МАТЕМАТИКА: Алгебра и начала математического анализа. Геометрия

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

Геометрия

10 класс

Учебник
для учащихся общеобразовательных организаций
(базовый и углублённый уровни)

Рекомендовано Министерством просвещения Российской Федерации

5-е издание, стереотипное

Издательство Мнемозина

Москва 2019

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

**На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз:
научной (Российская академия наук, № 004986 от 19.12.2016),
педагогической (Российская академия наук, № 005093 от 19.12.2016)
и общественной (РШБА, № ОЭ/16-0414 от 26.12.2016)**

Смирнова И. М.
С50 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — 5-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2019. — 135 с. : ил.
ISBN 978-5-346-04420-8

Предлагаемый учебник двухуровневый: с учётом параграфов со звёздочкой он соответствует углублённому уровню, без их учёта — базовому. Наряду с традиционными вопросами геометрии пространства в качестве дополнительного в учебник включён материал научно-популярного и прикладного характера, а также помещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения. Большое внимание уделено использованию средств наглядности. Содержание учебника соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта и Примерной основной образовательной программы, концептуально согласуется с учебниками по алгебре и началам математического анализа А. Г. Мордковича.

**УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721**

ISBN 978-5-346-04420-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вы начинаете изучать один из самых увлекательных и важных разделов геометрии — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, стереометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Кроме этого, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

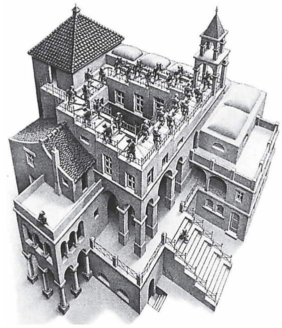
Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и др.

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остаётся грамматикой архитектора».

Вот с какой замечательной наукой вам предстоит познакомиться.

Предлагаемый учебник, помимо традиционного материала, содержит материал научно-популярного и прикладного характера, нестандартные и исследовательские задачи. В нём используются следующие обозначения:

° — устная задача;
* — дополнительный материал, задачи повышенной трудности;
■ — окончание доказательства.



ВВЕДЕНИЕ

Стереометрия, или геометрия в пространстве, — это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов «стерео» — тело и «метрео» — измерять, т. е. буквально стереометрия означает «теломерие».

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий учёный Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала пойдёт на постройку, уметь вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Египетские пирамиды, сооружённые за 2—3 тысячи лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчёты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умения ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направление движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволили решить эти задачи и дали начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII века до н. э. в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Всё большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Для своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь — тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 1, а); земля — гексаэдр (куб — многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 1, б); воздух — октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 1, в); вода — икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 1, д).

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого «тетра» — четыре, «гекса» — шесть, «окто» — восемь, «икоси» — двадцать, «додека» — двенадцать, «эдра» — грань.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого учёного Евклида, жившего около 300 г. до н. э. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих

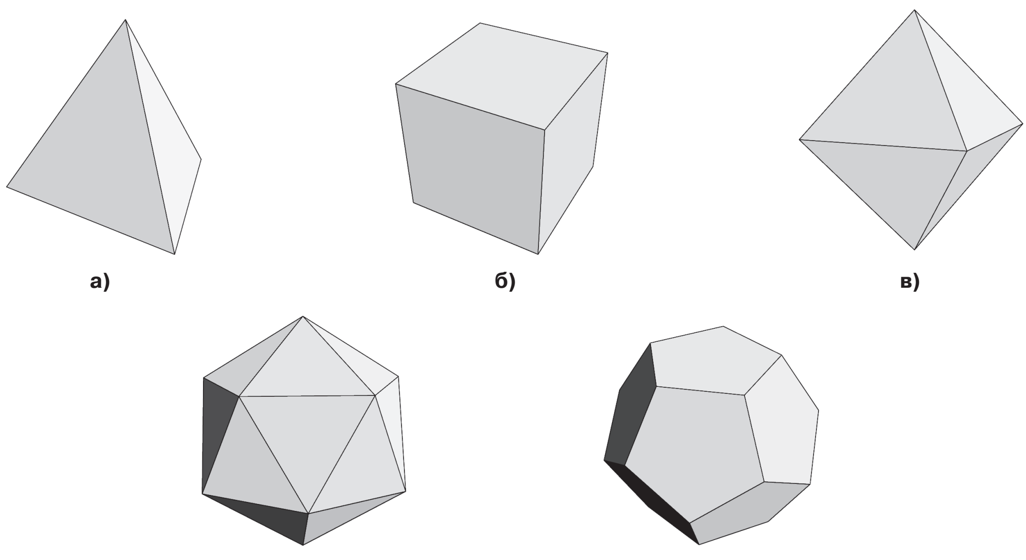


Рис. 1

сочинений математик Папп (III век н. э.) изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

Славу Евклиду создала его книга «Начала». В ней впервые было дано научное изложение геометрии и представлено стройное аксиоматическое учение. На протяжении более двух тысячелетий «Начала» оставались основой изучения систематического курса геометрии.

В одном из рассказов о Евклиде говорится: «Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его “Начала”. Евклид на это ответил: “В геометрии нет царского пути”».

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и др. Геометрические методы широко используются в других науках, например теории относительности, квантовой механике, кристаллографии.

На сайте www.etudes.ru можно познакомиться с некоторыми научно-популярными аспектами геометрии.

Для подготовки к ЕГЭ по математике можно использовать размещённый на сайте mathege.ru Открытый банк задач.

ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Задачи на доказательство

Теорема 1. (Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 2. (Второй признак равенства треугольников.) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 3. (Признак равнобедренного треугольника.) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Теорема 4. (Третий признак равенства треугольников.) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 5. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Теорема 6. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Теорема 7. (Неравенство треугольника.) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Упражнения

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
2. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
3. О треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

4. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты CH, C_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
5. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты AH, A_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
6. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ сторона AB равна стороне A_1B_1, угол A равен углу A_1, высота AH равна высоте A_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
7. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
8. Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
9. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
10. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
11. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
12. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.
13. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники ABE и CDE подобны.
14. Докажите, что произведение отрезков хорд, проведённых через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведённого через ту же точку.
15. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что треугольники ADE и BCE подобны.
16. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.
17. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C — точка касания). Докажите, что треугольники EAC и ECB подобны.
18. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C — точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.
19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.
20. Докажите, что отрезок EF, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку G пересечения диагоналей и параллельный основаниям трапеции, делится в точке G пополам.

21. Докажите, что из двух высот треугольника больше та, которая опущена на меньшую сторону.
22. Докажите, что высота треугольника меньше полусуммы сторон, прилежащих к ней.
23. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.
24. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
25. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.
26. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
27. В треугольнике ABC точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC, CH — высота. Докажите, что угол C равен углу DHE.
28. Докажите, что две вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей медиану, проведённую из третьей вершины данного треугольника.
29. Пусть треугольники ABC и ABC' имеют равные высоты, опущенные на сторону AB и расположенные от неё по одну сторону. Прямая c параллельна AB и пересекает остальные стороны треугольников. Докажите, что отрезки DE и $D'E'$ этой прямой, заключённые в треугольниках, равны.
30. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

§ 2. Углы

Теорема 1. Сумма углов треугольника равна 180°.

Следствие 1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Следствие 2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Теорема 2. Сумма углов выпуклого многоугольника равна $180°(n - 2)$.

Теорема 3. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Упражнения

1. Пусть CD — медиана треугольника ABC, угол C равен 90°, угол B равен 58°. Найдите угол ACD.
2. В треугольнике ABC угол A равен 72°, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE.
3. Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов.
4. В треугольнике ABC угол C равен 58°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB.

5. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32°. Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.
6. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.
7. Пусть CH — высота треугольника ABC, AD — биссектриса, O — точка пересечения CH и AD, угол BAD равен 26°. Найдите угол AOC.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, причём $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC.
9. В треугольнике ABC угол A равен 44°, угол C равен 62°. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол D треугольника BCD.
10. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла.
11. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 21°. Найдите меньший угол данного треугольника.
12. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
13. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 40°. Найдите больший из острых углов этого треугольника.
14. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.
15. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол этого треугольника.
16. В треугольнике ABC угол B равен 45°, угол C равен 85°, AD — биссектриса, $AE = AC$. Найдите угол BDE.
17. В треугольнике ABC угол A равен 30°, угол B равен 86°, CD — биссектриса внешнего угла, $CE = CB$. Найдите угол BDE.
18. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. Биссектрисы треугольника AD, BE и CF пересекаются в точке O. Найдите угол AOF.
19. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. Высоты треугольника AD, BE и CF пересекаются в точке O. Найдите угол AOF.
20. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?
21. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные величины которых относятся как 1 : 3 : 5. Найдите больший угол треугольника ABC.
22. Пусть AC и BD — диаметры окружности с центром O. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD.

23. Пусть AC и BD — диаметры окружности с центром O. Центральный угол AOD равен 110°. Найдите вписанный угол ACB.

24. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58°. Найдите угол C этого четырёхугольника.

25. Стороны четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95°, 49°, 71°, 145°. Найдите угол B этого четырёхугольника.

26. Точки A, B, C, D, расположённые на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как 4 : 2 : 3 : 6. Найдите угол A четырёхугольника $ABCD$.

27. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABD.

28. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABC.

29. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110°, угол ABD равен 70°. Найдите угол CAD.

30. Хорда AB стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B.

31. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AB.

32. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB.

33. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный 122°. Найдите градусную величину дуги AB, стягиваемую точками касания.

34. Найдите угол ACO, если его сторона CA в точке A касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B, а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 64°.

35. Угол ACO равен 28°. Его сторона CA в точке A касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B. Найдите градусную величину дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла.

§ 3. Решение треугольников

Синусом острого угла прямоугольного треугольника ABC (AB — гипотенуза) называется отношение противолежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначается $\sin A$. По определению,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначается $\cos A$. По определению,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего к этому углу катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Теорема 1 (Теорема Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема 2 (Теорема косинусов). Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Теорема 3 (Теорема синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AB = 2$. Найдите высоту CH.

2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите AH.

3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите BH.

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

5. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $60°$, $AB = 4$. Найдите AH.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $60°$, $AB = 12$. Найдите BH.

7. В треугольнике ABC все стороны равны $2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

8. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите стороны этого треугольника.
9. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 4$, высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол C.
10. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 10, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AB.
11. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 18$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AC.
12. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 10, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.
13. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 18$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AC.
14. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 4$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите высоту CH.
15. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 4, угол C равен 30°. Найдите высоту AH.
16. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, высота AH равна 4, угол C равен 30°. Найдите AC.
17. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $3\sqrt{2}$, высота AH равна 3. Найдите угол C.
18. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, высота AH равна $2\sqrt{2}$, угол C равен 45°. Найдите AC.
19. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 30$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите высоту AH.
20. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 30$, $\cos A = 0{,}6$, AH — высота. Найдите BH.
21. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\sin C = 0{,}6$. Найдите высоту CH.
22. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}8$, CH — высота. Найдите AH.
23. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}8$. Найдите высоту CH.
24. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 5$, $\sin C = 0{,}6$, CH — высота. Найдите AH.
25. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{3}$, угол C равен 120°. Найдите высоту AH.
26. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, угол C равен 120°, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.
27. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{3}$, угол C равен 120°. Найдите AB.
28. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{2}$, угол C равен 135°. Найдите высоту AH.
29. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 2, угол C равен 150°. Найдите высоту AH.

30. В треугольнике ABC дано: $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $\cos B = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите сторону AC.

31. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = 3$, $\cos B = -\frac{1}{3}$. Найдите сторону AC.

32. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = 4$, угол B равен $60°$. Найдите сторону AC.

33. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, угол B равен $150°$. Найдите сторону AC.

34. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите косинус угла B.

35. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите косинус угла A.

36. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 7$, $AC = 5$. Найдите угол B.

37. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $AC = \sqrt{8}$, угол B равен $135°$. Найдите синус угла C.

38. В треугольнике ABC дано: $AB = 9$, $AC = 6$, $\sin B = \frac{1}{3}$. Найдите угол C.

39. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $45°$, сторона AC равна $\sqrt{6}$. Найдите BC.

40. В треугольнике ABC дано: $\sin A = \frac{2}{3}$, $\sin B = \frac{1}{3}$, $AC = 4$. Найдите сторону BC.

§ 4. Четырёхугольники

Теорема 1. (Первый признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Теорема 2. (Второй признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Теорема 3. (Признак прямоугольника.) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Теорема 4. (Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

Теорема 5. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Упражнения

1. Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.
2. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне.
3. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.
5. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3 : 4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.
6. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.
7. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.
8. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.
9. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.
10. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.
11. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 больше, чем расстояние от неё до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 28. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
12. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними $60°$. Найдите меньшее основание.
13. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен $60°$. Найдите её периметр.
14. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.
15. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции.
16. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен $45°$. Найдите высоту трапеции.
17. Периметр трапеции равен 50, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.

18. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.

19. Периметр равнобедренной трапеции равен 80, её средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.

20. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из её оснований больше другого на 4. Найдите большее основание трапеции.

21. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции.

22. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

23. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите её среднюю линию.

24. Диагонали четырёхугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

§ 5. Окружность

Теорема 1. Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема 2 (Теорема синусов). Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема 3. Радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Теорема 4. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 5. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \dfrac{2S}{a + b + c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Теорема 6. Суммы противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равны $180°$.

Теорема 7. Суммы противоположных сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

Упражнения

1. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
2. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.
3. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 3, равен 30°. Найдите сторону AB этого треугольника, противолежащую данному углу.
4. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противолежащий ей угол C равен 45°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
5. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Найдите угол C.
6. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противолежащий ей угол C равен 60°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
7. Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C.
8. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противолежащий ей угол C равен 135°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
9. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противолежащий ей угол C равен 120°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
10. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности.
11. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.
12. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности.
13. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.
14. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 98°. Найдите угол C.
15. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов.
16. Углы A, B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите угол D, если около данного четырёхугольника можно описать окружность. Нарисуйте этот четырёхугольник.
17. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

18. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведённым в одну из вершин стороны, равен $54°$. Найдите n.

19. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу этого треугольника.

20. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

21. В треугольнике ABC заданы стороны $AC = 4$, $BC = 3$, а угол C равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности.

22. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

23. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

24. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

25. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите её среднюю линию.

26. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

27. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырёхугольника.

28. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.

29. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$ и $CD = 15$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

30. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $1 : 2 : 3$. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 32.

31. Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{8}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

32. Около окружности, радиус которой равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

§ 6. Площадь

Формулы вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \angle C,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)},$$

$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ (для равностороннего треугольника)},$$

где a, b, c – стороны треугольника, p – его полупериметр, h_a — высота, опущенная на сторону a, $\angle C$ — угол между сторонами a и b.

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне:

$$S = ah_a.$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса r, выражается формулой $S = pr$, где p – полупериметр многоугольника.

Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус (или произведению числа π на квадрат радиуса):

$$S = \pi R^2.$$

Площадь кругового сектора равна половине произведения длины дуги этого сектора на радиус круга:

$$S_{\text{сек}} = \frac{1}{2}Rl.$$

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S'}{S} = k^2.$$

Упражнения

1. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18 и одна сторона на 3 больше другой.
2. Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.
3. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.
5. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.
6. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.
7. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.
8. Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4 : 5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.
9. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.
10. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?
11. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.
12. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.
13. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.
14. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°.
15. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.
16. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.
17. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.
18. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.
19. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.
20. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.
21. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.
22. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.
23. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.
24. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

25. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

26. Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.

27. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.

28. Основания трапеции равны 8 и 34, площадь равна 168. Найдите её высоту.

29. Основание трапеции равно 13, высота равна 5, а площадь равна 50. Найдите второе основание трапеции.

30. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.

31. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.

32. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

33. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а её площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.

34. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, а большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.

35. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Её площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции.

36. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

37. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а её площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.

38. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.

39. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне.

40. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, площадь которого равна 33. Найдите его периметр.

41. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

42. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равен 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.

43. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

44. Найдите центральный угол сектора круга радиуса $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, площадь которого равна 6.

45. Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.

§ 7. Координаты и векторы

Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, для которого точки A_1, A_2 имеют координаты соответственно (x_1, y_1), (x_2, y_2), выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$ с заданными координатами выражается формулой

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого вектором нормали.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Упражнения

1. Найдите синус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, с осью абсцисс.
2. Найдите косинус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, с осью абсцисс.
3. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(-2, 0)$ и $(0, 2)$.
4. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(2, 0)$ и $(0, 2)$.

5. Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, 8) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.
6. Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (−6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, −6) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.
7. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(6, 4)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(6, 8)$.
8. Точки $O(0, 0)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите координаты точки A.
9. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $C(0, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите ординату точки B.
10. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(4, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Сколько решений имеет задача «Найти точку C»?
11. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
12. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $C(2, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите координаты точки B.
13. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
14. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 0)$, $B(8, 6)$, $C(2, 6)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.
15. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Ox.
16. Найдите ординату точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Oy.
17. Найдите абсциссу точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = x$.
18. Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = -x$.
19. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $3x + 4y = 6$.
20. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $P(8, 6)$. Найдите её радиус.
21. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс?
22. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси ординат?
23. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно (−2, −2), (6, −2), (6, 4), (−2, 4).
24. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно (−2, −2), (6, −2), (6, 4), (−2, 4).

25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты (8, 0), (0, 6), (8, 6).

26. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты (8, 0), (0, 6), (8, 6).

27. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (4, 2), (8, 4), (6, 8), (2, 6).

28. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (2, 0), (10, 4), (8, 8), (0, 4).

29. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (2, 2), (10, 4), (10, 8), (2, 6).

30. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2, 2), (10, 2), (8, 8).

31. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2, 2), (10, 2), (8, 8), (4, 8).

32. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (2, 2), (8, 4), (10, 10), (4, 8).

33. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

34. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

35. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

36. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

37. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

38. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

39. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

40. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

41. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

42. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

43. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.

44. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$.

45. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

46. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

47. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

48. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

49. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(2, 4)$ имеет координаты (6, 2). Найдите координаты точки B.

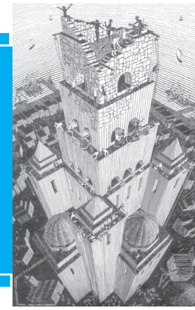
50. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3, 6)$ имеет координаты (9, 3). Найдите сумму координат точки B.

51. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5, 3)$ имеет координаты (3, 1). Найдите координаты точки A.

52. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5, 4)$ имеет координаты (3, 1). Найдите сумму координат точки A.

Глава I

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ



§ 8. Основные понятия и аксиомы стереометрии

Основные понятия стереометрии — это **точка**, **прямая** и **плоскость**. Они являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ..., прямые — строчными латинскими буквами a, b, c, ..., плоскости — греческими α, β, γ, ...

Точки, прямые и плоскости будем изображать, как показано на рисунке 2.

Обратим внимание на то, что прямая является бесконечной, а мы изображаем лишь конечный участок прямой — отрезок, который можно продолжать в обе стороны. Плоскость также является бесконечной, и мы будем изображать лишь её конечный участок.

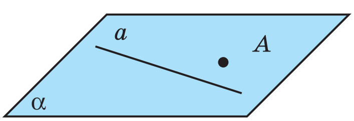


Рис. 2

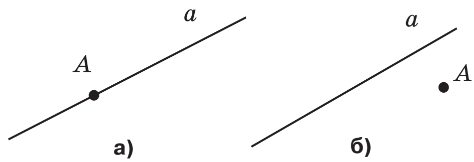


Рис. 3

Точка может принадлежать (рис. 3, а) или не принадлежать данной прямой (рис. 3, б). В случае если точка принадлежит прямой, говорят также, что прямая проходит через точку.

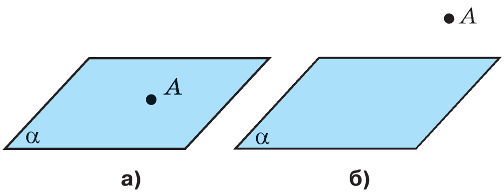


Рис. 4

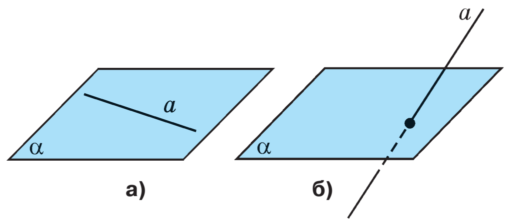


Рис. 5

Аналогично точка может принадлежать (рис. 4, а) или не принадлежать данной плоскости (рис. 4, б). В случае если точка принадлежит плоскости, говорят также, что плоскость проходит через точку.

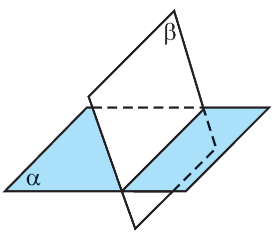


Рис. 6

Будем говорить, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую, если каждая точка этой прямой принадлежит плоскости (рис. 5, а).

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, будем говорить, что прямая пересекает плоскость (рис. 5, б).

Будем говорить, что две плоскости пересекаются по прямой, если их общими точками являются точки этой прямой и только они (рис. 6).

Так же как и в планиметрии, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве принимаются без доказательства и называются **аксиомами**.

Сформулируем следующие аксиомы стереометрии:

1. Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.
2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.
4. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.
5. Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

Поскольку две точки определяют прямую, через них проходящую, то для обозначения прямой указывают какие-нибудь две точки, принадлежащие этой прямой. Например, прямая AB, прямая C_1D_1 и т. д.

Аналогично, поскольку три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость, через них проходящую, то для обозначения плоскости указывают какие-нибудь три точки этой плоскости, не принадлежащие одной прямой. Например, плоскость ABC, плоскость $D_1E_1F_1$ и т. д.

Так же как и на плоскости, для пространства определяются понятия движения, равенства и подобия. **Движением** называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = AB$. Две фигуры в пространстве называются **равными**, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

Подобием называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — некоторое положительное число, называемое коэффициентом подобия. Две фигуры в пространстве называются **подобными**, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Упражнения

○ **1.** Представляя себе стены класса как участки плоскостей, укажите:
а) две пересекающиеся прямые;
б) две пересекающиеся плоскости;
в) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
г) две непересекающиеся прямые;
д) плоскость и не пересекающую её прямую;
е) две непересекающиеся плоскости;
ж) три пересекающиеся плоскости.

2. Изобразите:
а) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
б) две непересекающиеся прямые;
в) плоскость и не пересекающую её прямую;
г) плоскость и лежащие в ней две пересекающиеся прямые;
д) три плоскости, пересекающиеся по общей прямой;
е) три плоскости, попарно пересекающиеся по прямым, которые пересекаются в одной точке.

○ **3.** Сколько прямых проходит через две данные точки?

○ **4.** Сколько плоскостей может проходить через три данные точки?

○ **5.** Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

○ **6.** При каком расположении трёх точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

○ **7.** Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки?

○ **8.** Могут ли две плоскости иметь две общие прямые?

○ **9.** Как расположены две плоскости, если в каждой из них лежит один и тот же треугольник?

○ **10.** Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: а) только одна вершина прямоугольника; б) только две его вершины; в) только три вершины?

○ **11.** Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости, если известно, что этой плоскости принадлежат: а) две точки дуги; б) три точки дуги?

○ **12.** Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежит: а) центр вписанной в треугольник окружности; б) центр описанной около него окружности?

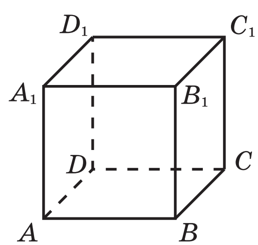


Рис. 7

13. Из прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7), назовите:

а) пары пересекающихся прямых;

б) тройки прямых, пересекающихся в одной точке;

в) пары пересекающихся плоскостей;

г) тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке.

