И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

11 класс

Настоящая рабочая тетрадь по геометрии предназначена для работы в 11 классе по учебникам:

1. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2003.

2. Смирнова И.М. Геометрия: Учебник для 10-11 классов. Гуманитарный профиль. – М.: Мнемозина, 2004.

Она соответствует программе по математике для общеобразовательных учреждений и будет полезна при выполнении классных и домашних работ, а также при организации различного рода самостоятельных и индивидуальных работ учащихся. Собранные в ней задачи помогут в усвоении курса стереометрии, развитию пространственных представлений, выработке необходимых практических навыков, при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам.

ДОРОГИЕ РЕБЯТА

В 11-ом классе мы продолжим изучение стереометрии. Познакомимся с круглыми телами, научимся изображать комбинации многогранников и тел вращения, вычислять объемы и площади поверхностей, рассмотрим аналитические способы задания пространственных фигур.

Весь собранный в данном пособии материал разбит на отдельные параграфы. В каждом из них даны задания, которые могут быть использованы как для классной, так и для домашней работ, а также для различный самостоятельных и индивидуальных работ. Задания подобраны и представлены таким образом, чтобы освободить вас от вспомогательной и непроизводительной работы, например, копирования условий задачи или чертежа, от выполнения несущественных дополнительных построений и т.п. Упражнения весьма разнообразны. В некоторых из них вам нужно будет выбрать верные (или неверные) утверждения из числа предложенных. В других нужно будет заполнить пропуски в формулировках определений, доказательствах теорем или в решениях задач. Есть, так называемые, задачи по готовому чертежу. В них нужно ответить на поставленный вопрос, или выполнить дополнительные построения, или самим сформулировать и решить задачу.

Решение всех предложенных задач поможет вам в изучении курса стереометрии, будет способствовать развитию пространственных представлений, выработке необходимых практических навыков, подготовит к выпускным и различным конкурсным экзаменам.

Желаем успехов в изучении стереометрии!

1. СФЕРА И ШАР

1.1. Закончите предложения.

1. Сферой называется ____
____
____

2. Шаром называется ____
____
____

3. Касательной плоскостью к сфере называется ________________
____
____

4. Касательной прямой к сфере называется ____________________
____
____

1.2. Сколько сфер можно провести через три точки: а) не лежащие на одной прямой; б) лежащие на одной прямой?

Ответ ____
____

1.3. Сколько сфер можно провести через четыре точки: а) не лежащие в одной плоскости; б) лежащие в одной плоскости?

Ответ ____
____

1.4. Как расположены сфера и плоскость, если: а) расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса; б) расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу; в) расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса? Изобразите соответствующие ситуации.

Ответ

а) ____

б) ____

в) ____

1.5. Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются? Изобразите соответствующие ситуации.

Ответ

а) ____

б) ____

в) ____

1.6. Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор (рис. 1), постройте изображения полюсов.

1.7. Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами (рис. 2), изобразите экватор.

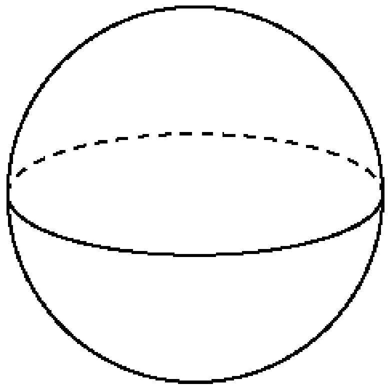


Рис. 1

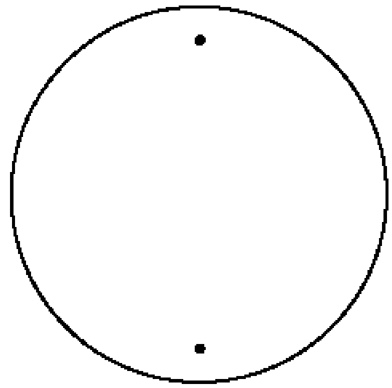


Рис. 2

1.8. На рисунке 3 изображена сфера и меридиан. Нарисуйте меридиан, плоскость которого перпендикулярна плоскости данного меридиана.

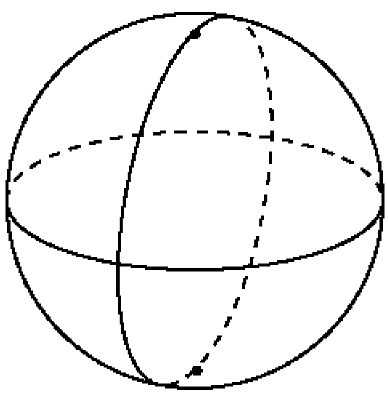


Рис. 3

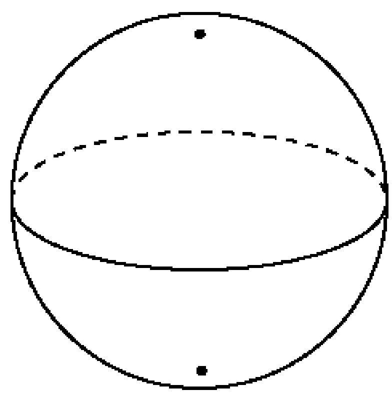


Рис. 4

1.9. На данном изображении сферы (рис. 4) нарисуйте несколько меридианов и параллелей.

1.10. Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

Ответ ____

1.11. Шар радиуса 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Найдите радиус круга, получившегося в сечении.

Ответ ____

1.12. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении? Нарисуйте шар и это сечение.

Ответ ____

1.13. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $45°$ к нему. Найдите площадь сечения. Нарисуйте шар и это сечение.

Ответ ____

1.14. Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

Ответ ____

1.15. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.

Ответ ____

1.16. Найти геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через заданную точку, принадлежащую сфере.

Ответ ____

1.17. Найти геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через заданную точку, лежащую вне сферы.

Ответ ____

1.18. Найти геометрическое место центров сфер, данного радиуса, касающихся данной сферы: а) того же радиуса; б) меньшего радиуса; большего радиуса?

Ответ

а)____

б)____

в)____

1.19. Докажите, что плоскость, проходящая через точку на сфере и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной плоскостью к сфере. Сделайте рисунок.

Доказательство. ____

____

____

____

____

____

1.20. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величины φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла. Сделайте рисунок.

Ответ ____

2. МНОГОГРАННИКИ, ВПИСАННЫЕ В СФЕРУ

2.1. Закончите предложения.

1. Многогранник называется вписанным в сферу, если _______
____

2. Сфера называется описанной около многогранника, если __
____
____

3. Около любой треугольной пирамиды можно ____________
____

4. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда ____
____

2.2. Изобразите треугольную пирамиду, вписанную в данную сферу (рис. 5).

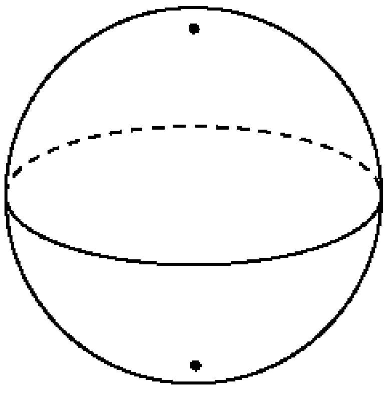


Рис. 5

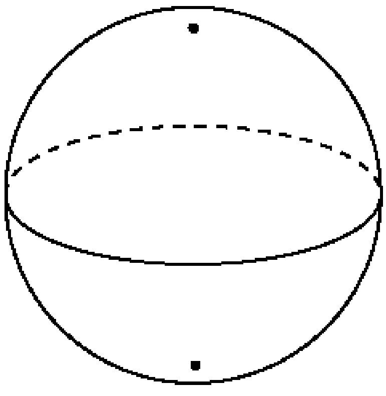


Рис. 6

2.3. Изобразите прямую треугольную призму, вписанную в данную сферу (рис. 6).

2.4. Можно ли описать сферу около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм; г) параллелепипеда, одной из граней которого является ромб?

Ответ ____
____

2.5. На рисунке 7 изображен прямоугольный параллелепипед. Укажите центр описанной около него сферы. Найдите радиус этой сферы, если ребра, выходящие из одной вершины, равны a, b и c.

Ответ ____

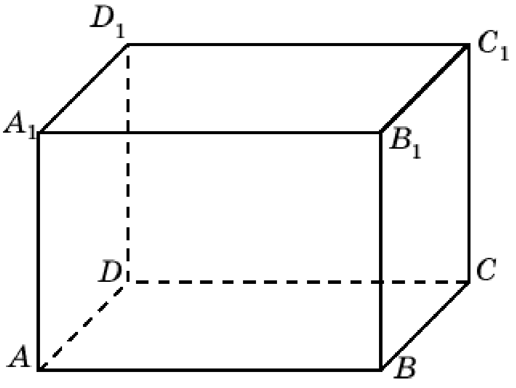


Рис. 7

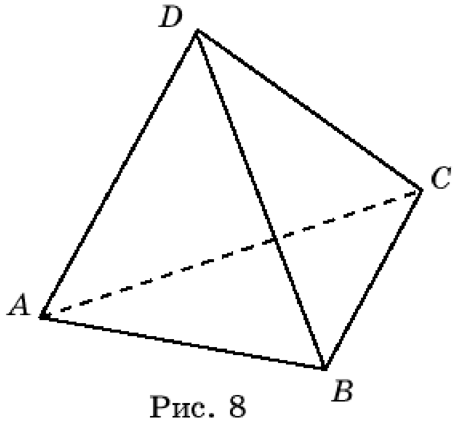


Рис. 8

2.6. На рисунке 8 изображен правильный тетраэдр. Укажите центр описанной около него сферы. Чему равен радиус описанной сферы, если ребро тетраэдра равно a?

Ответ ____

2.7. Может ли центр описанной около треугольной пирамиды сферы находиться вне этой пирамиды? Изобразите соответствующую ситуацию.

Ответ ____

2.8. На рисунке 9 изображена пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен 90°. Укажите на чертеже точку O - центр сферы, описанной около пирамиды.

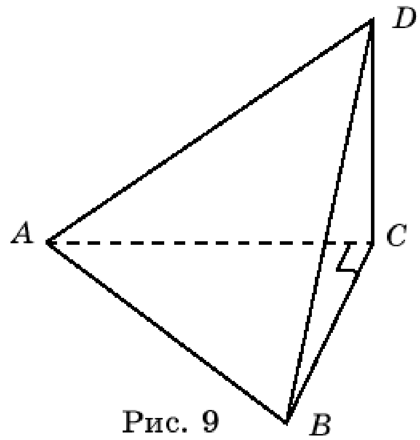


Рис. 9

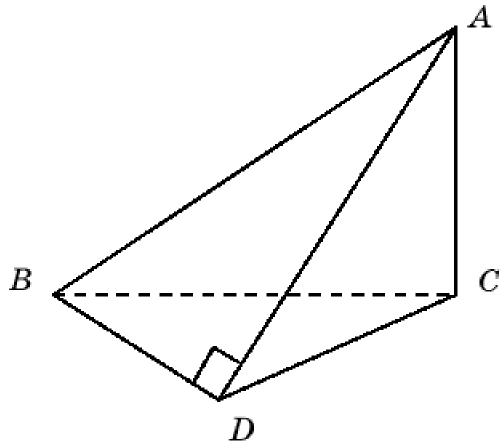


Рис. 10

2.9. На рисунке 10 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDA прямой. Укажите центр сферы, описанной около этой пирамиды.

2.10. На рисунке 11 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой. $AC = CB = CD = DB = AD = a$. Укажите центр описанной около нее сферы. Найдите высоту пирамиды.

