух многоугольников равно 1:2, тогда отношение их: а) периметров равно ______________________________; б) площадей равно ____.

63.4. Все стороны многоугольника увеличились в 3 раза, тогда его: а) периметр ____; б) площадь ____.

63.5. Все стороны многоугольника уменьшились в 4 раза, тогда его: а) периметр ____; б) площадь ____.

63.6. Отношение периметров двух подобных многоугольников равно 9:8, тогда отношение их площадей равно ____.

63.7. Отношение площадей двух подобных многоугольников равно 16:75, тогда отношение их периметров равно _________________ ____.

63.8. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от данного треугольника его средней линией, если площадь данного треугольника равна 36 см^2.

Ответ. ____

____

____.

63.9. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 3:4. Найдите отношение площадей треугольников, на которые данный треугольник делится высотой, проведённой из вершины прямого угла (рис. 83).

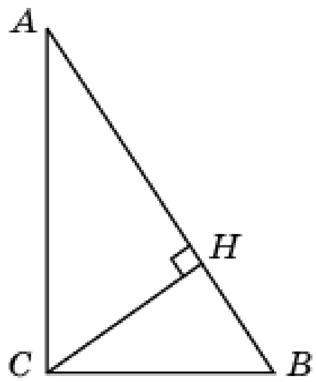


Рис. 83

Дано: ____________________________

____

Найти: __________________________.

Решение. _________________________

____

____

____.

63.10. Постройте четырёхугольник, площадь которого была бы в 4 раза меньше площади данного четырёхугольника (рис. 84).

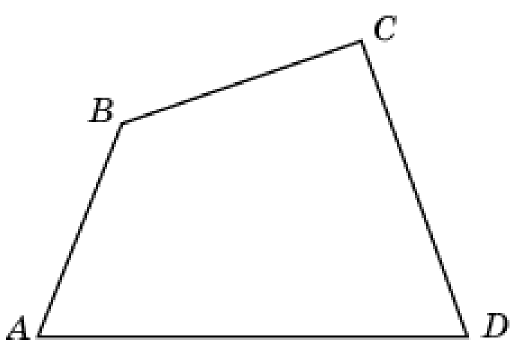


Рис. 84

Построение. ____

____

____.

63.11. Найдите площадь треугольника KAL (рис. 85), если $AK:KB=1:2$, $AL:LC=1:2$ и $S_{ABC}=Q$.

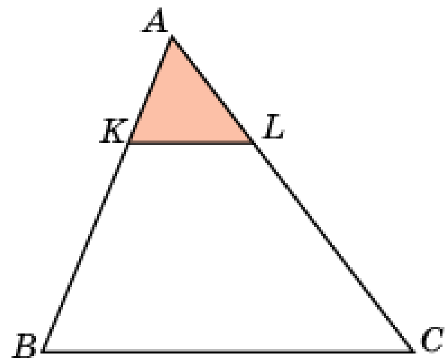


Рис. 85

Ответ. ____

____

____

____.

63.12. Найдите площадь шестиугольника $KLMNOP$ (рис. 86), если стороны данного треугольника ABC разделены каждая на три равные части и площадь треугольника ABC равна Q.

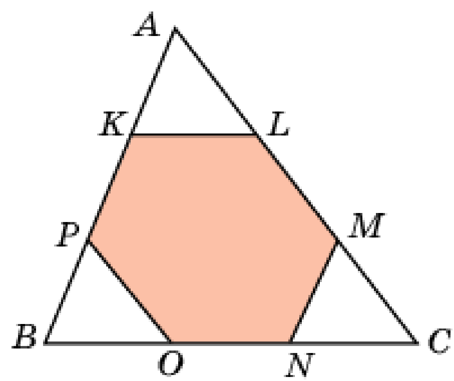


Рис. 86

Ответ. ____

____

____

____.

63.13. Постройте треугольник, подобный данному треугольнику *ABC* (рис. 87), площадь которого была бы в 2 раза больше площади данного треугольника.

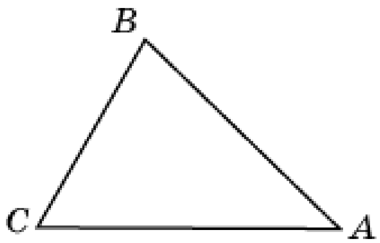


Рис. 87

Построение. Из условия задачи следует, что площади данного и искомого треугольников относятся как ____________________________, значит, их сходственные стороны относятся как ____________________.

____

____.

63.14. Из точки *M* проведены к окружности касательная *MH* и секущая *MA* (рис. 88), отношение их внешних частей известно, а именно, $MH{:}MB=m{:}n$. Найдите подобные треугольники и определите отношение их площадей.

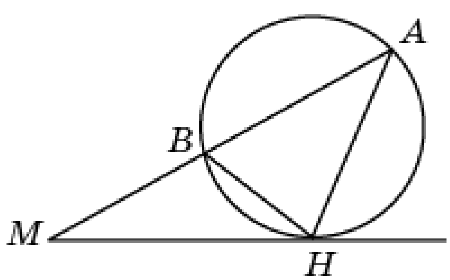


Рис. 88

Решение. ____

____

____

____.

63.15. Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC (рис. 89) с центром в точке A, чтобы его площадь была в 4 раза: а) больше; б) меньше площади данного треугольника.

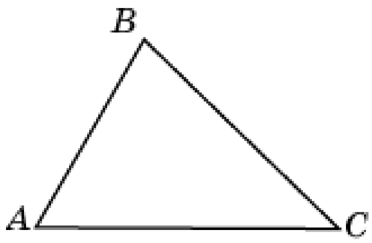


Рис. 89

Построение. ____

____

____

____

____

____.

63.16. Найдите отношение площадей треугольников, построенных в предыдущей задаче 63.15.

Ответ. ____

____

____

____.

63.17. Дано: Выпуклый четырёхугольник $ABCD$;

$AK=KB$, $BL=LC$, $CM=MD$,

$AN=ND$; $S_{ABCD}=Q$.

Найти: $S_{LMN}:S_{ABCD}$.

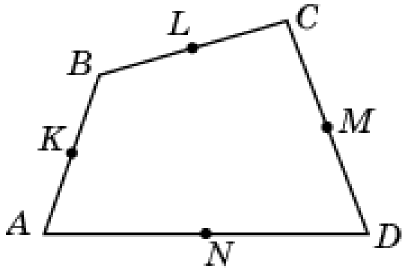


Рис. 90

Решение.__________________________

____

____.

63.18. Даны два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 91). Постройте подобный им треугольник, площадь которого равна сумме площадей данных треугольников.

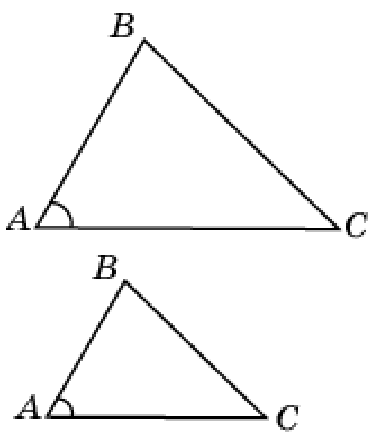


Рис. 91

Построение. Назовём площади данных треугольников соответственног Q и q, тогда сходственные стороны $AB:A_1B_1=$_______. Площадь искомого треугольника равна ______. Значит, его сторона, сходственная с выбранными сторонами AB и A_1B_1 равна ___________, т.е. гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами ______________________. Отсюда построение: ____________________

____

____.

64*. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

64.1. Закончите предложения.

1) Задачей Дидоны называют задачу о ________________________

____.

2) Задачу Дидоны называют также ___________________________

____.

3) Фигуры называются изопериметрическими, если ____________

____.

4) Фигуру будем называть максимальной, если ________________

____.

64.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 1 о максимальной фигуре.

Формулировка. ____

____.

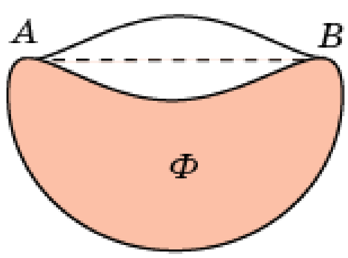


Рис. 92

Дано: Фигура *Ф* - ______________

Доказать.______________________

________________________________.

Доказательство.____

____

____

____

____

____.

64.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 2 о хорде, делящей кривую, ограничивающую максимальную фигуру.

Формулировка. ____

____

____.

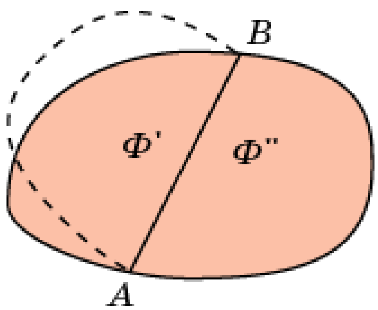


Рис. 93

Дано: Фигура $Ф$ - ______________

_________________________________.

Доказать.______________________

_________________________________.

Доказательство.____________________

____

____

____

____

____.

64.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 3 о максимальной фигуре.

Формулировка. ____

____.

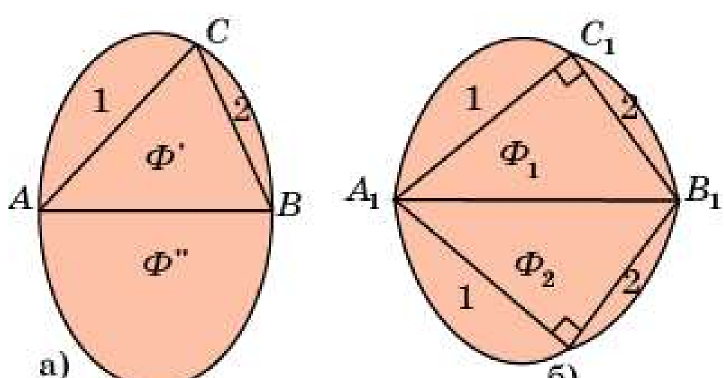


Рис. 94

Дано: Фигура Φ - ____________________

____________________.

Доказать. ____________________

____________________.

Доказательство. ____________________

____________________.

64.5. Сформулируйте общую теорему о замкнутых кривых данной длины.

Формулировка. ____________________

____________________.

64.6. Найдите: а) наибольший; б) наименьший угол треугольника ABC, если $BC<AB<AC$.

Ответ. а) ____________________;

б) ____________________.

64.7. Найдите: а) наибольший; б) наименьший угол треугольника ABC, если $\angle A < \angle C$, а $\angle B$ – тупой.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________.

64.8. На рисунке 95 $a||b$. Докажите, что $AB+AC>DB+DC$.

Дано: ______________________________

____

______________________________.

Доказать: ______________________________.

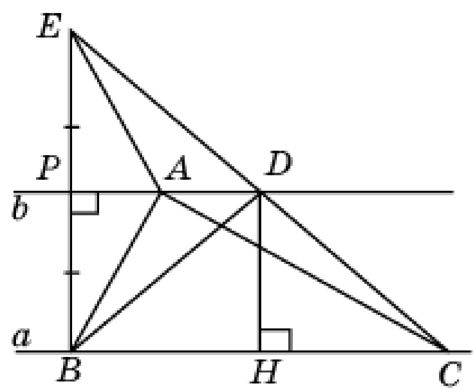


Рис. 95

____

____

____

____

____

____

____

____

______________________________.

64.9. Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

Дано: ____

____

____.

Доказать: ____.

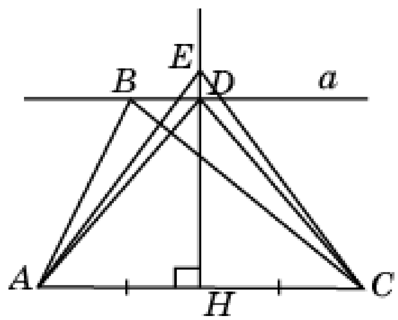


Рис. 96

Решение. Допустим в треугольнике ABC (рис. 96), $AB\neq BC$. Проведём через вершину B прямую $a||AC$ и через H - середину стороны AC, восстановим к ней перпендикуляр, который пересечёт прямую a в точке D. Тогда S_{ABC}=__________________________________ и $AB+BC>AD+DC$, так как ______________________________________, но на HD можно взять точку E, такую что $AB+BC=AE+EC$, однако $S_{ABC}<$________________________, так как _____________________________, значит, треугольник ABC не будет минимальным. Аналогично можно показать, что и другие стороны ____________________________________

____

____

____

____.

64.10. Закончите предложение.

Из всех треугольников, имеющих по две равные стороны, наибольшую площадь будет иметь тот, у которого________________

____

____.

64.11. Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные стороны, т.е. быть равносторонним.

Дано: ____.

Доказать: ____.

Решение. Прежде всего, максимальный n-угольник является ____(теорема 1). Докажем, что n-угольник, в котором имеются неравные стороны, не будет максимальным. Допустим, что в n-угольнике имеются неравные стороны $AB \neq BC$ (рис. 96), тогда ________________________________

____

____.

64.12. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь будет иметь квадрат.

Дано: Четырёхугольник $ABCD$ - _____________________________

____.

Доказать: ____

____.

Решение. Из решения задачи 64.11 следует, что у четырёхугольника $ABCD$ _______________________________________

____,

но он не может быть ромбом, так как ____________________________

____,

следовательно, ____

____

____

____.

64.13. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь будет иметь правильный треугольник.

Дано: Треугольник ABC - ____________________________________

____.

Доказать: ____

____.

Решение. ____

____

____

____

____

____

____.

64.14. Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные углы, т.е. быть равноугольным.

Дано:____

____.

Доказать:____

____.

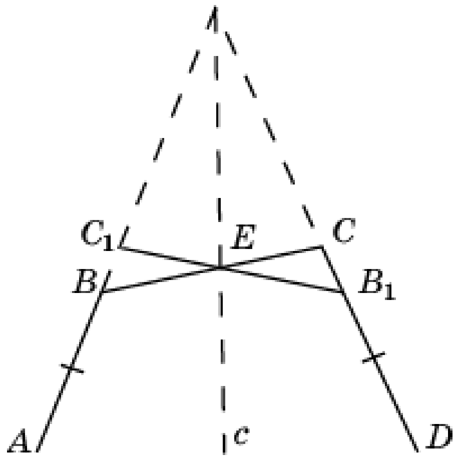


Рис. 97

Решение. Прежде всего, докажем, что n-угольник, в котором имеются неравные углы, не может быть максимальным. Пусть в многоугольнике $\angle B \neq \angle C$ (рис. 97). Можно предположить, что в данном многоугольнике равны стороны, так как в противном случае по доказанному выше ____.

Продолжим стороны AB и CD. Если они пересекутся, то проведём биссектрису c образовавшегося при этом угла. Если они параллельны, то проведём прямую c, параллельную этим прямым и проходящую через середину BC. Пусть E – точка пересечения прямой c с отрезком BC. Рассмотрим точки B_1 и C_1, симметричные точкам соответственно B и C относительно прямой c. Треугольники BEC_1 и B_1EC __________, так как ____. Многоугольник, полученный из данного многоугольника заменой вершин B и C на вершины соответственно B_1 и C_1, будет иметь тот же периметр и ту же площадь. Значит, он также является ________________________. Однако он имеет неравные стороны AC_1 B_1D и, согасно теореме ____, не может быть ______________________. Полученное противоречие показывает, что ____.

64.15. Объедините результаты задач 64.11 и 64.14 и сформулируйте соответствующий результат.

Формулировка. ____

____

____

____.

64.16. Докажите, что из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Дано: ____.

Доказать: ____.

Решение. ____

____

____.

64.17. Докажите, что наименьший периметр среди всех треугольников с данной площадью и данной одной стороной имеет равнобедренный треугольник, основанием которого является данная сторона.

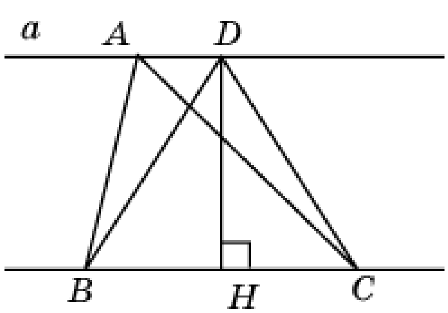


Рис. 98

Дано: ______________________________

______________________________________.

Доказать: __________________________

______________________________________.

Решение. Пусть BC – данная сторона (рис. 98), тогда третьи вершины, например A, треугольников будут принадлежать прямой

____,

так как ____,
назовём эту прямую a. Найдём точку H – середину стороны BC, восстановим в ней к прямой BC перпендикуляр, который пересечёт прямую a в точке D. Тогда ________________________________
____
____
____.

64.18. Докажите, что среди всех равновеликих треугольников, имеющих данную сторону, равнобедренный треугольник имеет наибольший угол, противолежащий этой стороне, причём она является основанием равнобедренного треугольника.

Дано: ____
____.

Доказать: ____
____.

