И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

ТЕТРАДЬ ПО ГЕОМЕТРИИ

7 класс

Настоящая тетрадь по геометрии предназначена для работы в 7-ом классе по учебнику: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2005.

Она соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений и будет полезна для более эффективной организации учебного процесса: при изучении теоретического материала, выполнении классных и домашних работ, а также при проведении различного рода самостоятельных и индивидуальных работ учащихся.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята! Вы начинаете изучать один из самых увлекательных и важных разделов математики – геометрию. Зачем же она нужна?

Во-первых, именно она формирует пространственные представления, необходимые каждому человеку.

Во-вторых, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А.Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в которой они взаимно организуют и направляют друг друга.

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению практических навыков в изображении, моделировании и конструировании фигур, в измерении основных геометрических величин.

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н.И. Лобачевского и многих других.

Формы геометрических фигур находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора". Вот какой замечательной наукой вы познакомитесь.

Успешному изучению геометрии поможет предлагаемая тетрадь. Весь собранный в ней материал разбит на отдельные пункты, соответствующие параграфам учебника. Задания подобраны и представлены таким образом, чтобы освободить вас от вспомогательной и непроизводительной работы, например, копирования условий задачи или чертежа, от выполнения несущественных дополнительных построений и т.п. Упражнения весьма разнообразны. В ряде из них вам нужно будет заполнить пропуски в формулировках определений и теорем, в других – ответить на предложенный вопрос, выполнить дополнительные построения или решить задачу.

Желаем успехов в изучении геометрии!

1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

1.1. Закончите предложения.

1. Основными геометрическими фигурами являются ____________
____

2. Точки являются идеализацией ______________________________
____
____

3. Точки обозначаются ______________________________________
____

4. Прямая является идеализацией ____________________________
____
____

5. Прямые обозначаются ____________________________________
____

6. Плоскость является идеализацией __________________________
____
____

7. В переводе с греческого слово "аксиома" означает _____________
____

8. Аксиомы геометрии можно рассматривать как ________________
____

9. Используя аксиомы, путем логических рассуждений выводятся (доказываются) свойства геометрических фигур, называемые _________
____
Логические рассуждения называются ___________________________

10. Планиметрией называется раздел геометрии, изучающий ______
____

1.2. Что означает слово «геометрия»?
Ответ ____

1.3. Как называются две прямые, имеющие одну общую точку?
Ответ ____

1.4. Как называются две прямые, не имеющие общих точек?
Ответ ____

1.5. Сколько прямых можно провести через две точки?
Ответ ____

1.6. Как могут располагаться по отношению друг к другу точка и прямая? Изобразите случаи их взаимного расположения.

Ответ ______________________________

____

____

____

1.7. Как могут располагаться по отношению друг к другу две прямые? Изобразите случаи их взаимного расположения.

Ответ ____________________________

____

____

____

____

1.8. Могут ли две прямые иметь две общие точки?

Ответ ____

1.9. Сколько прямых изображено на рисунке 1? Сколько у них точек попарных пересечений?

Ответ ____

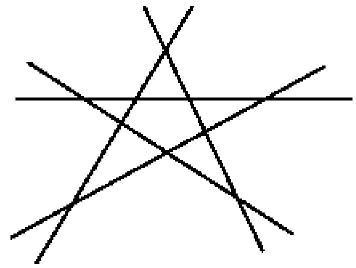


Рис. 1

1.10. Проведите три прямые, не пересекающиеся в одной точке, каждые две из которых пересекаются.

1.11. Проведите четыре прямые так, чтобы каждые две прямые пересекались и никакие три прямые не пересекались в одной точке.

1.12. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) три прямые; б) четыре прямые; в) пять прямых? Сделайте рисунки.

Ответ ____

1.13. Сколько прямых может проходить через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек? Рассмотрите возможные случаи. Сделайте рисунки.

Ответ ____

1.14*. Изобразите четыре прямые и четыре точки так, чтобы на каждой прямой было ровно две точки.

1.15*. Изобразите пять прямых и десять точек так, чтобы на каждой прямой было ровно четыре точки.

2. ОТРЕЗОК И ЛУЧ

2.1. Заполните пропуски.

1. Каждая точка прямой разбивает эту прямую на ___________ части.

2. Из трех точек на прямой только одна ___________________ _____________ двумя другими.

3. Отрезком называется часть прямой, состоящая из ________ данных точек и всех точек ___________________________________. Сами данные точки называются ______________________________.

4. Отрезок обозначается указанием его ___________________. Например, ____.

5. Лучом называется часть прямой, состоящая из ___________ ___________________ и всех точек, лежащих от нее ______________ ______________________. При этом данная точка называется ______ ______________________ или __________________________ луча.

6. Для обозначения лучей используются ___________________, например, ________, первая из которых обозначает ______________ ________________, а вторая - _________________________________ ___________________________________.

7. На любом луче от его начала можно отложить ____________ ______________отрезок, ________________ данному.

8. Равенство отрезков AB и A_1B_1 означает, что если отрезок ___ отложить на луче _________ от точки _________, то отрезок ______ совместится с отрезком ______________.

9. Говорят, что отрезок AB меньше отрезка A_1B_1, если при откладывании отрезка _______ на луче _________ от точки _______, точка ______ переходит в точку _______, лежащую ______________ точками _______ и ________.

2.2. На сколько частей разбивают прямую три точки?

Ответ ____

2.3. На прямой отмечено 3 точки. Сколько отрезков с концами в этих точках при этом образовалось?

Ответ ____

2.4. На прямой отмечено 3 точки. Сколько имеется лучей с вершинами в этих точках?

Ответ ____

2.5. На сколько частей разбивают прямую *n* точек?
Ответ ____

2.6. На отрезке *AB* взята точка *C* (рис. 2). Среди лучей *AB*, *AC*, *CA*, *CB*, *BA*, *BC* назовите пары совпадающих лучей.

Рис. 2

Ответ ____

2.7. Изобразите на прямой точки *A*, *B*, *C*, *D* так, чтобы:

а) точка *C* лежала между точками *A* и *B*, а точка *D* лежала между точками *B* и *C*;

б) точка *A* лежала между точками *B* и *C*, а точка *C* – между точками *A* и *D*.

2.8. Какие операции можно производить над отрезками?
Ответ ____

2.9. Изобразите отрезок, прямую и точку на ней. От данной точки на прямой отложите данный отрезок. Сколько решений имеет задача?

Ответ ____

2.10. Для данных отрезков AB и CD (рис. 3) постройте отрезки: а)

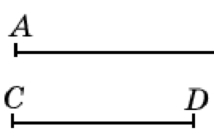


Рис. 3

$AB + CD$; б) $AB - CD$.

2.11. На прямой отмечены точки A, B, C, D (рис. 4). Запишите каждый из отрезков в виде суммы или разности остальных.

Рис. 4

Ответ ____

____

____

2.12. Докажите, что для отрезков на рисунке 4 выполняется равенство $AC + BD = AD + BC$. (Заполните пропуски).

Доказательство. $AC = AB +$ _______, $BD = BC +$ _______. Поэтому $AC + BD =$ _________________________________ $= AB +$ _________ $+ CD + BC = AD + BC$.

2.13. Для данного отрезка AB (рис. 5) постройте отрезки: а) $2AB$; б) $3AB$; в) $4AB$; г) $\frac{1}{2}AB$.

Рис. 5

2.14*. На плоскости даны пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками с двумя другими точками. Сколько всего отрезков? Сделайте рисунок.

Ответ ____

2.15*. На плоскости даны пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Можно ли соединить отрезками каждую из этих точек с тремя другими?

Ответ __

3. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

3.1. Заполните пропуски.

1. Измерение длины отрезка основано на сравнении его с ____ ___________________, длина которого принимается за _____________

2. Длина отрезка – это положительное число, показывающее ________________________________ единичный отрезок и __________ __________________ укладываются в данном отрезке.

3. Длина отрезка AB обозначается _________________________

4. Длины равных отрезков _________________________________

5. Длина суммы отрезков равна ___________________________ ____

6. Расстоянием между точками A и B называют _____________ ____

7. Метр как единица измерения длины отрезка появился _____ ____

8. Эталон метра представляет собой _______________________ ____ ____ ____

3.2. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1,1 дм: г) 0,08 м.

3.3. С помощью линейки измерьте указанные на рисунке 7 отрезки.
Ответ

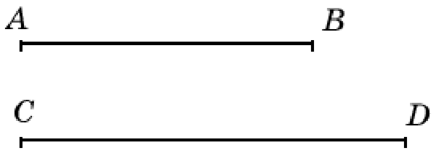


Рис. 7

3.4. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.

3.5. На рисунке 8 найдите наибольший и наименьший отрезки.

Ответ

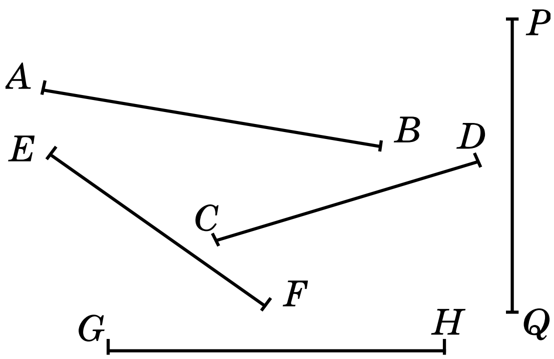


Рис. 8

3.6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Известно, что $AO=2CO$. Сравните отрезки AB и CD. Сделайте рисунок.

Ответ ____________________

____
____

3.8. На рисунке 9 $AB = CD$, $AC = 6$ см. Найдите BD.

Ответ ____

Рис. 9

3.9. На рисунке 9 $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. Найдите длину отрезка BC.

Ответ ____

3.10. Общей частью двух отрезков длины a и b является отрезок длины c. Найдите длину отрезка, покрываемого обоими данными отрезками. Сделайте рисунок.

Ответ ______________________________

____

____

3.11*. Точка B лежит между точками A и C. Точка O – середина отрезка AB, точка P – середина отрезка AC. Докажите, что $BC = 2OP$. (Заполните пропуски.). Сделайте рисунок.

Доказательство. $AB = \_\_\_OB$,
$BC = \_\_\_BP$. $AC = AB + BC = \_\_\_OB + \_\_\_BP = 2OP$.

3.12*. Из трех путей ACB, ADB и AEB из точки A в точку B (рис. 10) выберите кратчайший. Проверьте правильность выбора линейкой.

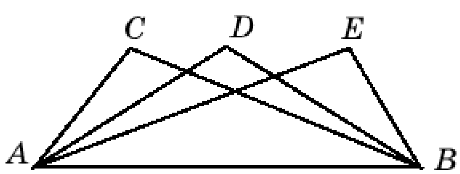


Рис. 10

Ответ ______________________________

____

____

3.13*. Вдоль прямой улицы по одну сторону от нее стоят четыре дома. В каком месте улицы нужно установить газетный киоск, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей. Сделайте рисунок.

Ответ ____

4. ПОЛУПЛОСКОСТЬ И УГОЛ

4.1. Заполните пропуски в формулировке аксиомы.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость ____ ________________________. При этом, если две точки, принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, ____. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, ____ ____

4.2. Заполните пропуски в определениях.

1. Часть плоскости, состоящая из точек ___________________ _____________________ и точек, лежащих _____________________ ____________________от этой прямой называется полуплоскостью.

2. Фигура, образованная ________________________________ с общей вершиной и одной из частей ___________________________, ограниченной этими_____________________ называется углом. ________________________________ называется вершиной угла, ____________________________ - сторонами угла.

3. Угол обозначается или одной буквой, указывающей _______ __________________________ или тремя буквами, средняя из которых указывает _____________________________, а крайние – какие-нибудь точки, лежащие на ______________________________.

4. Точки угла, не принадлежащие _______________________ __________________называются внутренними. Лучи, исходящие из _____________________________, и проходящие через ___________ ___________________________________ называются внутренними.

5. Угол называется развернутым, если его стороны __________ ____

6. Два угла называются смежными, если одна сторона у них _________________, а две другие составляют ___________________.

7. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла дополняют до___________________ стороны _______________ ____________________.

4.3. Заполните пропуски.

1. Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде ___________________________________. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от ________________ в сторону,

определяемую ______________________, то угол AOB совместится с ____.

2. Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B', _______________________________________
________________________, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают _______________________________________.

4.4. Заполните пропуски в аксиомах.

1. От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить _______________________ угол, _____________________ данному.

2. Все развернутые углы _______________________________

4.5. Заполните пропуски в определениях.

1. Угол, равный своему смежному, называется ______________________________.

2. Угол, меньший прямого угла, называется ______________________________.

3. Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого угла, называется _____________________________________.

4. Углом между пересекающимися прямыми называется ______
____
____

5. Две прямые называются перпендикулярными, если ________
____

6. Перпендикулярность прямых a и b обозначается _________.

4.6. Выберите верный ответ из предложенных.

1. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся прямые?

Ответ: 1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 5.

2. На сколько частей разбивают плоскость три луча с общей вершиной? *Ответ*: 1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 5.

3. Сколько углов образуют пары из трех лучей с общей вершиной?

Ответ: 1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 5.

4.7. На сколько частей могут разбивать плоскость три прямые? Изобразите соответствующие ситуации

Ответ ____
____

4.8. Нарисуйте несколько прямых, острых и тупых углов.