Ответ ____

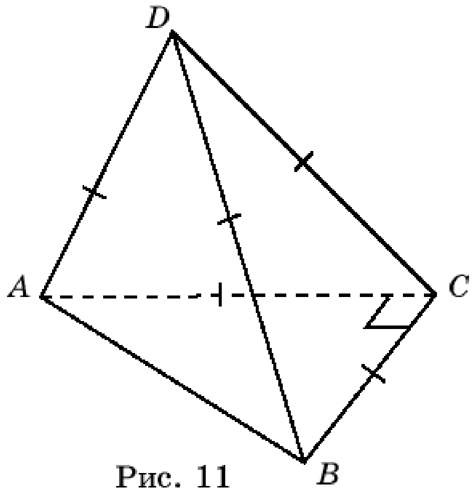


Рис. 11

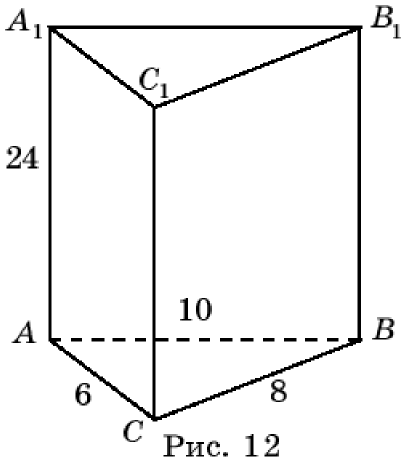


Рис. 12

2.11. На рисунке 12 изображена прямая призма, основанием которой служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы равна 24 см. Укажите центр сферы, описанной около этой призмы, и найдите радиус этой сферы.

Ответ ____

2.12. Около какой прямой призмы можно описать сферу?

Ответ ____

____

2.13. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

Ответ ____

____

2.14. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?

Ответ ____

2.15. Выберите верное продолжение из предложенных.

Около призмы можно описать сферу, если:

а) в основании лежит выпуклый многоугольник;

б) все боковые ребра равны;

в) призма – правильная;

г) призма – прямая.

2.16. Около какой пирамиды можно описать сферу?

Ответ ____

____

2.17. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

Ответ ____

____

2.18. Выберите верное продолжение из предложенных.

В около пирамиды можно описать сферу, если:

а) в основании лежит выпуклый многоугольник;

б) все боковые ребра равны;

в) все двугранные углы при основании равны.

2.19. Ребро октаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

Ответ ____

2.20*. Ребро икосаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

Ответ ____

2.21*. Ребро додекаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

Ответ ____

2.22. Можно ли описать сферу около кубооктаэдра (рис. 13)?

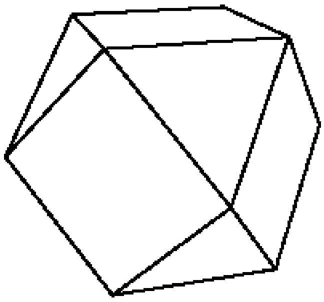


Рис. 13

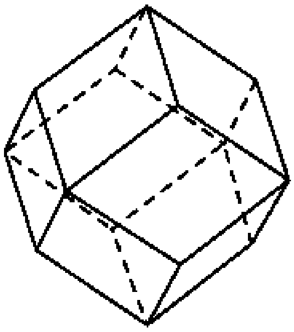


Рис. 14

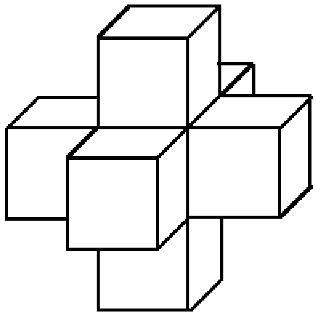


Рис. 15

Ответ ____

2.23. Можно ли описать сферу около ромбододекаэдра (рис. 14)?

Ответ ____

2.24*. Можно ли описать сферу около греческого креста (рис. 15)?

Ответ ____

3. МНОГОГРАННИКИ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО СФЕРЫ

3.1. Закончите предложения.

1. Многогранник называется описанным около сферы, если

____

____

2. Сфера называется вписанной в многогранник, если _______

____

____

3. В любую треугольную пирамиду можно ________________

____

4. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ____

____

3.2. Можно ли вписать сферу в: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) прямую треугольную призму, г) правильную четырехугольную пирамиду?

Ответ ____

____

3.3. На рисунке 16 изображен куб. Укажите центр вписанной в него сферы. Найдите радиус этой сферы, если ребро куба равно a.

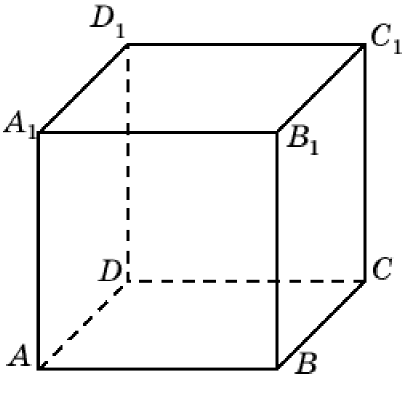


Рис. 16

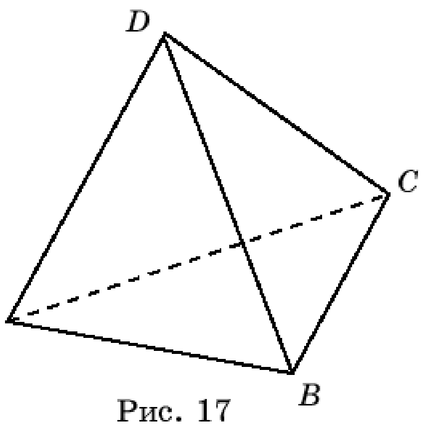


Рис. 17

Ответ ____

3.4. На рисунке 17 изображен правильный тетраэдр. Укажите центр вписанной в него сферы. Чему равен радиус вписанной сферы, если ребро тетраэдра равно a?

Ответ ____

3.5. Нарисуйте куб, описанный около сферы, грани которого касаются сферы в полюсах N, S и указанных точках экватора (рис. 18).

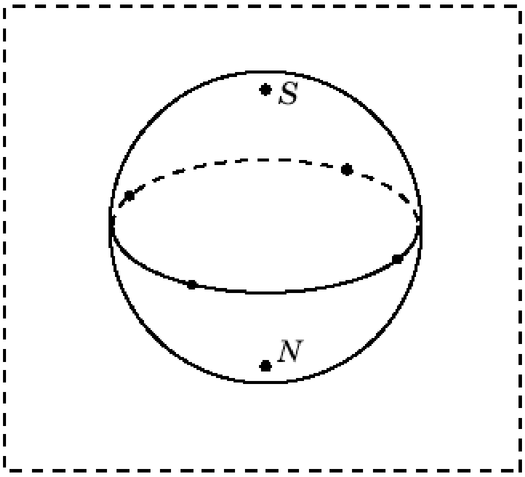


Рис. 18

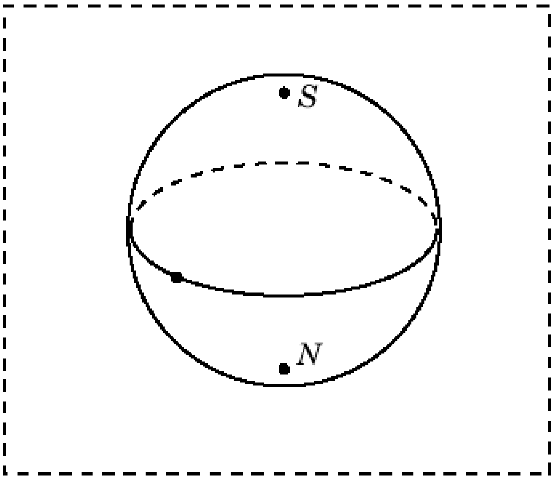


Рис. 19

3.6. Нарисуйте правильную треугольную призму, описанную около сферы, грани которой касаются сферы в полюсах N, S и указанных точках экватора (рис. 19).

3.7. В каком случае в прямую призму можно вписать сферу?
Ответ ____
____

3.8. Приведите пример прямой призмы, в которую нельзя вписать сферу.
Ответ ____
____

3.9. Можно ли вписать сферу в наклонную призму?
Ответ ____

3.10. Нарисуйте правильный тетраэдр, описанный около сферы, грани которого касаются сферы в указанных точках (рис. 20).

3.11. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду, описанную около сферы, грани которой касаются сферы в указанных точках (рис. 21).

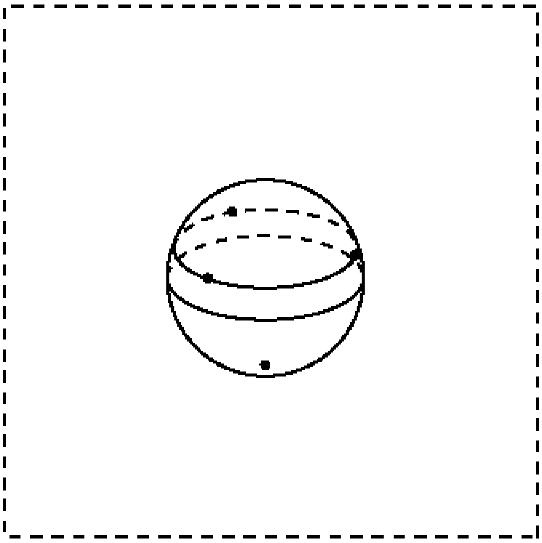


Рис. 20

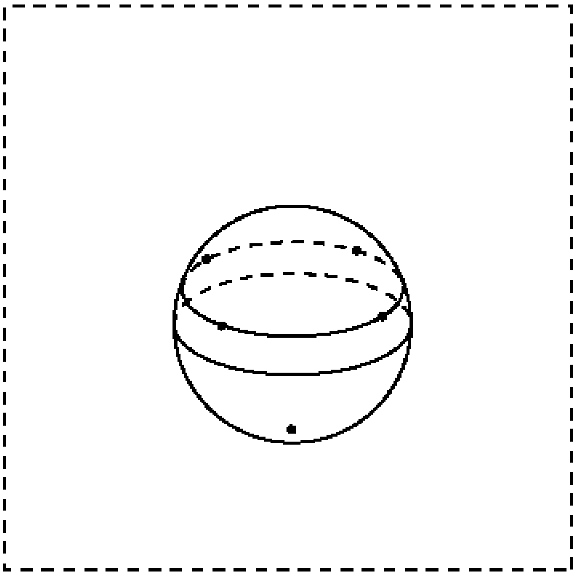


Рис. 21

3.12. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.

3.13. В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса R. Найдите сторону основания и боковое ребро этой призмы.

Ответ ____

3.14. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 4 см и углом $60°$. Каким должно быть боковое ребро призмы, чтобы в нее можно было вписать сферу.

Ответ ____

3.15. Выберите верное продолжение из предложенных.

В пирамиду можно вписать сферу, если:

а) в основании лежит правильный многоугольник;

б) все двугранные углы при основании равны;

в) все боковые ребра равны.

3.16. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании $60°$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

Ответ ____

3.17. Ребро октаэдра равно a. Найдите радиус вписанной в него сферы.

Ответ ____

3.18*. Ребро икосаэдра равно a. Найдите радиус вписанной в него сферы.

Ответ ____

3.19*. Ребро додекаэдра равно a. Найдите радиус вписанной в него сферы.

Ответ ____

3.20. Можно ли вписать сферу в кубооктаэдр (рис. 13)?

Ответ ____

3.21. Можно ли вписать сферу в ромбододекаэдр (рис. 14)?

Ответ ____

3.22. Можно ли вписать сферу в усеченный куб (рис. 22)?

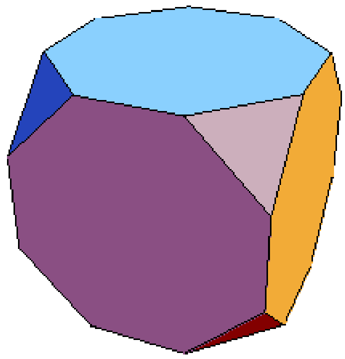


Рис. 22

Ответ ____

4. ЦИЛИНДР

4.1. Закончите предложения.

1. Цилиндром называется фигура, ______________________________

____

____

2. Прямым цилиндром называется фигура, ____________________

____

____

3. Основаниями цилиндра называются ________________________

____

____

4. Образующими цилиндра называются ______________________

____

____

5. Боковой поверхностью цилиндра называется ______________

____

____

6. Высотой цилиндра называется _____________________________

____

____

7. Осью цилиндра называется ________________________________

____

____

8. Осевым сечением цилиндра называется ___________________

____

____

4.2. На рисунке 23 изображен цилиндр. Нарисуйте какое-нибудь его сечение, параллельное основаниям. Какой фигурой оно является?

