И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

9 КЛАСС

2013

Пособие содержит подробные конспекты уроков по геометрии для 9-ых классов общеобразовательных учреждений. Оно соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе основного общего образования. Помимо теоретического материала в пособие включены математические диктанты, индивидуальные задания по карточкам, устные упражнения, самостоятельные и контрольные работы, материал для проведения занимательных моментов уроков.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержится учебный материал для проведения уроков по геометрии в 9 классе. Оно рассчитано на учебник геометрии Смирновой И.М., Смирнова В.А. для 7-9 классов общеобразовательных учреждений (М.: Мнемозина). Вместе с тем, оно может быть использовано при обучении по любому другому учебнику геометрии, входящему в Федеральный перечень учебной литературы.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) ***в направлении личностного развития*****:**

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) ***в метапредметном направлении*****:**

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) ***в предметном направлении*****:**

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Содержание пособия разбито на отдельные параграфы, а каждый параграф – на пункты. Название каждого пункта соответствует учебнику. В первых двух параграфах представлены особенности преподавания геометрии в условиях модернизации школьного образования; даны два варианта программы изучения учебного материала (с учетом дополнительного материала и без него) и тематическое планирование.

Далее идут подробные конспекты уроков по основным темам курса геометрии 9 класса (без дополнительного материала). Приводится анализ содержания учебного материала, его распределение по урокам, методические особенности изучения. В ряде случаев дается избыточный объем содержания. Это делается специально, чтобы учитель мог по собственному усмотрению, вкусу выбрать учебный материал. В пособие, помимо вопросов теории, включены математические диктанты, вопросы для учащихся по теории, индивидуальные задания по карточкам, задачи для самостоятельной работы, устные упражнения, контрольные работы, приводятся решения и ответы к задачам. Конспектам посвящен третий параграф пособия.

В названном учебнике часть параграфов отмечена звездочкой (*). Это необязательный дополнительный учебный материал для воспитания и развития учащихся, для организации их исследовательской деятельности, написания рефератов, проектов, для индивидуализации и дифференциации обучения. В четвертом параграфе пособия даются конспекты уроков по дополнительным параграфам учебника.

Далее (параграф 5 пособия) предлагаются учебные материалы для проведения итогового повторения курса геометрии 9 класса. Здесь дается перечень основных изученных понятий и теорем, а также список соответствующих упражнений по основным темам.

Завершается пособие ответами к контрольным работам.

В конце книги приведен авторский список литературы, который использовался при разработке данных методических рекомендаций.

§ 1. ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

9 класс

Вариант I программы – 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант II программы составлен с учётом дополнительного материала, 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант III программы составлен для классов с углублённым изучением математики, 3 часа в неделю, всего 102 часа за год.

Параграф учебника	Содержание	Количество часов		
		I	II	III
57	Измерение площадей. Площадь прямоугольника	3	2	3
58	Площадь параллелограмма	3	2	3
59	Площадь треугольника	3	2	3
60	Площадь трапеции	3	2	3
	Контрольная работа № 1	1	1	2
61	Площадь многоугольника	3	2	3
62	Площадь круга и его частей	3	2	3
63	Площади подобных фигур	2	2	3
64*	Изопериметрическая задача	-	2	3
65*	Равносоставленность и задачи на разрезание	-	2	3
	Контрольная работа № 2	1	1	2
66	Прямоугольная система координат	2	2	3
67	Расстояние между точками. Уравнение окружности	2	2	3
	Контрольная работа № 3	1	1	2
68	Векторы. Сложение векторов	2	2	3
69	Умножение вектора на число	2	2	3
70	Координаты вектора	2	2	3
71	Скалярное произведение векторов	2	2	3
	Контрольная работа № 4	1	1	2
72	Уравнение прямой	2	2	3
73*	Аналитическое задание фигур на плоскости	-	2	3
74*	Задачи оптимизации	-	2	3
75	Тригонометрические функции произвольного угла	2	2	3
76*	Полярные координаты	-	2	3
	Контрольная работа № 5	1	1	2
77-90	Начала стереометрии	16	15	18
	Контрольная работа № 6	1	1	2
	Итоговое повторение	10	7	12

§ 2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Вариант I (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10. Площадь (22 ч)	
Понятие площади плоской фигуры. Измерение площадей. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Площадь прямоугольника. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции. Формула Герона. Площадь многоугольника. Площадь правильного многоугольника. Площади круга, сектора и сегмента. Соотношение между площадями подобных фигур.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие площади плоской фигуры. Выводить формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, правильного многоугольника, круга, сектора и сегмента. Решать задачи на нахождение площадей плоских фигур.
11. Координаты и векторы (19 ч)	
Прямоугольная система координат. Исторические сведения. Кординаты середины отрезка. Расстояние между точками. Уравнение окружности. Векторы. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение прямой. Тригонометрические функции произвольного угла.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие прямоугольной системы координат. Приводить исторические сведения о Р. Декарте. Выводить и использовать формулы координат середины отрезка, расстояния между точками, уравнения прямой и окружности. Формулировать определение и иллюстрировать понятие: вектора, длины (модуля) вектора, коллинеарных и равных векторов, угла между векторами, суммы и разности векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения векторов. Выполнять операции над векторами.

	Находить длину вектора, координаты вектора, угол между векторами и скалярное произведение векторов. Формулировать определение и находить тригонометрические функции прозвольного угла. Выполнять проекты, связанные с использованием координатного и векторного методов при решении задач на вычисление и доказательство.
12. Начала стереометрии (17 ч)	
Основные понятия стереометрии. Фигуры в пространстве. Многогранники, их элементы. Примеры многогранников. Угол в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Параллельность в пространстве. Сфера и шар. Их основные элементы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников. Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. Моделирование многогранников. Кристаллы – природные многогранники. Исторические сведения. Площадь поверхности и объём.	Изображать точки, прямые и плоскости в пространстве. Формулировать определение и изображать: куб, параллелепипед, призму, пирамиду, правильные многогранники, цилиндр, конус, сферу и шар. Устанавливать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Формулировать определения и приводить примеры выпуклых и невыпуклых многогранников. Формулировать теорему Эйлера о выпуклых многогранниках и использовать её при решении задач. Формулировать определения и приводить примеры полуправильных и звёздчатых многогранников. Моделировать многогранники, используя развёртки и геометрический конструктор. Приводить примеры кристаллов и устанавливать их форму. Находить площади поверхностей и объёмы некоторых многогранников и круглых тел.
Итоговое повторение (10 ч)	

Вариант II (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10. Площадь (20 ч)	
Понятие площади плоской фигуры. Измерение площадей. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Площадь прямоугольника. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции. Формула Герона. Площадь многоугольника. Площадь правильного многоугольника. Площади круга, сектора и сегмента. Соотношение между площадями подобных фигур. *Изопериметрическая задача. *Задачи на разрезание.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие площади плоской фигуры. Выводить формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, правильного многоугольника, круга, сектора и сегмента. Решать задачи на нахождение площадей плоских фигур. *Формулировать и решать изопериметрические задачи и задачи на разрезание.
11. Координаты и векторы (25 ч)	
Прямоугольная система координат. Исторические сведения. Кординаты середины отрезка. Расстояние между точками. Уравнение окружности. Векторы. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение прямой. *Аналитическое задание фигур на плоскости. *Задачи оптимизации. Тригонометрические функции произвольного угла. *Полярные координаты.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие прямоугольной системы координат. Приводить исторические сведения о Р. Декарте. Выводить и использовать формулы координат середины отрезка, расстояния между точками, уравнения прямой и окружности. Формулировать определение и иллюстрировать понятие: вектора, длины (модуля) вектора, коллинеарных и равных векторов, угла между векторами, суммы и разности векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения векторов.

	Выполнять операции над векторами. Находить длину вектора, координаты вектора, угол между векторами и скалярное произведение векторов. *Приводить примеры аналитического задания фигур на плоскости. *Приводить примеры и решать задачи оптимизации. Формулировать определение и находить тригонометрические функции прозвольного угла. *Формулировать определение и иллюстрировать понятие полярных координат на плоскости. *Устанавливать связь между полярными и декартовыми координатами. *Решать задачи с использованием полярных координат.
12. Начала стереометрии (16 ч)	
Основные понятия стереометрии. Фигуры в пространстве. Многогранники, их элементы. Примеры многогранников. Угол в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Параллельность в пространстве. Сфера и шар. Их основные элементы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников. Правильные, полуправильные, звёздчатые многогранники. Моделирование многогранников. Кристаллы – природные	Изображать точки, прямые и плоскости. Формулировать определение и изображать: куб, параллелепипед, призму, пирамиду, правильные многогранники, цилиндр, конус, сферу и шар. Устанавливать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Формулировать определения и приводить примеры выпуклых и невыпуклых многогранников. Формулировать теорему Эйлера о выпуклых многогранниках и использовать её при решении задач.

многогранники. Исторические сведения. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса. Площадь поверхности и объём.	Формулировать определения и приводить примеры полуправильных и звёздчатых многогранников. Моделировать многогранники, используя развёртки и геометрический конструктор. Приводить примеры кристаллов и устанавливать их форму. Находить площади поверхностей и объёмы некоторых многогранников и круглых тел.
Итоговое повторение (7 ч)	

Вариант III (3 ч в неделю, всего 102 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
10. Площадь (31 ч)	
Понятие площади плоской фигуры. Измерение площадей. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Площадь прямоугольника. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции. Формула Герона. Площадь многоугольника. Площадь правильного многоугольника. Площади круга, сектора и сегмента. Соотношение между площадями подобных фигур. *Изопериметрическая задача. *Задачи на разрезание.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие площади плоской фигуры. Выводить формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, правильного многоугольника, круга, сектора и сегмента. Решать задачи на нахождение площадей плоских фигур. *Формулировать и решать изопериметрическую задачу. *Выполнять проекты, связанные с изопериметрической задачей и решением задач на разрезание.
11. Координаты и векторы (39 ч)	
Прямоугольная система координат. Исторические сведения. Кординаты середины отрезка. Расстояние между точками. Уравнение окружности. Векторы. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение прямой. *Аналитическое задание фигур на плоскости. *Задачи оптимизации. Тригонометрические функции произвольного угла. *Полярные координаты.	Формулировать определение и иллюстрировать понятие прямоугольной системы координат. Приводить исторические сведения о Р. Декарте. Выводить и использовать формулы координат середины отрезка, расстояния между точками, уравнения прямой и окружности. Формулировать определение и иллюстрировать понятие: вектора, длины (модуля) вектора, коллинеарных и равных векторов, угла между векторами, суммы и разности векторов, умножения вектора на число, скалярного произведения векторов.

	Выполнять операции над векторами. Находить длину вектора, координаты вектора, угол между векторами и скалярное произведение векторов. *Приводить примеры аналитического задания фигур на плоскости. *Приводить примеры и решать задачи оптимизации. Формулировать определение и находить тригонометрические функции прозвольного угла. *Формулировать определение и иллюстрировать понятие полярных координат на плоскости. *Устанавливать связь между полярными и декартовыми координатами. *Решать задачи с использованием полярных координат. Выполнять проекты, связанные с использованием координатного и векторного методов при решении задач на вычисление и доказательство.
12. Начала стереометрии (20 ч)	
Основные понятия стереометрии. Фигуры в пространстве. Многогранники, их элементы. Примеры многогранников. Угол в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Параллельность в пространстве. Сфера и шар. Их основные элементы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников.	Изображать точки, прямые и плоскости. Формулировать определение и изображать: куб, параллелепипед, призму, пирамиду, правильные многогранники, цилиндр, конус, сферу и шар. Устанавливать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Формулировать определения и приводить примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.

Правильные, полуправильные, звёздчатые многогранники. Моделирование многогранников. Кристаллы – природные многогранники. Исторические сведения. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса. Площадь поверхности и объём.	Формулировать теорему Эйлера о выпуклых многогранниках и использовать её при решении задач. Формулировать определения и приводить примеры полуправильных и звёздчатых многогранников. Моделировать многогранники, используя развёртки и геометрический конструктор. Приводить примеры кристаллов и устанавливать их форму. Находить площади поверхностей и объёмы некоторых многогранников и круглых тел. Выполнять проекты на темы, связанные с ориентацией поверхности и листом Мёбиуса.
Итоговое повторение (12 ч)	

§ 3. КОСПЕКТЫ УРОКОВ
9 класс

57. Измерение площадей. Площадь прямоугольника (уроки 1, 2)

Замечание. Номера (с 57 по 90) пунктов соответствуют параграфам названного учебника. Номера 1–26 и 27-56 представлены в аналогичных методических пособиях соответственно для 7 и 8 классов тех же авторов.

Цель – обобщить знания учащихся о свойствах площади фигур, ввести понятие равновеликих фигур, вывести формулу площади прямоугольника, научиться применять ее при решении задач.

Урок 1

I. Устная работа на повторение

1) Что такое длина отрезка?

2) Как измеряется длина отрезка?

3) В каком случае длина отрезка выражается натуральным числом?

4) Может ли длина отрезка выражаться: а) конечной; б) бесконечной десятичной дробью?

5) Какими свойствами обладает длина отрезка?

6) Что принимается за единицу измерения длины отрезка?

II. Новый материал

В тетради (на клетчатой бумаге) изобразим отрезок: а) AB, равный длине 2 клеток; б) CD, равный длине 10 клеток; в) EF, равный длине 5 клеток. Измерим теперь отрезок, приняв за единицу длины 1 см, и запишем получившиеся результаты.

Ответ. а) 1 см; б) 5 см; в) 2,5 см.

Вопросы

- Какой отрезок называется единичным?

- По аналогии с единичным отрезком, какой квадрат можно назвать единичным?

Теперь построим квадраты, стороны которых равны взятым отрезкам, и найдем их площади, запишем соответствующие результаты. Какое наименование единиц площади следует взять, как оно будет называться?

Ответ. а) 1 см^2; б) 25 см^2; в) 6,25 см^2.

Вывод. Для измерения площади фигуры $Ф$ сначала выясняют, сколько раз в ней целиком укладывается единичный квадрат. Если при этом единичный квадрат укладывается n раз без остатка, то процесс измерения на этом заканчивается, и полученное число n считается площадью фигуры

Φ. Если единичный квадрат укладывается в фигуре Φ с остатком Φ', то число n считается приближенным значением площади.

Вопрос. Как, проводя аналогию с измерением отрезка, в этом случае нужно поступить?

После обсуждения ответа на этот вопрос приходлим к следующему: в этом случае единичный квадрат нужно разбить на 100 квадратов со стороной, равной одной десятой единичного отрезка. Подсчитывается число m этих квадратов, целиком укладывающихся в остатке Φ'. Если при этом квадраты укладываются в фигуре Φ' без остатка, то процесс измерения считается законченным и число $n + m\cdot 0{,}01$ считается площадью фигуры Φ.

Если квадраты укладываются в фигуре Φ' с остатком Φ'', то единичный квадрат разбивается на 10000 квадратов со стороной, равной одной сотой единичного отрезка, и повторяется описанная процедура измерения. В результате процесс измерения площади может на некотором шаге закончиться. В этом случае площадь фигуры будет выражаться конечной десятичной дробью. Однако может случиться, что процесс измерения не закончится, ни на каком шаге. В этом случае площадь фигуры может выражаться бесконечной десятичной дробью.

Определение. ***Площадь фигуры*** – это число, полученное в результате измерения и показывающее сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Задание. Изобразите квадрат со стороной 4 см и прямоугольник со сторонами 8 см и 2 см. Сколько квадратных сантиметрах укладывается в них? Что можно сказать о площадях данных фигур?

Определение. Две фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют одинаковую площадь.

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай прямоугольника, в котором одна из смежных сторон равна единице, а другая равна a (рис. 1, а).

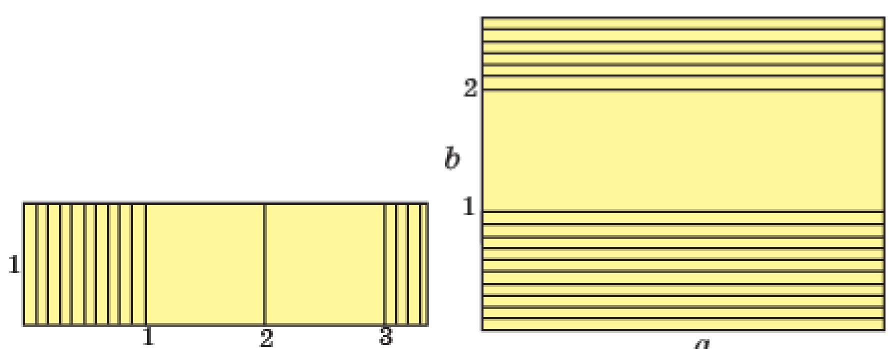


Рис. 1

Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение единичного квадрата на такое же число равных частей. Поэтому, если единичный отрезок укладывается в стороне a раз, то единичный квадрат будет укладывается в прямоугольнике также a раз. Следовательно, площадь этого прямоугольника будет равна a. Рассмотрим теперь общий случай прямоугольника со сторонами a и b (рис. 1, б). Заметим, что разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение прямоугольника со сторонами a и 1 на такое же число равных частей. Поскольку единичный отрезок укладывается в стороне b раз, то прямоугольник со сторонами a и 1 будет укладываться в исходном прямоугольнике b раз. Так как в каждом из них единичный квадрат укладывается a раз, то в исходном прямоугольнике единичный квадрат будет укладываться ab раз, т.е. площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Итак, площадь S прямоугольника со смежными сторонами a, b вычисляется по формуле

$$S = a \cdot b.$$

Задание. На рисунке (рис. 2) укажите равновеликие фигуры.

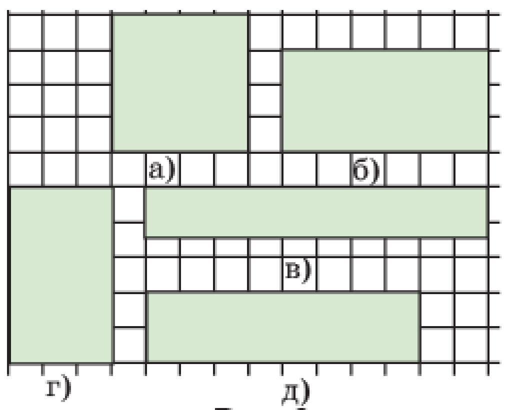


Рис. 2

Ответ. Равновеликие фигуры изображены на рисунках а) и д); в) и г).

III. Закрепление нового материала

1. Одна сторона прямоугольника равна 12 см, другая: а) на 3 см больше; б) в 3 раза меньше. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ. а) 180 см^2; б) 48 см^2.

2. Сторона квадрата равна: а) 3 см; б) 1,7 дм; в) a. Найдите его площадь. Сделайте вывод.

Ответ. а) 9 см^2; б) 2,89 дм^2; в) a^2.

Вывод. Площадь квадрата со стороной a вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

3. Стороны прямоугольника равны 9 см и 4 см. Нарисуйте равновеликий ему квадрат.

Ответ. Квадрат со стороной 6 см.

4*. Периметр прямоугольника и квадрата равен каждый 76 мм, у прямоугольника одна сторона меньше другой на 8 мм. У какой фигуры площадь больше и на сколько квадратных сантиметров?

Ответ. У квадрата на 0,16 см^2.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (параграф 57 учебника, будем здесь и далее сокращенно писать п. 57): знать, что называется площадью фигуры, свойства площади фигуры, определение равновеликих фигур, теорему о площади прямоугольника.

2. Решить задачи.

1) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 72 см, а стороны относятся как 2:7.

Ответ. 224 см^2.

2) Что больше площадь квадрата, описанного около окружности, или площадь квадрата, вписанного в эту же окружность, и во сколько раз?

Ответ. Описанного квадрата в 2 раза.

3) Найдите площадь S квадрата по его диагонали a.

Ответ. $\frac{a^2}{2}$.

4*) На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABE так, что его стороны AE и BE пересекают отрезок CD в точках M и N, причем точка M - середина отрезка AE. Докажите, что прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABE равновелики.

Решение. См. рисунок 3,

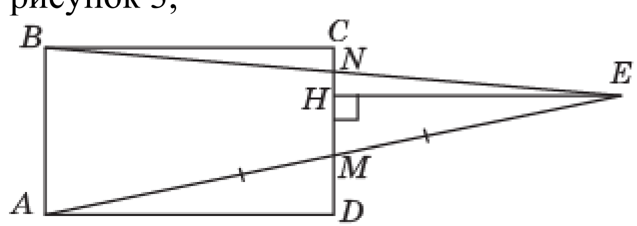


Рис. 3

где $EH \perp CD$, $\Delta ADM = \Delta EHM$ (прямоугольные, равны по гипотенузе и острому углу) и $\Delta BCN = \Delta EHN$ (прямоугольные, равны по катету и острому углу); таким образом, прямоугольник $ABCD$ и треугольник ABE состоят из фигур, имеющих соответственно равные площади, следовательно, и сами данные фигуры равновелики.

Замечание. Задачи, помеченные звездочкой (*), не являются обязательными.

Урок 2

I. Математический диктант

Замечание. Напоминаем, что, как известно, математические диктанты являются одной из форм письменной работы. Они весьма продуктивны, активизируют деятельность учащихся, индивидуализируют ее, развивают слуховую память, внимание. Это хорошее мобилизирующее начало урока. В методику проведения математического диктанта (назовем МД) входят следующие вопросы: 1) Цель проведения МД на данном уроке. 2) Содержание МД. 3) Место МД на уроке, его продолжительность. 4) Перечень знаний, умений и навыков учащихся, необходимых для выполнения МД. 5) Способ проведения. 6) Способ проверки. 7) Оценка работы учащихся.

Математический диктант имеет свои специфические особенности. Прежде всего, задания воспринимаются учащимися на слух, поэтому они должны воспроизводиться четко, громко. Существует практика записи содержания диктантов по вариантам на два голоса (мужского и женского). Включаемые в диктант задания должны быть ясными и краткими, ребята пишут только ответ (как правило, продолжают начатую фразу). Продолжительность не должна быть большой, в среднем не превышать десяти минут. Удобно математический диктант проводить в специальной тетради или на отдельных листочках с копировальной бумагой. Ребята сдадут задание, а по копиям проверят решения. Важно проверить диктант сразу после его окончания. Это удобно сделать с помощью кодоскопа или проектора, заранее подготовив нужный учебный материал. Нужно четко договориться с учащимися, как будет оцениваться математический диктант.

Вариант 1

1. Измерение длины отрезка основано на сравнении…
2. За единицу измерения площадей принимается …
3. Квадратным дециметром называется …
4. Площадью фигуры называется …
5. Площадь квадрата равна …
6. Периметр квадрата, имеющего площадь 36 см^2, равен …

Вариант 2

1. Измерение площади фигуры основано на сравнении …
2. Единичным квадратом называется …
3. Квадратным километром называется …
4. Две фигуры называются равновеликими, если …
5. Площадь прямоугольника равна …

6. Площадь квадрата, имеющего периметр 36 см, равна …

II. Проверка математического диктанта

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые экземпляры работы, а копии оставляют себе для проверки, которую организуем с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение задач

1. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке **(**рис. 4, а).

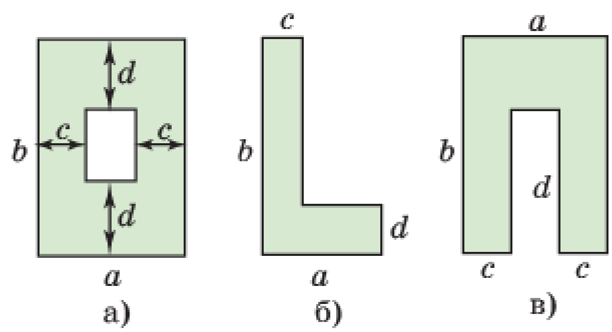


Рис. 4

Ответ. $2(2ad + bc - 2cd)$.

2. Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см. Нарисуйте равновеликий ему: а) прямоугольник, сторона которого равна 10 см; б) равновеликий ему крадрат.

Ответ. а) Прямоугольник со сторонами 10 см и 3,6 см; б) квадрат со стороной 6 см.

3. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 74 дм, а площадь равна 3 м^2.

Ответ. 12 дм и 25 дм.

4*. Постройте квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

Решение см. на рисунке 5, где a, b – стороны данного прямоугольника, CH – сторона искомого квадрата, она равна $\sqrt{ab}$.

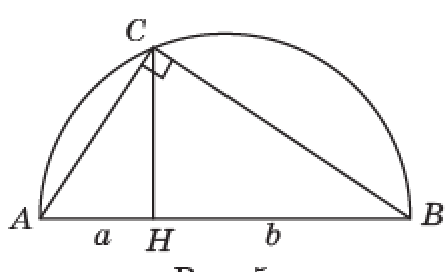


Рис. 5

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 57 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите площади фигур, изображенных на рисунках (рис. 4, б, в).

Ответ. Рисунок 4, б: $ad + bc - cd$; рисунок 4, в: $ab - ad + 2cd$.

2) Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см. Нарисуйте равновеликий ему прямоугольник, стороны которого относятся как 3:4.

Ответ. Прямоугольник со сторонами $3\sqrt{3}$ см и $4\sqrt{3}$ см; $\sqrt{3}$- гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 см и $\sqrt{2}$ см; $\sqrt{2}$ см – диагональ квадрата со стороной 1 см.

3) Докажите, что если фигура Φ' содержится в фигуре Φ'', то имеет место неравенство $S(\Phi') \leq S(\Phi'')$.

Решение. Фигуру Φ'' можно представить составленной из данной фигуры Φ' и некоторой фигуры F, следовательно, площадь фигуры Φ'' равна сумме площадей фигур Φ' и F, т.е. $S(\Phi'')=S(\Phi')+S(F)$, поскольку площади выражаются неотрицательными числами, то имеет место требуемое неравенство, а именно: $S(\Phi') \leq S(\Phi'')$.

4*) Используя рисунок (рис. 6), докажите, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата с тем же периметром. Выведите из этого, что среднее геометрическое ($\sqrt{ab}$) двух положительных чисел a и b не превосходит их среднего арифметического ($\frac{a+b}{2}$).

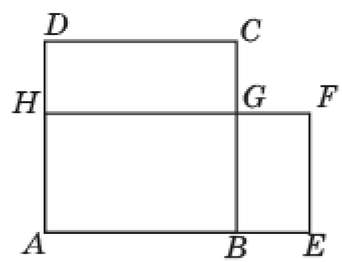


Рис. 6

Решение. По условию задачи $AB+AD = AE+AH$, откуда $AD - AH = AE - AB$, т. е. $HD = BE$, значит, $S_{BEFG} < S_{HDCG}$, поскольку $EF < DC$; таким образом, $S_{AHFE} < S_{ABCD}$. Обозначив стороны прямоугольника $AEFH$ и квадрата $ABCD$ через соответственно a, b и c, получим, что $c = \frac{a+b}{2}$, опираясь на предыдущий факт, имеем $ab < (\frac{a+b}{2})^2$, откуда $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, заметим, что если $a = b$, то $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$, окончательно получаем $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

58. Площадь параллелограмма
(уроки 3, 4)

Цель – ввести понятие высоты параллелограмма; вывести формулы нахождения площади параллелограмма и научиться применять их при решении задач.

Урок 3

I. Проверка домашнего задания

Шесть учеников приглашаются за первые парты (специально освобождены) для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1) Что такое площадь фигуры? Сформулируйте основные свойства площади фигур.

2) Как измеряется площадь фигур?

Задания 2, 4, 6

1) Какие фигуры называются равновеликими?

2) Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.

Четверым (или пяти, шести, по усмотрению учителя) учащимся предлагаются индивидуальные задания. Они даются на отдельных карточках и выполняются на своих местах. При этом разрешается пользоваться тетрадями. Задания могут оцениваться отметкой или знаками "+", "-", "$\pm$", "$\mp$" и т. п.

Карточка

1) Как изменится площадь квадрата, если его диагональ увеличить в 2 раза? Как при этом изменится его периметр?

2) Площадь прямоугольника равна Q. Найдите его стороны, если они относятся как m:n.

Ответы. 1) Сторона квадрата увеличится в 2 раза, значит, площадь увеличится в 4 раза, периметр увеличится в 2 раза. 2) $m\sqrt{\frac{Q}{mn}}$ и $n\sqrt{\frac{Q}{mn}}$.

Задание для класса

1. Как изменится площадь квадрата, если его диагональ уменьшить в 4 раза? Как при этом изменится его периметр?

2. Диагонали квадрата *ABCD* пересекаются в точке *O*, точки *E*, *F*, *G* и *H* – середины отрезков соответственно *AO*, *BO*, *CO* и *DO*. Найдите площадь четырехугольника *EFGH*, если сторона данного квадрата равна: а) 4 см; б) *a*.

3*. Докажите, что из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Ответы. **1.** Площадь уменьшится в 16 раз, периметр уменьшится в 4 раза. **2.** а) 4 см^2; б) $\frac{a^2}{4}$. **3*.** Пусть в окружность вписаны прямоугольник со сторонами a, b и квадрат со стороной c, по доказанному в задаче 4* на уроке 2 этапа IV, имеем $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, откуда $ab < (\frac{a+b}{2})^2$, т. е. $ab < \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{d^2}{2}$, где d – диаметр данной окружности; площадь квадрата равна $c^2 = \frac{d^2}{2}$, таким образом, $ab < c^2$.

К доске вызываем трех учащихся (назовем их $У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение домашней задачи 2 (см. этап IV урока 2).

Дополнительные вопросы для учеников, работающих у доски (такие вопросы могут задавать и сами учащиеся класса)

- Какая фигура называется прямоугольником?
- Какая фигура называется квадратом?
- Что называется периметром многоугольника?

II. Устная работа

Замечание. Устная работа является важным этапом, или дидактическим моментом, урока, так как выполняет существенные функции, например, такие, как подготовка учащихся к работе на уроке, в частности, к восприятию нового материала; систематическое повторение пройденного; развитие учащихся, - остаются не менее актуальными и для старшеклассников. Кроме этого, устная работа активизирует учебную деятельность учащихся. Это связано как с содержанием, так и с формой проведения. В содержание устной работы включаем упражнения четырех типов: на закрепление и отработку текущего материала; на повторение; упражнения с элементами творчества, это может быть, например, задача с новой для учащихся пространственной ситуацией или элементами подготовки к восприятию нового материала; упражнения развивающего, занимательного характера.

При планировании устной работы необходимо иметь в виду, что ее продолжительность не должна превышать 10 минут (оптимально 7-8 минут). Начинать устную работу, желательно, с легкого задания, чтобы не подавить инициативу ребят, постепенно повышая трудность задач и вводя элементы творчества. Устная работа – это хорошее активное мобилизующее, настраивающее на работу начало урока. Для стимулирования активности и инициативы учащихся, возможности себя проявить мы ввели следующую систему оценок во время устной работы: за каждый ответ учащийся получает

"+", "-" или "±", "∓". Если учащийся (может быть за несколько уроков) набрал пять представленных знаков, например, все "+", то он получает оценку - "5", за четыре "+" и один "-" - оценку "4" и т.д., учитываются все возможные комбинации сочетания четырех знаков. Личный опыт работы показывает, что такая система оценок с успехом принимается учащимися и нравится им. Причины этого заключаются в том, что она позволяет, довольно, гибко реагировать на ответы, ребята могут проявить себя, сами добиться хорошей оценки.

В устной работе особенно ярко проявляется еще один аспект современного обучения - возможности для формирования и развития диалоговой культуры учащихся.

Упражнения

1) Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 3 раза; в) изменить в k раз?

2) Как изменится площадь квадрата, если его сторону: а) увеличить в n раз; б) уменьшить в m раз?

3) Найдите на рисунке (рис. 7) площади заштрихованных фигур, если площадь квадрата $ABCD$ равна 9 кв. ед. и каждая его сторона разделена на три равные части.

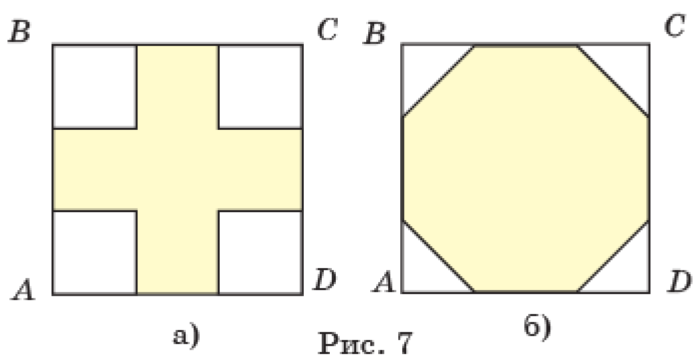


Рис. 7

4) Может ли быть прямоугольник, длины сторон которого выражаются иррациональными числами, и который равновелик прямоугольнику, длины сторон которого выражаются рациональными часлами?

Ответы. 1) а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) изменится в k^2. 2) а) Увеличится в n^2 раз; б) уменьшится в m^2. 3) а) 5 кв.ед.; б) 7 кв.ед. 4) Да, например, $3 \cdot 4 = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$.

III. Новый материал

Изобразим треугольник ABC и проведем его высоту BH, теперь изобразим параллелограмм $ABCD$ и из вершины B опустим на сторону AD или ее продолжение перпендикуляр BH. Возьмем произвольную точку M на стороне BC и опустим из нее перпендикуляр MP на сторону AD или ее продолжение.

Вопросы

- Что можно сказать о перпендикулярах BH и MP?
- Как можно назвать проведенные перпендикуляры BH и MP?

Определение. ***Высотой параллелограмма*** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одной стороны на противоположную сторону или ее продолжение.

В параллелограмме $ABCD$ проведем высоты BH и CG.

Вопросы

- Что можно сказать о прямоугольных треугольниках ABH и DCG?
- Какой вид имеет четырехугольник $BCGH$?
- Что можно сказать о площадях четырехугольников $ABCD$ и $BCGH$?
- Какой вывод можно сделать о площади параллелограмма?

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 8, а).

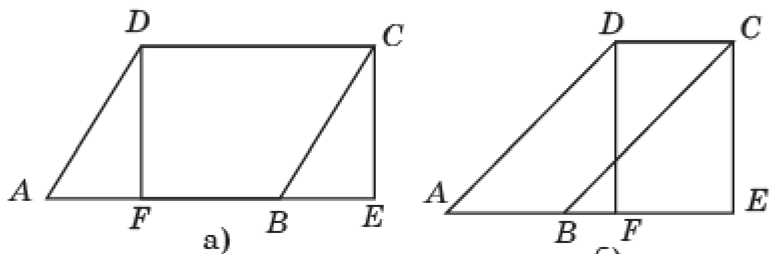


Рис. 8

Построим прямоугольник $FECD$, имеющий стороны CD и DF, где DF – высота параллелограмма. Докажем, что этот прямоугольник и параллелограмм равновелики. Рассмотрим случай, когда точка F лежит внутри отрезка AB. Параллелограмм будет составлен из трапеции $FBCD$ и треугольника AFD. Прямоугольник составлен из той же трапеции и треугольника BEC. Причем треугольник AFD равен треугольнику BEC (по гипотенузе и катету). Следовательно, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, т. е. равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Аналогично доказывается для случая, когда точка F лежит вне отрезка AB (рис. 8, б).

Итак, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = ah.$$

IV. Закрепление нового материала

1. Стороны параллелограмма равны 6 см и 4 см. Одна из высот равна 5 см. Найдите другую высоту. Сколько решений имеет задача?

2. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, стороны - 5 см и 10 см. Найдите высоты этого параллелограмма.

3. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 11 дм и 12 дм, а угол между ними равен 60°.

4*. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, делит его на две равновеликие части.

Ответы. **1.** $3\frac{1}{3}$ см. **2.** 8 см и 4 см. **3.** $66\sqrt{3}$ дм^2. *Вывод*. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними. Итак, площадь параллелограмма выражается формулой

$$S = ab \sin \varphi,$$

где a, b – смежные стороны параллелограмма, φ – угол между ними. **4*.** Точка пересечения диагоналей параллелограмма является центром его симметрии, следовательно, любая прямая, проходящая через него, делит параллелограмм на две равные, следовательно, и равновеликие части.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 58 учебника): знать определение высоты параллелограмма, формулировку и доказательство теоремы о площади параллелограмма.

2. Решить задачи.

1) В параллелограмме $ABCD$ CF и CE - высоты (рис. 9).

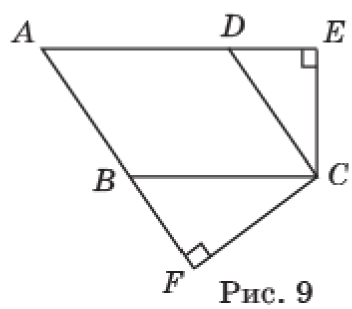


Рис. 9

Докажите, что $AB \cdot CF = AD \cdot CE$.

2) Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 см и 5 см, а угол между ними равен 150°.

Ответ. 10 см^2.

3) Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

Ответ. 30^{o}.

4*) В параллелограмме вырезали дырку прямоугольной формы. Проведите прямую, делящую оставшуюся часть параллелограмма на две равновеликие части. Сколько решений имеет задача?

Решение. Точки пересечения диагоналей данных четырехугольников являются соответственно их центрами симметрии, следовательно, прямая, проходящая через них, является искомой; задача имеет одно решение, если точки пересечения диагоналей не совпадают, и бесконечно много решений, если точки пересечения диагоналей совпадают.

Урок 4

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаются шестеро учащихся для опроса по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Определение высоты параллелограмма.
2. Теорема о площади параллелограмма.

Задания 2, 4, 6

1. Следствие из теоремы о площади параллелограмма.
2. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Сравните их площади.

Ответ. Площадь квадрата больше, так как $S_{кв.} = a^2$, $S_{ромба} = a^2 \cdot \sin\alpha$, где a - сторона квадрата и ромба, поскольку $\sin\alpha < 1$, имеем $S_{кв.} > S_{ромба}$.

Четверо (шестеро) учащихся получают индивидуальные задания по карточкам для работы на местах.

Карточка

1) Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 11 см и 12 см, а один из углов равен 30°.

2) Стороны параллелограмма равны 16 см и 8 см. Высота, опущенная на первую сторону, равна 6 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

3*) В четырехугольнике $CDEF$ противоположные углы C и E – прямые, стороны ED и EF равны и высота $EH=h$, где $H \in CF$. Найдите площадь данного четырехугольника.

Ответы. 1) 66 см^2. 2) 12 см. 3*) h^2.

Задание для класса

1. Периметр параллелограмма равен 72 дм, высоты равны 3 дм и 9 дм. Найдите площадь параллелограмма.

2. Найдите формулу для вычисления площади параллелограмма по его периметру, равному P, и расстояниям d_1, d_2 от точки пересечения диагоналей до сторон.

3*. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

Ответы. **1.** 81 дм^2. **2.** $\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} P$. **3*.** Пусть дан ромб $ABCD$, где $AH \perp BC$ и AC – меньшая диагональ, тогда CH=5 см; обозначив сторону ромба через a, получим $a^2 = (a - 5)^2 + 12^2$, откуда находим $a = 16{,}9$ см, таким образом, площадь параллелограмма равна 202,8 см^2.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение домашней задачи 3 (см. этап V урока 3).

Дополнительные вопросы

- Какая фигура называется треугольником?
- Какая фигура называется многоугольником?
- Как найти внутренний угол выпуклого многоугольника?

II. Устная работа

1) Площадь параллелограмма равна 24 см^2, расстояния от точки пересечения его диагоналей до сторон равны 2 см и 3 см. Найдите периметр параллелограмма.

2) Найдите площадь ромба со стороной 9 см и тупым углом 120°.

3) На рисунке (рис. 10) укажите равновеликие фигуры.

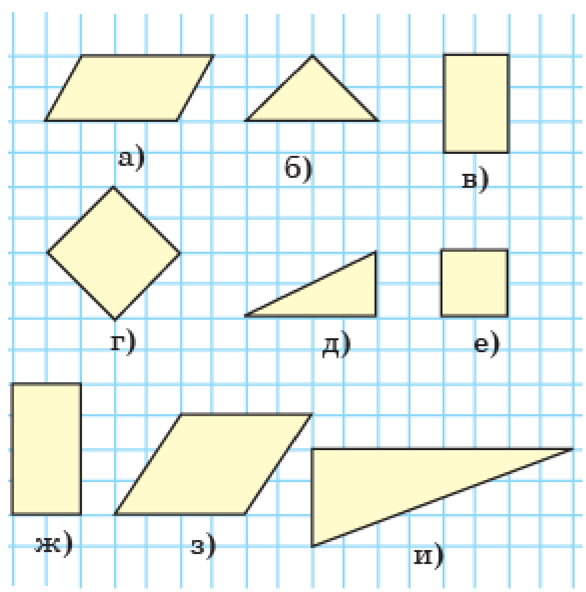


Рис. 10

4) Найдите площадь ромба, если его сторона равна 3 см, а радиус вписанного круга равен 1 см.

Ответы. **1)** 20 см. **2)** $40{,}5\sqrt{3}$ см^2. **3)** а, г, ж; б, д, е; в, з, и. **4)** 6 см^2.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите стороны прямоугольника площади 144 дм^2, если они относятся как 9:4.

2. В прямоугольном треугольнике *MON* ($\angle O = 90°$) проведена высота *OH*. Докажите, что прямоугольник со сторонами *MN* и *MH* равновелик квадрату со стороной *MO*.

3*. Отрезок *AB* делится точками *C* и *D* соответственно на равные и неравные части. Докажите, что площадь прямоугольника со сторонами равными *DA* и *DB* равна разности площадей квадратов со сторонами, равными соответственно *CB* и *CD*.

Вариант 1

1. Площадь прямоугольника равна 225 м^2, соседние стороны относятся как 1:9. Найдите его периметр.

2. В прямоугольном треугольнике *DEF* ($\angle D = 90°$) проведена высота *DP*. Докажите, что квадрат со стороной *DP* равновелик прямоугольнику со сторонами *EP* и *FP*.

3*. Каким образом следует разделить отрезок *MN* точкой *H*, чтобы прямоугольник со сторонами равными *HM* и *HN* имел наибольшую площадь?

Ответы. *Вариант 1.* 1. 18 дм, 8 дм. 3*. *Указание*. Точка *C* делит отрезок *AB* пополам. *Вариант 2.* 1. $20\sqrt{29}$ м. 3*. Пополам.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится через кодоскоп или проектор.

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 3).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 57, п. 58 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите площадь ромба, если его углы относятся как 1:5, а сторона равна a.

Ответ. $\frac{a^2}{2}$.

2) Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ. 12 см^2.

3) Постройте квадрат, площадь которого в два раза меньше площади данного квадрата.

Ответ. Нужно построить квадрат со стороной, равной половине диагонали данного квадрата.

4*) Найдите геометрическое место вершин параллелограммов, равновеликих данному и имеющих с ним одну общую сторону.

Ответ. Две параллельные прямые.

59. Площадь треугольника
(уроки 5, 6, 7)

Цель – вывести формулы площади треугольника, в том числе формулу Герона и научиться применять их при решении задач.

Урок 5

I. Математический диктант

Вариант 1

1. Параллелограммом называется …
2. Площадь ромба равна произведению его стороны на …
3. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на …
4. Ромб и квадрат имеют соответственно равные стороны, меньшую площадь имеет …
5. Диагональ единичного квадрата равна …
6. Площадь ромба со стороной 4 см и углом $60°$ равна …

Вариант 2

1. Ромбом называется …
2. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на …
3. Площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на …
4. Прямоугольник и параллелограмм имеют соответственно равные стороны, большую площадь имеет …
5. Диагональ квадрата равна $5\sqrt{2}$ см, площадь квадрата равна …
6. Площадь ромба со стороной 5 см и углом $150°$ равна …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим параллелограмм $ABCD$, у которого $AB < AD$ и $BD < AC$. Проведем высоту BH к стороне AD. Сравним площади данного параллелограмма и треугольника ABD. Сделаем предположение о площади треугольника.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC. Достроим его до параллелограмма $ABDC$. Треугольники ABC и DCB равны. Следовательно, равны и их площади. Поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$. Сторона AB этого параллелограмма равна стороне треугольника, а высота, проведенная к этой стороне, – высоте треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Итак, площадь S треугольника со стороной a и высотой h, проведенной к ней, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Задание. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) по катетам, равным 4 см и 5 см. Можно ли по эти данным найти его площадь? Сделайте вывод.

Вывод. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Задание. Постройте треугольник ABC по сторонам AB=4 см, AC=5 см и $\angle A$=45°. Можно ли по этим данным найти его площадь? Сделайте вывод.

Вывод. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними ($S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$).

IV. Закрепление нового материала

1. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.

Ответ. а) 14 см^2; б) 21 м^2.

2. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной: а) 4 см; б) a.

Ответ. а) $4\sqrt{3}$ см^2; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 7 см, а угол между ними равен 30°.

Ответ. 5,25 см^2.

4. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсекаемого его средней линией?

Ответ. $\frac{1}{4}$.

5*. Докажите, что если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 59 учебника до формулы Герона): знать формулы для нахождения площади треугольника и уметь выводить их.

2. Решить задачи.

1) Площадь треугольника равна 48 см^2. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см.

Ответ. 3 см.

2) Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 200 см^2.

Ответ. $20\sqrt{2}$ см.

3) Докажите, что если два треугольника имеют по две равные стороны, а углы, заключенные между ними, в сумме составляют 180°, то эти треугольники равновелики.

Указание. Синусы данных углов равны.

4*) Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2?

Ответ. Да, пример такого треугольника показан на рисунке 11.

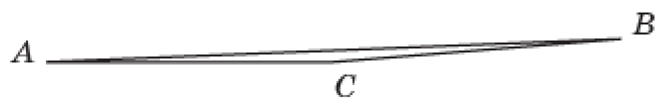


Рис. 11

Урок 6

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Треугольником называется …
2. Катетами прямоугольного треугольника называются …
3. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на …
4. Площадь прямоугольного треугольника равна …
5. Площадь равностороннего треугольника со стороной 2 дм равна …
6. Средняя линия треугольника, площадь которого равна Q, отсекает от него треугольник площади …

Вариант 2

1. Высотой треугольника называется …
2. Прямоугольным треугольником называется …
3. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на …
4. Площадь прямоугольного треугольника с катетами 10 см и 11 см равна …
5. Высота равностороннего треугольника со стороной 6 дм равна …
6. Площадь треугольника, образованного средними линиями другого треугольника площади Q, равна …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопросы

- Какими элементами определяется треугольник?

Ответ. 1) Двумя сторонами и углом между ними; 2) стороной и двумя прилежащими к ней углами; 3) тремя сторонами.

- Зная их, как определить площадь треугольника?

Ответ. Если заданы две стороны a, b треугольника и угол γ между ними, то площадь (S) треугольника определяется, как было доказано на прошлом уроке, по формуле $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$.

Задание. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

Решение. По теореме синусов определим сторону AC данного треугольника, а именно: $AC = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Следовательно, формула для нахождения площади треугольника в этом случае выглядит так

$$S = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Задание. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$.

Решение. Воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Выразим $\sin C$ через стороны треугольника по теореме косинусов, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Отсюда получим, что $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Значит,

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1+\cos C) \cdot (1-\cos C) =$$

$$= \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2b^2}.$$

Учитывая, что $a+b+c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр треугольника, получаем

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Эта формула, выражающая площадь треугольника через его стороны, была впервые найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским (приблизительно I век до н.э.) и носит название ***формулы Герона.***

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите площадь треугольника, если одна из его сторон равна 9 см и два его угла, прилегающие к ней, равны по 45°.

2. Вычислите площадь треугольника по трем сторонам 13, 14, 15.

3. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

4*. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.

Ответы. **1.** 40,5 см^2. **2.** 84 кв. ед. **4*.** См. рисунок 12, где O – центр впиасной в треугольник окружности, $OH=OG=OP=r$.

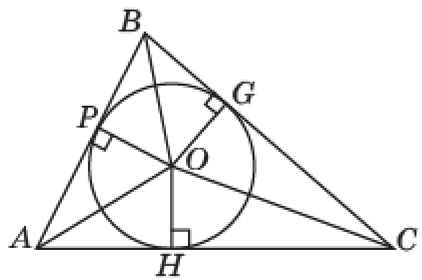


Рис. 12

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 59 учебника до конца): знать формулы для нахождения площади треугольника и уметь выводить их.

2. Решить задачи.

1) В треугольнике ABC сторона AB в три раза больше стороны AC. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

Ответ. 3:1.

2) Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены между собой. Какой получился четырехугольник и какова его площадь, если площадь данного параллелограмма равна 16 см^2?

Ответ. Получился параллелограмм, площадь которого равна 8 см^2.

3) Вычислите площадь треугольника по трем сторонам 5, 5, 6.

Ответ. 12 кв.ед.

4) Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.

Решение. В теореме синусов было доказано, что имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где ABC – данный треугольник со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Воспользуемся следующей формулой для нахождения площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$, но $\sin C = \frac{c}{2R}$, таким образом получим $S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R}$, откуда $R = \frac{abc}{4S}$.

5*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взяты точки E и F – середины сторон соответственно AB и CD, и проведены отрезки EC и FA (рис. 13). Найдите площадь образовавшегося четырехугольника $AECF$, если площадь данного четырехугольника равна Q.

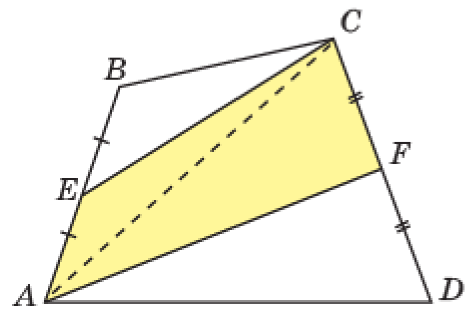


Рис. 13

Решение. Проведем диагональ AC, тогда $S_{ACE}=S_{BCE}=q_1$ и $S_{ACF}=S_{ADF}=q_2$, значит, $2(q_1+q_1) = Q$, откуда $S_{AECF} = q_1+q_1=\frac{Q}{2}$.

Урок 7

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – приглашаем 6 учащихся за первые парты.

Задания 1, 3, 5

1. Теорема о площади треугольника.
2. Вычисление площади равностороннего треугольника по его стороне a.

Задания 2, 4, 6

1. Вывод формулы Герона.
2. Вычисление площади прямоугольного треугольника по его катетам.

Индивидуальные задания по карточкам - выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами 5 дм и 12 дм.

2) Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны a и b и угол между ними равен $60°$.

3) Разделите треугольник на два равновеликих треугольника.

Ответы. 1) 30 дм^2. 2) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 3) Нужно провести медиану треугольника.

Задание для класса

1. В параллелограмме одна из его вершин соединена с серединами противоположных сторон и с противоположной вершиной. Докажите, что образовавшиеся при этом треугольники равновелики.

2. В треугольнике ABC две стороны равны a и b. При каком угле между ними площадь треугольника будет наибольшей?

3*. Постройте прямоугольник, равновеликий данному треугольнику.

Ответы. **2.** 90°. **3*.** Нужно построить прямоугольник, например, со сторонами $\frac{a}{2}$ и h, где a и h соответственно сторона треугольника и опущенная на нее высота.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$ и $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 2 из домашнего задания (см. этап V урока 6).

Дополнительные вопросы

- Какие две фигуры называются равновеликими?

- Какими свойствами обладает площадь?
- Какие выражается площадь треугольника через его стороны?

II. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Может ли площадь треугольника со сторонами 7 см и 8 см быть равной: а) 56 см^2; б) 28 см^2; в) 14 см^2? Ответ поясните.

2. Найдите геометрическое место вершин (*C*) равновеликих треугольников, имеющих общую сторону (*AB*).

3*. Разделите данный прямоугольник на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной его вершины.

Вариант 2

1. Может ли площадь треугольника со сторонами 48 дм и 12 дм быть равной: а) 12 дм^2; б) 24 дм^2; в) 488 дм^2? Ответ поясните.

2. Постройте треугольник, площадь которого равна сумме площадей двух треугольников, имеющих одинаковую высоту.

3*. Разделите данный параллелограмм на пять равновеликих частей прямыми, выходящими из одной его вершины.

Ответы. *Вариант 1.* 1. а) Нет; б), в) да. 2. Две прямые, параллельные прямой *AB*, отстоящие от нее на расстояние *h*. 3*. См. рисунок 14, а: нужно разделить стороны параллелограмма *AD* и *CD* соответственно на три равные части и провести прямые *BE* и *BF*. *Вариант 2.* 1. а), б) Да; в) нет. 2. Треугольник, имеющий ту же высоту, опущенную на сторону, равную *a*+*b*, где *a* и *b* – стороны данных треугольников, на которые опущены равные высоты. 3. См. рисунок 14, б: нужно разделить стороны параллелограмма *AD* и *CD* соответственно на пять равных частей и провести прямые *BE*, *BF*, *BG* и *BH*.

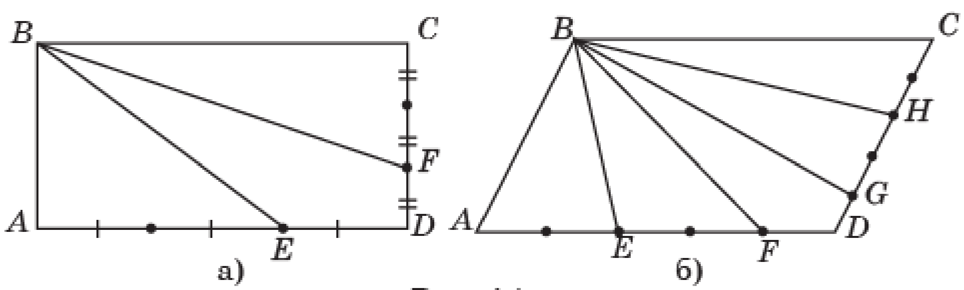


Рис. 14

III. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 5 (см. этап V) и решение задачи 5* из домашней работы урока 6 (см. этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 59 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите площадь ромба, сторона и одна диагональ которого равны соответственно 8 см и 10 см.

Ответ. $10\sqrt{39}$ см^2.

2) Найдите геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику и имеющих с ним одну общую сторону.

Ответ. Две прямые, параллельные общей стороне и отстоящие от нее на высоту, опущенную на данную сторону данного треугольника.

3) Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Ответ. Обратимся к рисунку 15: точка M – центроид данного треугольника; треугольники ABB_1, CBB_1, ABA_1, ACA_1, ACC_1 и BCC_1 равновелики, так как площадь каждого из них равна половине площади данного треугольника; треугольники AMB_1 и CMB_1 тоже равновелики, значит, треугольники AMB и CMB равновелики, но треугольники AMC_1 и BMC_1 равновелики; таким образом, треугольники AMC_1, BMC_1, BMA_1, CMA_1 равновелики; аналогично можно показать, что им равновелики и треугольникиAMB_1, CMB_1.

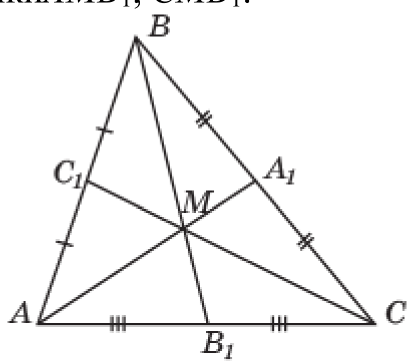


Рис. 15

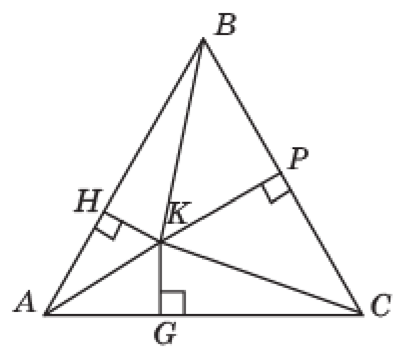


Рис. 16

4*) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон постоянна и равна высоте этого треугольника.

Решение. На рисунке 16 изображен равносторонний треугольник ABC, K – его внутренняя точка, проведем $KH \perp AB$, $KG \perp AC$, $KP \perp BC$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}a(KH+KG+KP) = \frac{1}{2}ah$, где a и h соответственно сторона и высота данного равностороннего треугольника, следовательно, $KH+KG+KP = h$.

60. Площадь трапеции
(уроки 8, 9)

Цель – ввести понятие высоты трапеции, сформулировать и доказать теорему о площади трапеции, научиться применять формулу площади трапеции при решении задач.

Урок 8

I. Устная работа

1) Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, площадь прямоугольника равна 36 см^2.

2) Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см.

3) Какой треугольник имеет наибольшую площадь из всех треугольников, которые имеют по две равные стороны?

4) Могут ли быть равновеликими: а) два неравных прямоугольника, имеющих по равной стороне; б) два неравных треугольника, имеющих по две соответственно равные стороны?

5) Как от треугольника отрезать треугольник, площадь которого равна половине площади данного треугольника?

6) Найдите по рисунку (рис. 15) площадь треугольника: а) ABB_1; б) AMC; в) CMB_1; г) AMB, если $S_{ABC}=Q$.

Ответы. **1)** 4 см, 9 см. **2)** 96 см^2. **3)** Прямоугольный. **4)** а) Нет; б) да. **5)** Разрезать по любой медиане. **6)** а) $\frac{Q}{2}$; б) $\frac{Q}{3}$; в) $\frac{Q}{6}$; г) $\frac{Q}{3}$.

II. Новый материал

Изобразим трапецию $ABCD$ ($AD||BC$, $AD>BC$).

Вопросы

- У каких многоугольников было введено понятие высоты?

- Как она определялась?

- Как можно ввести по аналогии понятие высоты трапеции?

Определение. ***Высотой трапеции*** называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на другое основание или его продолжение.

Задание. В изображенной трапеции $ABCD$ проведите высоты BE, CF, MH ($M \in BC$), AG, DP.

Вопросы

- Что можно сказать об отрезках BE, CF, MH, AG, DP?

- Как можно найти площадь трапеции?

После обсуждения ответов на данные вопросы переходим к доказательству теоремы о площади трапеции.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AD \| BC$). Диагональ AC разбивает ее на два треугольника, основаниями которых служат основания трапеции и высоты которых равны высоте трапеции h. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, т.е. $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot h + \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}(AD+BC) \cdot h$.

Итак, площадь S трапеции с основаниями a, b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Обратим внимание на сомножитель $\frac{a+b}{2}$. Что он выражает?

Следствие. Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Это следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

III. Закрепление нового материала

1. По рисунку (рис. 17) выведите формулу для нахождения площади трапеции, где $ABCD$ - трапеция ($AD||BC$).

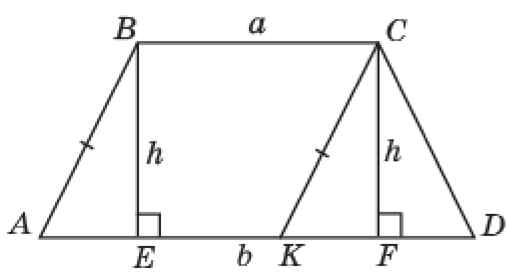


Рис. 17

2. Основания трапеции равны 36 см и 12 см, боковая сторона, равная 7 см, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.

3. Основание трапеции равно 26 см, высота 10 см, а площадь 200 см^2. Найдите второе основание трапеции.

4. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 3 см и 1 см, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.

5*. Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному, у которого основание равно одной из сторон данного треугольника.

Ответы. **1.** Проведем $CK||AB$, трапеция разобьется на параллелограмм и треугольник, тогда $S_{ABCD}=S_{ABCK}+S_{CDK}=AK\cdot h+\frac{1}{2}KD\cdot h=AK\cdot h+\frac{1}{2}(AD-AK)\cdot h=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h$. **2.** Высота трапеции равна 3,5 см, площадь равна 84 см^2. **3.** 14 см. **4.** См. рисунок 18, высота трапеции равна 2 см, площадь равна 4 см^2.

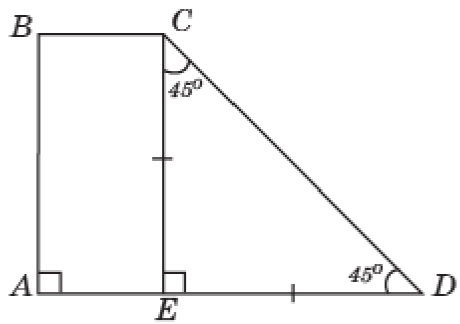


Рис. 18

5*. См. рисунок 19, где ABC – данный треугольник, ADB – искомый, $DC||AB$.

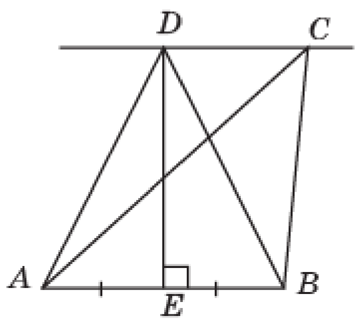


Рис. 19

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 60 учебника): формулировка и доказательство теоремы о площади трапеции, следствие из нее.

2. Решить задачи.

1) Высота трапеции равна 20 см, площадь - 400 см^2. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 20 см.