4.9. Нарисуйте пересекающиеся прямые и отметьте угол между ними.

4.10. Изобразите перпендикулярные прямые.

4.11. Что называется биссектрисой угла? Изобразите несколько углов и их биссектрис.

Ответ ____

____

4.12. Изобразите прямую p и точки A, B, C, D, E, F такие, что A, E принадлежат данной прямой, а остальные ей не принадлежат, причем D и F лежат в разных полуплоскостях, B и C – в одной полуплоскости, и отрезок BD пересекает прямую p.

4.13. Даны прямая и четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD, если: а) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

Ответ ____
____
____
____

4.14. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие - в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую;

б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.

Ответ ____

4.15. Изобразите лучи *OA*, *OB*, *OC*, *OD* так, чтобы: а) луч *OC* лежал внутри угла *AOB*, а луч *OD* лежал внутри угла *BOC*; б) луч *OA* лежал внутри угла *BOC*, а луч *OC* лежал бы внутри угла *AOD*.

4.16. Сколько всего углов определяется лучами, изображенными на

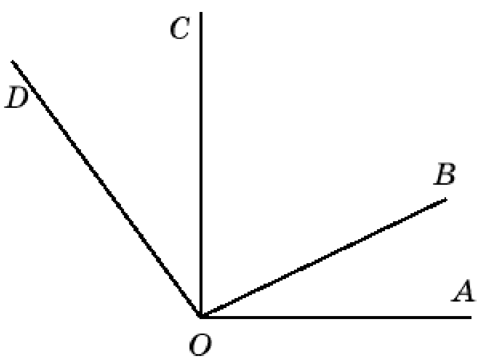


Рис. 11

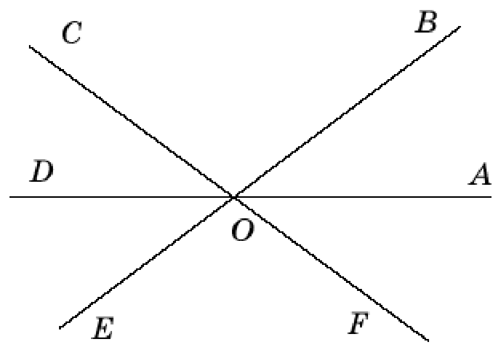


Рис. 12

рисунке 11? Назовите их. Укажите наибольший и наименьший из них.

Ответ ____

4.17. Укажите, какие из углов на рисунке 11: а) острые; б) прямые; в) тупые.

Ответ ____

4.18. По рисунку 12 запишите пары: а) вертикальных углов; б) смежных углов.

Ответ ____

____

4.19*. Докажите, что если два угла равны, то равны и смежные с ними углы. (Заполните пропуски).

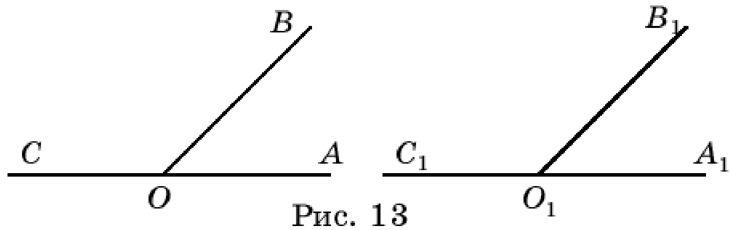


Рис. 13

Доказательство. Пусть угол AOB равен углу ___________. Докажем, что смежный с ним угол BOC равен углу ______________ (рис. 13). Имеем, $\angle BOC = \angle AOC - \angle$ _________ $= \angle A_1O_1C_1 - \angle$ _________ $= \angle$_________.

4.20*. На сколько частей разбивают плоскость: а) четыре попарно пересекающиеся прямые; б) пять попарно пересекающихся прямых; в) n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке? Сделайте рисунки.

Ответ ____

4.21*. Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол? Изобразите эти ситуации.

4.22*. Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки образуют развернутый угол?

Ответ ____

5. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ

5.1. Заполните пропуски.

1. Для измерения величин углов выбирают угол, принимаемый ____.
Обычно такой угол составляет____________________________________
____. Считают, что величина этого угла равна ______________________________________, обозначают _______________________.

2. Градусная величина угла показывает ______________________
____
____

3. Градусные величины равных углов _______________________

4. Градусная величина суммы углов равна __________________
____

5. Для измерения углов служат ______________________________
____

5.2. С помощью транспортира измерьте величины указанных на рисунке 14 углов.

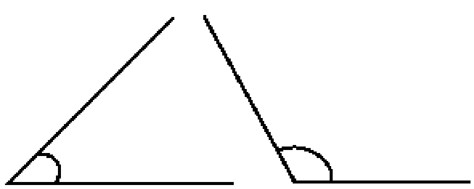


Рис. 14

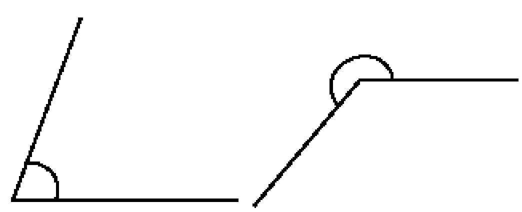


Рис. 15

Ответ ____

5.3. Оцените "на глаз" градусную величину углов на рисунке 15. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

Ответ ____

5.4. С помощью транспортира постройте углы, величиной 10°, 30°, 60°, 90°, 120°, 225°, 270°.

5.5. Общей частью двух углов, величины φ и ψ, является угол, величины γ. Найдите угол, покрываемый обоими данными углами. Сделайте рисунок.

Ответ ____

5.6. Постройте несколько точек C из которых отрезок AB виден под углом: а) $60°$; б) $90°$; в) $120°$ (рис. 16).

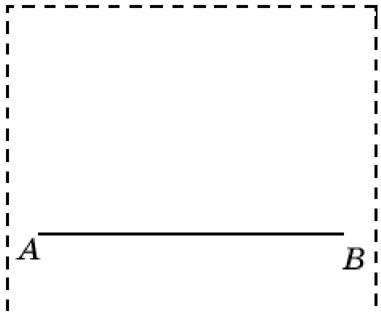


Рис. 16

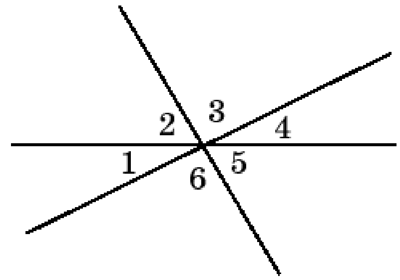


Рис. 17

5.7. Даны три прямые, пересекающиеся в одной точке (рис. 17). Докажите, что $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 180°$.

Доказательство ____
____
____

5.8*. Докажите, что угол между биссектрисами смежных углов равен $90°$. (Заполните пропуски.). Сделайте рисунок.

Доказательство. Пусть угол BOC – смежный с углом AOB. OD – биссектриса угла AOB, OE – биссектриса угла ____________. Имеем, $\angle DOE = \angle$______ + $\angle$__________ = _____$\angle AOB$ + _____$\angle BOC$ = ____$\angle AOC = 90°$.

5.9*. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 9 ч; г) 5 ч? Изобразите расположение минутной и часовой стрелок для заданных значений времени.

Ответ ____

____

5.10*. На сколько градусов повернется минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин? Изобразите минутную и часовую стрелки.

Ответ ____

____

5.11*. На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 2 ч; б) 15 мин; в) 30 с? Изобразите минутную и часовую стрелки.

Ответ ____

____

5.12*. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки, когда часы показывают 2 ч 15 мин? Изобразите минутную и часовую стрелки.

Ответ ____

____

6. ЛОМАНЫЕ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

6.1. Закончите предложения.

1. Ломаной называется фигура, образованная ______________
____
____

2. Длиной ломаной называется ___________________________
____

3. Ломаная обозначается _______________________________
____

4. Ломаная называется простой, если ______________________
____

5. Ломаная называется замкнутой, если ____________________
____

6. Многоугольником называется _________________________
____
____

7. Вершинами многоугольника называются ________________
____

8. Сторонами многоугольника называются ________________
____

9. Углами многоугольника называются ____________________
____

10. Периметром многоугольника называется _______________
____

11. Многоугольник называется правильным, если ___________
____

12. Многоугольник называется выпуклым, если ____________

____

____

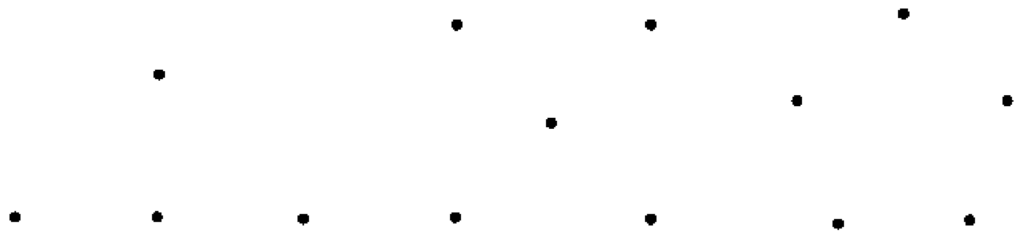
13. Диагональю многоугольника называется _______________

____

6.2. Изобразите несколько простых и самопересекающихся ломаных.

6.3. Приведите пример замкнутой ломаной, разбивающей плоскость на: а) две части; б) три части; в) четыре части.

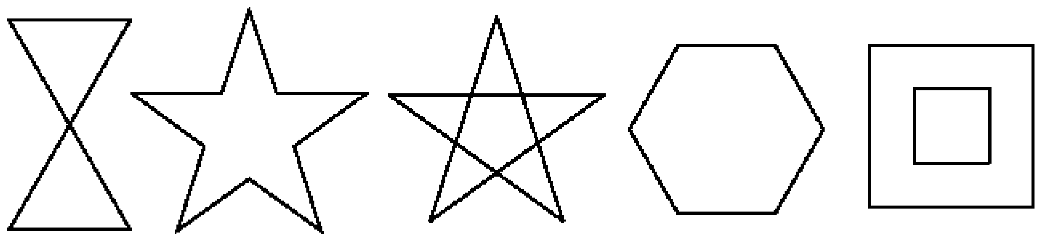
6.4. Данные точки, изображенные на рисунке 18, соедините простой замкнутой ломаной.



а) б) в)

Рис. 18

6.5. Укажите, какие из представленных на рисунке 19 фигур являются многоугольниками, а какие нет.



а) б) в) г) д)

Рис. 19

Ответ ____

6.6. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырехугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.

Ответ ____

____

6.7. Нарисуйте правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

6.8. На рисунке 20 заштрихуйте внутреннюю область многоугольника.

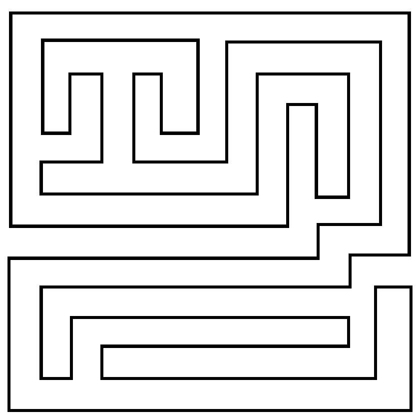
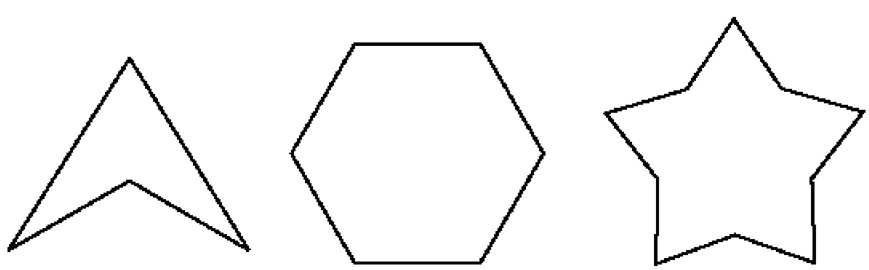


Рис. 20

6.9. В многоугольниках, изображенных на рисунке 21, проведите все диагонали.



а) б) в)

Рис. 21

6.10. Может ли многоугольник иметь: а) 5 диагоналей; б) 10 диагоналей; в) 20 диагоналей? Приведите примеры.

Ответ ____

6.11. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон? Приведите примеры.

Ответ ____

6.12*. Могут ли четыре точки на плоскости быть вершинами разных четырехугольников? Приведите примеры.

Ответ ____

6.13*. Может ли прямая пересекать все стороны многоугольника? Приведите примеры.

Ответ ____

6.14*. На рисунке 22 изображены звездчатый пятиугольник и звездчатые семиугольники. С помощью транспортира измерьте величины их углов.