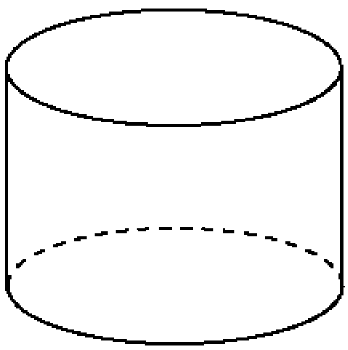


Рис. 23

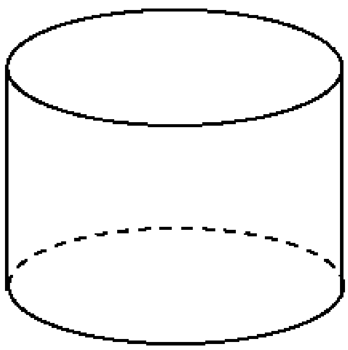


Рис. 24

Ответ ____

4.3. На рисунке 24 изображен цилиндр. Нарисуйте какое-нибудь его осевое сечение. Какой фигурой оно является?

Ответ ____

4.4. Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудаленных от: а) образующих; б) оснований.

Ответ ____

4.5. На рисунке 25 изображен цилиндр. Нарисуйте сечение цилиндра, проходящее через указанные точки. Какой фигурой оно является?

Ответ ____

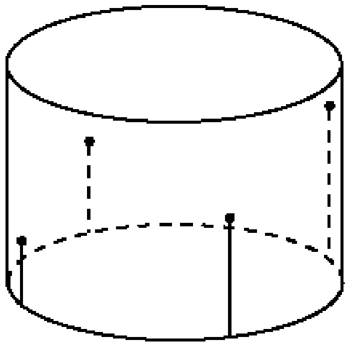


Рис. 25

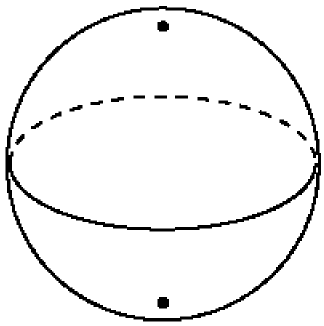


Рис. 26

4.6. В каком случае в цилиндр можно вписать сферу? Используя рисунок 26, нарисуйте цилиндр, описанный около сферы.

Ответ ____

4.7. В цилиндр вписана сфера радиуса r. Чему равны высота цилиндра и радиус его основания?

Ответ ____

4.8. Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?

Ответ ____

4.9. Верно ли, что около любого цилиндра можно описать сферу? Изобразите цилиндр, вписанный в сферу.

4.10. Около цилиндра высоты h описана сфера радиуса R. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ ____

4.11. Можно ли описать сферу около наклонного цилиндра?

Ответ ____

4.12. Нарисуйте правильную треугольную призму, вписанную в цилиндр.

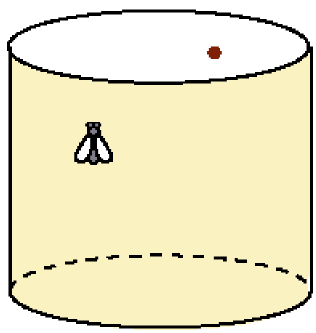


Рис. 27

4.13. Нарисуйте правильную шестиугольную призму, описанную около цилиндра.

4.14. Какому условию должна удовлетворять прямая призма, чтобы: а) в нее можно было вписать цилиндр; б) около нее можно описать цилиндр.

Ответ ____

____

4.15. На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в трех см от верхнего края виднеется капля меда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха (рис. 27). Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли. Диаметр банки 12 см. Нарисуйте их.

Ответ____

5. КОНУС

5.1. Закончите предложения.

1. Конусом называется фигура, ______________________________
____
____

2. Основанием конуса называется __________________________
____
____

3. Образующими конуса называются ________________________
____
____

4. Боковой поверхностью конуса называется ________________
____
____

5. Высотой конуса называется _____________________________
____
____

6. Конус называется прямым, если __________________________
____
____

7. Осью конуса называется _________________________________
____
____

8. Осевым сечением конуса называется ______________________
____
____

5.2. На рисунке 28 изображен конус, радиус основания которого равен 1 см, а высота – 2 см. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от него на расстояние 1 см. Какой фигурой является это сечение? Найдите его площадь.

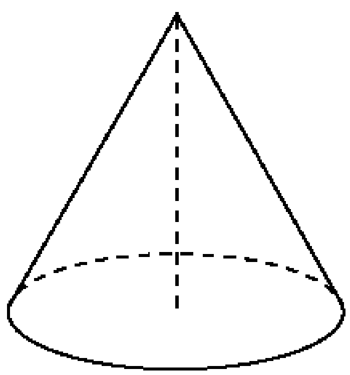


Рис. 28

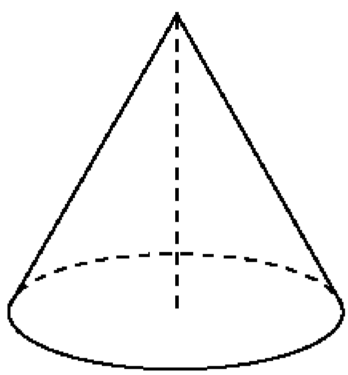


Рис. 29

Ответ ____

5.3. На рисунке 29 изображен конус, радиус основания которого равен 1 см, а высота – 2 см. Нарисуйте какое-нибудь осевое сечение этого конуса. Какой фигурой является это сечение? Найдите его площадь.

Ответ ____

5.4. Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

5.5. В каком случае в конус можно вписать сферу? Нарисуйте сферу, вписанную в конус.

Ответ ____

5.6. Можно ли вписать сферу в наклонный конус?

Ответ ____

5.7. Радиус основания конуса равен 3 см, боковое ребро – 6 см. Найдите радиус вписанной в этот конус сферы.

Ответ ____

5.8. В каком случае около конуса можно описать сферу? Нарисуйте сферу, описанную около конуса.

Ответ ____

5.9. Можно ли описать сферу около наклонного конуса?

Ответ ____

5.10. Радиус основания конуса равен 3 см, боковое ребро – 6 см. Найдите радиус описанной около этого конуса сферы.

Ответ ____

5.11. Нарисуйте правильную треугольную пирамиду, вписанную в конус.

5.12. Нарисуйте правильную шестиугольную призму, описанную около конуса.

5.13. Какому условию должна удовлетворять пирамида, чтобы: а) в нее можно было вписать конус; б) около нее можно было описать конус.

Ответ ____

____

5.14*. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через указанные точки *A*, *B*, *C*, *D* (рис. 30). Какой фигурой является это сечение.

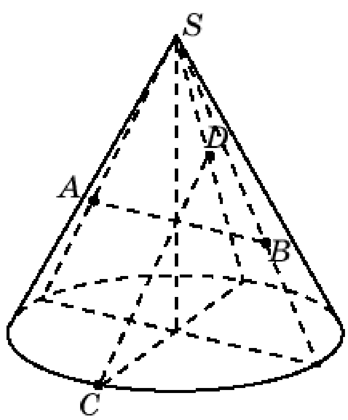


Рис. 30

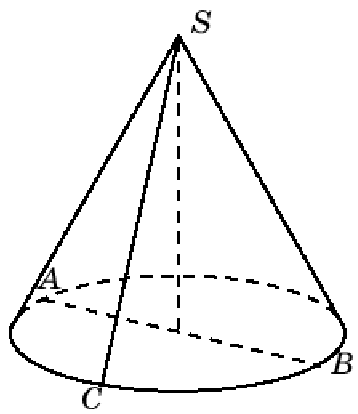


Рис. 31

Ответ ____

5.15*. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через указанный диаметр AB основания и параллельной указанной образующей SC конуса (рис. 31). Какой фигурой является это сечение?

Ответ ____

5.15*. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через указанную хорду AB основания и параллельной оси SO конуса (рис. 32). Какой фигурой является это сечение?

Ответ ____

5.16. Два одинаковых конуса имеют общую высоту, а вершина одного лежит в центре основания другого. Нарисуйте общую часть этих конусов.

5.17*. Радиус основания конуса равен R, образующая – $2R$. Чему равно кратчайшее расстояние по боковой поверхности конуса между двумя противоположными точками окружности основания этого конуса (рис. 33).

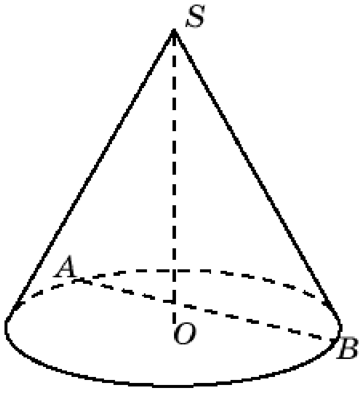


Рис. 32

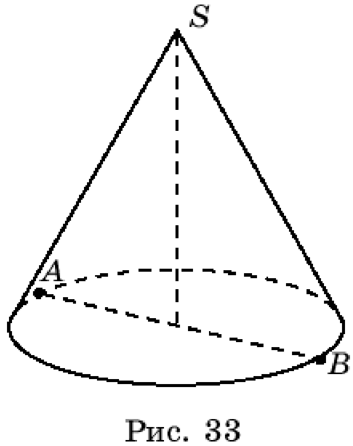


Рис. 33

Нарисуйте конус и кратчайший путь между указанными точками.

Ответ ____

6. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

6.1. Заполните пропуски.

1. Преобразование пространства, при котором ______________

____

____

____

называется поворотом или вращением.

2. Осью вращения называется ____________________________

____

2. Фигурой вращения называется фигура, полученная _______

____

____

6.2. Вращением каких фигур можно получить: а) сферу: б) цилиндр; в) конус?

Ответ: а)____

б)____

в)____

6.3. Как получается фигура, называемая тором? Нарисуйте эту фигуру.

Ответ ____

6.4. Как получается фигура, называемая эллипсоидом вращения? Нарисуйте эту фигуру.

Ответ ____

6.5. Как получается фигура, называемая параболоидом вращения? Нарисуйте эту фигуру.

Ответ ____

6.6. Как получается фигура, называемая гиперболоидом вращения? Нарисуйте эту фигуру.

Ответ ____

6.7. Какая поверхность получается при вращении прямой: а) параллельной оси; б) пересекающей ось; в) скрещивающейся с осью? Нарисуйте эти поверхности.

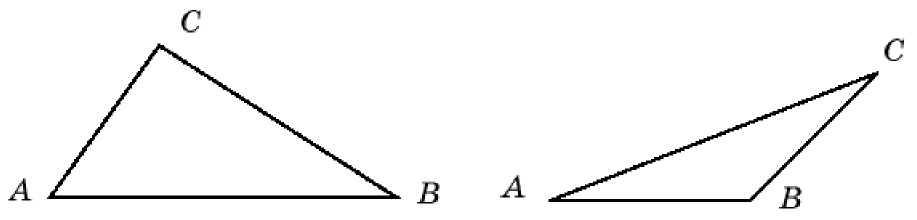
Ответ: а) ____

б)____

в)____

6.8. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника *ABC* вокруг стороны *AB* (рис. 34,а,б). Как эту фигуру можно получить из конусов?

Ответ ____



а) б)

Рис. 34

6.9. Кривая задана уравнением $y=x^2$, $0 \le x \le 2$. Нарисуйте поверхность, которая получается при вращении этой кривой вокруг оси Oy.

6.10. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{4} \le x \le 4$ вокруг: а) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

6.11. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oy.

6.12. Какая фигура получается при вращении правильной призмы вокруг прямой, проходящей через центры оснований? Нарисуйте эту призму и фигуру вращения

Ответ ____

6.13. Какая фигура получается при вращении правильной пирамиды вокруг ее высоты? Нарисуйте эту пирамиду и фигуру вращения.

Ответ ____

6.14. Какая фигура получается при вращении куба (рис. 35) вокруг прямой, соединяющей: а) центры противоположных граней; б) середины противоположных ребер; в) противоположные вершины? Нарисуйте эти фигуры.