2) Площадь трапеции равна 36 см^2, высота равна 2 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 4:5.

Ответ. 16 см и 20 см.

3) Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

Ответ. См. рисунок 20: основания трапеции равны 4,8 см и 2 см, высота равна 1,4 см, площадь равна 4,76 см^2.

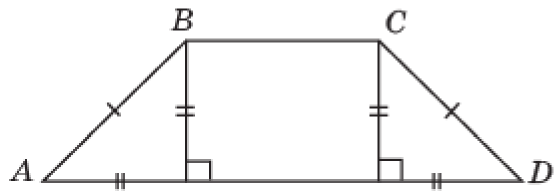


Рис. 20

4) Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает ее на две равновеликие части.

5*) Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найдите ее площадь, если площади треугольников, прилегающих к основаниям трапеции, равны Q_1 и Q_2.

Решение. См. рисунок 21: $S_{BOC} = Q_1$ и $S_{AOD} = Q_2$ (по условию), $S_{ABD} = S_{ACD}$, откуда следует, что S_{ABO}=S_{CDO}; $\frac{S_{ABO}}{Q_1} = \frac{AO}{CO}$ и $\frac{S_{CDO}}{Q_2} = \frac{AO}{CO}$, таким образом, $S_{ABO} = S_{CDO} = \sqrt{Q_1Q_2}$; площадь трапеции равна $Q_1 + 2\sqrt{Q_1Q_2} + Q_2 = (\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2$.

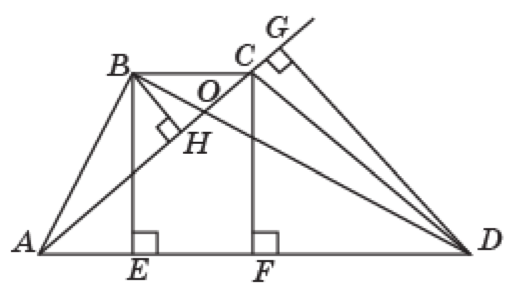


Рис. 21

Урок 9

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой

Вариант 1

1. Площадь ромба с диагоналями 6 см и 7 см равна …
2. Равнобедренной трапецией называется …
3. Основаниями трапеции называются …
4. Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на …
5. Высотой прямоугольной трапеции является …
6. Прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая ее основания, делит эту трапецию на …

Вариант 2

1. В треугольнике площади S проведена медиана, она разделила его на треугольники, площади …
2. Трапецией называется …
3. Высотой трапеции называется …
4. Площадь трапеции равна произведению средней линии на …
5. Прямоугольной трапецией называется …
6. Площадь равнобедренной трапеции с основаниями 4 см, 8 см и углом $45°$ равна …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Как изменится площадь квадрата, если две его противоположные стороны уменьшить на 2 см каждую, а две другие стороны увеличить на 2 см каждую?

2) Периметр прямоугольника равен 32 см.Стороны относятся как 1:3. Найдите его площадь.

3) Чему равна сторона квадрата, равновеликого: а) сумме; б) разности площадей двух квадратов?

4) Площадь параллелограмма равна 24 см^2, расстояния от точки пересечения его диагоналей до сторон равны 2 см и 3 см. Найдите периметр параллелограмма.

5) На рисунке (рис. 22) MN – средняя линия треугольника ABC, D – произвольная точка стороны AC. Во сколько раз площадь треугольника MND меньше площади треугольника ABC.

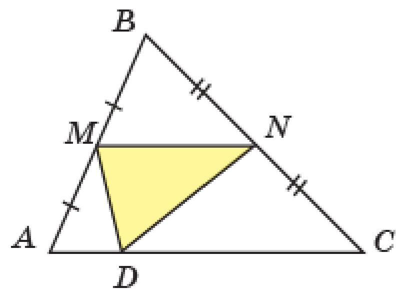


Рис. 22

Ответы. **1)** Уменьшится на 4 см^2. **2)** 48 см^2. **3)** а) Гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого равны соответственно сторонам данных квадратов; б) катету прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна стороне большего квадрата, а другой катет равен стороне меньшего квадрата. **4)** 20 см. **5)** В 4 раза.

IV. Подготовка к контрольной работе

1. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c.

2. Стороны параллелограмма равны 35 см и 20 см. Найдите его площадь, если высота, опущенная на большую сторону, составляет с меньшей стороной угол в 30°.

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой боковая сторона равна средней линии, а основания равны 8 см и 18 см.

4*. Внутри треугольника ABC взята точка K такая, что площади треугольников AKB, BKC и AKC равны. Докажите, что K – точка пересечения медиан данного треугольника.

Ответ. **1.** Высота треугольника, опущенная на его гипотенузу, равна $\frac{c}{2}$, площадь равна $\frac{c^2}{4}$. **2.** $350\sqrt{3}$ см^2. **3.** 156 м^2. **4*.** Обратимся к рисунку 23:

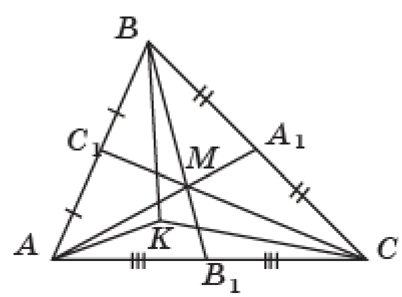


Рис. 23

в треугольнике ABC проведем все медианы, которые пересекутся в точке M и разобьют треугольник на шесть равновеликих треугольников (см. решение задачи 3 урока 7, этап V), если точка K не совпадает с точкой M, то она попадет внутрь какого-нибудь из шести получившихся треугольников, пусть треугольника AMB_1, тогда $S_{AMC}=S_{AKC}$, поскольку треугольники имеют общую сторону AC, их вершины K и M должны принадлежать прямой, параллельной AC, т. е. $K \equiv M$.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 57 - п. 60 учебника).

2. Решить задачи.

1) Площадь ромба равна 24 дм^2. Сторона больше высоты на 2 дм. Найдите диагонали ромба.

Ответ. 8 дм и 6 дм.

2) В трапеции большее основание равно 50 см, боковая сторона равна 30 см и составляет с одной диагональю прямой угол, другая диагональ делит угол между этими основанием и боковой стороной пополам. Найдите площадь трапеции.

Решение. См. рисунок 24: по условию $\angle ADB=\angle BDC$, но $\angle ADB=\angle CBD$ (внутренние накрест лежащие углы при $AD||BC$), следовательно, $\angle BDC=\angle CBD$, и треугольник BCD – равнобедренный, значит, $BC=CD=$ 30 см; AC (из прямоугольного треугольника ACD) равна 40 см; $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}CH\cdot AD$, откуда CH=24 см; площадь трапеции равна $\frac{30+50}{2}\cdot 24 = 960$ (см^2).

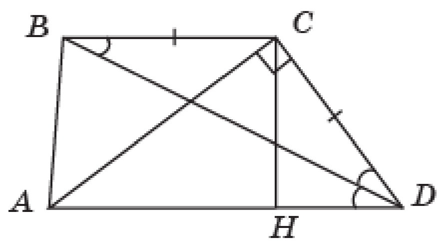


Рис. 24

3) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 см. Из середины гипотенузы на один из катетов опущен перпендикуляр, равный 9 см. Найдите площадь треугольника. Предложите несколько решений.

Решение. См. рисунок 25:

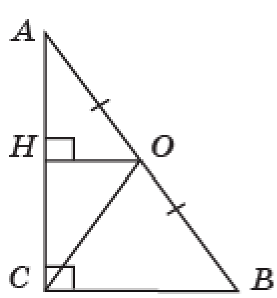


Рис. 25

медиана CO равна половине гипотенузы треугольника, таким образом, AO=12 см, AB=24 см, HO – средняя линия треугольника, CB=18 см, $AC=6\sqrt{7}$ см, площадь треугольника равна $54\sqrt{7}$ см^2. При другом способе решения можно найти площадь треугольника AOH, $AH=3\sqrt{7}$ см, $S_{AOH}=13{,}5\sqrt{7}$ см^2, что составлет четверть площади данного треугольника, таким образом, $S_{ABC}=54\sqrt{7}$ см^2.

4*) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 20 дм, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24 дм. Найдите площадь треугольника.

Решение. См. рисунок 26: из треугольника BHC получим $\frac{BH}{sin\,\alpha} = \frac{HC}{sin\,\beta}$, а из треугольника APC имеем $\frac{AP}{sin\,\alpha} = \frac{2HC}{sin\,90°}$, откуда sin β $=\frac{AP}{2BH} = \frac{3}{5}$, sin α $=\frac{4}{5}$, HC=15 см, AC=30 см и S_{ABC}=300 см^2.

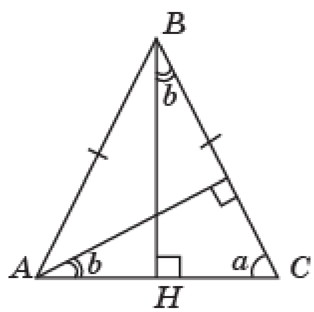


Рис. 26

Урок 10
Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника по боковой стороне и высоте, опущенной на основание, которые равны соответственно 5 см и 2 см.

2. Найдите площадь параллелограмма, две высоты которого равны 3 см и 2 см, и угол равен 60°.

3. Площадь ромба равна 367,5 дм^2. Найдите диагонали ромба, если они относятся как 3:5.

4. Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 19 см и 5 см, а боковые стороны 15 см и 13 см.

5*. Стороны треугольника равны 17 см и 21 см, медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5 см. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2

1. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 9 см.

2. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр и высоты равны соответственно 42 см, 8 см и 6 см.

3. Площадь ромба равна 45 дм^2. Высота меньше стороны на 4 дм. Найдите диагонали ромба.

4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой боковая сторона равна 15 см, диагональ перпендикулярна боковой стороне и равна 20 см.

5*. Одна сторона треугольника равна 10 см, медианы, проведенные к двум другим сторонам равны 9 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

61. Площадь многоугольника
(уроки 11, 12)

Цель – сформулировать и доказать теорему о площади многоугольника, описанного около окружности, вывести формулу нахождения площади правильного многоугольника, научиться пользоваться ею при решении задач.

Замечание. В основном курсе рассматриваются только выпуклые многоугольники, поэтому опустим слово «выпуклые».

Урок 11

I. Анализ контрольной работы № 1

II. Устная работа

1) Какой многоугольник называется описанным около окружности?

2) Какая окружность называется вписанной в многоугольник?

3) Можно ли вписать окружность в правильный многоугольник? Что является центром вписанной окружности?

4) Каким свойством обладает четырехугольник, описанный около окружности?

5) Противоположные стороны четырехугольника, описанного около окружности равны 7 см и 10 см. Можно ли по эти данным найти периметр четырехугольника?

6) Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) трапецию; е) дельтоид (рис. 27).

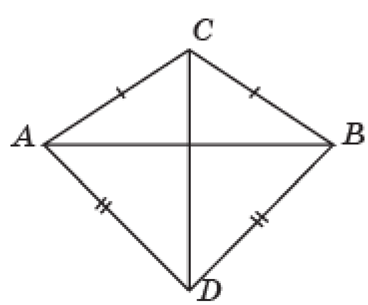


Рис. 27

7) Можно ли определить вид трапеции, если: а) около нее можно описать окружность; б) в нее можно вписать окружность?

8) Верно ли следующее утверждение; «Центры окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, совпадают»?

Ответы. **5)** Да, 34 см. **6)** а), б) Нет; в), г), е) да; д) да, если у этой трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон. **7)** а) Да, это равнобедренная трапеция; б) нет, но у этой трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон.

II. Новый материал

Изобразим произвольный выпуклый n-угольник, пусть n=6.

Вопросы

- Как можно найти площадь данного многоугольника?
- Каким образом его можно разбить на треугольники?

Вывод. Площадь произвольного многоугольника можно находить, разбивая его на треугольники. При этом площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих треугольников.

Теперь изобразим окружность и опишем около нее n-угольник, пусть n=6. Разобьем его на треугольники, имеющие общую вершину – центр окружности, опустим из нее высоты на противоположные стороны полученных треугольников. Какой вывод можно сделать о площади многоугольника?

Теорема. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Доказательство. Многоугольник, описанный около окружности, можно представить составленным из треугольников, сторонами a_1, …, a_n которых являются стороны данного многоугольника, а высоты h_1, …, h_n равны радиусу r вписанной окружности. Поэтому площадь S многоугольника равна сумме площадей треугольников

$$S = \frac{1}{2}a_1r + \ldots + \frac{1}{2}a_nr = \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n)r,$$

т. е. равна половине произведения периметра многоугольника на радиус вписанной окружности.

Итак, площадь S многоугольника с периметром P, описанного около окружности радиуса r, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}P \cdot r$$

Пусть теперь дан правильный описанный около окружности n-угольник со стороной a. Тогда его периметр P=na. Таким образом, площадь правильного n-угольника выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}na \cdot r,$$

где a – сторона n-угольника, r – радиус вписанной окружности.

III. Закрепление нового материала

1. Около окружности описан четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника, если две его противоположные стороны равны a и b, радиус окружности равен R.

2. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса: а) 3 см: б) b.

3. Докажите, что площадь S_n правильного n - угольника со стороной a, вписанного в окружность радиуса R, вычисляется по формуле

$$S_n=\frac{1}{2}naR\cdot\cos\frac{180°}{n}.$$

4*. Постройте треугольник, равновеликий данному четырехугольнику.

*Ответы***. 1.** $(a+b)R$. **2.** а) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ см^2; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$ см^2. **4*.** *Построение*. Пусть $ABCD$ –данный четырехугольник. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали AD и найдем точку C' ее пересечения с прямой AD (рис. 28).

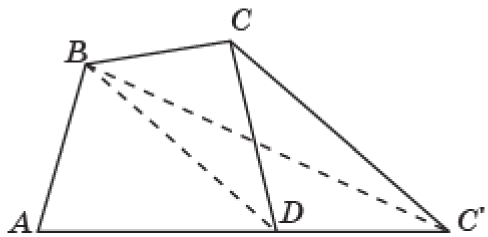


Рис. 28

Треугольники BCD и $BC'D$ имеют общую сторону BD и равные высоты. Следовательно, они равновелики, а, значит, равновелики четырехугольник $ABCD$ и треугольник ABC'.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 61 учебника).

2. Решить задачи.

1) Периметр четырехугольника равен 100 м. Может ли его площадь быть меньше одного квадратного метра, если этот четырехугольник: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат; д) трапеция?

Ответ. а), б), в), д) Да; г) нет.

2) Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны: а) 4 см и 5 см; б) d_1 и d_2. Найдите площадь этого четырехугольника.

Ответ. а) 10 см^2; б) $\frac{d_1d_2}{2}$.

3) Докажите, что четырехугольник равновелик треугольнику, у которого две стороны и угол между ними соответственно равны диагоналям и углу между ними четырехугольника. Сделайте вывод.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC=a$, $BD=b$, они пересекаются в точке O и угол между ними равен α, тогда $S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,[OA\cdot OB+OB\cdot(a-OA)+(a-OA)\cdot(b-OB)+(b-OB)\cdot OA]=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot ab$, т. е. данный четырехугольник равновелик треугольнику со сторонами a, b и углом между ними α. *Вывод*: площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

4*) На рисунке 29 изображен лотарингский крест, служивший эмблемой "Свободной Франции" (организации, которую в годы второй мировой войны возглавлял генерал де Голль). Он составлен из тринадцати единичных квадратов. Докажите, что прямая, проходящая через точку A и делящая площадь лотарингского креста на две равные части, делит отрезок BC в золотом отношении.

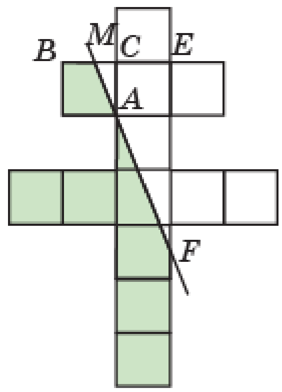


Рис. 29

Решение. Положим, что лотарингский крест составлен из единичных квадратов и обозначим $MC = x$, тогда $ME = x+1$, $AC=1$, площади фигур, на которые разбит крест прямой AF, равны 13:2 = 6,5 (кв. ед.) каждая, значит, площадь треугольника MEF равна 6,5 – 4 = 2,5 (кв. ед.), откуда $EF = \frac{5}{x+1}$; составим пропорцию $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{5}$, тогда $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (заметим, что $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, а $x < 1$) и $BM = 1 - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. точка M делит отрезок BC в золотом отношении.

5*) Предположим, что длина спички равна 1. Составьте из 12 спичек многоугольник, ограничивающий площадь, равную четырем квадратным единицам.

Ответ. См. рисунок 30.

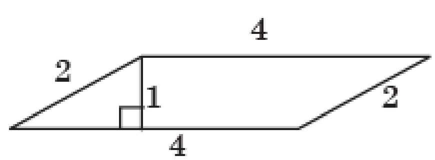


Рис. 30

Урок 12

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Все диагонали, проведенные из одной вершины n-угольника, разбивают его на …

2. Многоугольник называется описанным около окружности, если …

3. Площадь произвольного многоугольника можно находить …

4. Площадь правильного n-угольника выражается формулой …

5. Площадь ромба с диагоналями 15 см и 3 см равна …

6. Периметр многоугольника, площади 6 см^2, описанного около окружности радиуса 5 см, равен …

Вариант 2

1. Внутренняя точка n-угольника соединена отрезками со всеми его вершинами, при этом получилось … треугольников.

2. Окружность называется вписанной в многоугольник, если …

3. Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна …

4. Площадь четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна …

5. Площадь правильного шестиугольника со стороной a, равна …

6. Многоугольник с периметром 7 см, описанный около окружности радиуса 3 см, имеет площадь …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Участок земли имеет форму трапеции. Чтобы разделить его пополам, провели отрезок, соединяющий середины параллельных сторон. Правильно ли это сделали?

2) Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса: а) 2 см; б) 3 дм.

3) Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке (рис. 31), где $ABCD$ – единичный квадрат, каждая сторона которого разделена на три равные части.

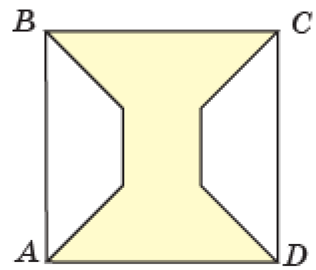


Рис. 31

4) На рисунке (рис. 32, а) изображены два параллелограмма, расположенные таким образом, что они имеют одну общую вершину и еще по одной вершине каждого принадлежат стороне другого параллелограмма. Как доказать, что данные параллелограммы равновелики.

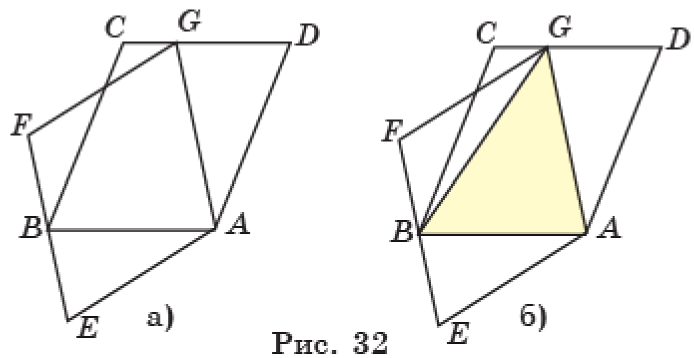


Рис. 32

Ответы. **1)** Да, получились две равновеликие трапеции. **2)** а) $6\sqrt{3}$ см^2; б) $4{,}5\sqrt{3}$ дм^2. **3)** $\frac{5}{9}$ кв.ед. **4)** Если провести отрезок *BG* (рис. 32, б), то $S_{ABCD}=2S_{ABG}=S_{AEFG}$.

IV. Решение задач с практическим содержанием

1. Пол в танцевальном зале имеет форму прямоугольника размером 8 м x 15 м. Его требуется покрыть паркетной плиткой. Сколько нужно подготовить квадратных плиток, размером 50 см x 50 см, если на обрезки и пригонку затрачивается 2% площади всех плиток.

2. Вычислите давление на 1 см^2, которое оказывает прибор весом 7,65 т на свой фундамент, имеющий форму равностороннего треугольника со стороной 3 м.

3. Как через точку внутри квадратной поляны провести тропинку так, чтобы она отсекла участок наименьшей площади?

4*. Из листа фанеры прямоугольной формы размером 220 см x 160 см необходимо вырезать заготовки в виде равнобедренных трапеций с основаниями 20 см, 60 см и углом 45°. Сколько заготовок получится из данной фанеры? Определите процент неизрасходованной площади.

Ответы. **1.** 490 плиток. **2.** ≈0,2 кг/см^2. **3.** Если точка – центр квадрата, то решений бесконечно много – это любая прямая, проходящая через центр. В других случаях нужно провести прямую, перпендикулярную диагонали. **4*.** 42; ≈4,5%.

V. Занимательный момент

Решения задач 4* и 5* из домашней работы (см. этап IV урока 11).

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 61 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь четырехугольника, образованного этими прямыми в два раза больше площади данного четырехугольника.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник (рис. 33), $EFGH$ – полученный четырехугольник, который является параллелограммом, причем его стороны равны диагоналям данного четырехугольника, $EF=AC=d_1$ и $EH=BD=d_2$, кроме этого, острый угол α между диагоналями данного четырехугольника равен острому улу параллелограмма; таким образом, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\alpha$ (см. решение задачи 3 из домашней работы урока 11, этап IV), $S_{EFGH} = d_1d_2\cdot\sin\alpha$, следовательно, площадь данного четырехугольника вдвое меньше площади получившегося параллелограмма.

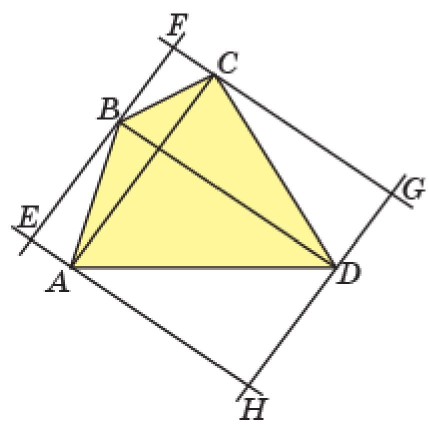


Рис. 33

2) Внутри выпуклого четырехугольника, площади S, взята точка. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки,

симметричные выбранной точке относительно середин сторон данного четырехугольника.

Ответ. См. рисунок 34: $ABCD$ – данный четырехугольник; E, F, G, H – середины его сторон; M – данная точка; M_1, M_2, M_3, M_4 – точки, симметричные точке M относительно середин сторон данного четырехугольника, тогда четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ является параллелограммом, так как его противоположные стороны параллельны, соответственно параллельны сторонам параллелограмма $EFGH$, отсюда следует, что углы этих параллелограммов равны, кроме этого, соответствующие стороны $EFGH$ в два раза меньше сторон $M_1M_2M_3M_4$ (поскольку, например, EF – средняя линия треугольника MM_1M_2, значит, $EF = \frac{1}{2}\, M_1M_2$); таким образом, площадь параллелограмма $M_1M_2M_3M_4$ в четыре раза больше площади параллелограмма $EFGH$, но площадь $EFGH$ равна пловиге площади данного четырехугольника $ABCD$ (задача 3 из этапа V урока 6); окончательно получаем, что плащадь параллелограмма $M_1M_2M_3M_4$ вдвое больше площади данного четырехугольника $ABCD$, т. е. равна $2S$.

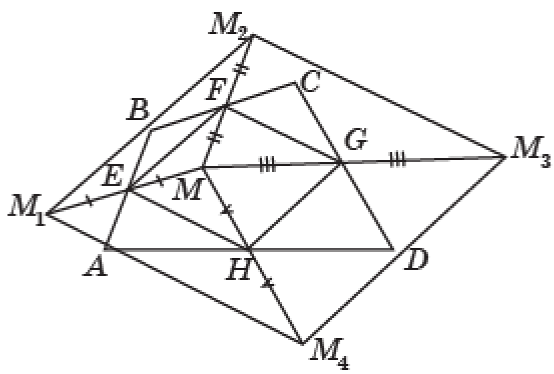


Рис. 34

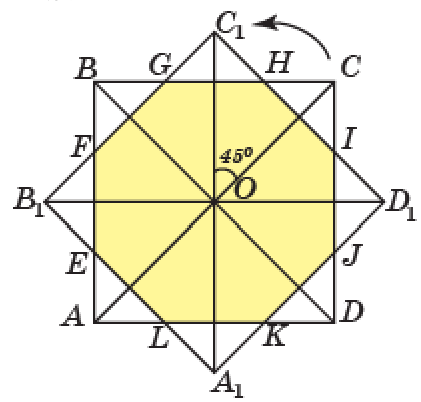


Рис. 35

3) Квадрат со стороной a повернут вокруг центра симметрии на угол 45°. Найдите площадь фигуры, которая является общей частью (пересечением) квадратов.

Ответ. Решение показано на рисунке 35: общей частью квадратов является восьмиугольник $EFGHIJKL$; найдем его сторону, для этого обозначим $AE=AL=x$, $EL=y$, тогда $2x^2 = y^2$ и $2x+y=a$, откуда $y=\sqrt{2}x$, $2x+\sqrt{2}x=a$, значит, $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$; окончательно получаем $S_{E\ldots L}= a^2 - 2x^2 = 2a^2(\sqrt{2}-1)$.

4*) Через вершину выпуклого четырехугольника проведите прямую, разбивающую его на две фигуры одинаковой площади.

Ответ. См. рисунок 36: пусть в данном четырехугольнике $ABCD$ $S_{ABC}<S_{ADC}$; через его вершину B проведем прямую $BE||AC$ ($E\in AD$), тогда

треугольники ABC и AEC равновелики; данный четырехугольник $ABCD$ и треугольник CED также равновелики; следовательно, прямая, содержащая медиану CM треугольника CED, разделив его на две равновеликие части, разделит данный четырехугольник также на две равновеликие части.

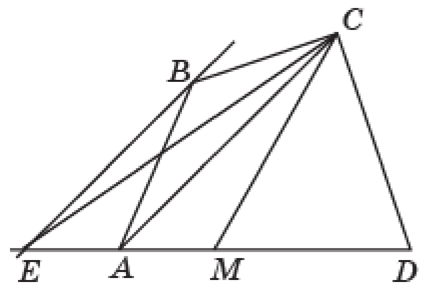


Рис. 36

62. Площадь круга и его частей (уроки 13, 14)

Цель – сформулировать и доказать теорему о площади круга, вывести формулы нахождения площадей круговых сектора и сегмента, научиться применять их при решении задач.

Урок 13

I. Проверка домашнего задания

Разбор задач 1-3 из домашней работы (урок 12 этап VI).

II. Новый материал

Изобразим окружность, назовем ее радиус R. Впишем в эту окружность правильные: треугольник, четырехугольник, шестиугольник.

Вопросы

- Как определить длину данной окружности?

- Как определить периметры вписанных в нее правильных многоугольников?

Сравним длину окружности (C=2πR) и периметры вписанных правильных многоугольников (соответственно $P_3=3\sqrt{3}R$, $P_4=4\sqrt{2}R$, $P_6=6R$). Видим, что длина окружности больше периметров вписанных правильных многоугольников, причем $C>P_6>P_4>P_3$.

Вопрос

- Если продолжить увеличивать число сторон правильного многоугольника, то как будут связаны между собой C, P_n P_{n-1}? Сделайте вывод.

Вывод. При увеличении числа сторон многоугольники приближаются к окружности. Поэтому ***площадью круга*** считают число, к которому приближаются площади вписанных правильных многоугольников при увеличении числа их сторон.

Теорема. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.

Как и в случае длины окружности, доказательство данной теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы дадим только набросок доказательства. Рассмотрим правильный многоугольник, вписанный в данную окружность. Площадь этого правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус r вписанной в него окружности. При увеличении числа сторон многоугольников их периметры стремятся к длине окружности, а радиусы r вписанных окружностей стремятся к радиусу R исходной окружности. Поэтому площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус круга.

Таким образом, площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

III. Закрепление нового материала

1. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен: а) 4 см; б) 10 м. Выведите формулу для нахождения площади круга через его диаметр (D).

2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна: а) 4 см^2; б) 32 м^2.

3. Дайте определение, фигуре, которая называется круговым сектором, или просто сектором, изображенной на рисунке (рис. 37).

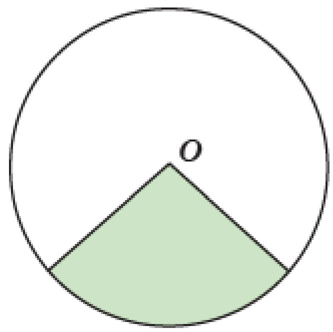


Рис. 37

4. Найдите площадь сектора, если его центральный угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 180°; г) 1°; д) φ°, если радиус соответствующего круга равен R. Сделайте вывод.

5*. Из точки, принадлежащей кругу, радиус которого равен r, проведены две равные и перпендикулярные друг другу хорды. Найдите площадь части круга, заключенной между этими хордами.

Ответы. **1.** а) 4π см^2; б) 25π м^2; $S = \frac{\pi D^2}{4}$. **2.** а) $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ см^2; б) $\frac{4\sqrt{2\pi}}{\pi}$ м^2. **3.** ***Круговым сектором*,** или просто ***сектором*,** называется общая часть круга и его центрального угла. **4.** а) $\frac{1}{6}\pi R^2$; б) $\frac{1}{4}\pi R^2$; в) $\frac{1}{2}\pi R^2$; г) $\frac{1}{360}\pi R^2$; д) $\frac{\varphi}{360}\pi R^2$; площадь сектора, центральный угол которого равен φ°, а радиус круга равен R, вычисляется по формуле $S = \frac{\varphi}{360}\pi R^2$. **5*.** Искомая часть круга состоит из полукруга и равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна диаметру данного круга, таким образом, искомая площадь равна $\frac{R^2}{2}(\pi + 2)$.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 62 учебника до площади сегмента).

2. Решить задачи.

1) Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами: а) 7 мм и 8 мм; б) a и b.

2) Найдите площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник со стороной, равной: а) 6 см; б) a.

3) Найдите площадь большей части кольца, образованного окружностями с радиусами R и r, заключенную между радиусами, угол между которыми равен $130O$.

4*) На рисунке (рис. 38) заштрихованная фигура состоит из четырех, так называемых, луночек Гиппократа. Докажите, что ее площадь равна площади квадрата *ABCD*.

Ответы. 1) а) $\frac{\pi\cdot 113}{4}$ мм^2; б) $\frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}}{4}$. 2) а) $\frac{\pi}{12}$ см^2; б) $\frac{\pi a^2}{12}$. 3) $\frac{13}{36}\pi(R^2$-$r^2)$. 4*) Всю фигуру, изображенную на рисунке (рис. 38), можно представить состоящей из квадрата *ABCD* и четырех полукругов, построенных на каждой его стороне, как на диаметре; приняв сторону квадрата за a, получим площадь этой фигуры, которая равна $a^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$; если теперь от площади этой фигуры отнять площадь круга, описанного около квадрата *ABCD*, равную $\frac{\pi a^2}{2}$, получим искомую площадь, которая равна $(a^2 + \frac{\pi a^2}{2})$ - $\frac{\pi a^2}{2} = a^2$, т. е. равна площади данного квадрата.

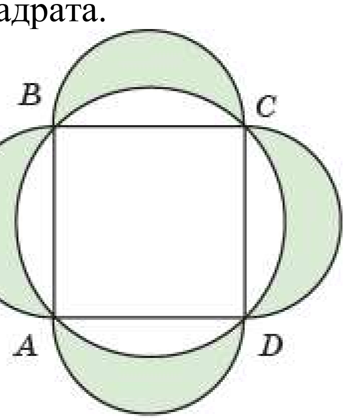


Рис. 38

Урок 14

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглаашаются шестеро учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение круга.
2. Теорема о площади круга.

Задание 2, 4, 6

1. Определение сектора.
2. Вывод формулы нахождения площади сектора.

Индивидуальные задания для учащихся по карточкам (выполняются на местах).

Карточка

1) Найдите площадь круга, длина окружности которого равна: а) 2 см; б) 2π см.

2) Даны два круга. Как построить круг, площадь которого равнялась бы: а) сумме; б) разности площадей данных кругов.

3) Верно ли утверждение о том, что площадь круга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, как на диаметре, равна сумме площадей кругов, построенных на катетах этого же треугольника, как на диаметрах?

Ответы. 1) а) $\frac{1}{\pi}$ см^2; б) π см^2. 2) Пусть даны круги радиусов R и r ($R>r$), тогда нужно построить круг, радиус которого равен: а) гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами R и r, т. е. $\sqrt{R^2+r^2}$; б) катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна R и другой катет равен r. 3) Да, $\pi c^2 = \pi(a^2+b^2) = \pi a^2 + \pi b^2$, c, a, b – соответственно гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника.

Задание для класса

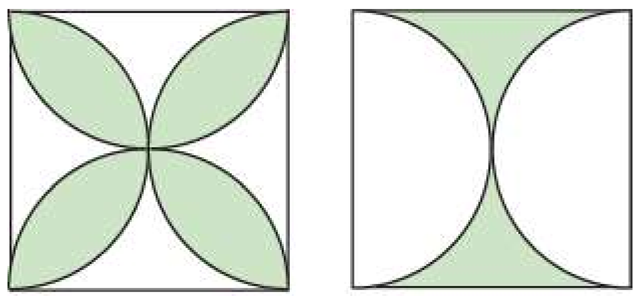
1. Выведите формулу нахождения площади кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями с радиусами r и R, где $r<R$.

2. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) 80°; в) 135°.

3. Найдите площадь части круга, расположенной вне вписанного в этот круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Радиус круга равен R.

4*. На каждой стороне единичного квадрата, как на диаметре, проведена внутрь квадрата полуокружность. Сделайте чертеж и найдите площадь полученной розетки.

Ответы. **1.** $S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - r^2)$. **2.** а) $\frac{2}{9}\pi R^2$; б) $\frac{3}{8}\pi R^2$. **3.** а) $(\pi - 2)R^2$; б) $(4\pi - 3\sqrt{3})\frac{R^2}{4}$. **4*.** См. рисунок 39, а, на котором заштрихована фигура, площадь которой нужно определить; для этого найдем площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 39, б, она равна $1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$ (кв. ед.); таким образом, площадь искомой фигуры равна $1 - 2\left(\frac{4-\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{2}$ (кв. ед.).



а) б)

Рис. 39

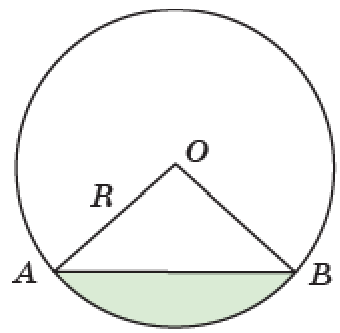


Рис. 40

К доске приглашаются четверо учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$).

$У_1$ – решает вместе с классом задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 3.

$У_3$, $У_4$ – воспроизводят решения домашних задач 2 и 3 (см. этап IV урока 13).

Дополнительные вопросы

- Определения круга и окружности.
- Определите площади круга, диаметр которого равен D.
- Какая фигура называется круговым сектором, или просто сектором?
- Определите площади сектора с центральным углом ϕ и радиусом R.

II. Новый материал

Определим фигуру, изображенную на рисунке (рис. 40).

Круговым сегментом, или просто ***сегментом***, называется часть круга, отсекаемая от него какой-нибудь хордой.

Теперь найдем площадь сегмента.

Вопросы

- Из каких фигур состоит сегмент?
- Как можно вычислить площадь сегмента?

Площадь сегмента, ограниченного хордой AB (рис. 40), можно найти как разность площади сектора AOB и площади треугольника AOB. Пусть центральный угол равен ϕ, радиус круга R. Тогда площадь сектора равна $\frac{\pi R^2 \varphi}{360}$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\varphi$. Поэтому площадь сегмента будет выражаться формулой

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{AOB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} - \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\varphi.$$

III. Закрепление нового материала

1. Найдите площадь сегмента, если радиус круга равен R, а дуга содержит: а) 60°; б) 90°; в) 180°.

2. Найдите площадь сегмента, если его хорда равна a, а дуга содержит: а) 90°; б) 120°.

3. Найдите площади заштрихованной фигуры на рисунке (рис. 41, а). Радиусы окружностей равны 1.

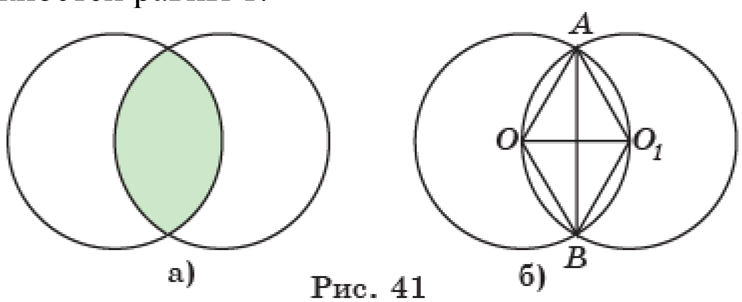


Рис. 41

4*. Найдите площади заштрихованной фигуры на рисунке (рис. 42). Радиусы окружностей равны 1.

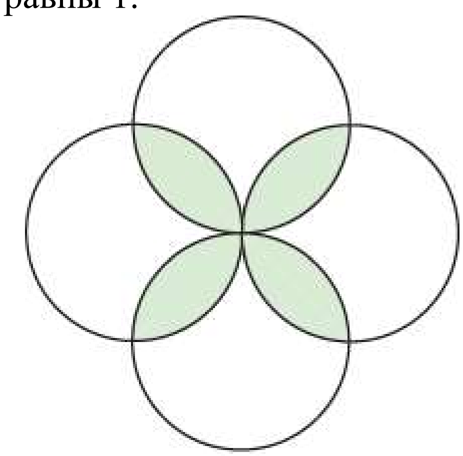


Рис. 42

Ответы. **1.** а) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$; б) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2)$; в) $\frac{\pi R^2}{2}$. **2.** а) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$; б) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$. **3.** См. рисунок 41, б: четырехугольник OAO_1B – ромб, причем диагональ OO_1 равна его стороне, следовательно $\angle AOB = 120°$; таким образом, площадь заштрихованного сегмента с хордой AB в окружности с центром в точке O равна $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}$, а площадь искомой фигуры равна $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$. **4*.** См. решение предыдущей задачи 3; площадь искомой фигуры равна $4\cdot\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12} = \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 5* из этапа III урока 13 и задачи 4* из домашней работы (см. этап IV урока 13).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 62 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите радиус окружности, которая делит круг радиуса R на две равновеликие части - кольцо и круг.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

2) Найдите площадь сегмента, радиус которого равен r, а дуга - 270°. Предложите два способа решения.

Решение. См. рисунок 43, нужно найти площадь (S) заштрихованной фигуры, $\angle AOB$=90°; 1-й способ: $S = \frac{\pi r^2\cdot 270}{360} + \frac{r^2}{2}$, где первое слагаемое – площадь сектора с углом 270°, второе слагаемое – площадь прямоугольного равнобедренного треугольника AOB, таким образом, искомая площадь $S = \frac{r^2}{4}(3\pi+2)$; 2-й способ: $S = \pi r^2 - (\frac{\pi r^2\cdot 90}{360} - \frac{r^2}{2})$, где от площади данного круга вычитается площадь сегмента ACB, таким образом, искомая площадь $S = \frac{r^2}{4}(3\pi +2)$.

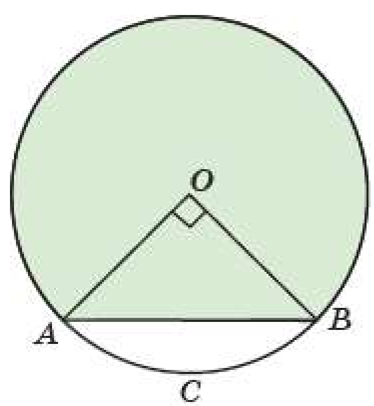


Рис. 43

3) Около правильного многоугольника со стороной a описана окружность, в многоугольник вписана другая окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца.

Ответ. Соответствующие концентрические окружности имеют радиусы $r = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ и $R = \frac{a}{2\,sin\frac{180^\circ}{n}}$ (где r и R радиусы соответственно вписанной и описанной окружногстей), таким образом, площадь искомого кольца равна $\frac{\pi a^2}{4}$.

4*) У ломаной *ABCDE* все вершины принадлежат окружности (рис. 44, а). Углы в вершинах B, C и D равны по 45°. Докажите, что площадь заштрихованной части круга равна половине его площади.

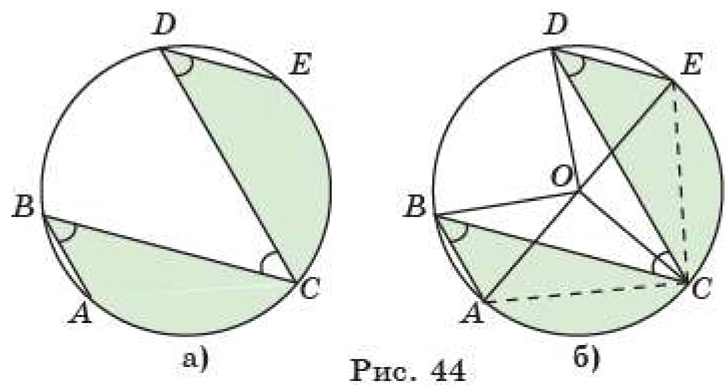


Рис. 44

Решение. Дуги *AC*, *CE* и *BD* равны 90° (рис 44, б). Значит, дуги *AB* и *DE* равны 45°. Следовательно, диаметр *BO* параллелен *AC* и поэтому треугольник *ABC* равновелик треугольнику *AOC*. Аналогично, треугольник *CDE* равновелик треугольнику *COE*. Таким образом, закрашенная фигура равновелика полукругу с диаметром *AE* и дугой *ACE*.

п. 63. Площади подобных фигур (уроки 15, 16, 17)

Цель – сформулировать и доказать теорему о площадях подобных фигур, научиться использовать ее при решении задач.

Урок 15

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Площадью круга считают число, к которому …
2. Длина окружности радиуса R равна …
3. Площадь круга диаметра D равна …
4. Круговым сектором называется …
5. Площадь сегмента, соответствующего сектору с центральным углом ϕ круга радиуса R, равна …
6. Площадь сектора с ограничивающей его дугой длины l круга радиуса R, равна …

Вариант 2

1. Площадь круга равна …
2. Длина окружности диаметра D равна …
3. Площадь круга радиуса R равна …
4. Круговым сегментом называется …
5. Площадь сектора с центральным углом ϕ круга радиуса R равна …
6. Длина дуги окружности радиуса R вычисляется по формуле …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Изобразим треугольник, проведем в нем какую-нибудь среднюю линию.

Вопросы

- Что можно сказать о данном и полученном треугольниках?
- Каков коэффициент подобия этих треугольников?
- Если площадь данного треугольника равна Q, то чему равна площадь получившегося треугольника?
- Каково отношение площади получившегося треугольника и данного треугольника?
- Как оно связано с коэффициентом подобия?

Теперь изобразим два квадрата со сторонами a и b.

- Можно ли считать эти квадраты подобными? С каким коэффициентом?
- Каково отношение площадей данных квадратов?
- Как оно связано с коэффициентом их подобия?

Выскажите предположение об отношении площадей подобных фигур.

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть площадь фигуры Φ равна S и подобие с коэффициентом k переводит фигуру Φ в фигуру Φ_1. Тогда единичный квадрат в фигуре Φ укладывается S раз. Подобие переводит единичный квадрат в квадрат со стороной k. Следовательно, квадрат со стороной k в фигуре Φ_1 укладывается S раз. Поскольку площадь квадрата со стороной k равна k^2, то площадь S_1 фигуры Φ_1 будет равна k^2S.

Следствие. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их сходственных сторон.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение сторон этих квадратов равно: а) 2:3; б) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$; в) 1:1,5.

2. Стороны равносторонних треугольников равны 6 см и 7 см. Чему равно отношение их площадей?

3. Одна из сторон треугольника разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные другой стороне. Найдите отношения площади данного треугольника к площадям треугольников, отсеченных построенными прямыми.

4. Площадь данного многоугольника равна 45 см^2. Чему равна площадь многоугольника, ему подобного, если сходственные стороны многоугольников равны 15 см и 10 см?

5*. Треугольник ABC вписан в окружность, которая в точке A касается внешним образом с другой окружностью. Стороны BA и CA продолжены до пересечения со второй окружность соответственно в точках D и E. Докажите, что треугольники ABC и ADE подобны.

Ответы. **1.** а) 4:9; б) 2:3; в) 1:2,25. **2.** $\frac{36}{49}$. **3.** См. рисунок 45: $S_{ABC}:S_{NBK} =$ 9:1, $S_{ABC}:S_{MBL}$ = 9:4, итак, $S_{ABC}:S_{MBL}:S_{NBK}$ = 9:4:1. **4.** 20 см^2. **5*.** См. рисунок 46: точки O и O_1 – центры соответствующих окружностей; на рисунке одинаковыми числами отмечены равные углы, таким образом, треугольники подобны по углам.

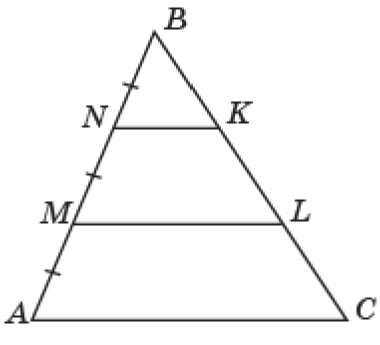


Рис. 45

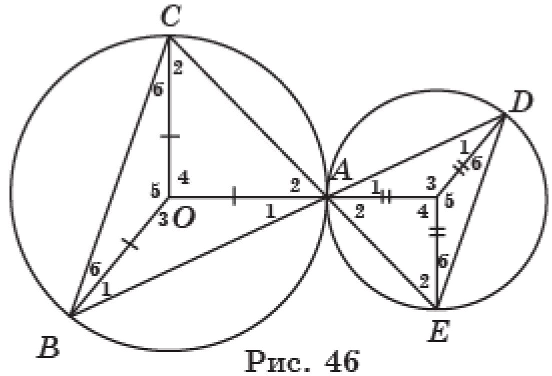


Рис. 46

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 14).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 63 учебника).

2. Решить задачи.

1) Как относятся стороны двух квадратов, если отношение площадей этих квадратов равно: а) 4:9; б) 3:4; в) 0,5:2?

Ответ. а) 2:3; б) $\sqrt{3}$:2; в) 1:2.

2) Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит другие стороны треугольника?

Ответ. Площади данного треугольника и отсеченного треугольника относятся как 2:1, значит, их стороны относятся как $\sqrt{2}$:1, следовательно, стороны делятся в отношении ($\sqrt{2}$-1):1.

3) Докажите, что отношение площадей правильных шестиугольников, вписанного в данную окружность и описанного около нее, равно 3:4.

Ответ. Стороны вписанного и описанного шестиугольников соответственно равны R и $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$, где R – радиус данной окружности, таким образом, коэффициент подобия равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, их площади относятся как 3:4.

4*) Две окружности, радиусов R и r ($R>r$) касаются внутренним образом. Через точку касания проведена хорда, которая отсекает от внешней окружности сегмент площади S. Найдите площадь сегмента, отсекаемого этой хордой от внутренней окружности.

Ответ. См. рисунок 47: равнобедренные треугольники BOM и AO_1M подобны (по углам) с коэффициентом подобия $k = \frac{R}{r}$, отсюда следует, что сегменты с хордами BM и AM подобны с коэффициентом и $\frac{BM}{AM}=\frac{R}{r}$, значит, их площади относятся как $\frac{R^2}{r^2}$, таким образом, искомая площадь равна $\frac{Sr^2}{R^2}$.

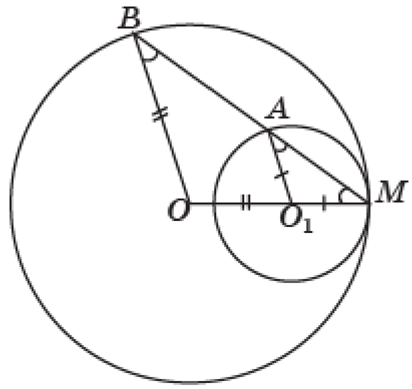


Рис. 47

Урок 16

I. Проверка домашнего задания

Шестерых учащихся приглашаем за первые парты – опрос по теории.

Задания 1, 3, 5

1. Определение подобных фигур.
2. Теорема о площадях подобных фигур.

Задания 2, 4, 6

1. Определение многоугольника.
2. Теорема о площади многоугольника.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) Периметры подобных многоугольников равны 120 см и 720 см. Найдите отношение их площадей.

2) Сумма площадей трех подобных треугольников равна 413 дм^2, их периметры относятся как 1:3:7. Найдите площадь каждого многоугольника.

Ответы. 1) 1:36. 2) 7 дм^2, 63 дм^2, 343 дм^2.

Задание для класса

1. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3:4, высота делит его на два треугольника, разность площадей которых равна 56 дм^2. Найдите площадь данного треугольника.

2. Найдите площадь четырехугольника, в котором произведение отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равно d^2, а угол между ними равен 120°.

3*. В окружности на радиусе OA (O – центр), как на диаметре, описана другая окружность. Из произвольной точки M радиуса OA восстановлен к нему перпендикуляр, пересекающий проведенную окружность в точке B, а данную окружность – в точке C. Докажите, что $AC^2 = 2AB^2$.

Ответы. **1.** См. рисунок 48: прямоугольные треугольники ACH и BCH подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{3}{4}$, следовательно, $\frac{S_{ACH}}{S_{BCH}} = \frac{9}{16}$ и S_{BCH}-S_{ACH}=56, откуда S_{ACH}=72 дм^2 и S_{BCH}=128 дм^2; окончательно получаем S_{ABC}=200 дм^2.

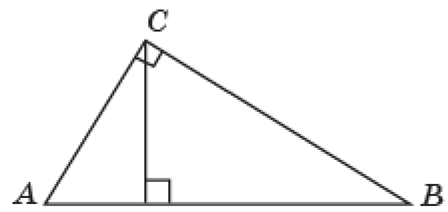


Рис. 48

2. Четырехугольник, вершины которого располагаются в серединах сторон данного четырехугольника, является параллелограммом, его площадь равна $\frac{d^2}{2}\sin\ 120^\circ = \frac{\sqrt{3}d^2}{4}$; площадь данного четырехугольника в два раза больше, т.е. равна $\frac{\sqrt{3}d^2}{2}$. **3*.** Проведем диаметр *AD*, тогда треугольник *ACM* подобен треугольнику *ADC* (по углам), откуда $AC^2 = AM \cdot AD$; аналогично, треугольник *ABM* подобен треугольнику *AOB*, откуда $AB^2 = AM \cdot AO$, но $AD = 2AO$, следовательно, $AC^2 = 2AB^2$.

К доске вызываем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$ – решает классную задачу 3.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашней работы (см. этап VI урока 15).

Дополнительные вопросы

- Определение сектора.
- Определение сегмента.
- Определение площади фигуры.

II. Устная работа

1) Наименьшие стороны двух подобных многоугольников равны: а) 5 см и 30 см; б) 21 см и 56 см. Как относятся их периметры и площади?

2) Площадь участка земли равна 2000 м^2. Найдите его площадь на плане, если взят масштаб 1:100.

3) Площадь плана земельного участка равна 2 дм^2. Найдите площадь реального участка, если взят масштаб 1:200.

4) Хорды *AB* и *CD* одной окружности пересекаются в точке *M*. Площади треугольников *AMD* и *CMB* относятся как: а) 81:16; б) 8:27. Как относятся друг к другу хорды: а) *AD* и *BC*; б) *AC* и *BD*?

5) Отрезок прямой, перпендикулярной гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает на катете, считая от вершины острого угла, отрезок, равный половине гипотенузы. Найдите отношение площадей данного и отсеченного треугольников.

6) Построены два треугольника, гомотетичные данному треугольнику, один с коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$, другой с коэффициентом, равным 2. Как относятся их площади?

Ответы. **1)** а) 1:6 и 1:36; б) 3:8 и 9:64. **2)** 0,2 м^2. **3)** 800 м^2. **4)** а) 9:4; б) $2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$. **5)** 4:1. 6) 1:16.

III. Решение задач с практическим содержанием

1. Детская квадратная площадка огорожена забором, закрепленным с помощью четырех столбов, находящихся в вершинах квадрата. Как увеличить площадь в два раза, чтобы новая площадка тоже имела форму квадрата, и чтобы столбы остались по ее периметру.

2. Сколько нужно семян, чтобы засеять круглую клумбу диаметром 3,2 м, если на 1 см^2 идет 0,0004 г?

3. На рисунке (рис. 49) изображена мишень. В каком отношении находятся площади ее наименьшего круга и круговых колец, если ширина каждого кольца равна радиусу внутреннего круга.

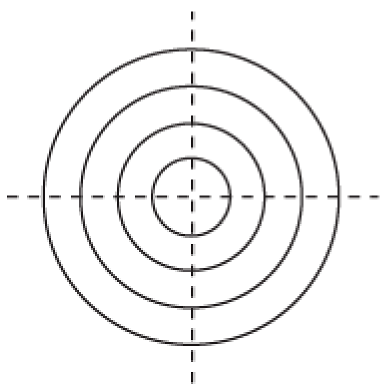


Рис. 49

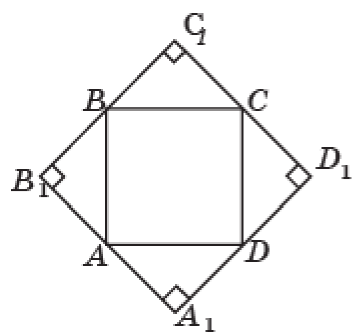


Рис. 50

Ответы. **1.** Решение показано на рисунке 50. **2.** ≈ 32 г. **3.** 1:3:5:7.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап VI урока 15).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 63 учебника).

2. Решить задачи.

1) Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3:5. Площадь большего многоугольника равна 40 м^2. Найдите площадь второго многоугольника.

Ответ. 14,4 м^2.

2) Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 51), равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

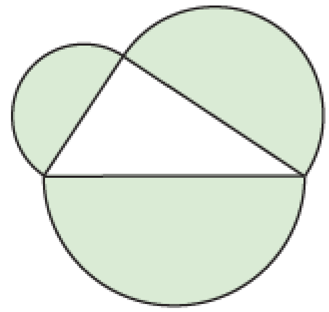


Рис. 51

3) Общая хорда двух пересекающихся кругов равна a и стягивает в одном круге дугу в 60°, а в другом - в 90°. Найдите площадь общей части данных кругов.

Решение. См. рисунок 52: искомая площадь равна сумме площадей сегментов ACB окружности с центром в точке O и ADB окружности с центром в точке O_1; $S_{ACB} = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$; $S_{ABD} = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$; таким образом, искомая площадь $S = (\frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4}) + (\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{24}(7\pi - 6\sqrt{3} - 6)$.

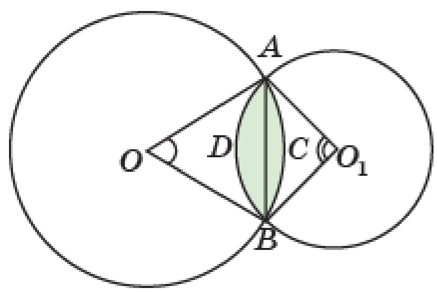


Рис. 52

4*) На рисунке (рис. 53) изображена фигура Φ, полученная сжатием окружности радиуса R в 2 раза. Чему равна ее площадь?

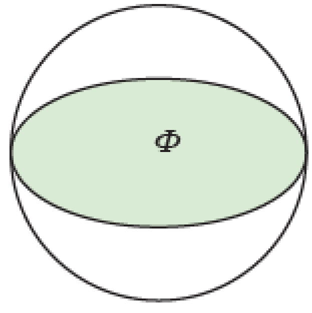


Рис. 53

Ответ. $\frac{\pi R^2}{2}$.

Урок 17

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Два треугольника называются подобными, если …
2. Подобием называется преобразование плоскости, при котором …
3. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то …
4. Если три стороны одного треугольника …, то такие треугольники подобны.
5. Отношение площадей подобных фигур равно …
6. Площади подобных многоугольников относятся как 5:9, их периметры относятся как …

Вариант 2

1. Два многоугольника называются подобными, если …
2. Коэффициентом подобия называется …
3. Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен углу другого прямоугольного треугольника, то …
4. Если две стороны одного треугольника … двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то …
5. Площади подобных многоугольников относятся как …
6. Периметры подобных многоугольников относятся как 4:3, их площади относятся как …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Найдите площадь правильного шестиугольника, периметр которого равен 48 см.

2. В круге радиуса R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, стягивающие дуги в 60° и 120°. Найдите площадь части круга между данными хордами.

3. В трапеции $ABCD$ углы C и D равны по 60°. На сторонах AD и BC, как на диаметрах, построены внутри трапеции полуокружности. Найдите площадь фигуры, заключенной между их дугами и основаниями трапеции, если $BC=a$ и $AB=\frac{3}{4}a$.

4*. Постройте трапецию, равновеликую данному треугольнику, основания которой равны a и b.

Ответы. **1.** $54\sqrt{3}$ см^2. **2.** Площади соответствующих сегментов равны $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$ и $\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$; искомая площадь $S = \frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$. **3.** Дана равнобедренная трапеция с основаниями, равными $\frac{3}{4}a$ и $\frac{7}{4}a$ ($DH=CP=\frac{a}{2}$) и высотой $AH=BP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (рис. 54);

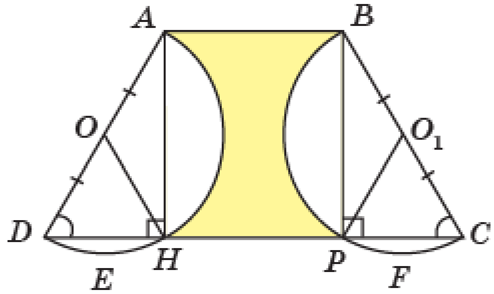


Рис. 54

площадь трапеции, таким образом, равна $\frac{5\sqrt{3}a^2}{8}$; чтобы найти площадь искомой фигуры, нужно от площади трапеции отнять площади полукругов без площадей соответствующих сегментов DEH и CFP; площадь каждого такого сегмента равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{a^2}{48}(2\pi - 3\sqrt{3})$, площадь двух сегментов равна $\frac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3})$; итак, от площади трапеции нужно отнять площадь фигуры, которая равна $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24}(4\pi + 3\sqrt{3})$; следовательно, площадь искомой фигуры равна $\frac{5\sqrt{3}a^2}{8} - \frac{a^2}{24}(4\pi + 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$. **4*.** Построить трапецию с данными основаниями и высотой, равной $\frac{ch}{a+b}$, где c и h соответственно сторона треугольнитка и высота данного треугольника, опущенная на нее; построение высоты трапеции показано на рисунке 55, где $CD||AB$, $AC = \frac{ch}{a+b}$.

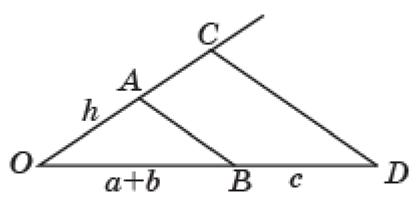


Рис. 55

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 16).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 61 – п. 63 учебника).

2. Решить задачи.

1) Даны две концентрические окружности, хорда большей из них, касающаяся меньшей окружности, равна 20 см. Найдите площадь кольца, ограниченного этими окружностями.

Ответ. 100π см^2.

2) Найдите площадь сегмента круга радиуса R, если его угол равен 120°.

Ответ. $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

3) Постройте полукруг, равновеликий данному кругу.

Ответ. Радиус искомого полукруга равен $\sqrt{2}R$, где R – радиус данного круга, отрезок $\sqrt{2}R$ – диагональ квадрата со стороной R.

4) В окружности проведены две непересекающиеся хорды KL и MN, которые стягивают дуги соответственно 90° и 120°. Прямые MK и LN пересекаются в точке P. Найдите площади треугольников PKL и PMN, если их сумма равна 200 см^2.

Ответ. Треугольники PKL и PMN подобны (по углам) с коэффициентом подобия $k = \frac{KL}{MN} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}R} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, таким образом, $\frac{S_{PKL}}{S_{PMN}} = \frac{2}{3}$, следовательно, S_{PKL}=80 см^2 и S_{PMN}=120 см^2.

5*) На рисунке (рис. 56) $ABCD$ – квадрат. Точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 делят его соответствующие стороны на три равные части. Найдите отношение площадей данного квадрата и четырехугольника $EFGH$.