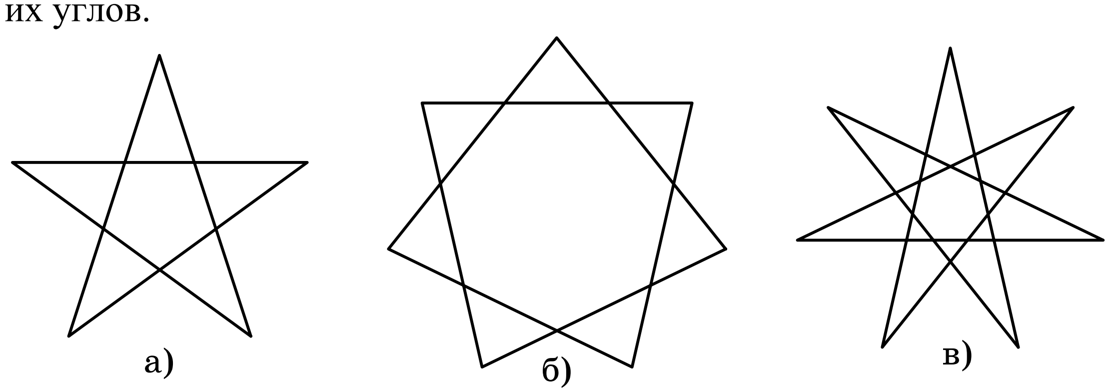


Рис. 22

Ответ ____

6.15*. Нарисуйте звездчатые девятиугольник и одиннадцатиугольник.

7. ТРЕУГОЛЬНИКИ

7.1. Закончите предложения.

1. Треугольником называется ______________________________
____
2. Треугольники обозначаются ______________________________
____
3. Треугольник называется правильным, если _______________
____
4. Медиана треугольника – отрезок, __________________________
____
5. Биссектриса треугольника – отрезок, _____________________
____
6. Высота треугольника – отрезок, ___________________________
____
7. Два треугольника называются равными, если _____________
____
____

7.2. Заполните пропуски в аксиоме.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, _______________________________________, у которого первая вершина _____________________________________
_________________, вторая - ____________________________________, а третья ____
____________________________________.

7.3. Нарисуйте треугольник, у которого все углы острые и различные. Проведите из какой-нибудь его вершины медиану, биссектрису и высоту.

7.4. Нарисуйте треугольник с прямым углом и проведите из вершины прямого угла медиану, биссектрису и высоту.

7.5. Нарисуйте треугольник с тупым углом и проведите из вершины тупого угла медиану, биссектрису и высоту.

7.6. Нарисуйте какой-нибудь правильный треугольник.

7.7. Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота? Приведите примеры.

Ответ ____

7.8. С помощью линейки и транспортира отложите треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному треугольнику ABC (рис. 23), так, чтобы вершина A_1 была вершиной данного луча, а вершина B_1 принадлежала этому лучу. Сколько таких треугольников?

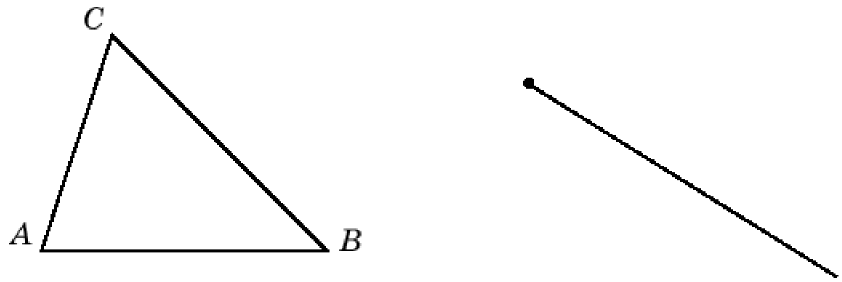


Рис. 23

Ответ ____

7.9. Дан треугольник ABC (рис. 24). Нарисуйте треугольник ABD, равный данному.

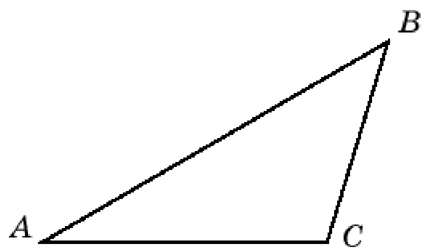


Рис. 24

7.10*. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) двух треугольников является: а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

7.11*. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырехугольника является восьмиугольник.

7.12*. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость стороны двух треугольников? Сделайте рисунок.

Ответ ____

7.13*. Докажите, что любой выпуклый многоугольник проведением диагоналей можно разбить на треугольники. Верно ли это для невыпуклых многоугольников? Приведите примеры.

Доказательство.

8. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

8.1. Заполните пропуски в формулировке теоремы.

Теорема. Если ________________________________ и __________ ____одного треугольника соответственно равны ____ _________________________ другого треугольника, то такие треугольники ____________________.

8.2. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника. Следует ли из этого, что эти треугольники равны? Приведите пример.

Ответ ____

8.3. Нарисуйте треугольник со сторонами 4 см, 6 см и углом между ними: а) $30°$; б) $45°$; в) $90°$; г) $120°$.

8.4. На рисунке 25 $KL = NM$, □1 =□2. Есть ли на нем равные треугольники? Укажите их.

Ответ ____

8.5. На рисунке 26 BH □ AC и $AH = CH$. Есть ли на нем равные треугольники? Укажите их.

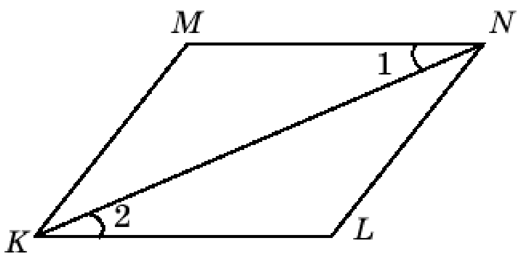


Рис. 25

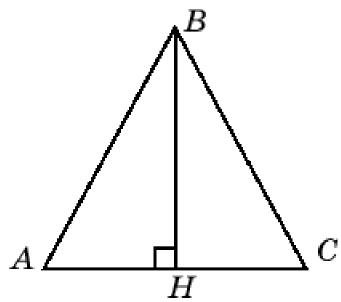


Рис. 26

Ответ ____

8.6. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка C этой прямой одинаково удалена от точек A и B. Сделайте рисунок.

Доказательство ____
____
____
____

8.7. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD. Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D. Докажите, что $EC = ED$. Сделайте рисунок.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

8.8. На рисунке 27 $AO = OB$ и $DO = OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC.

Доказательство ______________________________________

____

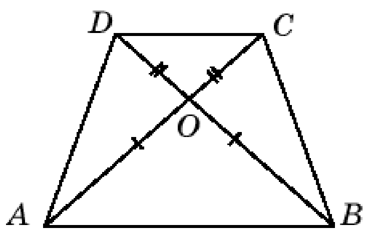


Рис. 27

____

____

____8.9. Медиана AD треугольника ABC продолжена за сторону BC на отрезок DE, равный отрезку AD, и точка E соединена с точкой C. Найдите величину угла ACE, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$. Сделайте рисунок.

Ответ ____

8.10. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны. Сделайте рисунок.

Доказательство ______________________________________

____

8.11. На рисунке 28 $AB = BC$, $BD = BE$, $\angle ABC = \angle DBE$. Найдите на этом рисунке равные треугольники.

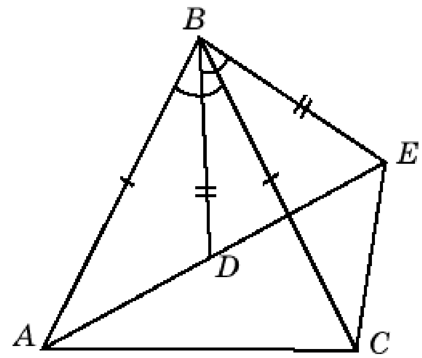


Рис. 28

Ответ ____

8.12. На сторонах правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF (рис. 29). Точки D, E и F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF правильный.

Доказательство ____

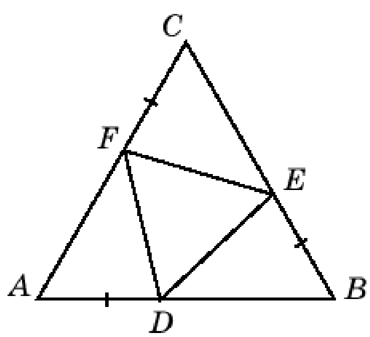


Рис. 29

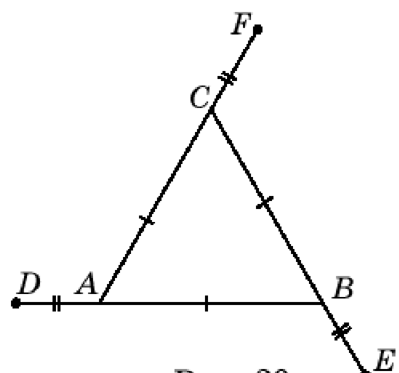


Рис. 30

____

____

____8.13. На продолжении сторон правильного треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF (рис. 30). Докажите, что точки D, E и F являются вершинами правильного треугольника.

Доказательство ____

____

____

____

8.14*. Две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Следует ли из этого, что эти треугольники равны? Приведите пример.

Ответ ____

9. ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

9.1. Заполните пропуски в формулировке теоремы.

Теорема. Если ____________________ и _____________________ ____ одного треугольника соответственно равны ____________________________ и ____ другого треугольника, то такие треугольники ____________________.

9.2. Сторона и прилежащий к ней угол одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащему к ней углу другого треугольника. Следует ли из этого, что данные треугольники равны? Приведите пример.

Ответ ____

9.3. Нарисуйте треугольник со стороной 6 см и прилежащими к ней углами: а) $30°$ и $90°$; б) $30°$ и $60°$.

9.4. В треугольнике ABC высота BH является и биссектрисой. Будут ли треугольники ABH и CBH равны? Сделайте рисунок.

Ответ ____

9.5. На рисунке 31 дана фигура, у которой $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.

Доказательство ____________________________________

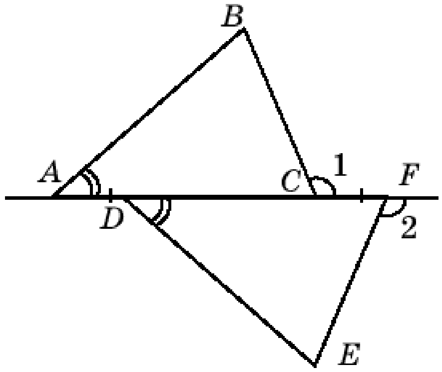


Рис. 31

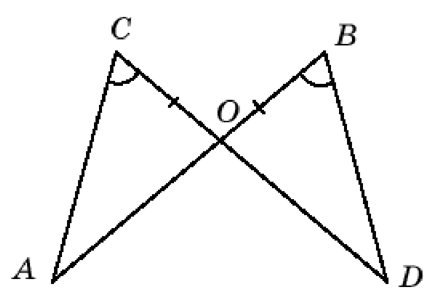


Рис. 32

9.6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 32). $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

9.7. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 33). $AO = OC$ и $\angle A = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

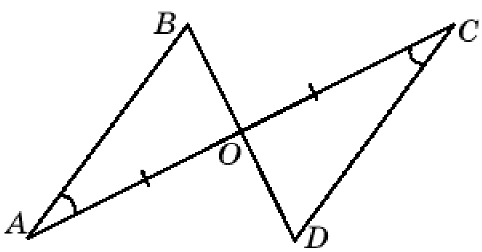


Рис. 33

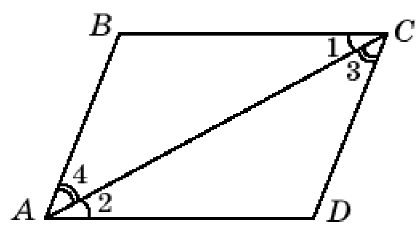


Рис. 34

9.8. На рисунке 34 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны. Найдите AB и BC, если AD = 19 см, CD = 11 см.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

9.9. Лучи AD и BC пересекаются в точке O (рис. 35). $\angle 1 = \angle 2$, $OC = OD$. Докажите, что $\angle A = \angle B$.

Доказательство ______________________________________

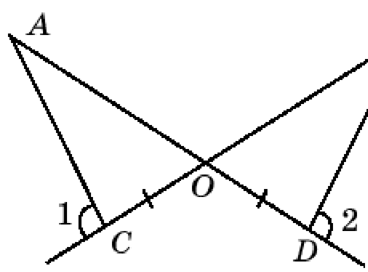


Рис. 35

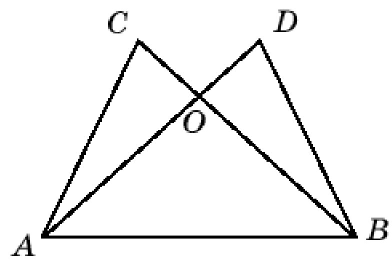


Рис. 36

9.10. На рисунке 36 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. Найдите DB.

Ответ

9.11. В треугольнике ABC $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 37). Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство

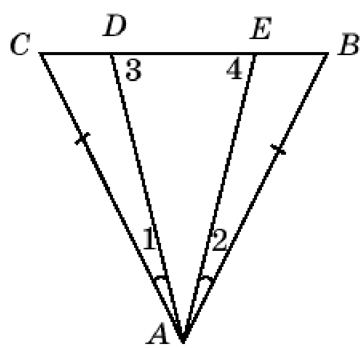


Рис. 37

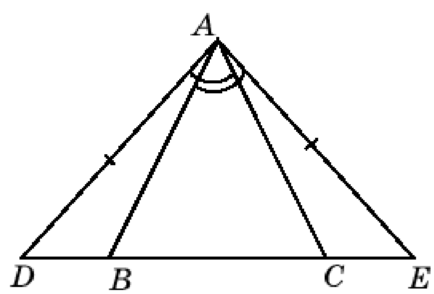


Рис. 38

9.12. На рисунке 38 $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.