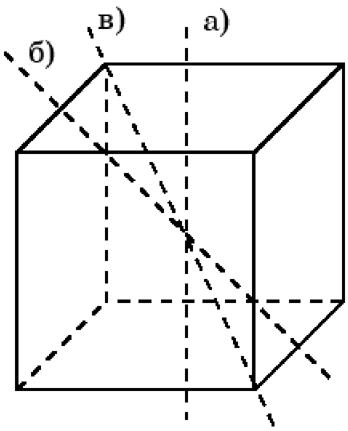


Рис. 35

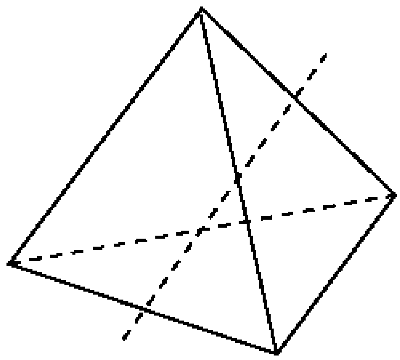


Рис. 36

Ответ ____

____

____

6.15. Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер (рис. 36)? Нарисуйте эту фигуру

Ответ

6.16. Из каких поверхностей состоит поверхность фигуры, получающейся вращением октаэдра (рис. 37) вокруг прямой соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер?

Ответ

6.17. Из каких поверхностей состоит поверхность фигуры, получающейся вращением икосаэдра (рис. 38) вокруг прямой соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

Ответ ____

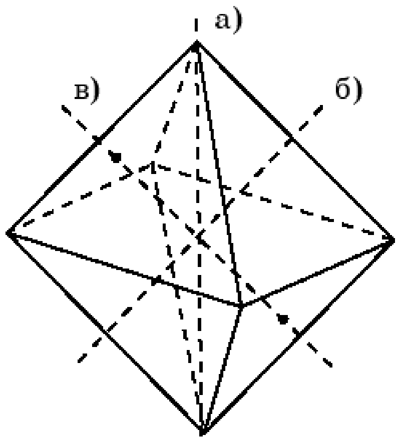


Рис. 37

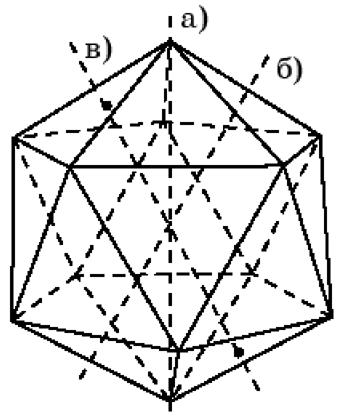


Рис. 38

6.18. Из каких поверхностей состоит поверхность фигуры, получающейся вращением додекаэдра (рис. 39) вокруг прямой соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

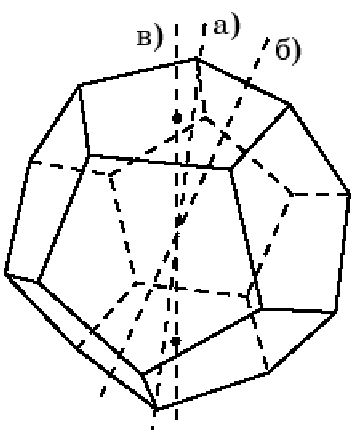


Рис. 39

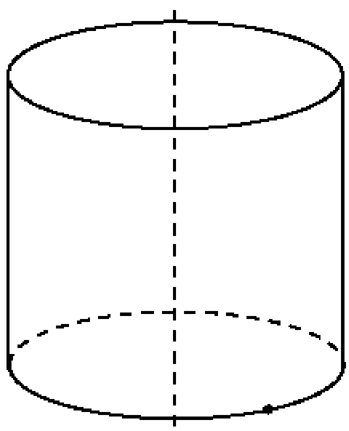


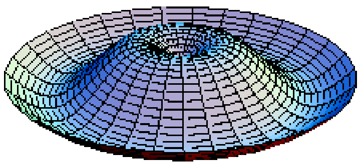
Рис. 40

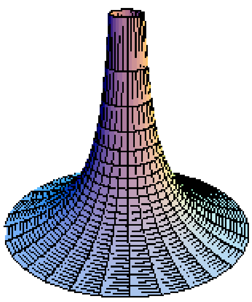
Ответ ____
____
____
____
____
____
____
____

6.19. Точка, находящаяся на боковой поверхности цилиндра (рис. 40), равномерно вращается вокруг оси цилиндра и одновременно равномерно движется в направлении образующей. Нарисуйте траекторию движения точки (винтовая линия).

6.20. Вращением графиков каких функций вокруг оси Oy являются поверхности, изображенные на рисунке 41, а, б, в.

Ответ ____
____
____


а)


б)

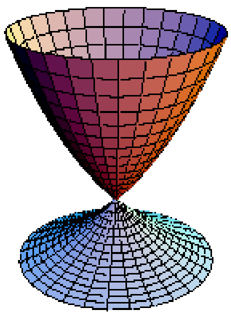

в)

Рис. 41

7. СИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

7.1. Заполните пропуски.

1. Точки A и A' пространства называются симметричными относительно точки O, если ______________________________________
____

2. Фигура Φ в пространстве называется центрально симметричной относительно точки O, если ________________________
____
____
Точка O называется ____

3. Точки A и A' пространства называются симметричными относительно прямой a, если ______________________________________
____
____

4. Фигура Φ в пространстве называется симметричной относительно оси a, если ______________________________________
____
____
Прямая a называется ____

5. Точки A и A' в пространстве называются симметричными относительно плоскости α, если ________________________________
____
____

6. Фигура Φ в пространстве называется симметричной относительно плоскости α, если ________________________________
____
____
Плоскость α называется____

7. Симметрия относительно плоскости называется также ____
____

8. Прямая a называется осью симметрии n-го порядка фигуры Φ, если ____
____
____

7.2. На рисунке 42 изображен тетраэдр. Постройте тетраэдр, центрально симметричный данному, относительно центра O.

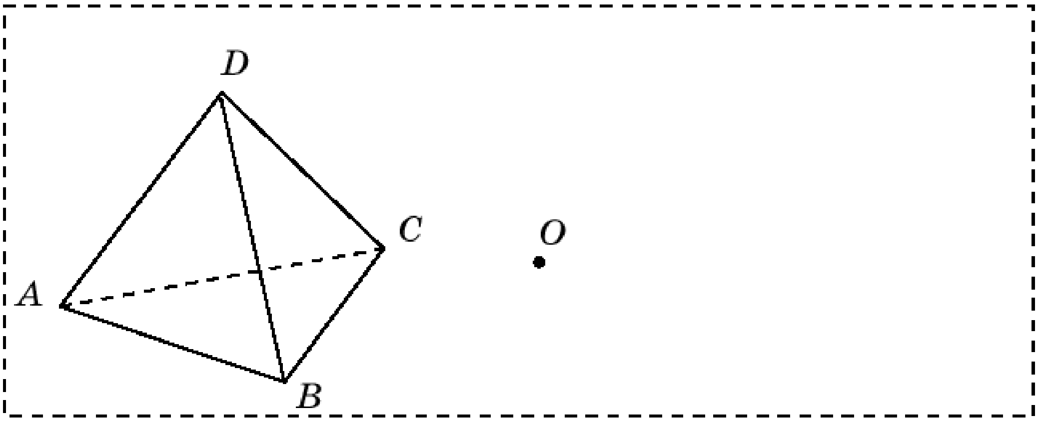


Рис. 42

7.3. На рисунке 43 изображен тетраэдр и ортогональные проекции его вершин на плоскость α. Постройте тетраэдр, зеркально симметричный данному относительно этой плоскости.

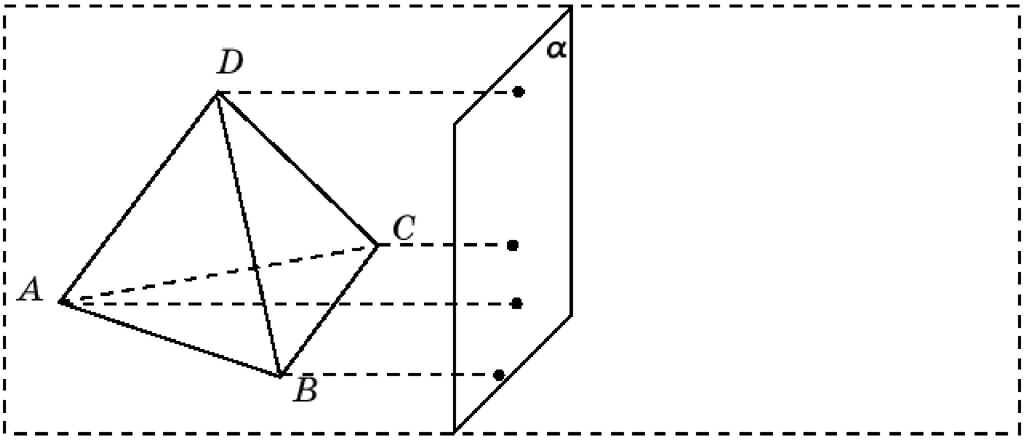


Рис. 43

7.4. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.

Ответ

7.5. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей? Приведите пример.

Ответ

7.6. Может ли фигура в пространстве иметь бесконечно много: а) центров симметрии; б) осей симметрии; в) плоскостей симметрии. Приведите примеры.

Ответ

7.7. Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед (рис. 44)? Нарисуйте оси симметрии.

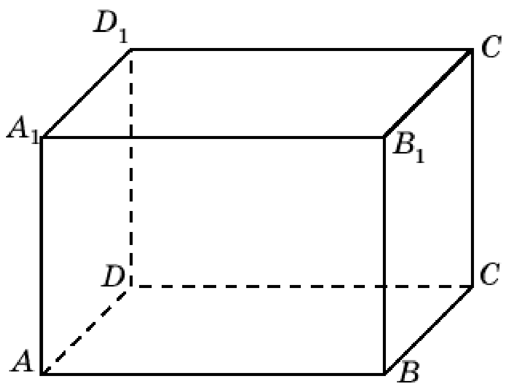


Рис. 44

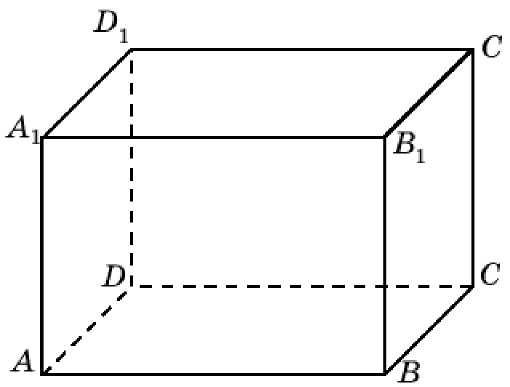


Рис. 45

Ответ

7.8. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед (рис. 45)? Нарисуйте плоскости симметрии.

Ответ ____

7.9. Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии и, наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

Ответ ____

____

____

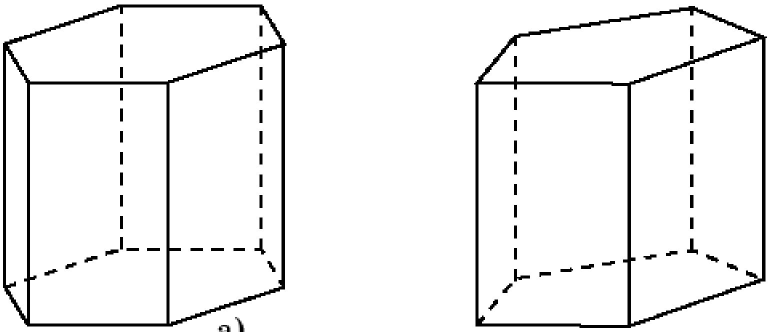
7.10. Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Ответ ____

____

____

7.11. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная призма, в основании которой лежит многоугольник с: а) четным числом сторон; б) нечетным числом сторон (рис. 46)?