* **14.** Из шести спичек сложите четыре равных треугольника.

* **15.** Докажите, что движение пространства переводит: а) прямые в прямые; б) отрезки в отрезки; в) лучи в лучи.

* **16.** Могут ли при движении: а) разные точки переходить в одну точку; б) разные прямые переходить в одну прямую; в) разные плоскости переходить в одну плоскость?

§ 9. Следствия из аксиом стереометрии

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

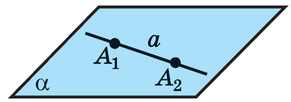


Рис. 8

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки — A_1 и A_2 (рис. 8). Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые в пространстве, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a лежит в плоскости α. ■

Свойство 2. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

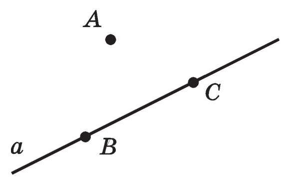


Рис. 9

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C (рис. 9). В силу аксиомы 2, через точки A, B, C проходит единственная плоскость α. По свойству 1, прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A.

Покажем, что эта плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2, она должна совпадать с плоскостью α. ■

Свойство 3. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок 10.

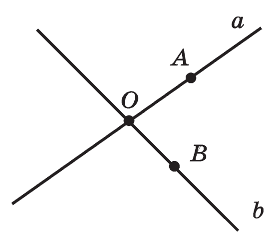


Рис. 10

Упражнения

○ **1.** Могут ли пересекающиеся плоскости иметь общую точку, не принадлежащую линии пересечения этих плоскостей?

○ **2.** Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой?

3. Докажите, что для любой плоскости существуют точки, ей не принадлежащие.
4. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.
5. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат в одной плоскости.
6. Докажите, что если имеется конечное число прямых, каждые две из которых пересекаются, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.
7. Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?
8. Даны три плоскости. На каждой плоскости две прямые. Сколько всего прямых?
9. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из: а) трёх точек; б) четырёх точек; в) пяти точек; г*) n точек?
10. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные тройки из: а) трёх точек; б) четырёх точек; в) пяти точек; г*) n точек?
11. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях: а) двух плоскостей; б) трёх плоскостей; в) четырёх плоскостей; г*) n плоскостей?
12. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в) четыре плоскости?

§ 10. Пространственные фигуры

Среди пространственных фигур выделяются многогранники.

Определение. **Многогранником** называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых **гранями** многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно **рёбрами** и **вершинами** многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

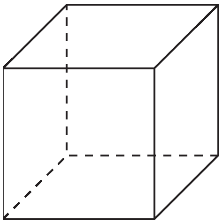


Рис. 11

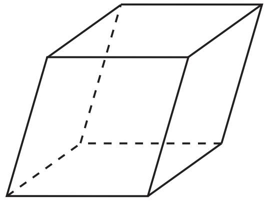


Рис. 12

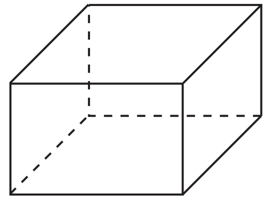


Рис. 13

Примерами многогранников являются следующие.

Куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 11).

Параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 12).

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 13).

Призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых **основаниями** призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых **боковыми гранями** призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются **боковыми рёбрами** призмы (рис. 14).

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 15), называется **прямой**. В противном случае призма называется **наклонной** (рис. 14).

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 16).

Призмы бывают треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Например, на рисунке 14 изображена наклонная треугольная призма, на рисунке 15 — прямая четырёхугольная призма, на рисунке 16 — правильная шестиугольная призма.

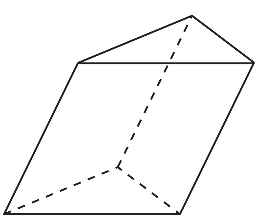


Рис. 14

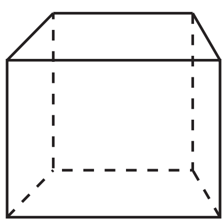


Рис. 15

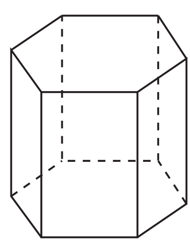


Рис. 16

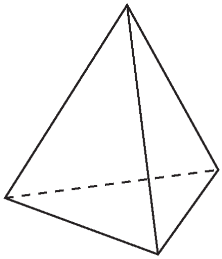


Рис. 17

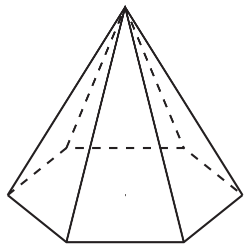


Рис. 18

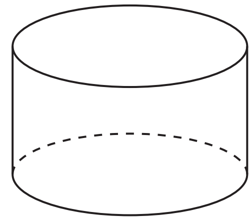


Рис. 19

Пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого **основанием** пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых **боковыми гранями** пирамиды. Общая вершина боковых граней называется **вершиной** пирамиды. Рёбра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются **боковыми рёбрами** (рис. 17).

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые рёбра которой равны, называется **правильной** (рис. 18).

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. На рисунке 17 изображена треугольная пирамида, называемая также тетраэдром, на рисунке 18 — правильная шестиугольная пирамида.

Во введении были представлены правильные многогранники: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

Примерами пространственных фигур являются знакомые вам **цилиндр** (рис. 19), **конус** (рис. 20), **шар** (рис. 21). Их определения будут даны позднее.

В дальнейшем мы рассмотрим и другие пространственные фигуры, в том числе полуправильные и звёздчатые многогранники.

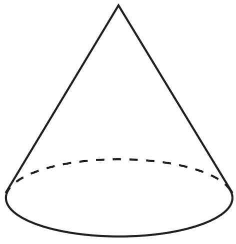


Рис. 20

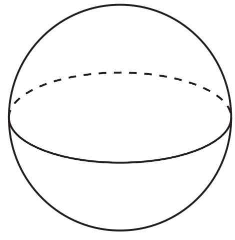


Рис. 21

Упражнения

1. Изобразите:
а) параллелепипед;
б) четырёхугольную призму;
в) четырёхугольную пирамиду.

○ **2.** Верно ли, что плоскости, проходящие через вершины S, A, B и S, C, D пирамиды $SABCD$, пересекаются в одной точке S?

○ **3.** Может ли призма иметь: а) 9 вершин; б) 16 вершин?

4. Докажите, что число вершин произвольной призмы чётно.

○ **5.** Существует ли призма, которая имеет: а) 14 рёбер; б) 15 рёбер?

6. Докажите, что число рёбер произвольной призмы делится на три.

○ **7.** Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 15 рёбер?

8. Призма имеет: а) 10 вершин; б) 18 рёбер; в) 8 граней. Определите её вид.

○ **9.** Может ли пирамида иметь: а) 3 вершины; б) 7 вершин?

○ **10.** Существует ли пирамида, которая имеет: а) 20 рёбер; б) 21 ребро?

11. Докажите, что любая пирамида имеет чётное число рёбер.

○ **12.** Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет 32 ребра?

13. Пирамида имеет: а) 6 вершин; б) 22 ребра; в) 10 граней. Определите её вид.

14. Сколько диагоналей имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) n-угольная призма; г) n-угольная пирамида?

15. У многогранника шесть вершин, и в каждой из них сходится четыре ребра. Сколько у него рёбер?

16. У многогранника двенадцать граней, и все они пятиугольные. Сколько у него рёбер?

* **17.** Докажите, что у любого многогранника число граней с нечётным числом рёбер чётно.

* **18.** Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечётное число рёбер, чётно.

* **19.** Докажите, что для любого $n > 5$ и отличного от 7 существует многогранник с n рёбрами.