Доказательство

9.13. В четырехугольнике *ABCD* диагональ *AC* лежит на биссектрисах углов *A* и *C*. Сделайте рисунок. Докажите, что треугольники *ABC* и *ADC* равны.

Доказательство ____

9.14. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы равных углов равны. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

9.15. Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на его сторонах равные отрезки. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

____

____

9.16*. Сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника. Следует ли из этого, что данные треугольники равны? Приведите пример.

Ответ ____

10. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

10.1. Заполните пропуски в определениях.

1. Треугольник называется равнобедренным, если __________
____

Эти равные стороны называются ______________________________, а третья сторона – ___________________________________.

2. Треугольник называется равносторонним, если __________
____

10.2. Нарисуйте равнобедренный треугольник: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.

10.3. Нарисуйте равнобедренный треугольник, со стороной основания 3 см и периметром 11 см. Чему равны другие стороны?

Ответ ____

10.4. Нарисуйте равнобедренный треугольник, с боковой стороной 3 см и периметром 11 см. Чему равно основание?

Ответ ____

10.5. Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см. Боковая сторона больше основания на 4 см. Найдите стороны этого треугольника.

Решение ____

____

____

10.6. Используя рисунок 39,а, докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с медианой, проведенной из той же вершины, то треугольник равнобедренный.

Доказательство ______________________________________

____

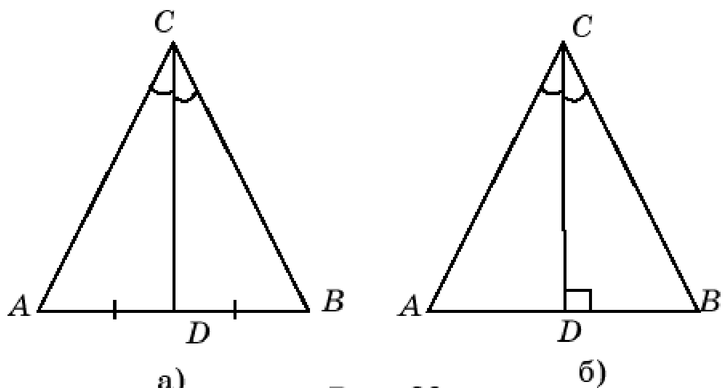


Рис. 39

____

____

10.7. Используя рисунок 39,б, докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с высотой, проведенной из той же вершины, то треугольник равнобедренный.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

10.8. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников: а) CAB_1 и CBA_1; б) ABB_1 и BAA_1. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

____

10.9. Треугольники ACD и BCD равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CD. Докажите, что треугольники ABC и ABD равнобедренные. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

____

10.10. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

____

10.11. Докажите, что у равнобедренного треугольника: а) медианы, проведенные к боковым сторонам, равны; б) биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны. Сделайте рисунки.

Доказательство ____

____

____

____

____

____

____

10.12. На рисунке 40 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

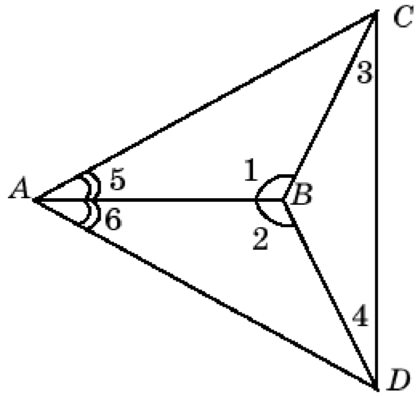


Рис. 40

Доказательство ____

____

____

____

11. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

11.1. Заполните пропуски в формулировке теоремы.

Теорема. Если ________________________________ одного треугольника соответственно равны __________________________ другого треугольника, то такие треугольники равны.

11.2. Сформулируйте третий признак равенства треугольников применительно к равнобедренным треугольникам.

Формулировка ____
____
____
____

11.3. Нарисуйте треугольник со сторонами: а) 3 см, 4 см и 5 см; б) 2 см, 3 см и 4 см.

11.4. На рисунке 41 $AB=DC$ и $BC=AD$. Докажите, что угол B равен углу D.

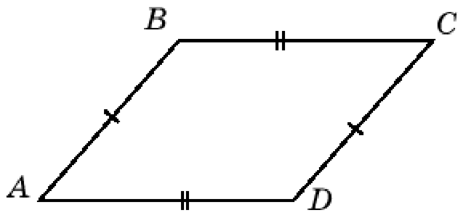


Рис. 41

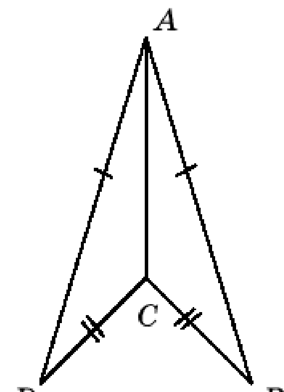


Рис. 42

Доказательство

11.5. На рисунке 42 $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что а) $\angle ADC = \angle ABC$; б) Отрезок AC является биссектрисой угла BAD.

Доказательство

11.6. На рисунке 43 $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство

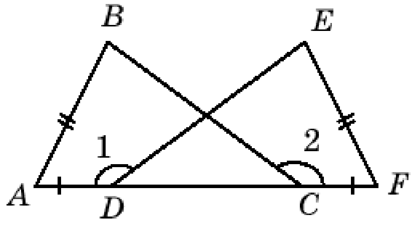


Рис. 43

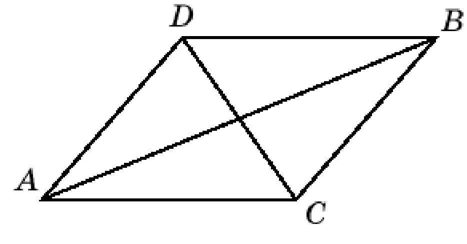


Рис. 44

11.7. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 44) Докажите, что: а) треугольники CBD и DAC равны; б) прямая CD делит отрезок AB пополам.

Доказательство ____

____

____

____

____

____

11.8. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны (рис. 45).

Доказательство ____

____

____

____

____

11.9. На рисунке 46 $AB = CD$, $AD = BC$, BE - биссектриса угла ABC, а DF - биссектриса угла ADC. Докажите, что: а) $\angle ABE = \angle ADF$; б) $\Delta ABE = \Delta CDF$

Доказательство ____

____

____

____

____

____

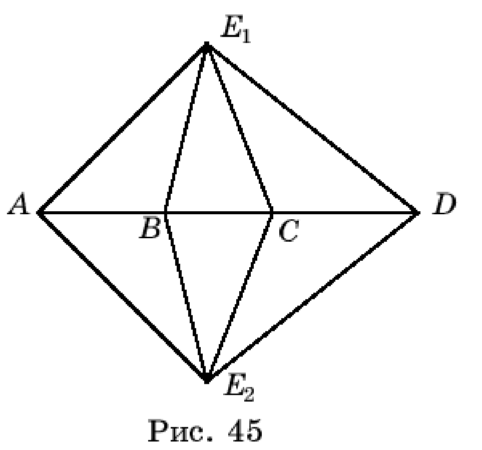


Рис. 45

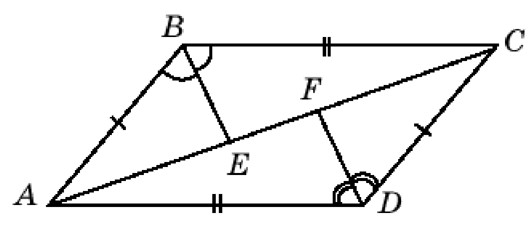


Рис. 46

11.10. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы AD и A_1D_1 равны; $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$. Докажите, что $\Delta\ ABC = \Delta\ A_1B_1C_1$. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

11.11*. Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и диагонали AC и A_1C_1, то равны и соответствующие углы. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

11.12*. Верно ли, что если у двух выпуклых четырехугольников равны соответствующие стороны, то равны и соответствующие углы? Приведите примеры.

Ответ____

11.13*. Докажите, что если у выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие стороны и $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$. Верно ли это для произвольных четырехугольников? Приведите примеры.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

12. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

12.1. Заполните пропуски.

1. Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется ________________________________ этого треугольника.

2. При каждой вершине треугольника, продолжая стороны треугольника можно построить ______________внешних угла. Эти углы равны, как ____________________________.

12.2. Заполните пропуски в формулировках теорем.

1. Внешний угол произвольного треугольника ______________ каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.

2. В произвольном треугольнике против большей стороны лежит ________________ угол.

3. В произвольном треугольнике против большего угла лежит __________________ сторона.

12.3. Сколько в треугольнике может быть: а) тупых углов; б) прямых углов; в) острых углов?

Ответ ____

12.4. Может ли внешний угол треугольника быть больше: а) только одного внутреннего угла; б) двух внутренних углов; в) трех внутренних углов этого треугольника? Приведите примеры.

Ответ ____

12.5. В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см. Нарисуйте такой треугольник. Сравните его углы.

Ответ ____

12.6. Сравните стороны треугольника ABC, если $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$. Нарисуйте такой треугольник.

Ответ ____

12.7. Если один из внешних углов треугольника острый, то какими являются его остальные внешние углы? Нарисуйте такой треугольник.

Ответ ____

12.8. В треугольнике ABC сторона AB наибольшая: а) какие углы этого треугольника острые; б) каким может быть угол C? Нарисуйте такие треугольники.

Ответ ____

12.9. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AC < A_1C_1$ (рис. 47). Докажите, что $\angle B < \angle B_1$.

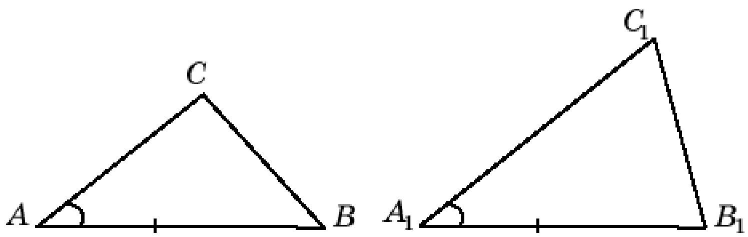


Рис. 47

Доказательство ____

____

____

____

12.10. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B < \angle B_1$ (рис. 48). Докажите, что $AC < A_1C_1$.

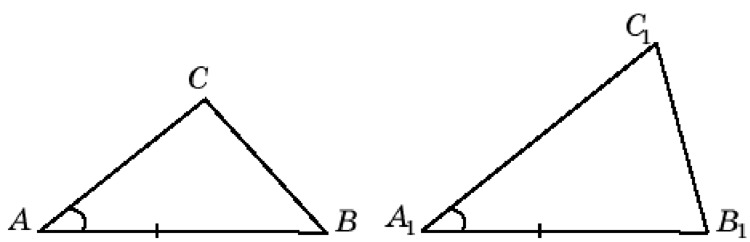


Рис. 48

Доказательство ____

12.11*. Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$. Используя рисунок 49, докажите, что если CD – медиана, то $\angle ACD < \angle BCD$.

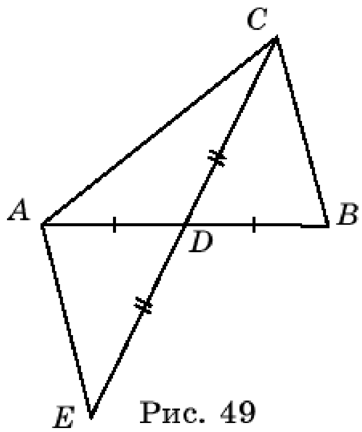


Рис. 49

Доказательство ______

12.12*. Пусть в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$. Используя предыдущую задачу, докажите, что если CD – биссектриса, то $AD > BD$. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____
____
____
____

12.13*. Можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника?

Ответ ____

13. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

13.1. Заполните пропуски в формулировках теорем.

1. Каждая сторона треугольника ______________________________ суммы двух других сторон.

2. Каждая сторона треугольника ______________________________ разности двух других сторон.

3. Длина отрезка, соединяющего концы ломаной, ___________ ____________________________________ длины самой ломаной.

13.2. Существует ли треугольник со сторонами: а) 1, 5, 5; б) 1, 1, 5? Сделайте рисунки.

Ответ ____

13.3. Существует ли четырехугольник со сторонами: а) 1, 5, 5, 5; б) 1, 1, 5, 5; в) 1, 1, 1, 5? Сделайте рисунки.

`Ответ ____

13.4. Стороны ломаной равны 5 см, 3 см и 1 см. На каком расстоянии d могут находиться концы этой ломаной?

Ответ ____

13.5. Две стороны треугольника равны 2 см и 4 см. В каких пределах может находиться третья сторона?

Ответ ____

13.6. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 2 см, а другая – 5 см. Какая из них является основанием? Сделайте рисунок.

Ответ ____

13.7. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 2 см, а другая – 4 см. Найдите периметр. Сделайте рисунок.

Ответ ____

13.8. Соедините вершины A, B, C, D (рис. 50) ломаной наименьшей длины.

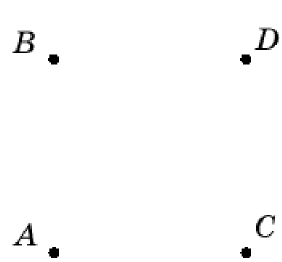


Рис. 50

13.9*. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.