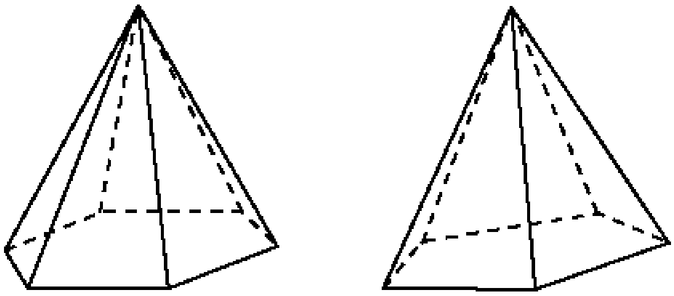


а) Рис. 46 б)

Ответ ____

____

7.12. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в основании которой лежит многоугольник с: а) четным числом сторон; б) нечетным числом сторон (рис. 47)?



а) б)

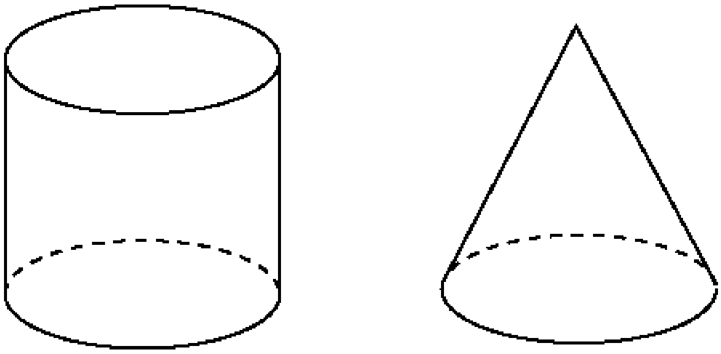
Рис. 47

Ответ ____

____

____

7.13. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет: а) цилиндр; б) конус (рис. 48)?



а) Рис. 48 б)

Ответ

7.14. Какими видами симметрии обладает куб (рис. 49)?

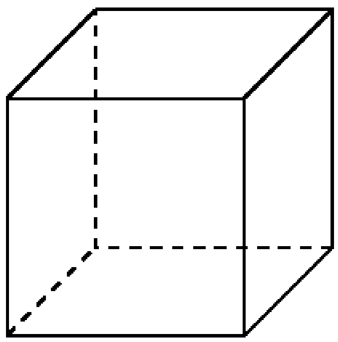


Рис. 49

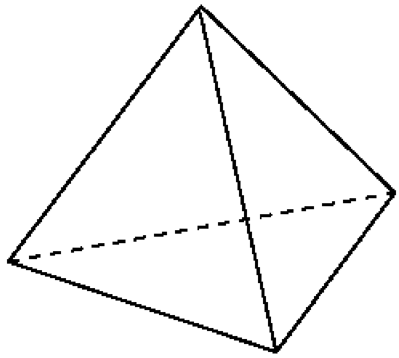


Рис. 50

Ответ

7.15. Какими видами симметрии обладает правильный тетраэдр (рис. 50)?

Ответ

7.16. Какими видами симметрии обладает октаэдр (рис. 51)?

Ответ

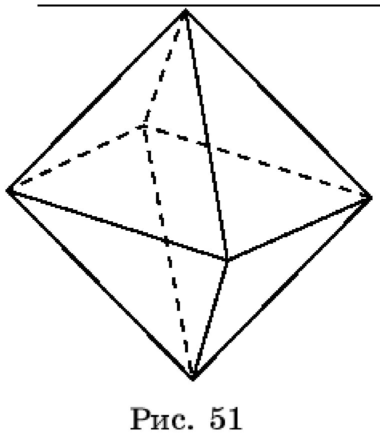


Рис. 51

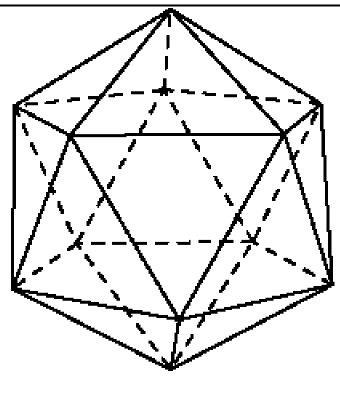


Рис. 52

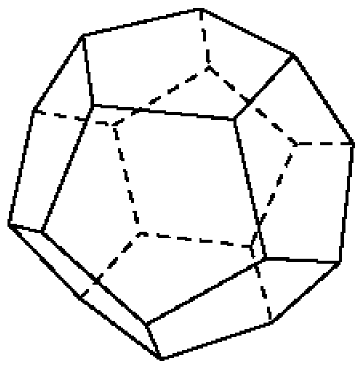


Рис. 53

7.17. Какими видами симметрии обладает икосаэдр (рис. 52)?
Ответ ____
____
____
____

7.18. Какими видами симметрии обладает додекаэдр (рис. 53)?
Ответ ____
____
____
____

7.19*. Приведите примеры пространственных фигур: а) имеющих центр симметрии и не имеющих оси симметрии; б) имеющих ось симметрии и не имеющих центра симметрии.

7.20*. Приведите примеры пространственных фигур: а) имеющих ось симметрии и не имеющих плоскости симметрии; б) имеющих плоскость симметрии и не имеющих оси симметрии.

7.21*. Приведите примеры пространственных фигур: а) имеющих центр симметрии и не имеющих плоскости симметрии; б) имеющих плоскость симметрии и не имеющих центра симметрии.

7.22*. Приведите пример пространственной фигуры, у которой ровно: а) одна ось симметрии; б) три оси симметрии.

7.23*. Приведите пример пространственной фигуры, у которой ровно: а) одна плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии.

7.24*. Может ли пространственная фигура иметь ровно две оси симметрии?

Ответ ____

8. ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ И ЦИЛИНДРА

8.1. Заполните пропуски.

1. За единицу объема принимается ____________________________

____

2. Объем фигуры – число, ____________________________________

____

____

3. Равные фигуры имеют ______________________________________

4. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ ______________________________________

____

5. Две фигуры, имеющие равные объемы, называются ________

____

6. Если при пересечении двух фигур в пространстве плоскостями, ____

____,
в сечениях получаются фигуры ____________________________________
____, то ________________

____

7. Объем прямоугольного параллелепипеда равен _____________

____

8. Объем призмы равен ______________________________________

____

9. Объем цилиндра равен ____________________________________

____

8.2. Чему равен объем пространственного креста (рис. 54), если ребра образующих его кубов равны единице?

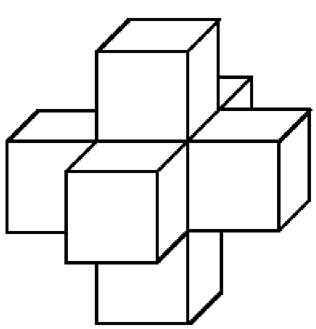


Рис. 54

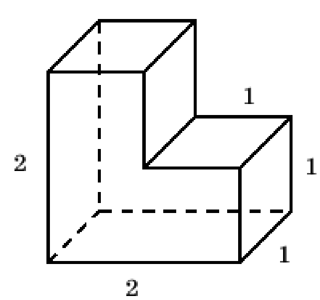


Рис. 55

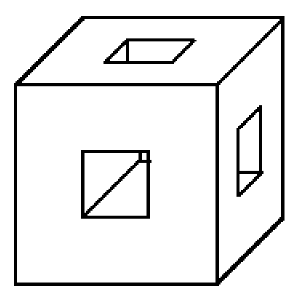


Рис. 56

Ответ ____

8.3. Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке 55?

Ответ____

8.4. Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см (рис. 56). Найдите объем оставшейся части.

Ответ ____

8.5. Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной a см. Найдите объем цилиндра.

Ответ ____

8.6. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Ответ ____

8.7. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

Ответ ____

8.8. Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

Ответ ____

____

____

8.9. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ ____

8.10. Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

Ответ ____

8.11. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b. Как относятся объемы цилиндров?

Ответ ____

8.12. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

Ответ ____

8.13. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

Ответ ____

8.14. Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью (рис. 57).

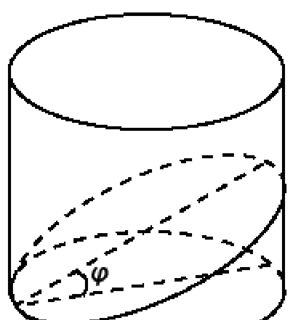


Рис. 57

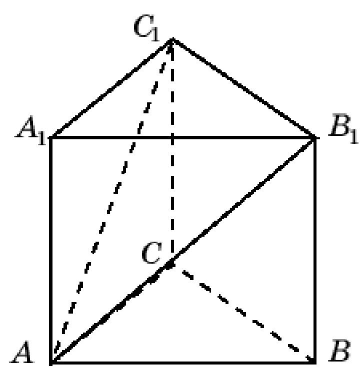


Рис. 58

8.15. Через вершину A и ребро B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провели плоскость. Какая из частей призмы, на которые она разбивается плоскостью, имеет больший объем (рис. 58)?

Ответ ____

8.16. Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

Доказательство ___________________________________
____
____

8.17. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину оси цилиндра, делит его на две равновеликие части.

Доказательство ____
____
____

8.18. Найдите объем наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.

Ответ ____

8.19. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними 45°. Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ ____

8.20. Найдите объем наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

Ответ ____

8.21. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований наклонного кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

Ответ ____

8.22. В основаниях наклонной призмы квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

Ответ____

8.23. Даны три параллелепипеда. Можно ли провести плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема.

Ответ ____

8.24. Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2

соответственно, причем площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объемы фигур Φ_1 и Φ_2?

Ответ ____

8.25*. Докажите, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объем имеет прямая призма.

Доказательство ____
____
____
____

9. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

9.1. Закончите предложение.

Объем пирамиды равен ________________________________
____

9.2. Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?

Ответ ____

9.3. Как изменится объем правильной пирамиды, если высота ее будет увеличена в n раз, а сторона основания уменьшена во столько же раз?

Ответ ____

9.4. Найдите объем пирамиды, высота которой h, а в основании - прямоугольник со сторонами a и b.

Ответ ____

9.5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, высота – h.

Ответ ____

9.6. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h, а диагональ основания - d.

Ответ ____

9.7. Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1.

Ответ ____

9.8. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найдите объем пирамиды.

Ответ ____

9.9. В основании пирамиды квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

Ответ ____

9.10. Параллельно основанию пирамиды проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей пирамиды?

Ответ ____

9.11. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны a, проведите сечение через вершину D параллельно ребру AC и точку M - середину ребра BC. Определите:

а) вид сечения;

б) площадь сечения;

в) угол φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC тетраэдра;

г) объемы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения.

Ответ ____

____

____

____

9.12*. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 59). Докажите, что объемы пирамид A_1ABCD и $A_1BCC_1B_1$ равны.

Доказательство ______________________________________

____

____

____

____

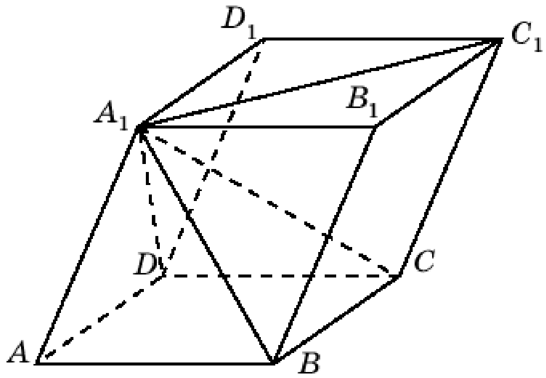


Рис. 59

9.13*. Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Изобразите эту пирамиду и найдите ее объем.

Ответ ____

9.14*. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка постоянной длины AB и CD. Докажите, что объем пирамиды $ABCD$ при этом не меняется. Сделайте рисунок.

Доказательство ____________________________________
____
____
____
____

9.15. Верно ли, что если две пирамиды имеют основания равной площади и соответственно равные боковые ребра, то их объемы равны?

Ответ ____

9.16*. Верно ли, что если две пирамиды имеют соответственно равные ребра, то их объемы равны?

Ответ ____

9.17*. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 м и 1 м. Найдите объем. Сделайте рисунок.