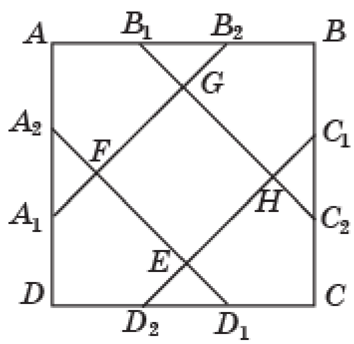


Рис. 56

Ответ. Четырехугольник $EFGH$ – квадрат со стороной $\frac{\sqrt{2}a}{3}$, где a – сторона данного квадрата, следовательно, искомое отношение равно 3:$\sqrt{2}$.

Урок 18
Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 2 дм.

2. Площади двух кругов относятся как 9:4, а разность их радиусов равна 4,5 см. Найдите длины их окружностей.

3. Сектор, дуга которого содержит 60°, равновелик кругу радиуса 7,8 см. Найдите радиус сектора.

4. На стороне треугольника взята точка, которая разделила ее в отношении 3:5. Из точки проведены прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника. Найдите площадь образовавшегося параллелограмма, если площадь треугольника равна 120 мм^2.

5*. Найдите отношение площадей данного треугольника и треугольника, сторонами которого являются медианы данного треугольника.

Вариант 2

1. Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен 3 дм.

2. Разность длин окружностей двух кругов равна длине окружности третьего круга, радиус которого равен 40 см. Найдите площади первых двух кругов, если их радиусы относятся как 5:3.

3. Найдите площадь сегмента круга, радиуса 4 см, если его хорда равна $4\sqrt{2}$см.

4. Каждая сторона треугольника разделена точками в отношении 2:3: 2. Найдите площадь шестиугольника, вершинами которого являются точки деления, если площадь треугольника равна 245 мм^2.

5*. В равностороннем треугольнике ABC, площадь которого равна Q, от вершины A на сторонах AB и AC отложены соответственно отрезки AE и AF, равные каждый третьей части стороны треугольника. Точки E и F соединены отрезками с противоположными вершинами, которые пересекаются в точке D. Найдите площадь образовавшегося четырехугольника $AEDF$.

64*. Изопериметрическая задача

65*. Равносоставленность и задачи на разрезание

См. параграф 4

66. Прямоугольная система координат (уроки 19, 20, 21)

Цель – повторить определения понятий координатной прямой, или координатной оси, начало координат, единичного отрезка, координат точки; доказать теорему о расстоянии между точками на координатной прямой; ввести понятия координатной плоскости, осей абсцисс и ординат, декартовой системой координат; познакомиться с жизнью и творчеством Р.Декарта; научиться применять метод координат для решения задач.

Урок 19

I. Анализ контрольной работы № 2

II. Устная работа

1) Какая фигура называется геометрическим местом точек (ГМТ)?

2) Что означают слова «фигура состоит из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству»?

3) Может ли геометрическим местом точек быть: а) одна точка; б) несколько линий; в) целая область?

4) Сколько существует точек, удаленных от двух данных точек на 10 см?

5) Что представляет собой геометрическое место прямых, удаленных от данной точки A на данное расстояние a?

6) Дана окружность с центром в точке O и диаметром AB. Что собой представляет геометрическое место ее хорд, которые данным диаметром делятся пополам?

Ответы. **3)** а), б), в) Да. **4)** Две, если расстояние между данными точками меньше либо равно 10 см; ни одной, если это расстояние больше 10 см. **5)** Касательные, проведенны к окружности с центром в данной точке и радиуса a. **6)** Остальные диаметры и хорды, перпендикулярные данному диаметру.

III. Новый материал

Изобразим прямую, на ней отметим точку O и справа от нее точку E, причем длину отрезка OE примем за 1.

Вопросы

- Как называется такая прямая?
- Как называется точка O?
- Как называется отрезок OE? Что он указывает?

Координатной прямой, или ***координатной осью***, называется прямая, на которой выбраны точка O, называемая ***началом координат***, и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление координатной прямой.

Координатой точки A на координатной прямой называется расстояние x от точки A до начала координат O, взятое со знаком "+", если A принадлежит положительной полуоси и со знаком "–", если A принадлежит отрицательной полуоси.

Теперь отметим на данной координатной прямой несколько точек A, B, C, D и определим их координаты. Найдем расстояние между точками: а) A и B; б) A и C; в) B и D.

Вопрос

- Как найти расстояние между двумя точками на координатной прямой, если известны их координаты?

Теорема. Расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами x_1, x_2 соответственно выражается формулой

$$A_1A_2=|x_1 - x_2|.$$

Доказательство проводится разбором различных случаев взаимного расположения точек на координатной прямой. Например, если точки A_1, A_2 расположены на положительной полуоси и A_2 лежит между O и A_1, $OA_1= x_1$, $OA_2=x_2$, то в этом случае $x_2< x_1$ и $A_1A_2= OA_1-OA_2= x_1-x_2= |x_1-x_2|$.

Если точки A_1, A_2 расположены на отрицательной полуоси и A_2 лежит между O и A_1, $OA_1= x_1$, $OA_2= x_2$, то в этом случае $|x_2|<|x_1|$ и $A_1A_2= OA_1 – OA_2= |x_1-x_2|$.

Другие случаи (еще четыре) учащиеся рассмотрят самостоятельно в домашней работе.

Изобразим две перпендикулярные координатные оси с общим началом координат.

Вопросы

- Что они задают на плоскости?
- Как они называюся?
- Как можно определить положение точки на плоскости?

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно ***осью абсцисс*** и ***осью ординат***. Плоскость, с заданной прямоугольной системой координат, называется ***координатной плоскостью***.

Пусть A – точка на координатной плоскости. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox называется ***абсциссой*** точки A и обозначается x. Аналогично через точку A проведем прямую, перпендикулярную оси Oy и точку ее пересечения с осью Oy обозначим A_y. Координата этой точки на оси Oy называется ***ординатой*** точки A и обозначается y.

Таким образом, точке A на координатной плоскости соответствует пара (x, y), называемая ***координатами точки*** на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$.

Впервые прямоугольные координаты были введены Рене Декартом (1596-1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также ***декартовой системой координат***, а сами координаты – ***декартовыми координатами***. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется ***методом координат***.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите координату середины отрезка на координатной прямой, если его концы имеют координаты: а) 1, 3; б) –2, 4; в) –3, –5.

2. Для данной системы координат на плоскости изобразите точки с координатами (1, 2), (2, -1), (-1, 3).

3. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 57), найдите их координаты.

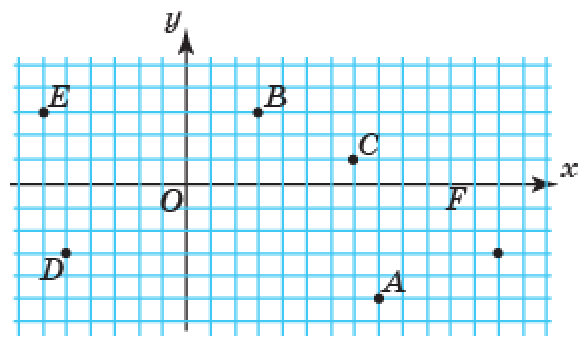


Рис. 57

4. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 3. Чему равна ордината другой точки? Изобразите данную прямую.

5. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна -7. Чему равна абсцисса другой точки? Изобразите данную прямую.

6*. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) x=0; б) y=0.

Ответы. **1.** а) 2; б) 1; в) -4. **4.** 3. **5.** -7. **6*.** а) ось ординат; б) ось абсцисс.

V. Занимательный момент урока

Решение задачи 5* из домашней работы урока 17 (этап V).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 66 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите координату середины отрезка на координатной прямой, если его концы имеют координаты: а) -1, 3; б) 2, -5; в) -3, -2.

Ответ. а) 1; б) -1,5; в) -2,5.

2) Из точки $A(2, 3)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.

Ответ. (2, 0).

3) Через точку $M(-2, 11)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты ее точки пересечения с осью ординат.

Ответ. (0, 11).

4) Для данной системы координат на плоскости изобразите точки $A(1, 1)$ и $B(1, -1)$ и отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли он через начало координат?

Ответ. (1, 0).

5*) Найдите геометрическое место точек на координтаной плокости, для которых абсцисса меньше или равна нулю.

Ответ. Полуплоскость, определенная прямой – осью ординат, лежащая слева от нее.

Урок 20

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Координатной осью называется …
2. Началом координат называется …
3. Прямоугольной системой координат на плоскости называется …
4. Осью ординат называется …
5. Абсциссой точки называется …
6. Координаты точки на плоскости называются декартовыми, так как …

Вариант 2

1. Координатной прямой называется …
2. Координатой точки на координатной прямой называется …
3. Координатной плоскостью называется …
4. Осью абсцисс называется …
5. Ординатой точки называется …
6. Система координат на плоскости называется декартовой, потому что …

II. Проверка математического диактанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Из точки: а) $A(3, 2)$; б) $B(-1, \frac{1}{2})$; в) $M(-7, 1)$; г) $N(-11, -8)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты его основания.

2) Из точки: а) $C(4, -1)$; б) $D(-5, 6)$; в) $E(-10, -8)$; г) $F(0, -9)$ опущен перпендикуляр на ось ординат. Найдите координаты его основания.

3) Найдите координаты точки K_1, симметричной точке: а) $K(1, 2)$; б) $K(2, -6)$; в) $K(-3, -4)$; г) $K(x, y)$ относительно оси абсцисс.

4) Найдите координаты точки L_1, симметричной точке: а) $L(4, 3)$; б) $L(-1, 0)$; в) $L(-5, 8)$; г) $L(x, y)$ относительно оси ординат.

5) Найдите координаты точки P_1, симметричной точке: а) $P(-1, 2)$; б) $P(-5, -3)$; в) $P(10, 0)$; г) $P(x, y)$ относительно начала координат.

Ответы. **1)** а) (3, 0); б) (-1, 0); в) (-7, 0); г) (-11, 0). **2)** а) (0, -1); б) (0, 6); в) (0, -8); г) (0, -9). **3)** а) (1, -2); б) (2, 6); в) (-3, 4); г) $(x, -y)$. **4)** а) (-4, 3); б) (1, 0); в) (5, 8); г) $(-x, y)$. **5)** а) (1, -2); б) (5, 3); в) (-10, 0); г) $(-x, -y)$.

IV. Новый материал

Изобразим отрезок: а) AB, если точки имеют координаты $A(2, 3)$ и $B(4, 3)$; б) MN, если $M(1, 1)$ и $N(-1, -1)$; в) EF, если $E(-4, 1)$, $F(-1, 4)$. Сделайте предположение о нахождении координат середины отрезка, если координаты его концов заданы.

Ответ. а) (3, 3); б) (0, 0); в) (-2,5, 2,5).

Докажем, что середина $C(x, y)$ отрезка, соединяющего точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ на координатной плоскости имеет координаты $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть сначала отрезок AB не параллелен ни одной из осей (рис. 58), опустим из точек A, C, B перпендикуляры соответственно AA_1, CC_1, BB_1 на ось абсцисс.

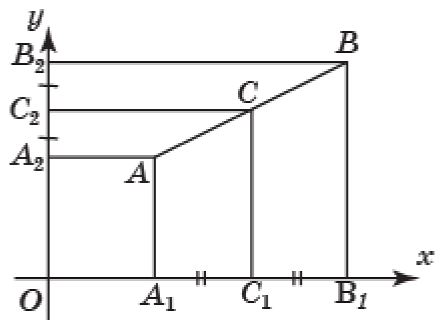


Рис. 58

В силу теоремы Фалеса $A_1C_1 = C_1B_1$, значит, C_1 – середина отрезка A_1B_1. Следовательно, координата точки C_1 равна $\frac{x_1+x_2}{2}$. Если отрезок AB параллелен оси ординат, то точки A, B, C имеют одну абсциссу, и формула остается верной в этом случае. Ордината точки C находится аналогичным образом, из точек A, C, B опускаются перпендикуляры соответственно AA_2, CC_2, BB_2 на ось ординат. Координата точки C_2 будет равна $\frac{y_1+y_2}{2}$. Если отрезок AB параллелен оси абсцисс, то точки A, B, C имеют одну ординату, и формула остается верной в этом случае.

V. Закрепление нового материала

1. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(0, 2)$, $B(-3, 6)$; б) $A(3, -14)$, $B(1, -2)$; в) $A(5, -6)$, $B(2, 0)$.

2. Середина отрезка EF имеет координаты: а) (0, 0); б) (2, -5); в) (-6, -9). Найдите координаты точки E, если $F(4, -1)$.

3. Найдите координаты точки, симметричной точке $E(-4, 9)$ относительно: а) начала координат; б) оси ординат; в) оси абсцисс.

4*. Найдите ГМТ координатной плоскости, для которых $|x| \leq 5$.

Ответы. **1.** а) **(**-1,5, 4); б) (2, -8); в) (3,5, -3). **2.** а) (-4, 1); б) (0, -9); в) (-16, -17). **3.** а) (4, -9); в) (4, 9); в) (-4, -9). 4*. Полоса между прямыми (включая сами прямые), которые параллельны оси ординат и проходят одна через точку (-5, 0), вторая - через точку (5, 0).

VI. Занимательный момент урока

Решение задачи 5* из домашней работы урока 19 (этап VI).

VII. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 66 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите середину отрезка HP, если точки H и P имеют соответственно координаты: а) (0,1, 0) и (5, -0,1); б) ($\frac{1}{3}$, -$\frac{1}{2}$) и (-$\frac{5}{9}$, -$\frac{5}{21}$).

Ответ. а) (2,55, -0,05); б) (-$\frac{1}{9}$, -$\frac{31}{84}$).

2) Найдите координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

Ответ. а) $(x, -y)$; б) $(-x, y)$; в) $(-x, -y)$.

3) Точки N(…, 6) и N_1(2, …) симметричны относительно оси ординат. Назовите пропущенные координаты этих точек.

Ответ. $N(-2, 6)$ и $N_1(2, 6)$.

4) Найдите координаты точки, полученной поворотом точки A вокруг начала координат на угол 90° против часовой стрелки, если точка A имеет координаты: а) (2, 1); б) (-1, 3).

Ответ. а) (-1, 2); б) (-3, -1).

5*) Найдите ГМТ координатной плоскости, для которых $|y|\geq 11$.

Ответ. Две полуплоскости, определяемые прямыми, параллельными оси абсцисс и проходящими одна через точку с координатами (0, -11), а другая с координатами (0, 11) без внутренних точек полосы между этими прямыми.

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «Жизнь и творчество Рене Декарта». Литература: Учебник, параграф 66, раздел «Исторические сведения»; Дорофеева А.В. Рене Декарт и его «Геометрия» //Квант. – 1987. № 9; Котова А. Жизнь Декарта //Квант. – 1996. - № 3; Матвиевская Г.П. Рене Декарт. – М.: Просвещение, 1987 /Из серии «Люди науки».

Урок 21

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем шестерых учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение прямоугольной системы координат.
2. Теорема о расстоянии между точками на координатной прямой.

Задания 2, 4, 6

1. Определение координатной плоскости.
2. Вывод формулы нахождения координат середины отрезка по координатам его концов.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Нарисуйте прямоугольную систему координат и отметьте точки $K(1, -3)$ и $L(-5, 0)$. Найдите координаты точек H и P – оснований перпендикуляров, опущенных соответственно из точек K и L на оси Ox и Oy.

2) Найдите координаты середины отрезка MN, если: а) $M(0, -8)$, $N(11, -4)$; б) $M(3, -10)$, $N(-13, 3)$.

3*) Найдите координаты точки пересечения отрезка AB с осью абсцисс, если $A(3, -2)$, $B(6, 5)$.

Ответы. 1) Соответственно для точки K: (1, 0) и (0, -3); для точки L: (-5, 0) и (0, 0). 2) (5,5, -6); б) (-5, -3,5). 3*) $(3\frac{6}{7}, 0)$.

Задание для класса

1. Найдите координаты середины отрезка KL, если: а) $K(-5, 6)$, $L(11, -17)$; б) $K(0{,}5, 8)$, $L(0{,}3, -12)$.

2. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(1, 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол 30°.

3. Докажите, что расстояние OA от точки $A(x, y)$ до начала координат выражается формулой $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4*. Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x=2$; б) $x = y$.

Ответы. **1.** а) (3, -5,5); б) (0,4, -2). **2.** $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. **4*.** а) Прямая, перпендикулярная оси абсцисс и проходящая через точку (2, 0); б) прямая, содержащая биссектрисы углов I и III координатных четвертей.

К доске приглашаем троих учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – решает классную задачу 2.

$У_2$ –решает классную задачу 3.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 4 из домашнего задания урока 20 (этап VII).

Дополнительные вопросы

- Что называется координатой точки на прямой?
- Что называется координатами точки на плоскости?
- Какой метод решения задач называется методом координат?

II. Устная работа

1) Точка A_1 симметрична точке A относительно точки M. Найдите координаты точки: а) A_1, если A(5, -2), M(0, 4); б) A, если A_1(-2, 0), M(1, 2); в) M, если A(4, -2), A_1(-3, 1).

2) Точка A(5, 3) переведена в точку A_1 осевой симметрией относительно оси абсцисс, точка A_1 переведена в точку A_2 осевой симметрией относительно оси ординат. Найдите координаты точек A_1 и A_2. Можно ли точку A перевести каким-нибудь поворотом в точку A_2?

3) Назовите координаты точки M_1, в которую переходит точка M(-2, 4) при гомотетии с центром: а) в начале координат с коэффициентом 2; б) в начале координат с коэффициентом $\frac{1}{2}$; в) в начале координат с коэффициентом –1; г*) в точке A(1, 1) с коэффициентом 2.

4) Найдите координаты центра гомотетии, переводящей отрезок OH в отрезок KL, если O(0, 0), H(3, 5), K(14, 0) и L(20, 10).

Ответы. 1) а) (-5, 10); б) (4, 4); в) (0,5, -0,5). 2) A_1(5, -3), A_2(-5, -3), поворотом на 180° (или -180°) вокруг начала координат. 3) а) (-4, 8); б) (-1, 2); в) (2, -4); г*) (-5, 7). 4) (-14, 0).

III. Индивидуальное задание

Сообщение на тему «Исторические сведения о жизни и творчестве Рене Декарта» (см. задание **3*** из домашней работы – этап VII урока 20).

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 5* из домашней работы урока 20 (этап VII).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 66 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите координаты точки, полученной поворотом точки A вокруг начала координат на угол 90° против часовой стрелки, если точка A имеет координаты: а) (-2, -3); б) (1, -3).

Ответ. а) (3, -2); б) (3, 1).

2) Найдите координаты точки пересечения отрезка CD с осью Oy, если $C(6, 4)$, $D(-2, -5)$.

Ответ. (0, -2,75).

3) Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $B(1, 0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол: а) 45°; б) 60°.

Ответ. а) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; б) $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

4*) Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x \geq 0$; б) $y<0$; в) $x<0$, $y>0$; г) $xy> 0$; д) $xy<0$.

Ответ. а) Первая и четвертая четверти координатной плоскости (включая ось ординат); б) третья и четвертая четверти координатной плоскости без оси абсцисс; в) вторая четверть координатной плоскости без соответствующих полуосей; г) первая и третья четверти координатной плоскости без соответствующих полуосей; д) вторая и четвертая четверти координатной плоскости без соответствующих полуосей.

67. Расстояние между точками. Уравнение окружности (уроки 22, 23, 24)

Цель – вывести формулу расстояния между двумя точками на плоскости, заданными своими координатами; вывести уравнение окружности и неравенство, определяющее круг.

Урок 22

I. Устная работа

1) Как выражается расстояние между двумя точками на координатной прямой?

2) Что позволяют сделать прямоугольные координаты на плоскости?

3) Какой метод называется методом координат?

4) Найдите геометрическое место точек, для которых: а) x=1; б) $x \geq 0$; в) y=-1; г) $|x|$=5; д) $|y| \leq 1$; е) $x=y$; ж) $x=-y$.

5) Найдите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x<0$; б) $y \geq 0$; в) $x \geq 0$, $y<0$.

Ответы. **4)** а) Прямая, перпендикулярная оси абсцисс и проходящая через точку (1, 0); б) полуплоскость, границей которой является ось ординат и которая лежит справа от нее; в) прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (0, -1); г) две параллельные прямые, перпендикулярные оси абсцисс и проходящие соответственно через точки (-5, 0) и (5, 0); д) полоса, заключенная между прямыми (включая и сами прямые), параллельными оси абсцисс и проходящими через точки (0, -1) и (0, 1); е) биссектрисы углов первой и третьей четвертей координатной плоскости; ж) биссектрисы углов второй и четвертой четвертей координатной плоскости. **5)** а) II и III четверти координатной плоскости (без оси ординат); б) I и II четверти координатной плоскости; в) IV четверть координатной плоскости без соответствующей полуоси ординат.

II. Новый материал

Изобразим прямоугольную систему координат и отметим две точки A(2, 8) и B(10, 2). Найдем расстояние между ними. Выразим его через координаты данных точек.

Теперь возьмем две произвольные точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости и выведем формулу расстояния между ними.

Выразим расстояние между ними через их координаты. Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. В прямоугольном треугольнике AA_1A_2 имеем $AA_1=|x_1-x_2|$, $AA_2=|y_1-y_2|$. По теореме Пифагора получаем следующую формулу расстояния между точками

$$A_1A_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Легко видеть, что если $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$, то формула расстояния между точками на плоскости остается верной.

Далее рассмотрим окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую этой окружности и найдем расстояние от нее до центра окружности, итак, $MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, с другой стороны, $MC=R$. Следовательно, $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$, или, возведя правую и левую части последнего равенства в квадрат, получим уравнение окружности с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Рассмотрим точку $K(x, y)$, которая принадлежит кругу, определяемому данной окружностью, но не принадлежит ей.

Вопросы

- Что можно сказать о расстоянии между точкой K и центром окружности C?

- Какому соотношению удовлетворяют точки, принадлежащие соответствующему кругу?

Таким образом, координаты точек соответствующего круга удовлетворяют следующему неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2.$$

III. Закрепление нового материала

1. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1, 2)$ и $A_2(-1, 1)$; б) $B_1(3, 4)$ и $B_2(3, -1)$.

2. Какая из точек A (2, 1) или B (-2, 1) лежит ближе к началу координат?

3. Найдите уравнение окружности: а) с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(1, -2)$ и радиусом 4.

4*. Докажите, что уравнение $x^2-4x+y^2=0$ задает окружность. Найдите ее радиус и координаты центра.

Ответы. **1.** а) $\sqrt{5}$; б) 5. **2.** $AO=BO$. **3.** а) $x^2+y^2=1$; б) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **4*.** $x^2-4x+y^2=x^2-4x+4-4+y^2=(x-2)^2-4+y^2$, значит, $(x-2)^2+y^2=4$, таким образом, имеем уравнение окружности с центром в точке с координатами (2, 0) и радиусом, равным 2.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 21 (этап V).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 67 учебника).

2. Решить задачи.

1) Даны точки $M(1, -2)$, $N(-2, 3)$ и $K(3, 1)$. Найдите периметр треугольника MNK.

Ответ. $MN = \sqrt{34}$, $MK=\sqrt{13}$, $NK=\sqrt{29}$, $P_{MNK} = \sqrt{34}+\sqrt{13}+\sqrt{29}$.

2) Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=25$, если она имеет координаты: а) (1, 2); б) (3, 4); в) (-4, 3); г) (0, 5); д) (5, -1).

Ответ. а) Лежит внутри окружности; б), в), г) принадлежит окружности; д) лежит вне окружности.

3) Даны точки $A(2, 0)$, $B(-2, 6)$. Найдите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

Ответ. Центр окружности имеет координаты (0, 3), диаметр равен $2\sqrt{13}$, следовательно, уравнение окружности имеет вид $x^2+(y-3)^2=13$.

4*) Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки с координатами (3, 6).

Ответ. (3, 3).

Урок 23

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой

Вариант 1

1. Середина отрезка MN, где $M(0, 1)$, $N(-2, 8)$, имеет координаты …
2. Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой …
3. Окружность задается …
4. Расстояние между точками $E(5, 0)$ и $F(-1, 0)$ равно …
5. Окружность, заданная уравнением $x^2+y^2-2x-3=0$, имеет радиус …
6. Центр окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+2x-2y-8=0$, имеет координаты …

Вариант 2

1. Середина отрезка KL, где $K(5, -6)$, $L(-2, 0)$, имеет координаты …
2. Расстояние между точками $B_1(b_1)$, $B_2(b_2)$ выражается формулой …
3. Круг задается …
4. Расстояние между точками $C(0, -5)$ и $D(0, 2)$ равно …
5. Центр окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+4x-4=0$, имеет координаты …
6. Окружность, заданная уравнением $x^2+y^2+6y-4x-12=0$, имеет радиус …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение задач с практическим содержанием

1. На рисунке (рис. 59) изображено колесо карусели, закрепленное в центре O планкой AB, причем $AO=OB$. По периметру колеса расположены кресла. Докажите, что сумма квадратов расстояний от них до концов планки есть величина постоянная.

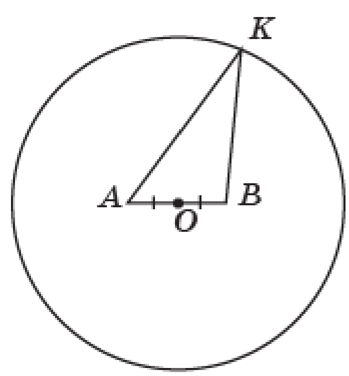


Рис. 59

2. Проводятся соревнования по ориентированию на местности. Участникам раздали карты, на которых пункты сбора расположены в вершинах четырехугольника, имеющих координаты A(-2, -5), B(-5, 3), C(3, 9), D(8, -3). Спортсмены разбиты на четыре команды, которые должны начать движение из точек E, F, G и H – середин соответствующих сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника. Далее они должны направиться в пункты, расположенные в серединах отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. Изобразите план и определите координаты точек E, F, G, H, точек – пунктов встреч, а также расстояние, которые прошли команды до места встреч.

3. Определите расстояние между пунктом O и недоступной точкой M, если известны расстояния (в км) OA, OB и OC, где A, B, C – пункты, расположенные в вершинах треугольника, центроидом которого является точка M. Точки имеют следующие координаты: O(0, 0), A(-7, 8), B(8, 15), C(-4, 1).

Ответы. **2.** E(-3,5, -1), F(-1, 6), G(5,5, 3), H(3, -4); середины EG и FH совпадают, это точка, назовем ее O, с координатами (1, 1); $EO=GO=5\sqrt{1{,}45}$, $FO=HO=\sqrt{29}$. **3.** M (-1, 8), $OM=\sqrt{65}$ ≈8,065 (км).

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы урока 22 (этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 67 учебника).

2. Решить задачи.

1) Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: A (0, 0), B (0, 2), C(2, 0).

Ответ. AB=2, AC=2, $BC=2\sqrt{2}$, таким образом, треугольник ABC является равнобедренным и прямоугольным.

2) Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $(x+3)^2+(y–1)^2=25$, если она имеет координаты: а) (-2, 0); б) (4, -2); в) (1, 4); г) (-1, 4).

Ответ. а) Находится внутри окружности; б) находится вне окружности; в) принадлежит окружности; г) находится внутри окружности.

3) Найдите точки пересечения окружности $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ с осью абсцисс. Найдите радиус окружности.

Ответ. Точки с координатами (-6, 0) и (2, 0); дана окружность $(x+2)^2+(y–3)^2=25$, радиус которой равен 5.

4*) Докажите, что отрезок EF, для которого E(2, 5) и F(5, 2) является хордой окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-10x-10y+41=0$. Пересекает ли данная окружность оси координат? Почему?

Ответ. Данная окружность $(x\text{-}5)^2+(y–5)^2=9$ не пересекает ни одну из осей координат, так как расстояния от ее центра до осей координат больше радиуса.

Урок 24

I. Проверка домашнего задания

За первые парты приглашаем шестерых учащихся – опрос по теории.

Задание 1, 3, 5

1. Определение координат точки на плоскости относительно данной системы координат.

2. Вывод формулы нахождения расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

Задания 2, 4, 6

1. Определение прямоугольной системы координат на плоскости.

2. Вывод уравнения окружности.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих на местах.

Карточка

1) Какая из точек, U или V, ближе к точке $S(0, -1)$, если: а) $U(-3, 4)$, $V(0, -7)$; б) $U(0, 6)$, $V(-5, -1)$?

2) Среди точек $A(0, -9)$, $B(6, -1)$, $C(-4, 2)$, $D(4, 6)$, $E(2, -2)$, $F(6, 0)$ назовите точки, которые принадлежат окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=25$; б) принадлежат кругу $(x-3)^2+(y+1)^2\leq 9$; в) не принадлежат кругу $x^2+y^2\leq 16$.

3) Найдите координаты центра окружности и ее радиус: а) $(x-5)^2+(y+1)^2=9$; б) $x^2+y^2-2y=0$.

Ответы. 1) а) U; б) V. 2) а) C, D; б) B, E; в) A, B, C, D, F. 3) а) $(5, -1)$, 3; б) $(0, 1)$, 1.

Задание для класса

1. Среди точек $E(8, 0)$, $F(-1, 3)$, $G(0, 4)$, $H(-8, 6)$, $K(15, -2)$, $L(-4, 0)$ найдите точки, которые: а) не принадлежат кругу $x^2+y^2\leq 16$; б) не принадлежат кругу $(x-1)^2+(y+2)^2\leq 36$.

2. Найдите координаты центра окружности и ее радиус: а) $(x+8)^2+y^2=81$; г) $x^2+6x+y^2-4y=12$.

3. Назовите уравнение окружности с центром в начале координат и проходящей через точку: а) $A(-1, 1)$; б) $K(0, -5)$.

4*. Параллельный перенос переводит точку $O(0, 0)$ в точку $A(3, 2)$. Найдите координаты точек B_1, C_1 и E_1, в которые переходят соответственно точки $B(-1, 1)$, $C(4, -2)$ и $E(-3, 3)$ при этом параллельном переносе.

Ответы. **1.** а) E, H, K; б) F, L. **2.** а) (-8, 0), 9; г) (-3, 2), 5. **3.** а) $x^2+y^2=2$; б) $x^2+y^2=25$. **4*.** $B_1(2, 3)$, $C_1(7, 0)$, $E_1(0, 5)$.

К доске приглашаем четверых учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

$У_3$ – воспроизводит решение задачи 3 из домашнего задания урока 23 (этап V).

Дополнительные вопросы

- Как определяются координаты точки на плоскости?
- Как определяется расстояние между точками на координатной прямой?
- Какими уравнениями задаются оси координат?

II. Устная работа

1) Какому неравенству удовлетворяют точки плоскости, лежащие вне круга с центром в точке $C(x_о, y_о)$ и радиусом R?

2) Как задается кольцо, определенное двумя концентрическими окружностями с центром в точке $C(x_о, y_о)$ и радиусами R и r, где $R>r$?

3) Найдите расстояние между точками: а) $A(0, 1)$ и $B(-1, 0)$; б) $C(2, -2)$ и $D(-2, 2)$: в) $E(2, 1)$ и $F(-1, 3)$.

4) Назовите неравенство, определяющее круг с центром в точке: а) $C(-7, 1)$; б) $D(0, -12)$; в) $E(-2, 3)$; г) $F(5, -4)$, окружность которого проходит через начало координат. Найдите его радиус.

5) Координаты концов диаметра окружности равны: а) (-1, 2) и (0, -4); б) (-3, 0) и (0, 8); в) (5, -7) и (-2, -5); г) (3, -1) и (4, -2). Найдите координаты центра данной окружности.

Ответы. **1)** $(x-xO)^2+(y-yO)^2>R^2$. **2)** $r^2\le (x-xO)^2+(y-yO)^2\le R^2$. **3)** а) $\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{2}$; в) $\sqrt{13}$. **4)** а) $(x+7)^2+(y-1)^2\le 50$, $2\sqrt{5}$; б) $x^2+(y+12)^2\le 144$, 12; в) $(x+2)^2+(y-3)^2\le 13$, $\sqrt{13}$; г) $(x-5)^2+(y+4)^2\le 41$, $\sqrt{41}$. **5)** а) (-0,5, -1); б) (-1,5, 4); в) (1,5, -6); г) (3,5, -1,5).

III. Подготовка к контрольной работе

1. Найдите координаты середины отрезка MN, если: а) $M(-3, -1)$, $N(-4, 5)$; б) $M(-5, 2)$, $N(-7, -4)$.

2. Какая из точек, $A(0, 5)$ или $B(-1, 4)$, дальше от точки $E(-6, -2)$?

3. На оси ординат найдите точку, которая одинаково удалена от точек $H(5, 8)$ и $P(-3, 2)$.

4. Найдите уравнение окружности, которая проходит через точку $F(5, -2)$ и центр которой находится в точке $C(-1, 1)$.

5*. Найдите геометрическое место точек координатной плоскости, для которых $|x+1|=3$.

Ответы. **1.** а) (-3,5, 3,5); б) (-6, -1). **2.** Точка *А*. **3.** (0, $6\frac{1}{3}$). **4.** $(x+1)^2+(y-1)^2=45$. **5*.** Прямые $x=2$ и $x=-4$.

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы урока 23 (этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 66, п. 67).

2. Решить задачи.

1) На прямой, параллельной оси: а) абсцисс; б) ординат взята точка с координатами (-3, 1). Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из нее на ось: а) ординат; б) абсцисс.

Ответ. а) (0, 1); б) (-3, 0).

2) Найдите координаты середины отрезка *KL*, если: а) *K*(2, -1), *L*(1, 6); б) *K*(-4, -9), *L*(3, 1).

Ответ. а) (1,5, 2,5); б) (-0,5, -4).

3) Какая из точек, *X*(7, -2) или *Y*(3, 0), ближе к точке *Z*(-2, -4)?

Ответ. *Y*.

4) На оси абсцисс найдите точку, которая одинаково удалена от точек *M*(-4, -2) и *N*(6, 4).

Ответ. (1,6, 0).

5) Окружность с центром в точке *S*(4, -8) проходит через точку *G*(3, 1). Запишите уравнение этой окружности.

Ответ. $(x-4)^2+(y+8)^2=82$.

6*). Найдите геометрическое место точек координатной плоскости, для которых $|y-1|=4$.

Ответ. Прямые $y=5$ и $y=-3$.

Урок 25
Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Найдите длину отрезка CD, если: а) $C(0, -1)$, $D(-5, 6)$; б) $C(7, -3)$, $D(-4, -4)$.

2. Найдите координаты середины отрезка QP, если: а) $Q(-5, -8)$, $P(25, 3)$; б) $Q(-18, 6)$, $P(6, 18)$.

3. Найдите координаты центра окружности $x^2+y^2+14y-18x+125=0$ и ее радиус.

4. Найдите на оси абсцисс точку одинаково удаленную от точек $E(-4, 2)$ и $F(7, -4)$.

5*. Найдите ГМТ координатной плоскости, для которых $|y+2|\leq 1$.

Вариант 2

1. Найдите длину отрезка EF, если: а) $E(-1, 1)$, $F(5, -12)$; б) $E(-6, 0)$, $F(-9, 7)$.

2. Найдите координаты середины отрезка RT, если: а) $R(9, -17)$, $T(0, -15)$; б) $R(24, -6)$, $T(-5, -8)$.

3. Найдите координаты центра окружности $y^2+x^2-22y+10x+134=0$ и ее радиус.

4. Найдите на оси ординат точку одинаково удаленную от точек $G(7, 5)$ и $H(-1, -3)$.

5*. Найдите ГМТ координатной плоскости, для которых $|x-1|\geq 2$.

68. Векторы. Сложение векторов (уроки 26, 27)

Цель – повторить определение вектора (см. п. 42 учебника), понятий длины, или модуля, вектора, одинаково и противоположно направленных векторов, нулевого вектора, равных векторов; ввести понятие суммы векторов, рассмотреть свойства операции сложения векторов (переместительный и сочетательный законы сложения векторов), научиться использовать их при решении задач.

Урок 26

I. Анализ контрольной работы

II. Устная работа

1) Какие физические величины характеризуются направлением? Как они называются?

2) Что называется вектором?

3) Как обозначается и изображается вектор?

4) Что означает, что точка A' плоскости получается из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$?

5) Что называется длиной, или модулем, вектора?

6) Какие два вектора называются равными?

7) Какой вектор называется нулевым?

8) На рисунке (рис. 60) найдите векторы, которые: а) одинаково направлены; б) противоположно направлены; в) равны.

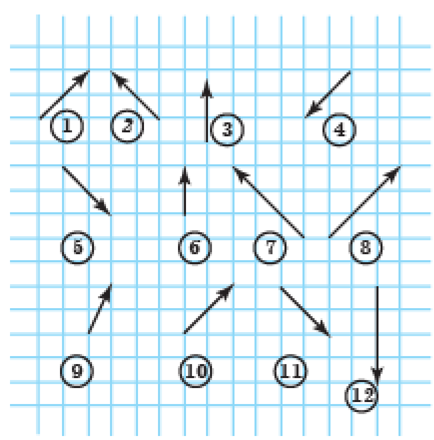


Рис. 60

9) Сколько различных векторов определяют вершины правильного: а) треугольника; б) четырехугольника?

Ответы. **8)** Векторы: а) 1,8,10; 2,7; 3,6; 5,11; б) 1,4; 2,5; 2,11; 3,12; 6,12; 4,8; 4,10; 5,7; 7,11; в) 1,10; 5,11. **9)** а) 6; б) 8.

III. Новый материал

Изобразим отрезки AB=2 см и BC=3 см, причем точки A, B и C принадлежат одной прямой.

Вопросы

- Какой отрезок является суммой двух данных отрезков?
- Чему она равна?

Изобразим следующую пару отрезков: KL=2 см и LM=3см, причем точки K, L и M не принадлежат одной прямой?

Вопросы

- Чему в этом случае равна сумма двух данных отрезков?
- Как определяется сумма двух отрезков?

Теперь от отрезков перейдем к векторам, в первом случае $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, во втором – к векторам $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LM}$.

Вопрос

- Как можно определить сумму двух векторов?

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Таким образом, для рассмотренных векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{KM}$.

Для операции сложения векторов справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам сложения чисел.

Свойство 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O. Предположим, что получившиеся векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ не лежат на одной прямой. Рассмотрим параллелограмм $OACB$. В нем $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Тогда по определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Свойство 2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (сочетательный закон).

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от некоторой точки A: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B: $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, а вектор $\vec{c}$ - от точки C: $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$. Тогда по определению сложения векторов будем иметь: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. С другой стороны,

$$\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BD},\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

IV. Закрепление нового материала

1. В прямоугольнике *ABCD* *AB*=3 см, *BC*=4 см. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{DB}$.

2. В треугольнике *ABC* укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

3. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. Верны ли равенства: а)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; б)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$; г) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$?

4*. Упростите: а)$\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{FC}$; б) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Ответы. **1.** а), в) 3 см; б) 4 см; г), д) 5 см. **2.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{CA}$; д) $\overrightarrow{BD}$, где вектор $\overrightarrow{AD}$ (рис. 61) равен вектору $\overrightarrow{CA}$. **3.** а), б), в), д), е) Да; г) нет. **4*.** а) $\overrightarrow{DK}$; б) $\overrightarrow{AG}$.

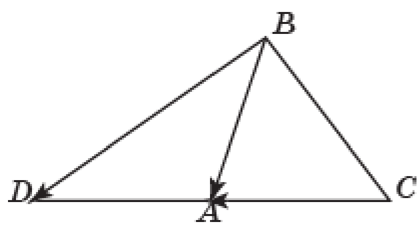


Рис. 61

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 68 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точки *S* и *T* являются серединами боковых сторон соответственно *MN* и *LK* равнобедренной трапеции *MNLK*. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; в) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{LM}$; г) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

Ответ. а) Да; б), в) нет; г) да.

2) Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков *AD* и *BC* совпадают. Верно ли обратное?

Ответ. Четырехугольник *ABDC* – параллелограмм, значит, середины отрезков *AD* и *BC* совпадают, так как эта общая точка является точкой пересечения диагоналей названного параллелограмма; обратное верно, поскольку отрезки *AB* и *CD* являются противоположными сторонами параллелограмма *ABDC*.

3) Для данных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ нарисуйте вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Ответ. См. рисунок 62, $\vec{x}=\overrightarrow{DB}$.

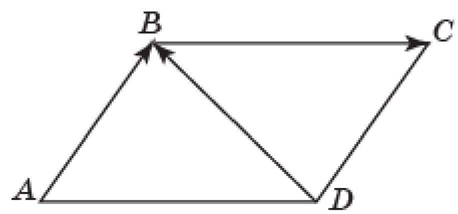


Рис. 62

4*) Докажите, что $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

Ответ. Равенство достигается, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Урок 27

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задание 1, 3, 5

1. Определение вектора.

2. Сформулируйте и докажите первое свойство сложения векторов (переместительный закон).

Задание 2, 4, 6

1. Определение длины, или модуля, вектора.

2. Сформулируйте и докажите второе свойство сложения векторов (сочетательный закон).

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Дан ромб $ABCD$. Отложите вектор, равный $\overrightarrow{AB}$: а) от точки C; б) от середины стороны AD.

2) Изобразите на координатной плоскости вектор $\overrightarrow{OE}$, если O – начало координат, $E(-5, 6)$.

3) Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EE}$; в) $\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HG}$.

Ответы. 3) а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\vec{0}$.

Задание для класса

1. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}$; б) $\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{FH}$; в) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{QN}$.

2. Верно ли равенство: а) $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{CO}$; б) $\overrightarrow{ZM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XM}$?

3. Используя параллелограмм $ABCD$, найдите: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.

4*. Верно ли равенство: $\overrightarrow{XQ}+\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{ZR}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{QX}+\overrightarrow{RX}+\overrightarrow{XS}=\overrightarrow{YS}$?

Ответы. **1.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{KL}$; в) $\overrightarrow{MA}$. **2.** а), б) Да. **3.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CA}$. **4*.** Нет.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 2 из домашнего задания (урок 26, этап V).

Дополнительные вопросы

- Какие векторы называются равными?
- Какой вектор называется нулевым?
- Какие векторы называются одинакоко направленными?

II. Устная работа

1) Даны два параллельных и одинаково направленных луча. Сколько существует параллельных переносов, переводящих один из них в другой?

2) Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника переходит в его другую сторону?

3) Приведите примеры фигур, которые можно перевести на себя с помощью параллельного переноса.

4) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD||BC$) $\angle A$=90º, $\angle C$=135º, AB=3 см, AD = 5 см. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AC}$.

5) A, B, C, D и E – произвольные точки плоскости (рис. 63). Выразите через векторы $\vec{a}$=$\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}$=$\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}$=$\overrightarrow{CD}$ и $\vec{d}$=$\overrightarrow{DE}$ вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{BE}$; д) $\overrightarrow{AE}$.

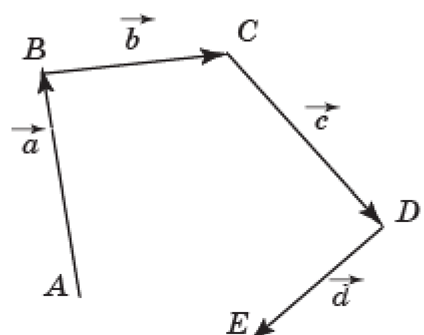


Рис. 63

6) Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{CE}$+$\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CE}$+$\overrightarrow{DC}$+$\overrightarrow{EF}$+$\overrightarrow{FD}$; в) $\overrightarrow{MN}$+$\overrightarrow{KL}$+$\overrightarrow{HP}$+$\overrightarrow{PM}$+$\overrightarrow{NK}$; г) $\overrightarrow{ST}$+$\overrightarrow{RS}$+$\overrightarrow{QP}$+$\overrightarrow{PR}$+$\overrightarrow{TQ}$.

Ответы. **1)** Два. **2)** Нет. **3)** Плоскость, прямая. **4)** а) 6 см; б) 2 см; в) $3\sqrt{2}$ см; г) $\sqrt{34}$ см; д) $\sqrt{13}$ см. **5)** а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$; д) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. **6)** а) $\overrightarrow{AE}$; б) $\vec{0}$; в) $\overrightarrow{HL}$; г) $\vec{0}$.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Дан квадрат $ABCD$. Запишите векторы, равные вектору $\overrightarrow{AB}$.
2. В треугольнике EFG от точки M – его центроида, отложите векторы, равные векторам $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{FM}$, $\overrightarrow{GG_1}$, где G_1 – середина стороны EF.

3. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{NM}$: б) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$.

4*. Докажите, что для любых векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ выполняется неравенство $|\vec{m}+\vec{n}| \le |\vec{m}|+|\vec{n}|$.

Вариант 2

1. Дан ромб $ABCD$. Запишите векторы, равные вектору $\overrightarrow{AB}$.

2. В треугольнике EFG от точки M – его центроида, отложите векторы, равные векторам $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{KG}$, $\overrightarrow{LL_1}$, где $KL_1 = ML_1$.

3. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{SR}$.

4*. Верно ли неравенство $|\vec{a}|+|\vec{b}| \le |\vec{a}+\vec{b}|$?

Ответы. Вариант 1. **3.** а) $\overrightarrow{NL}$; б) $\overrightarrow{AF}$. **4*.** Да. Вариант 2. **3.** а) $\overrightarrow{EG}$; б) $\vec{0}$. **4*.** Нет.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (урок 26, этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 68 учебника).

2. Решить задачи.

1) Радиусы OA, OB и OC окружности образуют углы в 120°. От точки O отложите векторы: а) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$; г) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

2) Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$.

Ответ. а) a; б), в) $\sqrt{3}a$.

3) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

Решение. См. рисунок 64:

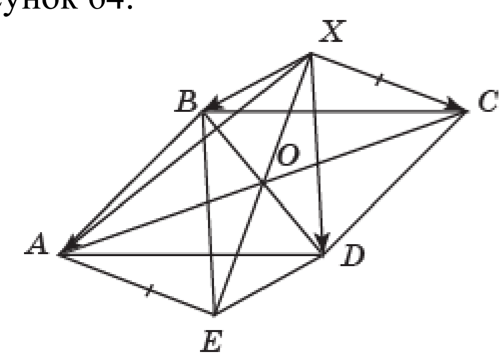


Рис. 64

точка O – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма, проведем $AE=XC$ и $AE||XC$; четырехугольник $AXCE$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей; соединим точки B, E и D, E; четырехугольник $BXDE$ – параллелограмм (диагонали в точке пересечения делятся пополам); следовательно, $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XE}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

4*) Запишите в векторной форме условия того, что точка O является точкой пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Ответ. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

69. Умножение вектора на число
(уроки 28, 29)

Цель – ввести понятия произведения вектора на число, противоположного вектора, разности двух векторов; рассмотреть свойства операции умножения вектора на число; научиться использовать их при решении задач.

Урок 28

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Вектором называется …
2. Вектор с началом в точке H и концом в точке P обозначается …
3. Модулем вектора называется …
4. Длина вектора $\overrightarrow{XY}$ обозначается …
5. Два вектора называются равными, если …
6. Сочетательный закон сложения векторов заключается в том, что …

Вариант 2

1. Отрезок, в котором указаны начало и конец, называется …
2. Вектор с началом в точке G и концом в точке Q изображается …
3. Модуль вектора $\overrightarrow{MN}$ обозначается …
4. Длиной вектора называется …
5. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется …
6. Переместительный закон сложения векторов заключается в том, что …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Отложим на прямой последовательно равные отрезки AB, BC, CD, DE, EF .

Вопросы

- Что можно сказать о векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$?

Найдем сумму этих векторов.

- Какому вектору она равна?

- Как можно выразить вектор $\overrightarrow{AF}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$? Сделайте предположение.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t>0$, и меняется на противоположное, если $t<0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется вектором, ***противоположным*** $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$ и $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел, а именно:

Свойство 1. $(ts)\,\vec{a} = t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 2. $(t+s)\,\vec{a} = t\vec{a}+s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 3. $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a}+t\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Первое и второе свойства следуют непосредственно из определения. Докажем третье свойство. Отложим вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. В треугольнике OAB (рис. 65, а) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$. Рассмотрим треугольник $O_1A_1B_1$, стороны которого образуют векторы $t\vec{a}$, $t\vec{b}$ и $t(\vec{a}+\vec{b})$ соответственно (рис. 65, б). Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (по третьему признаку подобия треугольников, так как их соответствующие стороны пропорциональны). С другой стороны, по определению сложения векторов $\overrightarrow{O_1B_1}=t\vec{a}+t\vec{b}$, следовательно, $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a}+t\vec{b}$.

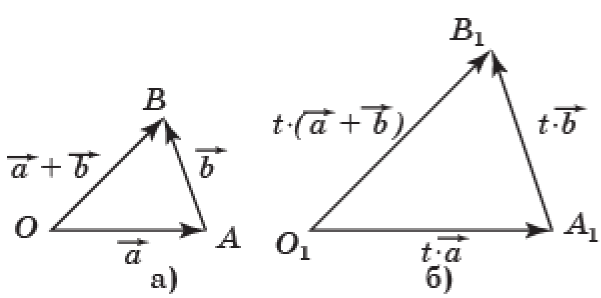


Рис. 65

IV. Закрепление нового материала

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

2. Для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы: а) $\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b}$ - $\vec{a}$.

3. Точки M и N - середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы: а) $\overrightarrow{BM}$; б) $\overrightarrow{NC}$; в) $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

4*. Дан правильный пятиугольник. Докажите, что сумма пяти векторов с началом в центре этого многоугольника и концами в его вершинах равна нулю.

Ответы. **1.** Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$– данные векторы. По определению $\vec{a} - \vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$. Построим сначала вектор (-1)$\vec{b}$ (рис. 66, а), затем отложим векторы так, чтобы начало вектора -$\vec{b}$ совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$ и будет искомой разностью $\vec{a} - \vec{b}$. Разность $\vec{a} - \vec{b}$ можно построить и по-другому: отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала O (рис. 66, б), тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

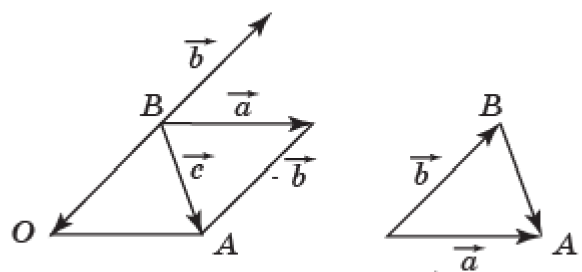


Рис. 66

3. а) $\overrightarrow{BM}$=-$\vec{a}$; б) $\overrightarrow{NC}$=$\vec{b}$; в) $\overrightarrow{MN}$=$\vec{b}$-$\vec{a}$. **4*.** См. рисунок 67: точка O – центр данного правильного пятиугольника; векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, а также $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ симметричны относительно прямой OE, значит, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=k\cdot\overrightarrow{OE}$; таким образом, имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=(k+1)\cdot\overrightarrow{OE}$; с другой стороны, $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=l\cdot\overrightarrow{OD}$; следовательно, имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=(l+1)\cdot\overrightarrow{OD}$; эти два равенства могут выполняться только в случае, если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

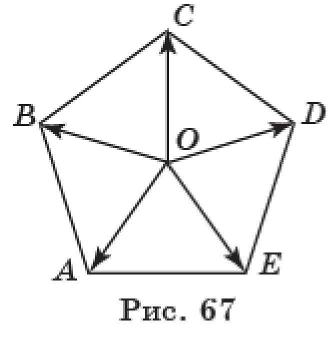


Рис. 67

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 27).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 69 учебника).

2. Решить задачи.

1) Для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы: а) $3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{11}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

2) Точки M и N - середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы: а) $\overrightarrow{BN}$; б) $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{BN}=-2\vec{a}+\vec{b}$; б) $\overrightarrow{CB}=2(\vec{a}-\vec{b})$.

3) Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 - медианы треугольника ABC. Выразите векторы: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$; б) $\overrightarrow{BB_1}=-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $\overrightarrow{CC_1}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

4*) M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Ответ. Вектор $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ представляет собой диагональ MD параллелограмма $AMBD$ (рис. 68); векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{MC}$ противоположно направлены и их длины равны $\frac{2}{3}CC_1$, следовательно, $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ и, значит, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

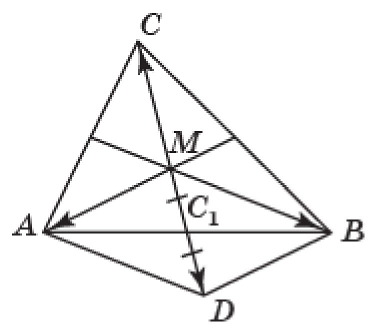


Рис. 68

Урок 29

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение произведения вектора на число.

2. Формулировка и доказательство сочетательного и первого распределительного законов умножения вектора на число.

Задания 2, 4, 6

1. Определения противоположного вектора и разности векторов.

2. Формулировка и доказательство второго распределительного закона умножения вектора на число.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Задайте ненулевой вектор $\vec{g}$ и постройте: а) $3\vec{g}$; б) $\frac{1}{2}\vec{g}$; в) $-\frac{1}{4}\vec{g}$.

2) В параллелограмме $BCDE$ диагонали пересекаются в точке P. Найдите: а) $-\overrightarrow{BC}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; в) $\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$; г) $-2\overrightarrow{PE}$.

3*) Запишите в векторной форме условия того, что точка O лежит между точками A и B.

Ответ. 3*) $\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \leq t \leq 1$.

Задание для класса

1. Задайте ненулевой вектор $\vec{h}$ и постройте: а) $2\vec{h}$; б) $-\frac{1}{3}\vec{h}$; в) $1\frac{1}{2}\vec{h}$.

2. В прямоугольнике $DEFG$ диагонали пересекаются в точке M. Найдите: а) $-\overrightarrow{EF}$; б) $2\overrightarrow{DM}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$; г) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

3. Упростите выражение: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$.

4*. O – точка пересечения медиан треугольника ABC, точка X - произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

Ответы. **3.** а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$. **4*.** См. рисунок 69: $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CO}$, но $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ (задача 4* этапа VI урока 28), таким образом, $3\overrightarrow{XO}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$ или $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

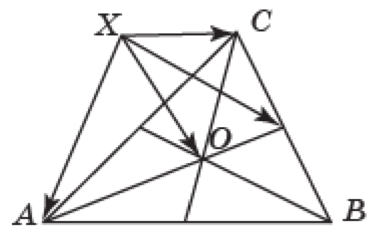


Рис. 69

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 3 из домашнего задания (см. этап VI урока 28).

Дополнительные вопросы

- Что называется вектором?
- Какие векторы называются равными?
- Как определяется операция умножения вектора на число?

II. Устная работа

1) В треугольнике *CDE* найдите разность векторов: а) $\overrightarrow{DC}$-$\overrightarrow{EC}$; б) $\overrightarrow{ED}$-$\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{CD}$-$\overrightarrow{ED}$; г) $\overrightarrow{DE}$-$\overrightarrow{ED}$.

2) В параллелограмме *ABCD* найдите разность векторов: а) $\overrightarrow{AC}$-$\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BD}$-$\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AC}$-$\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{BD}$-$\overrightarrow{BA}$.

3) В треугольнике *KLM* проведена средняя линия *OP*, где точки *O* и *P* – середины соответственно сторон *KM* и *LM*. Выразите вектор: а) $\overrightarrow{OK}$; б) $\overrightarrow{MO}$; в) $\overrightarrow{KM}$; г) $\overrightarrow{ML}$; д) $\overrightarrow{OP}$; е) $\overrightarrow{LK}$ через векторы $\overrightarrow{KO}=\vec{k}$ и $\overrightarrow{LP}=\vec{l}$.

4) В треугольнике *MON* проведена медиана *MS*. Выразите вектор $\overrightarrow{MS}$ через векторы: а) $\overrightarrow{MO}=\vec{n}$ и $\overrightarrow{NO}=\vec{m}$; б) $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{MO}=\vec{b}$.

5) В треугольнике *ABC* точка *M* является его центроидом. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Ответы. **1)** а) $\overrightarrow{DE}$; б) $\overrightarrow{EC}$; в) $\overrightarrow{CE}$; г) $2\overrightarrow{DE}$. **2)** а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AD}$. **3)** а) $-\vec{k}$; б) $-\vec{k}$; в) $2\vec{k}$; г) $-2\vec{l}$; д) $\vec{k}-\vec{l}$; е) $2(\vec{l}-\vec{k})$. **4)** а) $\vec{n}-\frac{1}{2}\vec{m}$; б) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. **5)** $\vec{0}$.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. В треугольнике *KLM* медианы KK_1, LL_1, MM_1 пересекаются в точке *G*. Выразите через векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LG}$ векторы: а) $\overrightarrow{KG}$; б) $\overrightarrow{LL_1}$; в) $\overrightarrow{M_1K}$; г) $\overrightarrow{ML}$.

2. Дан ненулевой вектор $\vec{b}$. При каких значениях m: а) векторы $\vec{b}$ и $m\vec{b}$ сонаправлены (т.е. при откладывании от одной точки лежат на одной прямой и имеют одно направление); б) верно неравенство $|m\vec{b}| < |\vec{b}|$?

3*. Докажите, что $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML})$, где M – произвольная точка плоскости, O – середина отрезка KL.

Вариант 2

1. В треугольнике OPQ точка M – центроид. Выразите через векторы $\overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{O_1Q}$ векторы: а) $\overrightarrow{OQ}$; б) $\overrightarrow{OM}$; в) $\overrightarrow{O_1P}$; г) $\overrightarrow{MP}$, где O_1, P_1, Q_1 – середины соответствующих сторон PQ, OQ, OP.

2. Дан ненулевой вектор $\vec{c}$. При каких значениях n: а) векторы $\vec{c}$ и $n\vec{c}$ противоположно направлены (т.е. при откладывании от одной точки лежат на одной прямой и имеют противоположные направления); б) верно неравенство $|n\vec{c}| > |\vec{c}|$?

3*. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON})$, где O – произвольная точка плоскости, KLN – данный треугольник, M – его центроид.

Ответы. Вариант 1. **1.** а) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LG}$; б) $1{,}5\overrightarrow{LG}$; в) $-0{,}5\overrightarrow{KL}$; г) $-\overrightarrow{KL}-3\overrightarrow{LG}$. **2.** а) $m>0$; б) $-1<m<1$. **3*.** *Указание*. Если M не принадлежит KL, то в треугольнике MKL продолжите медиану MO на равный ей отрезок OM_1 и рассмотримте параллелограмм $KMLM_1$.

Вариант 2. **1.** а) $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1Q}$; б) $\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}$; в) $-\overrightarrow{O_1Q}$; г) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OO_1} - \overrightarrow{O_1Q}$. **2.** а) $n<0$; б) $n>1$, $n<-1$. **3*.** *Указание*. Найдите сначала сумму векторов $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MN}$.

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 69 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точка C принадлежит отрезку OB и делит его в отношении 2:1. O - произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

2) Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

Ответ. а), б) a.

3) В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

Ответ. а) -2; б) 10; в) -2; г) 10.

4*) Докажите, что отрезок AB - геометрическое место точек C плоскости, для которых $\overrightarrow{OC}$=(1-t)$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, где 0≤$t$≤1, O - произвольная точка плоскости.

Решение. Отрезок AB представляет собой геометрическое место точек C, для которых $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \le t \le 1$. Представим $\overrightarrow{AB}$ в виде разности $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и прибавим к обеим частям равенства $\overrightarrow{AC} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ вектор $\overrightarrow{OA}$. Получим $\overrightarrow{OC} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, что и требовалось доказать.

70. Координаты вектора (уроки 30, 31)

Цель – ввести понятия координат вектора, координатных векторов; сформулировать и доказать теоремы о представлении вектора по координатным векторам и о координатах суммы векторов.

Урок 30

I. Устная работа

1) В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD||BC$) $\angle A=90O$, $\angle C=135O$, $AB=6$ см, $BC=2$ см и $AD=5$ см. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AC}$.

2) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Верно ли равенство: а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$?

3) В треугольнике ABC точка M является его центроидом. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

4) Упростите выражение: а) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HP}-\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{GF}$; в) $\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{LN}$; г) $\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{ZU}-\overrightarrow{ZY}+\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{WV}$.

5) Верно ли равенство: а) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{CF}$; б) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NL}$; в) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$; г) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}$.

Ответы. **1)** а) 6 см; б) 2 см; в) $3\sqrt{5}$ см; г) $\sqrt{61}$ см; д) $2\sqrt{10}$ см. **2)** а), б), г), д), е) Да; в) нет. **3)** $\vec{0}$. **4)** а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{EP}$; в) $\overrightarrow{MK}$; г) $\overrightarrow{XW}$. **5)** а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

II. Новый материал

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат и отложим вектор $\overrightarrow{OA}$ так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются ***координатами вектора***.

Обозначим $\vec{i}, \vec{j}$ векторы с координатами (1, 0), (0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат, и называть их ***координатными векторами***.

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i}+y\vec{j}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат, и его конец обозначим через A, тогда имеем равенство $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{OA_y}$ (рис. 70).