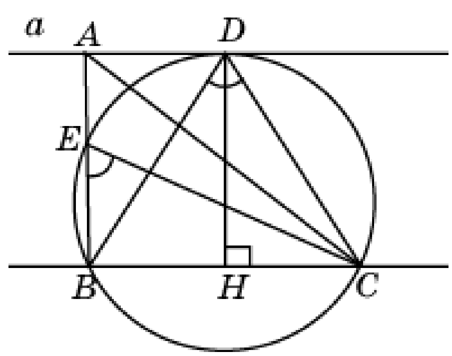


Рис. 99

Решение. Пусть BC – данная сторона (рис. 99), тогда третьи вершины, например A, треугольников будут принадлежать прямой
____,

так как ____,

назовём эту прямую a. Проведём окружность, проходящую через точки B, C и касающуюся прямой a, её центр O находится на

____,

____.

Точку её пересечения с AB назовём E, тогда $\angle BEC$=________________,

так как они ____, но

$\angle BEC$>____________________, так как _________________________

____.

Следовательно, ____

____.

64.19. Нарисуйте несколько пар фигур, имеющих равные периметры, но неравные стороны.

65*. РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ И ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

65.1. Закончите предложения.

1) Две фигуры называются равновеликими, если ______________

____.

2) Две фигуры называются равносоставленными, если _________

____.

3) Из равносоставленности фигур следует их _________________

____.

65.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 1 о двух фигурах, равносоставленных с одной и той же фигурой.

Формулировка. ____

____.

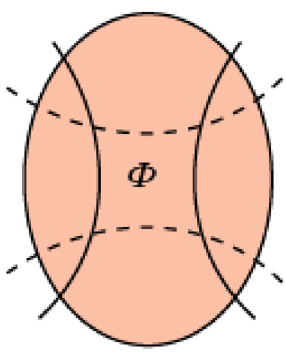


Рис. 100

Дано: ___________________________

________________________________.

Доказать: _______________________

________________________________.

Доказательство. _________________________

____

____

____

____

____

____.

65.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 2 о двух равновеликих параллелограммах.

Формулировка. ____
____.

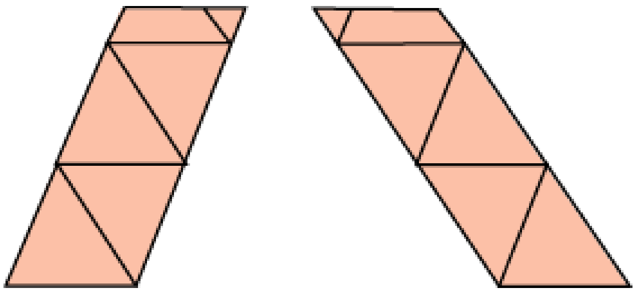


Рис. 101

Дано: ______________________
____
____________________________.

Доказать: __________________
____
____________________________.

Доказательство. ____
____
____
____
____
____
____.

65.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 3 о двух равновеликих треугольниках.

Формулировка. ____
____.

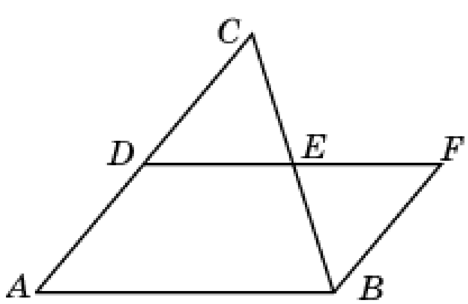


Рис. 102

Дано: ______________________________
____________________________________.

Доказать: ___________________________
____________________________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____.

65.5. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему 4 о многоугольнике, равносоставленном с некоторым треугольником.

Формулировка. ____

____.

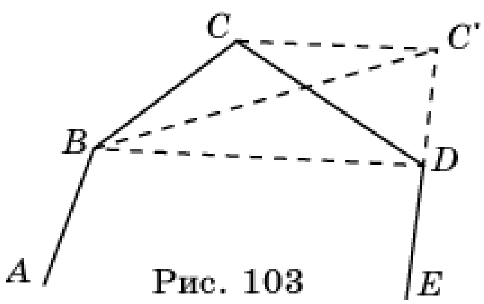


Рис. 103

Дано: ________________________________

________________________________.

Доказать: ____________________________

________________________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____.

65.6. Сформулируйте теорему, которая является результатом применения рассмотренных выше теорем 1-4.

Формулировка. ____

____.

65.7. Разрежьте фигуры, изображённые на рисунке 104, на 4 равные части.

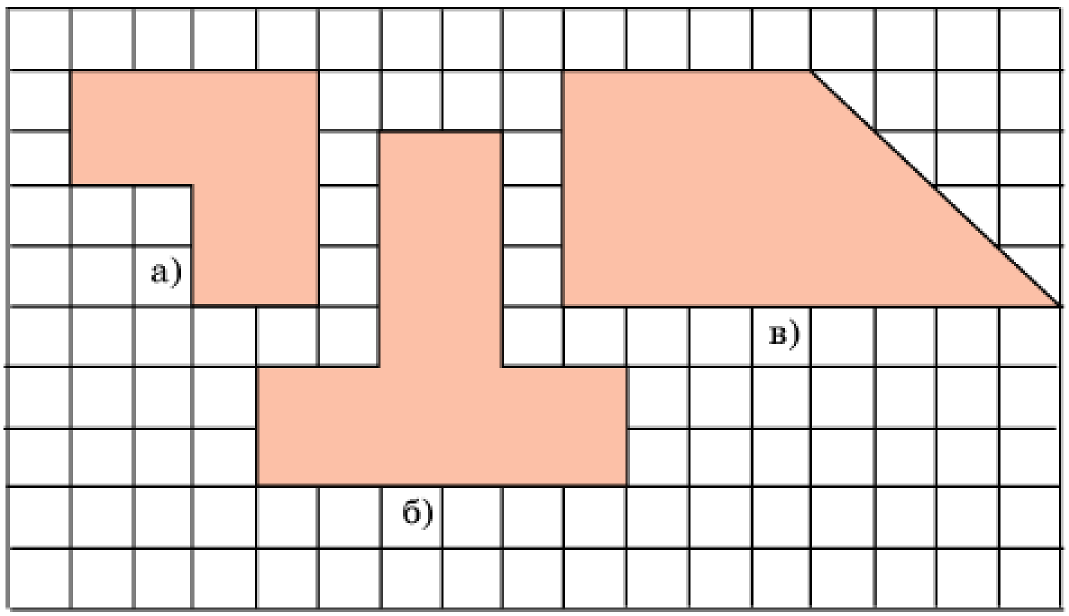


Рис. 104

65.8. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 105, на 2 части и сложите из них квадрат с вырезанной в нём дырой.

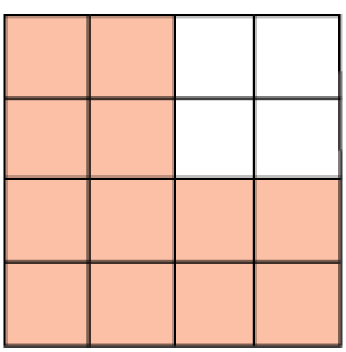


Рис. 105

65.9. Как перекроить греческий крест (рис. 106) в квадрат, сделав любое число разрезов?

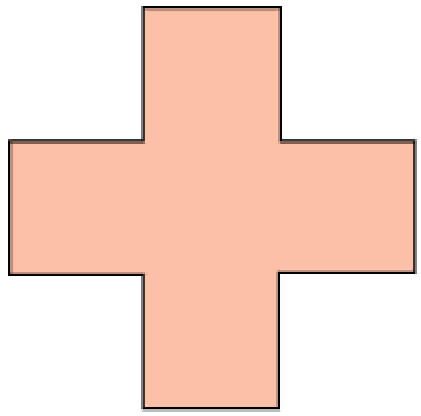


Рис. 106

65.10. Как перекроить греческий крест (рис. 107) в квадрат, сделав два разреза разреза?

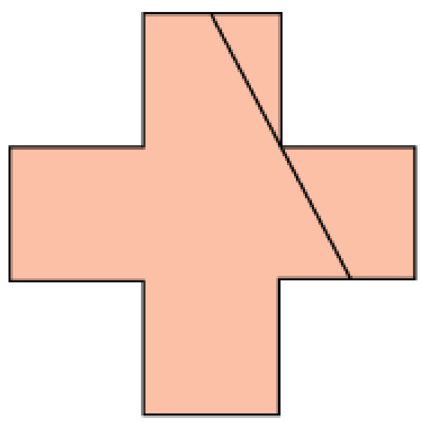


Рис. 107

Решение. На рисунке 107 сделан один разрез. ___________________

____

____

____.

65.11. С помощью рисунка 108 объясните, как квадрат ($ABCD$) перекроили в греческий крест.

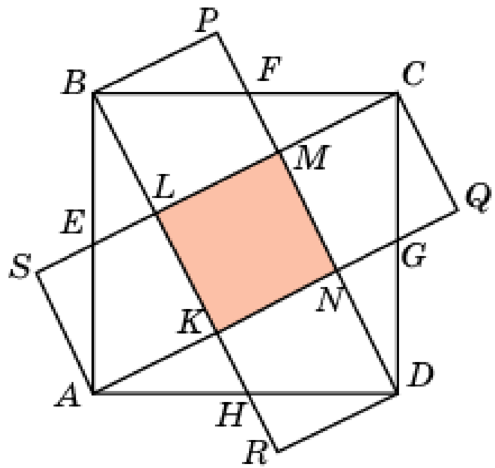


Рис. 108

Ответ. ____

____

____

____

____.

65.12. Разрежьте прямоугольник со сторонами 4 и 9 (рис. 109) на две равные части и сложите из них квадрат.

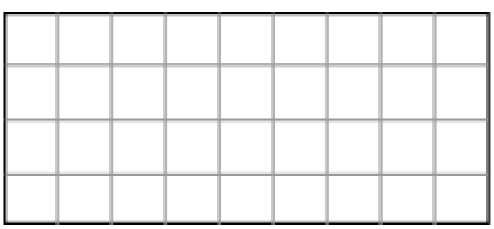


Рис. 109

Ответ. ____

____

____

____.

65.13. Разрежьте шестиугольник, изображённый на рисунке 110, на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

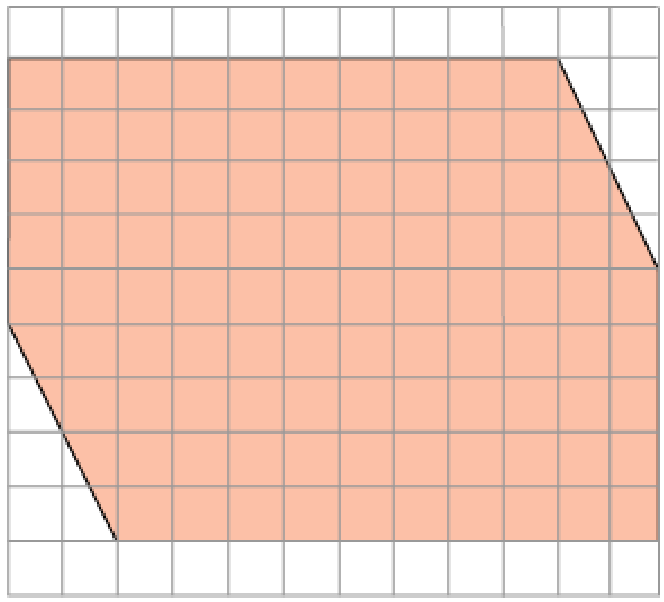


Рис. 110

Ответ. ____

____

____.

65.14. Разрежьте квадрат (рис. 111) на четыре равных четырёхугольника, отличных от квадратов и прямоугольников.

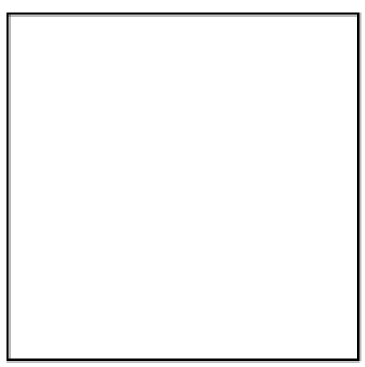


Рис. 111

Ответ. ____

____

____.

65.15. Даны два неравных квадрата (рис. 112) со сторонами a и b, причём $a>b$. Разрежьте больший квадрат на четыре равные части и из образовавшихся пяти частей сложите новый квадрат.

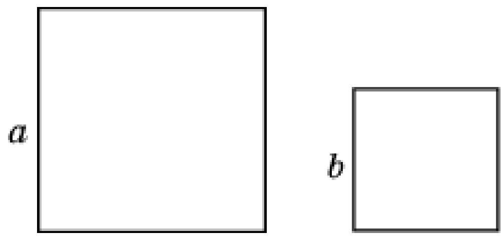


Рис. 112

Ответ. ____

____

____

____

____.

65.16. Как разрезать трапецию,изображённую на рисунке 113, на 3 части и сложить из них квадрат?

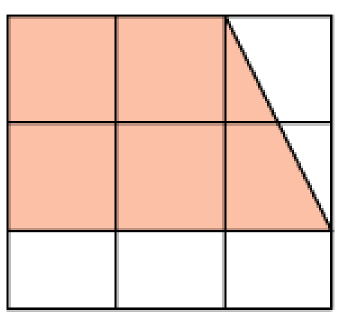


Рис. 113

Ответ. ____

____

____

____.

66. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

66.1. Закончите предложения.

1) Координатной прямой, или координатной осью, называется ____
____.

2) Начало координат обозначается ______________________
____.

3) Координатой точки на координатной прямой называется ____
____
____.

66.2. Изобразите координатную прямую и на ней точки $A(-1)$, $B(\frac{1}{2})$, $C(-1{,}5)$, $D(3)$.

66.3. Найдите координаты точек, изображённых на рисунке 114.

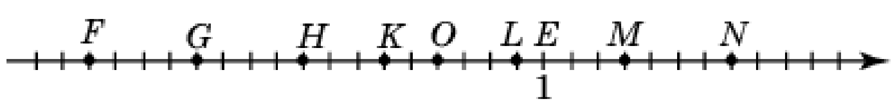


Рис. 114

Ответ. ______________________________________
____
____
____.

66.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о расстоянии между точками на координатной прямой.

Формулировка. ____

____

____.

Дано: $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$ – точки __________________________________

____.

Доказать: ____.

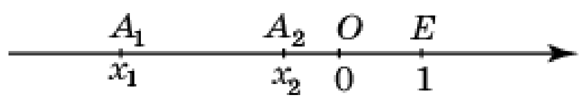


Рис. 115

Доказательство. Разберём различные случаи взаимного расположения данных точек на координатной прямой.

1) Пусть A_1 и A_2 расположены так, как показано на рисунке 115, тогда $x_1<x_2$ и A_1A_2=O A_1-________, значит, A_1A_2=____________________.

2) ____

____.

3) ____

____.

4) ____

____.

5) ____

____.

6) ____

____.

Окончательно получаем ______________________________.

66.5. Заполните пропуски.

1) Прямоугольной системой координат на плоскости называется

____

____.

2) Начало координат обозначается ______________________.
Координатные прямые обозначаются ______________________
и называются соответственно ______________________________.

3) Абсциссой точки называется _________________________

____.

4) Ординатой точки называется _________________________

____.

5) Координатами точки на плоскости называется ____________

____.

6) Прямоугольную систему координат называют также ________
____________________, потому что ______________________

____.

7) Метод координат – это метод, основанный на ______________

____

____.

66. 6. Изобразите прямоугольную систему координат и точки $A(1, -2)$, $B(0, 3)$, $C(2, 0)$, $D(-3, -1)$.

66.7. Найдите координаты точек, изображённых на рисунке 116.

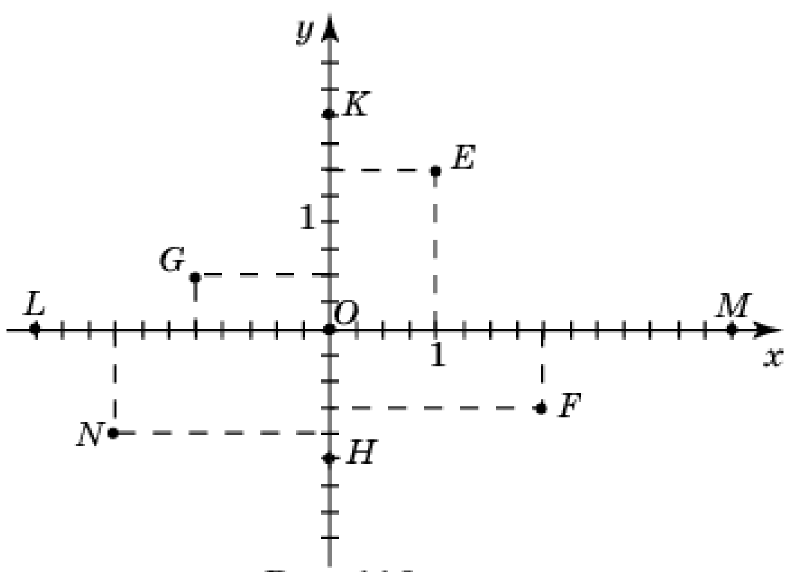


Рис. 116

Ответ. ____

____

____

____

____.

66.8. Изобразите ГМТ, для которых: а) абсцисса равна 2; б) ордината равна -3.