Ответ ____

9.18*. Площади оснований усеченной пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2, а высота исходной пирамиды равна 35 м. Найдите объем.

Ответ ____

9.19*. Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b, боковое ребро составляет с основанием угол 30° ($a > b$).

Ответ ____

10. ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Объем тетраэдра равен 1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер тетраэдра. Нарисуйте этот многогранник. Как он называется?

Ответ ____

10.2. Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Нарисуйте этот октаэдр и найдите его объем.

Ответ ____

10.3. Найдите объем усеченного тетраэдра с ребром, равным 1 (рис. 60).

Ответ ____

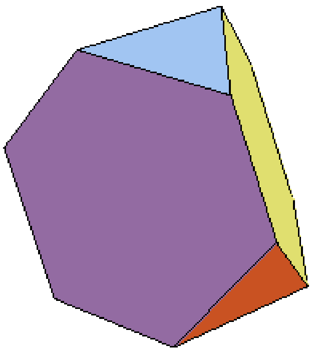


Рис. 60

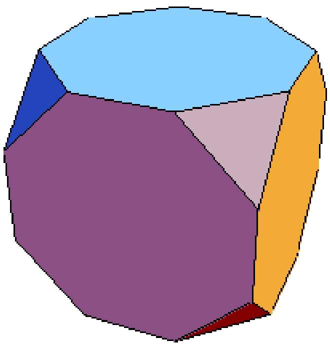


Рис. 61

10.4. Найдите объем усеченного куба с ребром, равным 1 (рис. 61).

Ответ ____

10.5. Найдите объем кубооктаэдра с ребром, равным 1 (рис. 62).

Ответ____

10.6. Найдите объем усеченного октаэдра с ребром, равным 1 (рис. 63).

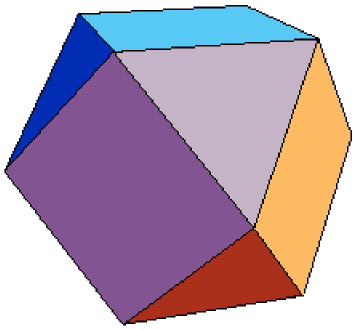


Рис. 62

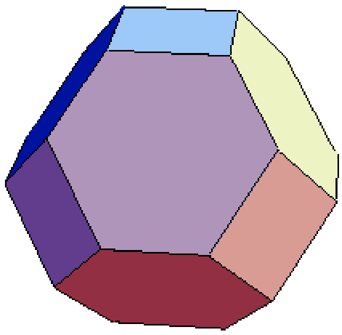


Рис. 63

Ответ ____

10.7. Найдите объем икосаэдра с ребром *a*.

Ответ ____

10.8. Найдите объем додекаэдра с ребром *a*.

Ответ ____

10.9. Найдите объем ромбокубооктаэдра (рис. 64)с ребром 1.

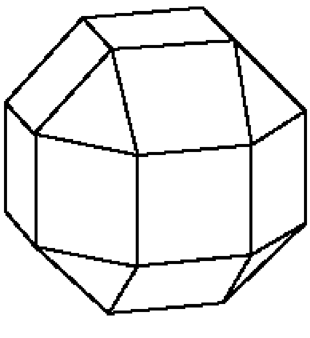


Рис. 64

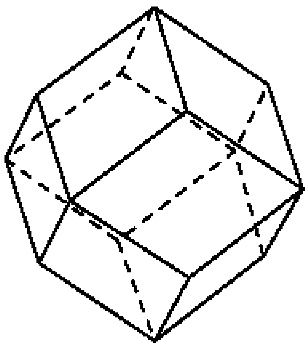


Рис. 65

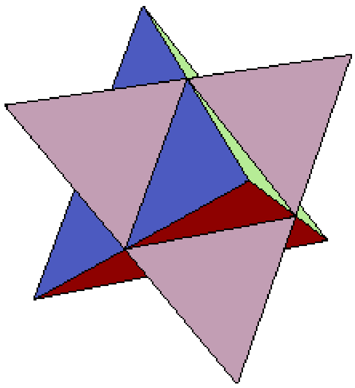


Рис. 66

Ответ ____

10.10*. Найдите объем ромбододекаэдра, меньшая диагональ грани которого равна 1 (рис. 65).

Ответ ____

10.11. Найдите объем звездчатого октаэдра (рис. 66) с ребром, равным 1.

Ответ ____

10.12. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного многогранника, до плоскостей всех его граней, не зависит от выбора этой точки.

Доказательство ________________________________
____
____
____
____

10.13*. Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Нарисуйте их общую часть и найдите ее объем.

Ответ ____

10.14*. Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Нарисуйте их общую часть и найдите ее объем.

Ответ ____

10.15*. Докажите формулу Симпсона для вычисления объема призматоида:

$$V = \frac{1}{6}H(S_1+S_2+4S_0),$$

где H – высота призматоида, S_1, S_2 – площади его оснований, S_0 – площадь среднего сечения. (Призматоидом называется многогранник, все вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях. Многоугольники, расположенные в этих плоскостях, называются основаниями призматоида, а расстояние между этими плоскостями – его высотой). Нарисуйте какой-нибудь призматоид.

Доказательство ____

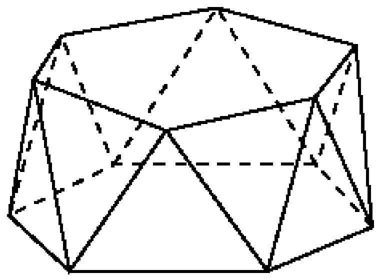


Рис. 67

10.16*. Используя формулу Симпсона, найдите объем антипризмы с высотой H, и основаниями которой являются правильные шестиугольники со сторонами a (рис. 67).

11. ОБЪЕМ КОНУСА

11.1. Закончите предложение.
Объем конуса равен ____
____

11.2. Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?
Ответ ____

11.3. Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?
Ответ ____

11.4. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40 π см^3.
Ответ ____

11.5. Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?
Ответ ____

11.6. Напишите формулу объема конуса с радиусом основания R и образующей b.
Ответ ____

11.7. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.
Ответ ____

11.8. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения - 90°. Вычислите объем конуса.
Ответ ____

11.9. Нарисуйте и найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.
Ответ ____

11.10. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны *a*. Нарисуйте тело вращения и найдите его объем.

Ответ ____

11.11. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объемы этих конусов?

Ответ ____

11.11. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота – 3 см, вращается относительно оси симметрии. Нарисуйте тело вращения и найдите его объем.

Ответ ____

11.12. Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Нарисуйте тело вращения и найдите его объем.

Ответ ____

11.13. Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h. Изобразите пирамиду и конус. Найдите объем конуса.

Ответ ____

11.14. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h. Изобразите пирамиду и конус. Найдите объем конуса.

Ответ ____

11.15. Два равных конуса имеют общую высоту и параллельные плоскости оснований. Изобразите их общую часть и найдите ее объем, если объемы данных конусов равны V.

Ответ ____

11.16*. Радиусы оснований усеченного конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите его объем.

Ответ ____

11.17*. Объем усеченного конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.

Ответ ____

11.18*. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое большее другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем.

Ответ ____

11.19*. Объем конуса равен V. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Нарисуйте сечения и найдите объем средней части конуса.

Ответ ____

12. ОБЪЕМ ШАРА

12.1. Закончите предложения.

1. Объем шара радиуса R выражается формулой ____________
____

2. Шаровым кольцом называется фигура, __________________
____
____

3. Шаровым сегментом называется ________________________
____

4. Объем шарового сегмента высоты h, отсекаемого от шара радиуса R, выражается формулой ____________________________

5. Шаровым сектором называется ________________________
____
____

6. Шаровым поясом называется __________________________
____
____

12.2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза; в) в 0,5 раза?

Ответ ____

12.3. Найдите высоту прямого кругового цилиндра, равновеликого шару радиуса R, если диаметр основания цилиндра равен диаметру шара.

Ответ ____

12.4. Найдите объем шара: а) описанного около куба с ребром, равным единице; б) вписанного в куб с ребром, равным единице.

Ответ ____

12.5. Найдите объем шара: а) описанного около правильного тетраэдра с ребром a; б) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

Ответ ____

12.6. Найдите объем шара: а) описанного около октаэдра с ребром a; б) вписанного в октаэдр с ребром a.

Ответ ____

12.7. Найдите формулу объема шарового кольца, заключенного между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$).

Ответ ____

12.8. Найдите формулу объема шаровой дольки (рис. 68), ограниченной сферой радиуса R и двугранным углом, величины φ.

Ответ ____

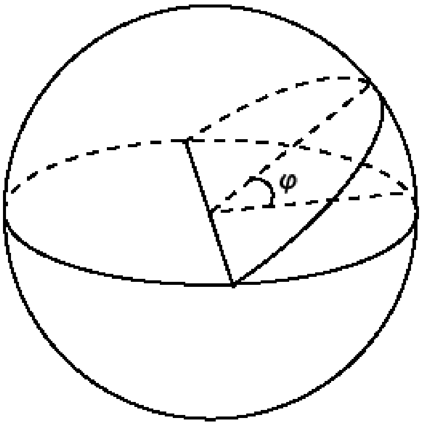


Рис. 68

12.9. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна половине диаметра шара? Нарисуйте этот сегмент.

Ответ ____

12.10. Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара - 5 см. Рассмотрите два случая. Сделайте рисунки.

Ответ ____

12.11. Напишите формулу объема шарового сектора, радиуса R и углом при вершине φ. Сделайте рисунок.

Ответ ____

12.12. Найдите объем общей части двух шаров, радиусов R и r, расстояние между центрами которых d $(R - r < d < R + r)$. Сделайте рисунок.

Ответ ____

12.13*. На рисунке 69, а изображен тор – фигура, получающаяся вращением круга, радиуса r вокруг прямой a, отстоящей от центра круга на расстояние $d > r$ (рис. 69, б). Используя принцип Кавальери, сравните объем тора и объем цилиндра, основание которого является круг радиуса r и высота которого равна $2\pi d$ (рис. 69, в). Найдите объем тора.

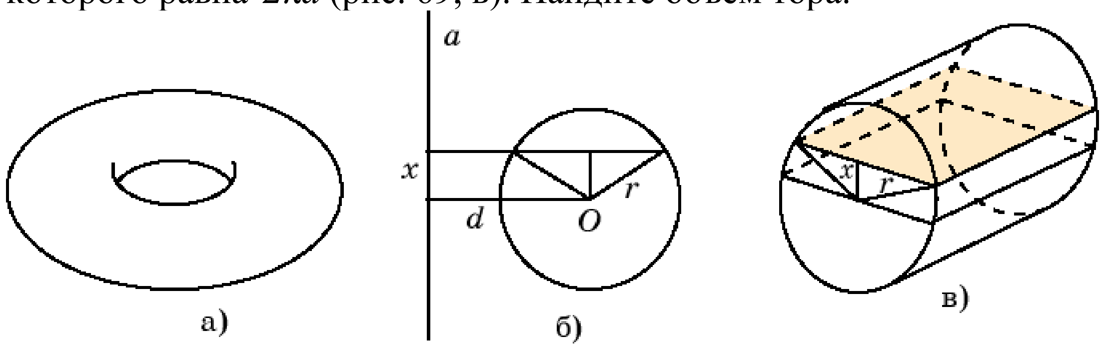


Рис. 69

Решение ____

____

____

____

____

____

Ответ ____

12.14*. На рисунке 70,а изображен параболоид вращения – фигура полученная вращением параболы $y = ax^2$ вокруг оси Oy (рис. 70, б). Используя принцип Кавальери, найдите объем фигуры, ограниченной параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной оси вращения и отстоящей от его вершины на расстояние h. Сравните искомый объем с объемом прямой треугольной призмы, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами h и высота которой π/a (рис. 70, в).