Поскольку точка A имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{\jmath}$, значит, $\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

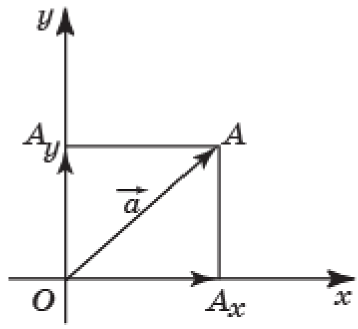


Рис. 70

Теорема. При сложении двух векторов их координаты складываются.

Доказательство. Пусть даны векторы $\vec{a}_1$ (x_1, y_1) и $\vec{a}_2$ (x_2, y_2). Докажем, что их сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ будет иметь координаты (x_1+x_2, y_1+y_2). Для этого разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) + (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}) = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath},$$

и, следовательно, пара чисел ($x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$) является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Аналогично показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. Другими словами, вектор $t\vec{a}$ имеет координаты (tx, ty), где (x, y) – координаты вектора $\vec{a}$.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1$ (x_1, y_1), $\vec{a}_2$ (x_2, y_2) имеет координаты (x_1-x_2, y_1-y_2).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку A_1(x_1, y_1) и концом – точку A_2(x_2, y_2). Тогда вектор $\vec{a}$ можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ и, следовательно, он имеет координаты (x_2-x_1, y_2-y_1).

III. Закрепление нового материала

1. Определите координаты векторов, изображенных на рисунке (рис. 71).

2. Выразите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2).

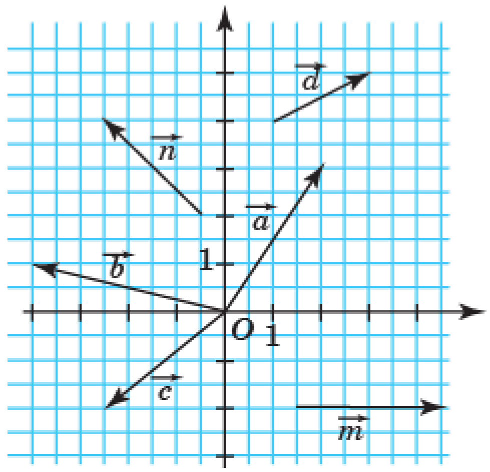


Рис. 71

3. Даны векторы $\vec{a}$ (-1, 2) и $\vec{b}$ (2, -4). Найдите координаты вектора: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

4*. Найдите координаты точки *N*, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4, -3) и точка *M*(1, -3).

Ответы. **1.** $\vec{a}$ (2, 3), $\vec{b}$ (-4, 1), $\vec{c}$ (-2,5, -2), $\vec{d}$ (2, 1), $\vec{m}$ (3, 0), $\vec{n}$ (-2, 2). **2.** Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ равна длине отрезка A_1A_2, используя формулу длины отрезка, получаем $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. **3.** а) (1, -2); б) (-1, 2); в) (11, -22). **4*.** (5, -6).

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы урока 29 (этап IV).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 70 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) *A* (2, -6), *B* (-5, 3); б) *A* (1, 3), *B* (6, -5); в) *A* (-3, 1), *B* (5, 1).

Ответ. а) (-7, 9); б) (5, -8); в) (8, 0).

2) Даны точки *A*(0, 1), *B*(1, 0), *C*(1, 2), *D*(2, 1). Докажите равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Ответ. $\overrightarrow{AB}$ (1, -1) и $\overrightarrow{CD}$ (1, -1).

3) Даны три точки *A*(1, 1), *B*(-1, 0), *C*(0, 1). Найдите такую точку *D*(*x*, *y*), чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.

Ответ. $\overrightarrow{AB}$ (-2, -1), следовательно, и $\overrightarrow{CD}$ (-2, -1), откуда *D*(-2, 0).

4*) Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ и $C(3, 4)$. Найдите координаты M - точки пересечения медиан.

Решение. Середина отрезка AB, точка K имеет следующие координаты (1,5, 1,5), тогда $\overrightarrow{KC}$ (1,5, 2,5), значит, $\overrightarrow{KM}$ $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ и точка $M(2, 2\frac{1}{3})$.

Урок 31

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Координатами вектора называется …
2. Теорема о разложении вектора по координатным векторам заключается в том, что …
3. При сложении двух векторов их координаты …
4. Длина вектора $\vec{a}(x,\ y)$ выражается …
5. Вектор $\overrightarrow{KL}$ имеет координаты (-1, 2), K(0, 5), тогда точка L имеет координаты …
6. Вектор $\overrightarrow{CD}$ имеет координаты (5, 6), D(-3, 0), тогда точка C имеет координаты …

Вариант 2

1. Координатными векторами называются …
2. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда …
3. При умножении вектора на число его …
4. Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, где $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается …
5. Вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (0, -4), N(-1, 2), тогда точка M имеет координаты …
6. Вектор $\overrightarrow{EF}$ имеет координаты (2, 0), E(0, -4), тогда точка F имеет координаты …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора

III. Решение задач с практическим содержанием

1. Проводятся соревнования по ориентированию на местности. Участникам раздали карты, на которых пункты сбора расположены в вершинах четырехугольника, имеющих координаты A(-2, -5), B(-5, 3), C(3, 9), D(8, -3). Спортсмены разбиты на четыре команды, которые должны начать движение из точек E, F, G и H – середин соответствующих сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника. Далее они должны направиться в пункты, расположенные в серединах отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. Изобразите план и определите координаты точек E, F, G, H, точек – пунктов встреч, а также расстояние, которые прошли команды до места встреч.

2. Определите расстояние между пунктом O и недоступной точкой M, если известны расстояния (в км) OA, OB и OC, где A, B, C – пункты, расположенные в вершинах треугольника, центроидом которого является точка M. Точки имеют следующие координаты: $O(0, 0)$, $A(-7, 8)$, $B(8, 15)$, $C(-4, 1)$.

3. Участок ABC треугольной формы разделили на две равновеликие части, проведя межу AO. В свою очередь AO тоже разделили пополам вехой M и провели межу BM, которая пересекла AC в точке D. Докажите, что $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA}$.

Ответы. **1.** $E(-3{,}5, -1)$, $F(-1, 6)$, $G(5{,}5, 3)$, $H(3, -4)$. Середины EG и FH совпадают, это точки с координатами (1, 1). **2.** $\sqrt{65} \approx 8{,}065$ (км).

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 30 (этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 70 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{EF}$, если: а) $E(1, 2)$, $F(2, 1)$; б) $E(-2, 0)$, $F(3, 1)$; в) $E(10, -3)$, $F(0, -9)$; г) $E(-8, -5)$, $F(12, -18)$.

Ответ. а) (1, -1); б) (5, 1); в) (-10, -6); г) (20, -13).

2) Найдите координаты точки H, если: а) $\overrightarrow{GH}(-19,\ 3)$, $G(5, -7)$; б) $G(0, 25)$, $\overrightarrow{GH}(8,\ -27)$.

Ответ. а) (-14, -4); б) (8, -2).

3) Точка P делит отрезок MN в отношении 1:4. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{NP}$, если $\overrightarrow{MN}(-12,\ 8)$.

Ответ. (9,6, -6,4).

4*) Докажите с помощью векторов теорему о средней линии треугольника.

Решение. Пусть EF – средняя линия треугольника ABC соединяет середины сторон AC и BC. Докажем, что EF параллельна стороне AB и равна ее половине. Имеем, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Значит, векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны и длина вектора $\overrightarrow{EF}$ равна половине длины вектора $\overrightarrow{AB}$. Следовательно, EF параллельна стороне AB и равна ее половине.

71. Скалярное произведение векторов (уроки 32, 33, 34)

Цель – ввести понятие скалярного произведения векторов; вывести формулу выражения скалярного произведения векторов через их координаты; научиться использовать ее при решении задач.

Урок 32

I. Устная работа

1) Координаты концов диаметра окружности равны: а) (-1, 2) и (0, -4); б) (-3, 0) и (0, 8); в) (5, -7) и (-2, -5); г) (3, -1) и (4, -2). Найдите координаты центра данной окружности.

2) Центр окружности имеет координаты: а) (0, 0); б) (2, -3); в) (4, 0); г) (-2, -5). Один из концов диаметра имеет координаты (-2, 2). Найдите координаты другого его конца.

3) Параллельный перенос переводит точку $O(0, 0)$ в точку $A(3, 2)$. Найдите координаты точек B_1, C_1 и E_1, в которые переходят соответственно точки $B(-1, 1)$, $C(4, -2)$ и $E(-3, 3)$ при этом параллельном переносе.

Ответы. **1)** а) (-0,5, -1); б) (-1,5, 4); в) (1,5, -6); г) (3,5, -1,5). **2)** а) (2, -2); б) (6, -8); в) (10, -2); г) (-2, -12). **3)** $B_1(2, 3)$, $C_1(7, 0)$, $E_1(0, 5)$.

II. Новый материал

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi.$$

Вопросы

- Как определить произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$?

- В каком случае скалярное произведение векторов равно нулю?

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = \overrightarrow{|a|^2}$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Пусть даны векторы $\vec{a}_1$ (x_1, y_1), $\vec{a}_2$ (x_2, y_2). Выразим их скалярное произведение через координаты. Отложим эти вектора от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно. В случае, если точки O, A_1 и A_2 не принадлежат одной прямой, рассмотрим треугольник OA_1A_2. По теореме косинусов, имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2 \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos\varphi.$$

Заметим, что это равенство выполняется и в случае, если точки O, A_1 и A_2 принадлежат одной прямой.

Перепишем это равенство в виде $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 - 2 \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами:

$$\vec{a}_1{}^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2;\ \vec{a}_2{}^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Получим:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким образом, имеет место формула:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2,$$

где $\vec{a}_1$ (x_1, y_1), $\vec{a}_2$ (x_2, y_2).

III. Закрепление нового материала

1. Вычислите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°.

2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ (-1, 2) и $\vec{a}_2$ (2,-1).

3. Дан вектор $\vec{m}$ (a, b). Найдите координаты перпендикулярного к нему вектора.

4*. Вычислите работу, которую производит сила $\vec{p}$ (15, -9), когда точка ее приложения перемещается, двигаясь прямолинейно, из положения Z_1(-5, 18) в положение Z_2(-3, 15).

Ответы. **1.** а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$. **2.** -4. **3.** (b, -a) **4*.** 57.

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы урока 31 (этап V)

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 71 учебника).

2. Решить задачи.

1) В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ. а) $-\frac{a^2}{2}$; б) 0; в) a^2.

2) Охарактеризуйте угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если а) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$; в) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Ответ. а) острый; б) тупой; в) $\varphi = 90°$; г) $\varphi = 180°$.

3) Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

Решение. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, значит, векторы $(\vec{a}+\vec{b})$ и $(\vec{a}-\vec{b})$ перпендикулярны.

4*) Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}$ (-3, 4), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения B(5, -1) в положение C(2, 1).

Ответ. 17.

Урок 33

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение скалярного произведения векторов.
2. Определение скалярного квадрата.
3. Физический смысл скалярного произведения.

Задания 2, 4, 6

Вывод формулы нахождения скалярного произведения векторов по их координатам.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Найдите скалярное произведение двух единичных векторов, угол между которыми равен 30°.

2) Дан равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 4 см. Найдите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}$, где B_1 – середина стороны AC.

3) Определите вид треугольника DEF по углам, если $D(-7, 2)$, $E(2, 5)$, $F(4, 10)$.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2**)** а) 8; б) -12; в) 0. 3) Тупоугольный.

Задание для класса

1. Задайте ненулевой вектор $\vec{h}$ и постройте: а) $2\vec{h}$; б) $-\frac{1}{3}\vec{h}$; в) $1\frac{1}{2}\vec{h}$.

2. В прямоугольнике $DEFG$ диагонали пересекаются в точке M. Найдите: а) $-\overrightarrow{EF}$; б) $2\overrightarrow{DM}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$; г) $-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

3. Упростите выражение: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$.

4*. Запишите в векторной форме условия того, что точка O является точкой пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Ответы. **3.** а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$. **4*.** $\overrightarrow{AO}=t\overrightarrow{AC}$, $0<t<1$, $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BO}=l\overrightarrow{BD}$, $0<l<1$, $\overrightarrow{OD}=(1-l)\overrightarrow{BD}$.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 3 из домашнего задания (см. этап V урока 32).

Дополнительные вопросы

- Что называется вектором?
- Какие векторы называются равными?
- Как определяется операция умножения вектора на число?

II. Устная работа

1) Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если: а) $|\vec{m}|$=1, $|\vec{n}|$=3 и угол между ними равен 60°; б) $|\vec{m}|$=4, $|\vec{n}|$=5 и угол между ними равен 45°; в) $|\vec{m}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{n}|$=2 и угол между ними равен 30°; г) $|\vec{m}|=\sqrt{2}$, $|\vec{n}|$=10 и угол между ними равен 135°

2) Найдите угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{l}$, если $\vec{k}$ (-1, 2) и $\vec{l}$ (4, 2).

3) Найдите скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) A(5, 1), B(-2, 0); б) A(-3, 4), B(-1, 2); в) A(9, -3), B(6, -2); г) A(0, -5), B(-5, 3).

4) Дан единичный равносторонний треугольник XYZ. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ}$; б) $\overrightarrow{ZY}\cdot\overrightarrow{XZ}$; в) $\overrightarrow{MZ}\cdot\overrightarrow{ZY}$; г) $\overrightarrow{YX}\cdot\overrightarrow{YM}$; д) $\overrightarrow{XM}\cdot\overrightarrow{MY}$, где точка M – середина стороны XZ.

Ответы. **1)** а) 1,5; б) $10\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) -10. **2)** $90O$. **3)** а) 50; б) 8; в) 10; г) 89. **4)** а) $\frac{1}{2}$; б) -$\frac{1}{2}$; в) -$\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{4}$; д) 0.

III. Решение задач практического характера

1. К одной точке приложены три силы P_1=30H, P_2=50H, P_3=30H, располагающиеся в одной плоскости. Углы между соседними силами равны 120°. Найдите величину и направление равнодействующей силы.

2. Под каким углом нужно приложить силу в 20H к прямолинейному направлению движения, чтобы на пути в 50 м она совершила работу в 100 Дж?

3. 38. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$перпендикулярны.

Ответы. **1.** Решение показано на рисунке 72. Равнодействующая сила R = 20H. **2.** α ≈71°36’. **3.** 60°.

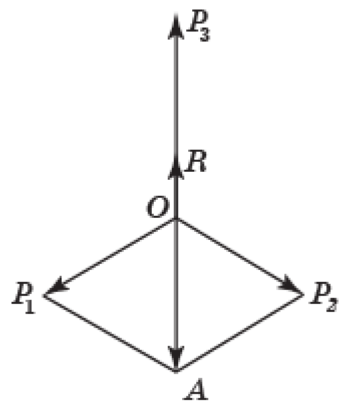


Рис. 72

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 32 (этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 71 учебника).

2. Решить задачи.

1) Используя формулу $\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$ из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1$ (2, 3), $\vec{a}_2$ (1, -2); б) $\vec{a}_1$ (1, 2) и $\vec{a}_2$ (1, 0).

Ответ. а) $\cos\varphi = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$; б) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

2) Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}$ (x, y) имеют место равенства: $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$.

3) Докажите, что каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

4*) Найдите модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные векторы и угол между ними рапвен 60°.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Урок 34

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение считается …

2. Скалярным квадратом называется …

3. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда …

4. Скалярное произведение векторов выражается через их координаты формулой …

5. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен 60°, равно …

6. Вектор, перпендикулярный вектору $\vec{h}(c,\ d)$ имеет, например, координаты …

Вариант 2

1. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется …

2. Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ обозначается …

3. Скалярное произведение двух векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, где AC и BC – катеты прямоугольного треугольника, равно …

4. Физический смысл скалярного произведения двух векторов заключается в том, что …

5. Скалярное произведение векторов $\vec{m}(-1,\ 3)$ и $\vec{n}(6,\ -8)$ равно …

6. Скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$, у которых $|\vec{c}|$=3, $|\vec{d}|$=4 и угол между которыми равен 30°, равно …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Упростите выражение: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{XN}+\overrightarrow{MX}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{OM}$.

2. Вектор $\overrightarrow{EF}$ имеет координаты (-12, 7). Найдите координаты точки E, если F(-4, -11).

3. При каком значении t векторы $\vec{a}$-$\vec{b}$ и $2t\vec{a}$+$3\vec{b}$перпендикулярны, если $\vec{a}$ (3, -2) и $\vec{b}$ (1, -1)?

4*. Найдите геометрическое место точек на координатной плокости, для которых $|y$-1$|$<9.

Ответы. **1.** а) $2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{AO}$. **2.** (8, -18). **3.** $-\frac{9}{16}$. **4*.** Внутренняя часть полосы между прямыми y=10 и y=-8.

IV. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из домашней работы урока 33 (этап V).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 68 – п. 71 учебника).

2. Решить задачи.

1) A, B, C, D - произвольные точки плоскости. Выразите через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

2) Найдите координаты точки A, если: а) $\overrightarrow{AB}(-22,\ 27)$, B(15, -21); б) B(0, -16), $\overrightarrow{AB}(10,\ -17)$.

Ответ. а) (37, -48); б) (-10, 1).

3) При каком значении t вектор $2\vec{a}+t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}-\vec{a}$, если $\vec{a}$ (2, -1), $\vec{b}$ (4, 3).

Ответ. t =0.

4*) Докажите, что $|\vec{a}|-|\vec{b}|\leq|\vec{a}-\vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

Ответ. Лежат на одной прямой.

Урок 35
Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, найдите: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ (0, -6) и $\vec{b}$ (-9, 15). Найдите координаты вектора: а) $2\vec{a}$-$\vec{b}$; б) -4$\vec{a}$+$\frac{1}{3}\vec{b}$.

3. Дан вектор $\overrightarrow{GH}$ (-5, 8). Найдите координаты точки: а) H, если G(-6, 1); б) G, если H(2, -10).

4. При каком значении m перпендикулярны векторы $\vec{a}$–$\vec{b}$ и 2$\vec{a}$+3$m\vec{b}$, если $\vec{a}$ (-1, 2), $\vec{b}$ (6, -4).

5*. Докажите, что для любой точки, принадлежащей отрезку AB и произвольной точки O плоскости справедливо равенство $\overrightarrow{OX}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$, где $0\le k\le 1$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Найдите: а) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}$; б) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{CB_1}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A_1C_1}$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ (4, -6) и $\vec{b}$ (-5, 0). Найдите координаты вектора: а) -3$\vec{a}$+2$\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}$-6$\vec{b}$.

3. Дан вектор $\overrightarrow{KN}$ (9, -4). Найдите координаты точки: а) K, если N(1, -8); б) N, если K(-5, 40).

4. При каком значении n перпендикулярны векторы 2$\vec{c}$+$\vec{d}$ и $n\vec{c}$–3$\vec{d}$, если $\vec{c}$ (-2, 1), $\vec{d}$ (3, -5).

5*. Докажите, что для любой точки, принадлежащей лучу AB и произвольной точки O плоскости справедливо равенство $\overrightarrow{OX}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$, где $k\ge 0$.

72. Уравнение прямой
(уроки 36, 37)

Цель – вывести уравнение прямой, ввести понятия вектора нормали, углового коэффициента, выяснить его геометрический смысл, рассмотреть вопрос о взаимном расположении прямых в зависимости от их уравнений.

Урок 36

I. Анализ контрольной работы

II. Новый материал

Зададим прямоугольную систему координат и в ней проведем некоторую прямую. Выясним, каким уравнением задается прямая на плоскости.

Теорема. Прямая на плоскости задается уравнением $ax+by+c=0$, где a, b, c - некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого ***вектором нормали***.

Доказательство. Пусть дана прямая. Зафиксируем какую-нибудь точку $A_0(x_0, y_0)$ этой прямой и пусть $\vec{n}$ (a, b) – перпендикулярный этой прямой вектор (рис. 73).

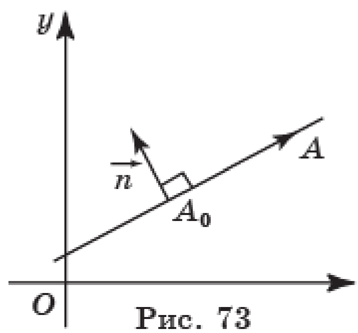


Рис. 73

Тогда произвольная точка $A(x, y)$ будет принадлежать этой прямой в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т.е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A}\cdot\vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, которое задает искомую прямую. Обозначая $-ax_0-by_0=c$, получим требуемое уравнение прямой $ax+by+c=0$.

Если $b\neq 0$, то, разделив на b, это уравнение можно привести к виду $y=kx+l$.

Коэффициент k называется ***угловым коэффициентом*** этой прямой. Выясним его геометрический смысл. Возьмем на прямой две точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $x_1\neq x_2$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой $y_1=kx_1+l$,

$y_2=kx_2+l$. Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. Отсюда выразим k: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Таким образом, угловой коэффициент k равен тангенсу угла ϕ, который образует прямая с осью абсцисс.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямых на плоскости, с точки зрения их уравнений.

Две прямые на плоскости параллельны, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены, т.е. для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2=t\vec{n}_1$. Для прямых, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ \ a_2x+b_2y+c_2=0\ (*),$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1), (a_2, b_2). Значит, такие прямые параллельны, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$. При этом, если $c_2=tc_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

Если две прямые пересекаются, то угол ϕ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1$ (a_1, b_1), $\vec{n}_2$ (a_2, b_2). Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

В частности, прямые перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т.е. выполняются равенства $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2=0$.

III. Закрепление нового материала

1. Прямая задана уравнением $x-2y+1=0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k=1$; б) $k=\frac{1}{2}$; в) $k=-1$. Нарисуйте эти прямые.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $\vec{n}$ (-1, 1).

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, B (0, 1).

5*. Найдите координаты точки пересечения прямых $5x-y+6=0$ и $x+2y-1=0$.

Ответы. **1.** (1, -2). **2.** а) $x-y=0$; б) $x-2y=0$; в) $x+y=0$. **3.** $x-y+1=0$. **4.** $x+y-1=0$. **5*.** (-1, 1).

IV. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы урока 34 (этап V).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 72 учебника).

2. Решить задачи.

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) k=2; б) k=-2; в) $k=-\frac{1}{2}$. Нарисуйте эти прямые.

Ответ. а) $2x-y=0$; б) $2x+y=0$; в) $x+2y=0$.

2) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3, -1)$ и $N(4, 1)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

Ответ. $2x-y-7=0$, $\vec{n}$ (2, -1).

3) Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых параллельны между собой: а) $x+y-1=0$, $x+y+1=0$; б) $x+y-1=0$, $x-y-1=0$; в) $-7x+y=0$, $7x-y-5=0$; г) $2x+4y-8=0$, $-x-2y+4=0$.

Ответ. а), в); г) – одна и та же прямая.

4*) Треугольник задан своими вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$. Найдите уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ (2, -3) является вектором нормали для прямой $CQ\perp AB$, таким образом, уравнение прямой CQ, проходящей через точку $C(4, 2)$, имеет вид $2x-3y-2=0$; аналогично $\overrightarrow{AC}$ (3, -1), уравнение прямой $BP\perp AC$ имеет вид $3x-y-9=0$; наконец, $\overrightarrow{BC}$ (1, 2), уравнение прямой $AH\perp BC$ имеет вид $x+2y-7=0$; точка пересечения высот – ортоцентр данного треугольника – имеет координаты $(3\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7})$.

Урок 37

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Определение вектора нормали прямой.
2. Формулировка и доказательство теоремы об уравнении, которым задается на плоскости прямая.

Задания 2, 4, 6

1. Определение углового коэффициента прямой.
2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются на местах.

Карточка

1) Напишите уравнение оси: а) абсцисс; б) ординат.

2) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(-3, 4)$.

3) Найдите угловой коэффициент и координаты вектора нормали следующих прямых: а) $5x-y+1=0$; б) $-6x+2y+5=0$.

Ответы. 1) а) $y=0$; б) $x=0$. 2) $4x+3y=0$. 3) а) 5, $\vec{n}\,(5, -1)$; б) 3, $\vec{n}\,(-6, 2)$.

Задание для класса

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $H(-5, 6)$, перпендикулярную оси абсцисс.

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 0)$ и $B(-2, 2)$.

3. Из точки $K(1, 3)$ опущен перпендикуляр KH на данную прямую. Точка $H(-2, 5)$ принадлежит прямой. Напишите ее уравнение.

4*. Запишите уравнения перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке $P(-5, -2)$, если одной из них принадлежит точка $Q(-2, 2{,}5)$.

Ответы. **1.** $x+5=0$. **2.** $2x+y+2=0$. **3.** $3x-2y+16=0$. **4*.** $2x+3y+16=0$, $3x-2y+11=0$.

К доске приглашаем трех учащихся ($У_1$, $У_2$, $У_3$).

$У_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

$У_2$ – самостоятельно начинает решать классную задачу 2.

$У_3$ – показывает решение задачи 2 из домашнего задания (см. этап V урока 36).

Дополнительные вопросы

- Что называется вектором нормали?
- Что называется угловым коэффициентом прямой?
- Каков геометрический смысл углового коэффициента прямой?

II. Устная работа

1) Назовите уравнение прямой, проходящей через точку: а) $O(0, 0)$; б) $E(2, 1)$; в) $F(5, -3)$ с угловым коэффициентом, равным 4.

2) Определите взаимное расположение прямых: а) $5x+3y-8=0$ и $-5x-3y-8=0$; б) $x-y=0$ и $2x-4y=0$; в) $-3x-2y+6=0$ и $6x+4y=0$; г) $-4x+y-\frac{1}{3}=0$ и $3x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}=0$.

3) Найдите расстояние от начала координат до прямой: а) $x+y=1$; б) $x-y=2$.

4) Приведите примеры уравнений прямых, которые: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются, но не перпендикулярны.

Ответы. **1)** а) $4x-y=0$; б) $4x-y-7=0$; в) $4x-y-23=0$. **2)** а) Параллельны; б) пересекаются; в) параллельны; г) совпадают. **3)** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2}$.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Постройте прямую $2x–y+4=0$ и найдите ее точки пересечения с координатными осями.

2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(1, -2)$ и $N(3, 0)$. Найдите координаты ее вектора нормали.

3. Найдите координаты точки пересечения прямых $x–y–10=0$ и $6x+7y–21=0$.

4*. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку $S(11, 5)$ и касается окружности $x^2+y^2+12x–6y+41=0$.

Вариант 2

1. Постройте прямую $x+6y–12=0$ и найдите ее точки пересечения с координатными осями.

2. Запишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $P(-8, 12)$. Найдите координаты ее вектора нормали.

3. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x–3y+24=0$ и $2x+3y–6=0$.

4*. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку $R(13, -14)$ и касается окружности $x^2+y^2–18x+12y+101=0$.

Ответы. Вариант 1. **1.** (0, 4), (-2, 0). 8. **2.** $x–y-3=0$, (1, -1). **3.** (7, -3). **4*.** $y–5=0$. Вариант 2. **1.** (0, 2), (12, 0). **2.** $3x+2y=0$, (3, 2). **3.** (-3, 4). **4*.** $x–13=0$.

IV. Проверка самостоятельной работы

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 72 учебника).

2. Решить задачи.

1) Точка H(-2, 4) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

Ответ. Вектор нормали данной прямой $\overrightarrow{HO}$ (2, -4), где точка O(0, 0) – начало координат, уравнение прямой имеет вид $2x–4y+20=0$, или $x–2y+10=0$.

2) Найдите точки пересечения прямой, заданной уравнением $ax+by+c=0$, с осями координат.

Ответ. Точка пересечения имеет координаты с осью: а) абсцисс $(-\frac{c}{a}, 0)$; б) ординат $(0, -\frac{c}{b})$.

3) Найдите угол ϕ между прямыми, заданными уравнениями $x+y+1=0$, $x-y-1=0$. Нарисуйте эти прямые.

Ответ. Это угол между векторами нормалей данных прямых: $\overrightarrow{n_1}$ (1, 1), $\overrightarrow{n_2}$ (1, -1), значит, $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$, следовательно, искомый угол равен 90°.

4*) Докажите, что прямые, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, пересекаются в том и только том случае, когда $a_1\cdot b_2\neq a_2\cdot b_1$.

Решение. Если $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, или $a_1\cdot b_2\neq a_2\cdot b_1$, то прямые пересекаются (при равенстве $a_1\cdot b_2=a_2\cdot b_1$ данные прямые параллельны или совпадают, если $c_1=c_2$); обратно, если прямые пересекаются (т.е. не параллельны и не совпадают), то $a_1\cdot b_2\neq a_2\cdot b_1$.

73*. Аналитическое задание фигур на плоскости

74*. Задачи оптимизации

См. параграф 4

75. Тригонометрические функции произвольного угла (уроки 38, 39, 40)

Цель – вспомнить определение тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника; ввести понятие единичной окружности; определить тригонометрические функции для произвольных градусных величин.

Урок 38

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Прямая на плоскости задается уравнением …

2. Угловой коэффициент прямой равен …

3. Для прямой, заданной уравнением $y=kx+l$, вектор нормали имеет координаты …

4. Если две прямые на плоскости, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, пересекаются, то угол φ между ними равен …

5. Два уравнения $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ задают параллельные прямые, если …

6. Две прямые перпендикулярны, если …

Вариант 2

1. Вектором нормали к прямой называется …

2. Угловым коэффициентом прямой называется …

3. Для прямой, заданной уравнением $ax+by+c=0$ вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты …

4. Две прямые на плоскости параллельны, если их векторы нормали …

5. Два уравнения $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ задают одну и ту же прямую, если …

6. Две прямые пересекаются, если …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопрос

- Для каких углов φ определялись тригонометрические функции sin φ, cos φ, tg φ и ctg φ? Как они определялись?

Тригонометрические функции sin φ, cos φ, tg φ и ctg φ определялись для острого угла φ прямоугольного треугольника ($0° < \varphi < 90°$).

Теперь нашей задачей будет определение тригонометрических функций для произвольных градусных величин φ. Для этого рассмотрим декартову систему координат и окружность единичного радиуса с центром в начале координат – точке O (рис. 74). Такую окружность будем называть ***единичной***.

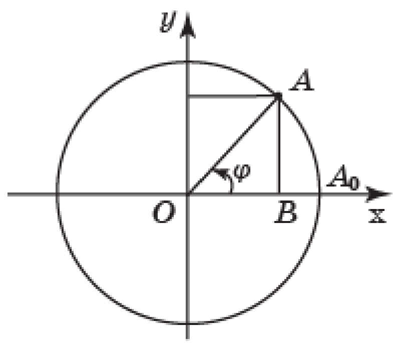


Рис. 74

Каждому углу φ, $0° < \varphi < 90°$, соответствует точка A на единичной окружности, полученная поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки. Поскольку гипотенуза OA прямоугольного треугольника OAB равна единице, то, как легко видеть, синус этого угла будет равен ординате точки A, а косинус – абсциссе точки A.

Определим sin φ и cos φ в случае $0° \leq \varphi < 360°$. Для этого рассмотрим точку A, получающуюся поворотом точки $A_0(1, 0)$ на угол φ против часовой стрелки (рис. 75). Ордината этой точки называется синусом φ и обозначается sin φ. Абсцисса этой точки называется косинусом φ и обозначается cos φ.

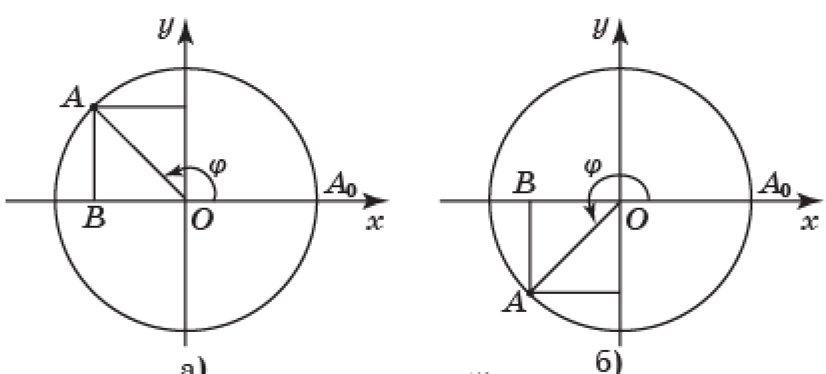


Рис. 75

Вопросы

- Чему равен sin φ, если: а) φ = 30°; б) φ = 150°; в) φ = 210°; г) φ = 330°? Какие выводы можно сделать?

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -$\frac{1}{2}$; г) -$\frac{1}{2}$.

- Как определяется поворот на угол φ, если φ < 0°?

- Сделайте предположение, чему равен sin φ, если: а) φ = -30°; б) φ = -150°; в) φ = -210°; г) φ = -330°? Какие выводы можно сделать?

Ответ. а) -$\frac{1}{2}$; б) -$\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$.

Для градусных величин φ < 0° поворот на φ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. В этом случае sin φ и cos φ также полагаются равными соответственно ординате и абсциссе точки A, полученной в результате поворота точки A_0 (рис. 76).

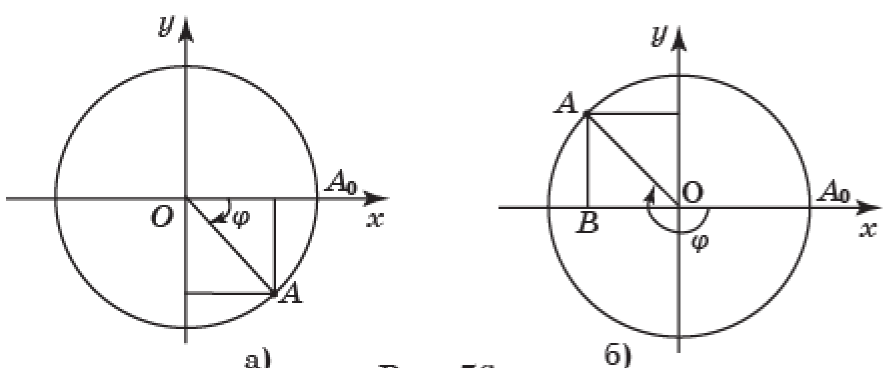


Рис. 76

Тригонометрические функции tg φ и ctg φ для произвольных градусных величин φ определяются обычным образом, а именно,

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\ \text{ctg } \varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующие тождества:

$$\sin(\varphi + 80°) = -\sin\varphi,\ \cos(\varphi + 180°) = -\cos\varphi;$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi,\ \cos(-\varphi) = \cos\varphi;$$
$$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi,\ \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi.$$

IV. Закрепление нового материала

1. Определите, какой четверти координатной плоскости принадлежат следующие углы: а) 130°; б) -150°; в) -42°; г) 235°; д) -235°.

2. На единичной окружности отметьте концы дуг, величиной: а) 45°; б) -135°; в) -180°; г) 225°.

3. Найдите: а) sin 300°; б) sin(-120°); в) cos 120°; г) cos(-135°).

4*. Точки A, B, C, D, E, F являются вершинами правильного шестиугольника (рис. 77). Запишите в градусной и радианной мерах углы между лучами OA и: а) OB; б) OG; в) OC; г) OD; д) OE; е) OH; ж) OF.

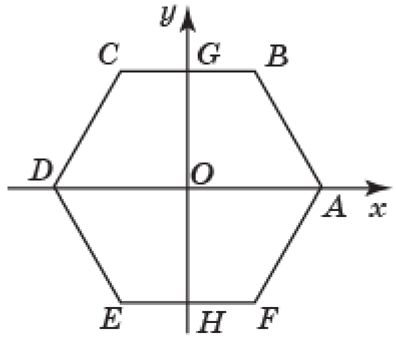


Рис. 77

Ответы. **1.** а) II; б) III; в) IV; г) III; д) II четверть координатной плоскости. **3.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4*.** а) 60°, $\frac{\pi}{3}$; б) 90°, $\frac{\pi}{2}$; в) 120°, $\frac{2\pi}{3}$; г) 180°, π; д) 240°, $\frac{4\pi}{3}$; е) 270°, $\frac{3\pi}{2}$; ж) 300°, $\frac{5\pi}{3}$;

V. Занимательный момент

Решение задачи 4* из домашней работы (см. этап V урока 37).

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 75 учебника).

2. Решить задачи.

1) Укажите, для каких градусных величин sin φ принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения, если $0° \leq \varphi < 360°$.

Ответ. а) $0° < \varphi < 180°$; б) 0°, 180°; в) $-180° < \varphi < 0°$, или $180° < \varphi < 360°$.

2) Укажите, для каких градусных величин косинус принимает: а) положительные значения; б) значения, равные нулю; в) отрицательные значения.

Ответ. а) $-90° < \varphi < 90°$; б) 90°, 270°; в) $90° < \varphi < 270°$.

3) Постройте на координатной плоскости от полуоси Ox следующие углы: а) 150°; б) 240°; в) -120°; г) -210°; д) $\frac{2\pi}{3}$.

4) Найдите: а) cos 0°; б) sin(-90°); в) tg 270°; г) ctg($-\frac{\pi}{2}$).

Ответ. а) 1; б) -1; в) не существует; г) 0.

5*) Точка M единичной окружности, являющаяся концом дуги с началом в точке $A(1, 0)$ и величиной $\frac{\pi}{4}$, начала равномерное движение по окружности по часовой стрелке с угловой скоростью $\frac{2\pi}{3}$ 1/с. Найдите первоначальные координаты точки M. В какой четверти координатной плоскости окажется движущаяся точка через: а) 1 с; б) 2 с; в) 3 с; г) 4 с; д) 5 с?

Ответ. $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; а) IV; б) II; в) I; г) IV; д) II четверть координатной плоскости.

Урок 39

I. Устная работа

1) Какая окружность называется единичной?

2) Как определяются sin φ и cos φ в случае $0° \leq φ < 360°$?

3) Как определяются sin φ и cos φ в случае отрицательных φ?

4) Как определяются tg φ и ctg φ в случае произвольных φ?

5) Назовите уравнение единичной окружности с центром в начале координат.

6) Назовите несколько точек: а) принадлежащих единичной окружности; б) не принадлежащих единичной окружности и лежащих внутри нее; в) не принадлежащих единичной окружности и лежащих вне ее, если центр окружности находится в начале координат.

7) Назовите наибольшее и наименьшее значения функции: а) sin x; б) cos x.

8) Определите, какой четверти координатной плоскости принадлежит угол в: а) 240°; б) -70°; в) 42°; г) 125°; д) -183°; е) -300°.

Ответы. **5)** $x^2+y^2=1$. **6)** Например: а) $(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3})$; б) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; в) (3, 2). **7)** а), б) 1, -1. **8)** а) III; б) IV; в) I; г) II; д) II; е) I четверть координатной плоскости.

II. Новый материал

Рассмотрим единичную окружность (рис. 74), возьмем на ней точку $A_0(1, 0)$, повернем ее последовательно на углы 30°, 45°, 100°.

Вопросы

- В какой четверти окажется данная точка?
- На какой угол она повернулась?

Теперь повернем последовательно данную точку $A_0(1, 0)$ на углы 90°, 180°, 270°, 360°, 450°.

Вопросы

- В какой четверти оказалась данная точка?
- На какой угол повернулась точка?
- Как можно охарактеризовать поворот на 360°?
- Как вы думаете можно определить поворот точки на угол, больший 360°?

Итак, определим поворот точки $A_0(1, 0)$ на градусную величину $φ \geq 360°$. Для этого представим φ в виде суммы $φ = φ_1 + \ldots + φ_n$, где $φ_1, \ldots φ_n$ меньше 360°. Результат последовательного выполнения поворотов на углы $φ_1, \ldots, φ_n$ против часовой стрелки и будет искомым поворотом точки A_0 на φ. Ордината и абсцисса полученной в результате полного поворота точки A называется соответственно синусом и косинусом φ и обозначается sin φ и cos φ.

Для градусных величин $\varphi < 0°$ поворот на φ определяется аналогичным образом, но делается в направлении по часовой стрелке. Тригонометрические функции tg φ и ctg φ для произвольных градусных величин φ определяются обычным образом, а именно,

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\ \text{ctg } \varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Таким образом, из определения синуса и косинуса непосредственно следует, что выполняются следующее тождество:

$$\sin(\varphi + 360°) = \sin\varphi\ ,\ \cos(\varphi + 360°) = \cos\varphi.$$

Теорема. Для произвольных гадусных величин ϕ имеет место основное тригонометрическое тождество

$$sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi = 1.$$

Доказательство. По определению (cos φ, $\sin\varphi$) представляет собой координаты точки на единичной окружности, а $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$ является квадратом расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно, $sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi = 1$.

III. Закрепление нового материала

1. На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч; б) 2 ч; в) 2 ч 20 мин?

2. Найдите sin 420° и cos(-420°).

3. Найдите: а) tg(-750°); б) ctg 225°.

4*. Вычислите sin(-1350°)+cos 720°- tg 900°+ctg 450°.

Ответы. **1.** а) 360°; б) 720°; в) за 20 мин – на 120°, таким образом, поворот составит 720°+120° = 840°. **2.** sin 420° = sin(360°+60°) = sin 60°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos(-420°) = -cos 420° = cos(360°+60°) = cos 60°=$\frac{1}{2}$. **3.** а) -$\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1. **4*.** 1+1-0+0 = 2.

IV. Занимательный момент

Решение задачи 5* из домашней работы (см. этап VI урока 38).

V. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 75 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что имеют место тождества:

$$\text{tg}\,(\varphi + 180°) = \text{tg}\,\varphi,\ \text{ctg}(\varphi + 180°) = \text{ctg}\,\varphi,$$
$$\text{tg}(-\varphi) = -\text{tg}\,\varphi,\ \text{ctg}(-\varphi) = -\text{ctg}\,\varphi.$$

2) Найдите угол между лучом *OA* и осью абсцисс, если точка *A* имеет координаты: а) (2, 2); б) (0, 3); в) ($-\sqrt{3}$, 1); г) ($-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$).

Ответ. а) 45°; б) 90°; в) 150°; г) 135°.

3) На какую градусную величину повернется минутная стрелка за: а) 1 ч 45 мин; б) 2 ч 30 мин; в) 3 ч 20 мин?

Ответ. а) -630°; б) -900°; в) -1200°.

4*) Докажите, что преобразование плоскости, при котором точки $A(x, y)$ переходят в точки $A'(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)$, где φ – некоторый фиксированный угол, является движением. Определите вид этого движения.

Решение. Возьмем точки $A(x, y)$ и $B(x_1, y_1)$, которые при данном преобразовании плоскости переходят соответственно в точки $A'(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)$, $B'(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi,\ x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)$, найдем расстояния AB и $A'B'$. Они показывают, что при данном преобразовании плоскости сохраняются расстояния между соотвествующими точками, т. е. это преобразование является движением; поворот.

Урок 40

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется …
2. Косинусом угла φ, $(0 \leq \varphi < 360°)$ называется …
3. Тангенсом угла φ называется …
4. $\cos(\varphi + 360°) = \ldots$
5. $\sin(-\varphi) = \ldots$
6. $\operatorname{ctg}(90° - \varphi) = \ldots$

Вариант 2

1. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется …
2. Синусом угла φ, $(0 \leq \varphi < 360°)$ называется …
3. Котангенсом угла φ называется …
4. $\sin(\varphi + 360°) =$
5. $\cos(-\varphi) = \ldots$
6. $\operatorname{tg}(90° - \varphi) = \ldots$

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Для каких углов φ функция: а) $\sin\varphi$; б) $\cos\varphi$; в) $\operatorname{tg}\varphi$; г) $\operatorname{ctg}\varphi$ равна нулю?

2) Для каких углов φ функция: а) $\sin\varphi$; б) $\cos\varphi$; в) $\operatorname{tg}\varphi$; г) $\operatorname{ctg}\varphi$ положительна?

3) Для каких углов φ функция: а) $\sin\varphi$; б) $\cos\varphi$; в) $\operatorname{tg}\varphi$; г) $\operatorname{ctg}\varphi$ отрицательна?

4) Для каких углов φ не определена функция: а) $\operatorname{tg}\varphi$; б) $\operatorname{ctg}\varphi$?

5) Определите, какой четверти координатной плоскости принадлежит угол в: а) 240°; б) 700°; в) 420°; г) 825°; д) 800°; е) 1000°.

6) Найдите значение: а) $\sin 270°$; б) $\cos 540°$; в) $\operatorname{tg} 225°$; г) $\operatorname{ctg} 390°$; д) $\sin(-300°)$; е) $\cos(-210°)$.

Ответы. **1)** а) $180°n$; б) $90° + 180°n$; в) $180°n$; г) $90° + 180°n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **2)** а) $360°n < \varphi < 180° + 360°n$; б) $-90° + 360°n < \varphi < 90° + 360°n$; в), г) $180°n < \varphi < 90° + 180°n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **3)** а) $-180° + 360°n < \varphi < 360°n$; б) $90° + 360°n < \varphi < 270° + 360°n$; в), г) $90° + 180°n < \varphi < 180° + 180°n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **4)** а) $90° + 180°n$; б) $180°n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **5)** Угол принадлежит: а) III; б) IV; в) I; г) II; д) I; е) IV четверти координатной плоскости. **6)** а), б) -1; в) 1; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) -$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV. Подготовка к контрольной работе

1. Найдите угловой коэффициент и вектор нормали прямой: а) $5x+6y-10=0$; б) $x-11=0$.

2. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $K(-7, 4)$ и: а) перпендикулярна; б) параллельна оси абсцисс.

3. Найдите: а) sin 135°; б) cos (-495°); в) tg (-60°); г) ctg 210°.

4*. Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x=|y|$.

Ответы. **1.** а) $k=-\frac{5}{6}$, $\vec{n}$ (5, 6); б) $k=0$, $\vec{n}$ (1, 0). **2.** а) $x+7=0$; б) $y-4=0$. **3.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) -$\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) -$\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$. **4*.** Биссектрисы углов I и II четвертей координатной плоскости.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 72 и п. 75 учебника).

2. Решить задачи.

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку: а) $K(0, -2)$ с угловым коэффициентом $k=\frac{1}{2}$; б) $N(-5, 9)$ с вектором нормали $\vec{n}$ (3, -1).

Ответ. а) $x-2y-4=0$; б) $3x- y+24=0$.

2) Определите, углом какой четверти координатной плоскости является угол α, если: а) α =190°; б) α =100°; в) α =- 45°; г) α =500°; д) α =1080°.

Ответ. а) III; б) II; в) IV; г) II; д) I и IV четверти координатной плоскости.

3. Найдите значение выражения: а) 2cos 0° - 4sin 90° + 5tg 180°; б) 2cos 60° + $\sqrt{3}$cos 30°; в) 2sin 30° + 6cos 60° - 4 tg 45°; г) 3tg 45° ·tg 60°.

Ответ. а) -2; б) 2,5; в) 0; г) $3\sqrt{3}$.

4*) Отметьте на единичной окружности дуги, соответствующие углам γ, для которых: а) $\cos\gamma \geq 0$; б) $|\sin\gamma| < \frac{1}{2}$.

Ответ. а) а) $-90°+360°n \leq \gamma \leq 90°+360°n$, где n – произвольное целое число; б) $150°+330°n< \gamma <330°+360°n$, где n – произвольное целое число.

Урок 41
Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Запишите уравнение прямой, которая имеет вектор нормали $\vec{n}$ (5, -1) и проходит через точку K(10, -9).

2. Какой четверти координатной плоскости принадлежит угол в: а) 56°; б) -127°; в) 560°?

3. Найдите: а) sin(-135°); б) tg(-300°)·ctg 210°.

4. Упростите выражение: а) $\operatorname{tg}(-\beta) \cdot \operatorname{ctg}\beta + \sin^2\beta$; б) $\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2(-\alpha) - 1$.

5*. Нарисуйте многоугольник, который задается неравенствами:

а) $\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 1 \le y \le 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -7 \le x \le 0, \\ 0 \le y \le 4, \\ x + y + 5 \ge 0, \\ x + 2y - 4 \le 0. \end{cases}$

6*. Найдите ГМТ, координаты которых удовлетворяют равенству $y=|x| + 2$.

Вариант 2

1. Запишите уравнение прямой, которой принадлежит точка P(-12, 8) и которая имеет вектор нормали $\vec{n}$ (-3, -4).

2. Какой четверти координатной плоскости принадлежит угол в: а) 167°; б) -58°; в) -380°?

3. Найдите: а) cos(-150°); б) tg 315° ·ctg(-240°).

4. Упростите выражение: а) $\frac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos\alpha}$; б) $\operatorname{tg}(-\beta) \cdot \cos\beta + \sin\beta$.

5*. Нарисуйте многоугольник, который задается неравенствами:

а) $\begin{cases} 4 \le x \le 10, \\ -7 \le y \le -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5 \le x \le 5, \\ -5 \le y \le 5, \\ 3x - 4y + 23 \ge 0, \\ 2x - y - 9 \le 0. \end{cases}$

6*. Найдите ГМТ, координаты которых удовлетворяют равенству $|y|=x-1$.

76*. Полярные координаты

См. параграф 4

77. – 90. Начала стереометрии
(уроки 42-61)

Цель – формирование пространственных представлений, воображения учащихся; знакомство их с простыми свойствами пространственных фигур; выполнение чертежей несложных пространственных геометрических ситуаций; моделирование многогранников; подготовка к изучению систематическоого курса стереометрии старших классов.

Замечание. Учебный материал, связанный с началами стереометрии, по усмотрению учителя, может изучаться не отдельным блоком, а быть «разбросанным» по всему курсу планиметрии.

77. Основные понятия стереометрии
(два урока)

Урок 42

I. Устная работа

1) Что изучает планиметрия?

2) Что означает термин «планиметрия»?

3) Когда возникла планиметрия?

4) Когда существовала Древняя Греция?

5) Назовите основные понятия планиметрии. Что они идеализируют?

6) Что означает термин «аксиома»?

7) Зачем нужны аксиомы?

8) На сколько частей делят плоскость две прямые?

9) Прямая делит плоскость на две части. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

10) Можно ли провести прямую через две точки, находящиеся, например, на полу и на потолке?

Ответы. **8**) На 3 (параллельные прямые) или на 4 (пересекающиеся прямые). **9)** Неверное утверждение, например, окружность делит плоскость на две части. **10)** Можно.

II. Подготовительные упражнения

1. Изобразите следующую геометрическую ситуацию: прямая a лежит в плоскости α, прямая b пересекает плоскость α в точке B, которая не принадлежит прямой a. Сделайте соответствующие записи с помощью математической символики.

2. Изобразите следующую геометрическую ситуацию: плоскости α и β пересекаются по прямой *c*, прямая *l* пересекает плоскости α и β соответственно в точках *A* и *B*, которые не принадлежат прямой *c*. Сделайте соответствующие записи с помощью математической символики.

3. Изобразите плоскости α, β, γ, δ, которые имеют общую прямую *h*.

4. Изобразите плоскости α, β, γ, которые имеют общую точку *H*.

III. Новый материал

Основными понятиями стереометрии являются точка, прямая и плоскось, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т.е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

Как и раньше, точки обозначаются прописными латинскими буквами *A*, *B*, *C*, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами *a*, *b*, *c*, … , или двумя большими латинскими буквами *AB*, *CD*, *EF*, … , указывающими точки на этих прямых. Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, ...

Обращаем внимание на то, что прямая является бесконечным объектом. Мы всегда изображаем лишь конечный участок прямой - отрезок, который можно продолжать в обе стороны. Плоскость тоже является бесконечным объектом, и мы не в состоянии изобразить всю плоскость, а поэтому будем изображать лишь какой-нибудь конечный ее участок. Существует несколько способов изображения плоскости (рис. 78).

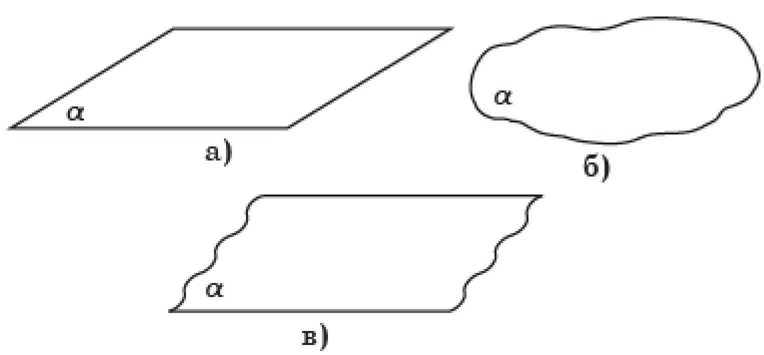
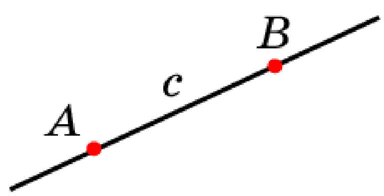
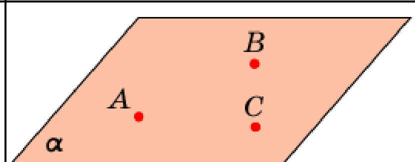
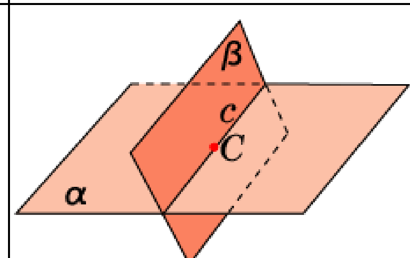
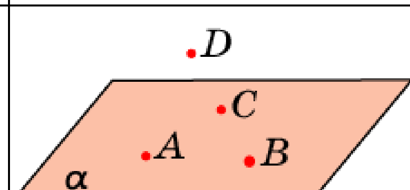


Рис. 78

В первом случае плоскость изображается параллелограммом. Это не очень удобно, так как такое же изображение будут иметь некоторые четырехугольники: параллелограмм, квадрат, ромб, прямоугольник. Во втором случае плоскость изображается бесформенной фигурой. Таким образом неудобно будет изображать пересекающиеся плоскости. Наиболее предпочтительным является изображение плоскости в третьем случае, где плоскость изображается фигурой, ограниченной двумя параллельными прямыми и двумя произвольными кривыми. При таком изображении устранены недостатки, указанные в первом и втором случаях.

Помимо аксиом планиметрии, в стереометрии требуется, чтобы выполнялись еще несколько аксиом. Их удобно разместить в следующую таблицу.

Таблица 1. Аксиомы стереометрии

Аксиома	Чертеж	Запись
A_1		$A \in a$, $B \in a$, a – единственная прямая
A_2		A, B, C не принадлежат одной прямой $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ α – единственная плоскость
A_3		$C \in \alpha, \beta$; $\alpha \cap \beta = c$; $C \in c$
A_4		$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$

IV. Закрепление нового материала

1. Верно ли, что: а) всякие три точки принадлежат одной плоскости; б) всякие четыре точки принадлежат одной плоскости?

2. Сколько прямых проходит через две данные точки?

3. Сколько плоскостей может проходить через три заданные точки?

4. Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки?

5. Точка D не принадлежит плоскости, проходящей через точки A, B и C. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть трапецией?

Четырехугольник, вершины которого не принадлежат одной плокости, называется *пространственным четырехугольником*.

Ответы. **1.** а) Да; б) нет. **2.** Одна. **3.** Одна или бесконечно много. **4.** а) Нет; б) нет. **5.** Нет, не может.

***V. Повторение планиметрии**

1. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание. Боковая сторона одного из них в три раза больше боковой стороны другого. Периметры треугольников соответственно равны 68 см и 28 см. Найдите стороны каждого треугольника.

Решение. Пусть даны треугольники ABC и ABD (рис. 79); $AC=BC$, $AD=BD$; $AC=3AD$; $P_{ABC}=68$ см, $P_{ABD}=28$ см. Положим $AD=x$ (см), тогда $AC=3x$ (см). Используя условие задачи, имеем $AD=BD=x$ (см), тогда $AC=BC=3x$ (см). Периметр треугольника ABD равен $x+x+AB$ (см), а периметр треугольника ABC равен $3x+3x+AB$ (см). Таким образом, имеем уравнения: $2x+AB=28$ и $6x+AB=68$, решая которые, получим $AB=28–2x$ и $AB=68–6x$, т.е. $28–2x=68–6x$, откуда $x=10$. Итак, $AD=BD=10$ (см); $AB=28–20=8$ (см); $AC=BC=$ 30 см.

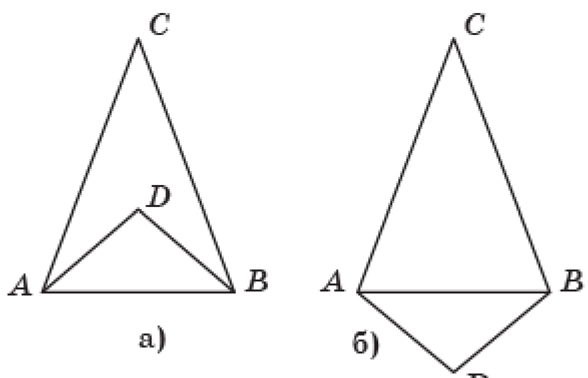


Рис. 79

2. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Решение. Окружность, построенная на данном отрезке, как на диаметре, без концов этого отрезка.

3. В треугольнике ABC через вершину C проведена прямая CE (рис. 80), параллельная биссектрисе BD угла B треугольника, до пересечения с продолжением стороны AB в точке E. Докажите, что $BC=BE$. Предложите несколько способов решения.

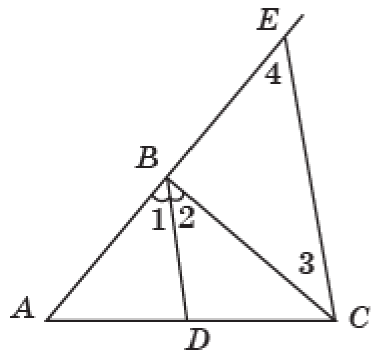


Рис. 80

Решение. 1-й способ решения (аналитический метод): для простоты обозначим углы числами (рис. 80). Если $BC=BE$, то треугольник BEC – равнобедренный, следовательно, $\angle 3=\angle 4$. Действительно, $\angle 3=\angle 2$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BD, CE и секущей BC; $\angle 1=\angle 4$, как соответственные углы при тех же параллельных прямых и секущей AE. Так как $\angle 1=\angle 2$ (по условию), то $\angle 3=\angle 4$. Значит, треугольник BCE – равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника) с боковыми сторонами BC и BE. Итак, $BC=BE$.

2-й способ решения (синтетический метод): $\angle 1=\angle 2$ (по условию); $\angle 1=\angle 4$ – как соответственные углы при параллельных прямых BD, CE и секущей AE. $\angle 2=\angle 3$ – как внутренние накрест лежащие углы при тех же параллельных прямых и секущей BC. Следовательно, $\angle 3=\angle 4$, значит, треугольник BCE – равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), BC и BE – его боковые стороны и, значит, $BC=BE$.

Замечание. Аналитический метод, как правило, более эффективен по сравнению с синтетическим при поиске решения задачи, он показывает путь построения доказательства.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 77 учебника).

2. Решить задачи.

1) Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку (рис. 81)?

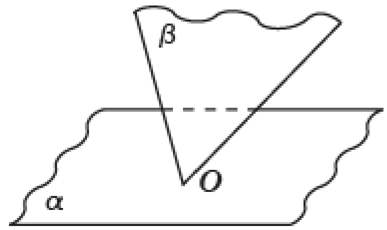


Рис. 81

Ответ. Нет.

2) Могут ли три плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки; в) общую прямую?

Ответ. а) Да (рис. 82); б) нет; в) да (рис. 83).

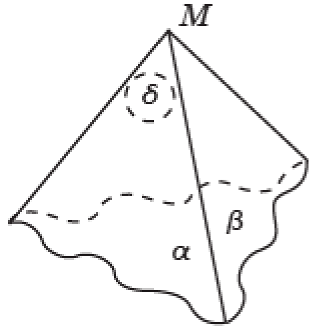


Рис. 82

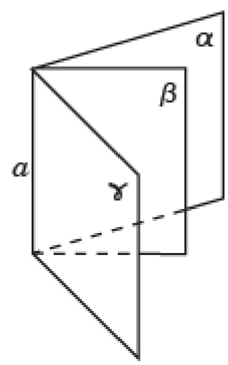


Рис. 83

3) При каком расположении трех точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

Ответ. Принадлежат одной прямой.

4) Верно ли, что все точки окружности принадлежат плоскости, если эта окружность имеет с данной плоскостью: а) две общие точки; б) три общие точки?

Ответ. а) Нет (рис. 84, а); б) да (рис. 84, б).