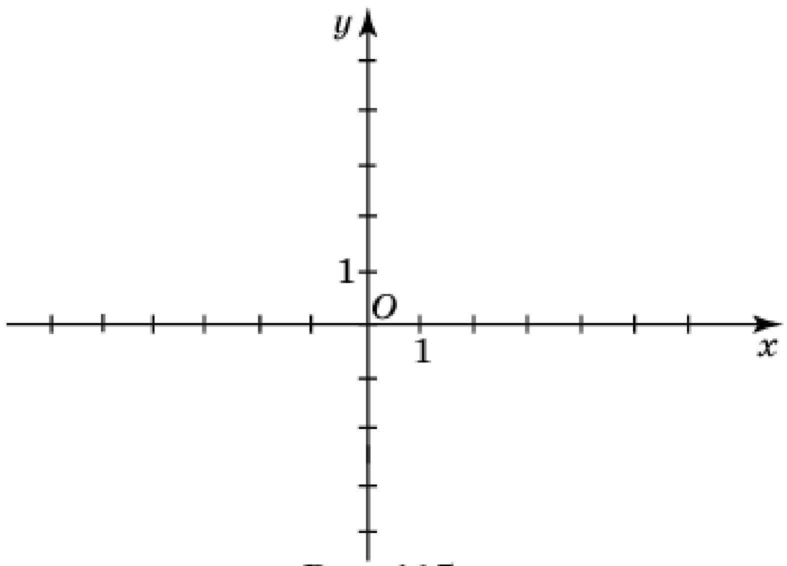


Рис. 117

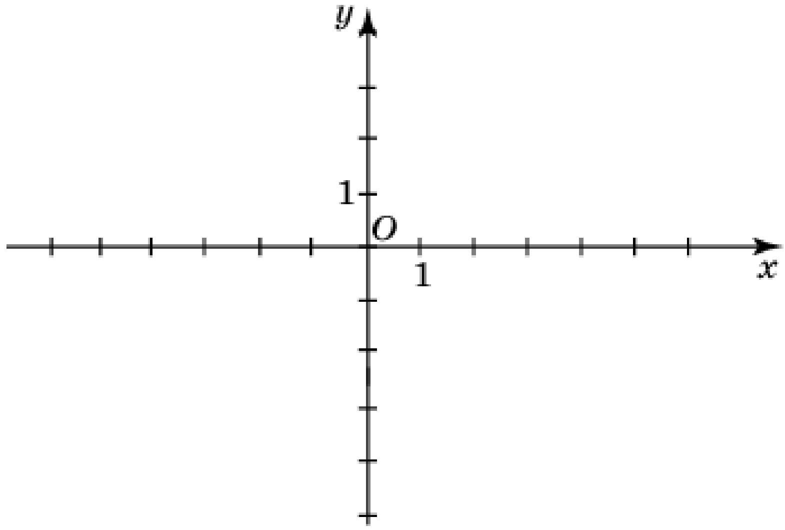
Ответ. а)____

____;

б)____

____.

66.9. Через точки $A(-4, 1)$ и $B(-1, -5)$ проведите прямые, параллельные оси абсцисс, и найдите координаты точек их пересечения с осью ординат. Сделайте вывод.



Ответ. ____

____

____.

66.10. Изобразите точки $C(\frac{1}{2}, -2)$ и $D(-2, 3)$, проведите через них прямые, параллельные оси ординт, и найдите координаты точек их пересечения с осью абсцисс. Сделайте вывод.

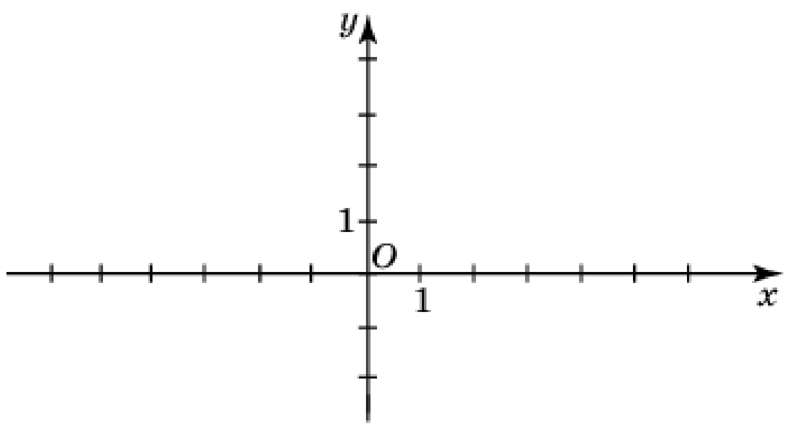


Рис. 119

Ответ. ____

____

____

____.

66.11. Изобразите точки $E(3, -4)$ и $F(-1, 2)$ и точки, им симметричные относительно оси абсцисс. Сделайте вывод.

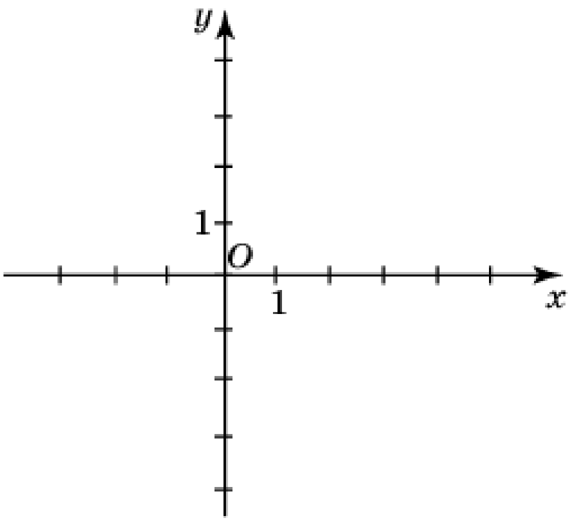


Рис. 120

Ответ. ____________________

____

____

____

____

____

____

________________________________.

66.12. Изобразите точки $G(-2, 1)$ и $H(5, -5)$ и точки, им симметричные относительно оси ординат. Сделайте вывод.

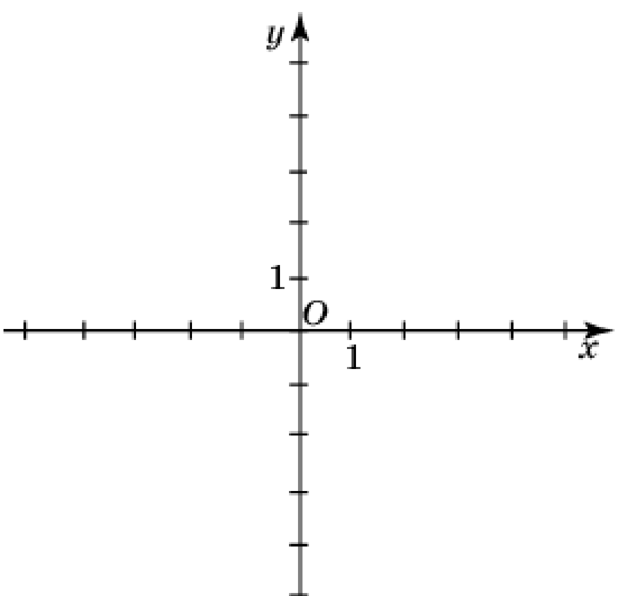


Рис. 121

Ответ. ____________________

____

____

____

____

____

____

________________________________.

66.13. Изобразите точки $K(4, 1)$ и $L(-2, 3)$ и точки, им симметричные относительно начала координат. Сделайте вывод.

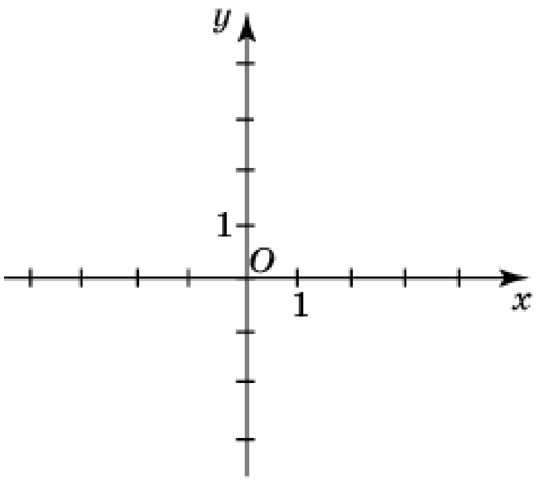


Рис. 122

Ответ. ______________________
____
____
____
____
____
____
______________________.

66.14. Изобразите точку $K(-2, 0)$ и точку, которая получена из неё поворотом вокруг начала координат на угол: а) $90°$; б) $-90°$. Найдите её координаты.

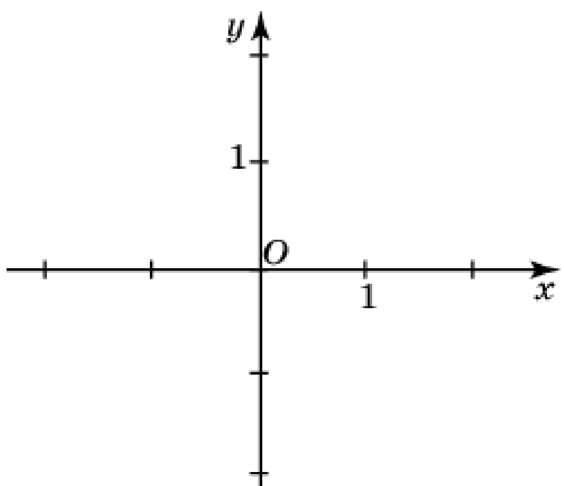


Рис. 123

Ответ. а) ______________________
______________________;
б) ______________________
______________________.

66.15. Изобразите точку $L(0, 1)$ и точку, которая получена из неё поворотом вокруг начала координат на угол: а) $45°$; б) $-45°$. Найдите её координаты.

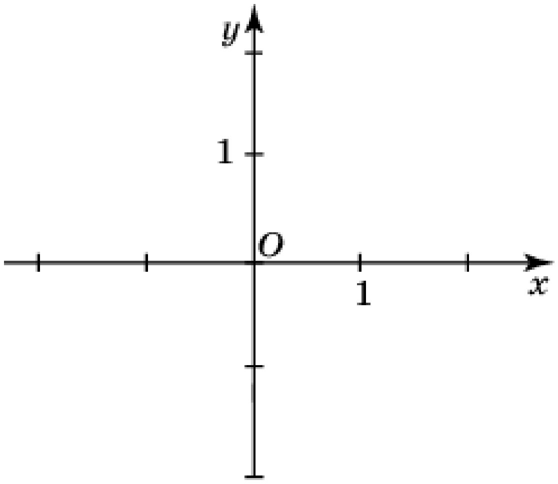


Рис. 124

Ответ. а) ______________________

____

____

____

________________________________;

б) ____________________________

____

________________________________.

66.16. Изобразите ГМТ, для которых: а) $|x|=1$; б) $|y|=2$; в) $x=y$; г) $x=-y$.

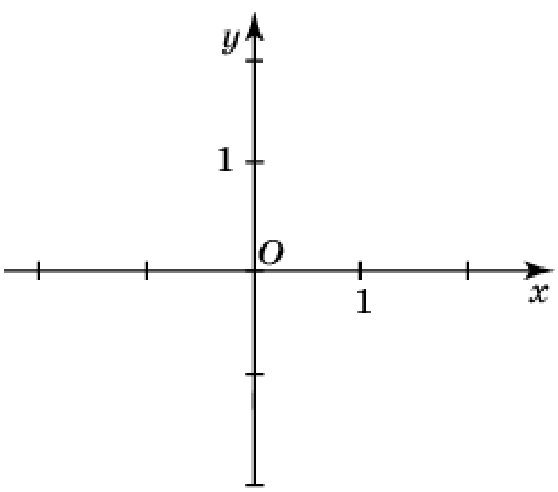


Рис. 125

Ответ. _________________________

____

____

____

____

____

____

____

____.

66.17. Изобразите отрезок MN и найдите координаты его середины, если $M(5, -2)$ и $N(-3, 1)$. Запишите общую формулу, выражающую координаты середины отрезка через координаты его концов.

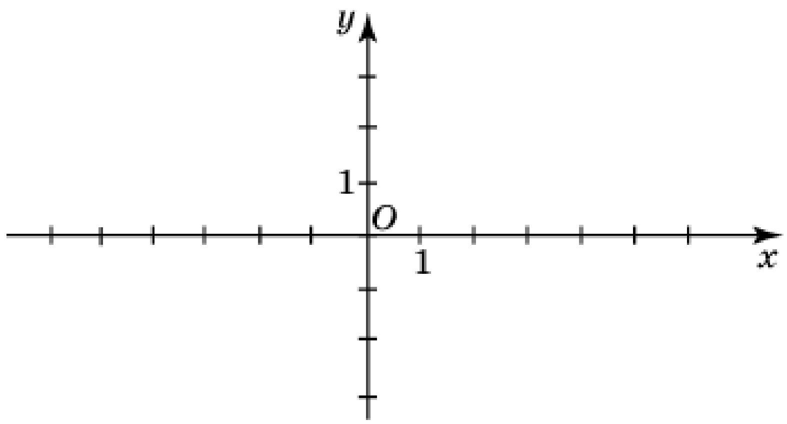


Рис. 126

Ответ. ____

____

____

____.

65.18. Найдите координаты середины отрезка EF, если:

а) $E(-1, 0)$, $F(-5, 6)$; б) $E(5, -2)$, $F(0, -7)$; в) $E(-7, -11)$, $F(2, 3)$; г) $(0{,}1, \frac{1}{2})$, $F(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

67. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

67.1. Запишите формулу расстояния между точками $A_1(x_1, y_1)$ и A_2 (x_2, y_2).

Ответ. ____.

67.2. Закончите предложения.

1) Окружностью называется ________________________________
____.

2) Кругом называется ____________________________________
____
____.

67.3. Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R.

Ответ. ____.

67.4. Запишите неравенство, определяющее круг с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R.

Ответ. ____.

67.5. Найдите длину отрезка DE, если: а) $D(1, -1)$, $E(0, 5)$; б) $D(0, -8)$, $E(-2, -3)$; в) $D(4, -5)$, $E(6, -2)$; г) $D(-1, -7)$, $E(5, -4)$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

67.6. Изобразите окружность, заданную уравнением $x^2+y^2=25$. Какие из точек $O(0, 0)$, $A(0, 5)$, $B(-5, 0)$, $C(-\frac{1}{2}, 5)$, $D(1,-2)$, $E(-3, 4)$ и $F(5, -2)$ будут принадлежать: а) этой окружности; б) кругу, который определяется этой окружностью?

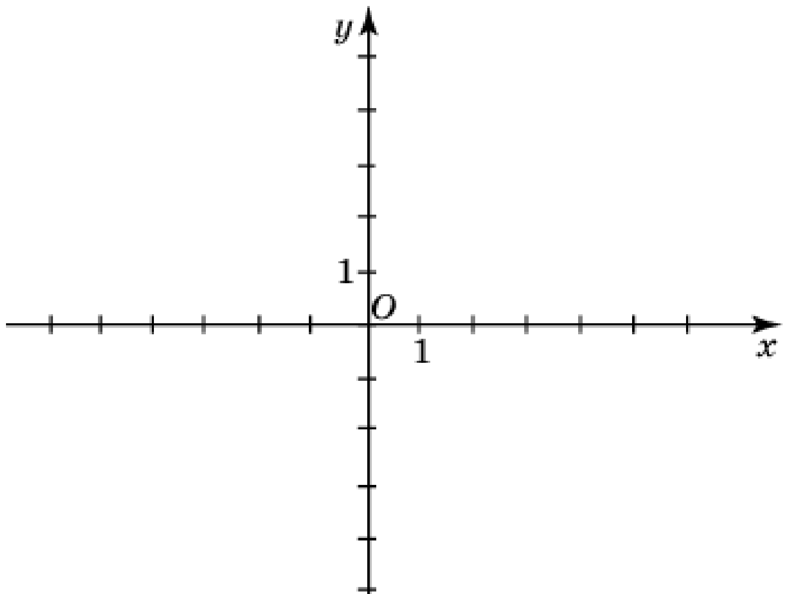


Рис. 127

Ответ. а) ____________________;

б) ____________________.

67.7. Изобразите треугольник KLM и найдите его периметр, где $K(0, 5)$, $L(-6, -\frac{1}{2})$, $M(4, 2,5)$.

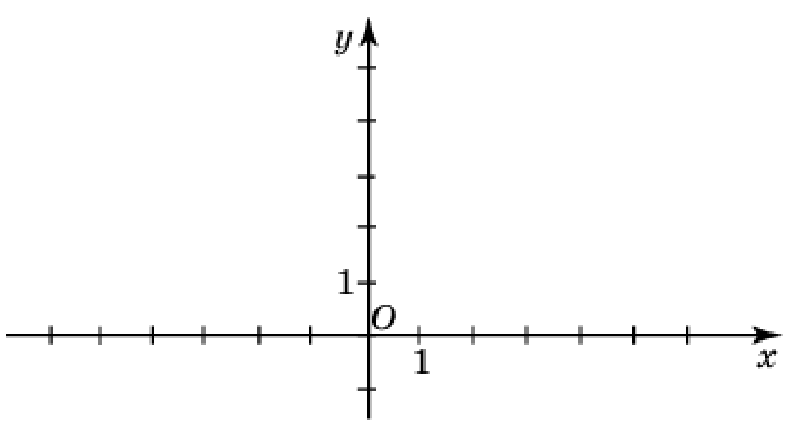


Рис. 128

Ответ. ____________________.