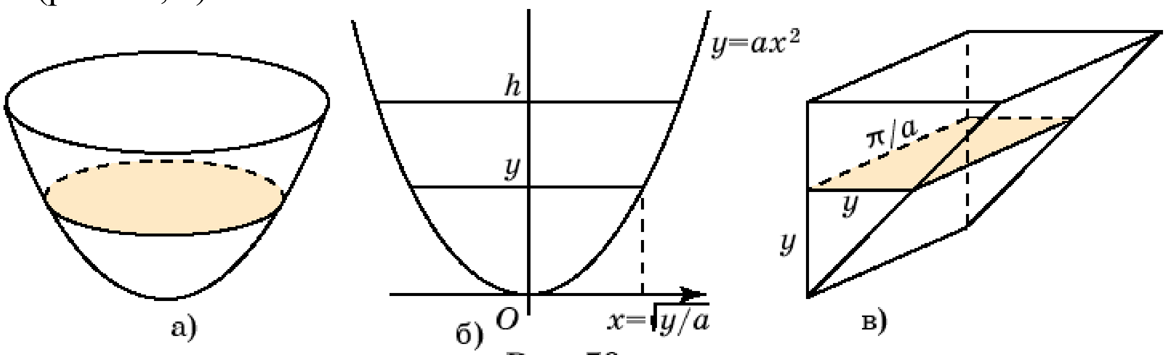


Рис. 70

Решение ____
____
____
____
____
____
Ответ ____

12.15*. Два одинаковых цилиндра лежат на плоскости и пересекаются под прямым углом. Радиусы их оснований равны R. Найдите объем их общей части (рис. 71, а). Сравните его с объемом куба со стороной $2R$, из которого вырезаны две пирамиды с вершинами в центре куба и основаниями которых являются грани куба (рис. 71, б).

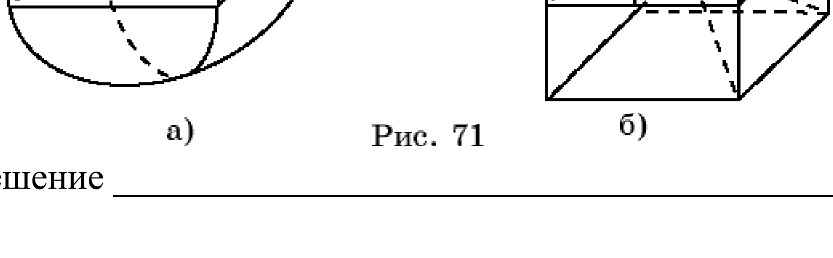


Рис. 71

Решение ____

Ответ ____

13. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

13.1. Закончите предложения.

1. Площадью поверхности многогранника по определению считается ____
____

2. Площадь поверхности призмы состоит из ________________
____

3. Площадь поверхности пирамиды состоит из _____________
____

4. Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой ____________
____

5. Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой ___________
____

6. Площадь поверхности шара радиуса R выражается формулой ____

13.2. Чему равна площадь поверхности правильного многогранника с ребром 1: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

Ответ ____
____
____

13.3. Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.

Ответ ____

13.4. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ ____

13.5. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.

Ответ ____

13.6. Развертка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см^2. Найдите площадь грани пирамиды.

Ответ ____

13.7. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур? Изобразите их.

Ответ ____

13.8. Найдите площадь поверхности усеченного конуса с основаниями радиусов r, R и образующей b. Нарисуйте развертку боковой поверхности усеченного конуса.

Ответ ____

13.9. Площади боковых поверхностей двух конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг каждого из его катетов, равны. Определите вид треугольника.

Ответ ____

13.10. Два одинаковых цилиндра лежат на плоскости и пересекаются под прямым углом. Радиусы их оснований равны R. Найдите площадь поверхности их общей части (рис. 71, а).

Ответ ____

13.11. Докажите, что если плоскость делит куб на две равновеликие части, то площади поверхностей этих частей также равны.

Доказательство ______________________________________

13.12. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ ____

13.13. Площадь поверхности шара равна 225π м^2. Найдите его объем.

Ответ ____

13.14. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.

Ответ ____

13.15. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?

Ответ ____

13.16. Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара. Изобразите эти фигуры.

Ответ ____

13.17. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов. Изобразите эти фигуры.

Ответ ____

13.18*. Найдите площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара. Нарисуйте этот сегмент

Ответ ____

13.19*. Сфера радиуса R проходит через центр заданной сферы радиуса r. Докажите, что площадь шапочки, вырезанной из заданной сферы сферой радиуса R, не зависит от R. Сделайте рисунок.

Доказательство ____

____

____

____

____

____

14. ВЕКТОРЫ

14.1. Закончите предложения.

1. Вектором в пространстве называется ____________________

____

2. Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается ____

3. Длиной, или модулем, вектора называется _______________

____

4. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается _______________________

5. Два вектора в пространстве называются одинаково (противоположно) направленными, если _________________________

____

6. Два вектора называются равными, если _________________

____

14.2. Заполните пропуски.

1. Для того, чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы ______________________________________

____.
Тогда вектор, у которого начало совпадает с __________________
_________________________, а конец ___________________________
____________________________, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается ____.
По данным векторам (рис. 72) нарисуйте их сумму.

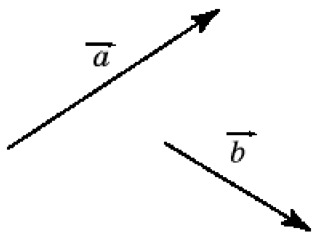


Рис. 72

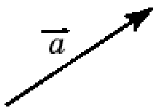


Рис. 73

2. При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора $\vec{a}$ ______________________________________, а направление ________
___________________________если t>0, и _______________________
__________________________, если t<0. При умножении вектора на нуль получается ____.
Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается _______________.
По данному вектору $\vec{a}$ (рис. 73) нарисуйте векторы $2\vec{a}$, $(-1)\vec{a}$.

3. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор ____________

____, который обозначается __________________. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 74) нарисуйте их разность $\vec{a} - \vec{b}$.

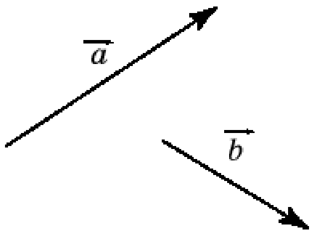


Рис. 74

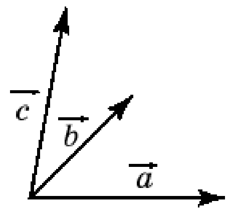


Рис. 75

14.3. В пространстве даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 75). Изобразите их сумму.

14.4. Перечислите свойства сложения векторов и умножения вектора на число.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

14.5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 76) назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

Ответ ____
____
____

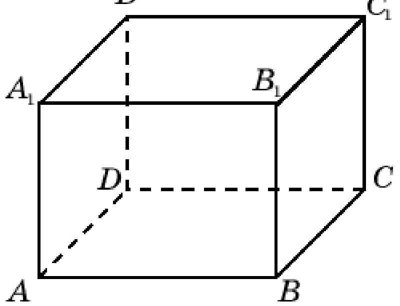


Рис. 76

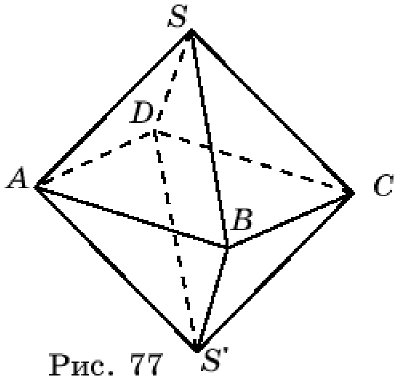


Рис. 77

14.6. В октаэдре $SABCDS'$ (рис. 77) назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

Ответ ____

____

____

14.7. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

Ответ ____

____

14.8. В октаэдре $SABCDS'$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{S'D}$.

Ответ ____

14.9. Для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;

г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$?

Ответ ____

____

14.10. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, равные:

а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

Ответ ____

____

14.11. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и укажите вектор, равный:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}$.

14.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед. Упростите выражение
$$\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A_1D_1}.$$
Ответ____

14.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Докажите, что для центра X этого куба выполняется равенство:
$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}.$$
Сделайте рисунок.

14.14*. В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами скрещивающихся ребер AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. Сделайте рисунок.

Доказательство____

____

____

____

____

____

14.15*. Докажите, что для центра O, вписанной в правильный тетраэдр $ABCD$ сферы, имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

14.16*. Чему равна сумма векторов, образованных ребрами, выходящими из одной вершины: а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

Ответ ____

14.17*. На ребрах многогранника расставлены стрелки так, что сумма образовавшихся векторов, лежащих в каждой грани, равна нулю. Докажите, что в этом случае сумма всех векторов, образованных ребрами многогранника, равна нулю.

15. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

15.1. Закончите предложения.

1. Координатной прямой называется ________________________
____
____
____

2. Прямоугольной системой координат на плоскости называется ____
____
____

3. Прямоугольной системой координат в пространстве называется ____
____
____

15.2. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 78) изобразите точки с координатами: (1,2,3), (2,-1,1), (-1,3,2). Нарисуйте их ортогональные проекции.

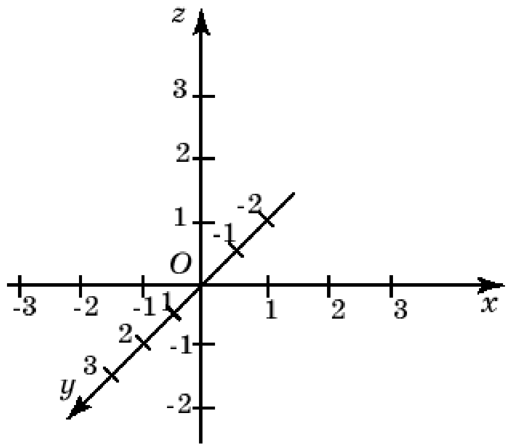


Рис. 78

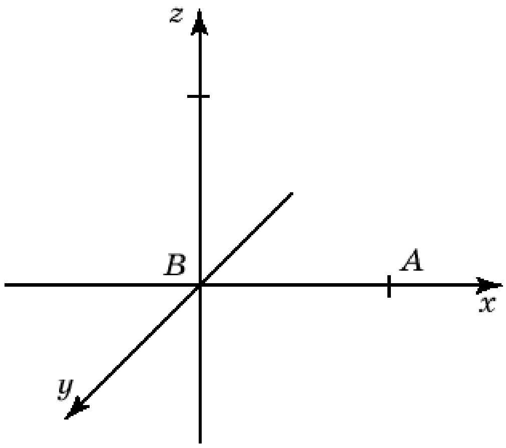


Рис. 79

15.3. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 79), ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B. Положительные лучи осей координат соответственно BA, BC и BB_1. Назовите координаты всех вершин куба.

Ответ ____
____

15.4. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 80) так, что началом координат является центр грани $ABCD$ куба, ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты (-1, 1, 0). Найдите координаты всех остальных вершин куба.

Ответ ____

____

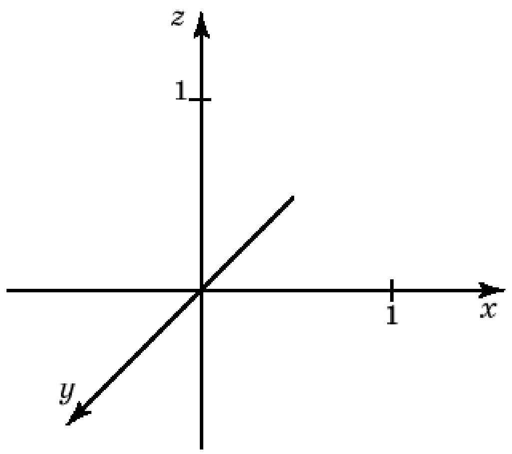


Рис. 80

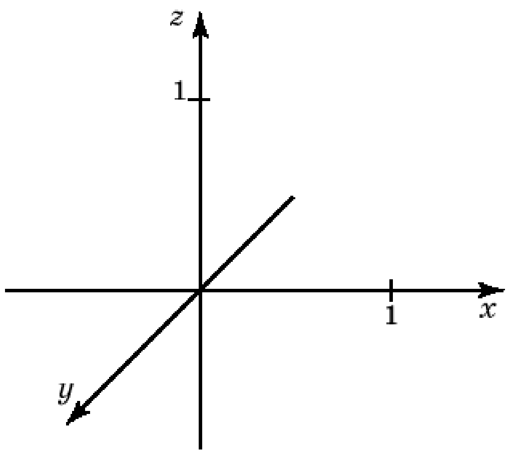


Рис. 81

15.5. Изобразите октаэдр (рис. 81), центром которого является начало координат, и две его вершины имеют координаты (1, 0, 0) и (0, 1, 0). Найдите координаты остальных верших октаэдра.