Доказательство ____

____
____
____

13.10*. Докажите, что диагонали четырехугольника меньше его полупериметра.

Доказательство ____

____

13.11*. Четыре населенных пункта расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. В каком месте следует построить пекарню, чтобы сумма расстояний от нее до всех четырех данных пунктов была наименьшей. Сделайте рисунок.

Ответ ____

____

13.12*. Пешеход идет из пункта A в пункт B (рис. 51). При этом ему нужно пройти через пункты C, D, E, F. Укажите кратчайший маршрут для пешехода.

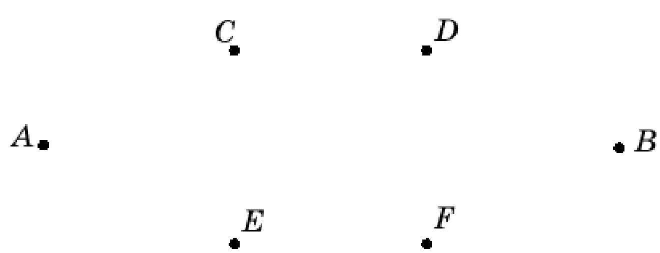


Рис. 51

14. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

14.1. Заполните пропуски.

1. Треугольник называется остроугольным, если ____________ ____.

2. Треугольник называется тупоугольным, если ____________ ____.

3. Треугольник называется прямоугольным, если ___________ ____.

4. Сторона прямоугольного треугольника, _________________ ____, называется ______________________________, две другие стороны называются ______________________________.

14.2. Заполните пропуски в формулировках теорем.

1. Если ___________________________ одного прямоугольного треугольника соответственно равны _________________________ другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если _________________ и прилежащий к нему __________ ____________________ одного прямоугольного треугольника соответственно равны _______________________________________ _____________________________________ другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если ___________________ и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны _______________________ и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

14.3. Нарисуйте прямоугольный треугольник: а) с катетами 3 см и 4 см; б) с катетом 5 см и углом $30°$.

14.4. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Чему равна гипотенуза?

Ответ ____

14.5. Может ли прямоугольный треугольник быть: а) равнобедренным; б) равносторонним? Сделайте рисунки.

Ответ ____

14.6. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь: а) равные катеты; б) равные гипотенузы? Сделайте рисунки.

Ответ ____

14.7*. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Проведите медиану BD. Какой из углов больше ABD или CBD?

Ответ ____

14.8*. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Проведите биссектрису BE. Какой из отрезков больше AE или CE?

Ответ ____

14.9*. Докажите, что в равнобедренном треугольнике две высоты, проведенные из вершин основания, равны.

Доказательство ___________________________________

14.10*. В треугольнике KLM проведена медиана LN. Докажите, что высоты треугольников MLN и KLN, проведенные соответственно из вершин M и K, равны.

Доказательство ____

14.11*. Используя рисунок 52, укажите, как измерить ширину реки, оставаясь на одном ее берегу?

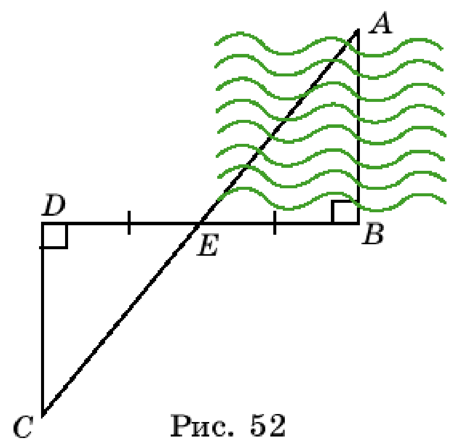


Рис. 52

Ответ ____

15. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

15.1. Заполните пропуски.

1. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую называется ____________________ прямой, ________________ данной, соединяющий данную точку и точку пересечения этих прямых. Точка пересечения прямых называется __________________ перпендикуляра. Длина перпендикуляра называется _______________ _______________ от точки до прямой.

2. Наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой называется _________________ прямой, не _________________________ данной, соединяющий данную точку и точку пересечения этих прямых. Точка пересечения прямых называется __________________ наклонной.

3. Отрезок, соединяющий ________________________ наклонной и ________________________ перпендикуляра, проведенных из данной точки к данной прямой, называется ______________________________ наклонной.

15.2. Проведите прямую. Отметьте точку, не принадлежащую этой прямой. Опустите из нее перпендикуляр и проведите наклонную к прямой. Что больше, перпендикуляр или наклонная?

Ответ ____

15.3. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную прямую?

Ответ ____

15.4. Сколько наклонных можно провести из данной точки к данной прямой?

Ответ ____

15.5. С помощью линейки найдите расстояние от данной точки до данной прямой (рис. 53, а, б).

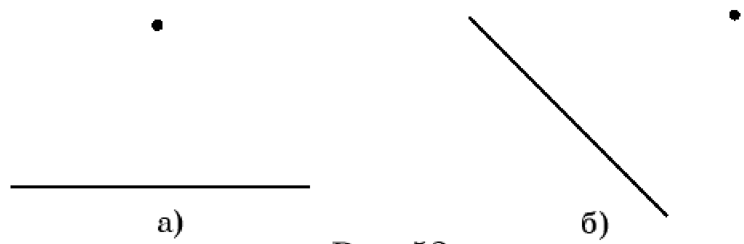


Рис. 53

Ответ ____

15.6. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от данных точек до точек отрезка AB (рис. 54). Укажите соответствующие отрезки.

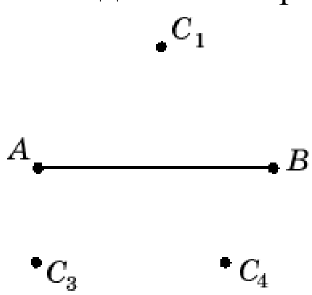


Рис. 54

Ответ ____
____

15.7. Изобразите две точки, расстояние между которыми 5 см. С помощью угольника через одну из них проведите прямую, удаленную от другой на расстояние 3 см.

15.8. Точки *A* и *B* расположены по разные стороны от прямой *c* (рис. 55,а). На прямой *c* изобразите точку *C*, для которой сумма расстояний *AC* + *CB* наименьшая? С помощью линейки найдите эту сумму.

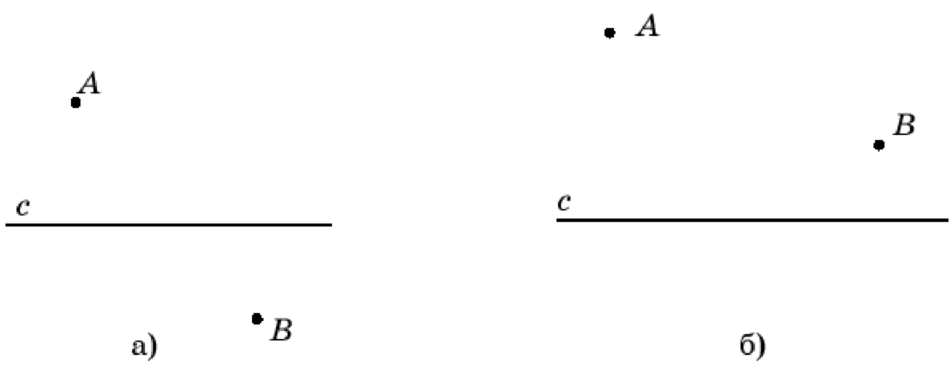


Рис. 55

Ответ ____

15.9. Точки *A* и *B* расположены по одну сторону от прямой *c* (рис. 55,б). На прямой *c* изобразите точку *C*, для которой сумма расстояний *AC* + *CB* наименьшая? С помощью линейки найдите эту сумму.

Ответ ____

15.10*. Внутри острого угла взята точка *C* (рис. 56). Найдите на сторонах угла точки *A* и *B* такие, чтобы периметр треугольника *ABC* был наименьшим.

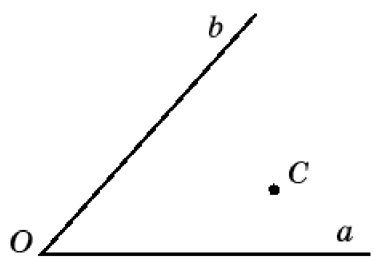


Рис. 56

Рис. 57

15.11*. Приведите пример треугольника, у которого все высоты меньше 1 см, а все стороны больше 10 см.

15.12*. Точки A, B, C (рис. 57) обозначают населенные пункты. Как должна проходить магистраль через населенный пункт C, чтобы пункты A и B лежали от нее по разные стороны и на одинаковом расстоянии? Изобразите эту магистраль в виде прямой.

Ответ ____

____

____

15.13*. Как должна проходить магистраль, чтобы расстояния от нее до трех данных населенных пунктов были одинаковыми (рис. 57)? Укажите положение магистрали, при котором эти расстояния минимальны.

Ответ ____

______15.14*. В какой точке борта *AB* должен отразиться бильярдный шар *C*, чтобы после отражения попасть в шар *D* (рис. 58)?

Рис. 58

16. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

16.1. Заполните пропуски.

1. Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, ______________________________ ___________________________________.

2. Кругом называется фигура, ______________________________ __________________________________.

3. Отрезок, соединяющий _________________________________ окружности, называется хордой.

4. Хорда, проходящая _____________________________________, называется диаметром.

5. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду ________________________.

16.2. Изобразите окружность, отметьте ее центр, нарисуйте радиус, диаметр и хорду.

16.3. Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B (AB = 6 см) и имеет радиус 3 см.

16.4. На сколько частей делят окружность: а) две точки; б) три точки; в) четыре точки; г) n точек?

Ответ ____

16.5. Какому неравенству удовлетворяют точки C, принадлежащие кругу с центром в точке O и радиусом R?

Ответ ____

16.6. Какому неравенству удовлетворяют точки C, не принадлежащие кругу с центром в точке O и радиусом R?

Ответ ____

16.7. Точка A расположена вне окружности радиуса 3 см и удалена от центра O этой окружности на расстояние 5 см. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния от точки A до точек данной окружности? Изобразите эту ситуацию.

Ответ ____

16.8. Точка A расположена внутри окружности радиуса 3 см и удалена от центра O этой окружности на расстояние 1 см. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности? Изобразите эту ситуацию.

Ответ ____

16.9. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.

Ответ ____

16.10. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.

Ответ ____

16.11. Где расположены центры всех окружностей, проходящих через две данные точки? Изобразите соответствующую геометрическую ситуацию.

Ответ ____

16.12. Расстояние между точками A и B равно 4 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки. Сделайте рисунок.

Ответ ____

16.13*. Может ли окружность проходить через три точки, принадлежащие одной прямой?

Ответ ____

16.14. Используя рисунок 59, докажите, что диаметр, проведенный через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к этой хорде.

*Доказательство*____

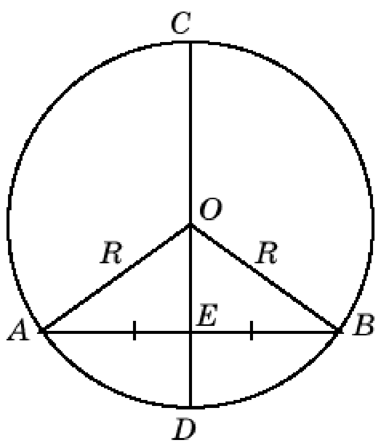


Рис. 59

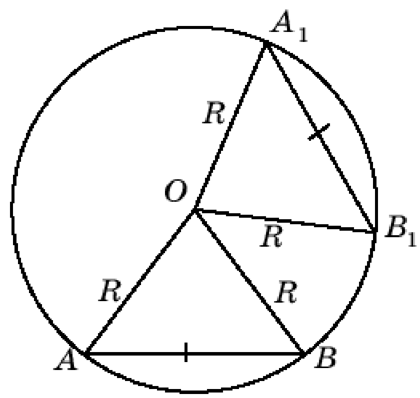


Рис. 60

16.15. Используя рисунок 60, докажите, что равные хорды окружности одинаково удалены от центра окружности и, наоборот, если хорды окружности одинаково удалены от ее центра, то они равны.

*Доказательство*____

16.16*. На рисунке 61 изображена фигура, называемая кольцом. Сформулируйте определение этой фигуры.

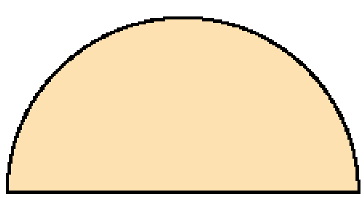


Рис. 62

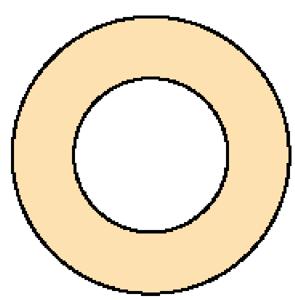


Рис. 61

Определение ____

____16.17*. На рисунке 62 изображена фигура, называемая полукругом. Сформулируйте определение этой фигуры.

Определение ____

____
____
____

17. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

17.1. Заполните пропуски.

1. Прямая и окружность могут ___________________ общих точек, иметь ________________ общую точку, или ________________ общие точки.

2. Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то говорят, что прямая __________________________________, а саму прямую называют __________________________ к окружности. Общая точка называется ____.

3. Если прямая и окружность имеют две общие точки, то говорят, что прямая и окружность _______________________________.

17.2. Заполните пропуски в формулировках теорем.