67.8. Изобразите окружность, заданную уравнением $x^2+y^2-2x-4y-4=0$. Найдите точки её пересечения с осями координат.

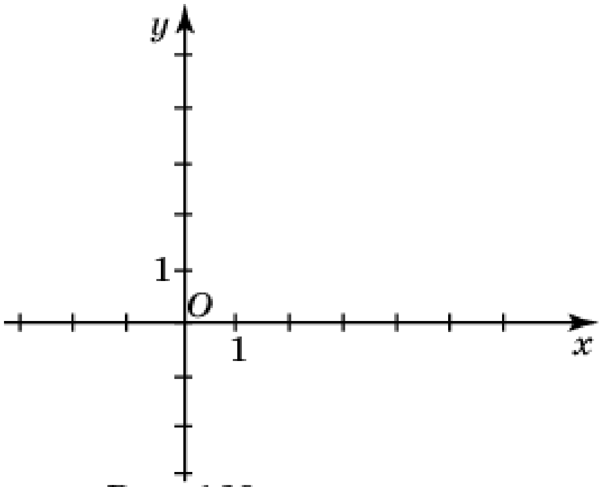


Рис. 129

Ответ. ______________________

____.

67.9. Изобразите окружность с центром в точке $C(-3, 5)$, касающуюся оси абсцисс. Запишите её уравнение.

Ответ. ______________

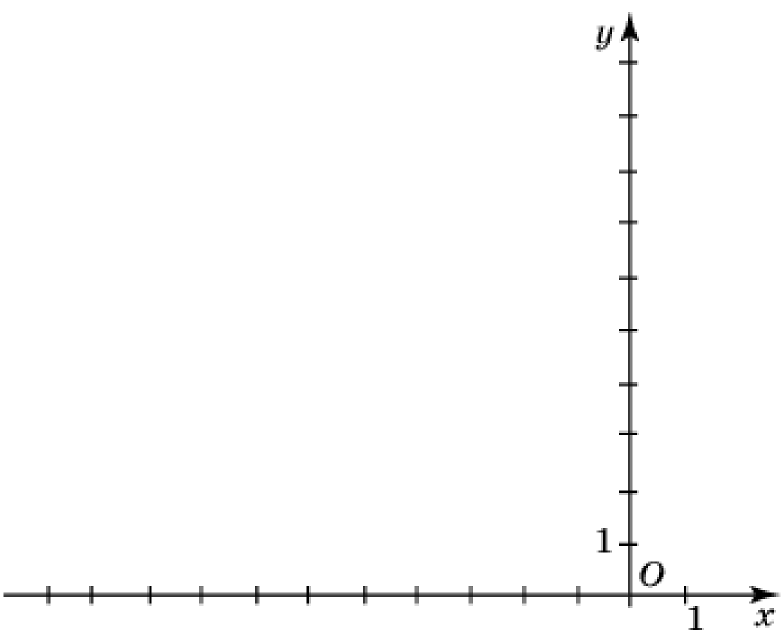


Рис. 130

____.

67.10. Изобразите окружность с центром в точке $C(7,\ -4)$, касающуюся оси ординат. Запишите её уравнение.

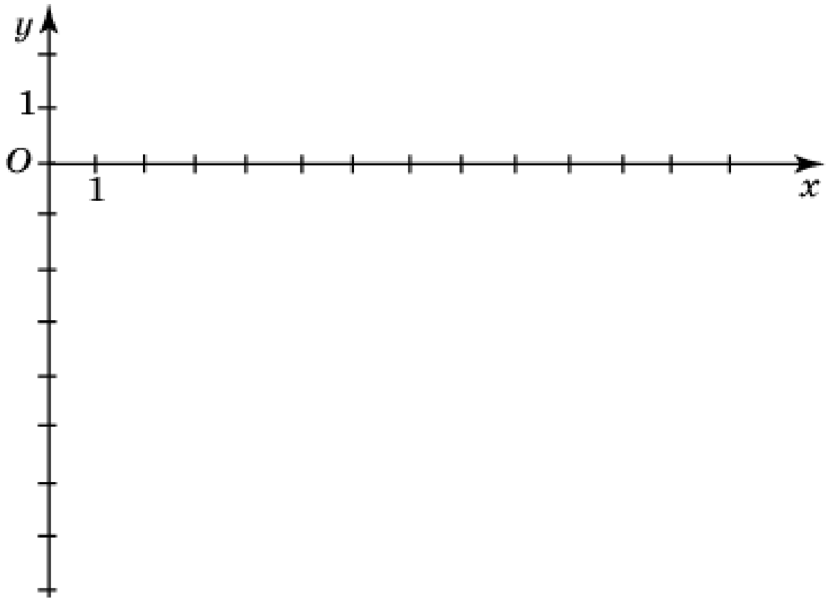


Рис. 131

Ответ. ___________

______________________________.

67.11. Изобразите точки $M(1,\ -1)$ и $N(-3,\ -6)$. Изобразите окружность, диаметром которой является отрезок MN. Запишите её уравнение.

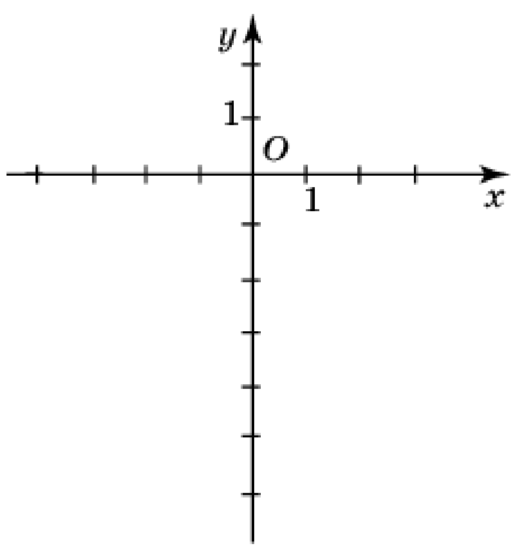


Рис. 132

Ответ. ______________________________.

67.12. Изобразите окружность с центром в точке $C(3, -4)$, проходящую через начало координат. Запишите её уравнение.

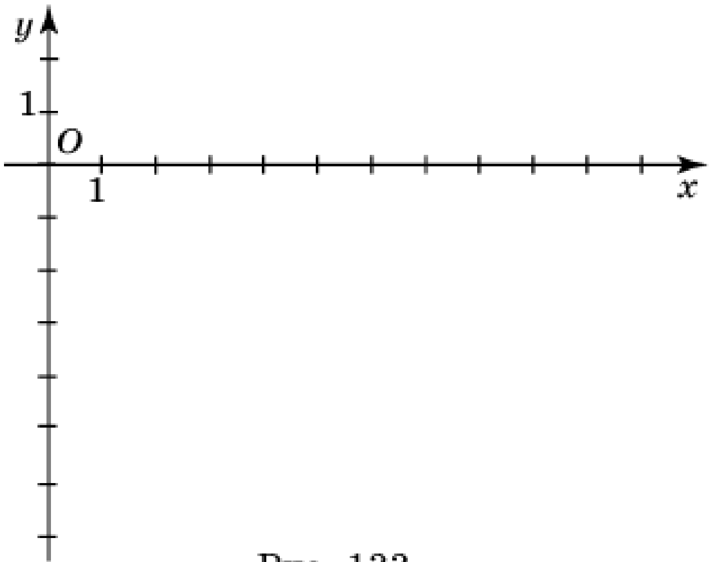


Рис. 133

Ответ. ____.

67.13. Изобразите точки $G(0, -4)$, $H(-3, 2)$ и точку A, принадлежащую оси абсцисс и равноудалённую от данных точек. Найдите её координаты.

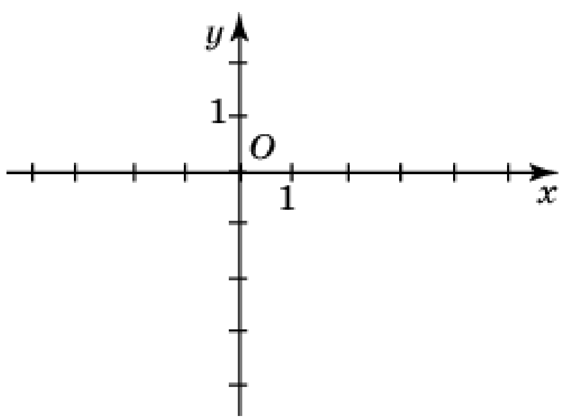


Рис. 134

Ответ. ____.

67.14. Изобразите точки $P(5, -1)$, $Q(-1, 0)$ и точку B, принадлежащую оси ординат и равноудалённую от данных точек. Найдите её координаты.

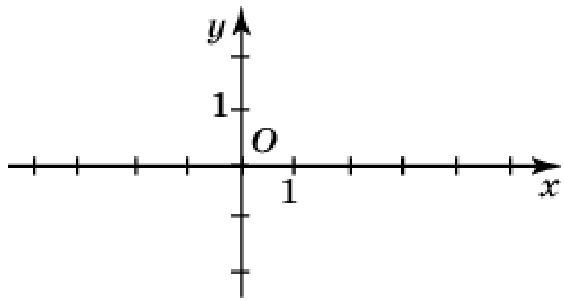


Рис. 135

Ответ. ____

____

____

____.

67.15. Изобразите круг с центром в точке $C(6, -2)$ и радиусом, равным 3. Изобразите несколько точек, не принадлежащих ему. Найдите их координаты и запишите неравенство, определяющее ГМ таких точек.

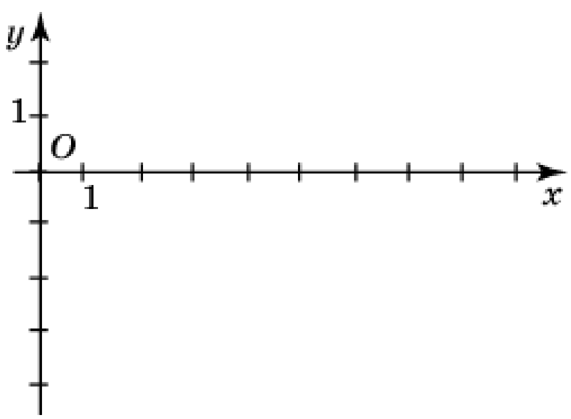


Рис. 136

Ответ. ______________________

____

____

____

____

____

____

____

____.

67.16. Параллельный перенос переводит точку $U(-1, 1)$ в точку $U_1(2, 3)$. Изобразите окружность, которая задаётся уравнением $x^2-4x+y^2+6y+9=0$, и фигуру, в которую она переходит при данном параллельном переносе.

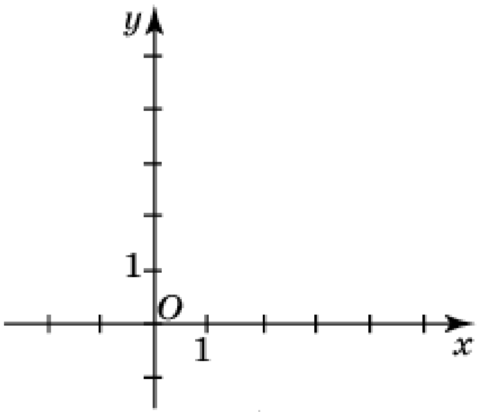


Рис. 137

Ответ. ________________________________
____
____
____
____
____
________________________________.

67.17. Выполните поворот окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2, вокруг данной точки $V(-3, 2)$ на угол: а) $90°$; б) $-45°$.

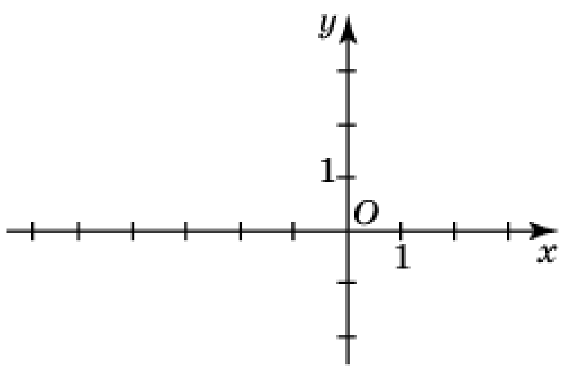


Рис. 138

Ответ. ____
____.

68. ВЕКТОРЫ. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

68.1. Заполните пропуски.

1) Вектором называется ______________________________

____.

2) Вектор с налом в точке K и концом в точке F обозначается

____.

3) Длиной, или ______________, вектора называется ________

____.

4) Длина вектора _______________ обозначается __________.

5) Два вектора называются равными, если ________________

____.

6) Нулевым вектором называется ______________________

____.

7) Все нулевые векторы ______________________________.

8) Нулевой вектор обозначается ________________________.

9) Длина нулевого вектора равна _______________________.

68.2. Изобразите какие-нибудь два вектора и их сумму.

68.3. Закончите предложение.

Суммой двух векторов называется ______________________

____

____.

68.4. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, первое свойство (переместительный закон) сложения векторов.

Формулировка. ____
____.

Дано: ______________________________.

Доказать: __________________________.

Доказательство. ____
____
____
____.

68.5. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, второе свойство (сочетательный закон) сложения векторов.

Формулировка. ____
____.

Дано: ______________________________.

Доказать: __________________________.

Доказательство. ____
____
____
____.

68.6. Сколько различных векторов задают пары вершин: а) треугольника ABC; б) квадрата $ABCD$; в) трапеции $ABCD$ ($BC||AD$)?

Ответ. а) ____________; б) ______________; в) _______________.

68.7. Изобразите четырёхугольник $CDEF$, если $C(-4, -2)$, $D(-4, 3)$, $E(2, 3)$, $F(2, -2)$. Определите его вид и найдите длины векторов $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FD}$.

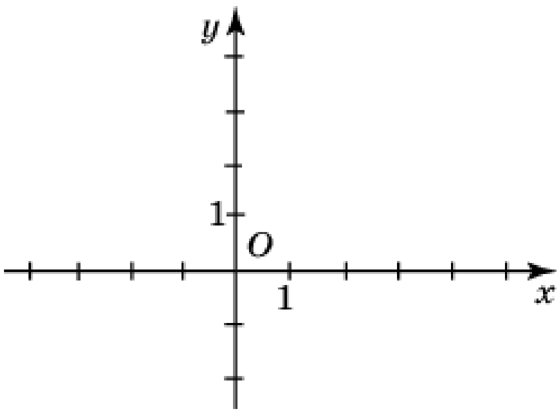


Рис. 139

Ответ. ____________________
____
____
____
____
____
____
________________________________.

68.8. Изобразите четырёхугольник $EFGH$, если $E(0, 4)$, $F(9, 4)$, $G(3, -2)$, $H(-6, -2)$. Определите его вид. Проведите его диагонали, они пересекутся в точке M. Найдите её координаты и длины векторов $\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{GM}, \overrightarrow{HM}$. Найдите равные векторы.

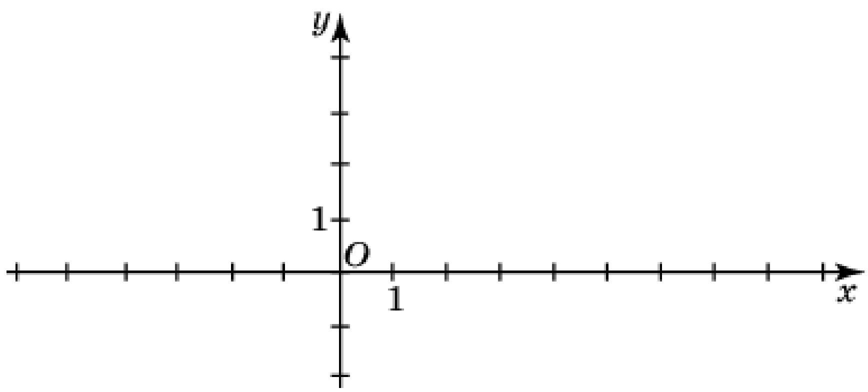


Рис. 140

Ответ. ____

____

____

____.

68.9. Для данных векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{QR}$ (рис. 141) изобразите вектор: а) $\vec{x}$, для которого $\overrightarrow{PQ}+\vec{x}=\overrightarrow{QR}$; б) $\vec{y}$, для которого $\vec{y}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PQ}$.

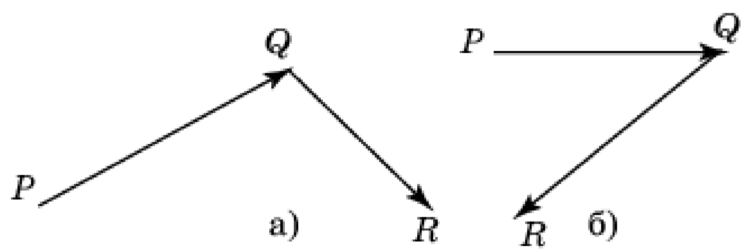


Рис. 141

Решение. ____

____

____

____.

68.10. В треугольнике LMN (рис. 142) укажите: а) $\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LN}$; б) $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}$; в) $\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{ML}$.