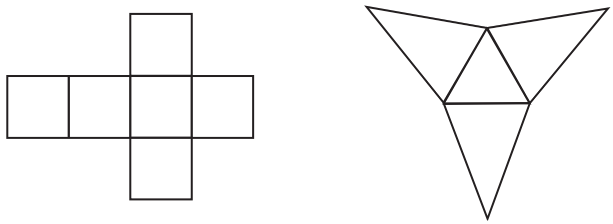
* **20.** Существуют ли отличные от куба многогранники, все грани которых являются равными между собой квадратами?

* **21.** Существует ли многогранник, все грани которого параллелограммы, но который не является призмой?

* **22.** По аналогии с определениями круга и окружности сформулируйте определения шара и сферы.

§ 11. Моделирование многогранников

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым рёбрам и развернуть её на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется **развёрткой** многогранника. Например, на рисунке 22 изображены развёртки куба и треугольной пирамиды.

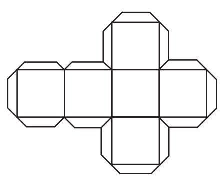


а) б)

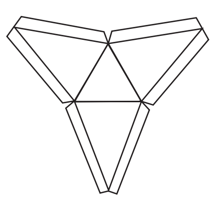
Рис. 22

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развёртку и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки развёртку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка (рис. 23).

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 24), и резиновых колечек — основной крепёжной дета-



а)



б)

Рис. 23

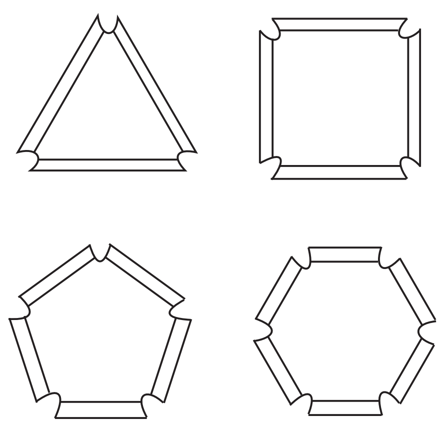


Рис. 24

ли конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 24.

Упражнения

1. Нарисуйте развёртки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырёхугольной пирамиды.
2. Какие из изображённых на рисунке 25 фигур являются развёртками куба?

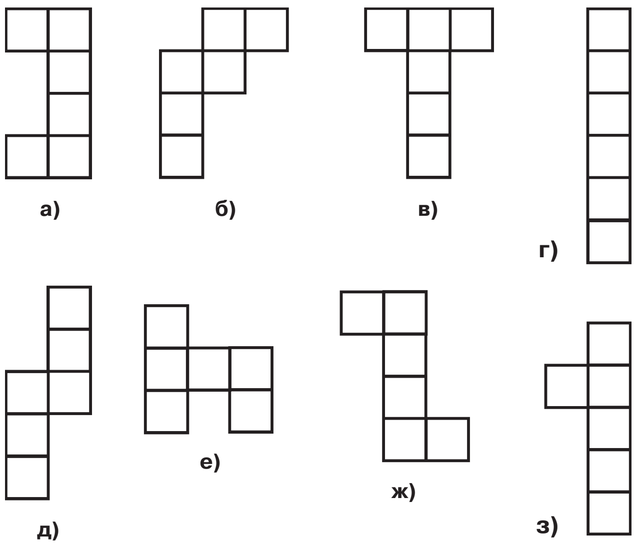


Рис. 25

3. На рисунке 26 найдите фигуры, которые являются развёртками призм. Определите вид этих призм.
4. Среди данных на рисунке 27 развёрток найдите развёртки пирамид. Определите их вид.

* 5. Может ли развёрткой пирамиды быть:
   а) квадрат;
   б) прямоугольник, отличный от квадрата;
   в) ромб;
   г) параллелограмм, отличный от ромба?
6. Изготовьте развёртки и склейте из них модели куба и тетраэдра.

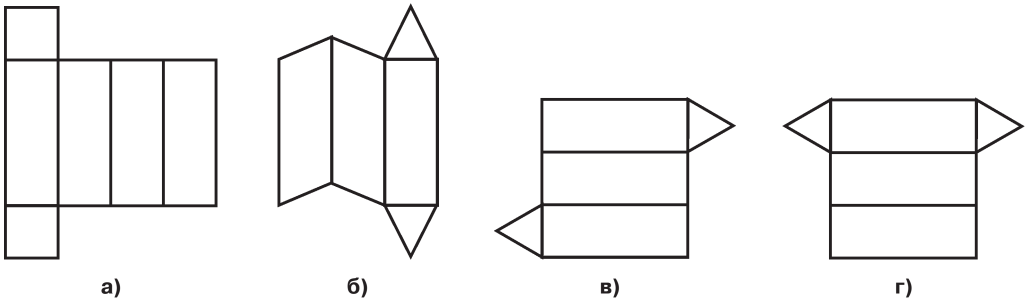


Рис. 26

7. Изготовьте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырёхугольников, пятиугольников и шестиугольников с равными сторонами. Сделайте с помощью этого конструктора несколько моделей многогранников.

8. Сделайте из конструктора модели правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр).

9. Составьте модель многогранника из двух квадратных и восьми треугольных граней конструктора.

*__10.__ Составьте модель многогранника из четырёх шестиугольных и четырёх треугольных граней конструктора.

*__11.__ Составьте модель многогранника (кубооктаэдр) из восьми треугольных и шести квадратных граней конструктора.

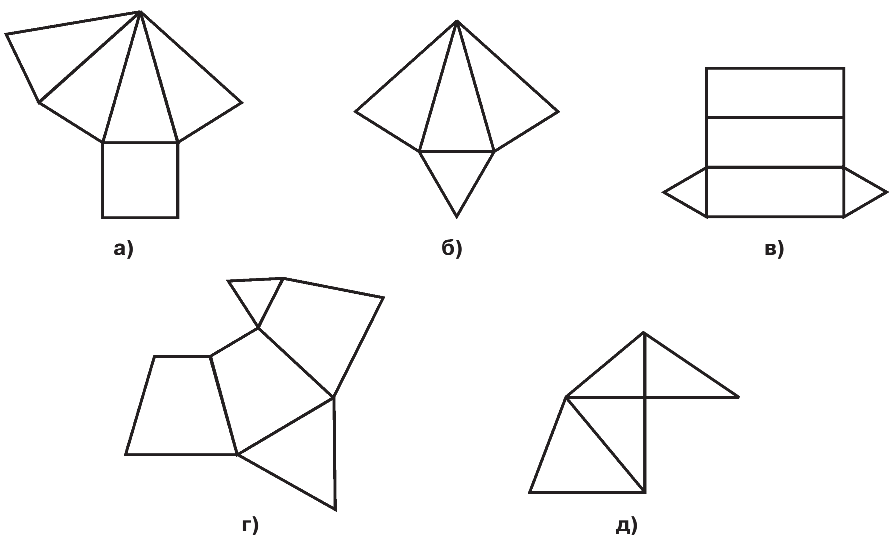


Рис. 27

12. Можно ли окрасить грани куба тремя красками так, чтобы соседние грани были окрашены в различные цвета? Сделайте соответствующую модель.

*__13.__ Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней:
а) тетраэдра;
б) октаэдра;
в) икосаэдра;
г) додекаэдра?

*__14.__ Из 9 спичек сложите 7 равных треугольников.

*__15.__ Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, соединяющего вершины A и C_1.

*__16.__ Три ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1.

*__17.__ Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$, соединяющего середины рёбер AB и CD.

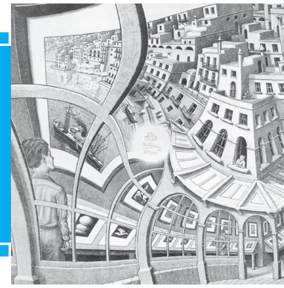
*__18.__ Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, соединяющего вершину A и середину ребра B_1C_1. Все рёбра призмы равны 1.

*__19.__ Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, соединяющего вершины A и D_1. Все рёбра призмы равны 1.

*__20.__ На внутренней стенке цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края висит капля мёда, а на наружной стенке в диаметрально противоположной точке сидит муха. Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до мёда. Радиус основания банки равен 10 см.