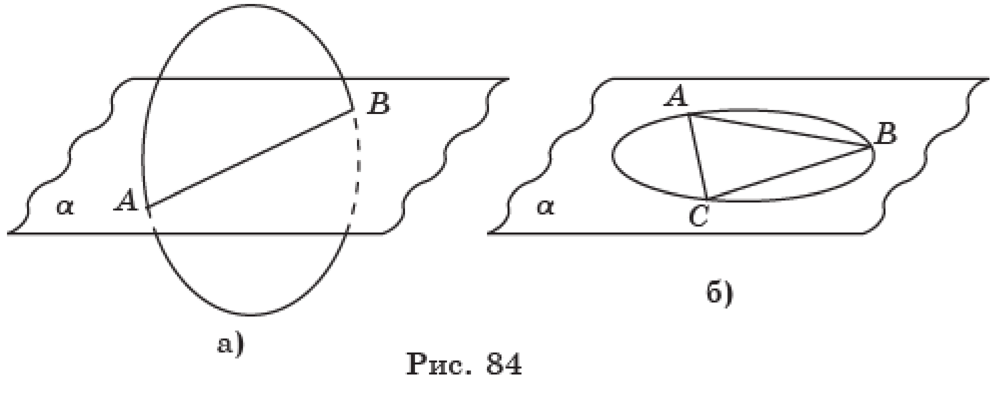
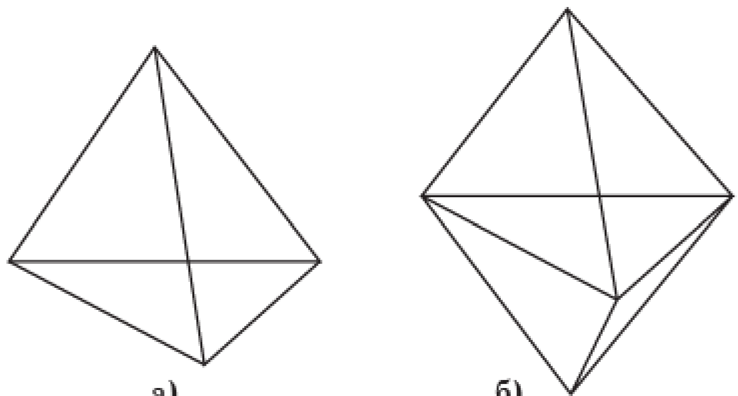


Рис. 84

5*) а) Из 6 спичек сложите 4 равных треугольника; б) из 9 спичек сложите 7 равных треугольников.

Ответ. См. соответственно рисунки 85, а и 85, б.



а) б)

Рис. 85

Урок 43

I. Устная работа

1) Плоскостям каких фигур принадлежит точка A плоскости α (рис. 86)?

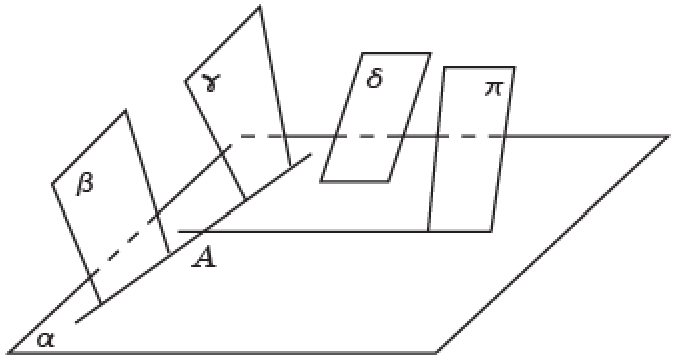


Рис. 86

2) Как расположены плоскости α и β на рисунке 81?

3) Верно ли, что любые две точки всегда принадлежат одной прямой? Можно ли то же самое сказать о трех точках?

4) Верно ли утверждение о том, что общая точка двух плоскостей принадлежит линии их пересечения?

5) Можно ли провести плоскость через данную точку пространства? Если да, то сколько различных плоскостей можно провести через эту точку?

6) Можно ли провести плоскость через две данные точки пространства? Если да, то сколько различных плоскостей можно провести через эти точки?

7) Какое минимальное число общих точек необходимо задать, чтобы две плоскости совпали?

8) Задача 5* из домашней работы (см. этап VI урока 42).

Ответы. 1) β, γ, π**. 2)** Пересекаются по прямой, проходящей через точку O. **3)** В первом случае: "Да", во втором - "Нет". **4)** Да. **5)** Можно, бесконечно много плоскостей. **6)** Можно, бесконечно много плоскостей. **7)** Три точки, не принадлежащие одной прямой. 8) Рисунок 85.

II. Новый материал

Вопросы

- Итак, сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

При ответе на этот вопрос учащимся демонстрируется модель, изображенная на рисунке 83.

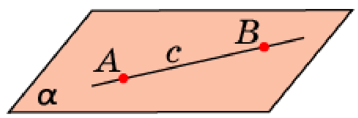
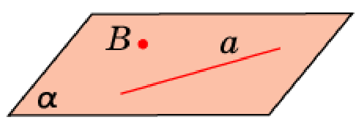
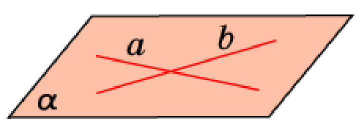
- Точки A и B принадлежат плоскости α. Как расположена прямая AB относительно плоскости α?

- Возьмем прямую и не принадлежащую ей точку. Можно через них провести плоскость? Почему? Как вы думаете, сколько таких плоскостей можно провести?

- Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли через них провести плоскость? Будет ли она единственной?

После ответов на эти вопросы мы говорим, что эти свойства являются следствиями из аксиом стереометрии и заполняем следующую таблицу.

Таблица 2. Следствия из аксиом стереометрии

Следствие	Чертеж	Формулировка
C_1		Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости
C_2		Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость
C_3		Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость

Доказательства следствий – первых теорем стереометрии, представляем с подробной записью (дано, требуется доказать, доказательство) и с помощью схемы, где показаны все логические шаги доказательств. Учащимся будет удобно и легко воспроизводить отдельные этапы доказательств по данной схеме.

Схема 1. Аксиомы и их следствия (рис. 87).

Замечание. Данную схему лучше сделать разноцветной. Например, кружки (аксиомы) сделать красными, а квадраты (следствия) – зелеными.

Причем для большей наглядности поместить над кружками и под квадратами схематические чертежи соответствующих аксиом и следствий.

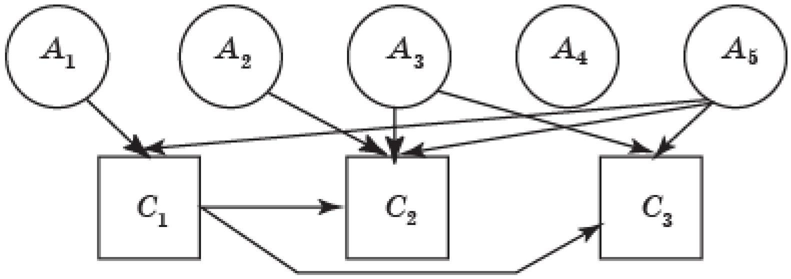


Рис. 87

III. Закрепление нового материала.

1. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли три из этих точек принадлежать одной прямой?

2. Прямая и плоскость параллелограмма *ABCD* имеют две общие точки *K* и *L*. Как расположена точка *M* прямой *KL* относительно плоскости параллелограмма *ABCD* (рис. 88)?

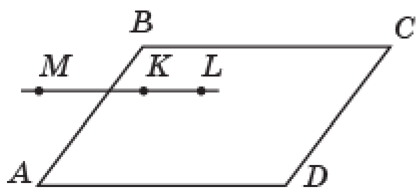


Рис. 88

3. Три вершины параллелограмма принадлежат некоторой плоскости. Верно ли утверждение о том, что и четвертая вершина этого параллелограмма принадлежит той же плоскости?

4*. Прямая имеет с окружностью только одну общую точку. Верно ли утверждение о том, что эта прямая является касательной данной окружности?

Ответы. **1)** Нет. **2)** Принадлежит плоскости параллелограмма. **3)** Да. **4*)** Нет, см. рисунок 89.

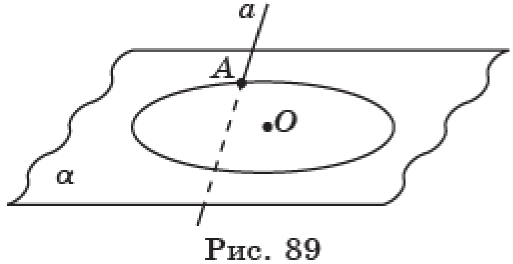


Рис. 89

*IV. Повторение планиметрии

1. Из точки A прямой MN в одной полуплоскости относительно нее проведены два луча AB и AC. Угол CAN составляет $\frac{3}{7}$ угла BAN и меньше его на $20O$. Найдите углы MAB, BAN и CAN.

Решение. См. рисунок 90: $\angle BAC=20o$ и составляет $\frac{4}{7}$ угла BAN. Следовательно, $\angle BAN = 20^o : \frac{4}{7} = 35^o$ и $\angle CAN = \frac{3}{7}\angle BAN = \frac{3}{7}\angle 35^o = 15^o$; $\angle MAB = 180^o - \angle BAN = 145^o$. Итак, $\angle MAB = 145^o$; $\angle BAN = 35^o$; $\angle CAN = 15^o$.

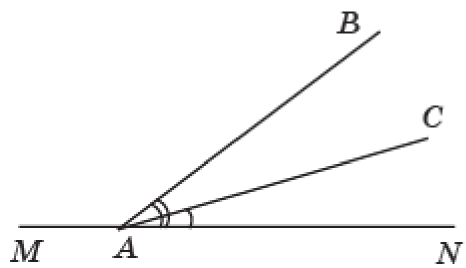


Рис. 90

2. По трем данным отрезкам a, b, c постройте четвертый пропорциональный отрезок x, такой, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Решение. Пусть заданы отрезки a, b, c (рис. 91, а). Возьмем произвольный угол AOB и на его стороне OA отложим последовательно отрезки a и b, на стороне OB отложим отрезок c (рис. 91, б). Получим соответственно точки C, D, E. Соединим точки C и E, а из точки D проведем прямую DF параллельно CE, где точка F принадлежит OB. Отрезок EF – искомый.

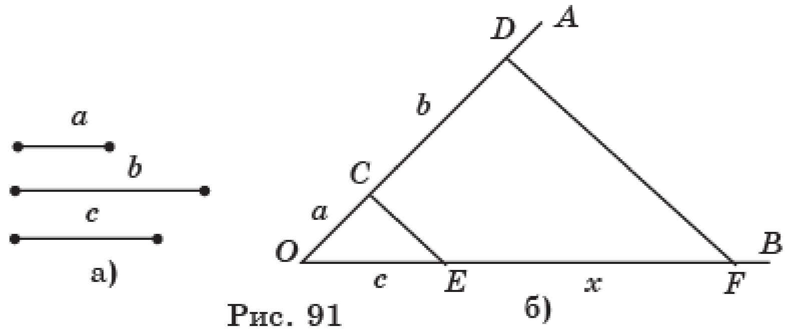


Рис. 91

3. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и AC соответственно отложены равные отрезки AE и AF. Докажите, что отрезки BF и CE равны и $BC||EF$. Предложите несколько решений.

Решение. Рассмотрим треугольники ABF и ACE (рис. 92). Они равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними: $AB=AC$ – боковые стороны равнобедренного треугольника ABC; $AF=AE$, по условию; $\angle A$ – общий); из равенства треугольников следует, что $BF=CE$. Параллельность BC и EF следует из того, что треугольники ABC и AEF подобны (по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними). При другом способе решения можно доказать, что четырехугольник $BEFC$ является равнобедренной трапецией.

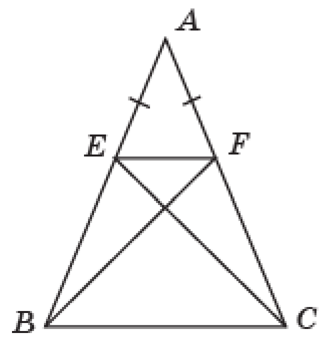


Рис. 92

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 77 учебника).

2. Решить задачи.

1) Даны прямая и точка, не принадлежащая этой прямой. Лежат ли прямые, проходящие через эту точку и пересекающие данную прямую, в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

Ответ. Да.

2) Изобразите следующую геометрическую ситуацию: три точки K, L и M, не принадлежащие одной прямой, принадлежат плоскости β. Прямая a пересекает стороны KL и ML треугольника KLM и не лежит в плоскости β.

Решение. Прямая a пересекает плоскость β в точке L – вершине треугольника KLM (рис. 93).

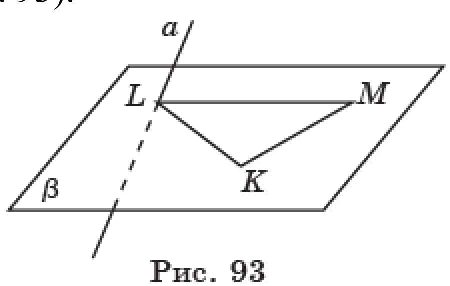


Рис. 93

3) Лежит ли в плоскости β прямоугольник $ABCD$, если ей принадлежат точки: а) C и D; б) A и C; в) A, B и O; г) B, O и D, где O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Ответ. а), б), г) Не обязательно; в) да.

4*) Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через 7 точек.

Решение. Наибольшее число прямых получится, если никакие три точки не принадлежат одной прямой. Следовательно, всего получится $\frac{7 \cdot 6}{2}$=21 (прямая).

78. Фигуры в пространстве (один урок)

Урок 44

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Планиметрия – это раздел геометрии …
2. Слово «стереометрия» в переводе с греческого языка означает …
3. Основными понятиями стереометрии являются …
4. Через любые две точки пространства проходит …
5. Если две плоскости имеют общую точку, то …
6. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то …

Вариант 2

1. Стереометрия – это раздел геометрии …
2. Слово «планиметрия» в переводе с греческого языка означает …
3. Основными понятиями планиметрии являются …
4. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит …
5. Существует, по крайней мере, четыре точки, …
6. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопросы

- Какие плоские фигуры вы можете назвать?
- Какие неплоские фигуры вы можете назвать?
- Какое наглядное описание многогранника вы можете дать?
- Какие предметы из окружающей нас обстановки напоминают вам форму многогранников?

Среди пространственных фигур выделяются многогранники – тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются диагоналями многогранника.

Приведем примеры многогранников.

Учащимся демонстрируются модели и рисунки представленных фигур.

Куб – многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Параллелепипед – многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.

Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, называется прямоугольным.

Призма – многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых боковыми гранями призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называются боковыми ребрами.

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется прямой. В противном случае призма называется наклонной.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется правильной.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях – соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Пирамида – многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых боковыми гранями пирамиды. Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются боковыми ребрами.

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые ребра которой равны, называется правильной.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т.д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях – соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Многогранники обозначаются перечислением их вершин. Например, куб или параллелепипед обозначаются $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (или $A\ldots D_1$), где $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ - противоположные грани. Аналогично треугольная пирамида с вершиной в точке S и основанием ABC обозначается $SABC$.

Среди пространственных фигур, не являющихся многогранниками, отметим сферу и шар. Примерами пространственных фигур являются также знакомые учащимся цилиндр и конус.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите количество вершин (*В*), ребер (*Р*) и граней (*Г*) для: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) пятиугольной призмы; г) семиугольной пирамиды.

2. Сделайте обозначения для: а) пирамиды, в основании которой лежит четырехугольник; б) треугольной призмы; в) восьмиугольной пирамиды.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите и запишите линии пересечения плоскостей следующих граней: а) $ABCD$ и AA_1D_1D; б) DCC_1D_1 и $A_1B_1C_1D_1$; в) $ABCD$ и плоскости AA_1C_1**.** Каким граням принадлежат точки A и C_1?

4*. Найдите число диагоналей: а) 4-угольной призмы; б) 5-угольной пирамиды.

Ответы. **1.** а), б) *В*=8, *Р*=12, *Г*=6; в) *В*=10, *Р*=15, *Г*=7; г) *В*=8, *Р*=14, *Г*=8. **3.** а) AD; б) C_1D_1; в) AC. Точка A принадлежит граням $ABCD$, ABB_1A_1, AA_1D_1D; точка C_1 принадлежат граням C_1CDD_1, $A_1B_1C_1D_1$, C_1CBB_1. **4*.** а) Из каждой вершины 4-угольной призмы можно провести только одну диагональ. Учитывая, что каждая диагональ подсчитывается дважды, получим $\frac{8\cdot 1}{2}$=4 (диагонали); б) у пирамид нет диагоналей, таким образом, ответ – 0.

*V. Повторение планиметрии

1. Найдите радиусы вписанной (r) и описанной (R) окружностей равностороннего треугольника, если его высота равна h».

Ответ. $r=\frac{h}{3}$ и $R=\frac{2h}{3}$.

2. Постройте трапецию, чтобы ее основания были равны отрезкам a, b ($a>b$), а боковые стороны – отрезкам c и d ($d\geq c$).

Решение. <u>Анализ.</u> Допустим построена трапеция $ABCD$ (рис. 94), у которой $BC \| AD$, $BC=a$, $AD=b$, $AB=c$, $CD=d$.

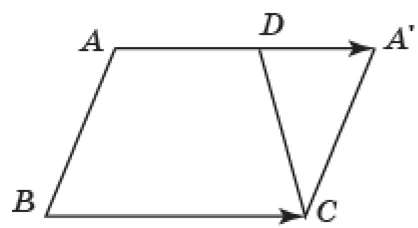


Рис. 94

Применим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$. Тогда AB перейдет в $A'C$. В треугольнике $A'CD$ $A'C=c$, $CD=d$ и $A'D=a–b$.

<u>Построение.</u> Строим треугольник $A'CD$ по трем сторонам ($A'C=c$, $CD=d$, $A'D=a\text{-}b$. Через точку C проведем луч, одинаково направленный с лучом $A'D$ и на нем отложим $CB=a$. Перенесем точку A' параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CB}$, получим точку A; $ABCD$ – искомая трапеция.

Доказательство. Действительно, по построению $CD=d$, $BC \| AD$, $BC=a$, $AD=a-(a-b)=b$, $AB=A'C=c$.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если $d-c< a-b<a+b$.

3. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей ромба на его стороны, являются вершинами прямоугольника.

Ответ. Полученный четырехугольник является прямоугольником, так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам и равны.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию (п. 78 учебника).

2. Решить задачи.

1) Может ли в призме число ребер быть равно: а) 8; б) 15; в) 13; г) 12?

Ответ. а), в) Нет; б), г) да.

2) Докажите, что число ребер произвольной призмы делится на три.

3) Существует ли пирамида, которая имеет: а) 14 ребер; б) 35 ребер?

Ответ. а) Да; б) нет.

4) Докажите, что любая пирамида имеет четное число ребер.

5) Какой многоугольник лежит в основании: а) призмы, у которой 15 ребер; б) пирамиды, у которой 24 ребра?

Ответ. а) Пятиугольник; б) двенадцатиугольник.

6) Найдите сумму всех плоских углов: а) треугольной пирамиды; б) треугольной призмы.

Ответ. а) 720°; б) 1440°.

7*) Существуют ли отличные от куба многогранники, все грани которых являются равными между собой квадратами?

Ответ. Да, например, на рисунке 95 изображен, так называемый, пространственный крест.

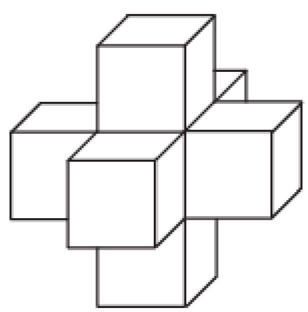


Рис. 95

79. Угол в пространстве
(один урок)

Урок 45

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Многогранником называется тело, поверхность которого …
2. Ребром многогранника называется …
3. Параллелепипедом называется …
4. Правильной призмой называется …
5. Пирамидой называется …

Вариант 2

1. Гранью многогранника называется …
2. Вершиной многогранника называется …
3. Прямоугольным параллелепипедом называется …
4. Прямой призмой называется …
5. Правильной пирамидой называется …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вспомним определение угла: «Углом называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами».

Вопрос

- Можно ли это определение угла использовать в стереометрии?

Ответ. Да, так как два луча с общей вершиной лежат в одной плоскости, определенной пересекающимися прямыми, на которых лежат данные лучи.

Определение. ***Углом*** в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой они лежат), ограниченной этими лучами.

Вопросы

- На какие фигуры разбивает плоскость проведенная в ней прямая?
- На какие фигуры разбивает пространство проведенная в нем плоскость?

Аналогично тому, как прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, так и плоскость разбивает пространство на два ***полупространства***.

Если две точки принадлежат разным полупространствам относительно данной плоскости, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с плоскостью. Если две точки принадлежат одному полупространству, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с плоскостью.

- Охарактеризуйте фигуры, изображенные на рисунке 96.

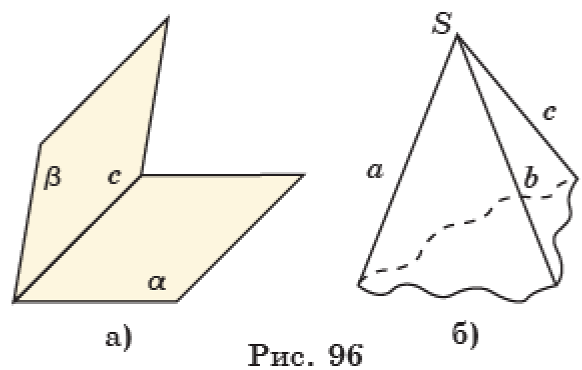


Рис. 96

Определение. Фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями, называется ***двугранным углом*** (рис. 96, а). Сами полуплоскости называются ***гранями*** двугранного угла, а их общая граничная прямая - ***ребром*** двугранного угла. Точки двугранного угла, не принадлежащие его граням, называются ***внутренними***.

Определение. Фигура, образованная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, а также частью пространства, органиченной этими углами, называется ***трехгранным углом*** (рис. 96, б). Сами плоские углы называются ***гранями***, их стороны – ***ребрами***, а их общая вершина – ***вершиной*** трехгранного угла.

Аналогичным образом определяются понятия четырехгранного угла, пятигранного угла и т. д., а также общее понятие многогранного угла.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите угол между: а) пересекающимися ребрами куба; б) диагональю грани куба и стороной этой грани.

2. Сколько двугранных углов имеет: а) куб; б) треугольная пирамида; в) пятиугольная призма?

3. Укажите многогранники, имеющие: а) четырехгранные; б) пятигранные углы.

4. Докажите, что через точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую. Сколько таких прямых можно провести через данную точку?

Ответы. **1.** а) 90°; б) 45°. **2.** а) 12; б) 6; в) 15. **3.** а) Октаэдр - четырехугольная бипирамида (рис. 97); б) пятиугольная пирамида.

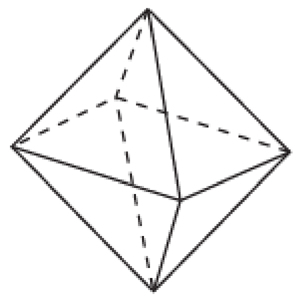


Рис. 97

4. Проведем через данную прямую какую-нибудь плоскость. В этой плоскости через данную точку проведем прямую, перпендикулярную данной прямой, которая и будет искомой; поскольку через данную прямую в пространстве можно провести бесконечно много плоскостей, то и прямых, проходящих через точку прямой и перпендикулярных этой прямой, будет бесконечно много.

***V. Повторение планиметрии**

1. Стороны треугольника относятся как 3:4:6. Треугольник, вершины которого лежат в серединах сторон данного треугольника имеет периметр 52 см. Найдите стороны данного треугольника. Предложите два способа решения.

Ответ. 24 см, 32 см, 48 см.

2. На данной прямой найдите точку, одинаково удаленную от двух данных точек.

Ответ. Точка пересечения данной прямой и серединного перпендикуляра отрезка, образованного данными точками; решения нет, если данная прямая и этот серединный перпендикуляр параллельны.

3. Докажите, что в равнобедренной трапеции отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, перпендикулярны.

Ответ. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, перпендикулярен им, следовательно перпендикулярен и средней линии, которая параллельна основаниям трапеции.

VI. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 79 учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что пересекающиеся диагонали двух соседних граней куба образуют угол 60°.

Ответ. Например, в кубе $A\ldots D_1$ отрезки DA_1 и DC_1 являются сторонами равностороннего треугольника A_1C_1D.

2) В правильной треугольной пирамиде, гранями которой являются правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру.

Ответ. См. рисунок 98:

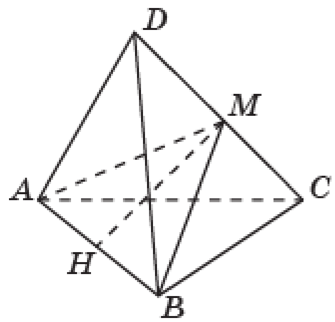


Рис. 98

точки M и H являются серединами ребер соответственно CD и AB, тогда по теореме косинусов имеем:

$$\cos \angle AMB = \frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2\cdot AM\cdot BM} = \frac{1}{3}.$$

3) Сколько трехгранных углов имеет: а) куб; б) треугольная пирамида; в) четырехугольная пирамида?

Ответ. а) 8; б) 4; в) 4.

4) Сколько двугранных углов имеет: а) шестиугольная призма; в) семиугольная пирамида; в) октаэдр (рис. 97)?

Ответ. а) 18; б) 14; в) 12.

5*) Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней (соседние грани, имеющие общее ребро, окрашиваются в разные цвета): а) призмы с четным числом боковых ребер; б) пирамиды с четным числом боковых ребер; в) призмы с нечетным числом боковых ребер; г) пирамиды с нечетным числом боковых ребер.

Ответ. а) 3; б) 3; в) 4; г) 4.

3. Индивидуальное задание «Практический способ приближенного измерения углов в пространстве (с помощью ногтя указательного пальца)». Литература: Учебник п. 79.

80. Параллельность в пространстве
(два урока)
Урок 46

I. Проверка домашнего задания

Опрос по теории – за первые парты приглашаем шестерых учащихся.

Задания 1, 3, 5

1. Назовите основные понятия стереометрии.
2. Способы задания плоскости.
3. Определение двугранного угла.

Задания 2, 4, 6

1. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
2. Определение многогранника.
3. Определение трехгранного угла.

Индивидуальные задания по карточкам – выполняются учащимися на своих местах.

Карточка

1) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол: а) ADB; б) ABC; в) CMD, где M – середина ребра AC; г) ADH, где H – середина ребра AB.

2) Сколько и каких многогранных углов имеет: а) четырехугольная призма; б) десятиугольная пирамида?

Ответы. 1) а) 60°; б) 60°; в) 90°; г) 30°. 2) а) 8 трехгранных углов; б) 10 трехгранных углов и 1 десятигранный угол.

Задание для класса

1. Найдите углы между пересекающимися диагоналями граней прямоугольного параллелепипеда с измерениями 7 см, $7\sqrt{3}$см, 7 см.

2. Изобразите ромб $ABCD$, у которого: а) вершины A и D принадлежат плоскости α и плоскость ромба не совпадает с данной плоскостью; б) вершины A и C принадлежат плоскости α и плоскость ромба не совпадает с данной плоскостью; в) вершины B, C и O – точка пересечения диагоналей принадлежат плоскости α.

3. Какой многоугольник лежит в основании: а) призмы; б) пирамиды, если у нее 60 ребер?

4*. Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней: а) бипирамиды с четным числом ребер в общем основании; б) бипирамиды с нечетным числом ребер в общем основании.

Ответы. **1.** См. рисунок 99: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты со стороной 7 см, искомые углы - $\angle A_1DC_1$ и $\angle A_1C_1D$, $DA_1=DC_1=14$ (см), $A_1C_1=7\sqrt{2}$ (см); тогда $\cos\angle A_1DC_1=\frac{3}{4}$, $\cos\angle A_1C_1D=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **3.** а) 20-угольник; б) 30-угольник. **4*.** а) 2; б) 3.

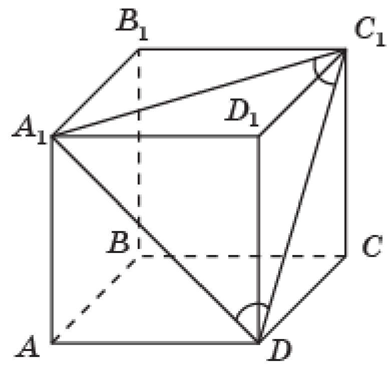


Рис. 99

К доске приглашаем трех учащихся (У$_1$, У$_2$, У$_3$).

У$_1$ – вместе с классом решает задачу 1.

У$_2$ – начинает самостоятельно решать классную задачу 2.

У$_3$ – воспроизводит решение задачи 2 из домашней работы (см. этап VI урока 45).

Дополнительные вопросы

- Что называется ребром двугранного угла?
- Что называется гранью двугранного угла?
- Какие две прямые в пространстве называются перпендикулярными?

II. Устная работа

1) Верны ли следующие утверждения:

а) если точка A принадлежит плоскости α, а точка B принадлежит плоскости β, то плоскости α и β пересекаются по прямой AB;

б) если треугольники ABC и ADE имеют только одну общую точку, то плоскости ABC и ADE имеют только одну общую точку?

2) Верно ли, что если отрезки AB и CD не пересекаются, то точка A принадлежит плоскости BCD?

3) Верно ли, что если точка D принадлежит плоскости ABC, то точка A принадлежит плоскости BCD?

4) Может ли стул на трех ножках, имеющих разную длину, не качаться? Почему?

5) Многогранник имеет P ребер, B вершин и $Г$ граней. Можно по этим данным определить, сколько у него: а) двугранных углов; б) многогранных углов; в) плоских углов?

Ответы. **1)** а), б) Нет. **2)** Нет. **3)** Да. **4)** Можно, его концы принадлежат одной плоскости. **5)** а) Да, число двугранных углов равно числу ребер P

многогранника; б) да, число многогранных углов равно числу вершин *В* многогранника; в) да, число плоских углов многогранника равно удвоенному числу его ребер, т. е. 2*Р*.

III. Новый материал

Вспомним, какие две прямые на плоскости называются параллельными.

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

Вопрос

- Можно ли это определение параллельных прямых оставить и для пространства?

После обсуждения ответа на этот вопрос определяем параллельные прямые в пространстве и скрещивающиеся прямые.

Определение. Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

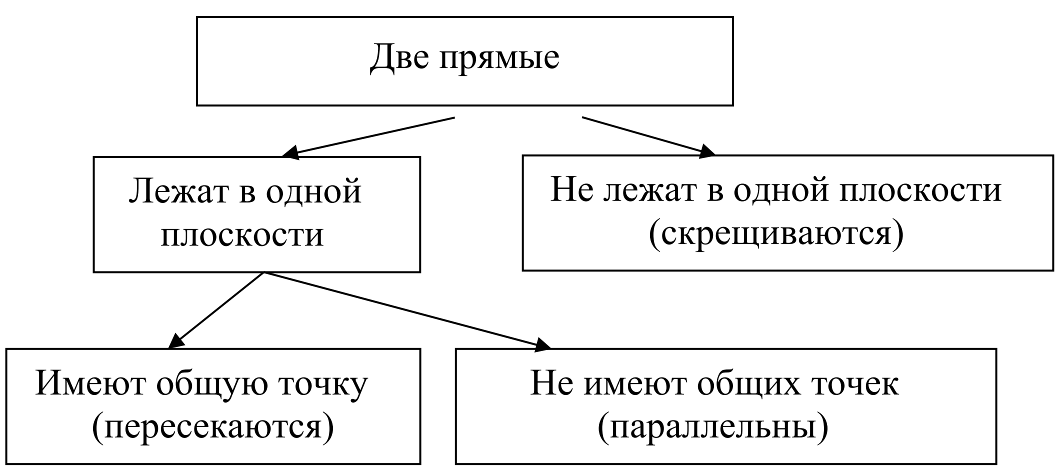
Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости. Прямые в пространстве могут не пересекаться, но лежать в разных плоскостях. В этом случае они называются скрещивающимися.

Опроеделение. Две прямые в пространстве называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы.

Схема 2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.



Вопрос

- Какие два отрезка можно считать параллельными или скрещивающимися?

Будем говорить, что два отрезка параллельны или скрещиваются, если они лежат на параллельных или скрещивающихся прямых соответственно.

Также как и на плоскости, в пространстве выполняется следующее свойство параллельных прямых: если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по две пары ребер, которые: а) параллельны; б) скрещиваются.

2. Сформулируйте, какие две прямые в пространстве являются непараллельными.

3. Укажите в треугольной призме количество пар: а) параллельных ребер; б) скрещивающихся ребер.

4*. В пространстве дано: а) 3; б) 4; в) 5 параллельных между собой прямых. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

Ответы. **1.** Например, ребра: а) AB и A_1B_1, AD и B_1C_1; б) AB и A_1D_1, DD_1 и B_1C_1. **2.** Две прямые в пространстве не параллельны, если они не лежат в одной плоскости или имеют общую точку. **3.** а) 6; б) 9. **4*.** а) 3; б) 6; в) 10.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 80 учебника).

2. Решить задачи.

1) Укажите в прямоугольном параллелепипеде количество пар: а) параллельных ребер; б) скрещивающихся ребер.

Ответ. а) 18; б) 24.

2) Пусть a и b - пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 - прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?

Ответ. Лежат в одной плоскости.

3) Пусть a и b - скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B - прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Укажите линию пересечения плоскостей α и β.

Ответ. Проходит через точку C.

4*) В пространстве даны n параллельных между собой прямых. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Урок 47

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если …
2. Две прямые в пространстве называются пересекающимися, если …
3. Два отрезка скрещиваются, если …
4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра … и … параллельны.
5. В тетраэдре имеется … пар параллельных ребер.
6. Две прямые в пространстве не являются скрещивающимися, если …

Вариант 2

1. Параллельность прямых m и n обозначается …
2. Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если …
3. Два отрезка параллельны, если …
4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра … и … скрещиваются.
5. В кубе имеется … пар параллельных ребер.
6. Две прямые в пространстве не являются параллельными, если …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Индивидуальное задание

«Практический способ приближенного измерения углов в пространстве (с помощью ногтя указательного пальца)» (этап VI урока 45).

IV. Решение задач

1. На рисунке 100 изображена правильная шестиугольная призма. Запишите все ребра: а) параллельные ребру AB; б) параллельные ребру CC_1; в) скрещивающиеся с ребром EF; г) скрещивающиеся с ребром BB_1.

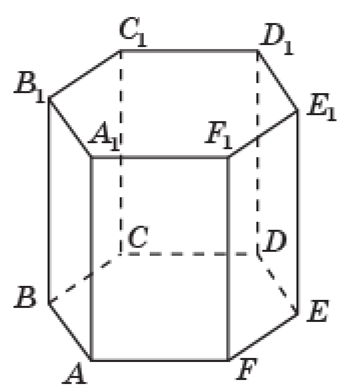


Рис. 100

2. Изобразите две прямые, которые лежат в разных плоскостях. Как они могут располагаться относительно друг друга?

Ответы. **1.** а) A_1B_1, DE, D_1E_1; б) AA_1, BB_1, DD_1, EE_1, FF_1; в) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1F_1, A_1B_1, C_1D_1, D_1E_1; г) CD, DE, EF, AF, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, A_1F_1. **2.** Скрещиваться, пересекаться, быть параллельными.

***V. Повторение планиметрии**

1. Биссектриса одного из внутренних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, составляет с другой параллельной прямой угол в 57°. Найдите все углы, которые образуются при пересечении этих параллельных прямых данной секущей.

Ответ. 4 угла по 66*o* и 4 угла по 114°.

2. Даны две пары параллельных прямых $a||b$ и $c||d$. Постройте прямую m, проходящую через данную точку M таким образом, чтобы ее отрезки между параллельными прямыми были равны.

Ответ. Пусть данные прямые при пересечении образуют параллелограмм $EFGH$ (рис. 101). Проведем через точку M прямую, параллельную EG – диагонали параллелограмма, тогда она будем искомой, так как $KL=EG=NP$. Два решения, вторая прямая проводится через точку M параллельно FH. Решения нет, если данные прямые все параллельны.

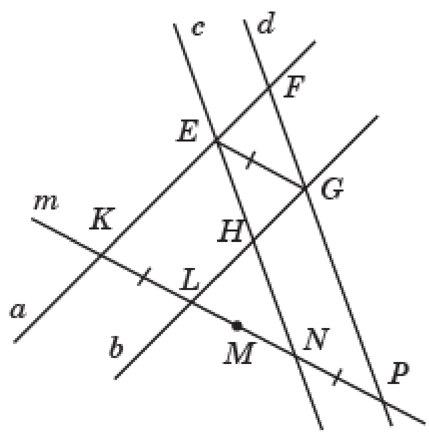


Рис. 101

3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Ответ. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла медиану CM и продолжим ее на отрезок $MD=MC$. Тогда четырехугольник $ACBD$ – прямоугольник (так как его диагонали в точке пересечения делятся пополам, значит, $ACBD$ – параллелограмм с прямым углом C, т. е. $ACBD$ – прямоугольник), $CD=AB$, как диагонали прямоугольника, и, следовательно, $CM = \frac{AB}{2}$.

VI. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 80 учебника).

2. Решить задачи.

1) Пусть a и b - скрещивающиеся прямые (рис. 102). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают прямые a и b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

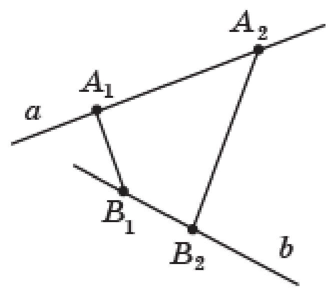


Рис. 102

Ответ. Нет.

2) Докажите, что через точку пространства, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная этой прямой.

3) Найдите сумму плоских углов шестиугольной пирамиды.

Ответ. 1800°.

4) Найдите число двугранных углов одиннадцатиугольной призмы.

Ответ. 33.

5*) Сформулируйте определения параллельности: а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей.

6*) В кубе $A…D_1$ укажите параллельные: а) прямые и плоскости; б) плоскости.

81. Сфера и шар
(один урок)

Урок 48

I. Устная работа

1) Как могут быть расположены относительно друг друга две прямые в пространстве?

2) Всегда ли две не пересекающиеся прямые в пространстве параллельны?

3) В каком случае две прямые в пространстве не параллельны?

4) Достаточно ли для доказательства параллельности двух прямых в пространстве установить, что они не имеют общих точек?

5) Продолжите фразу: "Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не пересекаются ...".

6) Сколько прямых в пространстве, параллельных данной прямой, проходит через точку, не принадлежащую этой прямой? Почему?

7) В тетраэдре $ABCD$ назовите все пары скрещивающихся ребер.

8) Прямая d пересекает сторону AB треугольника ABC. Каким может быть взаимное расположение прямой d и прямой BC?

Ответы. **1)** Могут пересекаться, быть параллельными, скрещиваться. **2)** Нет, они могут скрещиваться. **3)** Если они пересекаются или не лежат в одной плоскости. **4)** Нет. **5)** "...и не параллельны". **6)** Одна прямая, которая лежит в плоскости, определяемой данной прямой и данной точкой. **7)** AB и CD; BC и AD; AC и BD. **8)** Прямая d может: пересекать прямую BC и лежать в плоскости треугольника; пересекать прямую BC, но не лежать в плоскости треугольника; быть параллельной BC; совпадать с BC; скрещиваться с BC.

II. Новый материал

Вспоминаем определения окружности и круга и пытаемся определить соответствующие пространственные аналоги – сферу и шар.

Определение. ***Сферой*** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние.

Данная точка называется ***центром сферы***, а данное расстояние – ***радиусом сферы***.

Таким образом, сфера с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек A пространства, удаленных от точки O на расстояние R.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки сферы, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром сферы***.

Определение. Фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояния, не превосходящие данное, называется ***шаром***.

Данная точка называется центром шара, а данное расстояние – ***радиусом шара***.

Таким образом, шар с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее R.

III. Закрепление нового материала

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, принадлежащие шару с центром в точке O и радиусом R? Какому неравенству удовлетворяют точки вне этого шара?

2. Через центр сферы провели плоскость. Докажите, что в сечении получится окружность.

3. Точка A расположена вне сферы радиуса R и удалена от центра O этой сферы на расстояние d ($d > R$). Чему равно наибольшее расстояние от точки A до точек данной сферы?

4*. Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

Ответы. **1.** $AO \leq R$; $AO > R$. **2.** Возьмем M – точку, принадлежащую перересечению плоскости и сферы, тогда все такие точки удовлетворяют равенству $MO=R$, где O, R – соответственно центр и радиус данной сферы, следовательно, точки M образуют окружность с центром в точке O и радиусом R. **3.** $d+R$. **4*.** Окружностью.

***IV. Повторение планиметрии**

1. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делится им на части 6 см и 12 см. Найдите расстояния от ее концов до диаметра и расстояние от центра окружности до хорды.

Ответ. 3 см, 6 см, $\sqrt{3}$ см.

2. Постройте окружность данного радиуса R, проходящую через данные точки A и B.

Построение. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AB. Проведем окружность с центром в точке A (или B) и радиусом R. Точки O и O_1 пересечения серединного перпендикуляра и окружности будут центрами окружностей, проходящих через данные точки A, B и имеющие радиус R. Если $R > \frac{AB}{2}$ - два решения; если $R = \frac{AB}{2}$ - одно решение, AB – диаметр искомой окружности; $R < \frac{AB}{2}$ - нет решений.

3. В окружности с центром O и радиусом R проведена хорда AB. На ее продолжении отложен отрезок $BC=R$. Через точку C проведена секущая CD, проходящая через центр O. Докажите, что угол AOD в три раза больше угла ACD.

Решение. Пусть $\angle ACO = \alpha$, тогда из равнобедренных треугольников BOC ($BO=BC=R$) и AOB ($AO=BO=R$) и свойства внешнего угла треугольника (он равен сумме внутренних углов треугольника, несмежных с ним) следует, что $\angle OAC = 2\alpha$ и $\angle AOD = \angle OAC+\angle ACO = 3\alpha$.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную теорию (п. 81 учебника)

2. Решить задачи.

1) Докажите, что диаметр сферы есть наибольшая хорда.

Решение. Возьмем произвольную хорду AB, не проходящую через центр O сферы, и через нее и точку O проведем плоскость, которая пересечет сферу по окружности (см. решение задачи 2 из III этапа данного урока); проведем в этой окружности диаметр CD (рис. 103), $CD\perp AB$, $AH=BH$, из прямоугольного треугольника BOH следует, что $BO>BH$, значит, $CD>AB$, т.е. диаметр является наибольшей хордой сферы.

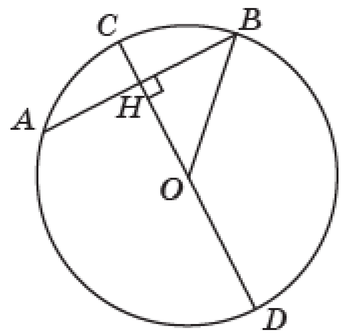


Рис. 103

2) Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри сферы, до точек сферы равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной сферы.

Ответ. 12 см.

3) Докажите, что если расстояние между центрами двух сфер меньше разности их радиусов, то эти сферы не имеют общих точек.

Решение аналогично, как для окружностей.

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «О форме и размерах Земли». Литература: Учебник, п. 81, рубрика «Исторические сведения».

82. Выпуклые многогранники
(один урок)

Урок 49

I. Упражнения

1. Сформулируйте определения того, что прямая пересекает сферу и прямая касается сферы.

2. Сколько касательных прямых к данной сфере можно провести через данную точку? Рассмотрите различные случаи расположения точки.

3. Докажите, что если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса сферы, то прямая и сфера не имеют общих точек.

4. Сформулируйте определение касательной плоскости к сфере.

5*. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку сферы и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, будет касательной к сфере.

Ответы. **1.** Прямая, имеющая со сферой две общие точки, называется пересекающей ее. Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной прямой. **2.** Если точка принадлежит сфере, можно провести бесконечно много касательных прямых; если точка лежит вне сферы – две касательные прямые; если точка лежит внутри сферы – ни одной. **4.** Плоскость, имеющая только одну общую точку, называется касательной плоскостью.

II. Индивидуальное задание

См. задание 3* из домашней работы (этап V урока 48).

III. Новый материал

Вопросы

- Какой многоугольник называется выпуклым?

- Как определить выпуклую фигуру, плоскую, пространственную?

Фигура в пространстве называется ***выпуклой***, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

Многогранник называется ***выпуклым***, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

- Какие: а) многоугольники на рисунке 104;

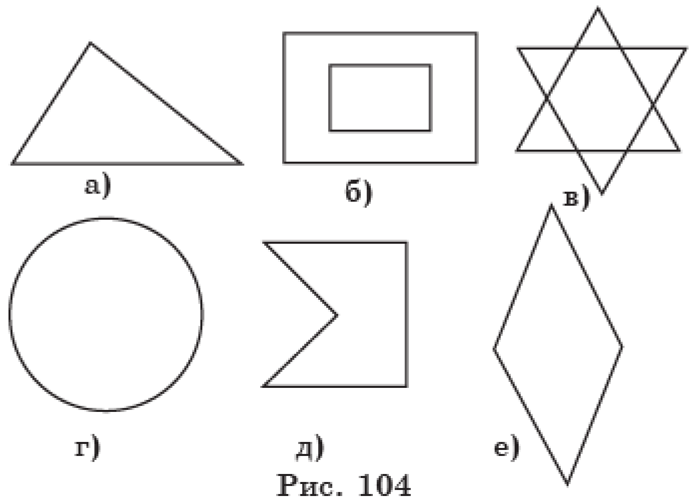


Рис. 104

б) многогранники на рисунке 105 являются выпуклыми и какие – невыпуклыми?

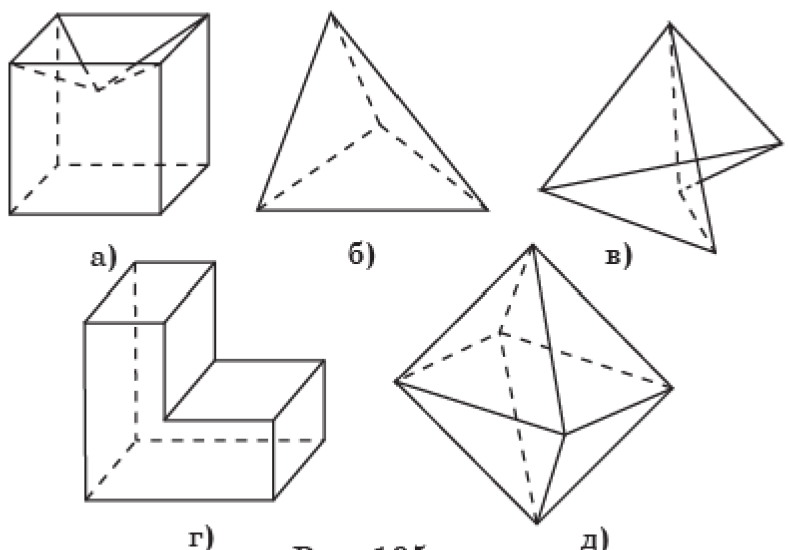


Рис. 105

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

- Обратите внимание на рисунок 105, в. На нем изображена невыпуклая четырехугольная пирамида, в основании которой лежит невыпуклый четырехугольник. Может ли в выпуклом многограннике быть невыпуклая грань?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Доказательство. Пусть F - какая-нибудь грань многогранника M, и точки A, B - точки, принадлежащие грани F (рис. 106). Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т.е. F - выпуклый многоугольник.

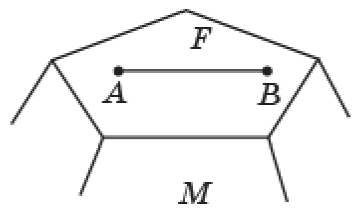


Рис. 106

Теорема. Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Доказательство. Пусть M - выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т.е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками (рис. 107). Заметим, что в силу выпуклости многогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M и все вместе составляют многогранник M.

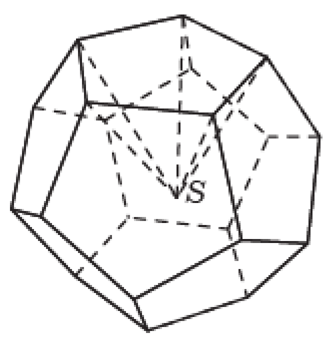


Рис. 107

IV. Закрепление нового материала

1. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

2. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.

3. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

4*. Может ли в многограннике быть 21 плоский угол?

Ответы. **1.** См. рисунок 95, на котором изображен протсранственный крест. **2.** У любой пирамиды все боковые грани – треугольники, значит, выпуклые многоугольники; если пирамида – выпуклая, то, согласно доказанной выше теоремы, все ее грани, в том числе и основание, являются выпуклыми многоугольниками; обратно, если все грани пирамиды – выпуклые многоугольники, то она является выпуклой фигурой, так как у невыпуклой пирамиды должно быть невыпуклое основание. **3.** Выше было доказано, что любой выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника, но каждая пирамида, в свою очередь, может быть разбита на конечное число треугольных пирамид, вершины которых совпадают с вершиной пирамиды, см. рисунок 108. **4*.** Нет, так как число плоских углов многогранника в два раза больше числа его ребер, т.е. является числом четным, а 21 – нечетное число.

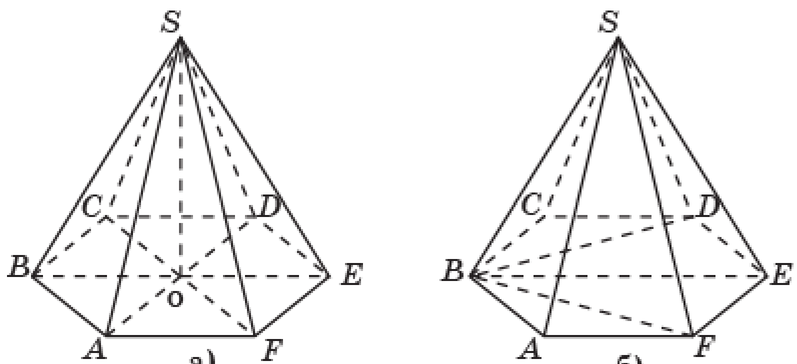


Рис. 108

***V. Повторение планиметрии**

1. Определите число осей симметрии для правильного n-угольника.

Ответ. Если $n=2k$, многоугольник имеет k осей симметрии, проходящих через середины противоположных сторон, и k осей – прямых, на которых лежат диагонали, проходящие через противоположные вершины; если $n=2k+1$, то многоугольник имеет n осей симметрии, каждая из которых проходит через вершину и середину противоположной стороны. Итак, правильный n-угольник имеет n осей симметрии.

2. Постройте ромб по стороне a и радиусу r вписанной окружности.

Построение. Строим прямоугольный треугольник ABH ($\angle H=90^\circ$) по гипотенузе $AB=a$ и катету $BH=2r$. Откладываем на луче AH отрезок $AD=AB=a$. На BD строим равнобедренный треугольник BCD, $BC=DC=a$. Задача имеет решение, если $a > 2r$.

3. В четырехугольнике *ABCD* при пересечении диагоналей в точке *O* образуются равные отрезки $AO=BO$ и $CO=DO$. Докажите, что в таком четырехугольнике две противоположные стороны параллельны.

Ответ. В равнобедренных треугольниках *AOB* и *COD* равны соответствующие углы, так как они имеют при общей вершине *O* вертикальные углы *AOB* и *COD*. Таким образом, $\angle BAO = \angle DCO$. Эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых *AB* и *CD* и их секущей *AC*, следовательно, $AB \| CD$ (по признаку параллельности двух прямых).

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 82 учебника).

2. Решить задачи.

1) Может ли выпуклый многогранник иметь 21 ребро? Приведите пример такого многогранника. Сколько у него плоских углов?

Ответ. Да, например, семиугольная призма, у нее 42 плоских угла.

2) Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.

Ответ. Доказательство аналогично решению задачи 2 этапа IV данного урока, только у призмы два основания и все боковые грани – параллелограммы, являющиеся выпуклыми четырехугольниками.

3) Верно ли, что объединение выпуклых многогранников является выпуклым многогранником?

Ответ. Нет.

4*) Может ли в многограннике быть 7 ребер?

Ответ. Нет: пусть в одной вершине сходится 3 ребра, остается 4 ребра, их нельзя распределить между тремя вершинами; тем более, если в одной вершине сходится 4 ребра, то на все остальные вершины остается только 3 ребра и т.д.

3*. Индивидуальное задание «О жизни и творчестве Л.Эйлера». Литература: Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учебн. для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2003, с.86; Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. – М.: Просвещение, 1983.

83. Теорема Эйлера для многогранников
(один урок)
Урок 50

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Многогранник называется выпуклым, если …
2. Примером выпуклой фигуры, но не многогранника, является …
3. Примером невыпуклого многогранника является …
4. Выпуклый многогранник может быть составлен из …
5. Пересечение выпуклых фигур является …
6. Призма является выпуклой, если …

Вариант 2

1. Фигура называется выпуклой, если …
2. Примером выпуклого многогранника является …
3. Примером невыпуклой фигуры является …
4. В выпуклом многограннике все грани …
5. Пересечение выпуклых многогранников …
6. Пирамида является выпуклой, если …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора

III. Индивидуальное задание «О жизни и творчестве Л.Эйлера».

См. задание 3* из домашней работы (этап VI урока 49).

IV. Новый материал

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой *В* - число вершин, *Р* - ребер и *Г* - граней данного многогранника:

Название многогранника	*В*	*Р*	*Г*
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5

Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	n+1	2n	n+1
n-угольная призма	2n	3n	n+2

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $В – Р + Г = 2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство $В – Р + Г = 2$, где $В$ - число вершин, $Р$ - число ребер и $Г$ - число граней данного многогранника.

Для доказательства этого равенства представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку, содержащую $Г' = Г - 1$ многоугольников (которые, по-прежнему, будем называть гранями), $В$ вершин и $Р$ ребер.

Для этой сетки, как было показано ранее (см. параграф 25 учебника), справедливо равенство $В – Р + Г' = 1$. Следовательно, для многогранника справедливо требуемое равенство.

V. Закрепление нового материала

1. Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

2. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

3. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если у него 12 ребер.

4*. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 сторон, и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

Ответы. **1.** Четыреугольная пирамида, треугольная бипирамида. **2.** Пусть $В$ – число вершин, $Р$ – число ребер, $Г$ – число граней данного многогранника. Тогда $2Р = 4Г$ и, следовательно, $Г = 6$. По формуле Эйлера $В – Р + Г = 2$, значит, $В = 2 + 12 – 6 = 8$. Примером такого многогранника является параллелепипед. **3.** У такого многогранника $2Р = 3В$ и, следовательно, $В = 8$. По формуле Эйлера $В – Р + Г = 2$, значит, $Г = 2 + 12$

– 8 = 6. Примером такого многогранника является четырехугольная призма.
4*. Обозначим число граней с 5, 6 и 7 сторонами соответственно через $Г_5$, $Г_6$ и $Г_7$, тогда $5Г_5 + 6Г_6 + 7Г_7 = 2Р$, отсюда $6(Г_5 + Г_6 + Г_7) - Г_5 + Г_7 = 2Р$, обозначив через $x = Г_5 - Г_7$, имеем $6Г - x = 2Р$, значит, $Р = \frac{6Г - x}{2}$; согласно условию, $3В = 2Р$, откуда $В = \frac{6Г - x}{3}$; по теореме Эйлера имеем $\frac{6Г - x}{3} - \frac{6Г - x}{2} + Г = 2$, решая это уравнение относительно x, получим $x = 12$.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 83 учебника).

2. Решить задачи.

1) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

Ответ. $4В = 2Р$, тогда $В = \frac{2Р}{4} = \frac{Р}{2}$ и $Г = 2 + Р - В$, откуда: а) $В = 6$, $Г = 8$, четырехугольная бипирамида (рис. 105, д); б) многогранник не существует.

2) Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней, и в каждой из них по 13 сторон?

Ответ. Нет, так как во всех гранях будет $13^2 = 169$ сторон, а это число должно быть в два раза больше числа ребер в многограннике, т. е. $2Р$, значит, быть четным числом.

3) Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

Ответ. Использовалась не выпуклость многогранника, а то, что его поверхность состоит из «одного куска», таким образом, теорема Эйлера справедлива и для некоторых невыпуклых многогранников, в частности, для невыпуклых призм и пирамид.

4*) В кубе вырезали одну грань и оставшиеся грани растянули на плоскости. Образовавшийся при этом граф изображен на рисунке 109.

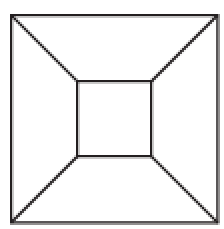


Рис. 109

Нарисуйте соответствующие графы: а) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид, у которых вырезается основание;

б) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм, у которых вырезается основание.

Ответ. См. соответственно рисуноки 110 и 111.

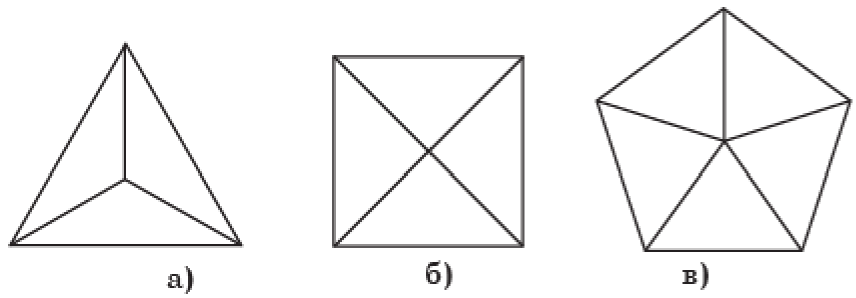


Рис. 110

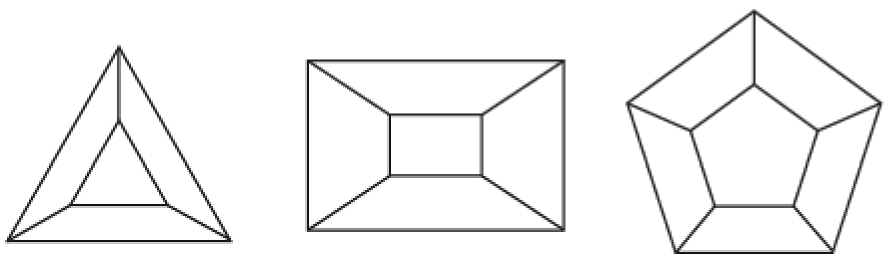


Рис. 111

84. Правильные многогранники
(два урока)

Урок 51

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Число вершин, ребер и граней четырехугольной пирамиды равно соответственно …

2. Число вершин, ребер и граней n-угольной призмы равно соответственно …

3. Для любого выпуклого многогранника имеет место …

4. К одной из граней выпуклого многогранника с B вершинами, P ребрами и Γ гранями приставили пирамиду. Число вершин, ребер и граней стало равно соответственно …

5. Примером невыпуклого многогранника, для которого справедлива теорема Эйлера, является …

Вариант 2

1. Число вершин, ребер и граней пятиугольной призмы равно соответственно …

2. Число вершин, ребер и граней n-угольной пирамиды равно соответственно …

3. Теорема Эйлера заключается в том, что …

4. От выпуклого многогранника с B вершинами, P ребрами и Γ гранями отсекли один из многогранных углов. Число вершин, ребер и граней стало равно соответственно …

5. Примером невыпуклого многогранника, у которого все грани – выпуклые многоугольники, является …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вспомним, какие многоугольники называются правильными.

Рассмотрим модели и изображения всех пяти типов правильных многогранников (рис. 112) и попытаемся дать определение правильного многогранника.

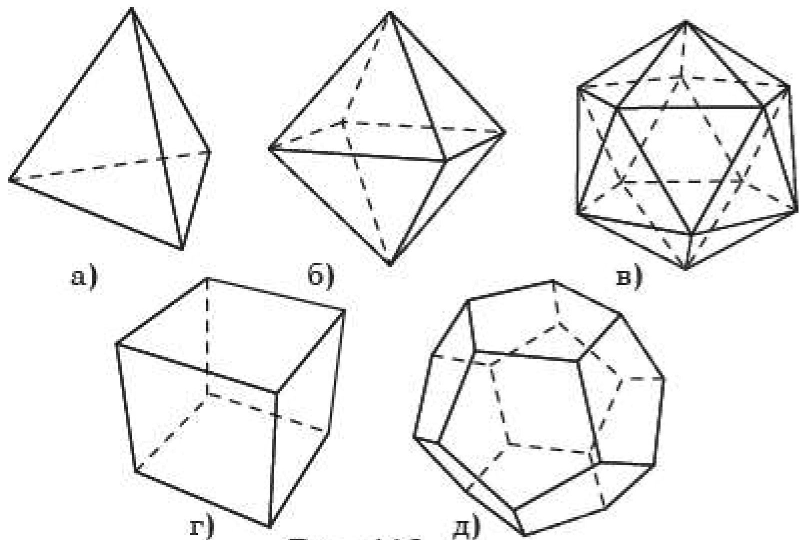


Рис. 112

Определение. Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и, прежде всего, те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 112, а). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также ***тетраэдром***, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 112, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется ***октаэдром***.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 112, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется ***икосаэдром***.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 112, г), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также ***гексаэдром***.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 112, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется ***додекаэдром***.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует. Таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга так, что вершины одного многогранника будут находиться в центрах граней другого. Такие многогранники называются **двойственными**. Например, куб и октаэдр являются двойственными многогранниками. Центры граней куба служат вершинами октаэдра и, наоборот, центры граней октаэдра являются вершинами куба (рис. 113). Аналогично, икосаэдр и додекаэдр являются двойственными многогранниками.