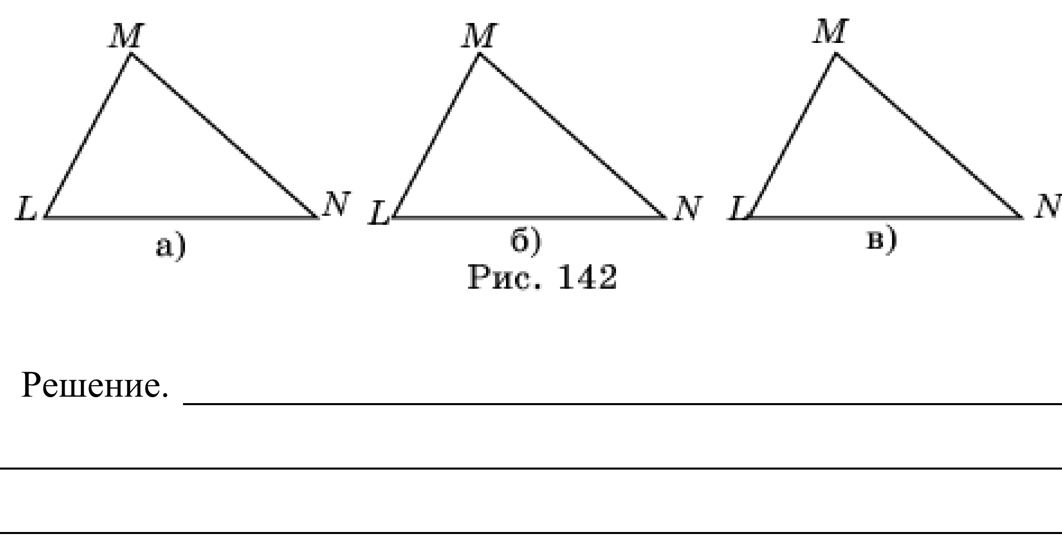


Рис. 142

Решение. ____

____

____

____.

68.11. Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=$ ____

____;

б) $\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{EF}=$ ____

____;

в) $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{HQ}+\overrightarrow{KH}=$ ______________________________.

68.12. Изобразите точки $A(-3, -2)$, $B(0, -4)$, $C(8, 0)$, $D(4, 5)$ и $E(-2, 5)$. Найдите периметр пятиугольника $ABCDE$ и выразите через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$ и $\overrightarrow{EA}=\vec{e}$ вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{CE}$; г) $\overrightarrow{AD}$.

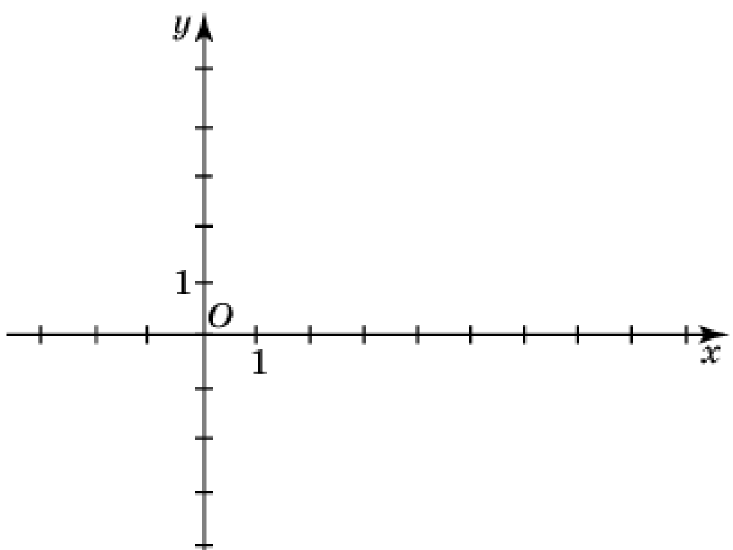


Рис. 143

Решение. ____

____

____

____

____

____.

68.13. Изобразите окружность с центром в точке O и радиусом R. На ней отметьте точки K, L, M, N, такие что радиусы, проведённые через них, образуют углы в 90°. От точки O отложите векторы: а) $\overrightarrow{LO}+\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{NO}$; б) $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OL}$; в) $\overrightarrow{LO}+\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{KO}$; г) $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

68.14. Изобразите равносторонний треугольник UVW и векторы: а) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VW}$; б) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{WU}$; в) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{UW}$; г) $\overrightarrow{UW}+\overrightarrow{VU}$. Найдите $|\overrightarrow{WV}|$, $|\overrightarrow{UW}|$, $|\overrightarrow{VU}+\overrightarrow{UW}|$, $|\overrightarrow{VU}|+|\overrightarrow{VW}|$, $|\overrightarrow{VU}+\overrightarrow{VW}|$, если $UV=1$.

Ответ. ____

____

____

____

____.

68.15. Изобразите равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90^\circ$) и векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$. Найдите $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BA}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{CB}|+|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$, если $AB=1$.

Ответ. ____

____

____

____

____.

69. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

69.1. Закончите предложения.

1) Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется ____________

____

____.

2) Произведением вектора на нуль считается _________________

____.

3) Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается ___________.

4) Длина вектора $t\vec{a}$ равна _________________________________.

5) Произведением вектора $\vec{a}$ на число -1 называется ___________

____.

6) Вектор $-\vec{a}$ имеет направление ____________________________

____.

7) Длина вектора $-\vec{a}$ равна _________________________________.

8) Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ______________________

____.

69.2. Сформулируйте и докажите первое свойство операции умножения вектора на число (сочетательный закон).

Формулировка. ____.

Дано: ________________________.

Доказать: _____________________.

Доказательство. ____

____

____.

69.3. Сформулируйте и докажите второе свойство операции умножения вектора на число (первый распределительный закон).

Формулировка. ____.

Дано: __________________________.

Доказать: ______________________.

Доказательство. ____

____

____.

69.4. Сформулируйте и докажите третье свойство операции умножения вектора на число (второй распределительный закон).

Формулировка. ____.

Дано: __________________________

_________________________________.

Доказать: ______________________.

Доказательство. ____

____

____

____

____.

69.5. Для вектора $\vec{a}$ (рис. 144) постройте вектор: а) $2\vec{a}$; б) $-\vec{a}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

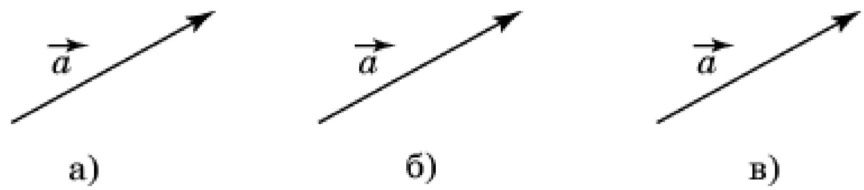


Рис. 144

69.6. Задайте векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и постройте вектор $\vec{d}-\vec{b}-3\vec{c}$.

69.7. На рисунке 145 изображён параллелограмм *ABCD*, диагонали которого пересекаются в точке *O*. Укажите вектор: а) $-\overrightarrow{AD}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; в) $-0{,}5\ \overrightarrow{BD}$; г) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

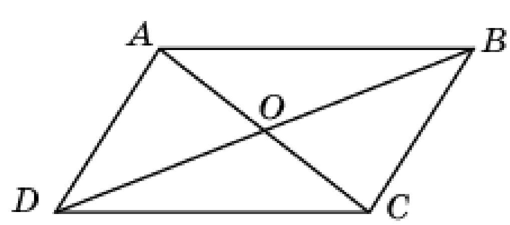


Рис. 145

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________.

69.8. В треугольнике DEF (рис. 146) укажите вектор: а) $-\overrightarrow{EF}$; б) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{DE}$; г) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FD}$.

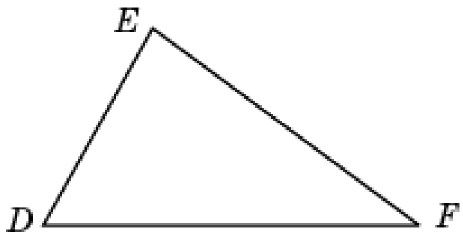


Рис. 146

Ответ. а) __________________________;

б) _________________________________;

в) _________________________________;

г) __________________________________.

69.9. На рисунке 147 изображён ромб $KLMN$, диагонали которого пересекаются в точке P. Укажите вектор: а) $\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{KN}$; в) $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{KP}$; г) $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NK}-\overrightarrow{KL}$.

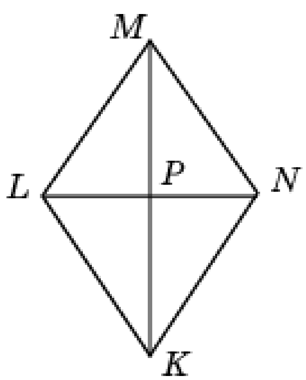


Рис. 147

Ответ. а) ________________;

б) ________________________;

в) ________________________;

г) ________________________.

69.10. В треугольнике ABC (рис. 148) проведены медианы AD, BE и CF, которые пересекаются в точке M. Выразите вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{BM}$; г) $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

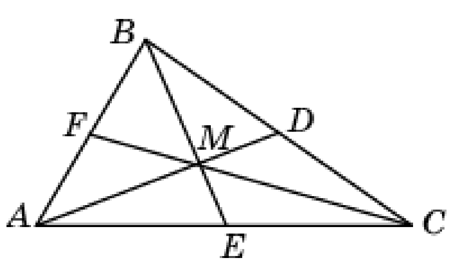


Рис. 148

Ответ. а) ________________;

б) ________________________;

в) ________________________;

г) ________________________.

69.11. Изобразите параллелограмм $ABCD$ и произвольную точку M. Докажите, что $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}$.

Дано: ________________________.

Доказать: _____________________.

Решение. Соединим точку M с вершинами параллелограмма $ABCD$ и рассмотрим сумму векторов $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=$ ____________________

____

____

____.

69.12. Проиллюстрируйте случай, когда для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство: а) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$; б) $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{a}-\vec{b}$.

Решение. а) Преобразуем выражение $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$, перенеся $\vec{a}$ в левую часть равенства, а $\vec{b}$ - в правую часть. Получим равенство

____,

которое возможно, если ____;

б) ____

____

____.

69.13. На рисунке 149 изображён отрезок AB и точка M, не принадлежащая прямой AB. Найдите середину O данного отрезка и докажите, что $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$.

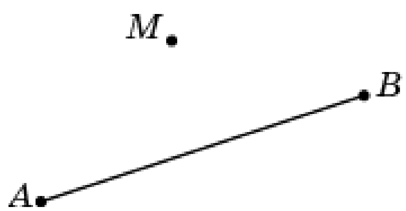


Рис. 149

Дано: ________________________.

Доказать: ______________________.

Решение. ____

____

____

____

____.

69.14. Решите предыдущую задачу 69.13 для случая, когда точка M принадлежит прямой AB.

Дано: ____.

Доказать: ____.

Решение. ____

____

____

____

____.

69.15. Изобразите треугольник *ABC*, его центроид *G* и произвольную точку *M*. Докажите, что $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$.

Дано: ________________________.

Доказать: _____________________.

Решение. ____

____

____

____.

69.16. Докажите, что $|\vec{a}|-|\vec{b}| \leq |\vec{a}-\vec{b}|$. Проиллюстрируйте различные случаи расположения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Дано: ________________________.

Доказать: _____________________.

Решение. ____

____

____

____.

70. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

70.1. Закончите предложения.

1) Координатами вектора называются ________________________

____.

2) Координатными векторами называются _____________________

____.

3) Координатные векторы обозначаются ______________________.
Их координаты равны ____.

70.2. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о представлении вектора через координатные векторы.

Формулировка. ____

____.

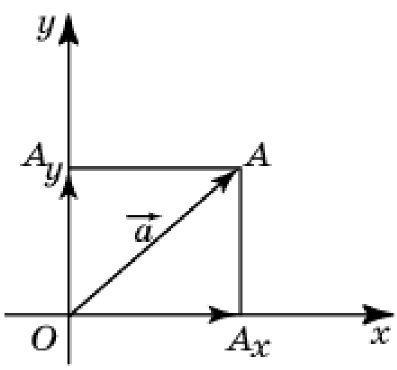


Рис. 150

Дано: $\vec{a}\,(x, y)$ _____________

____________________________.

Доказать: _______________.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Тогда имеет место равенство

____.

Точка A имеет координаты ____________________________________

____

____

____.

70.3. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему о сложении двух векторов.

Формулировка. ____

____.

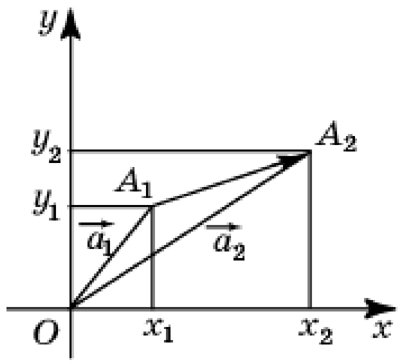


Рис. 151

Дано: $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$

______________________________.

Доказать: ________________.

Доказательство. Разложим данные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам, получим ______________________________

____

____

____.

70.4. Докажите, что вектор $t\vec{a}$ имеет координаты (tx, ty), где (x, y) – координаты вектора $\vec{a}$.

Дано: __________________________.

Доказать: ________________________.

Решение. ____

____

____

____.

70.5. Докажите, что координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны $(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$, где (a_1, a_2) и (b_1, b_2) – координаты точек соответственно A и B.

Дано: ________________________.

Доказать: _____________________.

Решение. ____

____

____

____.

70.6. Выразите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$.

Ответ. ____

____

____.

70.7. Запишите координаты вектора $\vec{a}$, если: а) $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}$; б) $\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}=0{,}01\vec{i}$; г) $\vec{a}=501\vec{j}$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

70.8. Запишите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$, если: а) $C(0, 1)$, $D(2, 0)$; б) $C(-3, 4)$, $D(-4, 3)$; в) $C(10, -17)$, $D(-6, -8)$; г) $C(-5, 6)$, $D(4, -5)$.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________.

70.9. Даны векторы $\vec{m}(-7, 1)$ и $\vec{n}(-9, 0)$. Запишите координаты вектора: а) $-2\vec{m}+\vec{n}$; б) $\frac{1}{2}\vec{m}-3\vec{n}$; в) $-0{,}5\vec{n}-6{,}2\vec{m}$; г) $7{,}1\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}$.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________.

70.10. Запишите координаты точки F, если: а) $E(5, 6)$ и $\overrightarrow{EF}(6, 5)$; б) $E(-1, 2)$ и $\overrightarrow{EF}(3, -1)$; в) $E(10, -7)$ и $\overrightarrow{EF}(-18, 20)$; г) $E(0, -11)$ и $\overrightarrow{EF}(12, -15)$.

Ответ. а) ________________; б) ________________;

в) ________________; г) ________________.

70.11. Запишите координаты точки G, если: а) $H(8, 1)$ и $\overrightarrow{GH}(4, 2)$; б) $H(-2, 0)$ и $\overrightarrow{GH}(5, -3)$; в) $H(-6, -12)$ и $\overrightarrow{GH}(0, 9)$; г) $H(11, -7)$ и $\overrightarrow{GH}(-12, 8)$.

Ответ. а) ________________; б) ________________;

в) ________________; г) ________________.

70.12. Найдите длину вектора $\overrightarrow{KL}$, если: а) $K(0, -5)$ и $L(6, 1)$; б) $K(10, -1)$ и $L(-5, 0)$; в) $K(-2, -8)$ и $L(4, 3)$; г) $K(10, 10)$ и $L(-7, -15)$.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________.

70.13. Дан вектор $\vec{m}(10, -6)$. Найдите координаты вектора $\vec{n}$, противоположно направленного $\vec{m}$, и длина которого в 3 раза меньше длины вектора $\vec{m}$.

Ответ. ______________________________

______________________________.

70.14. Отрезок MN делится в точке O пополам. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{NO}$, если $M(-2, 3)$ и $N(6, -8)$.

Ответ. ______________________________

______________________________.

70.15. Точки $A(0, -3)$, $B(4, 7)$ и $C(-5, -4)$ являются вершинами треугольника. Найдите координаты: а) его центроида M; б) вектора $\overrightarrow{AM}$; в) вектора $\overrightarrow{AA_1}$; г) вектора $\overrightarrow{A_1M}$, где точка A_1 – середина стороны BC треугольника.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________.

71. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

71.1. Закончите предложения.

1) Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется ____

____.

2) Если один из двух векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов _________________________________.

3) Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается ______.

4) Формула скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

____

____

____.

5) Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется _______________

____.

Он обозначается ____.

6) Из формулы скалярного произведения следует, что $\vec{a}^{\,2}$=______

____.

7) Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда ____

____.

71.2. Ответьте на вопрос: «Какой физический смысл имеет скалярное произведение двух векторов?».

Ответ. ____

____

____

____.

71.3. Выразите скалярное произведение двух векторов через их координаты.