Ответ ____

____

15.6. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

Ответ ____

____

____

____

15.7. Найдите координаты точек, симметричных точке A(3, 2, 1) относительно: а) начала координат; б) осей координат; в) координатных плоскостей. Изобразите эти точки.

Ответ ____

15.8. На каком расстоянии находится точка $A(1,-2,3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

Ответ ____

____

15.9. На каком расстоянии находится точка $A(1,-2,3)$ от координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

Ответ ____

____

15.10. Найдите расстояния от точки $A(3, 2, 1)$ до начала координат.

Ответ ____

15.11. Напишите общий вид координат точек пространства, одинаково удаленных от: а) двух координатных плоскостей Oxy, Oyz; б) всех трех координатных плоскостей?

Ответ ____

____

15.12. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами (1, 2, 3) относительно координатных плоскостей?

Ответ ____

____

15.13. Найдите координаты середины отрезка: а) AB, если $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 1, 1)$; б) CD, если $C(3, 4, 0)$ и $D(3, -1, 2)$.

Ответ ____

15.14. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(-1, 1, 1)$; б) $B_1(3, 4, 0)$ и $B_2(3, -1, 2)$.

Ответ ____

15.15. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: A (0,0,2), B (0,2,0), C (2, 0,0). Изобразите этот треугольник.

Ответ ____

15.16. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 + (z + 1)^2 = 11$.

Ответ ____

15.17. Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке C (1, -2, 3) и радиусом 4.

Ответ ____

____

15.18. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1, 2, -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

Ответ ____

____

____

15.19. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(3, -2, 1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

Ответ ____

____

____

15.20. Докажите, что уранение $x^2 - 4x + y^2 + z^2=0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

Решение____

____

____

15.21. Как расположена точка $A(5,1,2)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y +2z - 4 = 0$?

Ответ ____

15.23. Как расположены друг относительно друга сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$?

Ответ ____

15.24*. Вершины A и B тетраэдра $ABCD$ имеют соответственно координаты (1, 0, 0) и (-1, 0, 0). Грань ABC лежит в плоскости Oxy. Найдите координаты других вершин тетраэдра. Изобразите этот тетраэдр. Сколько случаев возможно?

Ответ ____

16. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

16.1. Закончите предложения.

1. Координатами вектора называются ______________________
____

2. Координатными векторами называются __________________
____

3. Сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ имеет координаты ____

4. Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ выражается через координаты по формуле____

5. Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то его длина выражается формулой____

16.2. Изобразите прямоугольную систему координат в пространстве и координатные векторы.

16.3. Изобразите векторы: $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $-\vec{i} + \vec{j}$, $2\vec{i} + \vec{k}$.

16.4. Изобразите векторы с координатами: (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (2, 1, -1). Чему равна их длина?

Ответ ____
____

16.5. Изобразите векторы с координатами (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (2, 1, -1) и началом в точке A(1, 0, 1).

16.6. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

Ответ ____

____

16.7. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) A (2,-6,9), B (-5,3,-7); б) A (1,3,-8), B (6,-5,-10); в) A (-3,1,-20), B (5,1,-1).

Ответ ____

____

16.8. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4,-3,0) и точка M - (1,-3,-7).

Ответ ____

16.9. Найдите длину вектора: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $8\vec{i} + \vec{k}$; в) $-\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ ____

16.10. Найдите косинусы углов, которые образует вектор с координатами (1, 1, 1): а) с координатными векторами; б) с координатными плоскостями.

Ответ ____

____

16.11. Закончите предложения.

1. Углом между двумя векторами называется ________________

____

____

____

____

2. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется ____

____

3. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается ________________________

4. Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается____

5. Для скалярного произведения векторов $\vec{a}_1(x_1,y_1,z_1,)$, $\vec{a}_2(x_2,y_2,z_2)$ имеет место формула ______________________________

6. Для скалярного произведения векторов справедливы следующие свойства ____

____

16.12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 82). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

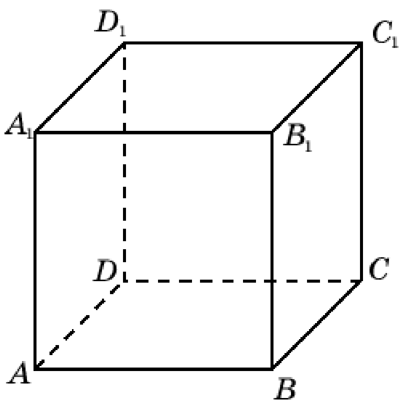


Рис. 82

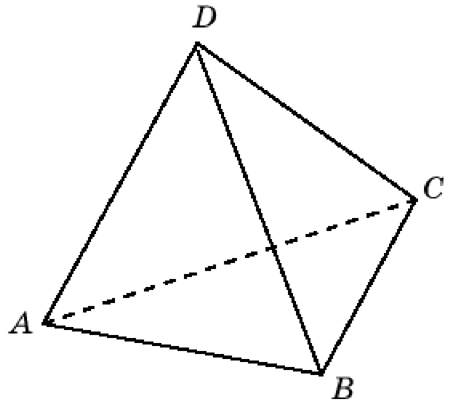


Рис. 83

Ответ ____

____

16.13. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ (рис. 83). Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Ответ ____

16.14. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}_1(-1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(2, -1, 0)$.

Ответ ____

16.15*. Докажите, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

Доказательство______________________________________

____

____

____

____

____

17. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ

17.1. Закончите предложения.

1. Плоскость в пространстве задается уравнением ____________

____

2. Вектором нормали к плоскости называется ________________

____

3. Угол между пересекающимися плоскостями вычисляется по формуле ____

17.2. Напишите уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Ответ ____

17.3. Изобразите плоскости, заданные уравнениями: а) $x = 1$; б) $y = 1$; в) $z = 1$.

17.4. Найдите и изобразите точки пересечения с осями координат плоскости: а) $x + y + z = 1$; б) $x + y - z = 1$; в) $x - y + z = 1$.

Ответ ____

17.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, 2, 0)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1, 1)$.

Ответ ____

17.6. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) A (1,0,0), B (0,1,0) и C (0,0,1); б) $M(3,-1,2)$, $N(4,1,-1)$ и $K(2,0,1)$.

Ответ ____

____

17.7. Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями: а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$; б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Ответ ____

____

____

17.8*. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

Ответ ____

____

____

17.9*. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: а) $2x - 2y + z - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Ответ ____

17.10*. Принадлежат ли одной плоскости точки $A(1, 0, -2)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(2, -1, 1)$?

Ответ ____

17.10. Закончите предложения.

1. Прямую в пространстве можно задавать __________________

____

2. Параметрическими уравнениями прямой в пространстве называются____

____

17.11. Изобразите прямую в пространстве, являющуюся пересечением двух плоскостей, задаваемых уравнениями: а) $y = 0$, z

$= 1$; б) $x + y + z = 1,\ x + y - z = 1$.

17.12. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2,1,-3)$, $A_2(5,4,6)$.

Ответ ____

17.13. Для единичного куба, изображенного на рисунке 84, напишите параметрические уравнения прямых: AB, BB_1, B_1C_1, DB_1, AC_1.

Ответ ____

____

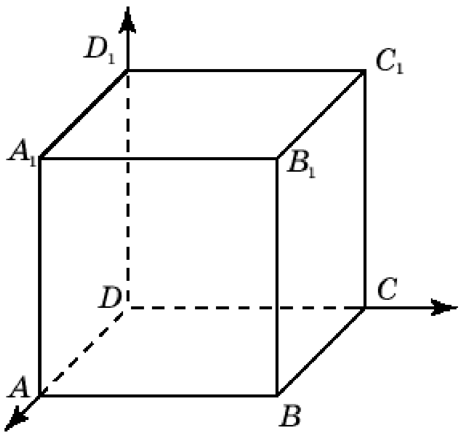


Рис. 84

17.14*. Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

Ответ ____

____

____

____

17.15. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}(1,2,3)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты (-1,1,-2). Какие координаты она будет иметь в момент времени t=4?

Ответ ____

17.16*. Нарисуйте кривую в пространстве, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = cz + d \end{cases}$$ (винтовая линия).

18. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

18.1. Закончите предложения.

1. Полупространство задается неравенством ________________
____

2. Выпуклый многогранник задается ________________________
____
____
____
____

18.2. Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

Ответ ____

18.3. Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

Ответ ____

18.4. Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

Ответ ____

18.5. Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5, \\ 0 \le z \le 4\,? \end{cases}$$

Нарисуйте ее.

Ответ ____

18.6. Какая фигура в пространстве задается неравенствами
$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le R^2, \\ 0 \le y \le h? \end{cases}$$
Нарисуйте ее.

Ответ ____

18.7. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

а) $\begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ 0 \le y \le 8, \\ 0 \le z \le 8, \\ x + y + z \le 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5, \\ 0 \le z \le 4, \\ x + y + z - 6 \ge 0. \end{cases}$

18.8. Найдите неравенства, задающие куб, три вершины которого имеют координаты (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Нарисуйте этот куб

Ответ ____

18.9. Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты: (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (-1,-1,-1). Нарисуйте этот тетраэдр.

Ответ

18.10. Какая фигура в пространстве задается неравенством $|x|+|y|+|z|$ □ 1? Изобразите эту фигуру.

Ответ

18.11*. Изобразите многогранники, задаваемые неравенствами:

а) $|x|+|y|+|z|$□4,5; $|x|$□3, $|y|$□3, $|z|$□3;

б) $|x|+|y|+|z|$□7; $|x|$□3, $|y|$□3, $|z|$□3;

в) $|x|+|y|+|z|$□6; $|x|$□3, $|y|$□3, $|z|$□3.

18.12*. Изобразите многогранник, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x+y|+|z| \square 1$, $|x-y|-|z| \square 1$ или неравенствам $|x-y|+|z| \square 1$, $|x+y|-|z| \square 1$.

18.13*. На рисунке 85 изображен икосаэдр, вписанный в куб. Найдите координаты его вершин, если центр куба находится в начале координат, ребра равны 2 и параллельны соответствующим осям координат.

Решение ____

____

____

____

____

____

____

____

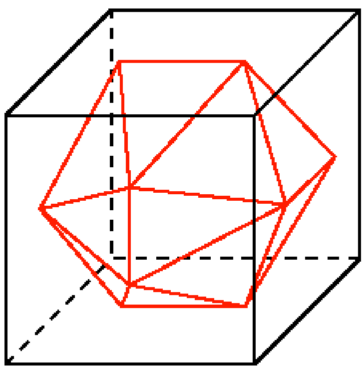


Рис. 85

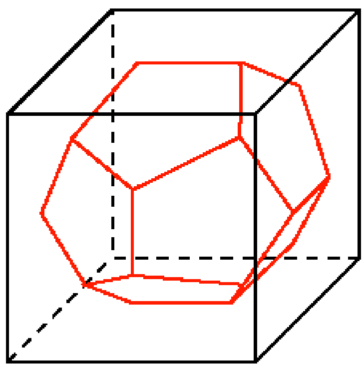


Рис. 86

18.14*. На рисунке 86 изображен додекаэдр, вписанный в куб. Найдите координаты его вершин, если центр куба находится в начале координат, ребра равны 2 и параллельны соответствующим осям координат.

Решение ____

____

____

____

____

____

____

____

18.15*. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением: а) $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид); б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (коническая поверхность).

18.16*. Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0,0,h)$ и основание которого - круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.

Ответ ____

18.17*. Найдите уравнение эллипсоида вращения - поверхности, полученной вращением эллипса, задаваемого уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вокруг оси: а) Ox; б) Oy.

Ответ ____

18.18*. Найдите уравнение гиперболоида вращения - поверхности, полученной вращением гиперболы, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, вокруг оси: а) Ox; б) Oy.

Ответ ____

СОДЕРЖАНИЕ