1. Если расстояние от центра окружности до прямой _______ радиуса окружности, то эти прямая и окружность ________________ _________________.

2. Если расстояние от центра окружности до прямой ________ радиусу окружности, то эта прямая является ____________________ ________________________________.

3. Если расстояние от центра окружности до прямой ________ радиуса окружности, то прямая и окружность ___________________.

4. Касательная к окружности ______________________________ радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

17.3. Нарисуйте окружность. Проведите прямые, пересекающие окружность, касающиеся окружности и не имеющие общих точек с окружностью.

17.4. Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную: а) на окружности; б) внутри окружности; в) вне окружности?

Ответ ____

17.5. Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?

Ответ ____

17.6. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 3 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: а) 4 см; б) 3 см; в) 2 см?

Ответ ____

____

17.7. Расстояние от центра окружности до прямой равно 4 см, радиус окружности – 3 см. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точек данной окружности до прямой. Нарисуйте окружность и прямую. Укажите соответствующие точки.

Ответ ____

17.8. Из точки *C* проведены две касательные *CA* и *CB* к окружности (рис. 63). Докажите, что луч *CO*, проходящий через центр окружности, является биссектрисой угла *CAB*.

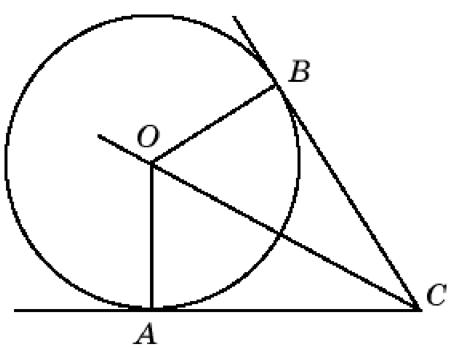


Рис. 63

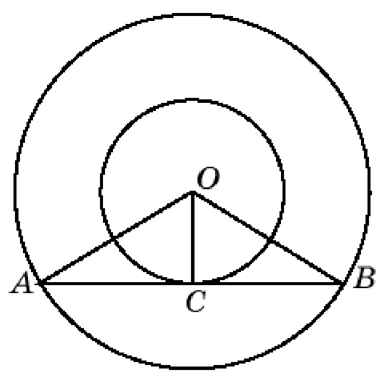


Рис. 64

Доказательство ____

17.8. Две окружности имеют общий центр (рис. 64). Докажите, что хорды AB большей окружности, касающиеся меньшей окружности, в точке касания C делятся пополам.

Доказательство ______________________________

17.9*. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 общих внутренних касательных к двум окружностям (рис. 65) равны.

Доказательство ______________________________

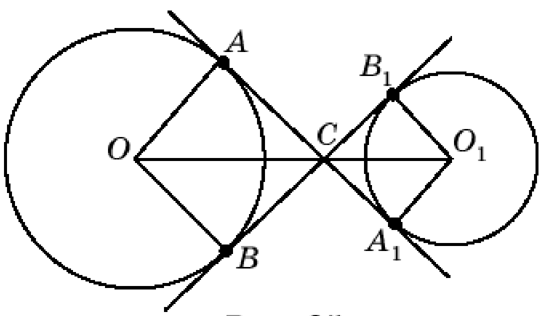


Рис. 65

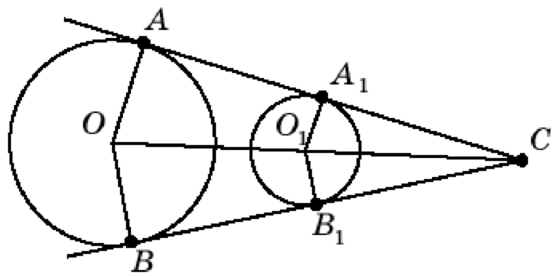


Рис. 66

17.10*. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 общих внешних касательных к двум окружностям (рис. 66) равны.

Доказательство _

17.11*. Через точку M, вне окружности, проведены касательные MA и MB, и через точку C на окружности проведена касательная, пересекающая отрезки MA и MB в точках K и L соответственно (рис. 67). Докажите, что периметр треугольника KML не зависит от положения точки C.

Доказательство ______________________________

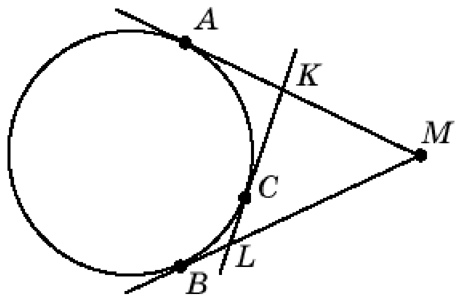


Рис. 67

18. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

18.1. Заполните пропуски.

1. Две окружности могут ________________ общих точек, иметь _______________ общую точку, или __________общие точки.

2. Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что окружности ____________________________.

3. Если две окружности имеют две общие точки, то говорят, что окружности _____________________________.

4. Окружности, имеющие общий центр, называются _________ ___________________.

18.2. Заполните пропуски в формулировках теорем.

1. Если расстояние между центрами двух окружностей _______________ суммы их радиусов или ___________________ их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

2. Если расстояние между центрами двух окружностей _________________ сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

3. Если расстояние между центрами двух окружностей __________________ суммы радиусов и ____________________ их разностей, то эти окружности пересекаются.

18.3. Изобразите две окружности: а) не имеющие общих точек; б) касающиеся внешним образом; в) касающиеся внутренним образом; г) пересекающиеся; д) концентрические.

18.4. Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см? Нарисуйте эти окружности

Ответ ____

18.5. Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см? Нарисуйте эти окружности.

Ответ ____

18.6. Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

Ответ ____

18.7. Какую фигуру образуют центры окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку? Изобразите несколько таких окружностей и искомую фигуру.

Ответ ____

18.8. Какую фигуру образуют центры окружностей различных радиусов, проходящих через две данные точки? Нарисуйте несколько таких окружностей и искомую фигуру.

Ответ ____

18.9. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек. Сделайте рисунок.

Доказательство ______________________________________

18.10. Радиусы окружностей равны 1 см и 2 см, расстояние между их центрами – 4 см. Найдите наименьшее и наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях. Сделайте рисунок.

Ответ ____

18.11*. Нарисуйте три окружности, попарно касающиеся друг друга.

18.12*. Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

18.13*. Могут ли четыре окружности попарно касаться друг друга? Сделайте рисунок.

Ответ ____

18.14*. Могут ли четыре окружности одинакового радиуса попарно касаться друг друга?

Ответ ____

18.15*. Могут ли пять окружностей попарно касаться друг друга?

Ответ ____

18.16*. На какое наибольшее число областей разбивают плоскость: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности? Сделайте рисунки.

Ответ ____

19. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

19.1. Заполните пропуски.

1. Геометрическим местом точек называется фигура, состоящая из ____

____

2. Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется прямая, ______________________________ этому отрезку и проходящая _____________________________________.

3. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, _______________________________ от концов этого отрезка.

4. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, лежащих __________________ данного угла и __________________ ______________________ от его сторон.

19.2. Определите окружность с центром в точке O и радиусом R через понятие геометрического места точек.

Ответ ____

____

____

____

19.3. Определите круг с центром в точке O и радиусом R через понятие геометрического места точек.

Ответ ____

____

____

____

19.4. Определите кольцо с центром в точке O и радиусами R и r через понятие геометрического места точек.

Ответ ____

____

____

____

19.4. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса R_1, касающихся данной окружности радиуса R_2. Рассмотрите случаи: а) $R_1 < R_2$; б) $R_1 = R_2$; в) $R_1 > R_2$. Сделайте рисунки.

Ответ ____

19.5. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

Ответ ____

19.6. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB.

Ответ ____

19.7. Пусть A и B - точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C, для которых: а) $AC \leq BC$; б) $AC < AB$. Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.8. Даны три точки: A, B, C. Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C. Сделайте рисунки.

Ответ ____

19.9. На данной прямой a найдите точки, удаленные от данной точки C на заданное расстояние R. Какие при этом возможны случаи? Сделайте рисунки.

Ответ ____

19.10. Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B. В каком случае таких точек нет? Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.11. Пусть a и b - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от a и b; б) расположенных ближе к a, чем к b. Сделайте рисунки.

Ответ ____

19.12. Пусть A, B, C - три точки, не принадлежащие одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что: а) прямая CM пересекает отрезок AB; б) луч CM пересекает отрезок AB; в) отрезок CM пересекает отрезок AB. Сделайте рисунки.

Ответ ____

19.13. На прямой, пересекающей стороны угла, найдите точку, одинаково удаленную от этих сторон. Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.14. Дан угол ABC и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла. Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.15*. Две окружности касаются внешним образом. Найдите геометрическое место точек, для которых отрезки касательных, проведенных из них к окружностям, равны. Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.16*. Невдалеке от двух населенных пунктов проходит шоссе. В каком месте этого шоссе нужно построить автозаправочную станцию, чтобы расстояния от нее до обоих пунктов были одинаковыми? Сделайте рисунок.

Ответ ____

19.17*. Жильцы трех домов решили совместными усилиями вырыть колодец. В каком месте следует расположить колодец, чтобы расстояния от него до домов были одинаковыми? Сделайте рисунок.

Ответ ____

20. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

20.1. Заполните пропуски.

1. Основными чертежными инструментами, с помощью которых производятся геометрические построения, являются _____

____.

2. С помощью линейки через две заданные точки проводят ______________________________.

3. С помощью циркуля проводят ________________________ с данным центром и данного радиуса.

20.2. Нарисуйте отрезок и постройте серединный перпендикуляр к нему.

20.3. Нарисуйте угол и постройте его биссектрису.

20.5. Нарисуйте прямую и точку, ей не принадлежащую. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной прямой.

20.6. Постройте треугольник со сторонами 2 см, 3 см и 4 см.

Решение ____

____

____

____

20.7. Постройте прямоугольный треугольник по заданным катетам 3 см и 4 см.

Решение ____

____

____20.8. Постройте равносторонний треугольник со стороной 3 см.

Решение ____

____

____20.9. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 4 см и боковой стороной 5 см.

Решение ____

____

____

20.10. Нарисуйте прямую и две точки. На этой прямой найдите центр окружности, проходящей через две заданные точки.

Решение ____

____

____

___

20.11. Нарисуйте окружность и отметьте на ней точку. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

Решение ____

____

____

____

20.12. Нарисуйте угол. Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.

Решение ____

____

____

20.13*. Нарисуйте две окружности. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

Решение ____

____

_____20.14*. Нарисуйте какой-нибудь треугольник. Постройте окружность, касающуюся всех сторон этого треугольника.

Решение ____

____

____

____

20.15*. Нарисуйте три точки, не принадлежащие одной прямой. Постройте окружность, проходящую через эти точки.

Решение ____

____
____
____

21*. ПАРАБОЛА

21.1. Заполните пропуски.

1. Параболой называется геометрическое место точек, ________ __________________ от заданной точки F, называемой _____________ и заданной прямой d, называемой директрисой.

2. Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и _________________________ директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется _______________________ параболы.

3. Прямая, имеющая с параболой только __________________ ____ и не перпендикулярная ее директрисе, называется _________________ к параболе. Общая точка называется _________________________________.

4. Касательной к параболе, проходящей через точку A, является ____ _______________________.

5. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, __________ ____.

21.2. Нарисуйте прямую d и отметьте точку F, не принадлежащую этой прямой. Изобразите несколько точек, принадлежащих параболе и саму параболу с фокусом F и директрисой d.

21.3. Для точки F, не принадлежащей прямой d, укажите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.

Ответ ____

21.4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?

Ответ ____

21.5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболе; б) вне параболы (рис. 68). Опишите построение.

Построение ____

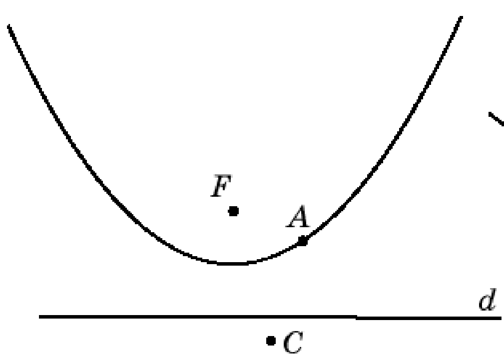


Рис. 68

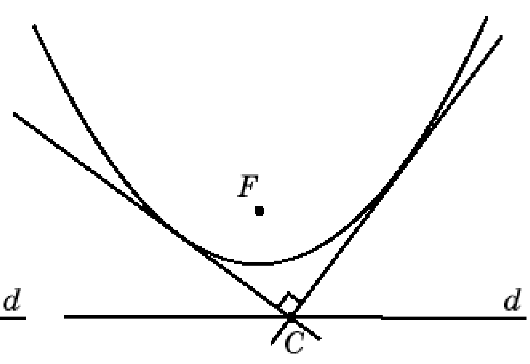


Рис. 69

21.6. Докажите, что любые две касательные к параболе, проведенные через произвольную точку C на директрисе, перпендикулярны (рис. 69).

Доказательство____

____

____

____

21.7. Даны фокус параболы и две касательные (рис. 70). Постройте директрису этой параболы. Опишите построение.