Дано: $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$.

Доказать: ____.

Решение. Отложим данные вектора от начала координат O и их концы обозначим A_1, A_2, соответственно. В случае, если точки O, A_1 и A_2 не принадлежат одной прямой, рассмотрим треугольник OA_1A_2. По теореме косинусов, имеем равенство ____________________________

____.

Заметим, что это равенство выполняется и в случае, если точки O, A_1 и A_2 ____.

Перепишем это равенство в виде $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$=___________________.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами $\vec{a}_1{}^2 = |\vec{a}_1|^2$=___________________________; $\vec{a}_2{}^2 = |\vec{a}_2|^2$=______________________________; $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2$=______

____.

Получим $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$=____.

71.4. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$, если: а) $\vec{k}(0, -5)$ и $\vec{l}(6, 0)$; б) $\vec{k}(1, 4)$ и $\vec{l}(-9, 5)$; в) $\vec{k}(\frac{1}{2}, 0)$ и $\vec{l}(21, -18)$; г) $\vec{k}(-7, \frac{1}{3})$ и $\vec{l}(-15, -6)$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

71.5. Точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$ являются вершинами единичного равностороннего треугольника. Найдите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}$, где A_1 – середина стороны BC треугольника; г) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}$, где M – центр треугольника ABC.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

71.6. Найдите угол (косинус угла) D треугольника CDE, если $C(1, 0)$, $D(-1, 2)$ и $E(5, -2)$.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____.

71.7. Даны вершины треугольника ABC $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, если угол C равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°; г) 150°.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

71.8. Найдите скалярный квадрат $\overrightarrow{EF}$, если: а) $\overrightarrow{EF}(5, -6)$; б) $\overrightarrow{EF}(-4, 10)$; в) $E(-1, 8)$, $F(2, -3)$; г) $E(12, -5)$, $F(-7, -5)$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

71.9. Найдите углы (косинусы углов) треугольника KLM, если $K(9, 16)$, $L(-6, 2)$ и $M(0, -11)$.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____.

71.10. Определите вид (по углам) треугольника RST, если $R(0, -1)$, $S(-1, 2)$ и $T(4, 0)$.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____.

71.11. Найдите угол между единичными векторами $\vec{g}$ и $\vec{h}+\vec{g}$, если угол между векторами $\vec{g}$ и $\vec{h}$ равен $60°$.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____.

71.12. Даны векторы $\vec{m}(5,\ -2)$ и $\vec{n}(-3,\ y)$. При каком значении y данные векторы будут перпендикулярны?

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____.

71.13. Даны векторы $\vec{k}(2,\ -3)$ и $\vec{l}(-1,\ -4)$. Найдите такое число x, чтобы векторы $2\vec{k}-\vec{l}$ и $-\vec{k}+3x\vec{l}$ были перпендикулярны.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____.

71.14. При каких условиях векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны?

Ответ. ____

____

____

____.

71.15. Найдите угол φ (косинус угла) между единичными векторами $\vec{e}$ и $\vec{f}$, если известно, что векторы $\vec{e}-2\vec{f}$ и $3\vec{f}+\vec{e}$ перпендикулярны.

Дано: ____.

Найти: ____.

Решение. ____

____

____

____

____

____.

71.16. Вычислите работу A, которую производит сила $\vec{F}(1, -2)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $C(-3, 4)$ в положение $D(6, -8)$.

Ответ. ____

____

____

____.

72. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

72.1. Сформулируйте и докажите, заполняя пропуски, теорему об уравнении прямой.

Формулировка. ____

____

____

____.

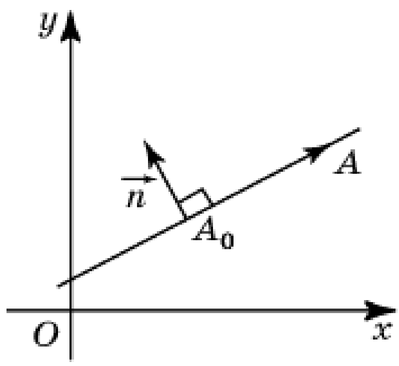


Рис. 152

Дано: ______________________________

____________________________________.

Доказать: __________________________.

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь точку $A_0(x_0, y_0)$ данной прямой и пусть $\vec{n}(a, b)$ – перпендикулярный этой прямой вектор (рис. 152). Тогда произвольная точка $A(x, y)$ будет принадлежать этой прямой в том и только том случае, когда ____, т.е. скалярное произведение ____________________________________ равно нулю. Расписывая ___________________________ через координаты данных векторов, получим уравнение ______________________________, которое задает искомую прямую. Обозначая $-ax_0-by_0=c$, получим требуемое уравнение прямой ______________________________________.

Если $b \neq 0$, то, разделив на b, это уравнение можно привести к виду ____.

72.2. Закончите предложения.

1) Вектором нормали прямой называется ______________________

____.

2) Угловым коэффициентом прямой называется ________________

____.

72.3. В чём заключается геометрический смысл углового коэффициента прямой?

Ответ. ____

____

____

____.

72.4. В каком случае две прямые на плоскости параллельны (с точки зрения их уравнений)?

Ответ. ____

____

____

____.

72.5. В каком случае две прямые совпадают (с точки зрения их уравнений)?

Ответ. ____

____

____

____.

72.6. В каком случае две прямые пересекаются (с точки зрения их уравнений)?

Ответ. ____

____

____

____.

72.7. Как можно вычислить угол между пересекающимися прямыми?

Ответ. ____

____

____

____.

72.8. В каком случае две прямые на плоскости будут перпендикулярными (с точки зрения их уравнений)?

Ответ. ____

____

____

____.

72.9. Запишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку: а) $M(1, -2)$; б) $N(-4, 3)$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

72.10. Запишите уравнение оси: а) абсцисс; б) ординат.

Ответ. а) ____;

б) ____.

72.11. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 1)$ и точку: а) $B(0, 3)$; б) $C(6, -2)$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

72.12. Как расположены относительно друг друга прямые, заданные уравнениями:

а) $5x-3y-6=0$ и $-10x+6y-12=0$; б) $-x-2y+6=0$ и $3x-6y=0$;

в) $y=2x$ и $x-2y+1=0$; г) $-9x-3y=0$ и $y=-3x+7$?

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

72.13. Найдите точки пересечения прямой: а) $2x-3y+12=0$; б) $y=\frac{1}{4}x-8$ с осями координат.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

72.14. Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $2x+y=0$ и $-x+2y-1=0$; б) $y=\frac{1}{2}x$ и $-12x+5y+3=0$;

в) $y=3x-16$ и $y=x-1$; г) $3x-4y-5=0$ и $y=\frac{1}{7}x+1$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____;

в) ____

____;

г) ____

____.

72.15. Запишите уравнение прямой, параллельной оси: а) абсцисс; б) ординат, проходящей через точку $M(-1, 4)$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

72.16. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной оси: а) абсцисс; б) ординат, проходящей через точку $N(3, -2)$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

72.17. Постройте прямую, проходящую через точку $A(2, -3)$ и перпендикулярную прямой $x-2y+1=0$.

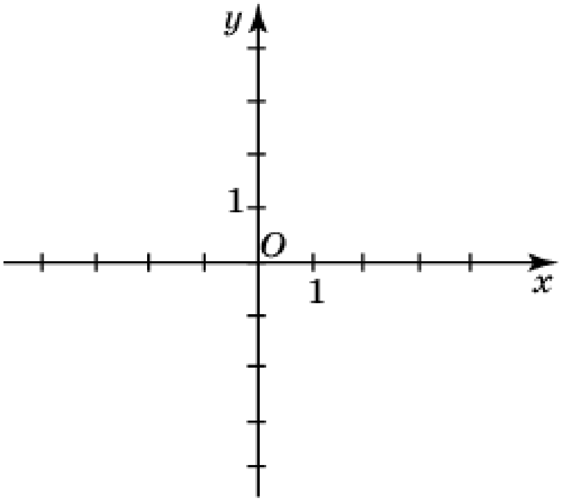


Рис. 153

Построение. ______________

____

____

____

____

____

____

____

__________________________________.

72.18. Постройте прямую, проходящую через точку $B(-1, 2)$ и параллельную прямой $3x-2y-6=0$.

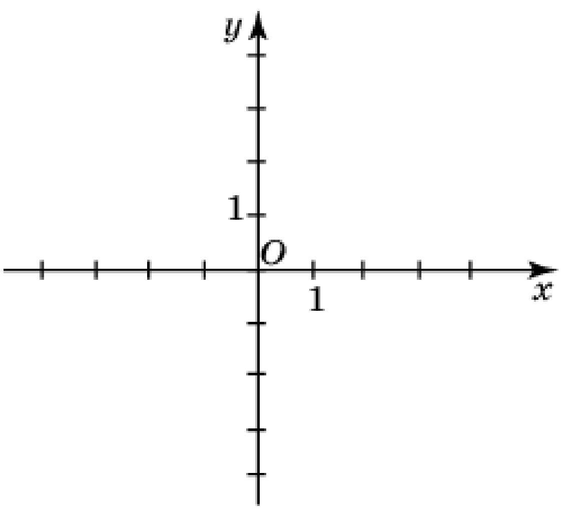


Рис. 154

Построение. ______________

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

72.19. Постройте прямую, которая касается окружности $x^2+y^2=2$ и проходит через точку $C(-1, 1)$.

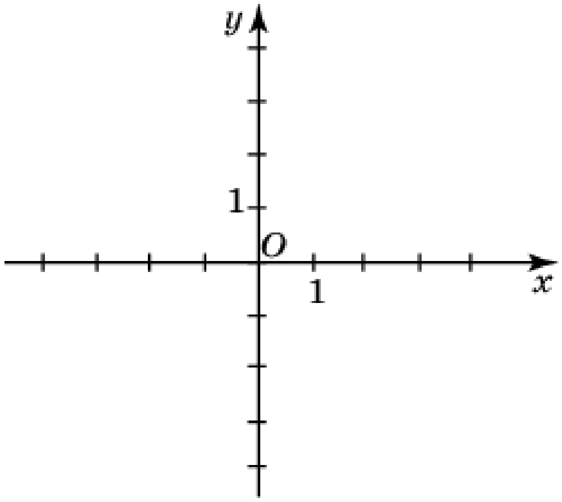


Рис. 155

Построение. ________________

____

____

____

____

____

____

____

____.

72.20. Постройте прямую, которая касается окружности $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ и проходит через точку $D(4, 0)$.

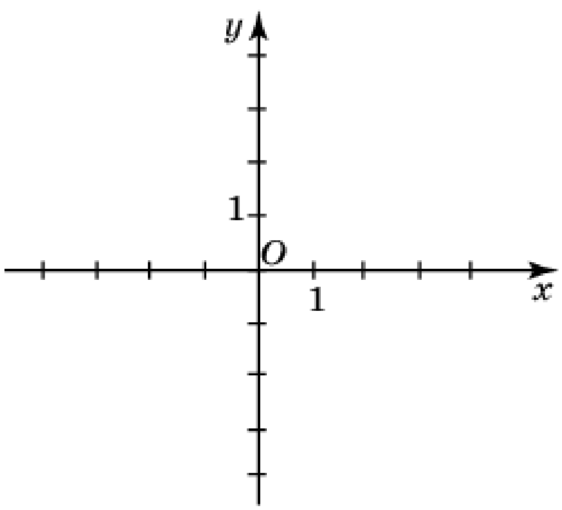


Рис. 156

Построение. ________________

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

73*. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

73.1. Прямая задана уравнением $ax+by+c=0$ (рис. 157) и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Как аналитически задаётся полуплоскость относительно данной прямой, если этой полуплоскости принадлежит точка $B(x, y)$? Почему?

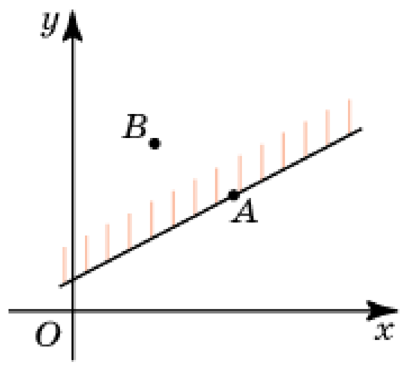


Рис. 157

Ответ. ____

____

____

____

____

____.

73.2. Как аналитически задаётся полуплоскость относительно данной прямой из предыдущей задачи 73.1, если этой полуплоскости не принадлежит точка $B(x, y)$?

Ответ. ____

____

____

____

____.

73.3. Как аналитически задаётся выпуклый n-угольник? Ответ поясните.

Ответ. ____

____

____

____

____

____.

73.4. Изобразите фигуру, которая задаётся следующей системой неравенств: а) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x < 1, \\ y \geq 0 \end{cases}$.

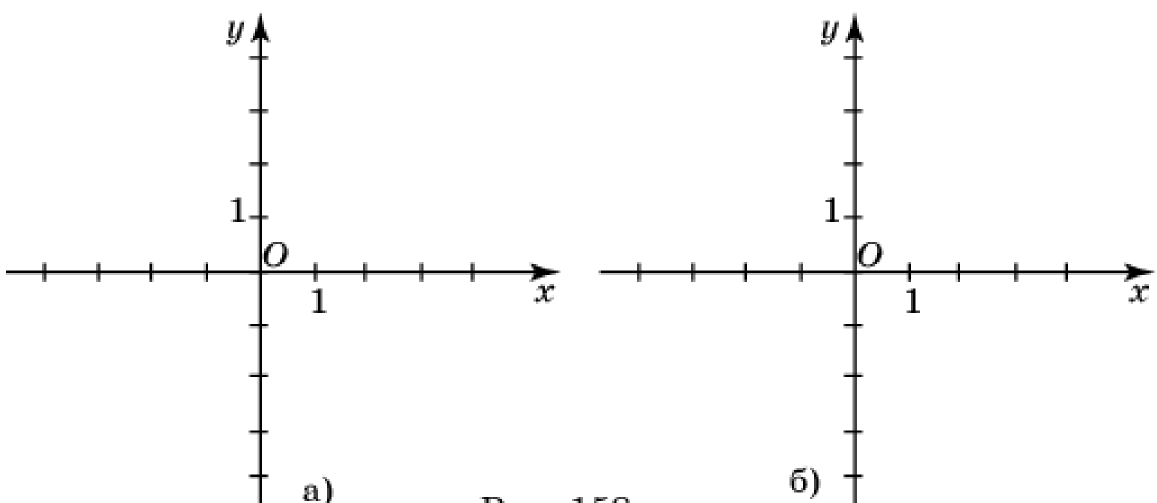


Рис. 158

Построение. а) _______________________________________

____

____;

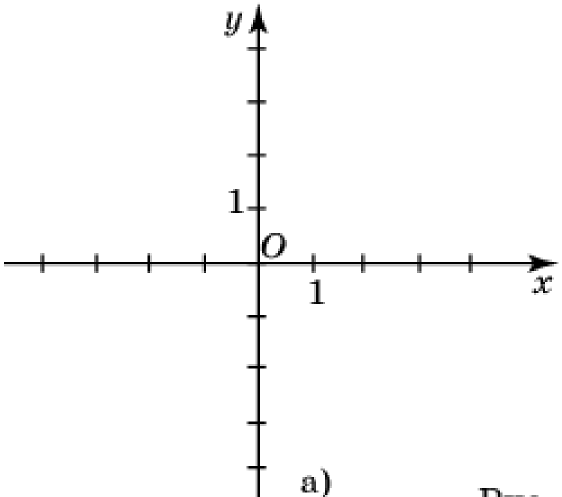
б) ____

____

____.

73.5. Изобразите фигуру, которая задаётся системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -1 \le x \le 4, \\ 5 \le y \le 6 \end{cases}$.



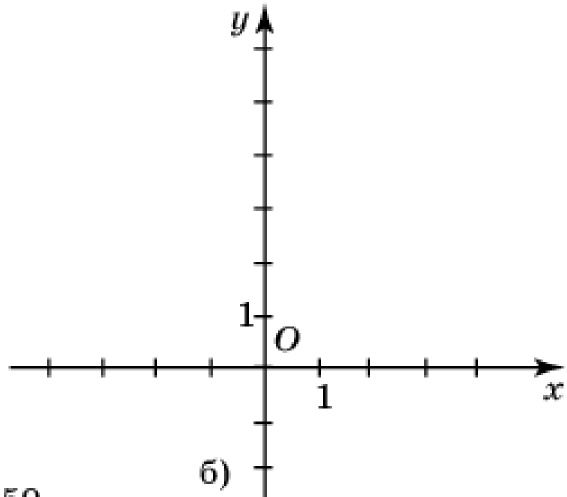


Рис. 159

Построение. а) ____

____;

б) ____

____.

73.6. Изобразите фигуру, которая задаётся системой неравенств

$\begin{cases} -6 \le x \le 8, \\ -1 \le y \le 6, \\ x - 8 \le 0, \\ y - 6 \le 0, \\ y + 1 \ge 0, \\ x - y \ge -5 \end{cases}$.