Глава II

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ



§ 12. Параллельность прямых в пространстве

Напомним, что две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Дадим теперь определение параллельности прямых в пространстве.

О п р е д е л е н и е. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 28).
Параллельность прямых a и b обозначается $a \| b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и A_1B_1 параллельны (рис. 29).

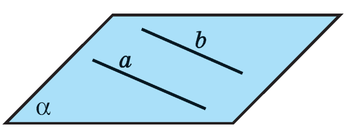


Рис. 28

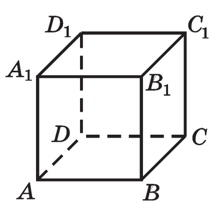


Рис. 29

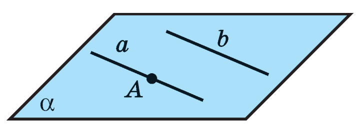


Рис. 30

Т е о р е м а. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой b. Проведём через эту прямую и точку A плоскость α (рис. 30). Эта плоскость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовём её a, параллельная прямой b. Она и будет искомой прямой, параллельной данной. ■

Для отношения параллельности прямых в пространстве справедлива следующая теорема, доказательство которой будет дано в параграфе 7.

Теорема. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AB и C_1D_1 параллельны прямой A_1B_1. Следовательно, прямые AB и C_1D_1 параллельны.

Исторические сведения

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счёту постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в 7-м классе: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому или его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято утверждение о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убеждён в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твёрдо верил в её применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на многие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Упражнения

1. Запишите пары параллельных рёбер: а) в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) в призме $ABCA_1B_1C_1$.
2. Будут ли противоположные рёбра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны?
3. В каких пирамидах имеются параллельные рёбра?
4. Используя модели правильных многогранников, установите, имеет ли параллельные рёбра (если имеет, то сколько пар): а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр.
5. Сформулируйте, какие две прямые в пространстве являются непараллельными.
6. Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?
7. Известно, что на плоскости через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную. Будет ли это утверждение верно для пространства?
8. В пространстве даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых проходит через эту точку: а) параллельных данной прямой; б) не пересекающих данную прямую?
9. Пусть a и b — пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 — прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?
10. Докажите, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.
11. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
12. Сколько плоскостей можно провести через различные пары из: а) трёх попарно параллельных прямых; б) четырёх попарно параллельных прямых; в*) n попарно параллельных прямых, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?
13. Седьмое свойство стереометрии в «Началах» Евклида формулируется так: «Если будут две параллельные прямые и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными». Докажите.
14. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что параллельны прямые: а) AB и C_1D_1; б) AA_1 и CC_1; в) AD_1 и BC_1; г) AC и A_1C_1.
15. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что параллельны прямые: а) AA_1 и CC_1; б) AA_1 и DD_1; в) AB и D_1E_1; г) AB и C_1F_1; д) AC и A_1C_1; е) AC и D_1F_1; ж) AD и A_1D_1; з) AD и B_1C_1; и) AB_1 и ED_1; к) AC_1 и FD_1.

§ 13. Скрещивающиеся прямые

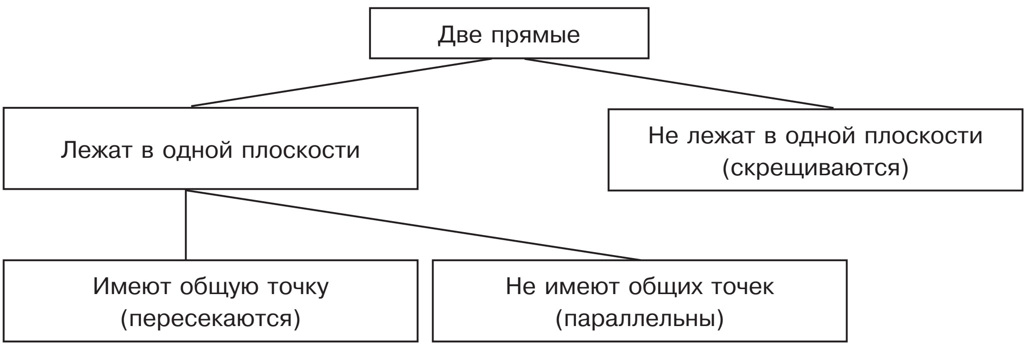
Мы уже знаем, что две прямые в пространстве могут пересекаться, а также быть параллельными. В отличие от плоскости, в пространстве существует ещё один случай взаимного расположения двух прямых, когда они не пересекаются и не параллельны.

Определение. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка скрещиваются, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и A_1D_1 скрещиваются.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы.



Следующую теорему называют признаком скрещивающихся прямых, поскольку она даёт достаточное условие для того, чтобы прямые были скрещивающимися.

Теорема. (Признак скрещивающихся прямых.) Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a (рис. 31). Если бы прямые a и b лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежала бы прямая b и ей принадлежала бы точка B.

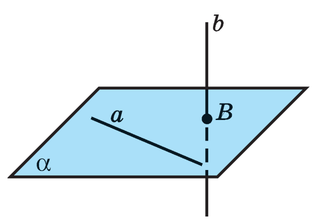


Рис. 31

Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая b лежала бы в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, a и b не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются. ■

Упражнения

1. Запишите пары скрещивающихся рёбер в: а) параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$; в) тетраэдре $ABCD$; г) пирамиде $SABCD$.

2. Имеет ли скрещивающиеся рёбра (если имеет, то сколько пар): а) октаэдр; б*) икосаэдр; в*) додекаэдр?

3. Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

4. Прямая лежит в плоскости. Сколько прямых, скрещивающихся с этой прямой, проходит через точку, взятую в той же плоскости?

5. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

6. Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Как могут быть расположены эти прямые относительно друг друга?

7. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B — прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Какая прямая будет линией пересечения плоскостей α и β?

8. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 32). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают прямые a и b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

9. Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 33, а)?

10. Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 33, б)?

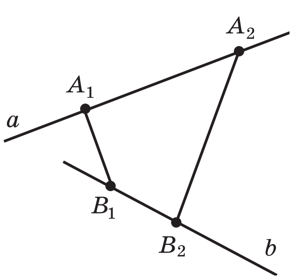
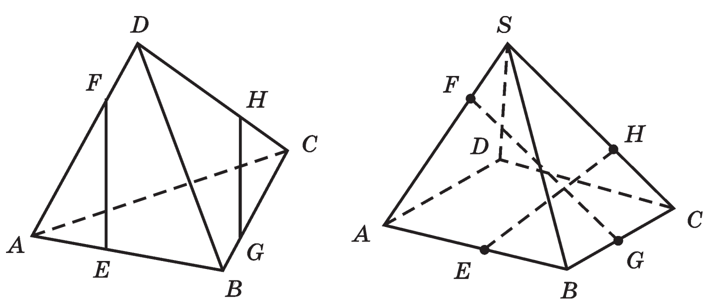


Рис. 32



а) б)

Рис. 33

11. Каково взаимное расположение диагоналей пространственного четырёхугольника $ABCD$ (вершины A, B, C, D не принадлежат одной плоскости)?

12. Даны скрещивающиеся прямые a и b, прямая c пересекает каждую из них. Докажите, что любая прямая, параллельная c, скрещивается по крайней мере с одной из данных прямых.

13. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Точка C принадлежит прямой a. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает прямую a.

14. Даны две прямые — a и b. Через данную точку K, не принадлежащую данным прямым, проведите прямую, скрещивающуюся с каждой из них, если известно, что они:
а) пересекаются; б) скрещиваются.

15. Даны две скрещивающиеся прямые — m и n. Через точку M, принадлежащую прямой m, проведите прямую, скрещивающуюся с n.

*__16.__ Докажите, что два отрезка, соединяющие середины скрещивающихся сторон пространственного четырёхугольника $ABCD$, пересекаются.