Построение ____

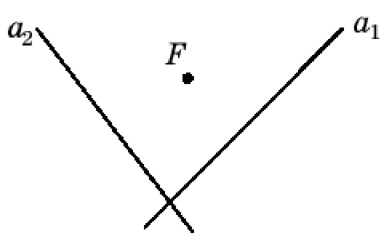


Рис. 70

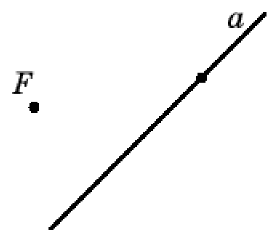


Рис. 71

____

____

____

21.8. Даны фокус, касательная и на ней точка касания (рис. 71). Постройте директрису параболы. Опишите построение.

Построение ____

____

______

21.9. Даны директриса параболы и две касательные (рис. 72). Постройте фокус параболы. Опишите построение.

Построение ____

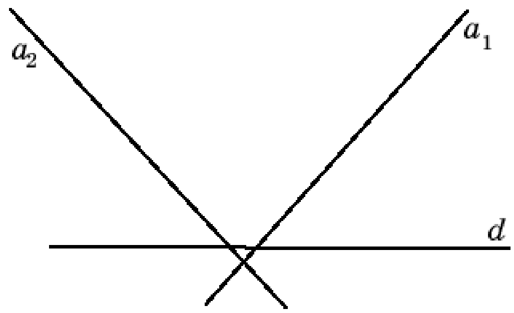


Рис. 72

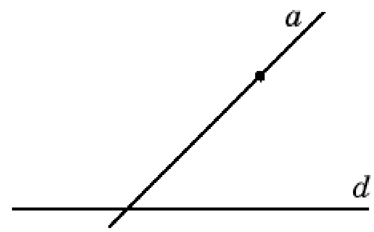


Рис. 73

21.10. Даны директриса, касательная и на ней точка касания (рис. 73). Постройте фокус. Опишите построение.

Построение

21.11. Даны две пересекающиеся прямые (рис. 74). Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?

Ответ

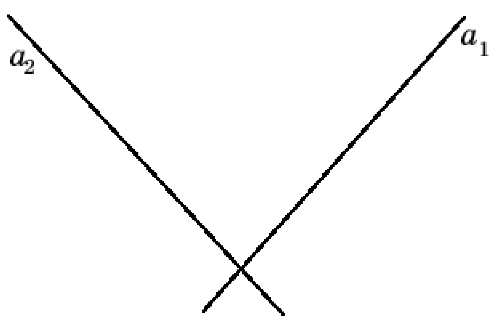


Рис. 74

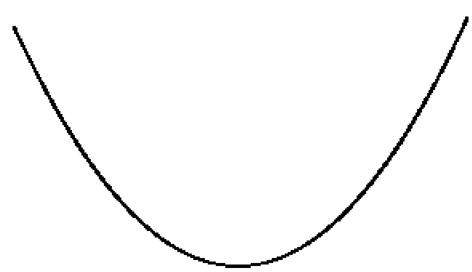


Рис. 75

21.12. Дана парабола (рис. 75). Укажите способ нахождения ее фокуса и директрисы.

Ответ

______21.13. Расстоянием от точки до луча называется наименьшее расстояние от данной точки до точек данного луча. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F и данного луча c (рис. 76).

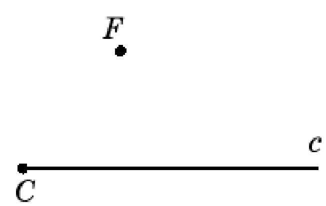


Рис. 76

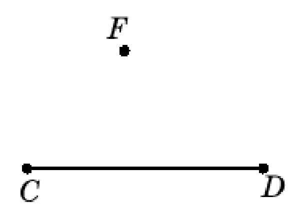


Рис. 77

Ответ ____

______21.14. Расстоянием от точки до отрезка называется наименьшее расстояние от данной точки до точек данного отрезка. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F и данного отрезка CD (рис. 77).

Ответ ____

22*. ЭЛЛИПС

22.1. Заполните пропуски.

1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, ______________________________ от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина ____________________________.
Точки F_1, F_2 называются ____.

2. Слово "фокус" в переводе с латинского языка означает ______________________________.

3. Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом ____. Общая точка называется ______________________________________.

4. Касательной к эллипсу, проходящей через точку A является прямая, ____ угла _______________________ с углом F_1AF_2.

5. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, _______________________________ _____________________________________.

22.2. Отметьте точки F_1, F_2 и нарисуйте отрезок длины $c > F_1F_2$. Изобразите несколько точек эллипса и сам эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c.

22.3. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

Ответ ____
____

22.4. Для данного эллипса с фокусами F_1, F_2, расположенными друг от друга на расстоянии 5 см, и константой c = 6 см. Найдите: а) наибольшее расстояние между точками эллипса; б) наименьшее расстояние от точек эллипса до фокуса. Укажите эти точки (рис. 78).

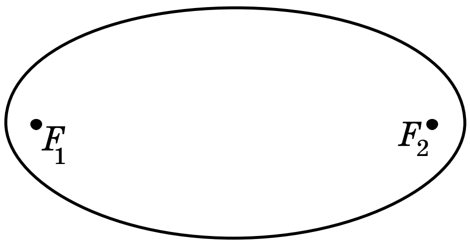


Рис. 78

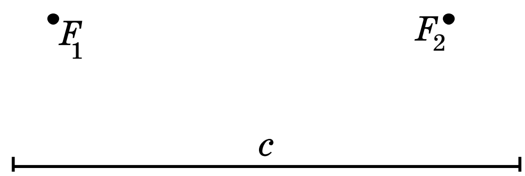


Рис. 79

Ответ ____

22.5. Что будет происходить с эллипсом, если константа c не изменяется, а фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

Ответ ____

____

22.6. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c (рис. 79) постройте точки на эллипсе, равноудаленные от фокусов. Сколько таких точек?

Ответ ____

22.7. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c (рис. 79) проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2.

22.8. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c (рис. 80) проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) A на эллипсе; б) C вне эллипса. Опишите построение.

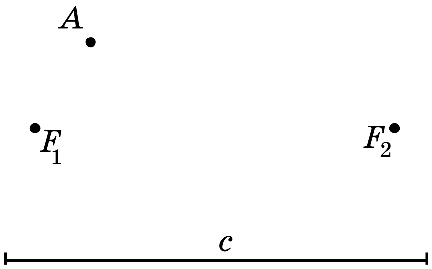


Рис. 80

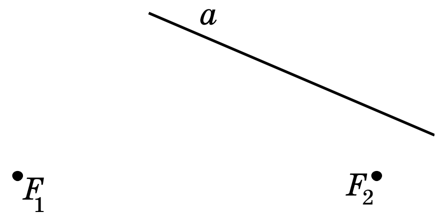


Рис. 81

Построение

22.9. Даны два фокуса и касательная к эллипсу (рис. 81). Постройте постоянную *c* и найдите точку касания. Опишите построение.

Построение

22.10. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них (рис. 82). С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса. Опишите это построение.

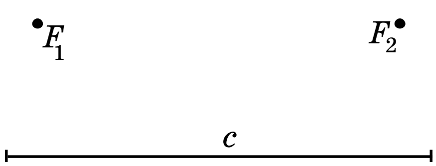


Рис. 82

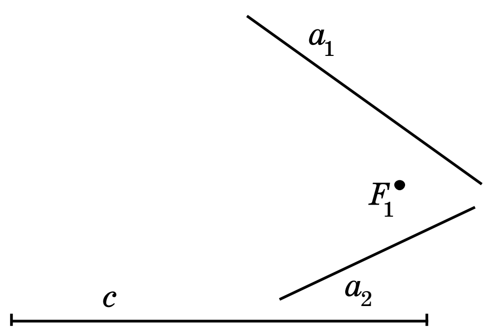


Рис. 83

Построение

22.11. Даны две касательные, фокус F_1 и константа c (рис. 83). Постройте второй фокус эллипса. Опишите построение.

Построение ____

____

____

____

____

22.12. Для данного эллипса (рис. 84) укажите способ нахождения его фокусов.

Ответ ____

____

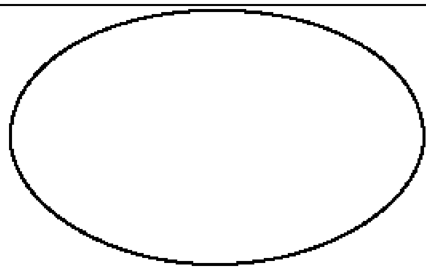


Рис. 84

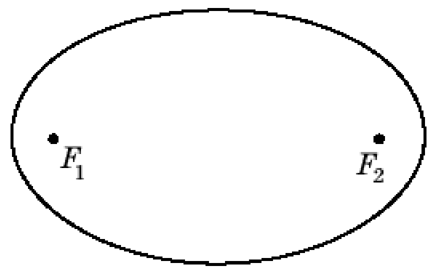


Рис. 85

____

_______ 22.13. Пусть дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c (рис. 85). Докажите, что окружность с центром в фокусе и радиусом $r = \frac{1}{2}(c - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.

22.14. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c. Нарисуйте это геометрическое место точек.

Ответ ____

____

22.15. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов. Нарисуйте это геометрическое место точек.

Ответ ____

____

23*. ГИПЕРБОЛА

23.1. Заполните пропуски.

1. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, ______________________________ от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина ____________________________.
Точки F_1, F_2 называются ______________________________________.

2. Для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: ____ где c - некоторый заданный отрезок.

3. Касательной к гиперболе называется прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат ________________________________, т.е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$.

4. Касательной к гиперболе, проходящей через точку A является прямая, ____ угла ______________________.

5. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от гиперболы, пойдут так,____
________________________________.

23.2. Отметьте точки F_1, F_2 и нарисуйте отрезок длины $c < F_1F_2$. Изобразите несколько точек гиперболы и саму гиперболу с фокусами F_1, F_2 и константой c.

23.3. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

Ответ ____

____

23.4. Для данной гиперболы с фокусами F_1, F_2, расположенными друг от друга на расстоянии 5 см, и константой c = 4 см. Найдите: а) наименьшее расстояние между точками гиперболы; б) наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокуса. Укажите эти точки (рис. 86).

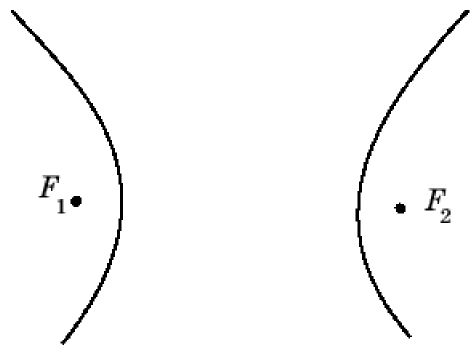


Рис. 86

Ответ ____

23.5. Что будет происходить с гиперболой, если константа c не изменяется, а фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

Ответ ____

____

23.6. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c (рис. 86) проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2.

23.7. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c - (рис. 87) проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) A на гиперболе; б) C вне гиперболы. Опишите построение.

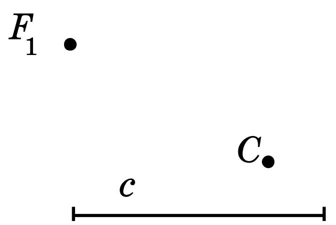


Рис. 87

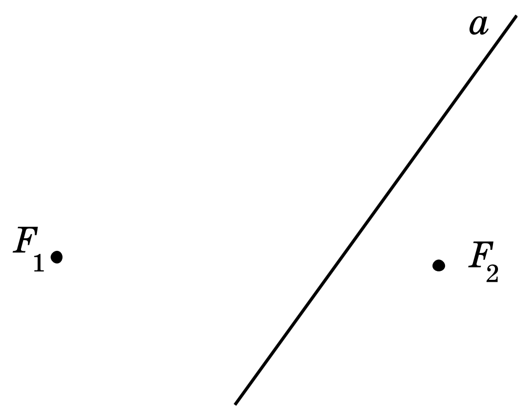


Рис. 88

Построение ____

____

____

____

23.8. Даны два фокуса и касательная к гиперболе (рис. 88). Постройте постоянную *c* и найдите точку касания. Опишите построение.

Построение ____

____

____

____

23.9. Даны фокусы гиперболы и константа *c* (рис. 89). С помощью циркуля постройте несколько точек этой гиперболы. Опишите построение.

Построение ____

____

____

____

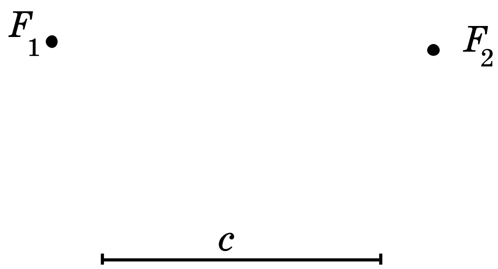


Рис. 89

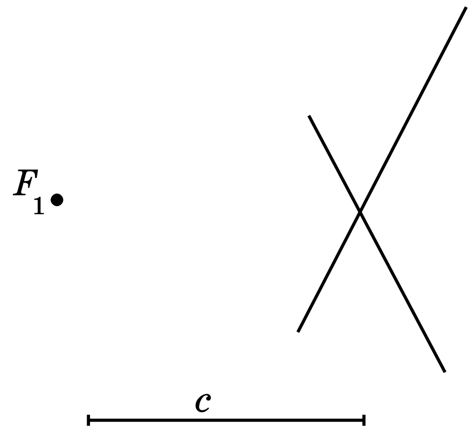


Рис. 90

23.10. Даны две касательные, фокус F_1 и константа c (рис. 90). Постройте второй фокус гиперболы. Опишите построение.