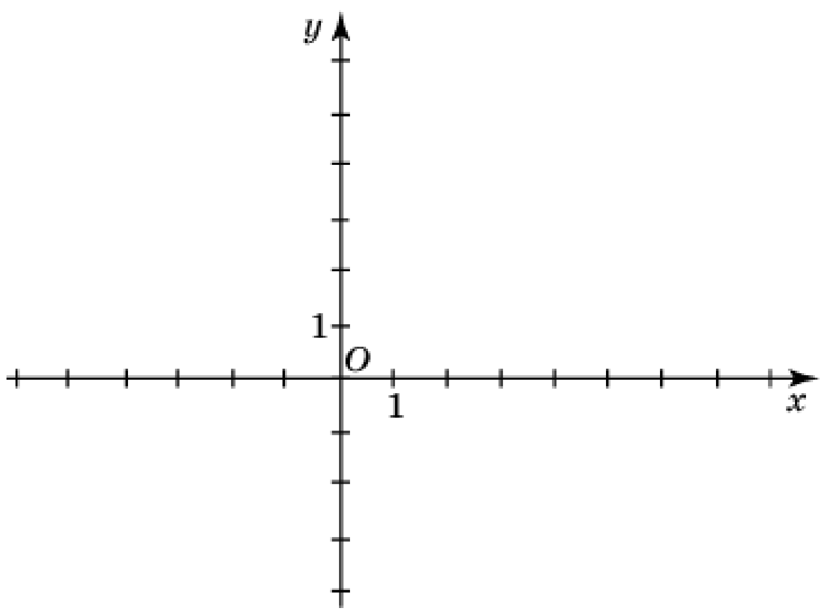


Рис. 160

Построение. ____

____

____

____.

73.7. Запишите систему, которая задаёт пятиугольник $ABCDE$, изображённый на рисунке 161.

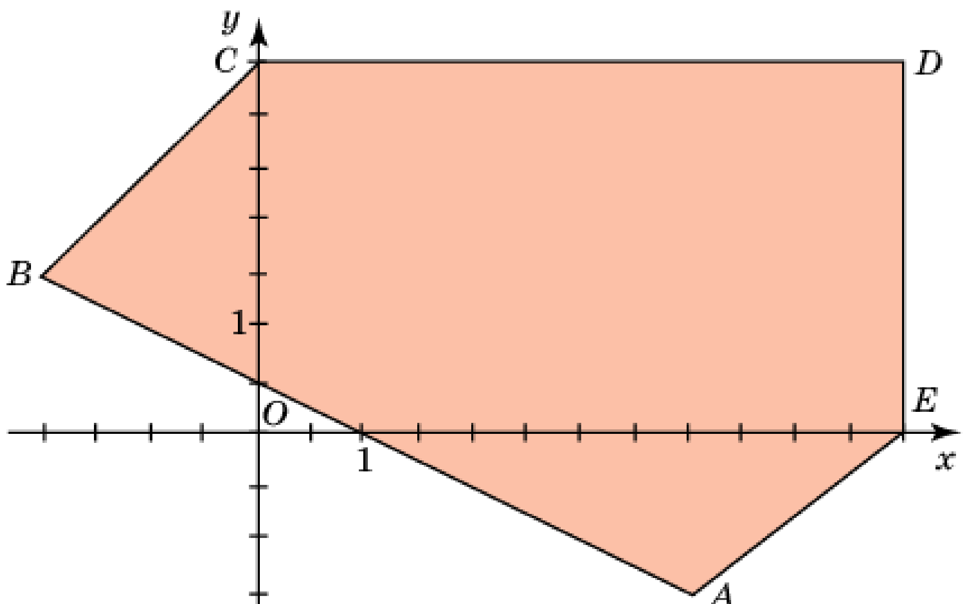


Рис. 161

Ответ. ____

____

____

____

____

____

____.

73.8. Закончите предложения.

1) Параболой называется ________________________________

____

____.

2) Директрисой параболы называется ______________________

____

____.

3) Фокусом параболы называется _________________________

____

____.

73.9. Выведите уравнение параболы (рис. 162).

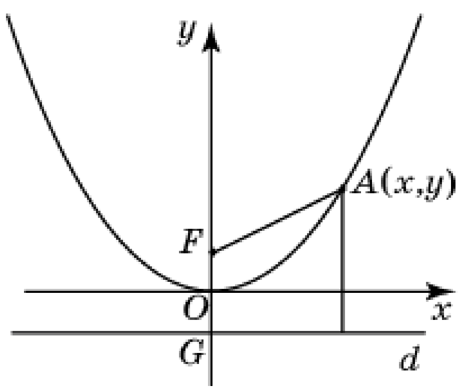


Рис. 162

Решение. Обозначим точку пересечения оси параболы с её директрисой через G. Длину отрезка FG обозначим через $2a$. Введём систему координат, считая началом координат O ________________, осью абсцисс – прямую, параллельную _____________ и проходящую через _________________, осью ординат - _____________________________. Тогда фокус F будет иметь координаты _______________________.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от неё до фокуса и директрисы равны соответственно ___________________________ и __________________________. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство ____ .

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь равенство ____________________________________, которое и будет искомым уравнением параболы.

73.10. Для параболы, заданной уравнением: а) $y=4x^2$; б) $6x^2=y$; в) $2y-5x^2=0$; г) $8x^2=3y$ найдите координаты её фокуса.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

73.11. Парабола задана уравнением: а) $x^2-8y=0$; б) $x^2-4x-12y=8$. Запишите уравнение её директрисы и найдите координаты фокуса.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

73.12. Вершина параболы расположена в: а) начале координат; б) точке $A(0, 1)$; в) точке $B(-1, 0)$; г) точке $C(1, -2)$. Уравнение её директрисы $y=-3$. Запишите уравнение параболы.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

73.13. Закончите предложения.

1) Эллипсом называется ____________________________________

____

____.

2) Фокусами эллипса называется __________________________

____

____.

3) Уравнение эллипса _____________________________________

____

____.

73.14. Выведите уравнение эллипса (рис. 163).

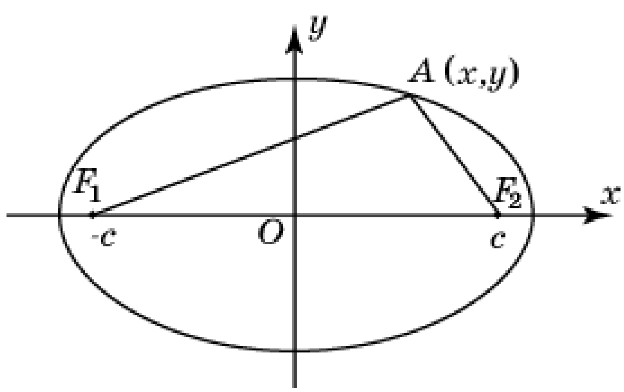


Рис. 163

Решение. Пусть F_1, F_2 - фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введём систему координат, считая началом координат O____________________________________, осью абсцисс - ____________________, осью ординат - ___________________________.

Фокусы эллипса будут иметь координаты__________________________.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от неё до фокусов равны соответственно ____________________________________.

Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство ____,

где a – ____.

Перенесём второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведём обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь____.

Приведём подобные члены ____.

Еще раз возведём в квадрат и приведём подобные члены _____________

____.

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на _______.

Получим равенство ____,

которое и будет искомым уравнением эллипса.

73.15. Для эллипса, заданного уравнением: а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + y^2 = 1$, найдите координаты точек пересечения с осями координат.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

73.16. Для эллипса, заданного уравнением: а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$; в) $x^2 + y^2 = 25$; г) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{9}$, найдите координаты его фокусов.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

73.17. Закончите предложения.

1) Гиперболой называется ________________________________

____

____.

2) Фокусами гиперболы называется _______________________

____.

3) Уравнение гиперболы __________________________________

____.

73.18. Выведите уравнение гиперболы.

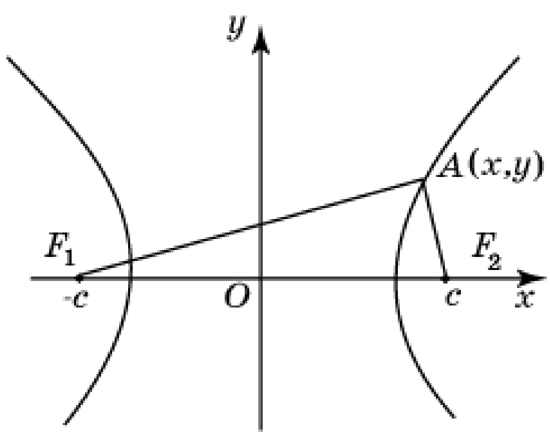


Рис. 164

Решение. Введём систему координат, считая осью Ox

____,

а осью Oy - ____,

и делящую отрезок F_1F_2 ____________________. Пусть фокусы имеют координаты ________________________. Точка $A(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство ____, где a ________________ ________________________. Перепишем это равенство в координатной форме ____.

Перенесём второй корень в правую часть и возведём обе части равенства в квадрат. Получим ____________________________________.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство ____.

Еще раз возводя в квадрат и обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим _________ _________________________. Разделив обе части на ____________, окончательно получим уравнение гиперболы ______________________

Прямые, заданные уравнениями $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, называются ____.

73.19. Для гиперболы, заданной уравнением: а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$; б) $y^2 - x^2 = -4$, найдите координаты точек пересечения с осями координат и координаты её фокусов.

Ответ. а) ____ ____;

б) ____ ____.

73.20. Для гиперболы, заданной уравнением: а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $x^2 = 1 + y^2$, запишите уравнения её асимптот и изобразите их.

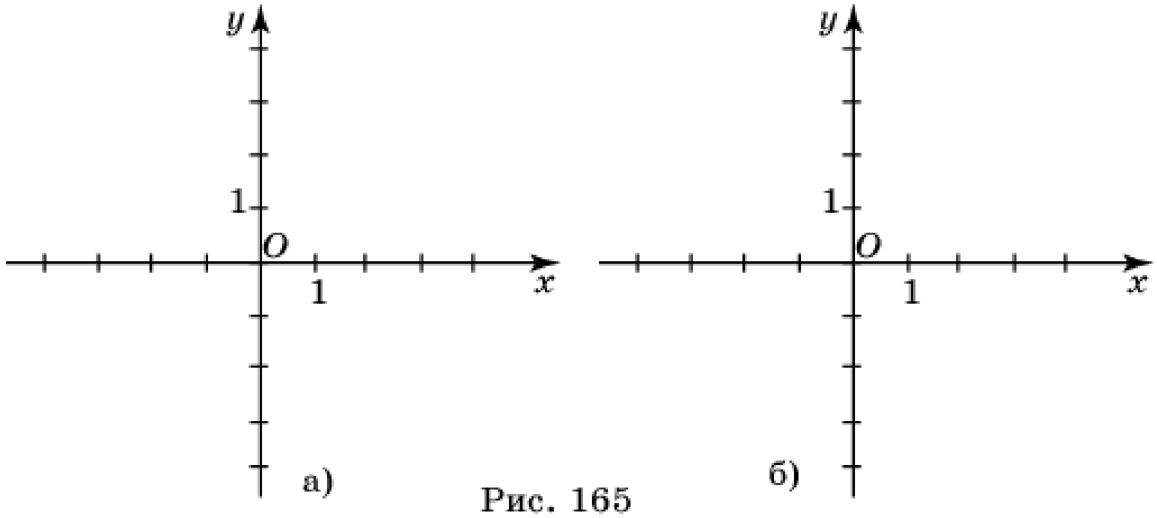


Рис. 165

Ответ. а) ____;

б) ____.

73.21. Изобразите ГМТ, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $y \geq x^2$; б) $y < 4x^2$; в) $x^2+y^2 \geq 1$; г) $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leq 1$.

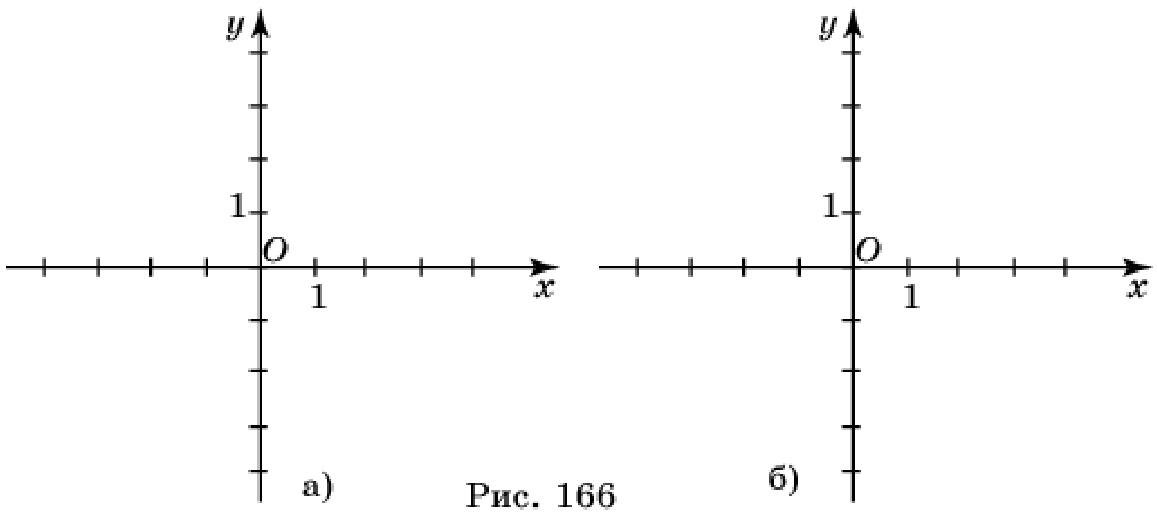


Рис. 166

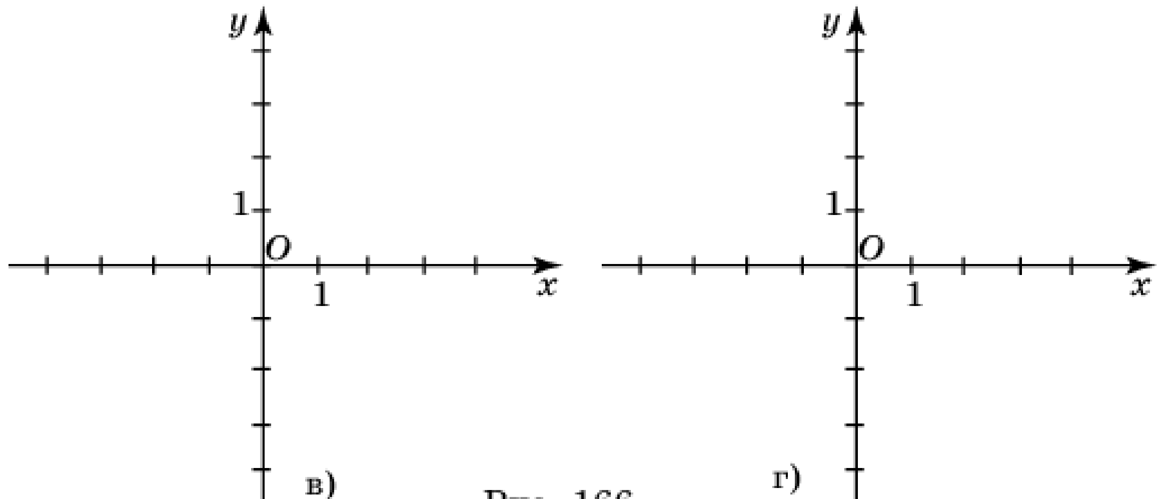


Рис. 166

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____;

в) ____

____;

г) ____

____.

74*. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

74.1. Приведите примеры задач оптимизации.

Ответ. ____

____

____

____

____.

74.2. Назовите российского учёного, лауреата Нобелевской премии, который разработал метод решения задач оптимизации.

Ответ. ____

____.

74.3. Как Вы понимаете, что значит составить математическую модель некоторой задачи?

Ответ. ____

____

____.

74.4. Что называется многоугольником ограничений?

Ответ. ____

____.

74.5. В каких точках линейная функция на многоугольнике ограничений принимает свои наименьшее и наибольшее значения?

Ответ. ____

____.

74.6. Изобразите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) $x \geq -2$; б) $y<3$; в) $x+1>-8$; г) $y \leq -6$.