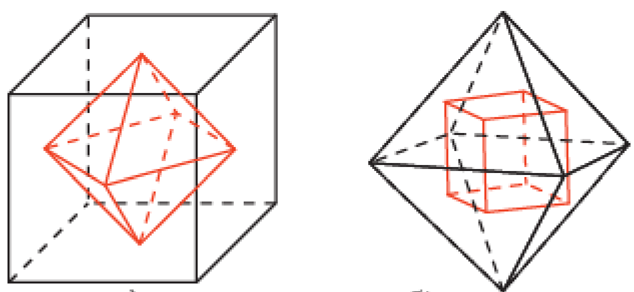


Рис. 113

Докажем, что существует не более пяти типов правильных многогранников. Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан правильный многогранник, гранями которого являются n -угольники, и в каждой вершине сходится m ребер. Ясно, что n и m больше или равны трем: $3 \leq n$ и $3 \leq m$. Обозначим, как и раньше, B - число вершин, P - число ребер и Γ - число граней этого многогранника. Тогда

$$\Gamma \cdot n = 2P;\ \Gamma = \frac{2P}{n};\ B \cdot m = 2P;\ B = \frac{2P}{m}.$$

По теореме Эйлера $B - P + \Gamma = 2$ и, следовательно,

$$\frac{2P}{m} - P + \frac{2P}{n} = 2.$$

Откуда $P = \frac{2nm}{2n+2m-nm}$. Из полученного равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство $\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} > 0$ или $\frac{2}{m} + \frac{2}{n} > 1$ (*).

Положим n=3, тогда из этого неравенства получим, что $m < 6$, аналогично, положив m=3, получим неравенство n<6. Таким образом, $3 \leq n < 6$ и $3 \leq m < 6$.

Найдем всевозможные значения n и m, удовлетворяющие найденному неравенству (*), и заполним следующую таблицу

$m \rightarrow$ $n \downarrow$	3	4	5
3	B=4, P=6, Γ=4 тетраэдр	B=6, P=12, Γ=8 октаэдр	B=12, P=30, Γ=20 икосаэдр
4	B=8, P=12, Γ=4 куб	Не существует	Не существует
5	B=20, P=30, Γ=12 додекаэдр	Не существует	Не существует

Например, значения n=3, m=3 удовлетворяют неравенству (*). Вычисляя значения P, B и Γ по приведенным выше формулам, получим P=6, B=4, Γ=4.

Значения n=4, m=4 не удовлетворяют неравенству (*) и, следовательно, соответствующего многогранника не существует.

- Учащиеся самостоятельно проверяют остальные случаи.

Из этой таблицы следует, что возможными правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечисленные выше.

IV. Закрепление нового материала

1. Представьте многогранник - бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением двух их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выберите вершины, которые являются вершинами правильного тетраэдра.

3. Изобразите правильный тетраэдр и многогранник, двойственный ему.

4*. Как из правильного тетраэдра получить правильный октаэдр?

Ответы. **1.** Соответствующий многогранник изображен на рисунке 114. Его гранями являются правильные треугольники. В двух его вершинах сходится по три треугольника и в трех – по четыре треугольника. У правильного многогранника в каждой вершине должно сходиться одинаковое число граней. Значит, этот многогранник не является правильным.

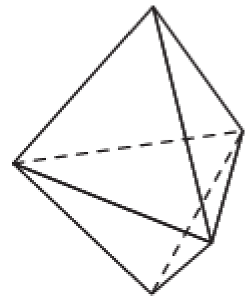


Рис. 114

2. Вершины B, D, A_1, C_1 или вершины B_1, D_1, A, C. **3.** Получится тетраэдр. **4*.** Середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами октаэдра.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 84 учебника).

2. Решить задачи.

1) Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) гексаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Ответ. а) B=4, P=6, $Г$=4; б) B=6, P=12, $Г$=8; в) B=8, P=12, $Г$=6; г) B=12, P=30, $Г$=20; д) B=20, P=30, $Г$=12;

2) Найдите сумму плоских углов: а) тетраэдра; б) октаэдра; в) куба; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

Ответ. а) 720°; б) 1440°; в) 2160°; г) 3600°; д) 6480°.

3) От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

Ответ. Октаэдр.

4*) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Ответ. Тетраэдр – 4 краски; октаэдр – 2; куб – 3; икосаэдр – 4; додекаэдр – 4.

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «История правильных многогранников». Литература: Учебник п. 84 рубрика «Исторические сведения».

Урок 52

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Правильным многогранником называется …
2. Поверхность октаэдра состоит из …
3. Поверхность додекаэдра состоит из …
4. Существует … типов топологически правильных многогранников.
5. Октаэдр и гексаэдр являются двойственными многогранниками, так как …

Вариант 2

1. Топологически правильным многогранником называется …
2. Поверхность гексаэдра состоит из …
3. Поверхность икосаэдра состоит из …
4. Существует … правильных многогранников.
5. Додекаэдр и икосаэдр являются двойственными многогранниками, так как …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Индивидуальное задание

Сообщение на тему «История правильных многогранников» (задание 3* из домашней работы, см. этап V урока 51).

***IV. Повторение планиметрии**

1. В правильном шестиугольнике проведена меньшая диагональ. Какую часть его площади составляет площадь отсеченного треугольника?

Ответ. Площадь отсеченного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, где a – сторона шестиугольника, его площадь равна $6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, таким образом, площадь отсеченного треугольника составлет $\frac{1}{6}$ площади шестиугольника.

2. Постройте квадрат, площадь которого равняется одной пятой площади данного квадрата.

Построение. Решение показано на рисунке 115, где *ABCD* – данный квадрат, *E, F, G, H* – середины его сторон. *K, L, M, N* – квадрат, площадь которого равна одной пятой площади квадрата *ABCD*.

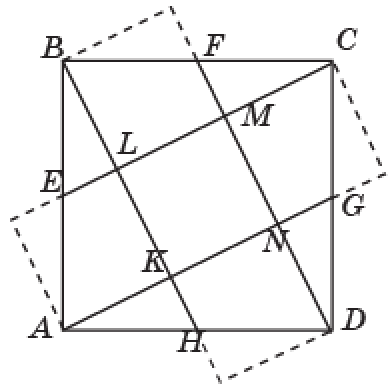


Рис. 115

3. Через центр O квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что отрезки прямых, заключенных внутри квадрата, равны.

Ответ. Для доказательства достаточно повернуть данный квадрат вокруг O на 90°. Тогда отрезок одной данной прямой перейдет в отрезок другой данной прямой. Таким образом, отрезки равны.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 84 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите площадь поверхности единичного правильного: а) тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра; г) гексаэдра; д*) додекаэдра.

Ответ. а) $\sqrt{3}$ кв. ед.; б) $2\sqrt{3}$ кв. ед.; в) $5\sqrt{3}$ кв. ед.; г) 6 кв. ед.; д*) на рисунке 116 правильный пятиугольник разделен на пять равных треугольников, где O – центр окружности, описанной около него, $OH \perp AE$, тогда $S_{ABCDE} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\text{ctg } 36^\circ = \frac{5}{4}\text{ctg } 36^\circ$, таким образом, площадь додекаэдра равна $\frac{125}{4}\text{ctg } 36^\circ = 15\text{ctg } 36^\circ$ кв.ед.

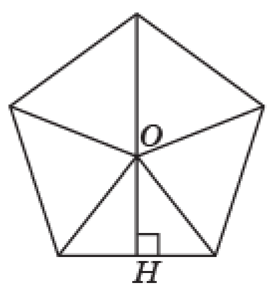


Рис. 116

2) Найдите ребро октаэдра, вершинами которого являются центры граней куба, если ребро куба равно 1.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Докажите, что пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Ответ. Пусть даны фигуры Φ_1 и Φ_2, пересечением которых будет фигура $\Phi=\Phi_1\cap\Phi_2$, рассмотрим произвольные точки A и B, принадлежащие фигуре Φ, тогда эти точки принадлежат фигуре Φ_1 и фигуре Φ_2, значит, отрезок $AB\subset\Phi_1$ и $AB\subset\Phi_2$, тогда $AB\subset\Phi$ и, следовательно, Φ – выпуклая фигура.

4*) В многограннике вырезали одну грань и оставшиеся грани растянули на плоскости. Нарисуйте соответствующие графы для правильных многогранников. Какому многограннику соответствует граф на рисунке 117?

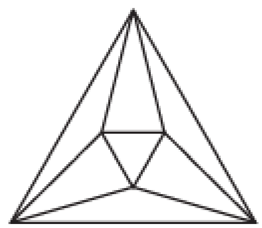


Рис. 117

Ответ. Октаэдру; см. рисунок 118: а) тетраэдр; б) гексаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр.

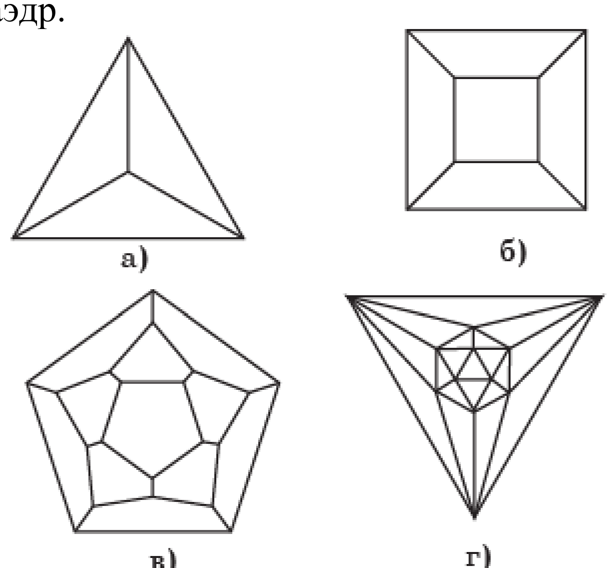


Рис. 118

3*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «А. Дюрер и его знаменитая гравюра «Меланхолия».

Альбрехт Дюрер (1471-1528) - знаменитый художник эпохи Возрождения, который очень увлекался геометрией. Например, в 1525 году он написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

В его известной гравюре "Меланхолия" (рис. 119) на переднем плане изображен додекаэдр.

Рис. 119

Сам художник никогда не объяснял, что изображено на ней, пользуясь методом «смотри сам». В эпоху Возрождения считалось, что именно меланхолический темперамент характерен для творческих людей, гениев, «чья бледность – печать глубоких мыслей». Гравюра посвящена геометрии и зодчеству. На переднем плане у ног Меланхолии, которая погружена в глубокое раздумье, атрибуты строительства и геометрии, здесь рубанок, линейка, в руках у нее циркуль, выделяются две геометрические фигуры – многогранник (додекаэдр) и шар. Искусствоведы говорят, что эта картина символизирует удивительную паузу человеческого разума перед небывалым расцветом наук и искусств эпохи Возрождения. Изображенная собака дремлет и должна скоро пробудиться, крылатый херувим приготовился записывать, а время, отмеряемое песочными часами, неумолимо идет. Вся сцена залита лунным светом, что означает надежду на то, что мрачное настроение скоро рассеется.

Есть еще одна любопытная деталь. В правом верхнем углу изображен магический квадрат четвертого порядка (сумма чисел, расположенных в каждой строке, в каждом столбце, в каждой диагонали равны). Астрологи эпохи Возрождения связывали такие квадраты с Юпитером, и они считались действенным средством от меланхолии, которой покровительствовал Сатурн (а Сатурн с Юпитером враждовали между собой). Изображенный квадрат сам по себе интересен, его очень легко построить. Сначала нужно заполнить таблицу 4×4 подряд числами от 1 до 16 (рис. 120, а), затем поменять местами числа, расположенные на диагоналях симметрично относительно центра (рис. 120, б).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

а)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

б)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

D)

Рис. 120

Магический квадрат готов, но Дюрер еще переставил местами второй и третий столбцы, это не повлияло на свойства квадрата, но средние клетки нижней строки стали указывать дату создания шедевра – 1514 год. Дюреровский квадрат относится к так называемым симметричным магическим квадратам: сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно его центра, равна 17. Это позволяет выделить в квадрате несколько групп из четырех чисел, сумма которых, помимо чисел в строках, столбцах, на диагоналях, тоже равна 34. Например, это четыре числа, расположенные в вершинах квадрата, четыре числа в его центре, четыре числа в каждом квадрате 2×2 в углах главного квадрата.

85. Полуправильные многогранники (один урок)

Урок 53

I. Устная работа

1) Перечислите правильные многогранники и объясните, почему они так названы.

2) Почему правильные многогранники называются также телами Платона?

3) Почему гранью правильного многогранника не может быть правильный шестиугольник?

4) Что можно сказать о числе граней и вершин пар многогранников: икосаэдр и додекаэдр, октаэдр и гексаэдр (куб)? Как называются пары этих многогранников? Какой многогранник будут двойственным к тетраэдру?

5) Сколько пар параллельных ребер имеет октаэдр?

6) Сколько пар параллельных граней в: а) гексаэдре; б) октаэдре?

Ответы. **1)** Названия правильных многогранников связаны с числом их граней. Так, тетраэдр имеет четыре грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдра" - грань, получается четырехгранник - тетраэдр. Гексаэдр (куб) имеет шесть граней, "гекса" - шесть; октаэдр - восьмигранник, "окто" - восемь; додекаэдр - двенадцатигранник, "додека" - двенадцать; наконец, икосаэдр - двадцатигранник, "икоси" - двадцать. Напомним, что для краткости речи мы опускаем слово "правильный". **2)** Правильнее эти многогранники было бы называть телами Пифагора, так как именно в пифагорейской школе они изучались. Позже учение пифагорейцев о правильных многогранника изложил в своем труде "Тимей" другой древнегреческий ученый, философ-идеалист Платон (427-347 гг. до н.э.). С тех пор правильные многогранники стали называться платоновыми телами (или телами Платона). **3)** Внутренний угол правильного шестиугольника равен 120°. В вершине многогранного угла должно сходиться не менее трех многоугольников, т. е. их сумма не меньше $360O$ ($120O \cdot 3=360O$), чего быть не может. Таким образом, гранями правильных многогранников не могут быть многоугольники с числом сторон больше пяти. **4)** У данных пар многогранников число граней одного равно числу вершин другого, и наоборот, число вершин первого равно числу граней второго. Взаимно-двойственные. Тетраэдр двойственен самому себе. **5)** 6. **6)** а) 3; б) 4.

II. Индивидуальное задание

Сообщение на тему «А. Дюрер и его знаменитая гравюра «Меланхолия» (задание 3*, урок 51, этап V).

III. Новый материал

На предыдущем уроке мы рассмотрели правильные многогранники, т.е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, чтобы гранями многогранника могли быть различные правильные многоугольники, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Демонстрируем учащимся рисунки 121-133.

Определение. ***Полуправильным*** многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

К полуправильным многогранникам относятся 13 многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед - это ***тела Архимеда***.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника.

Вопросы

- Как получен многогранник, изображенный на рисунке 121, из правильного тетраэдра?

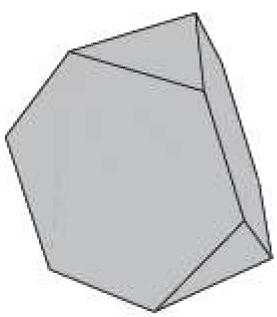


Рис. 121

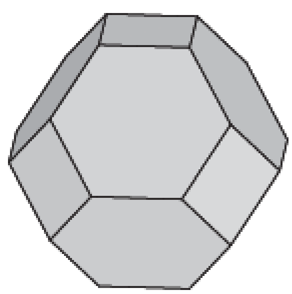


Рис. 122

Рис. 123

- Сколько у него граней и какого вида?

Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим ***усеченный тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 121). Из них четыре - правильные шестиугольники и четыре - правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Аналогично, если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усеченный октаэдр*** (рис. 122) и ***усеченный икосаэдр*** (рис. 123). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить ***усеченный куб*** (рис. 124) и ***усеченный додекаэдр*** (рис. 125).

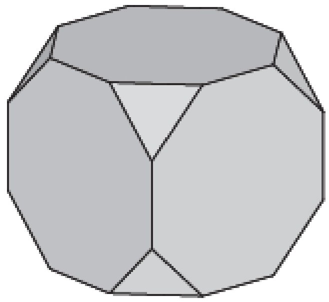


Рис. 124

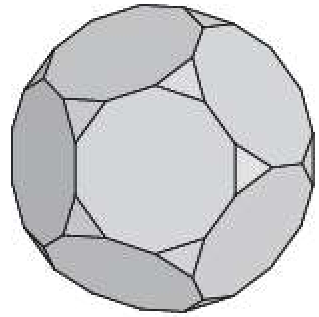


Рис. 125

Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется ***кубооктаэдром*** (рис. 126). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название - кубооктаэдр.

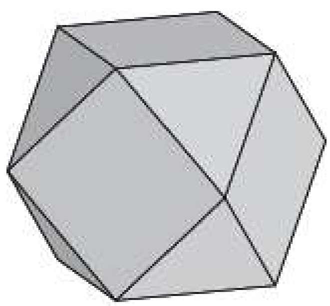


Рис. 126

Рис. 127

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 127). У него двадцать граней - правильные треугольники и двенадцать граней - правильные пятиугольники, т.е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 128) и ***усеченный икосододекаэдр*** (рис. 129).

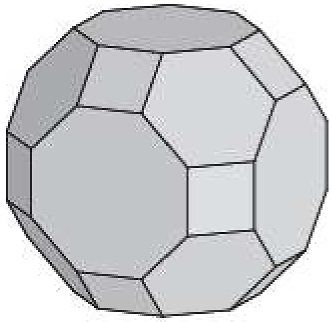


Рис. 128

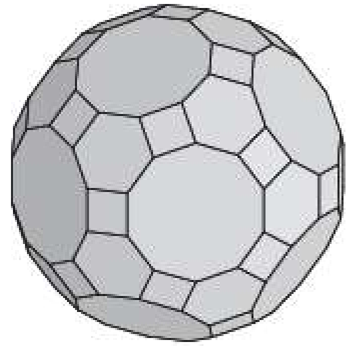


Рис. 129

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся - многогранники более сложного типа.

На рисунке 130 мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

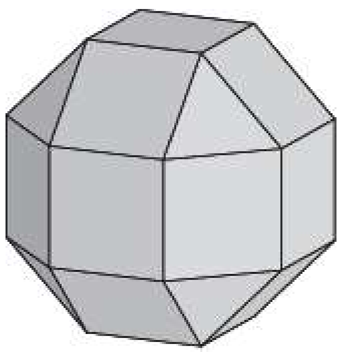


Рис. 130

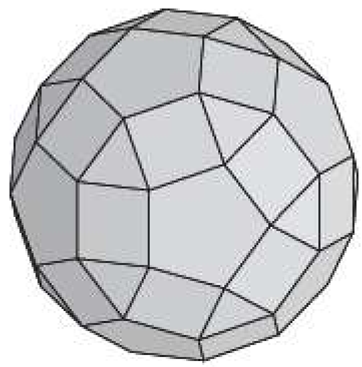


Рис. 131

На рисунке 131 изображен ***ромбоикосододекаэдр***, поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 132 и 133 представлены соответственно, так называемые, ***плосконосый*** (иногда называют ***курносый***) ***куб*** и ***плосконосый*** (***курносый***) ***додекаэдр***, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

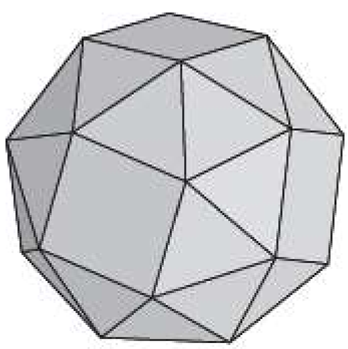


Рис. 132

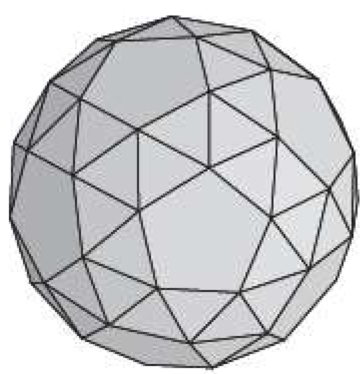
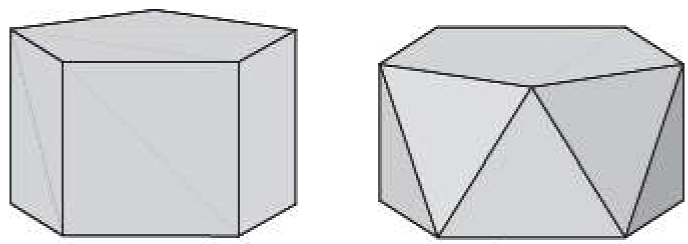


Рис. 133

Поверхности этих многогранников состоят из двух типов граней: квадраты и треугольники; пятиугольники и треугольники.

Кроме этих 13 тел Архимеда к полуправильным многогранникам можно отнести две бесконечные серии правильных n-угольных призм, все ребра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма на рисунке 134, а имеет своими гранями два правильных пятиугольника - основания призмы и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые ***антипризмы***.



а) б)

Рис. 134

На рисунке 134, б мы видим пятиугольную антипризму, полученную из пятиугольной призмы поворотом одного из оснований относительно другого на угол 36°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Модели полуправильных многогранников будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

IV. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте какие-нибудь тела Архимеда.

2. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, ребер и граней?

3. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный куб был полуправильным многогранником?

Ответы. **2.** Этот многогранник получается усечением икосаэдра (рис. 123). При этом вместо одной вершины икосаэдра получается пятиугольник с пятью вершинами. Следовательно, число вершин усеченного икосаэдра равно 512=60. Для нахождения числа граней заметим, что каждая грань икосаэдра дает грань усеченного икосаэдра и отсечение каждой вершины икосаэдра также дает грань усеченного икосаэдра. Следовательно, общее число граней будет равно 20+12=32, из них 20 – правильные шестиугольники и 12 – правильные пятиугольники. Для нахождения числа ребер можно воспользоваться формулой Эйлера $В–Р+Г=2$. Из нее следует, что число ребер икосододекаэдра равно 90. **3.** Пусть ребро куба равно 1, и от каждой вершины отсекается часть ребра, равная x (рис. 135).

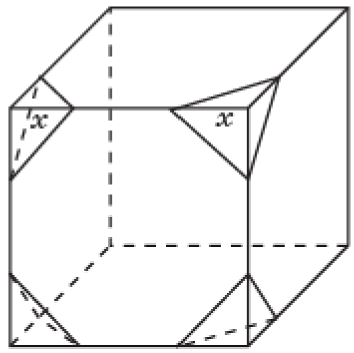


Рис. 135

Для того чтобы получившийся в результате усеченный многогранник был усеченным кубом, нужно, чтобы оставшиеся от граней куба многоугольники были правильными восьмиугольниками. Это будет в случае, если $1–2x = \sqrt{2}x$. Решая это уравнение, находим $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $x = 1\text{-}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

***V. Повторение планиметрии**

1. Площади подобных треугольников относятся как a:b, а разность их соответствующих медиан равна m. Найдите данные медианы.

Ответ. Отношение данных медиан равно $\sqrt{a}$:$\sqrt{b}$. Пусть для определенности $a > b$. Обозначив медианы через $\sqrt{a}x$ и $\sqrt{b}x$, получим $(\sqrt{a}\text{-}\sqrt{b})x = m$, $x = \frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. Таким образом, медианы равны $\frac{m\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ и $\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

2. Постройте прямоугольник по стороне a и сумме диагоналей d.

Построение. Построим прямоугольный треугольник ABD ($\angle A$=90º) по катету AB=a и гипотенузе BD=$\frac{d}{2}$. Из точек B и D проведем прямые, соответственно параллельные прямым AD и AB. Точку пересечения этих прямых назовем C, $ABCD$ – искомый прямоугольник. Задача имеет решение, если $a < \frac{d}{2}$.

3. Докажите равенство двух прямоугольных треугольников, если катет и проведенная к нему медиана одного треугольника соответственно равны катету и проведенной к нему медиане другого треугольника.

Ответ. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC ($\angle C$=90º) и $A_1B_1C_1$ ($\angle C_1$=90º) AC=A_1C_1 и BM=B_1M_1, где M и M_1 – середины соответственно сторон AC и A_1C_1. Прямоугольные треугольники BCM и $B_1C_1M_1$ равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, BC=B_1C_1. Тогда прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 85 учебника).

2. Решить задачи.

1) Найдите число вершин, ребер и граней: а) усеченного октаэдра; б) усеченного додекаэдра.

Ответ. а) *В*=24, *Р*=36, *Г*=14; б) *В*=60, *Р*=90, *Г*=32.

2) Приведите пример многогранника, не являющегося полуправильным, гранями которого являются правильные многоугольники.

Ответ. Правильная пирамида (отличная от правильного тетраэдра), имеющая боковыми гранями правильные треугольники.

3) Кубооктаэдр получен усечением куба. Найдите его ребро, если ребро куба равно 1.

Ответ. Отсекающие плоскости проходят через середины ребер куба, выходящих из одной вершины, следовательно, ребро кубооктаэдра равно половине диагонали грани куба (рис. 136, *ABCD* – грань куба, *EFGH* – грань кубооктаэдра), т. е. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

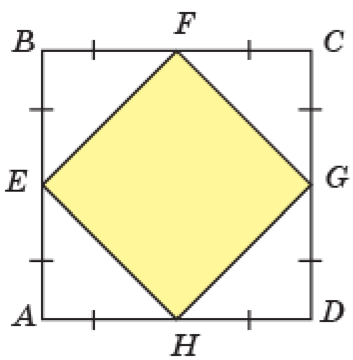


Рис. 136

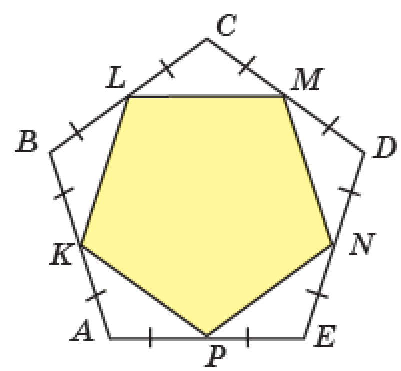


Рис. 137

4*) Икосододекаэдр получен усечением додекаэдра. Найдите его ребро, если ребро додекаэдра равно 1.

Ответ. Отсекающие плоскости проходят через середины ребер додекаэдра, выходящих из одной вершины. Обратимся к рисунку 137, на котором изображена грань *ABCDE* додекаэдра и грань *KLMNP* икосододекаэдра. Следовательно, сторона икосододекаэдра, например *LM*, равна основанию равнобедренного треугольника *CLM*, который является золотым, у него отношение боковой стороны к основанию равно золотому отношению (см. п. 48* учебника). Таким образом, $\frac{CL}{LM} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $CL=\frac{1}{2}$, значит, $LM=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3*. Индивидуальное задание «Жизнь и творчество Архимеда». Литература: Учебник, п. 85 рубрика «Исторические сведения».

86. Звездчатые многогранники
(один урок)

Урок 54

I. Устная работа

1) Какие грани и сколько имеют: а) усеченный тетраэдр; б) усеченный куб?

2) Назовите какие-нибедь полуправильные многогранники, у которых имеются: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

3) Почему правильная n-угольная призма (n = 3, 4, 5...) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником?

4) Какую часть ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником?

5) Какую часть ребер октаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный октаэдр был полуправильным многогранником?

6) Какую часть ребер икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный икосаэдр был полуправильным многогранником?

7) На рисунке 138 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией.

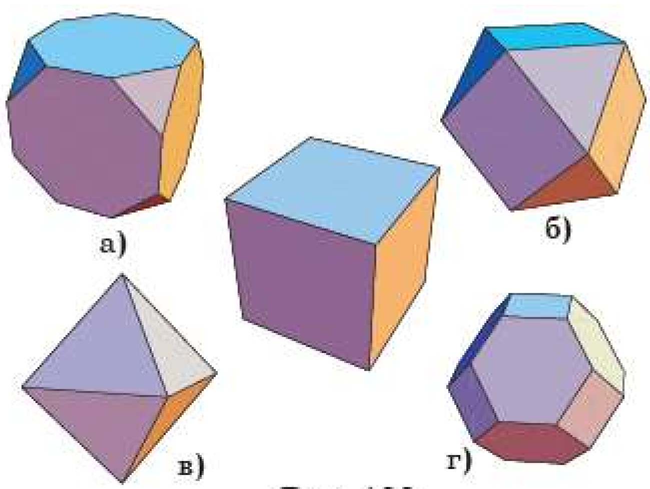


Рис. 138

Что это за операция? Как называются все изображенные многогранники?

Ответы. **1)** *Г*=8, 4 – правильных треугольника и 4 – правильных шестиугольника; б) *Г*=14, 8 – правильных восьмиугольника и 6 – правильных треугольника. **2)** а) Усеченный тетраэдр, усеченный куб; б) кубооктаэдр, икосододекаэдр; в) плосконосый (курносый) куб, плосконосый (курносый) додекаэдр. **3)** Выпуклый многогранник, у которого все грани – правильные многогранники двух типов и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. **4)**, **5)**, **6)** $\frac{1}{3}$. **7)** Операция усечения вершин: а) усеченный куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усеченный октаэдр.

II. Индивидуальное задание

Сообщение на тему «Жизнь и творчество Архимеда» (домашнее задание, этап V урока 53).

III. Новый материал

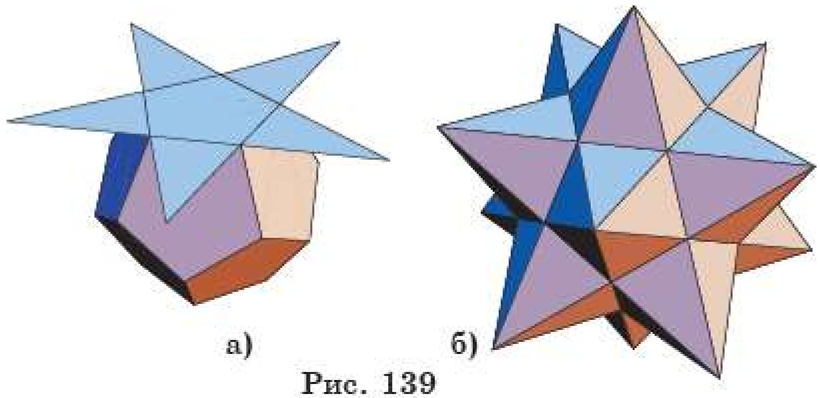
Показываем модель какого-нибудь правильного звездчатого многогранника, например, самого простого - малого звездчатого додекаэдра (рис. 139, б) и устанавливаем сходство и различие с правильными многогранниками.

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые ***правильные звездчатые многогранники***. Они получаются из правильных многогранников продолжением граней или ребер аналогично тому, как правильные звездчатые многоугольники получаются продолжением сторон правильных многоугольников.

Первые два правильных звездчатых многогранника были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил французский математик и механик Л. Пуансо (1777-1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются ***телами Кеплера-Пуансо***.

В работе "О многоугольниках и многогранниках" (1810) Пуансо описал четыре правильных звездчатых многогранника, но вопрос о существовании других таких многогранников оставался открытым. Ответ на него был дан год спустя, в 1811 году, французским математиком О. Коши (1789-1857). В работе "Исследование о многогранниках" он доказал, что других правильных звездчатых многогранников не существует.

Рассмотрим вопрос о том, из каких правильных многогранников можно получить правильные звездчатые многогранники. Из тетраэдра, куба и октаэдра правильные звездчатые многогранники не получаются. Возьмем додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 139, а), и в результате возникает многогранник, который называется ***малым звездчатым додекаэдром*** (рис. 139, б).



а) б)

Рис. 139

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится ***большой додекаэдр*** (рис. 140). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается ***большой звездчатый додекаэдр*** (рис. 141).

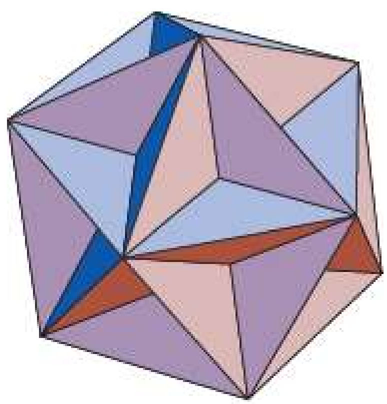


Рис. 140

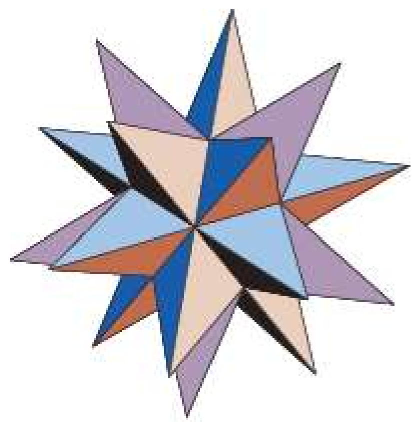


Рис. 141

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней правильного икосаэдра получается ***большой икосаэдр*** (рис. 142).

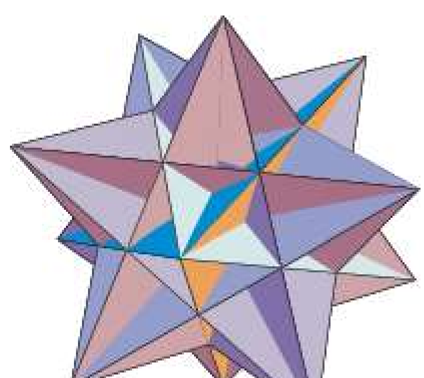


Рис. 142

Таким образом, существуют 4 типа правильных звездчатых многогранников.

Кроме правильных звездчатых многогранников существуют и другие, некоторые из них представлены в учебнике (см. п. 86).

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки - это звездчатые многогранники (рис. 146). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

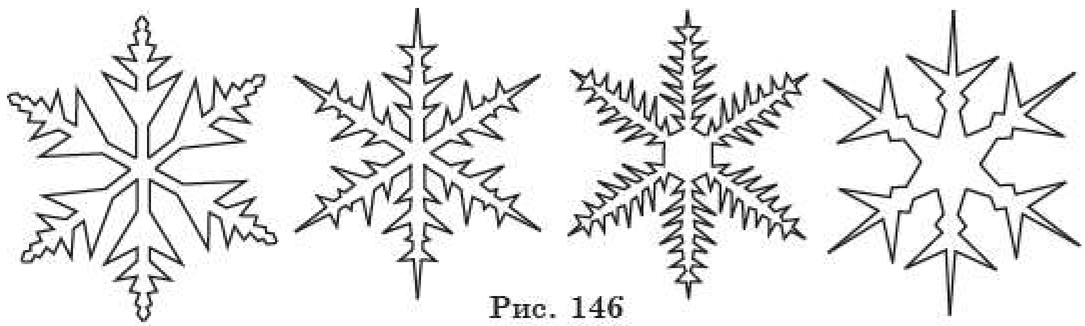


Рис. 146

IV. Закрепление нового материала

1. На рисунке 147 изображен многогранник, представляющий из себя соединение куба и октаэдра. Как его можно получить из кубооктаэдра?

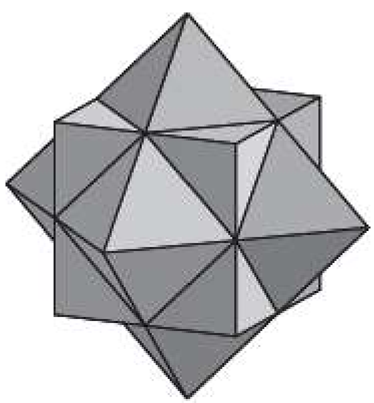


Рис. 147

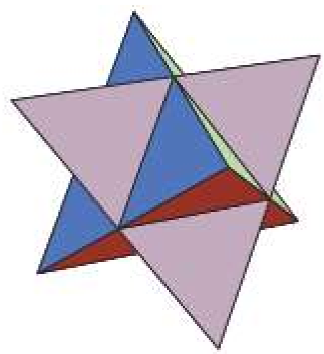


Рис. 148

2. На рисунке 148 изображен многогранник, называемый звездчатым октаэдром. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И.Кеплером и назван им "***Stella octangula***" - звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым?

3. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?

4. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров?

Ответы. **1.** На гранях кубооктаэдра достраиваются соответственно треугольные и четырехугольные пирамиды. **2.** Нет, он не получается ни из одного правильного многогранника путем продолжения его граней или ребер. **3.** Вписать в куб $A \ldots D_1$ тетраэдры с вершинами ACB_1D_1 и A_1B_1CD, их объединение будет искомым многогранником. **4.** Октаэдром.

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 86 учебника).

2. Решить задачи.

1) Звездчатый октаэдр может быть получен добавлением правильных треугольных пирамид к граням октаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра октаэдра равны 1?

Ответ. На рисунке 149 изображен октаэдр, вписанный в куб (его вершины находятся в центрах граней куба), и выделена одна из искомых треугольных пирамид, она названа D_1O_1EF, это правильный тетраэдр, ребро которого равно ребру октаэдра, т. е. в данном случае 1.

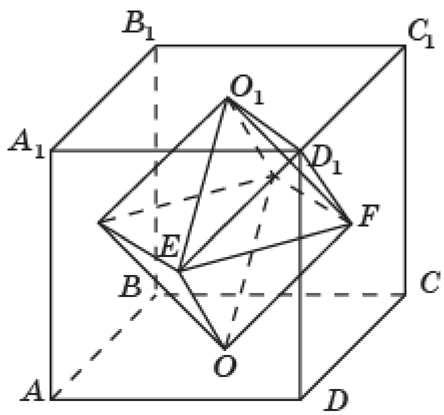


Рис. 149

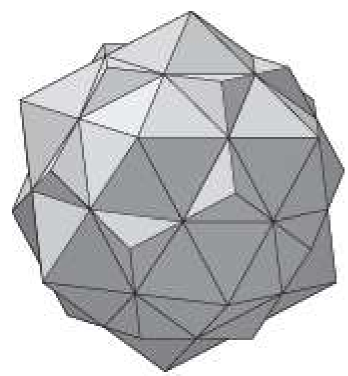


Рис. 150

2) Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?

Ответ. *В*=12 (выпуклых пятигранных углов), *Р*=30, *Г*=12 (звездчатых пятиугольников).

3) На рисунке 150 изображен многогранник, который получен соединением двух равных правильных многогранников. Каких?

Ответ. Двух додекаэдров.

4*) Малый звездчатый додекаэдр может быть получен добавлением правильных пятиугольных пирамид к граням додекаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра додекаэдра равны 1?

Ответ. На рисунке 151 показана одна из граней *ABCDE* правильного додекаэдра, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* – вершины малого звездчатого додекаэдра, ребро которого равно, например, *AO*. Из золотого треугольника (см. п. 48* учебника) AOE имеем $\frac{AE}{AO} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, откуда, учитывая, что AE=1, имеем $AO = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

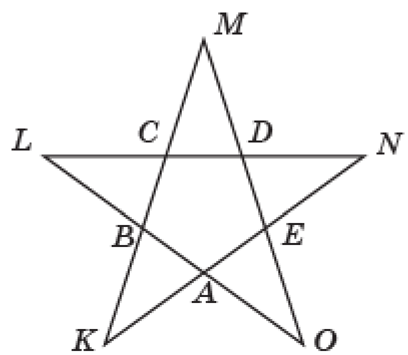


Рис. 151

5) Принести на следующий урок цветной картон, ножницы, клей и т. п.

87. Моделирование многогранников
(два урока)

Урок 55

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Полуправильные многогранники называются также …
2. К полуправильным многогранникам относятся n-угольные призмы, которые …
3. Гранями усеченного тетраэдра являются …
4. Число ребер кубооктаэдра равно …
5. Число вершин усеченного икосаэдра равно …
6. Телами Платона называются …

Вариант 2

1. Полуправильным многогранником называется …
2. К полуправильным многогранникам относятся n-угольные антипризмы, это многогранники …
3. Гранями усеченного гексаэдра являются …
4. Число ребер икосододекаэдра равно …
5. Число вершин усеченного додекаэдра равно …
6. Телами Архимеда называются …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется ***разверткой*** многогранника.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 152 изображены развертки с клапанами всех правильных многогранников.

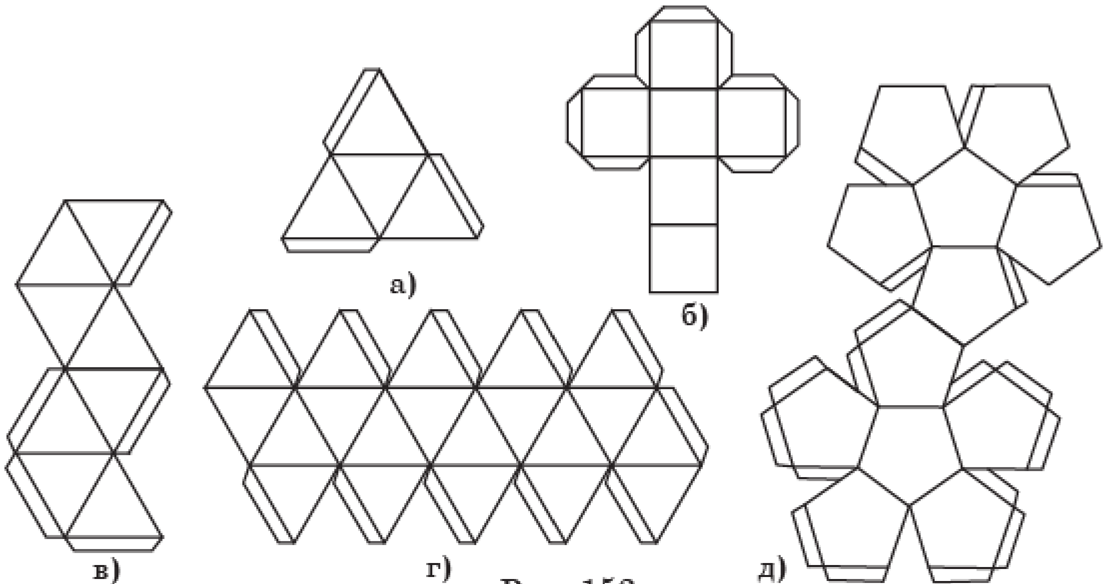


Рис. 152

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью ***геометрического конструктора***, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 153) и резиновых колечек - основной крепежной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 153.

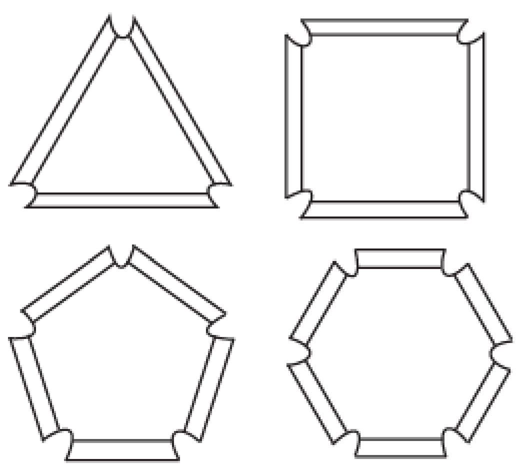


Рис. 153

Замечание. Резиновые колечки хорошо нарезать из велисипедной камеры, тогда длина стороны многоугольников граней нужно взять 7 см.

Демонстрируем учащимся готовые модели правильных, полуправильных, звездчатых многогранников, изготовленных из разверток и геометрического конструктора.

IV. Лабораторная работа

Каждому ученику раздается заготовка правильного пятиугольника. Будем делать модель малого звездчатого додекаэдра (рис. 139). Ее очень просто изготовить из модели правильного додекаэдра.

Таким образом, сначала нужно изготовить модель правильного додекаэдра. Ее можно склеить из развертки. На рисунке 152, г) представлена развертка правильного додекаэдра с нарисованными клапанами для склеивания.

После того как модель правильного додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными ребру правильного додекаэда (рис. 154) и наклеить их на его грани. Модель малого звездчатого додекаэдра готова.

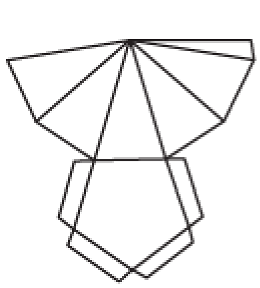


Рис. 154

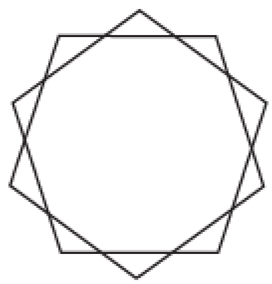


Рис. 155

Замечание. В классе сделаем развертки правильного додекаэдра и пирамиды, закончим изготовление малого звездчатого додекаэдра дома.

Можно воспользоваться другим, очень интересным и необычным способом изготовления правильного додекаэдра, который заключается в следующем. Развертку правильного додекаэдра необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда (рис. 155). Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. Опустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель правильного додекаэдра.

V. Задание на дом

1. Закончить изготовление модели малого звездчатого додекаэдра.

2. Изготовить из геометрического конструктора какой-нибудь правильный и какой-нибудь полуправильный многогранники.

3. Сложите из квадрата пирамиду.
Ответ. См. рисунок 156.

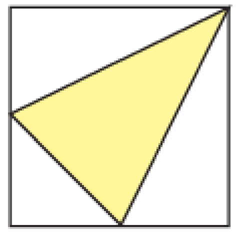


Рис. 156

Урок 56

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Развертку многогранника можно получить, если …
2. Примером развертки правильного тетраэдра может служить, например, …
3. Примером плоской фигуры, состоящей из шести квадратов, но не являющейся разверткой куба, является …
4. Примером развертки правильной треугольной призмы является …
5. Геометрический конструктор состоит из …

Вариант 2

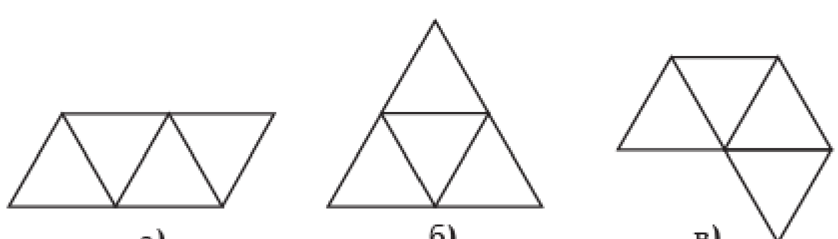
1. Модель многогранника можно изготовить из его развертки путем …
2. Примером развертки куба может служить следующая фигура …
3. Примером плоской фигуры, состоящей из четырех правильных треугольников и не являющейся разверткой тетраэдра является такая …
4. Примером развертки правильной четырехугольной пирамиды является …
5. Один из способов изготовления модели правильного додекаэдра состоит в том, что …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение задач

1. На рисунке 157 найдите развертки тетраэдра.



а) б) в)

Рис. 157

Ответ. а), б).

2. На рисунке 158 найдите все развертки куба.

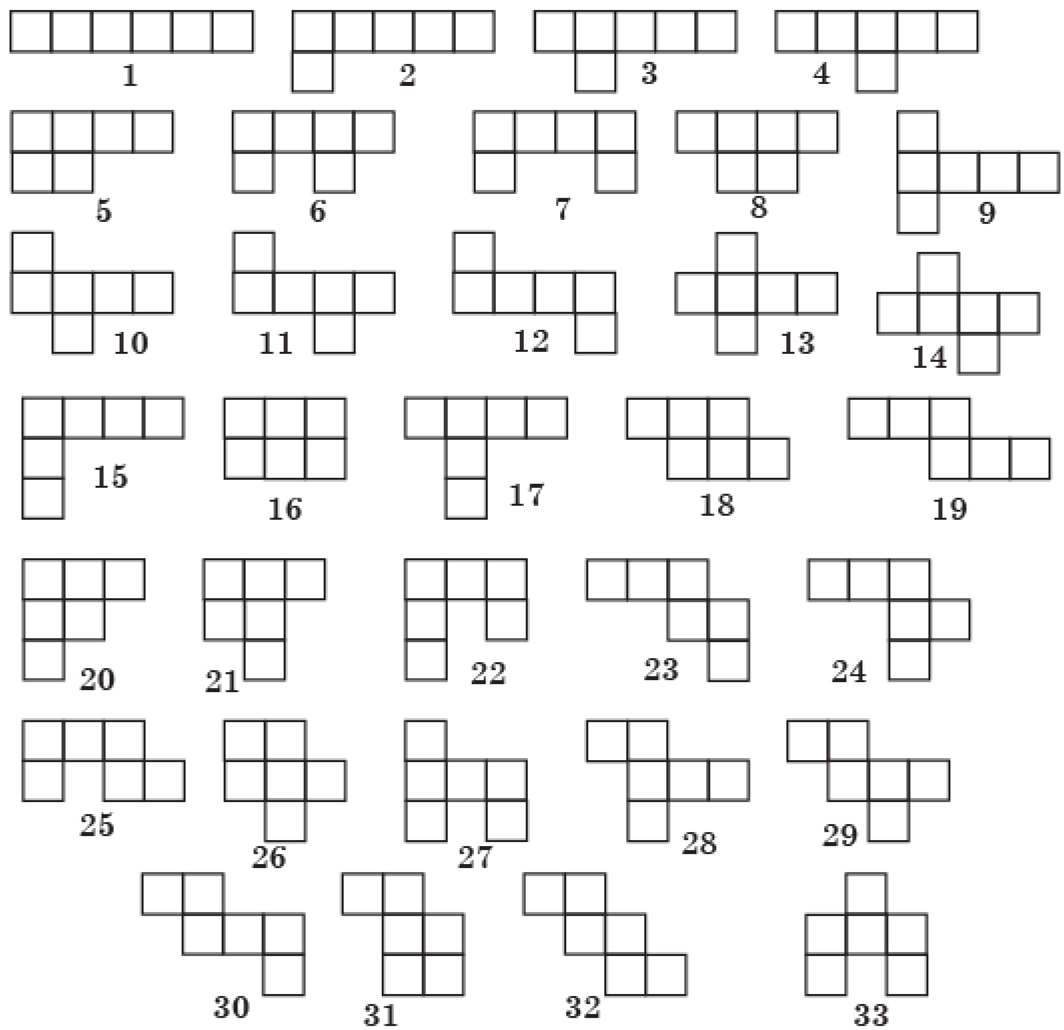


Рис. 158

Ответ. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 28, 29, 30, 32.

3. Как оклеить поверхность единичного куба 12 квадратами, не разрезая их, если площадь одного квадрата равна 0,5 кв.ед.?

Ответ. См. рисунок 159.

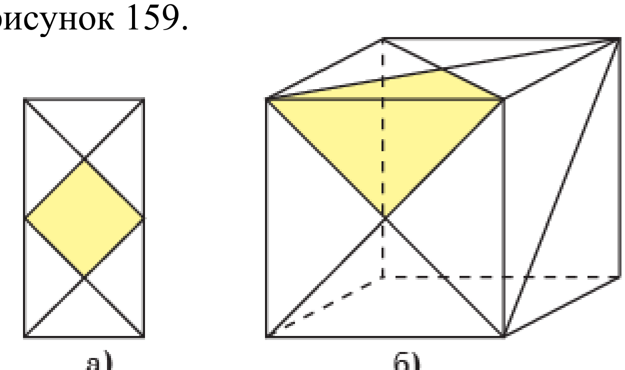


Рис. 159

4*. Как оклеить поверхность куба 12 греческими крестами, не разрезая их, если площадь одного греческого креста равна площади одной грани куба?

Ответ. См. рисунок 160, решение основывается на задаче 2 этапа IV урока 52, рисунок 115.

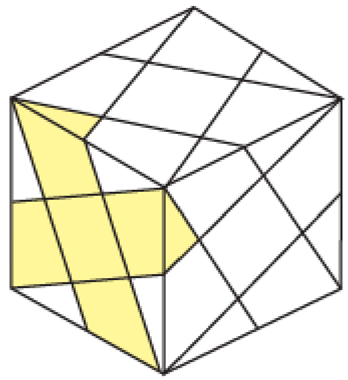


Рис. 160

***IV. Повторение планиметрии**

1. Точка *E* делит отрезок *CD* в отношении 3:5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{EC}$, если $\overrightarrow{CD}$ (-1, 4).

Ответ. $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{CE} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$. Таким образом, $\overrightarrow{EC}$ $(\frac{3}{8}, -1\frac{1}{2})$.

2. Постройте треугольник, зная середины его сторон.

Построение. Зная середины сторон треугольника, построим треугольник, образованный средними линиями искомого треугольника. Через каждую вершину проведем прямую, параллельную противоположной стороне и отложим ее длину в обе стороны. Полученные три точки являются вершинами искомого треугольника.

3. В параллелограмме *ABCD* проведены диагональ *AC* и отрезки *BE* и *BF* (рис. 161), где *E* и *F* – середины сторон соответственно *AD* и *CD*. Докажите, что площадь закрашенной фигуры в два раза больше незакрашенной.

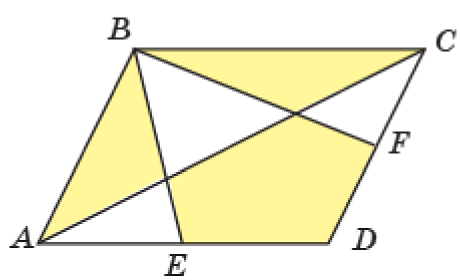


Рис. 161

Ответ. В параллелограмме *ABCD* проведем диагональ *BD*, *O* – точка пересечения диагоналей, точки *M* и *K* – точки пересечения медиан соответственно треугольников *ABD* и *CDB*. Проведем *DM* и *DK*. Тогда параллелограмм разобьется на 12 равновеликих треугольников (треугольники ABD и CDB равны и каждый своими медианами разбивается на шесть равновеликих треугольников). Площадь закрашенной фигуры равна площади восьми треугольников, а незакрашенной - только четырех, откуда следует требуемое условие.

V. Задание на дом

1. На рисунке 162 найдите все развертки октаэдра.

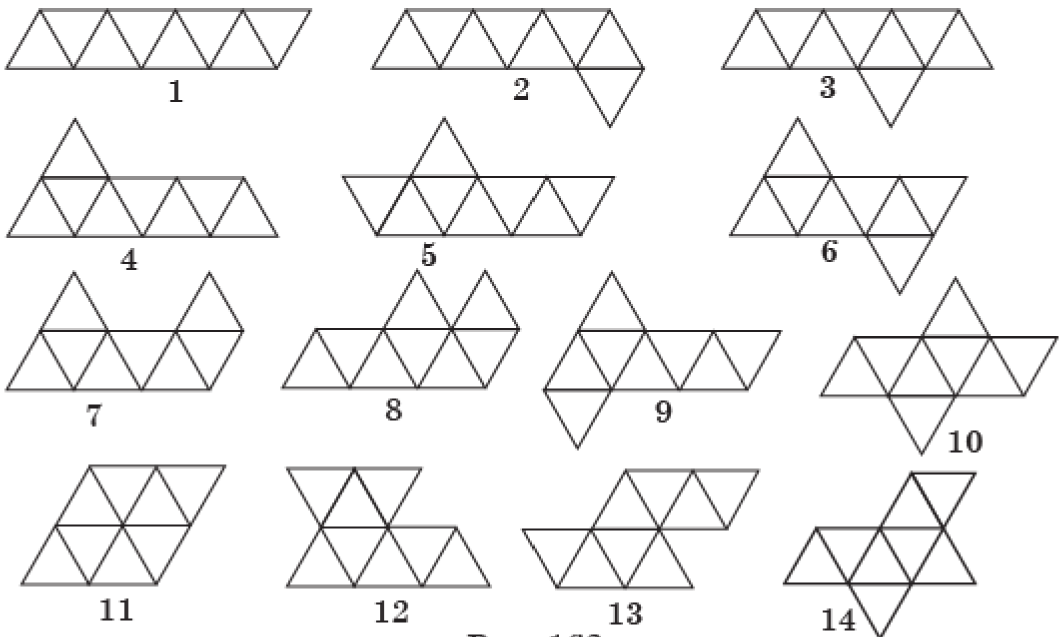


Рис. 162

Ответ. 6, 9, 10, 14.

2. На рисунке 163 изображен футбольный мяч. Поверхность какого многогранника он напоминает? Сколько у этого многогранника вершин, ребер и граней (грани какого типа)?

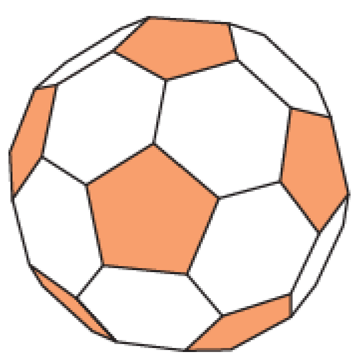


Рис. 163

Ответ. Усеченный икосаэдр; *В*=60, *Р*=90, *Г*=32, из них 20 – правильный шестиугольников и 12 – правильных пятиугольников.

3. Сделайте развертку усеченного тетраэдра и изготовьте из нее модель этого многогранника.

Ответ. Развертка (без клапанов) усеченного тетраэдра представлена на рисунке 164.

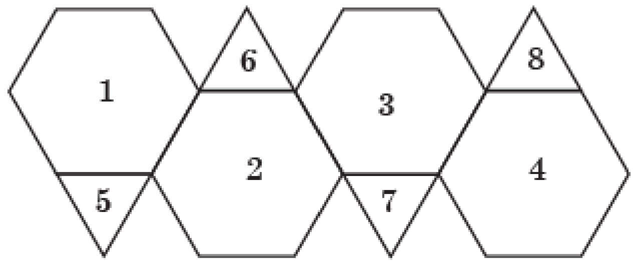


Рис. 164

4*. Как оклеить поверхность куба 12 равными прямоугольниками так, чтобы каждый из них граничил (по отрезку) ровно с пятью прямоугольниками, если площадь одного прямоугольника равна половине площади одной грани куба?

Ответ. См. рисунок 165: каждая видимая на рисунке грань оклеена двумя прямоугольниками, а каждая невидимая грань оклеивается точно так же, как противоположная ей видимая грань.

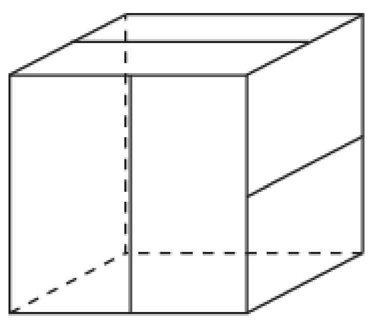


Рис. 165

5*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «О жизни и творчестве основателя геометрической кристаллографии Е. С. Федорова». Литература: учебник, п. 88.

6*. Индивидуальное задание. Сообщение на тему «Кристалл граната». Литература: Учебник, п. 88.

88. Кристаллы – природные многогранники (один урок)

Урок 57

I. Устная работа

1) На рисунке 166 дана развертка куба. Разверткой каких кубов, изображенных на рисунке 167, она является?

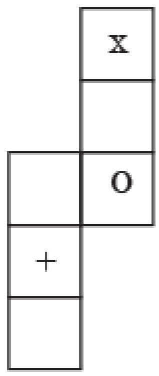


Рис. 166

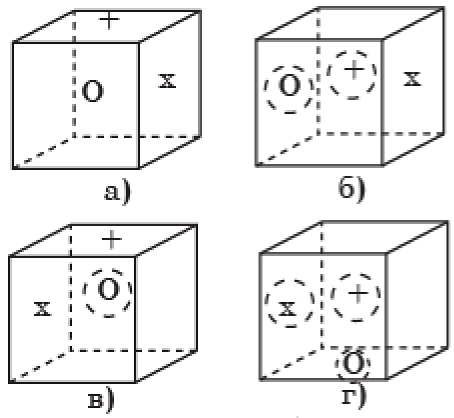


Рис. 167

2) На рисунке 168 найдите по три разверки одинаково раскрашенных кубов.

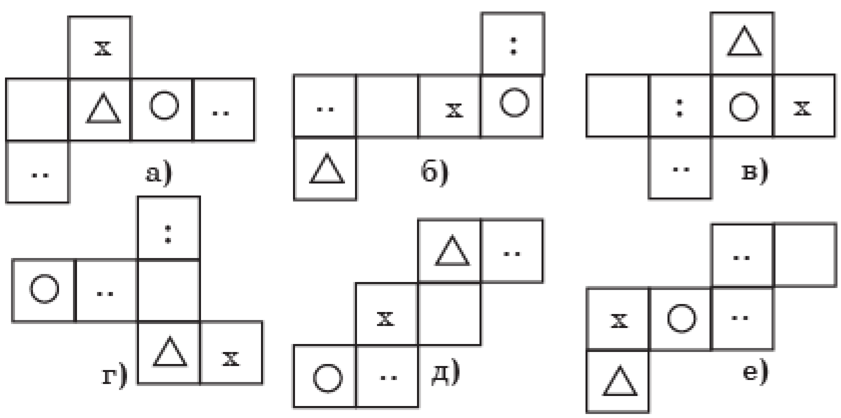


Рис. 168

3) Может ли параллелограмм быть разверткой боковой поверхности наклонного параллелепипеда?