Построение ____

____

____

____

____

23.11. Для данной гиперболы (рис. 91) укажите способ нахождения ее фокусов.

Ответ ____

____

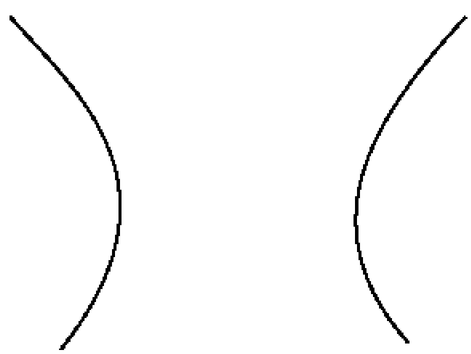


Рис. 91

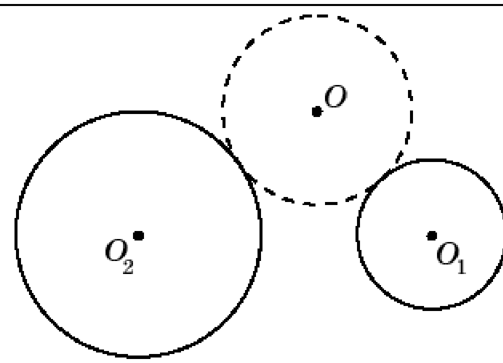


Рис. 92

____

____

23.12. Найдите геометрическое место центров O окружностей, касающихся двух заданных окружностей (рис. 92).

Ответ ____

____23.13. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные a и b (рис. 93).

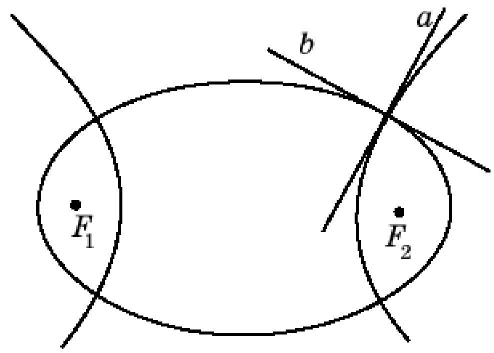


Рис. 93

24*. ГРАФЫ

24.1. Заполните пропуски.

1. Фигура образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется ______ ___________________________. Точки называются _________________, а отрезки – ______________________ графа.

2. Примерами графов могут служить _______________________ ____ ____

3. Граф называется уникурсальным, если ___________________ ____ ____

4. Индексом вершины графа называется число ребер графа, ____.

5. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно ____.

24.2. Нарисуйте графы, у которых имеются вершины индексов 1, 2, 3 и 4.

24.3. Нарисуйте граф, в котором каждая вершина имеет индекс, равный: а) двум; б) трем; в) четырем.

24.4. В графе 10 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ ____

24.5. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ ____

24.6. Определите, какие графы, изображенные на рисунке 94, являются уникурсальными? Укажите способ прохождения ребер уникурсальных графов.

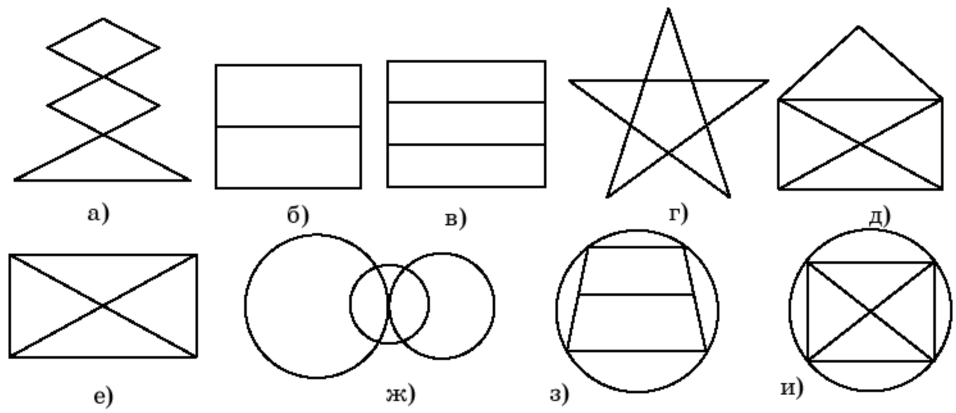


Рис. 94

24.7. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рисунке 95.

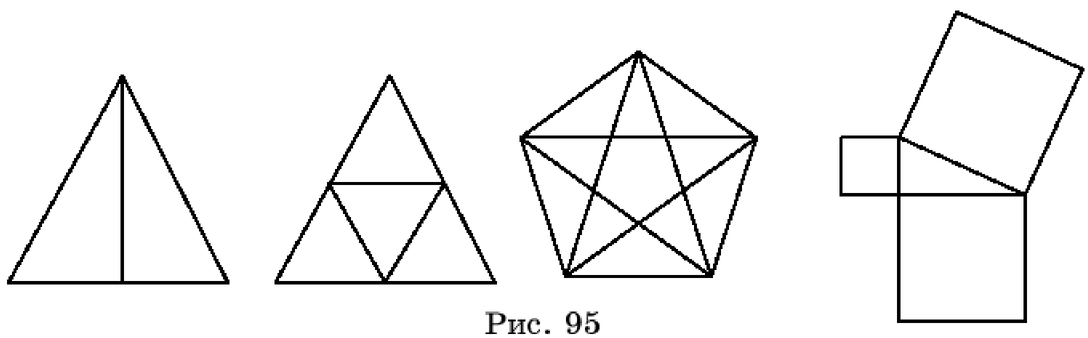


Рис. 95

24.8. Докажите, что если в задаче о кенигсбергских мостах добавить еще один мост в любом месте реки Прегель, то полученный граф будет уникурсальным. Укажите способ прохождения мостов на рисунке 96. Нарисуйте соответствующий граф.

Доказательство ____
____
____
____

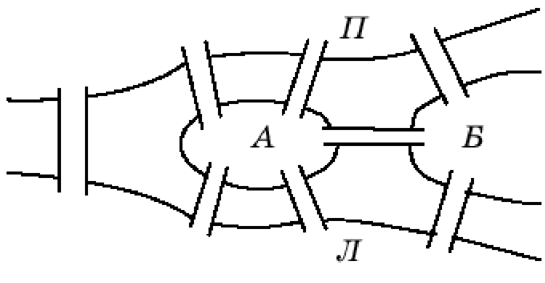


Рис. 96

24.8. Докажите, что в любом графе сумма индексов всех его вершин - число четное, равное удвоенному числу ребер графа. Выведите из этого, что число вершин с нечетными индексами четно.

Доказательство ____
____
____
____
____

24.9. Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить ломаной, состоящей из ребер графа. Нарисуйте связные и несвязные графы.

24.10. Связный граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется деревом. Нарисуйте графы, являющиеся деревьями.

24.11. Докажите, что в графе, являющимся деревом, любые две вершины можно соединить только одной ломаной.

Доказательство ____

24.12. Докажите, что для любого дерева, имеющего В вершин и Р ребер, справедливо соотношение Эйлера: В - Р = 1.

Доказательство ____

24.13. Приведите примеры графов, для которых В – Р □ 1.

24.14. Граф, не содержащий ни одной замкнутой ломаной, называется лесом. Пусть лес состоит из *n* деревьев и имеет В вершин и Р ребер. Чему равно В - Р?

Ответ ____

24.15. Нарисуйте графы, для которых В - Р равно: а) 0; б) 1; в) 2; г) -1; д) -2.

25*. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

25.1. Заполните пропуски в формулировке теоремы Эйлера.

Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или ___________________________ точек, или ____________________ вершины, или ______________________ ребра, то имеет место равенство____ где В - ____________________________, Р - ______________________, Г - ____.

25.2. Нарисуйте какое-нибудь разбиение выпуклого четырехугольника на выпуклые четырехугольники.

25.3. Докажите, что для произвольного разбиения четырехугольника на четырехугольники выполняется равенство В – Г = 3.

Доказательство ____

____

____

25.4. Нарисуйте какое-нибудь разбиение выпуклого пятиугольника на выпуклые пятиугольники.

25.5. Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу? Сделайте рисунки.

Ответ ____

25.6. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу? Сделайте рисунки.

Ответ ____

25.7. Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно: а) 6; б) 12; в) 15? Нарисуйте такие разбиения.

Ответ ____

25.8. Внутри n - угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$. Приведите пример такого разбиения.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

25.9. Докажите, что для любого разбиения n-угольника на m-угольники выполняется равенство $2В + (2 – m)Г = n + 2$.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

25.10. В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно В – Р + Г для этого разбиения. Приведите пример такого разбиения.

Ответ ____

26*. ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

26.1. Заполните пропуски.

1. Задача о раскрашивании карты состоит в том, чтобы ______
____
____
____

2. Годом рождения проблемы четырех красок считается ____________ год, когда на одном из заседаний __________________ ____________________________ общества выдающийся английский математик __________________ сформулировал поставленную задачу: "Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить ___________________ _____________________".

3. В __________ году английский математик _______________ доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов.

4. В ____________ году американские математики __________ и ____________________ показали, что любую карту, имеющую не более ____________ стран, можно раскрасить в четыре цвета.

5. В ____________ году американскими учеными ___________ ____________и _________________________ было получено первое машинное решение.

6. Всякую карту, образованную прямыми, можно раскрасить в ________________ цвета.

26.2. Раскрасьте карту, изображенную на рисунке 97, а. Какое минимальное число красок для этого потребуется?

Ответ ____

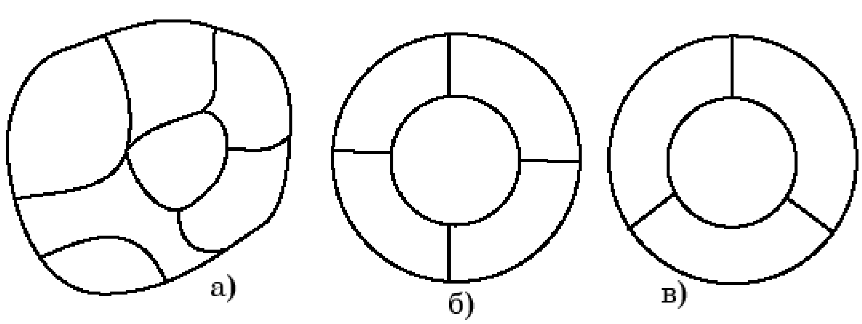
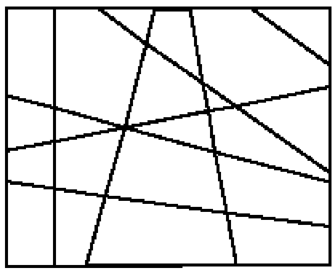


Рис. 97

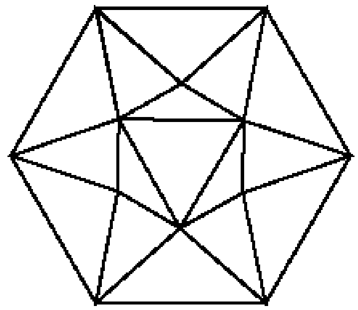
26.3. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок (рис. 97, б, в)?

Ответ ____

26.4. Раскрасьте в два цвета карты, изображенные на рисунке 98.



а)



б)

Рис. 98

26.5. Раскрасьте в два цвета карту, образованную окружностями на рисунке 99.

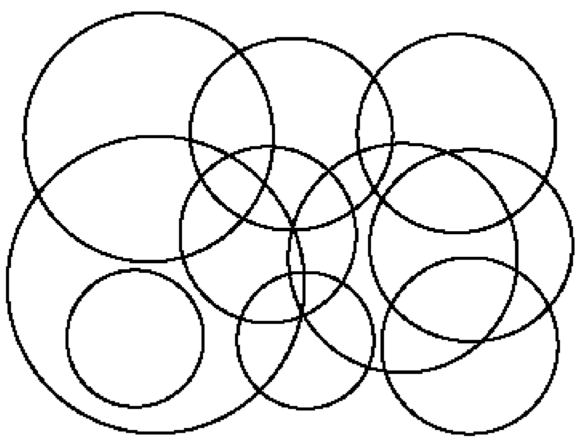


Рис. 99

26.6. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета. Изобразите такую карту и приведите ее раскраску.

Доказательство ______________________________________

26.7. Сколько красок потребуется для карты, изображенной на рисунке 100?

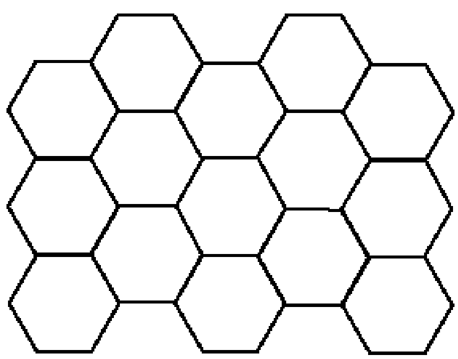


Рис. 100

Ответ ____

26.8. Какое наибольшее число клеток в квадрате *n*□*n*, нарисованном на клечатой бумаге, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате 2□2 не оказалось трех закрашенных клеток? Приведите пример такой раскраски.

Ответ ____

СОДЕРЖАНИЕ