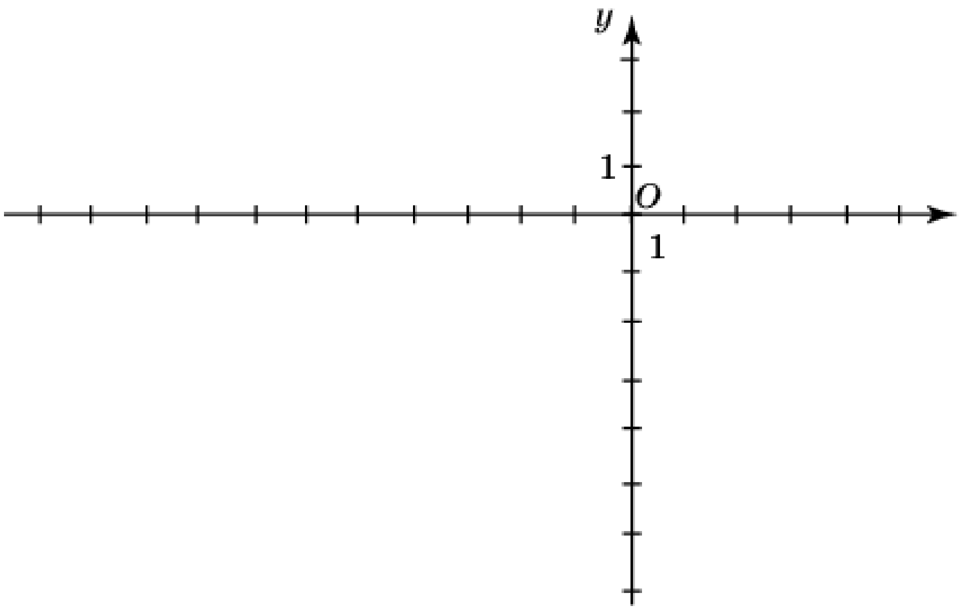


Рис. 167

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

74.7. Изобразите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) $|x|<4$; б) $|y| \geq 3$.

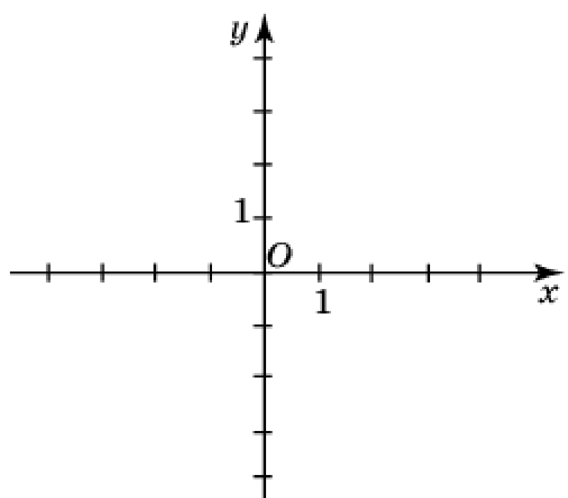


Рис. 168

Ответ. а) ____;

б) ____.

74.8. Изобразите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) $|x-1|>5$; б) $|y+2|\leq 1$.

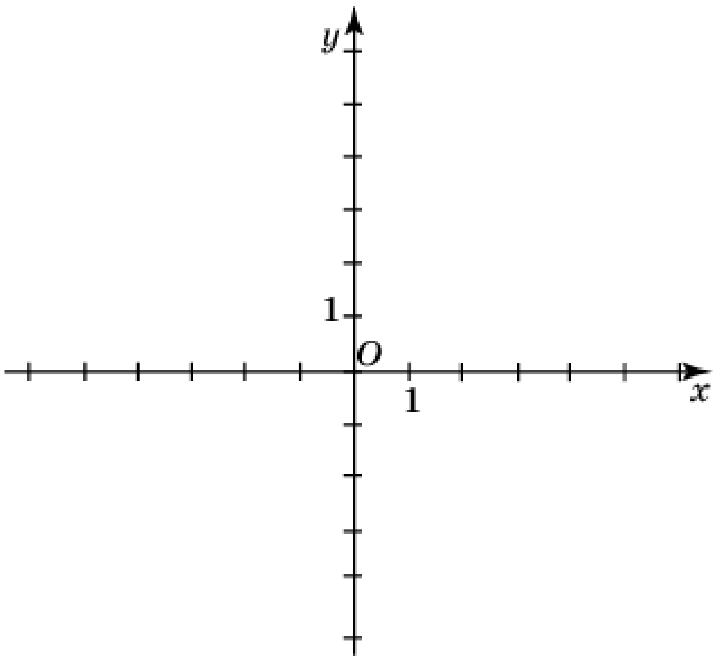


Рис. 169

Ответ. а) ____________

____

__________________;

б) __________________

____

____

____________________.

74.9. Изобразите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x - y \geq 0, \\ x + y \geq 4 \end{cases}$.

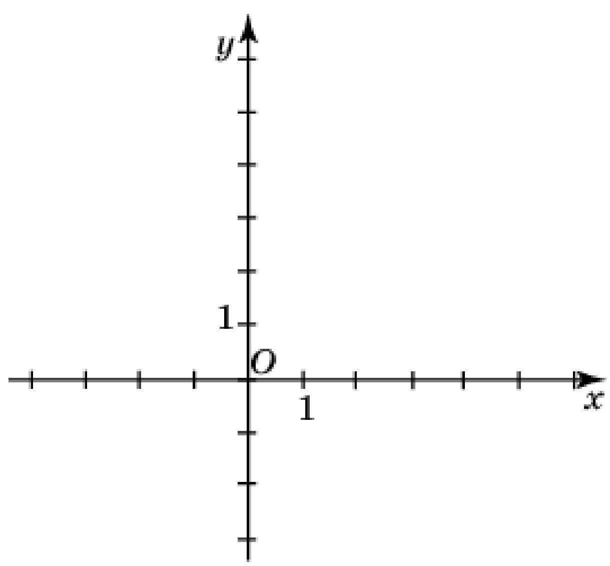


Рис. 170

Ответ. ____

____

____.

74.10. На рисунке 171 представлен пятиугольник *ABCDE* – многоугольник ограничений для некоторой транспортной задачи. Запишите соответствующую систему неравенств и найдите наименьшее значение функции $F=2x-y$ на данном многоугольнике. Попытайтесь сформулировать какую-нибудь соответствующую задачу.

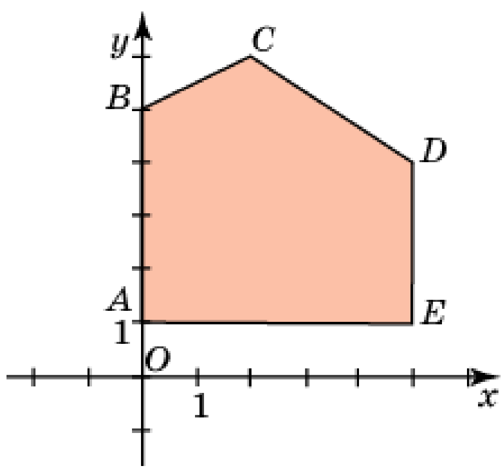


Рис. 171

Формулировка. ____

____

____

____

____.

Ответ. ____

____

____

____

____.

74.11. Математическая модель некоторой траспортной задачи представлена следующей системой неравенств $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 10 - x \leq 0, \\ 8 - y \geq 0, \\ 5x + 4y - 20 \leq 0 \end{cases}$.

Изобразите многоугольник ограничений и попытайтесь сформулировать какую-нибудь соответствующую задачу.

Формулировка. ____

____

____

____

____.

Ответ. ____

____

____

____

____.

75. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

75.1. Закончите предложения.

1) Единичной окружностью называется ________________________

____.

2) Каждому углу φ, где $0° < \varphi < 360°$, соответствует точка на единичной окружности, полученная ______________________________

____

____.

75.2. Определите: а) sin φ; б) cos φ для $0° \le \varphi < 360°$.

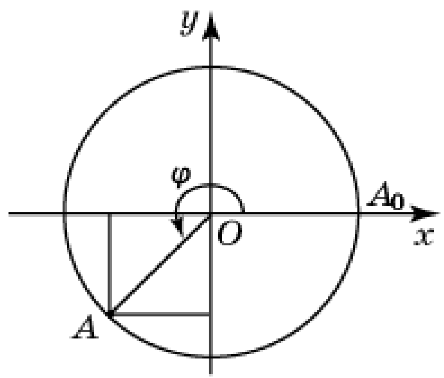


Рис. 172

Ответ. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

75.3. Определите поворот точки с координатами (1, 0) на угол $\varphi \geq 360°$.

Ответ. ____

____

____

____

____.

75.4. Как определяется поворот на угол φ для $\varphi < 0°$?

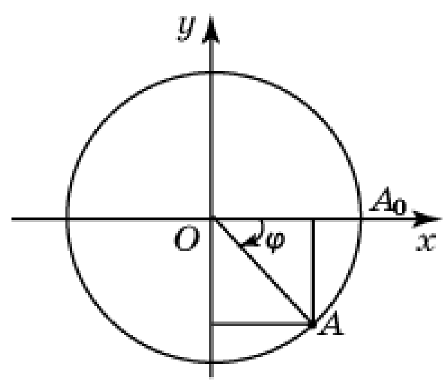


Рис. 173

Ответ. ____

____

____

____

____.

75.5. Как определяется: а) tg φ; б) ctg φ для произвольного угла φ?

Ответ. а) ____;

б) ____.

75.6. Заполните пропуски.

1) sin (φ+360°)= ____________________________________.

2) cos (φ+360°)= ____________________________________.

3) tg (φ+360°)= ____________________________________.

4) ctg (φ+360°)= ____________________________________.

5) sin (φ+180°)= ____________________________________.

6) cos (φ+180°)= ____________________________________.

7) tg (φ+180°)= ____________________________________.

8) ctg (φ+180°)= ____________________________________.

9) sin (-φ)= ____________________________________.

10) cos (-φ)= ____________________________________.

11) tg (-φ)= ____________________________________.

12) ctg (-φ)= ____________________________________.

13) sin (90°-φ)= ____________________________________.

14) cos (90°-φ)= ____________________________________.

15) tg (90°-φ)= ____________________________________.

16) ctg (90°-φ)= ____________________________________.

75.7. Какой четверти принадлежит угол: а) 15°; б) -30°; в) 154°; г) 300°?

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

75.8. Какой четверти принадлежит угол: а) 380°; б) 720°; в) -800°; г) -250°?

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

75.9. Сформулируйте и докажите теорему об основном тригонометрическом тождестве для произвольного угла φ.

Формулировка.____

____.

Дано: ____.

Доказать: ____.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

____.

75.10. Найдите sin φ, если угол φ равен: а) 30°; б) -45°; в) 270°; г) -120°; д) 300°; е) -210°.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________;

д) ______________________________;

е) ______________________________.

75.11. Найдите cos φ, если угол φ равен: а) 45°; б) -60°; в) 180°; г) -180°; д) 840°; е) -450°.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________;

д) ______________________________;

е) ______________________________.

75.12. Найдите tg φ, если угол φ равен: а) 60°; б) -45°; в) 150°; г) 540°; д) -120°; е) -1110°.

Ответ. а) ______________________________;

б) ______________________________;

в) ______________________________;

г) ______________________________;

д) ____;

е) ____.

75.13. Найдите ctg φ, если угол φ равен: а) $45°$; б) $-135°$; в) $300°$; г) $-660°$; д) $225°$; е) $-930°$.

Ответ. а) ______________________________________;

б) ____;

в) ____;

г) ____;

д) ____;

е) ____.

75.14. Упростите выражение.

а) $\dfrac{tg(\varphi+180°)}{ctg(90°-\varphi)} =$ ______________________________

____

____;

б) $\dfrac{\sin(-\varphi)\cdot\cos(\varphi+360°)\cdot tg(90°-\varphi)}{\sin(90°-\varphi)\cdot\cos(-\varphi)\cdot ctg(\varphi+360°)} =$ ____________________

____

____.

75.15. Вычислите.

а) $\sin(-135°)+tg(-45°)+ctg\ 90°-\cos 900°=$ ____________________

____

____;

б) $\cos(-30^\circ)+\sin(-210^\circ)-\mathrm{tg}\,510^\circ-\mathrm{ctg}\,(-45)^\circ=$____________________

____

____.

75.16. Отметьте на единичной окружности дуги, для которых: а) $\sin\varphi \geq 0$; б) $\cos\varphi < 0$.

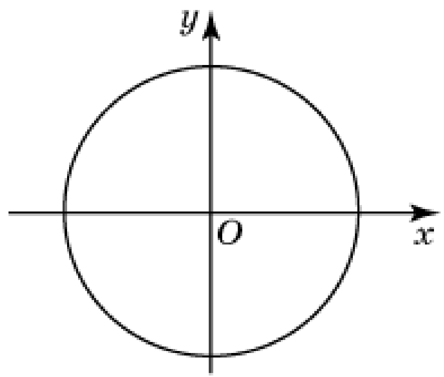


Рис. 174

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

75.17. Отметьте на едипничной окружности дуги, для которых: а) $\mathrm{tg}\,\varphi \leq 0$; б) $\mathrm{ctg}\,\varphi > 0$.

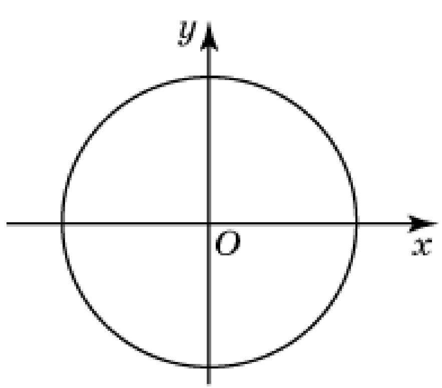


Рис. 175

Ответ. а) ______________________________

____

____________________________________;

б) __________________________________

____

____

____________________________________.

76*. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

76.1. Определите полярные координаты на плоскости.

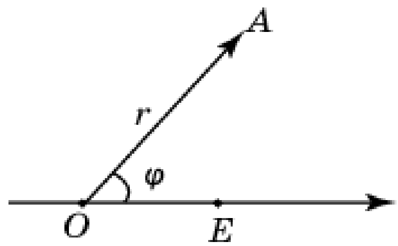


Рис. 176

Ответ. ____

____

____

____.

76.2. Закончите предложения.

1) Полюсом называется ________________________________

____

____.

2) Полярной осью называется ___________________________

____

____.

3) Полярным радиусом называется _______________________

____

____.

4) Полярным углом называется __________________________

____

____.

5) Полярный угол можно задавать в _____________________

____.

76.3. Выразите декартовы координаты точки (x, y) через её полярные координаты (r, φ).

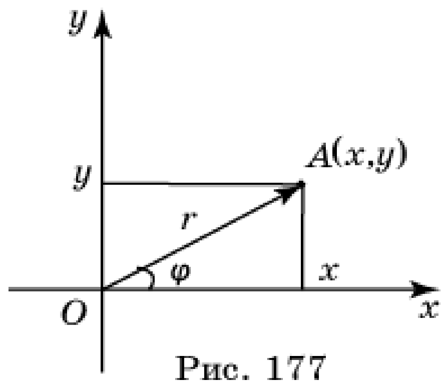


Рис. 177

Ответ. ____

____

____

____

____.

76.4. Выразите полярные координаты точки (r, φ) через её декартовы координаты (x, y).

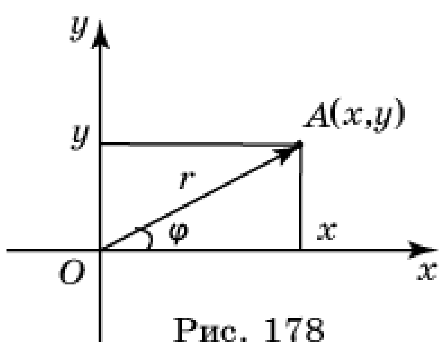


Рис. 178

Ответ. ____

____

____

____

____.

76.5. Изобразите полярную ось и точки с соответствующими полярными координатами $A(1,\ 45^\circ)$, $B(2,\ -120^\circ)$, $C(\frac{1}{3},\ \frac{\pi}{3})$, $D(0{,}5,\ -\frac{\pi}{6})$.

76.6. Для точки с заданными полярными координатами найдите её декартовы координаты:

а) $(\sqrt{2},\ -45^\circ)$; б) $(5,\ 60^\circ)$; в) $(10,\ -\frac{\pi}{2})$; г) $(4,\ \frac{3\pi}{2})$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

76.7. Для точки с заданными декартовыми координатами найдите её полярные координаты:

а) (3, 4); б) (-8, 6); в) (20, -25); г) $(-\sqrt{a},\ -\sqrt{2})$.

Ответ. а) ____;

б) ____;

в) ____;

г) ____.

76.8. Закончите предложения.

1) Окружность с центром в начале координат и радиусом R в полярных координатах задаётся уравнением ______________________________

____.

2) Кривая – Спираль Архимеда – в полярных координатах задаётся уравнением ____

____.

3) Кривая – Трилистник – в полярных координатах задаётся уравнением ____

____.

76.9. Изобразите ГМТ на плоскости, для которых полярный: а) радиус r удовлетворяет неравенству $1 \le r \le 3$; б) угол φ удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

76.10. Изобразите ГМТ на плоскости, для которых полярные координаты r и φ удовлетворяют неравенству: а) $2<r\leq 3$, $45^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$; б) $5\leq r<7$, $-\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$.

Ответ. а) ____

____;

б) ____

____.

76.11. Найдите расстояние между точками: а) $K(1,\ 45^\circ)$ и $L(2,\ -45^\circ)$; б) $M(3,\ \frac{\pi}{6})$ и $N(3,\ -\frac{\pi}{2})$

Ответ. а) ____

____

____;

б) ____

____

____.

76.12. Изобразите спираль Архимеда, заданную уравнением $r = \varphi$.

76.13. Изобразите спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.

76.14. Приведите несколько примеров точки на плоскости, которая имеет разные полярные координаты.

Ответ. ____

____

____

____.

С О Д Е Р Ж А Н И Е