4) Может ли треугольник быть разверткой боковой поверхности правильной треугольной пирамиды?

5) На рисунке 169 дана развертка правильной четырехугольной пирамиды, некоторые части которой заштрихованы. Разверткой каких пирамид, изображенных на рисунке 170, она является?

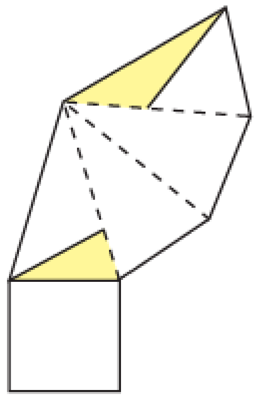
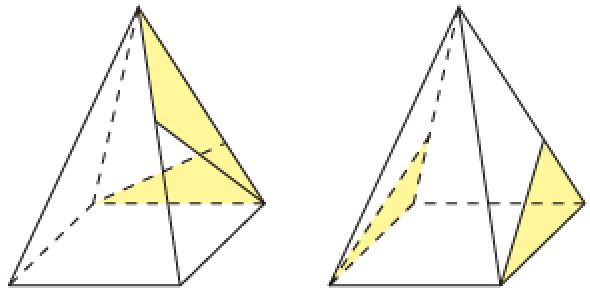


Рис. 169



а) б)

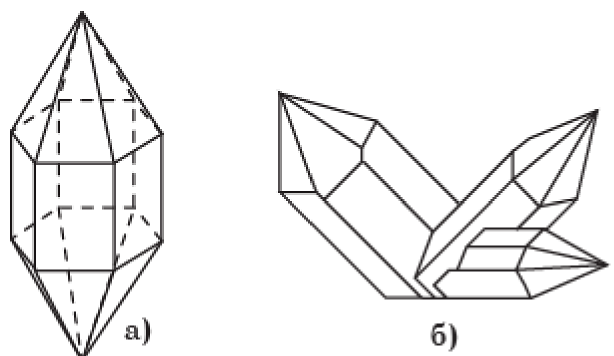
Рис. 170

Замечание. Следует специально заготовить данные к задачам развертки.

Ответы. **1)** б), в). **2)** а), в), д) и б), г), е). **3)** В общем виде нет. **4)** Нет. **5)** б).

II. Новый материал

Показываем различные кристаллы, учащиесяубеждаются сами в том, что многие формы многогранников изобрел не человек, а их создала природа в виде кристаллов (рис. 171).



а) б)

Рис. 171

Например, кристаллы ***поваренной соли*** имеют форму куба, кристаллы **льда** и ***горного хрусталя*** (***кварца***) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды.

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

Пирит - куб или октаэдр, иногда встречается в виде усеченного октаэдра.

Удивительное сходство кристаллов льда и горного хрусталя было подмечено очень давно. В древности и в средние века думали, что кристаллы льда и горного хрусталя – одно и то же, только лед замерзает у нас на глазах, а горный хрусталь лишь при особенно сильном морозе. Само слово "кристалл" происходит от греческого "кристаллос", т. е. лед.

В древности кристаллам приписывались всякие необыкновенные свойства. Считали, например, что кристалл аметиста предохраняет от пьянства и навевает счастливые сны, изумруд спасает мореплавателей от бурь, сапфир помогает при укусах скорпионов, алмаз бережет от болезней, топаз приносит счастье в ноябре, а гранат в январе и т.д.

Конечно, раньше при недостаточном уровне развития науки невозможно было понять, как возникли кристаллы, почему они имеют форму многогранников, чем определяются их свойства.

Внешняя форма кристаллов – это лишь проявление их внутренних физических и химических свойств. С некоторыми из них вы знакомитесь на уроках физики и химии. Они объясняются особенностями геометрического строения кристаллов, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Первые, еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные постройки в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Федоров.

III. Индивидуальные задания

Сообщения на тему «О жизни и творчестве основателя геометрической кристаллографии Е. С. Федорова» и на тему «Кристалл граната» (см. соответственно задания 5* и 6* из домашней работы, этап V урока 56).

Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело – в каждую из этих областей Е. С. Федоров (1853-1919) внес немалый вклад. С детских лет он увлекался точными науками. В пять лет хорошо знал арифметику, а в семь лет "для удовольствия" за два дня изучил учебник геометрии. Сын военного инженера и сам в молодости военный инженер, он оставил военную службу, чтобы посвятить свою жизнь науке. Он снова поступил учиться, сначала в Военно-медицинскую академию, затем закончил Химико-технологический институт, наконец, в 27 лет поступил в Петербургский горный институт.

В 1890 году Е. С. Федоров строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. "Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую теорию весь природный "хаос" бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. "Царство кристаллов" является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии", – сказал академик А. В. Шубников.

Рассмотрим ***ромбододекаэдр*** (иногда его называют ромбоидальный, или ромбический, додекаэдр) - двенадцатигранник, гранями которого являются равные ромбы (рис. 172, б).

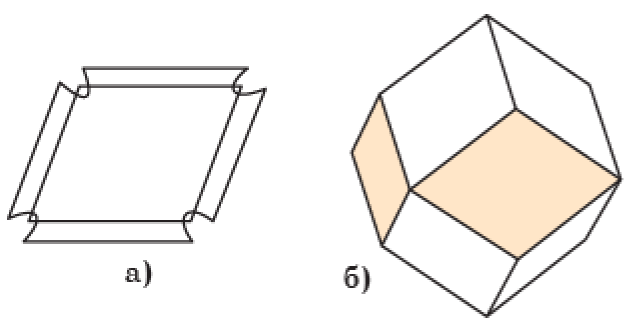


Рис. 172

Укажем способ его построения. Возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть равных четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями - гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба. Образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

Форму этого многогранника создала природа в виде кристалла граната. Причем для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат - один из основных породообразующих минералов, встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат - кроваво-красный пироп - археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на территории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат и ромбододекаэдр были известны с глубокой древности можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе в древнегреческого языка означало "красная краска". При этом название связывалось с красным цветом - наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий - эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н.э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неополите Египта и в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н.э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например, так называемый, "папирус Эберса", который содержит описание методов лечения камнями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в этом месяце.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести "Гранатовый браслет" говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И. С. Тургенева "Вешние воды", где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П. П. Бажовым в сборнике "Малахитовая шкатулка". Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге "Рассказы о самоцветах" тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности, о месторождениях граната на Урале.

IV. Закрепление нового материала

1. Используя модель ромбододекаэдра, найдите количество его: а) вершин; б) ребер; в) граней.

2. Какие многогранные угла имеет ромбододекаэдр и сколько?

3. Как из ромбододекаэдра сложить пространственный паркет?

Ответы. **1.** а) 14; б) 24; в) 12. **2.** Всего 14 многогранных углов, из них 8 трехгранных углов и 6 четырехгранных. **3.** Представим себе куб, разделим его на шесть равных пирамид, вершиной каждой из них будет центр куба, а основаниями будут грани куба, теперь отразим их от плоскости основания, получится многогранник – ромбододекаэдр. Теперь представим, что все пространство заполнено кубами, мысленно ракрасим их в два цвета, например, в белый и черный, получим пространственный аналог бесконечной шахматной доски. Возьмем кубы одного цвета, например белого, и присоединим к ним от окружающих черных кубов по соответствующей пирамиде. В результате получим все пространство, заполненное ромбододекаэдрами.

V. Занимательный момент урока

Решение задачи 4* из этапа III урока 56 и задачи 4* из этапа V урока 56.

VI. Задание на дом

1. Разобрать текст учебника (п. 88).

2. Решить задачи.

1) Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Длину ребра ромба возьмите равной 6 см, острый угол приблизительно равен 71°, ширина клапана - 0,8 см (рис. 172, а). Модель лучше сделать двуцветной так, как показано на рисунке 172, б.

2) Сколько красок потребуется для раскраски граней ромбододекаэдра так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Ответ. 3.

3*) Из какого еще полуправильного многогранника можно составить пространственный паркет?

Ответ. Усеченного октаэдра.

89. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса (один урок)

Урок 58

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Кристаллы поваренной соли имеют форму …
2. Кристаллы горного хрусталя напоминают …
3. Кристалл исландского шпата имеет форму …
4. Ромбододекаэдр – многогранник, у которого …
5. Число вершин гранатоэдра равно …

Вариант 2

1. Кристалл алмаза может иметь форму …
2. Кристаллы льда напоминают …
3. Кристалл пирита имеет форму …
4. Гранатоэдр – это …
5. Число ребер ромбододекаэдра равно …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Замечание. Предварительно раздаем учащимся полоску бумаги (лучше из клетчатой) прямоугольной формы размером 20 см×2 см.

Вопрос

- В какой теме мы уже встречались с понятием направления?

Ранее мы говорили о поворотах в направлениях по часовой стрелкеили против часовой стрелки. Выясним более детально, что означают слова "поворот против часовой стрелки".

Пусть в пространстве задана плоскость и поворот в этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 173, а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако, если мы будем смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 173, б).

Таким образом, направление поворота не является свойством изначально присущим плоскости и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется ***ориентацией плоскости***.

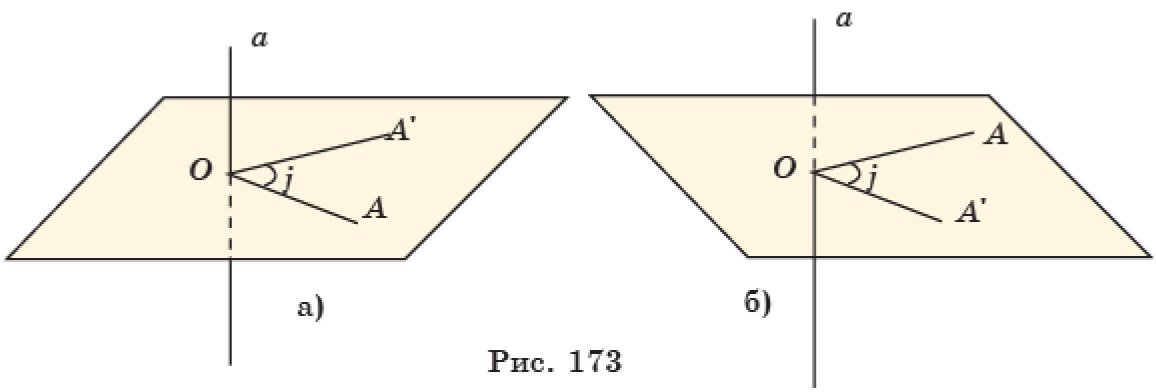


Рис. 173

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая ***листом***, или ***лентой Мёбиуса***, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А.Ф.Мёбиусом (1790-1868).

Изготовить модель листа Мебиуса очень просто. Возьмем бумажную полоску в форме прямоугольника, назовем его *ABCD*. Если склеить противоположные стороны *AB* и *CD*, совместив точку *A* с точкой *D*, а точку *B* с точкой *C*, то получим боковую поверхность цилиндра. Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180°, и соединить точку *A* с точкой *C*, точку *B* с точкой *D*, то получим лист Мёбиуса (рис. 174).

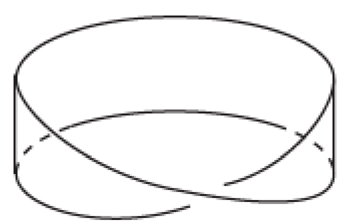


Рис. 174

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств.

Вопросы

- Сколько краев имеет: а) боковая поверхность цилиндра; б) лист Мёбиуса?

В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать ее вдоль края. В результате мы придем в то же самое выбранное место.

- Сколько сторон имеет: а) плоскость; б) сфера; в) боковая цилиндрическая поверхность; г) лист Мёбиуса?

До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера цилиндрическая поверхность. Лист Мёбиуса имеет только одну сторону. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнем закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы проделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав закрашивание с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М.Эшера (рис. 175).

Рис. 175

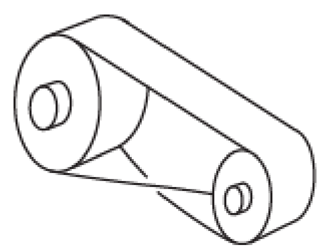


Рис. 176

Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ременных передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса, то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный. Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя ее часть, как у обычной ременной передачи (рис. 176).

IV. Закрепление нового материала

1. Проделаем такой опыт. Проведем на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: "Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?"

2. Сколько сторон имеют ленты, изображенные на рисунке 177?

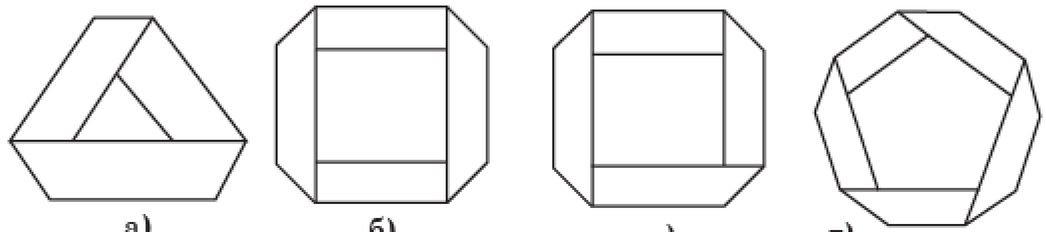


Рис. 177

3. Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?

Ответы. **1.** Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента, в чем легко убедиться, разрезав лист Мёбиуса. **2.** а) Одну; б) две; в) две; г) одну; д) одну. **3.** Тор (рис. 178) – фигура, похожая на бублик или на колесо.

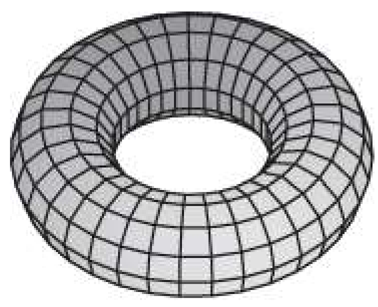


Рис. 178

***V. Повторение планиметрии**

1. Из точки *M* проведены секущая окружности *MBA* и касательная *MC*. Найдите *MB* и *AC*, если *MC*=6 см, *MA*=9 см и *BC*=3,6 см.

Ответ. Треугольники *MBC* и *MCA* подобны (по углам). Следовательно, *MB*:*MC*=*MC*:*MA*, откуда *MB*=4 см, и *AC*:*BC*=*MA*:*MC*, откуда *AC*=5,4 см.

2. Постройте отрезок, средний пропорциональный двум данным отрезкам *a* и *b*.

Построение. На прямой *a* откладываем последовательно отрезки *AB*=*a* и *BC*=*b*. На *AC*, как на диаметре, описываем полуокружность. Проводим перпендикуляр *BD* к *AC*. Точка *D* принадлежит проведенной полуокружности. Отрезок *BD* – искомый.

3. В окружность радиуса *R* вписан треугольник *ABC*, углы *B* и *C* которого равны 30°. Не используя формулы площади сегмента, найдите площадь части круга, заключенной внутри вписанного угла *ABC*.

Решение. Обратимся к рисунку 179: дуги *AB* и *AC* равны 60°. Следовательно, диаметр *BD* параллелен *AC* и, значит, треугольники *ABC* и

AOC равновелики. Таким образом, искомая площадь равна площади сектора *AOC*, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{6}$.

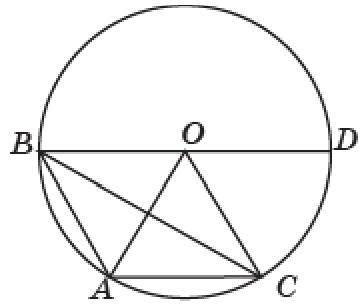


Рис. 179

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 89 учебника).

2. Решить задачи.

1) Что получится, если дважды перекрученную ленту опять разрезать по средней линии?

Ответ. Две сцепленные дважды перекрученные ленты.

2) Является ли ориентируемой поверхностью трижды перекрученная лента?

Ответ. Нет.

3) Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?

Ответ. Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента.

4*) Возьмите полоску бумаги и сделайте два параллельных разреза (рис. 180, а). Соедините между собой верхнюю и нижнюю пары концов как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображенная на рисунке 180, б, называемая сиамским листом Мёбиуса. Что получится, если разрезать ее вдоль пунктирной линии (рис. 180, б)? Сколько будет частей, краев и сторон?

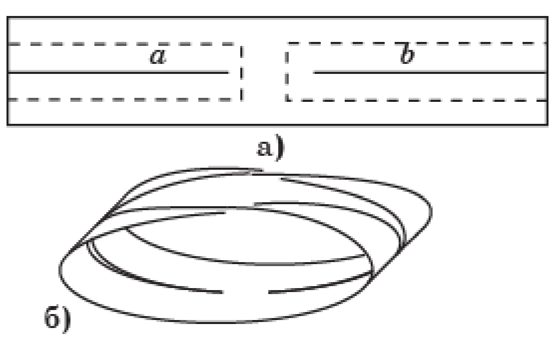


Рис. 180

Ответ. Одна часть, три края и две стороны.

90. Площадь поверхности и объем
(три урока)

Урок 59

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Поворот по часовой стрелке означает, что …
2. Ориентацией поверхности называется …
3. Число сторон плоскости равно …
4. Листом Мёбиуса называется …
5. Число краев листа Мёбиуса равно …

Вариант 2

1. Поворот против часовой стрелки означает, что …
2. Ориентацией плоскости называется …
3. Краями боковой поверхности цилиндра является …
4. Лента Мёбиуса получается следующим образом …
5. Число сторон ленты Мёбиуса равно …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Вопросы

- Как определить площадь поверхности многогранника?

Площадь поверхности произвольного многогранника определяется как сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

- Из каких фигур состоит площадь поверхности цилиндра?

Рассмотрим цилиндр, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности. Разверткой боковой поверхности является прямоугольник с основанием $2\pi R$ и высотой b. Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi R(R+b).$$

- Подумайте, из каких фигур состоит поверхность конуса?

Рассмотрим конус, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей, а длина дуги - длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна $\frac{1}{2}2\pi Rb = \pi Rb$, а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R+b).$$

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 3 см.

2. Радиус основания цилиндра равен 2 м, образующая - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3. Радиус основания конуса равен 3 м, образующая - 4 м. Найдите площадь полной поверхности конуса.

4*. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного третраэдра *ABCD* (рис. 181), соединяющий точки *E* и *F*, расположенные на высотах граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

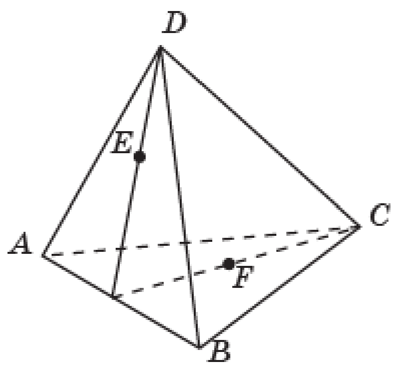


Рис. 181

Ответы. **1.** $9(\sqrt{3}+1)$ см^2. **2.** 12π м^2. **3.** 21π м^2. **4*.** 20.

***V. Повторение планиметрии**

1. Основания трапеции равны a и b ($a < b$), боковые стороны при продолжении образуют прямой угол. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции. Дайте решение, используя параллельный перенос.

Ответ. Пусть имеется трапеция *ABCD* (рис. 182), $BC \| AD$, $BC=a$, $AD=b$, *AB* пересекается с *DC* в точке *M*, $\angle AMD = 90^\circ$; *E*, *F* – середины соответственно *BC* и *AD*. Перенесем боковую сторону *AB* на вектор $\overrightarrow{BE}$, а боковую сторону *CD* на противоположный вектор $\overrightarrow{CE}$. Тогда искомый отрезок *EF* будет медианой в образовавшемся прямоугольном треугольнике *KEL*, проведенной к его гипотенузе *KL*, равной *b–a*. Таким образом, $EF=KF=FL=\frac{1}{2}KL=\frac{b-a}{2}$.

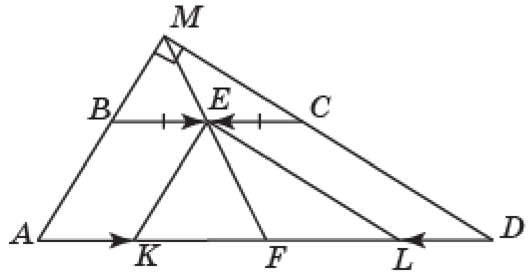


Рис. 182

2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию *a* и радиусу *R* описанной около него окружности.

Построение. Построим равнобедренный треугольник *BOC* по основанию *BC=a* и боковым сторонам *BO=CO=R*. Проведем *OH*⊥*BC*, *BH=HC*, и отложим на луче *HO* от точки *O* отрезок *AO=R*. Задача имеет единственное решение, если $a<2R$.

3. Через точку *M* проведены две касательные *MA* и *MB* (*A* и *B* – точки касания) к окружности с центром в точке *O*. На меньшей из двух образовавшихся дуг берется произвольная точка *C* и через нее проводится третья касательная до пересечения с *MA* и *MB* соответственно в точках *D* и *E*. Докажите, что периметр треугольника *DEM* и угол *DOE* не зависят от выбора точки *C*.

Ответ. *AD=DC, BE=EC* (по свойству касательных). Тогда $P_{DEM}=AM+BM$, т. е. не зависит от положения точки *C*. $\angle DOE=\angle DOC+\angle COE$, но $\angle DOC=\angle AOD$, а $\angle COE=\angle BOE$. Таким образом, $\angle DOE$ равен половине $\angle AOB$ т.е. тоже не зависит от выбора точки *C*.

VI. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 90 учебника).

2. Решить задачи.

1) Как изменится площадь боковой поверхности цилиндра, если: а) радиус основания увеличить в 2 раза, а образующую уменьшить в 4 раза; б) радиус основания уменьшить в 2 раза, а образующую увеличить в 3 раза?

Ответ. а) Уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 1,5 раза.

2) Найдите площадь поверхности правильной шестиугольной призмы со стороной основания *a* и боковым ребром *b*.

Ответ. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, площадь одной боковой грани равна *ab*, таким образом, площадь поверхности призмы равна $3a(\sqrt{3}a+2b)$.

3) 41. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна 480 $см^2$. Боковое ребро призмы относится к стороне основания как 8:5. Найдите боковое ребро призмы и сторону основания.

Ответ. 16 см, 10 см.

4*) На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха (рис. 183). Найдитете длину кратчайшего пути, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

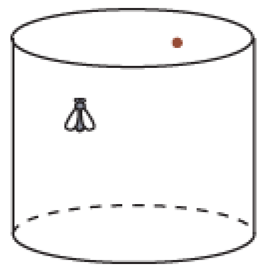


Рис. 183

Ответ. $\sqrt{100\pi^2 + 36}$.

Урок 60

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Площадь поверхности многогранника определяется как …
2. Площадь боковой поверхности цилиндра с радиусом основания R и образующей b равна …
3. Площадь поверхности конуса с радиусом основания R и образующей b равна …
4. Площадь поверхности правильной четырехугольной призмы с ребром 3 см равна …
5. Площадь поверхности икосаэдра с ребром 2 см равна …

Вариант 2

1. Площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см равна …
2. Площадь боковой поверхности конуса с радиусом основания R и образующей b равна …
3. Площадь поверхности цилиндра с радиусом основания R и образующей b равна …
4. Площадь поверхности куба с ребром 6 см равна …
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды с ребром 5 см равна …

Ответы. *Вариант 1*. 4. 54 см^2. 5. $20\sqrt{3}$ см^2. *Вариант 2*. 4. 216 см^2. 5. $25\sqrt{3}$ см^2.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Понятие объема фигуры в пространстве определяется по аналогии с понятием площади плоской фигуры и удовлетворяет аналогичным свойствам.

За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Объем фигуры – это число, показывающее сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре.

Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения площади. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V=abc,$$

где a, b, c – ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины.

Объем цилиндра с основанием радиуса R и высотой h вычисляется по формуле

$$V=\pi \mathrm{R}^2 h.$$

Объем конуса с основанием радиуса R и высотой h вычисляется по формуле

$$V=\tfrac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

IV. Закрепление нового материала

1. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, боковое ребро и сторона основания которой равны соответственно 2 см и 5 см.

2. Найдите объем куба, если площадь его поверхности равна 96 дм^2.

3. Найдите отношение объемов двух цилиндров, имеющих равные диаметры оснований.

4. Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

Ответы. **1.** 50 см^3. **2.** 64 дм^3. **3.** Равно отношению образующих данных цилиндров. **4.** 6 см.

V. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 90 учебника).

2. Решить задачи

1) По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной: а) треугольной; б) четырехугольной призмы.

Ответ. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; б) a^2b.

2) Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Ответ. Обозначим ребро куба через a, тогда, решая уравнение $(a+2)^3=a^3+98$, получим $a=3$ (см).

3) Боковая поверхность (в кв. ед.) и объем цилиндра (в куб. ед.) выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания цилиндра.

Ответ. 4 ед.

4*) Два разных цилиндра имеют равную площадь боковой поверхности, равную 100 см^2. Докажите, что существует параллелограмм площадью 100 см^2, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндров.

Решение. Развертки боковых поверхностей данных цилиндров представляют собой два равновеликих прямоугольника со сторонами a_1, b_1 и a_2, b_2. Пусть, например, $a_1 < b_1$, тогда $a_2 > b_2$. Тогда существует параллелограмм со сторонами a_2, b_1, равновеликий данным прямоугольникам. Им можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндров.

Урок 61

I. Устная работа

1) Сколько плоскостей можно провести через: а) одну прямую; б) три точки?

2) Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) октаэдр; б) пятиугольная призма; в) девятиугольная пирамида?

3) Сколько сторон имеет: а) плоскость; б) сфера?

4) Чему равна площадь поверхности куба с ребром 9 мм?

5) Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?

6) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2 см, 1 дм и 0,5 м.

Ответы. **1)** а) Бесконечно много; б) одну, если точки не принадлежат одной прямой; бесконечно много, если точки принадлежат одной прямой. **2)** а) $В$=6, $Р$=12, $Г$=8; б) $В$=10, $Р$=15, $Г$=7; в) $В$=10 $Р$=18, $Г$=10. **3)** а), б) Две. **4)** 486 мм^2. **5)** $2\sqrt{3}$. **6)** 10 дм^2.

II. Подготовка к контрольной работе

1. Найдите сумму всех плоских углов шестиугольной призмы.

2. Сколько граней и каких имеет усеченный тетраэдр?

3. Что является пересечением двух больших окружностей (имеют центр в центре сферы) одной сферы?

4. Дан куб $A \ldots D_1$. Найдите угол между: а) ребрами AA_1 и AD; б) ребром BC и диагональю BC_1 грани; в) пересекающимися диагоналями соседних граней.

Ответы. **1.** 3600°. **2.** $Г$=8, из них 4 – правильные шестиугольники и 4 – правильные треугольники. **3.** Диаметр сферы. **4.** а) 90°; б) 45°; в) 60°.

***III. Повторение планиметрии**

1. Даны три точки $E(5, 0)$, $F(-5, 3)$, $G(1, -2)$. Найдите такую четвертую точку H, чтобы векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ были равны.

Ответ. Пусть $H(x, y)$. $\overrightarrow{EF}$ (-10, 3), $\overrightarrow{GH}$ $(x-1, y+2)$, тогда $x-1=-10$ и $y+2=3$, откуда $x=-9$ и $y=1$.

2. Постройте фигуру, в которую перейдет равносторонний треугольник ABC при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{HO}$, где H – середина стороны AB, O – центр данного треугольника.

Построение. Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 184).

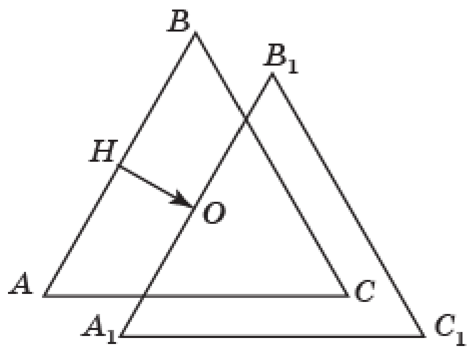


Рис. 184

3. Середина M боковой стороны AB трапеции $ABCD$ соединена отрезками с вершинами C и D. Докажите, что площадь треугольника MCD равна половине площади трапеции.

Ответ. Средняя линия MN трапеции $ABCD$ является медианой треугольника MCD. Проведем через точку M прямую $EF \parallel CD$, точки E, F принадлежат соответственно прямым BC и AD. Тогда $MECN$ и $MFND$ – параллелограммы. $S_{MEC}=S_{MNC}$, $S_{MEC}=S_{MEB}+S_{MBC}=S_{MFA}+S_{MBC}$ (треугольники MEB и MFA равны по стороне и двум прилежащим к ней углам) и $S_{MFD}=S_{MND}$. Таким образом, $S_{MCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 77 - п. 90 учебника).

2. Решить задачи.

1) Прямые a и b лежат в плоскости α. Могут ли они: а) пересекаться; б) быть параллельными; в) скрещиваться?

Ответ. а), б) Да; в) нет.

2) Даны две параллельные прямые и точка, не принадлежащая им. Как установить, принадлежит ли точка плоскости этих прямых?

Ответ. Через данную точку провести прямую, пересекающую одну из параллельных прямых. Если она пересечет и другую, то точка принадлежит плоскости параллельных прямых.

3) Имеется модель правильной пирамиды. Какие измерения надо произвести, чтобы вычислить площадь ее поверхности?

Ответ. Нужно измерить сторону ее основания и найти высоту боковой грани (она называется апофемой).

4*) Найдите площадь поверхности усеченного тетраэдра с ребром 2 см.

Ответ. $10\sqrt{3}$ см^2.

Урок 62
Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Сколько прямых проходит через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки?

2. Найдите сумму всех плоских углов пятиугольной пирамиды.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми: а) AB и BB_1; б) A_1C_1 и C_1D; в) AC и DC.

4. Наименьшее и наибольшее расстояния от точки, расположенной вне сферы до точек сферы равны соответственно 12 см и 75 см. Найдите радиус сферы.

5*. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер? Изобразите этот многогранник (или многогранники).

Вариант 2

1. Сколько плоскостей проходит через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки?

2. Найдите сумму всех плоских углов шестиугольной призмы.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы между прямыми: а) B_1C_1 и C_1C; б) BD и BC_1; в) DC_1 и D_1C.

4. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри сферы до точек сферы равны соответственно 38 см и 19 см. Найдите радиус сферы.

5*. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер? Изобразите этот многогранник (или многогранники).

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ
(уроки 63-68)

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ
*64. Изопериметричсекая задача
(два урока)

Цель – познакомить учащихся с классической изопериметрической задачей – задачей Дидоны; рассмотреть понятие максимальной фигуры и ее свойства.

Урок 1

I. Устная работа

1) Какие две фигуры называются: а) равновеликими; б) равносоставленными?

2) Сформулируйте основные свойства площадей плоских фигур.

3) Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 80 см.

4) Стороны прямоугольника равны 12 см и 3 см. Каковы стороны равновеликого ему прямоугольника, у которого: а) одна сторона равна 10 см; б) стороны относятся как 3:4; в) стороны равны?

5) Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из этих фигур имеет наибольшую площадь?

Ответы. **3)** 400 см^2. 4) а) 3,6 см; б) $3\sqrt{3}$ см и $4\sqrt{3}$ см; в) 6 см. **5)** Квадрат.

II. Новый материал

Задача Дидоны. Одной из древнейших задач, связанных с площадями, является задача Дидоны. Если верить преданию, Финикийская царевна Дидона в IX веке до н. э., спасаясь от преследователей, заключила договор о покупке земли на побережье нынешнего Тунисского залива Средиземного моря с местным предводителем Ярбом. Она просила совсем немного земли – столько, сколько можно "окружить бычьей шкурой". Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от нее **-** город Карфаген.

Так сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Или, переходя на язык математики, какую наибольшую площадь ограничивают кривые заданной длины?

Эту задачу о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой, заданной длины (периметра), и называют ***задачей Дидоны***, или классической ***изопериметрической задачей***.

Вопрос

- Как вы думаете, какие фигуры называются изопериметрическими?

Изопериметрические фигуры – фигуры, имеющие одинаковый периметр. Докажем следующую теорему.

Теорема. Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь охватывает окружность.

Хотя это свойство окружности было известно еще до нашей эры, строгое его доказательство было дано лишь в конце XIX века. До этого в 30-х годах XIX века Якоб Штейнер дал пять доказательств этого свойства, но в каждом из них подразумевалось существование кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь. Мы рассмотрим первое из доказательств Штейнера.

Доказательство разобьем на несколько утверждений. Для краткости фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть максимальной.

Теорема 1. Максимальная фигура является выпуклой.

Доказательство. Если фигура не выпукла, то существует хорда AB, концы которой принадлежат кривой, а ее внутренние точки находятся вне кривой (рис. 185). Заменим дугу исходной кривой, соединяющую точки A, B, на симметричную ей дугу относительно прямой AB. Соответствующая ей фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

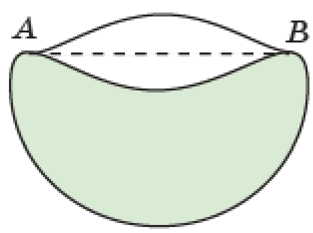


Рис. 185

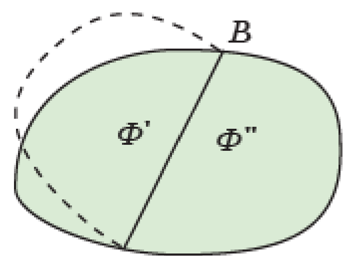


Рис. 186

Теорема 2. Если хорда делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру на две части равной длины, то она и фигуру делит на две равновеликие части.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую на две части равной длины (рис. 186). Предположим, что площади образовавшихся частей Φ', Φ'' фигуры Φ не равны, например, $S(\Phi')<S(\Phi'')$. В фигуре Φ заменим фигуру Φ' на фигуру, симметричную Φ'' относительно прямой AB. Полученная фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Теорема 3. Максимальная фигура ограничена окружностью.

Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру Φ на две части равной длины (рис. 187).

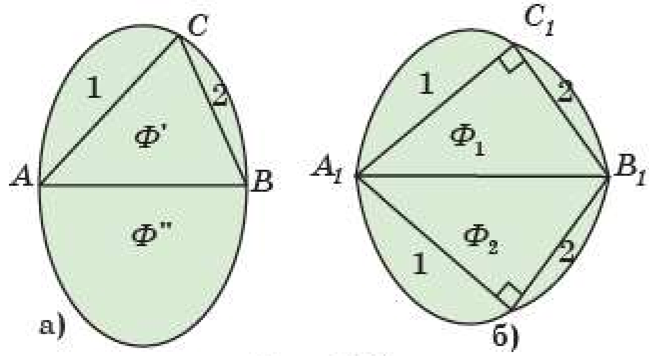


Рис. 187

Тогда она делит фигуру Φ на две части Φ' и Φ'' равной площади. Если кривая не является окружностью, то на ней найдется точка C, для которой $\angle ACB \neq 90°$. Пусть, например, C принадлежит Φ'. Построим новую фигуру. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1B_1=AB$, $B_1C_1=BC$, и присоединим к его катетам соответствующие части 1 и 2 исходной фигуры. Полученную фигуру Φ_1 отразим симметрично относительно A_1B_1 и соответствующую фигуру обозначим Φ_2. Фигура, состоящая из обеих частей Φ_1 и Φ_2, будет искомой. Ясно, что она ограничена кривой той же длины. Однако, так как площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади треугольника ABC, то площадь фигуры Φ_1 будет больше площади фигуры Φ', а, значит, площадь всей новой фигуры будет больше площади исходной фигуры Φ. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Таким образом, кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь, может быть только окружность.

III. Закрепление нового материала

1. Через точку, расположенную внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.

2. Докажите, что из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

3. Максимальным будем называть n-угольник, имеющий наибольшую площадь из всех n-угольников заданного периметра. Докажите, что максимальный n-угольник является выпуклым.

Ответы. **1.** См. рисунок 188: треугольник KLM – искомый.

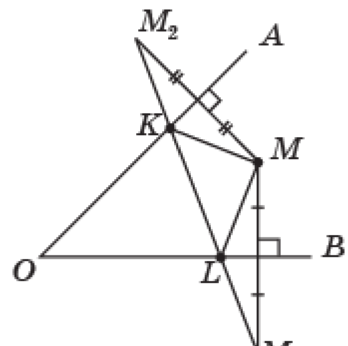


Рис. 188

2. Обозначим стороны квадрата и прямоугольника соответственно через a и b, c, тогда $a=\frac{b+c}{2}$; площади квадрата и прямоугольника соответственно равны $(\frac{b+c}{2})^2$ и bc; возьмем их разность $(\frac{b+c}{2})^2-bc=(\frac{b^2+c^2}{2})^2>0$, $(\frac{b+c}{2})^2>bc$. **3.** См. рисунок 189: $S_{ABCDE} < S_{ABFDE}$, $S_{BCD}=S_{BFD}$.

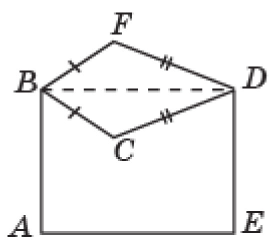


Рис. 189

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 64* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте фигуры, имеющие периметр такой же, как и фигуры на рисунке 190, но большую площадь.

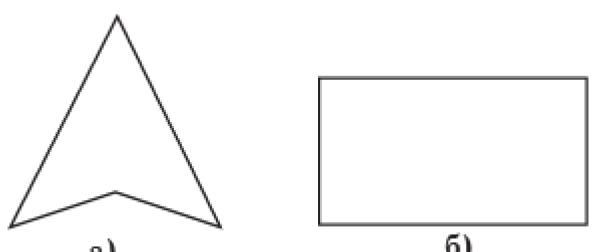


Рис. 190

Ответ. См. соответственно рисунки 191, а и 191, б, где изображен квадрат, имеющий такой же периметр, как и прямоугольник на рисунке 190, б.

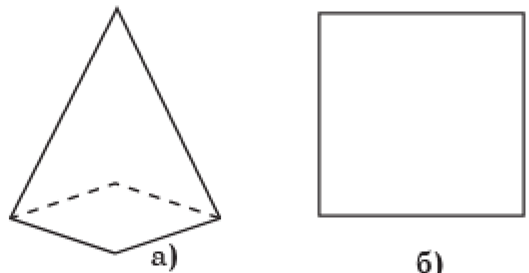


Рис. 191

2) Периметр прямоугольника равен 4. Какого числа не превосходит его площадь?

Ответ. 1, так как при данном периметре квадрат имеет сторону, равную 1, и площадь, равную 1 (см. решение задачи 2 этапа III данного урока).

3) Какова наибольшая площадь треугольника со сторонами 37 см и 46 см?

Ответ. 851 см^2.

4) Докажите, что из всех треугольников данного периметра, наибольшую площадь может иметь только правильный треугольник.

Доказательство. Пусть треугольник *ABC* не является правильным (рис. 192).

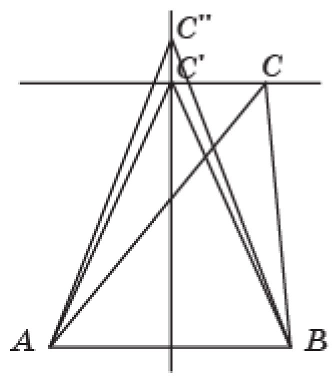


Рис. 192

Тогда у него есть две неравные стороны, например, $AB \neq BC$. Через точку *C* проведем прямую параллельную *AB* и обозначим *C'* ее точку пересечения с серединным перпендикуляром *c* к *AB*. Треугольник *AC'B* имеет ту же площадь, что и треугольник *ABC*, но меньший периметр. На прямой *c* можно выбрать точку *C''* так, что периметр треугольника *AC''B* будет равен периметру треугольника *ABC*, а его площадь будет больше площади треугольника *ABC*. Таким образом, неправильный треугольник не может иметь наибольшую площадь среди треугольников данного периметра и, следовательно, из всех треугольников данного периметра, наибольшую площадь может иметь только правильный треугольник.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Задачей Дидоны является задача …
2. Изопериметрическими фигурами называются …
3. Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь …
4. Максимальная фигура ограничена …
5. Периметр прямоугольника равен 12 см, тогда его площадь не превосходит …

Вариант 2

1. Изопериметрическая задача заключается в …
2. Периметром фигуры называется …
3. Максимальной называется фигура …
4. Максимальная фигура является …
5. Периметр прямоугольника равен 36 см, тогда его площадь не превосходит …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Определите наименьшую сторону прямоугольного треугольника DEF ($\angle E=90°$), если $\angle F=38°$.

2) Определите наибольшую сторону треугольника BCD, если: а) угол B – тупой; б) угол C – прямой; в) углы B и D – острые.

3) Треугольник имеет стороны 19 см и 12 см. В каких пределах заключена его площадь?

4) Какова наибольшая площадь треугольника со сторонами 17 см и 4 см?

Ответы. **1)** ED. **2)** а) CD; б) BD; в) нельзя определить. **3)** $0<S<114$ см^2. **4)** 34 см^2.

IV. Решение задач

1. Все стороны треугольника меньше единицы. Какого числа не превосходит его площадь?

2. Среди всех треугольников, имеющих одну и ту же сторону и равные углы, ей противолежащие, найдите треугольник наибольшей площади.

3. Найдите четырехугольник наибольшей площади, вписанный в окружность.

Ответы. **1.** Периметр этого треугольника меньше трех. Следовательно, его площадь меньше площади правильного треугольника со стороной 1, т. е. меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **2.** См. рисунок 193: BC – данная сторона, углы D, A, E равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу, ясно, что наибольшую площадь будет иметь треугольник с наибольшей высотой, опущенной на сторону BC, это будет высота AH, лежащая на диаметре окружности, значит, $BH=CH$, и ABC - равнобедренный треугольник.

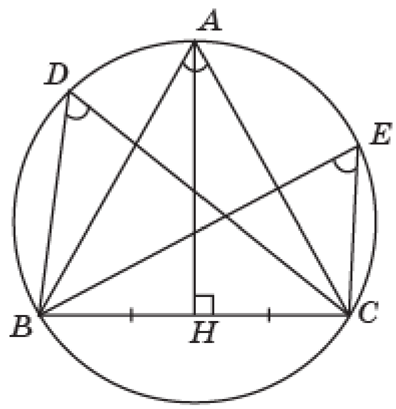


Рис. 193

3. Пусть в окружность вписан четырехугольник $ABCD$ (рис. 194). Тогда вписанный треугольник ABC будет иметь наибольшую площадь при $AB=BC$ (см. решение предыдущей задачи). Аналогично треугольник BCD будет иметь наибольшую площадь при $BC=CD$ и т.д. Получим, что наибольшую площадь вписанный четырехугольник будет иметь, если у него равны все стороны, т.е он является квадратом.

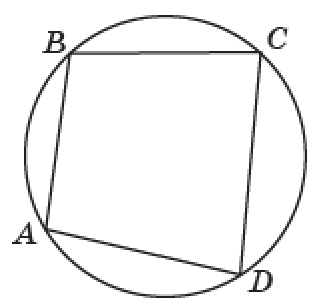


Рис. 194

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 64* учебника).

2. Решить задачи.

1) Изобразите треугольник, у которого все стороны больше 10, а площадь меньше 1.

Ответ. Решение показано на рисунке 195:

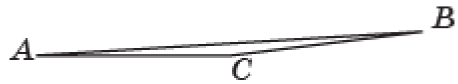


Рис. 195

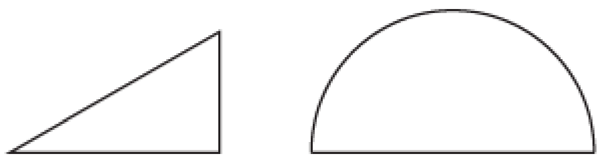
2) Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные стороны.

Ответ. Решение аналогично решению задачи 3 этапа IV данного урока.

3) Докажите, что максимальный n-угольник должен иметь равные углы.

Ответ. Решение аналогично решению задачи 3 этапа IV данного урока, поскольку n-угольник будет правильным, то его углы равны.

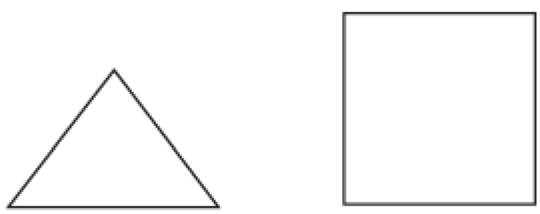
4) Нарисуйте фигуры, имеющие периметр такой же, как и фигуры на рисунке 196, но большую площадь.



а) б)

Рис. 196

Ответ. Решение показано на рисунке 197.



а) б)

Рис. 197

65*. Равносоставленность и задачи на разрезание (два урока)

Цель – познакомить с понятием равносоставленных фигур и доказать, что любые два равновеликих многоугольника будут и равносоставленными; рассмотреть красивые задачи на разрезание.

Урок 1

I. Устная работа

1) Кто такая Дидона? Какое предание о ней вы знаете?

2) Какая кривая заданной длины охватывает наибольшую площадь?

3) Какая фигура называется максимальной?

4) Сформулируйте свойства максимальных фигур.

5) Какой треугольник из всех треугольников одинакового периметра имеет наибольшую площадь?

6) Какой треугольник из всех треугольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольшую площадь?

7) Какой прямоугольник из всех прямоугольников одинакового периметра имеет наибольшую площадь?

8) Какой четырехугольник из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, имеет наибольшую площадь?

Ответы. **2)** Окружность. **5)** Правильный. **6)** Правильный. **7)** Квадрат. **8)** Квадрат.

II. Новый материал

Вопросы

- Какие фигуры называются равновеликими?

- Будут ли фигуры, изображенные на рисунке 198, равновеликими? Почему?

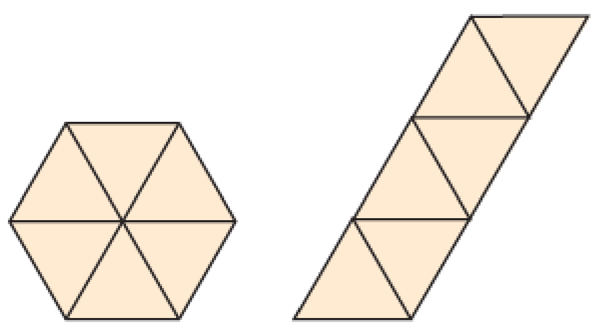


Рис. 198

Изображенные на рисунке 198 правильный шестиугольник и параллелограмм – равновеликие фигуры, так как оба они составлены из шести равных равносторонних треугольников.

- Как назвать такие многоугольники?

Определение. Две фигуры называются ***равносоставленными***, если они могут быть разложены на одинаковое число попарно равных фигур.

- Всегда ли равносоставленные фигуры будут равновеликими?

Из свойств площади, следует, что равносоставленные фигуры равновелики. В частности, равносоставленные многоугольники равновелики.

- Всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставлены?

Утвердительный ответ был получен в XIX веке.

Теорема. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Доказательство этой теоремы будет получено как результат применения нескольких теорем.

Теорема 1. Две фигуры, равносоставленые с одной и той же фигурой, равносоставлены.

Доказательство. Действительно, пусть фигуры Φ' и Φ'' равносоставлены с фигурой Φ. Рассмотрим линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ' и кроме того линии, разбивающие фигуру Φ на части, из которых можно составить фигуру Φ''. Те и другие линии разбивают фигуру Φ на более мелкие части, из которых можно составить как фигуру Φ', так и Φ''. Таким образом, фигуры Φ' и Φ'' равносоставлены.

Теорема 2. Любые два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

Доказательство. Рассмотрим сначала два параллелограмма с равными основаниями (рис. 199).

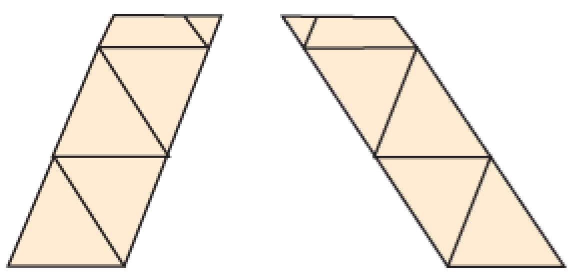


Рис. 199

По условию они равновелики, значит, имеют равные высоты. Проведем внутри каждого параллелограмма отрезки, параллельные сторонам другого параллелограмма. Тогда оба параллелограмма разобьются на одинаковое число попарно равных фигур, т. е. они равносоставлены.

Пусть теперь параллелограммы не имеют равных сторон. Построим третий параллелограмм, имеющий с первым одинаковые основание и высоту. Поскольку при этом другую сторону третьего параллелограмма можно выбирать произвольно, сделаем ее, равной одной из сторон второго параллелограмма. Тогда третий параллелограмм будет равновелик и с первым, и со вторым параллелограммами, и с каждым из них имеет по равной стороне. Следовательно, он равносоставлен и с первым, и со вторым. В силу теоремы 1 первый и второй параллелограммы равносоставлены.

Теорема 3. Любые два равновеликих треугольника равносоставлены.

Доказательство. Каждый треугольник продолжением средней линии преобразуется в равновеликий ему параллелограмм (рис. 200).

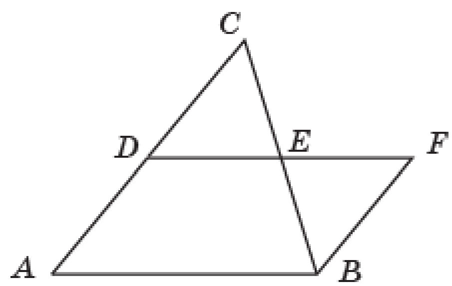


Рис. 200

Поэтому два равновеликих треугольника преобразуются в два равновеликих параллелограмма. В силу теоремы 2 эти параллелограммы равносоставлены и, следовательно, равносоставлены исходные треугольники.

Теорема 4. Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник *ABCDE*…, и одну из его вершин, например, *C* перенесем параллельно диагонали *BD* на продолжение стороны *DE* (рис. 201).

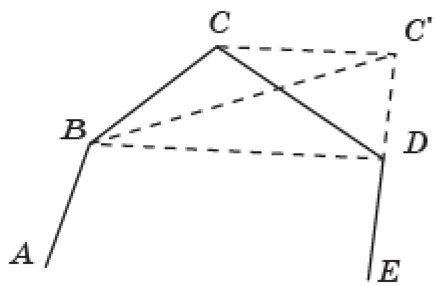


Рис. 201

При этом исходный многоугольник преобразуется в равновеликий многоугольник с числом сторон на единицу меньшим. Имея в виду, что мы заменили один треугольник другим - равновеликим, а остальная часть многоугольника осталась неизменной, получим, что новый многоугольник будет равносоставлен с исходным. Продолжая этот процесс, мы превратим исходный многоугольник в равносоставленный с ним треугольник.

Приступим теперь к доказательству основной теоремы. Пусть M' и M'' - равновеликие многоугольники. Рассмотрим равносоставленные с ними треугольники T' и T'' соответственно. Эти треугольники равновелики, а, следовательно, равносоставлены. Значит, равносоставлены и исходные многоугольники M' и M''.

Доказанная теорема позволяет в принципе разрезать один из двух равновеликих многоугольников на части и складывать из них другой многоугольник. Однако это приводит к большому числу мелких многоугольников. В конкретных примерах, как правило, можно указать гораздо более рациональный способ разрезания.

III. Решение задач

1. Разрежьте изображенную на рисунке 202 фигуру, составленную из трех квадратов, на четыре равные части.

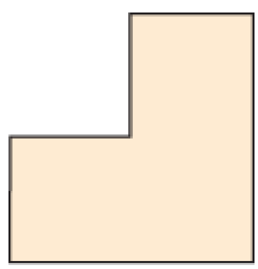


Рис. 202

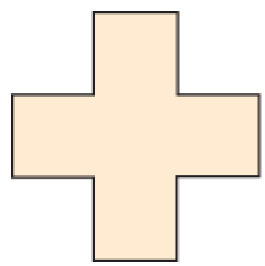


Рис. 203

2. Греческий крест (рис. 203) разрежьте на несколько частей и составьте из них квадрат. Предложите несколько способов.

3. Шестиугольник, изображенный на рисунке 204, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.

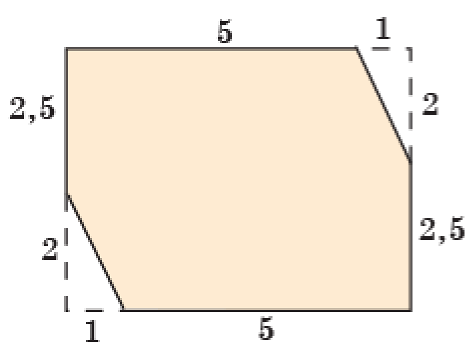


Рис. 204

Ответы. **1.** См. рисунок 205.

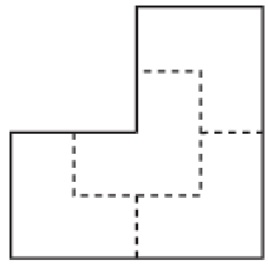


Рис. 205

2. См. рисунок 206.

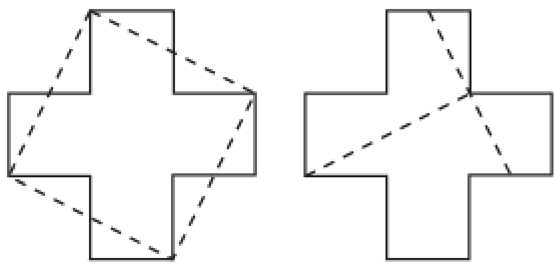


Рис. 206

3. См. рисунок 207.

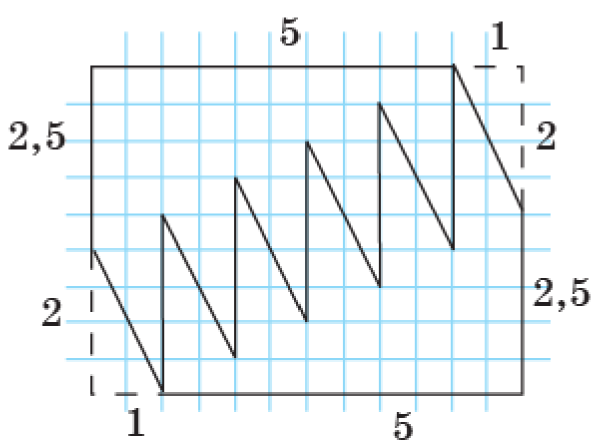


Рис. 207

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 65* учебника).

2. Решить задачи.

1) Трапецию разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

Ответ. Решение представлено на рисунке 208.

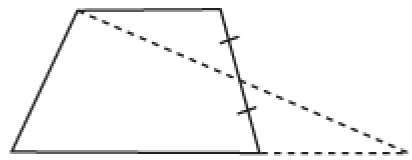


Рис. 208

2) Данный прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.

Ответ. Решение представлено на рисунке 209.

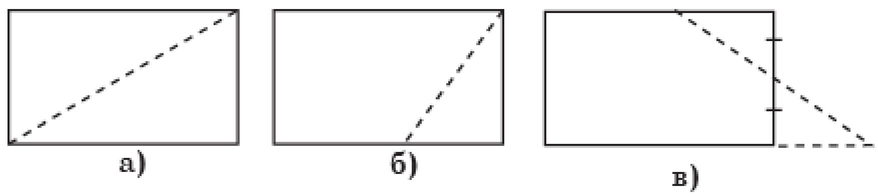


Рис. 209

3) Правильный шестиугольник разрежьте на равные ромбы. Предложите несколько способов.

Ответ. Решение представлено на рисунке 210.

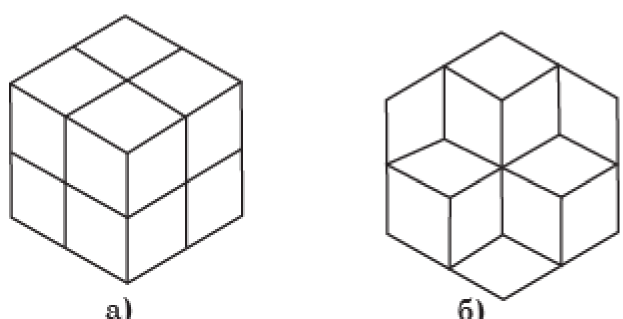


Рис. 210

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Две фигуры называются равносоставленными, если …
2. Любые два равновеликих многоугольника …
3. Если две фигуры равносоставлены, то они …
4. Чтобы разрезать треугольник на две равновеликие части, нужно …
5. Чтобы перекроить ромб в квадрат, нужно …

Вариант 2

1. Две фигуры называются равновеликими, если …
2. Две фигуры, равносоставленные с третьей фигурой, …
3. Если два многоугольника равновелики, то они …
4. Чтобы разрезать треугольник на четыре равновеликие части, нужно …
5. Чтобы перекроить параллелограмм в прямоугольник, нужно …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Примеры задач на разрезание

1. В качестве применения метода разрезания рассмотрим доказательство теоремы Пифагора. С точки зрения площадей, ее можно переформулировать в следующем виде.

Теорема. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c. Доказательство следует из рассмотрения двух равных квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника, в которых проведены отрезки, как показано на рисунках 211, а и 211, б.

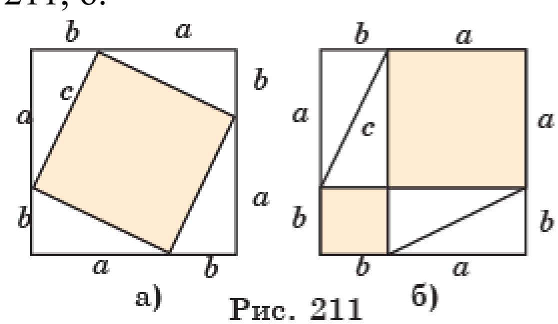


Рис. 211

В первом случае квадрат разобьется на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьется на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника и четыре треугольника, равных данному. Таким образом, $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Используя разрезания докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Решение показано на рисунке 212.

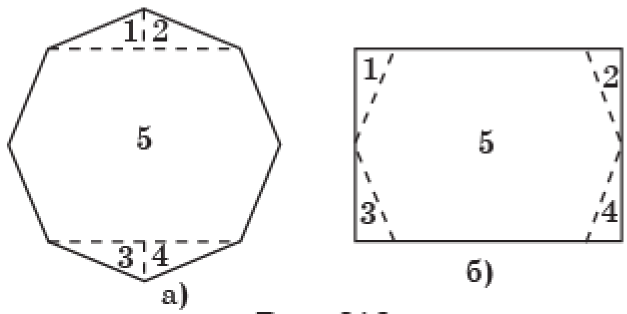


Рис. 212

IV. Занимательный момент урока

Решение задач из домашней работы (этап IV предыдущего урока).

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 65* учебника).

2. Решить задачи.

1) Разрежьте фигуры, изображенные на рисунке 213, на две равные части, чтобы в каждой из них была звездочка.

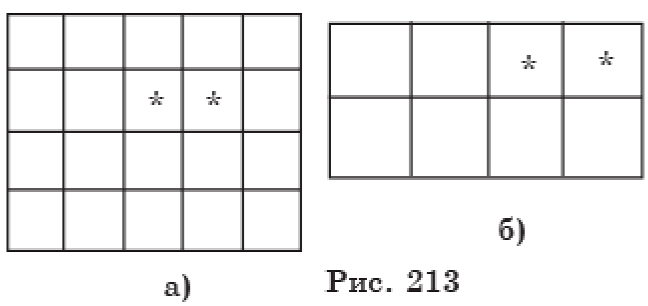
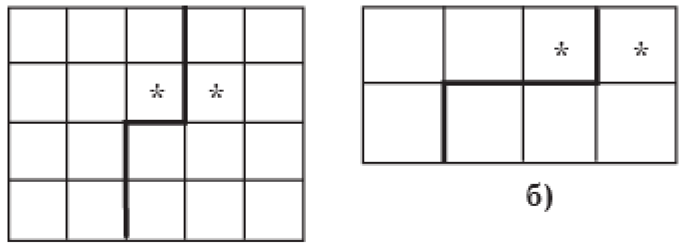


Рис. 213

Решение представлено соответственно на рисунке 214, а и на рисунке 214, б.



а) б) **Рис. 214**

2) Найдите прямоугольный треугольник, который можно разрезать на три равных треугольника.

Решение. Возьмем прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^{\circ}$, $\angle A = 60^{\circ}$, проведем AL – биссектрису данного треугольника, опустим перпендикуляр LH на AB ($H \in AB$), тогда треугольник ABC разобьется на три равных треугольника ACL, AHL и BHL.

3) Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC - на m равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 215, где n=3, m=4. Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

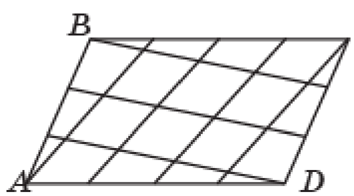
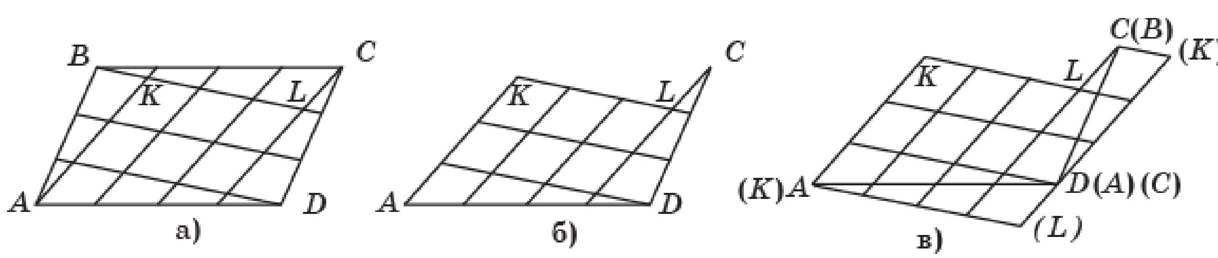


Рис. 215

Решение представлено на рисунке 216, таким образом, площадь маленького параллелограмма равна $\frac{1}{mn+1}$, в нашем случае равна $\frac{1}{13}$.



а) б) в)

Рис. 216

73*. Аналитическое задание фигур на плоскости (три урока)

Цель – рассмотреть, каким образом задаются полуплоскость, многоугольник, парабола, эллипс, гипербола.

Урок 1

I. Устная работа

1) Что называется: а) многоугольником; б) полуплоскостью?

2) Каким уравнением задается прямая на плоскости?

3) Что называется вектором нормали?

4) Что называется угловым коэффициентом прямой? Каков его геометрический смысл?

5) В каком случае два уравнения определяют: а) параллельные прямые; б) одну и ту же прямую; в) пересекающиеся прямые?

6) Как вычисляется угол между пересекающимися прямыми?

7) В каком случае две прямые перпендикулярны?

8) Какая кривая называется: а) окружностью; б) параболой; в) эллипсом; г) гиперболой?

II. Новый материал

Вопросы

- Как на плоскости задается окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R?

Ответ. Задается уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

- Как задается круг, ограниченный этой окружностью?

Ответ. Он задается неравенством $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq R^2$.

- Как задается прямая на плоскости?

Ответ. Прямая на плоскости задается уравнением $ax+by+c=0$, где a и b одновременно не равны нулю.

- Какие координаты имеет ее вектор нормали?

Ответ. (a, b).

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других фигур и начнем с полуплоскости.

Пусть прямая задана уравнением $ax+by+c=0$ и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Ее вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (a, b) и определяет полуплоскость. Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°, т. е. в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т.е. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A}=a(x-x_0)+b(y-y_0)\geq 0$. При этом $-ax_0-by_0=c$.

Следовательно, точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax+by+c\geq 0$.

Аналогично, точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости, по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax+by+c\leq 0$.

Для того чтобы определить, какой из двух полуплоскостей принадлежит точка $A(x, y)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения прямой и найти знак получившегося значения.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Действительно, пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$.................,$$
$$a_nx+b_ny+c_n=0.$$

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многоугольник.

III. Закрепление нового материала

1. Определите, какой полуплоскости $5x+3y-2\geq 0$ или $5x+3y-2\leq 0$ принадлежит точка: а) A (1,0); б) B (0,1); в) C (0,0).

2. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x\leq 1$, $y\leq 1$, которые можно записать в виде системы.

3. К системе предыдущей задачи добвьте еще одно неравенство

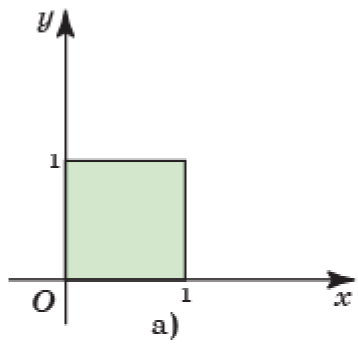
$$x+y-\frac{1}{2}\geq 0.$$

Изобразите соответствующий многоугольник.

Ответы. **1.** а) Первой; б) первой; в) второй. **2.** Перепишем данные неравенства в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

она определяет единичный квадрат (рис. 217, а). **3.** Соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 217, б).



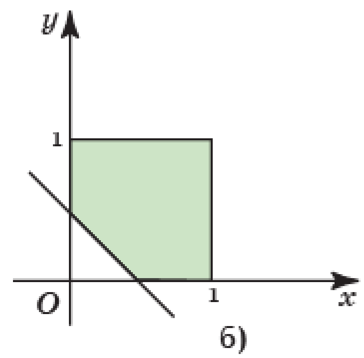


Рис. 217

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 73* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ 0 \le y \le 8, \\ x + y \ge 12. \end{cases}$$

Ответ. Решение представлено на рисунке 218.

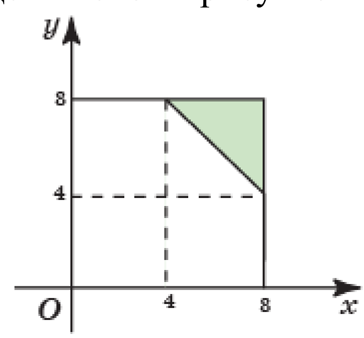


Рис. 218

2) Какую фигуру задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5? \end{cases}$$

Ответ. Решение представлено на рисунке 219.

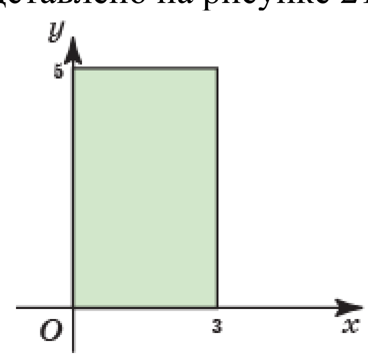


Рис. 219

3) Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5, \\ x + y - 6 \le 0. \end{cases}$$

Ответ. Решение представлено на рисунке 220.

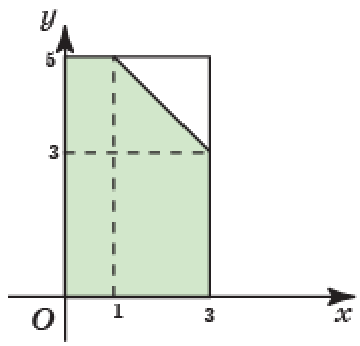


Рис. 220

Урок 2

I. Устная работа

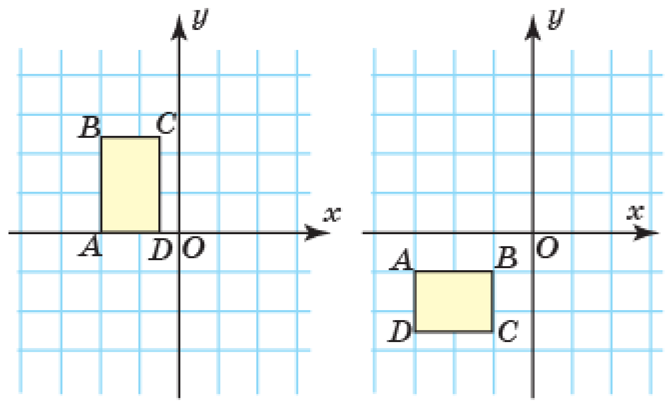
1) Как задается полуплоскость?

2) Как задается выпуклый многоугольник?

3) Две полуплоскости задаются неравенствами $a_1x+b_1y+c_1\leq 0$, $a_2x+b_2yc_2\geq 0$. Как задается их пересечение?

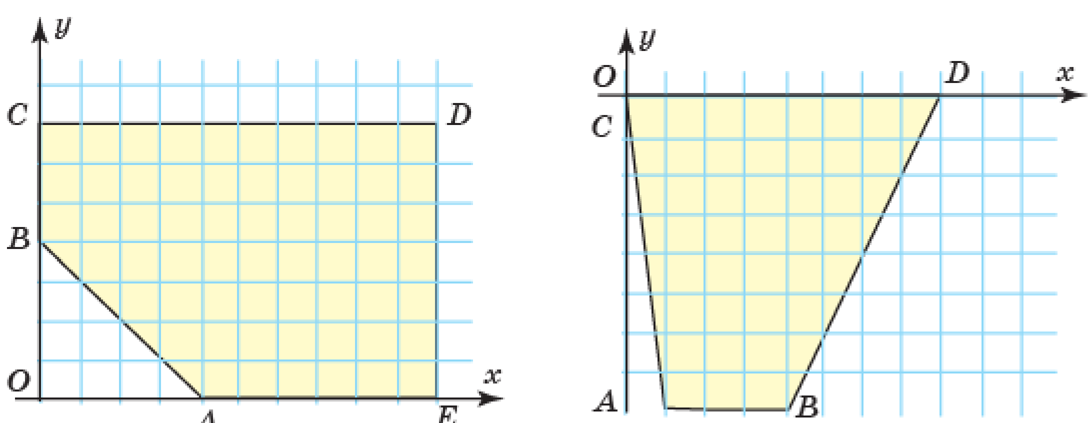
4) Какую фигуру задает следующая система неравенств: а) $\begin{cases}x\geq 0,\\ y\geq 0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x>0,\\ y\leq 0\end{cases}$; в) $\begin{cases}0<x<5,\\ 0<y<4\end{cases}$; г) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0,\\ 0\leq y\leq 3\end{cases}$?

5) На рисунке (рис. 221) изображен прямоугольник *ABCD*. Назовите неравенства, которые его определяют.



а) Рис. 221 б)

6) Назовите наревенства, определяющие пятиугольник, изображенный на рисунке (рис. 222).



а) б)

Рис. 222

y

Ответы. **4)** а) I четверть координатной плоскости; б) IV четверть координатной плоскости без оси ординат; в) внутренность прямоугольника со сторонами 5 и 4, расположенного в I четверти координатной плоскости; г) квадрат со стороной 3, расположенный во II четверти координатной плоскости. **5)** а) $\begin{cases} -2 \le x \le -\frac{1}{2}, \\ 0 \le y \le 2\frac{1}{2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ -2\frac{1}{2} \le y \le -1 \end{cases}$. **6)** а) $\begin{cases} 0 \le x \le 10, \\ 0 \le y \le 7, \\ x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ -8 \le y \le 0, \\ 2x - y - 16 \le 0 \end{cases}$.

II. Новый материал

С помощью уравнений и неравенств можно задавать не только окружность, круг, многоугольники, но и другие фигуры, например, такие кривые, как парабола, эллипс, гипербола.

Вопросы

- Какое геометрическое место точек называется параболой? Используйте рисунок 223.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой *d* и данной точки *F*, не принадлежащей этой прямой.

- Как называются прямая *d* и точка *F*?

Прямая *d* называется директрисой, а точка *F* - фокусом параболы.

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с ее директрисой через *G*. Длину отрезка *FG* обозначим через 2*a* (рис. 223).

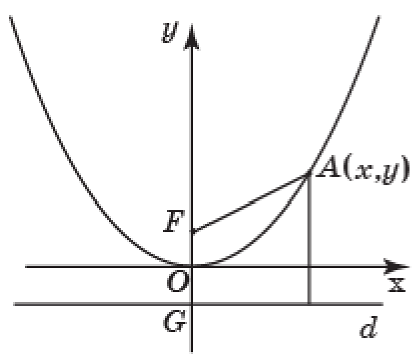


Рис. 223

Введем систему координат, считая началом координат середину *O* отрезка *FG*, осью абсцисс – прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат - ось параболы.

- Какие координаты будет иметь точка *F*?

Фокус *F* будет иметь координаты (0, *a*).

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от нее до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y-a)^2}$ и $|y+a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство $\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = y+a$.

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные, будем иметь равенство $4ay = x^2$, которое и будет искомым уравнением параболы.

Аналогично выведем уравнение эллипса.

- Какое геометрическое место точек называется эллипсом? Используйте рисунок 224.

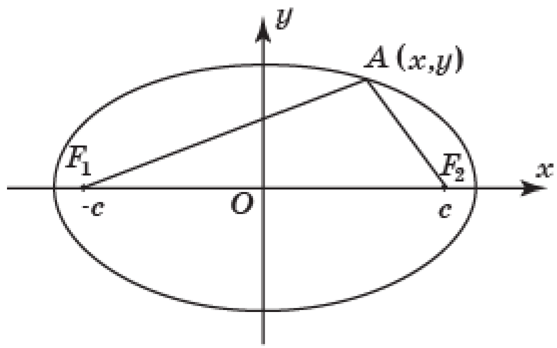


Рис. 224

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная.

- Как нзываются точки F_1, F_2?

Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 - фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введем систему координат, считая началом координат середину O отрезка F_1F_2, осью абсцисс - прямую F_1F_2, осью ординат - прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (рис. 224).

- Какие координаты будут иметь фокусы эллипса?

Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от нее до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ и $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

где a – некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесем второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Приведем подобные

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Еще раз возведем в квадрат и приведем подобные

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^4-a^2c^2.$$

Обозначим $b^2=a^2-c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим равенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, которое и будет искомым уравнением эллипса.

Осталось вывести уравнение гиперболы.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы (рис. 225).

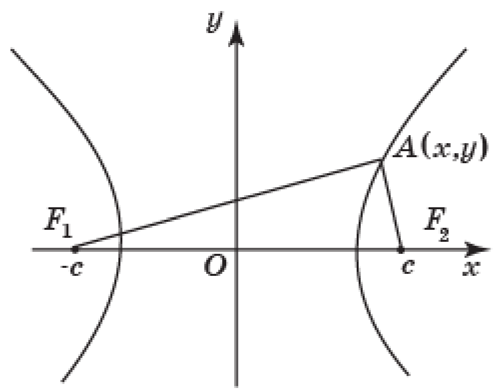


Рис. 225

Выведем уравнение гиперболы. Введем систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox , и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Точка $A(x,\ y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство AF_1-AF_2=$\pm 2a$, где a – некоторое фиксированное число, $0<a<c$.

Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Еще раз возводя в квадрат и обозначая $b^2=c^2-a^2$, получим

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Прямые, заданные уравнениями $bx+ay=0$, $bx–ay=0$ называются ***асимптотами*** гиперболы.

III. Закрепление нового материала

1. Для параболы, заданной уравнением $y=x^2$, найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

2. Для эллипса, заданного уравнением $x^2+\frac{1}{2}y^2=1$, найдите координаты фокусов. Нарисуйте этот эллипс.

3. Для гиперболы, заданной уравнением x^2-y^2=1, найдите координаты фокусов и уравнения асимптот. Нарисуйте эту гиперболу.

Ответы. **1.** Общее уравнение параболы имеет вид $4ay=x^2$. При этом фокус имеет координаты $(0, a)$, а директриса задается уравнением $y=-a$. В нашем случае $a=\frac{1}{4}$ и, следовательно, фокус данной параболы имеет координаты $(0, \frac{1}{4})$, а ее директриса задается уравнением $y=-\frac{1}{4}$. **2.** Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, таким образом, $a=1$, $b=\sqrt{2}$, в данном случае $a<b$, значит, элиипс вытянут вдоль оси ординат, $c^2=1$ и $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$ (рис. 226).

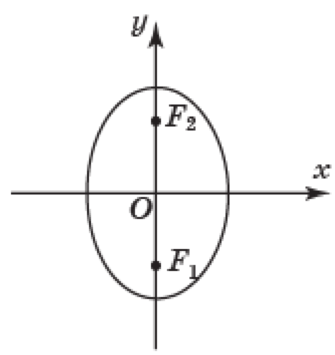


Рис. 226

3. В данном случае $a=1$, $b=1$ и $c^2=2$, откуда $F_1(0, -\sqrt{2})$, $F_2(0, \sqrt{2})$; асимптоты имеют уравнения $x+y=0$ и $x–y=0$.

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 73* учебника).

2. Решить задачи.

1) Для параболы, заданной уравнением $y=x^2–2x–1$. Найдите координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

Ответ. Уравнение параболы имеет вид $y=(x-1)^2$, значит, данная парабола получается из параболы $y=x^2$, переносом начала координат в точку (1, 0), следовательно, $F(1, \frac{1}{4})$, $y+\frac{1}{4}=0$ или $4y+1=0$.

2) Напишите уравнение эллипса, проходящего через точку $M(1, \frac{6\sqrt{6}}{5})$, сумма расстояний от которой до фокусов эллипса равна 10.

Ответ. В данном случае $2a=10$, откуда $a=5$; подставляем в общее уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ координаты точки M и найденное значение для a, находим $b^2=9$, следовательно, уравнение данного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

3) Найдите координаты фокусов и точек пересечения с осью **ординат (?)** гиперболы, заданной уравнением $16x^2–y^2+4y–4=16$.

Ответ. В данном случае уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{1^2}-\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$, следовательно, начало координат перенесено в точку (0, 2) и ветви гиперболы пересекают ось ординат (рис. 227), тогда фокусы имеют координаты $F_1(-\sqrt{17}, 2)$ и $F_2(\sqrt{17}, 2)$, а точки пересечения гиперболы с осью **ординат** (?) имею координаты $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ и $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.

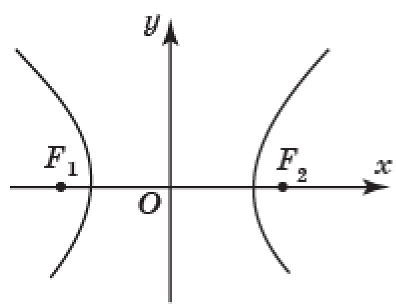


Рис. 227

4) Нарисуйте фигуру, которая задается неравенствами
$$\begin{cases}-8 \le x \le 0,\\ 0 \le y \le 5,\\ x-y+2 \le 0,\\ 2x-3y+25 \ge 0.\end{cases}$$

Решение дано на рисунке 228.

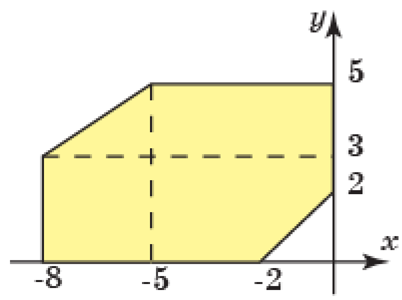


Рис. 228

Урок 3

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Точки M плоскости, расположенные внутри окружности (O; R) задаются …

2. Полуплоскость задается …

3. Система неравенств $\begin{cases} 0 \le x \le 3; \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$ задает …

4. Уравнение параболы имеет вид …

5. Эллипсом называется …

6. Фокусами гиперболы называются …

Вариант 2

1. Точки K плоскости, расположенные вне окружности (O; R) задаются …

2. Чтобы определить, какой полуплоскости относительно прямой принадлежит точка, нужно …

3. Система неравенств $\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ задает …

4. Параболой называется …

5. Уравнение эллипса имеет вид …

6. Асимптотами гиперболы называются …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Решение задач

1. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y^2=x$, является параболой. Нарисуйте эту кривую. Найдите фокус и директрису этой параболы.

2. Нарисуйте геометричекое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $y > x^2$; б) $y < x^2$; в) $x > y^2$; г) $x < y^2$.

3. Докажите, что движения переводят эллипсы в эллипсы. Каким движением эллипс, заданный уравнением $x^2+\frac{1}{2}y^2=1$, переводится в эллипс $\frac{1}{2}x^2+y^2=1$?

Ответы. **1.** Если поменять местами оси координат, то данное уравнение имеет вид уравнения параболы, а именно, $4\cdot\frac{1}{4}x= y^2$ (рис. 229), тогда координаты фокуса $F(\frac{1}{4}, 0)$ и директриса имеет уравнение $x+\frac{1}{4}=0$. **2.** Точки: а) внутри параболы (рис. 223); б) вне параболы (рис. 223); в) внутри параболы (рис. 229); г) вне параболы (рис. 229). **3.** Поворот на 90°.

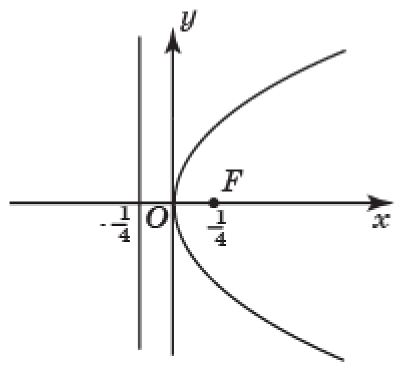


Рис. 229

IV. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 73* учебника).

2. Решить задачи.

1) Докажите, что движение переводит параболы в параболы. Какое движение переводит параболу $y = x^2$ в параболу $y^2 = x$?

Ответ. Поворот на 90°.

2) На рисунке 230 изображен шестиугольник *OABCDE*. Запишите неравенства, которые его задают.

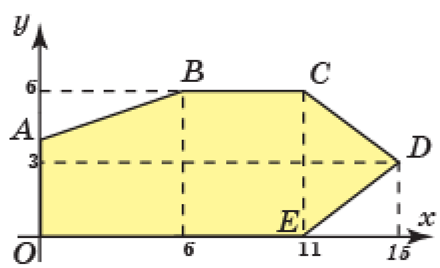


Рис. 230

Ответ. $\begin{cases} 0 \le x \le 15, \\ 0 \le y \le 6, \\ x - 3y + 12 \ge 0, \\ 3x + 4y - 57 \le 0, \\ 3x - 4y - 33 \le 0. \end{cases}$

3) Вершина параболы расположена в начале координат. Уравнение директрисы имеет вид y–2=0. Найдите координаты ее фокуса и запишите ее уравнение.

Ответ. $F(0, -2)$; $8y=-x^2$.

4) 6. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$.

Ответ. $\begin{cases} 3x + 2y - 9 \geq 0, \\ x + 3y - 10 \leq 0, \\ 2x - y - 6 \leq 0. \end{cases}$

74*. Задачи оптимизации
(два урока)

Цель – познакомить учащихся с прикладными задачами, так называемыми, задачами оптимизации и их видами (транспортной задачей, задачей о диете и др.); рассмотреть примеры таких задач, научиться составлять для них математическую модель.

Урок 1

I. Устная работа

1) Какая фигура задается неравенством $y \leq 0$?

2) Какая фигура задается неравенствами: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -5 \leq y \leq 0 \end{cases}$?

3) Вершины треугольника KLO имеют координаты $K(-5,\ 0)$, $L(0,\ 5)$, $O(0,0)$. Какими неравенствами задается данный треугольник?

4) Назовите неравенства, определяющие треугольник, изображенный на рисунке (рис. 231).

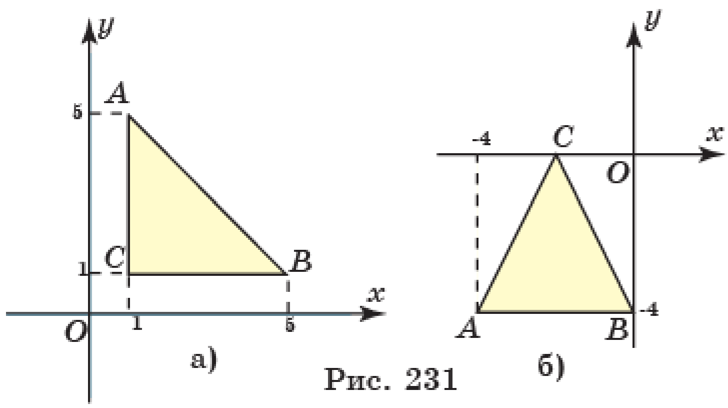


Рис. 231

Ответы. **1)** III и IV четверти координатной плоскости. **2)** Прямоугольник, расположенный в IV четверти координатной плоскости. **3)** $\begin{cases} -5 \leq x \leq 0, \\ 0 \leq y \leq 5, \\ x - y + 5 \geq 0 \end{cases}$. **4)** а) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 5, \\ 1 \leq y \leq 5, \\ x + y - 6 \leq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -4 \leq x \leq 0, \\ -4 \leq y \leq 0, \\ 2x + y + 4 \leq 0, \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$.

II. Новый материал

Вопросы

- Как Вы думаете, какая задача называется прикладной?

- Как Вы понимаете, что означает в бытовом отношении оптимизация, например, какого-то процесса?

Рассмотрим несколько прикладных задач, решаемых с помощью математики. Среди них выделяются так называемые задачи оптимизации, а именно:

– транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

– задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

– задача составления оптимального плана производства;

– задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912-1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Замечание. Дальше разбираем транспортную задачу, приведенную в учебнике, непосредственно используя текст учебника.

Задача. Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т.е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

На примере решения данной задачи подробно представляем учащимся *основные этапы решения прикладных задач*:

1. Составление математической модели, т.е. перевод представленной задачи на математический язык подходящей для ее решения теории.

2. Решение задачи внутри модели.

3. Интерпретация математического решения, т. е. перевод полученного результата решения на язык исходной задачи.

III. Закрепление нового материала

1. Найдите наибольшее значение функции $F=x+y$ при условии, что:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 15, \\ 2x + 6y \leq 12, \\ x \leq 3, y \leq 2. \end{cases}$$

2. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ -2-2x-y \leq 0, \\ 2-x+y \geq 0, \\ 5-x-y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F=y-x$.

Ответы. **1.** Многоугольник ограничений *OABC* изображен на рисунке 232, $F(O)=0$, $F(A)=2$, $F(B)=2{,}8$, $F(C)=3$, таким образом, наибольшее значение достигается в точке *B* и равно 3,8.

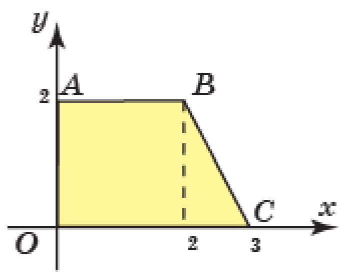


Рис. 232

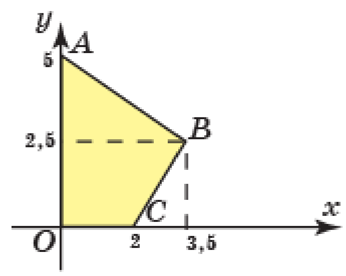


Рис. 233

2. Система ограничений определяет многоугольник *OABC*, изображенный на рисунке 233, $F(O)=0$, $F(A)=5$, $F(B)=1$, $F(C)=-2$, таким образом, наибольшее значение достигается в точке *C* и равно -2.

IV. Задание на дом

1. Выучить разобранную на уроке теорию (п. 74* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x+4y-48 \leq 0, \\ 3x-4y \geq 0, \\ x \geq 4, y \geq 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 2x-y \geq 0, \\ x-y \geq 1, \\ x \leq 7, y \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. а) Многоугольник *ABCD* изображенный на рисунке 234, а; б) многоугольник *ABC*, изображенный на рисунке 234, б.

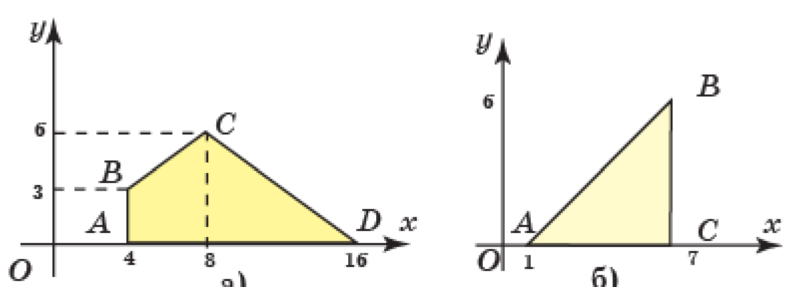


Рис. 234

2) Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида - 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 120 руб., а от реализации одного трансформатора второго вида - 100 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

Решение. Пусть x, y – число транформаторов первого и второго вида соответственно. Тогда прибыль от производства этих трансформаторов задается функцией $F = 120x + 100y$. Переменные x, y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 480, \\ 3x + 2y \leq 300. \end{cases}$$

Эта система определяет четырехугольник $OABC$ на плоскости (рис. 235).

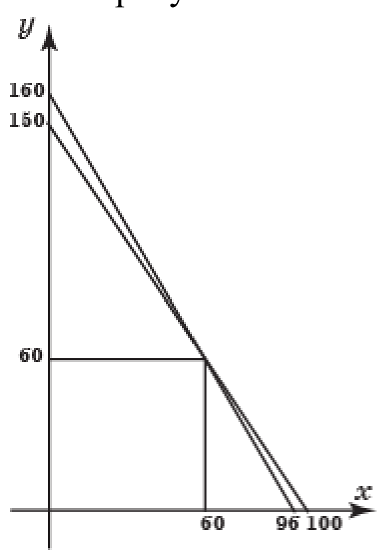


Рис. 235

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 480, \\ 3x + 2y = 300, \end{cases}$$

находим координаты вершины $B(60, 60)$. Остальные вершины имеют координаты $O(0, 0)$, $A(96, 0)$, $C(0, 150)$. Вычислим значения функции F в этих точках. Имеем, $F(O) = 0$, $F(A) = 120 \cdot 96 = 11520$, $F(B) = 120 \cdot 60 + 100 \cdot 60 = 13200$, $F(C) = 80 \cdot 150 = 12000$.

Таким образом, для получения наибольшей прибыли нужно выпустить по 60 трансформаторов первого и второго вида.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой.

Вариант 1

1. Среди задач оптимизации можно выделить …
2. Математическая модель задачи – это перевод …
3. Основополагающим свойством в задачах оптимизации является то, что …
4. На многоугольнике наименьшее значение линейная функция принимает в …
5. Геометрической интерпретацией задачи оптимизации является …

Вариант 2

1. Транспортная задача заключается в том, чтобы …
2. Метод решения задач оптимизации был разработан …
3. Многоугольник ограничений – это …
4. На многоугольнике наибольшее значение линейная функция принимает в …
5. Плоская фигура, получающаяся при решении задачи оптимизации, является …

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Устная работа

1) Назовите несколько точек, которые принадлежат полуплоскости, заданной неравенством: а) x-2y+5≥0; б) 3x+4y-12≤0.

2) Назовите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) x<0; б) y-3≥5.

3) Назовите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) |x|≥10; б) |y|<7.

4) На многоугольнике, изображенном на рисунке (рис. 236), найдите: а) наибольшее; б) наименьшее значение функции $f = x$-y.

*Ответы***. 1)** а) (4, -1), (-3, 1); б) (0, 0), (1, 1). **2)** а) I и IV четверти координатной плоскости без оси ординат; б) «верхняя» полуплоскость относительно прямой y=8. **3)** а) «Левая» полуплоскость относительно прямой x=-10 и «правая полуплоскость относительно прямой x=10; б) полоса, определяемая прямыми y=-7 и y=7 без самих прямых. **4)** f_o=0, f_A=0, f_B=-5, f_C=-3, значит: а) 0; б) -5.

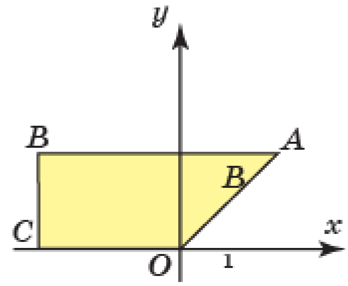


Рис. 236

IV. Решение задач

1. Нарисуйте фигуру, координаты которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x - y \geq 3, \\ x + 2y \leq 6, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее значение функции F=3x+4y при условии

$$\begin{cases} 2x \geq 2, y \geq 0, \\ 6x + 6y \leq 36, \\ 4x + 8y \leq 32. \end{cases}$$

3*. Для перевозки готовых изделий четырех типов А, Б, В, Г завод использует стандартные ящики. Форма и габариты изделий таковы, что на заводском складе применяются два способа упаковки изделий в ящики. При первом способе в ящик помещается одно изделие типа А, два изделия типа Б, одно изделие типа В и пять изделий типа Г. При втором способе в ящик помещается два изделия типа А, одно изделие типа Б, пять изделий типа В и одно изделие типа Г. Магазин запросил доставить не менее: 400 изделий типа А, 500 изделий типа Б, 500 изделий типа В и 1000 изделий типа Г. Может ли склад осуществить упаковку требуемых изделий, если имеется 300 ящиков? Каково наименьшее количество ящиков, необходимых для упаковки изделий?

Ответы. **1.** См. рисунок 237, треугольник *ABC*.

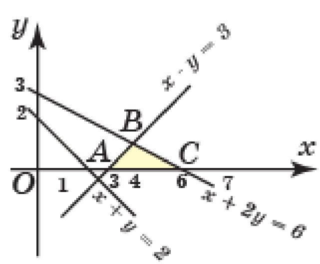


Рис. 237

2. См. рисунок 238, многоугольник $ABCD$, $F(A)=3$, $F(B)=17$, $F(C)=20$, $F(D)=18$, значит, равно 3.

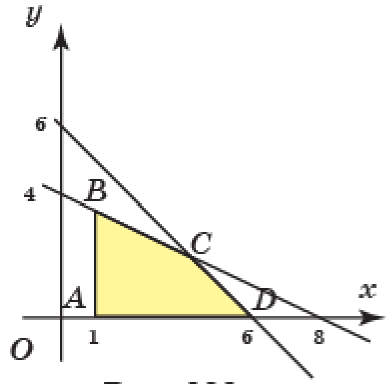


Рис. 238

3*. Пусть необходимо x ящиков первого типа и y ящиков второго типа. Переменные x и y удовлетворяют следующей системе неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x + y \leq 300, \\ x + 2y \geq 400, \\ 2x + y \geq 500, \\ x + 5y \geq 500, \\ 5x + y \geq 1000. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет только пара (200, 100), являющаяся координатами точки B (рис. 239).

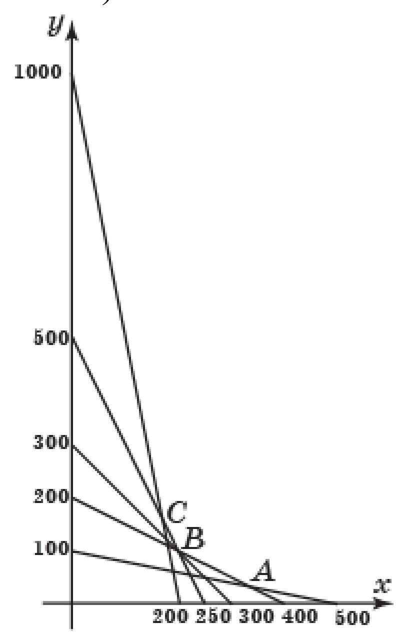


Рис. 239

Таким образом, упаковку всех изделий можно осуществить в 300 ящиков. При этом в 200 ящиков нужно упаковать изделия первым способом и в 100 – вторым.

V. Задание на дом

1. Повторить теорию (п. 74* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству: а) $x–y\leq 1$; б) $3x+2y>0$; в) $|x|<2$; г) $|y|\geq5$.

Ответ. а) «Нижняя» полуплоскость, определяемая прямой $x–y=1$; б) «Правая» полуплоскость, определяемая прямой $3x+2y=0$, без самой прямой; в) полоса между прямыми $x=-2$ и $x=2$ без самих прямых; г) полуплоскости, определемые прямыми $y=-5$ и $y=5$.

2) Найдите наибольшее значение функции $F=3x+3y$ при условии

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 15, \\ 2x + 6y \leq 12, \\ 2x \leq 6,\ 2y \leq 4. \end{cases}$$

Ответ. См. рисунок 240, многоугольник $OABC$, где $O(0, 0)$, $A(0, 2)$, $B(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4})$, $C(3, 0)$, тогда $F(O)=0$, $F(A)=6$, $F(B)=10,5$, $F(C)=9$, таким образом, искомое значение равно 10,5.

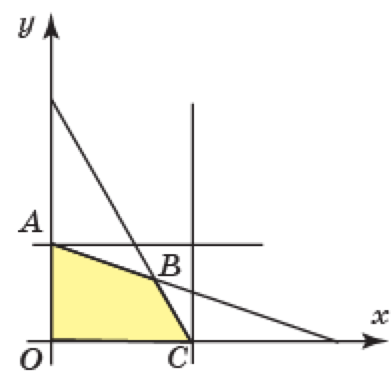


Рис. 240

3*) Для изготовления полки нужно вырезать из фанеры одну заготовку для задней стенки (деталь А), две заготовки для боковинок (деталь Б) и три одинаковых заготовки для верхней, средней и нижней горизонтальных панелей (детали В). Имеющиеся на мебельном комбинате листы фанеры таковы, что при первом способе раскроя из одного листа можно изготовить одну деталь типа А, 4 типа Б и 8 типа В, а при втором способе 3 детали типа А, 2 типа Б и 2 типа В. Можно ли, имея 180 листов фанеры, изготовить 200 полок? Как осуществить раскрой материала, чтобы было использовано наименьшее число листов фанеры?

Ответ. **3*.** Пусть необходимо x листов фанеры первого типа раскроя и y листов фанеры второго типа раскроя. Переменные x и y удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x + y \leq 180, \\ x + 3y \geq 200, \\ 4x + 2y \geq 400, \\ 8x + 2y \geq 600. \end{cases}$$

Она определяет на плоскости четырехугольник $ABCD$ (рис. 241), вершины которого имеют координаты $A(80, 40)$, $B(50, 100)$, $C(40, 140)$, $D(170, 10)$. Число листов фанеры задается функцией $F=x+y$. Вычислим ее значения в вершинах четырехугольника ABC. Имеем $F(A)=120$, $F(B)=150$, $F(C)=180$, $F(D)=180$. Таким образом, наименьшее число листов фанеры для изготовления 200 полок равно 120. При этом нужно 80 листов фанеры раскроить первым способом и 40 листов фанеры – вторым.

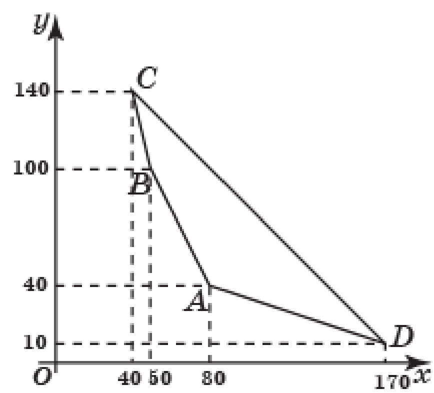


Рис. 241

76*. Полярные координаты
(два урока)

Цель – познакомить учащихся с полярными координатами точки на плоскости, сравнить их с декартовыми координатами; научиться переводить одни координаты в другие; вывести уравнения окружности, спирали Архимеда, трилистника.

Урок 1

I. Устная работа

1) Из точки: а) $A(-4, 1)$; б) $B(5, -\frac{1}{2})$; в) $M(-7{,}5, -11)$; г) $N(\sqrt{5}, -8)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты его основания.

2) Из точки: а) $C(-14, 1)$; б) $D(5, -9)$; в) $E(0, -18)$; г) $F(-20, -20)$ опущен перпендикуляр на ось ординат. Найдите координаты его основания.

3) На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 30. Чему равна ордината другой точки?

4) На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна -15. Чему равна абсцисса другой точки?

5) Найдите координаты середины отрезка EF, если: а) $E(-12, 5)$, $F(2, 13)$; б) $E(0, 1)$, $F(-6, -11)$; в) $E(0, -12)$, $F(-8, 0)$; г) $E(0{,}8, -1)$, $F(-0{,}2, 1)$.

6) Найдите координаты точки K_1, симметричной точке: а) $K(1, 3)$; б) $K(-5, 0)$; в) $K(0, -7)$; г) $K(-x, y)$ относительно оси абсцисс.

7) Найдите координаты точки L_1, симметричной точке: а) $L(9, -3)$; б) $L(6, 0)$; в) $L(0, -10)$; г) $L(x, -y)$ относительно оси ординат.

8) Найдите координаты точки P_1, симметричной точке: а) $P(1, 2)$; б) $P(6, -8)$; в) $P(0, -10)$; г) $P(x, y)$ относительно начала координат.

Ответы. **1)** а) (-4, 0); б) (5, 0); в) (-7,5, 0); г) ($\sqrt{5}$, 0). **2)** а) (0, 1); б) (0, -9); в) (0, -18); г) (0, -20). **3)** 30. **4)** -15. **5)** а) (-5, 9); б) (-3, -5); в) (-4, -6); г) (0,3, 0). **6)** а) (1, -3); б) (-5, 0); в) (0, 7); г) ($-x$, $-y$). **7)** а) (-9, -3); б) (-6, 0); в) (0, -10); г) ($-x$, $-y$). **8)** а) (-1, -2); б) (-6, 8); в) (0, 10); г) ($-x$, $-y$).

II. Новый материал

Наряду с декартовыми координатами на плоскости, во многих случаях более удобными оказываются так называемые ***полярные координаты***.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например**:** "Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели". При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая в данном случае будет называться ***полярной осью***. Точка O называется ***полюсом*** (рис. 242).

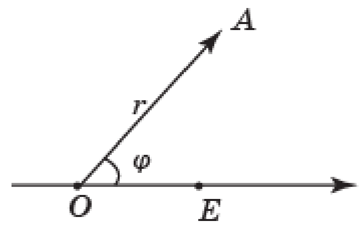


Рис. 242

Вопросы

- Как определить координаты точки A на рисунке?

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r - расстояние от точки A до точки O, φ - угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$ и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$.

При этом первая координата r называется ***полярным радиусом***, а вторая φ - ***полярным углом***. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

- Как Вы думаете, если на плоскости задана декартова система координат, то что удобно принять за полюс и что за полярную ось?

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось – ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ).

- Пусть точка B имеет в полярные координаты (r, φ). Как выражаются при этом ее декартовы координаты (x, y).

Из треугольника OBH (рис. 243) получим формулы $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

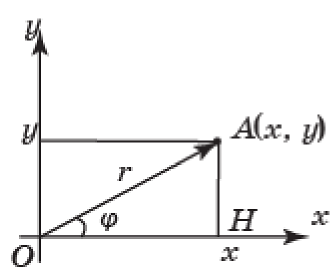


Рис. 243

- Наоборот, если заданы декартовы координаты точки $B(x, y)$, то как через них выразить полярные координаты?

Из того же треугольника OBH имеем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

- Каким уравнением в полярных координатах задается окружность?

Окружность радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r=R$. Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r=R$. При этом, если угол φ увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением $r=a\varphi$ (рис. 244),

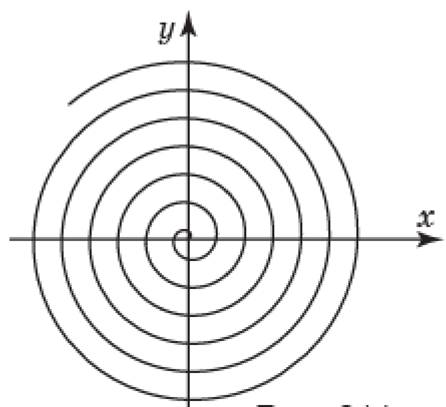


Рис. 244

где a - некоторое фиксированное число, угол φ задается в радианах.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r=0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам ϕ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус r также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r=\frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т.е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь человека, ее открывшего и изучившего ее свойства (рис. 244).

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно

$2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины - механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку - имеет форму спирали Архимеда.

III. Закрепление нового материала

1. Изобразите в полярных координатах точки $A(3, 0)$, $B(8, \frac{\pi}{4})$ и $E(5, -\frac{\pi}{2})$.

2. Полярные координаты точки равны: а) $(1, \pi)$; б) $(2, -\frac{\pi}{2})$. Найдите ее декартовы координаты.

3. Изобразите ГМТ на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют равенству: а) $r–1=0$; б) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

4*. Запишите уравнение спирали Архимеда, если расстояние между ее соседними витками равно 3.

Ответы. **2.** а) (-1, 0); б) (0, -2). **3.** а) Окружность с центром в начале координат и радиусом 1; б) луч с вершиной в начале координат, составляющий с полярной осью угол $-\frac{\pi}{4}$. **4*.** $r = \frac{3}{2}\pi\varphi$.

IV. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 76* учебника).

2. Решить задачи.

1) Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $(1, \frac{\pi}{3})$; б) $(2, -\frac{\pi}{4})$.

Ответ. а) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2) Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; б) (-10, 0); в) $(1, -\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.

Ответ. а) $(2, 45O)$; б) $(10, 180O)$; в) $(2, -60O)$; г) $(2, 150O)$.

3) Найдите полярное уравнение прямой $x = -2$.

Ответ. $r\cos\varphi = -2$.

4) Запишите уравнение спирали Архимеда, если расстояние между ее соседними витками равно $\frac{1}{3}$.

Ответ. $r = \frac{1}{6\pi}\varphi$.

Урок 2

I. Математический диктант

Проводится на листочках с копировальной бумагой

Вариант 1

1. Полярной осью называется …
2. Полярным углом называется …
3. Декартовы координаты точки на плоскости выражаются через ее полярные координаты по формулам …
4. Найдите полярные координаты точки $A(2, 2)$.
5. Спираль Архимеда – кривая, задаваемая в полярных координатах уравнением …

Вариант 2

1. Полюсом называется …
2. Полярным радиусом называется …
3. Полярные координаты точки на плоскости выражаются через ее декартовы координаты по формулам …
4. Найдите декартовы координаты точки B(1, 45°).
5. Окружность в полярных координатах задается уравнением …

Ответы. *Вариант 1*. 4. $(2\sqrt{2}, 45O)$. *Вариант 2*. 4. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

II. Проверка математического диктанта

Проводится с помощью кодоскопа или проектора.

III. Новый материал

Рассмотрим кривую, которая называется т**рилистник**, и которая задается в полярных координатах уравнением $r=\sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ:

$$0° \leq \varphi \leq 60°;\ 120° \leq \varphi \leq 180°;\ 240° \leq \varphi \leq 300°.$$

Итак, пусть $0° \leq \varphi \leq 60°$. Если угол φ изменяется от нуля до 30°, то sin 3φ изменяется от нуля до единицы и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60°, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 245).

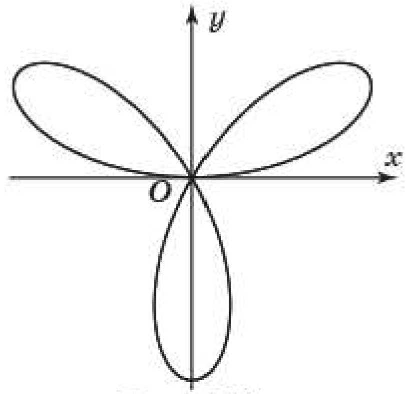


Рис. 245

IV. Закрепление нового материала

1. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 4\varphi$.

2*. Определите расстояние между точками $A(3, -\frac{\pi}{6})$ и $C(1, \pi)$.

Ответы. **1.** См. рисунок 246. **2.** $\sqrt{7}$.

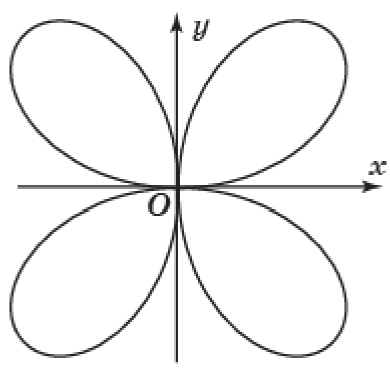


Рис. 246

V. Задание на дом

1. Выучить теорию, разобранную на уроке (п. 76* учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30° < \varphi < 60°$; б) $1 < r < 2$; в) $30° < \varphi < 60°$, $1 < r < 2$.

Ответ. См. рисунок 247: а) $\angle AOB$ без лучей OA и OB, где $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 60°$; б) кольцо между окружностями с радиусами 1 и 2, без самих окружностей; в) часть кольца, пересечение двух первых геометрических мест.

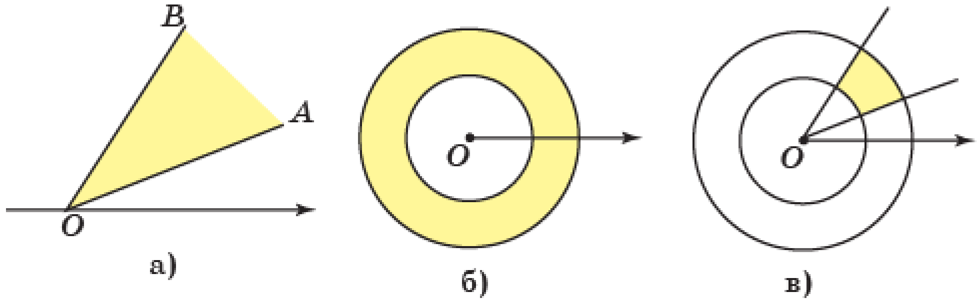


Рис. 247

2) Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.
Ответ. См. рисунок 248.

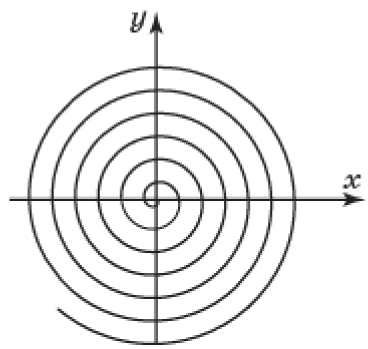


Рис. 248

3) Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos\varphi$.
Ответ. См. рисунок 249.

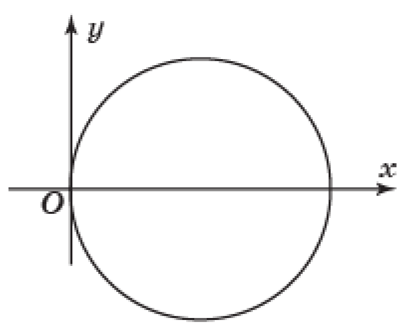


Рис. 249

§ 5. ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

Тема «Площади плоских фигур»

Определения понятий

1. Площадь плоской фигуры.
2. Единицы измерения площади.
3. Равновеликие фигуры.
4. Равносоставленные фигуры.
5. Круговой сектор.
6. Круговой сегмент.

Формулировки теорем

1. Свойства площадей.
2. Теорема о площади прямоугольника.
3. Теорема о площади параллелограмма.
4. Теоремы о площади треугольника.
5. Теорема о площади трапеции.
6. Теорема о площади правильного многоугольника.
7. Теорема о площади круга.
8. Теорема о площадях подобных фигур.

Упражнения

1. Найдите отношение площадей двух треугольников, на которые разбивается данный треугольник одной из своих медиан.

2. Найдите отношение площадей двух треугольников, на которые разбивается данный треугольник прямой, проведенной из одной его вершины и делящей противоположную сторону в отношении 1:3.

3. Можно ли данный треугольник разбить на: а) 2; б) 3; в) 4; г) n равновеликих треугольников?

4. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от данного треугольника его средней линией, если площадь данного треугольника равняется 12 см^2.

5. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 5 см, а высота, опущенная на гипотенузу равна 3 см.

6. Как изменится площадь квадрата, если его диагональ: а) увеличить в два раза; б) уменьшить в три раза?

7. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки E, F, G, H – середины соответственно отрезков AO, BO, CO и DO. Найдите площадь четырехугольника $EFGH$, если сторона квадрата равна 1.

8. Могут ли быть равновеликими два неравных: а) параллелограмма; б) квадрата?

9. Найдите стороны прямоугольника, если они относятся как 2:5, а его площадь равна 70 см^2.

10. Найдите площадь треугольника, если его стороны равны 3 см и 4 см, а угол между ними равен 30°.

11. Найдите площадь ромба, если его углы относятся как 1:5, а сторона равна 4 см.

12. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 11 см и 12 см.

13. Основания трапеции равны 7 см и 15 см, ее площадь равна 121 см^2. Найдите высоту трапеции.

14. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности диаметра 2 см, если ее боковая сторона равна 5 см.

15. Найдите площадь правильного шестиугольника, периметр которого равен 12 см.

16. Про какие многоугольники можно сказать, что если они равновелики, то обязательно равны?

17. Найдите отношение площадей круга, построенного на отрезке a, как на диаметре, и полукруга, построенного на отрезке $2a$, как на диаметре.

18. Как изменится диаметр круга, если его площадь увеличится в 16 раз?

19. Площадь круга равна Q. Найдите площадь сектора с дугой: а) 90°; б) 60°; в) 150°; г) 270°.

20. Найдите площадь полукольца транспортира, если радиус внешней полуокружности равен 4 см, а внутренней 3 см.

Тема «Координаты и векторы»
Определение понятий

1. Координатная прямая.
2. Координатная плоскость.
3. Начало координат.
4. Координаты точки. Абсцисса, ордината точки.
5. Прямоугольная система координат.
6. Уравнение окружности. Неравенство круга.
7. Вектор.
8. Длина (модуль) вектора.
9. Равные векторы.
10. Нулевой вектор.
11. Сумма векторов.
12. Произведение вектора на число.
13. Координаты вектора.
14. Скалярное произведение векторов.
15. Уравнение прямой.

Формулировки теорем

1. Расстояние между точками на координатной прямой.
2. Расстояние между точками на координатной плоскости.
3. Координаты середины отрезка.
4. Переместительный закон сложения векторов.
5. Сочетательный закон сложения векторов.
6. Сочетательный закон умножения вектора на число.
7. Распределительный закон умножения векторов.
8. Разложение вектора по координатным векторам.
9. Координаты суммы векторов.
10. Координаты произведения вектора на число.
11. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты.
12. Теорема об уравнении прямой на плоскости.

Упражнения

1. На прямой, перпендикулярной оси *Ox,* взяты две точки, одна из которых имеет абсциссу, равную 12. Найдите абсциссу второй точки.

2. На прямой, перпендикулярной оси *Oy,* взяты две точки, одна из которых имеет ординату, равную 9. Найдите ординату второй точки.

3. Из точки $M(4, -3)$ опущены перпендикуляры на координатные прямые. Найдите координаты оснований перпендикуляров.

4. Через точку $N(-2, 8)$ проведена прямая, параллельная оси *Ox*. Найдите координаты точки ее пересечения с осью *Oy*.

5. Найдите координаты середины отрезка *KL*, если $K(-1, 2)$, $L(3, -5)$.

6. Сколько различных векторов задают две соседние вершины: а) параллелограмма; б) квадрата; в) трапеции?

7. Найдите координаты вектора $\vec{a}$-2$\vec{b}$, если $\vec{a}$ (5, 0), $\vec{b}$ (-2, 6).

8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1, -2)$, $B(-1, 2)$.

9. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ (-6, 8), $\vec{n}$ (-1, -11).

10. На отрезке *AB* даны две точки *C* и *D*, которые делят отрезок на три равные части. Выразите вектор: а) $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CD}$ через $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{CD}$.

11. В параллелограмме *ABCD* точки *E* и *F* являются серединами соответственно его сторон *AB* и *BC*. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

12. Разложите вектор $\overrightarrow{AA_1}$, соединяющий вершину A треугольника ABC с серединой его противоположной стороны по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

13. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$, соединяющий центр тяжести M (точку пересечения медиан) треугольника ABC с вершиной A по векторам: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

14. Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox; б) Oy?

15. Какие уравнения имеют биссектрисы: а) первого и третьего координатных углов; б) второго и четвертого координатных углов?

16. Найдите угловой коэффициент прямой: а) $6x+y-1=0$; б) $x-2y+10=0$.

17. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) -2; б) $\frac{1}{2}$.

18. Найдите угол между прямыми $2x-y+1=0$ и $x+y=0$.

19. Найдите точку пересечения прямых: а) $2x+y-1=0$ и $x-y+1=0$; б) $10x+y-1=0$ и $x-y+1=0$.

20. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку (-1, 2) параллельно прямой $5x+y-3=0$.

О Т В Е Т Ы

Контрольные работы

№ 1

Вариант 1. **1.** $\mathbf{2\sqrt{21}}$ см^2. **2.** $4\sqrt{3}$ см^2. **3.** 21 дм, 35 дм. **4.** 144 см^2. **5*.** 84 см^2. *Указание*. Продолжите медиану на отрезок, равный ей.

Вариант 2. **1.** 20,25 см^2. **2.** 72 см^2. **3.** $3\sqrt{\mathbf{14}}$**-**6 **(**дм), $3\sqrt{\mathbf{14}}$**+**6 **(**дм). **4.** 192 см^2. **5*.** 72 см^2. *Указание*. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точка пересечения медиан треугольника и концы данной стороны.

№ 2

Вариант 1. **1.** $6\sqrt{3}$ дм^2. **2.** 18π см, 27π см. **3.** $7{,}8\sqrt{6}$ см. **4.** 56,25 мм. **5).** 4:3.

Вариант 2. **1.** $18\sqrt{3}$ дм^2. **2.** 10000π см^2, 3600π см^2. **3.** $4(\pi - r)$ см^2. **4.** 185 мм^2. **5*.** $\frac{1}{6}Q$.

№ 3

Вариант 1. **1.** а) $\sqrt{74}$; б) $\sqrt{122}$. **2.** а) (10, -2,5); б) (-6, 12). **3.** (9, -7), $\sqrt{5}$. **4.** ($2\frac{1}{22}$, 0). **5*.** Полоса, ограниченная прямыми y = -3 и y = -1.

Вариант 2. **1.** а) $\sqrt{205}$; б) $\sqrt{58}$. **2.** а) (4,5, -16); б) (9,5, -7). **3.** (-5, 11), $2\sqrt{3}$. **4.** (0, 4). **5*.** Точки вне полосы, ограниченной прямыми x = -1 и x = 3.

№ 4

Вариант 1. **1.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\vec{0}$. **2.** а) (9, -27); б) (-3, 29). **3.** а) H(-11, 9); б) G(7, -18). **4.** $\frac{19}{99}$.

Вариант 2. **1.** а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{MC}$; в) $\vec{0}$. **2.** а) (-22, 18); б) (32, -3). **3.** а) K(-8, -4); б) N(4, 0). **4.** -36.

№ 5

Вариант 1. **1.** $5x$-y-59=0. **2.** Принадлежит: а) I; б) III; в) III четверти координатной плоскости. **3.** а) -$\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) -3. **4.** а) $-\cos^2\beta$; б) -$\cos^2\alpha$. **6*.** Луч с вершиной в точке (0, 2), сонаправленный с биссектрисой угла I четверти координатной плоскости, и луч, симметричный ему относительно оси ординат.

Вариант 2. **1.** $3x$+$4y$+4=0. **2.** Принадлежит: а) I; б) IV; в) IV четверти координатной плоскости. **3.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. а) $\cos\alpha$; б) 0. **4.** (0, 1); б) ($\frac{\sqrt{6}}{2}$, -$\frac{\sqrt{6}}{2}$). **6*.** Луч с вершиной в точке (1, 0), сонаправленный с биссектрисой угла I четверти координатной плоскости, и луч, симметричный ему относительно оси абсцисс.

№ 6

Вариант 1. **1.** а) Бесконечно много; б) одна; в) одна или три. **2.** 1440°. **3.** а) 90°; б) 60°; в) 45°. **4.** 31,5 см. **5*.** *В*=6, *Г*=8; правильный октаэдр; четырехугольная бипирамида.

Вариант 2. **1.** а) Бесконечно много; б) бесконечно много; в) одна или бесконечно много. **2.** 3600°. **3.** а) 90°; б) 60°; в) 90°. **4.** 28,5 см. **5.** *В*=8, *Г*=6; куб; четырехугольная призма; четырехугольная усеченная пирамида.

Итоговое повторение

Тема «Площади плоских фигур»

1. 1. **2.** 1:3. **3.** Да, для этого нужно одну из сторон треугольника разбить на: а) 2; б) 3; в) 4; г) *n* равных частей и точки деления соединить с противоположной вершиной треугольника. **4.** 3 см^2. **5.** 15 см^2. **6.** а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз. **7.** $\frac{1}{4}$. **8.** а) Да; б) нет. **9.** $2\sqrt{7}$см; $5\sqrt{7}$см. **10.** 3 см^2. **11.** 8 см^2. **12.** 66 см^2. **13.** 11 см. **14.** 10 см^2. **15.** $6\sqrt{3}$см^2. **16.** Подобные. **17.** 1:2. **18.** Увеличится в 4 раза. **19.** а) $\frac{Q}{4}$; б) $\frac{Q}{6}$; в) $\frac{5Q}{12}$; г) $\frac{3Q}{4}$. **20.** $3{,}5\pi$ см^2.

Тема «Координаты и векторы»

1. 12. **2.** 9. **3.** (4, 0), (0, -3). **4.** (0, 8). **5.** (1, -1,5). **6.** а) 2; б) 2; в) 2. **7.** (9, -12). **8.** $2\sqrt{5}$. **9.** –82. **10.** а) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; б) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$; в) $3\overrightarrow{CD}$; г) $-2\overrightarrow{CD}$. **11.** $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$. **12.** а) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **13.** а) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; б) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$; в) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. **14.** а) y=0; б) x=0. **15.** а) $x–y$=0; б) $x+y$=0. **16.** а) –6; б) $\frac{1}{2}$. **17.** а) $2x+y$=0; б) $x–2y$=0. **18.** cos φ $=\frac{\sqrt{10}}{10}$. **19.** а) (0, 1); б) (0, 1). **20.** $5x+y+3=0$.

С О Д Е Р Ж А Н И Е