*__17.__ Сколько пар скрещивающихся прямых определяется различными парами из:
а) четырёх точек;
б) пяти точек;
в*) n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

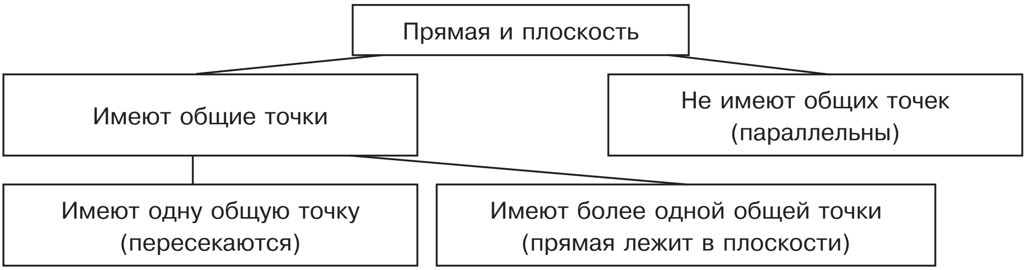
§ 14. Параллельность прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Определение. Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют ни одной общей точки.

Зафиксируем случаи взаимного расположения прямой и плоскости с помощью следующей схемы.



Будем говорить, что ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Следующая теорема связывает понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых и даёт достаточное условие параллельности двух прямых в пространстве.

Теорема. (Признак параллельности двух прямых.) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 34). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а прямая a не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Следующая теорема даёт достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак параллельности прямой и плоскости.) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 35). Докажем, что прямая a параллельна плоскости β. Предположим противное, т. е. что прямая a пересекает плоскость β в некоторой точке C. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$ по условию). Точка C принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \beta$. ■

Теорема *. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

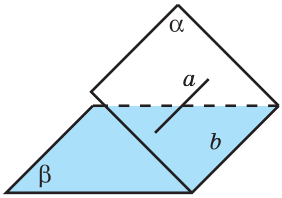


Рис. 34

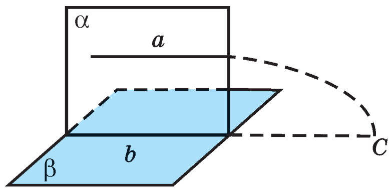


Рис. 35

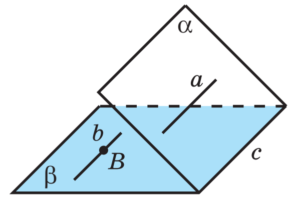


Рис. 36

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 36). Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в курсе планиметрии. Рассмотрим случай, когда прямые не лежат в одной плоскости. Докажем, что прямые a и b параллельны. Для этого нужно доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Через прямые a и c проведём плоскость α. Через прямые b и c проведём плоскость β. Заметим, что прямая a параллельна плоскости β и, следовательно, не пересекается с прямой b. Осталось доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Для этого через прямую a и какую-нибудь точку B прямой b проведём плоскость γ. Она пересечёт плоскость β по прямой, параллельной прямой c. Эта прямая должна совпадать с прямой b, так как иначе через точку B в плоскости β проходили бы две прямые, параллельные прямой c. Следовательно, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Упражнения

1. Укажите случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите параллельные рёбра и грани.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите параллельные рёбра и грани.

4. Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

5. Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

6. Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

7. Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

8. Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

9. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

10. Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости β, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены остальные стороны $ABCDEF$ относительно плоскости β?

11. Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

12. Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что через любую точку этой плоскости проходит прямая, параллельная данной прямой.

13. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит прямая, параллельная этой плоскости. Сколько таких прямых?

14. Докажите, что если две прямые параллельны, то через одну из них проходит плоскость, параллельная другой. Сколько таких плоскостей?

15. Даны две скрещивающиеся прямые. Как через одну из них провести плоскость, параллельную другой?

16. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней SAB и SCD и плоскости основания $ABCD$?

***17.** Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

18. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что параллельны прямая и плоскость соответственно: а) AB и CDD_1; б) AB и CDA_1; в) AD_1 и BCC_1; г) AD_1 и BDC_1.

19. В пространственном четырёхугольнике $ABCD$ (вершины не принадлежат одной плоскости) середины сторон соединены последовательно отрезками. Докажите, что полученный четырёхугольник есть параллелограмм.

20. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что параллельны прямая и плоскость соответственно: а) AB и DEE_1; б) AB и DEF_1; в) AB и DEA_1; г) AB и CFF_1; д) AB и CFE_1; е) AB и CFA_1; ж) AA_1 и BCC_1; з) AA_1 и CDD_1; и) AA_1 и DEE_1; к) AA_1 и BDD_1; л) AA_1 и BEE_1; м) AA_1 и BFF_1; н) AA_1 и CEE_1; о) AA_1 и CFF_1; п) AB_1 и DEE_1; р) AC_1 и DFF_1.

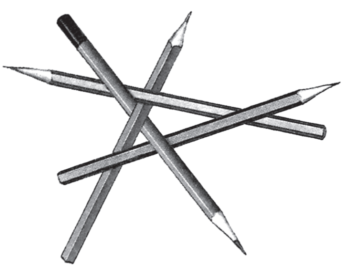


Рис. 37

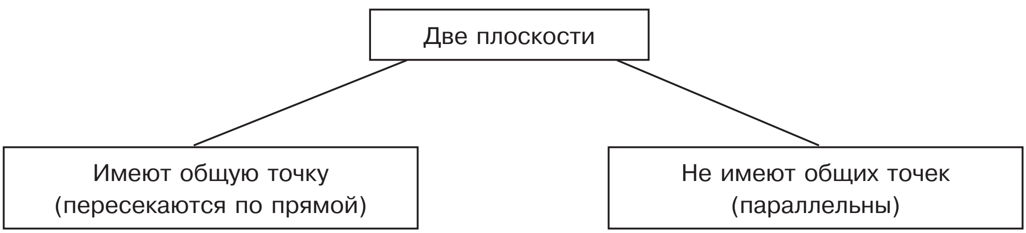
***21.** Возможно ли такое расположение карандашей, какое изображено на рисунке 37?

§ 15. Параллельность двух плоскостей

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Согласно аксиоме 3, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.



Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 38). Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — пло-

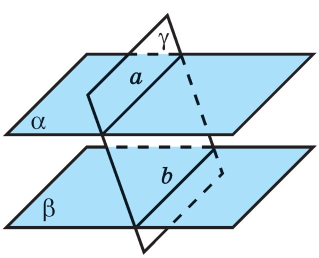


Рис. 38

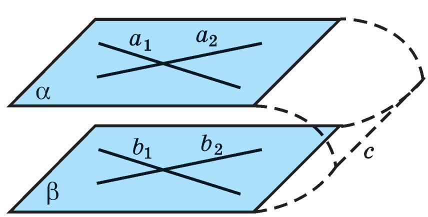


Рис. 39

скости γ. Кроме того, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Следующая теорема даёт достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема. (Признак параллельности двух плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости β. Предположим противное, т. е. что плоскости α и β пересекаются, и пусть c — линия их пересечения (рис. 39). По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой c. Аналогично прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, и, следовательно, они параллельны. ■

Будем говорить, что две грани многогранника параллельны, если они лежат в параллельных плоскостях.

Докажем, что основания призмы параллельны. Действительно, боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому два смежных ребра одного основания призмы соответственно параллельны двум смежным рёбрам другого её основания. Следовательно, основания призмы параллельны.

Упражнения

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Укажите параллельные грани: а) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.
3. Имеет ли параллельные грани (если имеет, то сколько пар): а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?
4. Могут ли быть параллельными: а) две боковые грани призмы; б*) три боковые грани призмы?
5. Какие две плоскости считаются непараллельными?
6. Верно ли утверждение: «Если две плоскости параллельны, то всякая прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в другой плоскости»?

○ **7.** Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

○ **8.** Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

○ **9.** Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

○ **10.** Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости?

○ **11.** Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?

12. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что параллельны плоскости: а) ABB_1 и CDD_1; б) AB_1D_1 и BDC_1.

13. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что параллельны плоскости: а) ABC и $A_1B_1C_1$; б) ABB_1 и DEE_1; в) ABB_1 и CFF_1; г) ACC_1 и DFF_1.

14. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная исходной плоскости.

15. Плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым b и c соответственно. Будут ли плоскости β и γ параллельны? Ответ обоснуйте. Сделайте соответствующий чертёж.

***16.** Докажите, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

***17.** Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

***18.** Докажите, что через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

***19.** Каковы возможные случаи взаимного расположения трёх плоскостей в пространстве, если две из них параллельны?

***20.** Каковы возможные случаи взаимного расположения трёх плоскостей в пространстве, если они попарно пересекаются?

§ 16. Векторы в пространстве

В планиметрии изучались векторы на плоскости, здесь же мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Определение. **Вектором** в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также нулевой вектор, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$ и изображается стрелкой. Будем также обозначать векторы строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной, или **модулем**, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора в пространстве называются **одинаково (противоположно) направленными**, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковые длины и направления.

Так же как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора — $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора умножается на $|t|$, а направление остаётся прежним, если $t > 0$, и изменяется на противоположное, если $t < 0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости. Среди них:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.
4. $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$.
5. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой аналогично тому, как это делалось для плоскости.

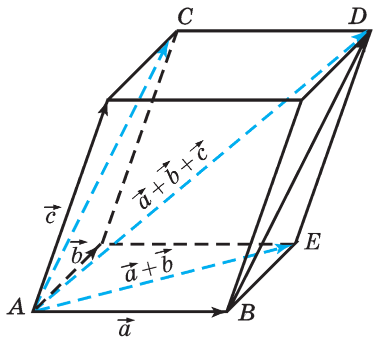


Рис. 40

Докажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда (рис. 40): $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Упражнения

1. Для данного вектора $\vec{a}$ постройте векторы: $-\vec{a}$; $2\vec{a}$; $\frac{5}{2}\vec{a}$.

○ **2.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

○ **3.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

○ **4.** Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ быть равными между собой?

○ **5.** Всегда ли верно равенство $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$?

○ **6.** В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

7. Точка B — середина отрезка AC, а точка C — середина отрезка BD. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

8. Для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;

г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$.

9. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$.

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, равные $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение

$$\overrightarrow{B_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$

12. Докажите выполнимость свойств 3, 4, 5.

13. Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

15. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

***16.** Точка O — центр описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

***17.** Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

***18.** Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

***19.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Укажите такую точку X, для которой верно равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} + \overrightarrow{XD_1} = \vec{0}$.

***20.** В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами скрещивающихся рёбер AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

§ 17. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение. Два вектора называются **коллинеарными**, если при откладывании их от одной точки они располагаются на одной прямой.

Заметим, что коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. То, что векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$ коллинеарны, следует непосредственно из определения умножения вектора на число. Докажем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Из коллинеарности векторов следует, что точки O, A и B принадлежат одной прямой. Если точки A и B лежат по одну сторону от точки O, то положим $t = OB : OA$, если они лежат по разные стороны от точки O, то положим $t = -OB : OA$. В обоих случаях будет выполняться равенство $\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OA}$ и, следовательно, равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. ■

Определение. Три вектора называются **компланарными**, если при откладывании их от одной точки они располагаются в одной плоскости.

Теорема. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно представить единственным образом в виде $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O и обозначим их концы соответственно A, B и C. Из условия теоремы следует, что точки A, B и C лежат в одной плоскости. Если точка C принадлежит прямой OA, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $s = 0$. Аналогично, если точка C принадлежит прямой OB, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $t = 0$.

Пусть теперь точка C не принадлежит прямым OA и OB. Проведём через неё прямые, параллельные прямым OA и OB. Соответствующие точки пересечения обозначим A' и B' (рис. 41). Тогда $\overrightarrow{OA'} = t\overrightarrow{OA} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = s\overrightarrow{OB} = s\vec{b}$, и, следовательно, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

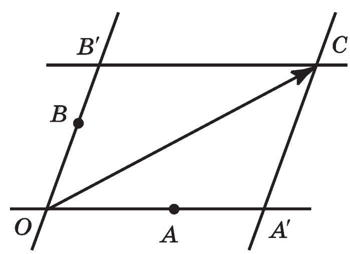


Рис. 41

Докажем, что такое представление единственно. Действительно, если бы, помимо полученного равенства, выполнялось равенство $\vec{c} = t'\vec{a} + s'\vec{b}$, в котором t' отлично от t или s' отлично от s, то выполнялось бы равенство $\vec{0} = (t - t')\vec{a} + (s - s')\vec{b}$, в котором одно из чисел $t - t'$, $s - s'$ отлично от нуля. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были бы коллинеарны, что противоречит условию. ■

Упражнения

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите пары коллинеарных векторов.
2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите тройки компланарных векторов.
3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$?
4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$ компланарны. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны?
5. Докажите, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.
6. Докажите, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они лежат на прямых, параллельных одной плоскости.
7. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, $|\vec{a}| > |\vec{b}|$. Какое направление имеет вектор $\vec{a} + \vec{b}$? Чему равна его длина?
9. В тетраэдре $ABCD$ точки M_1, M_2 являются точками пересечения медиан граней ADB и BDC соответственно. Докажите, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Найдите отношение длин этих векторов.
10. Точки E и F являются серединами соответственно рёбер AD и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ компланарны.

*11. Докажите, что если выполняется равенство $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$, то точки A, B и C принадлежат одной прямой. Причём если $0 < t < 1$, то точка C лежит между A и B.

*12. Докажите, что если выполняется равенство $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + (1 - t - s)\overrightarrow{OC}$, то точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

*13. Докажите, что для правильного пятиугольника $ABCDE$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, где O — центр описанной окружности.

*14. Докажите, что для произвольного тетраэдра $ABCD$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, где O — центроид (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней).

*15. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке, совпадающей с центроидом.

*16. Докажите, что для произвольного тетраэдра $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство $4\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}$, где O — центроид тетраэдра.

*17. Докажите, что для любой системы точек $A_1, \ldots, A_n$ в пространстве существует единственная точка O (центроид) такая, что для произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1} + \ldots + \overrightarrow{XA_n})$.

*18. Докажите, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то любой вектор $\vec{d}$ можно представить единственным образом в виде $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y, z — действительные числа.

§ 18. Параллельный перенос

В курсе планиметрии в качестве одного из видов движения плоскости рассматривался параллельный перенос на заданный вектор. Здесь мы определим понятие параллельного переноса в пространстве.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A' так, что векторы $\overrightarrow{AA'}$ равны заданному вектору $\vec{a}$, называется **параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$.

Говорят, что фигура F' получается **параллельным переносом** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются параллельным переносом всевозможных точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 42).

Теорема. Параллельный перенос является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно (рис. 43). Тогда $AA'B'B$ — параллелограмм, и, следовательно, $AB = A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением. ■

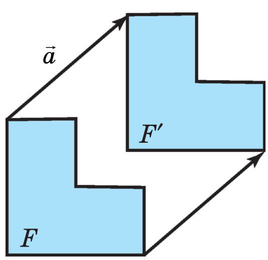


Рис. 42

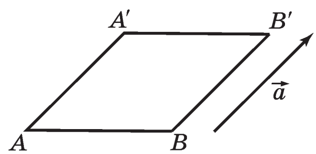


Рис. 43

Упражнения

○ **1.** Существует ли параллельный перенос, переводящий ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в ребро: а) A_1B_1; б) C_1D_1; в) B_1C_1; г) D_1C_1?

○ **2.** Существует ли параллельный перенос, при котором: а) одна грань призмы переводится в другую грань этой призмы; б) одна грань пирамиды переводится в другую грань этой пирамиды?

○ **3.** Можно ли параллельным переносом перевести одну грань в другую в: а) тетраэдре; б) кубе; в) октаэдре; г) икосаэдре; д) додекаэдре?

○ **4.** Может ли параллельный перенос переводить саму в себя: а) прямую; б) плоскость; в) призму; г) пирамиду?

○ **5.** Может ли параллельный перенос переводить: а) две точки в одну точку; б) две прямые в одну прямую; в) две плоскости в одну плоскость?

6. Докажите, что параллельный перенос переводит прямые сами в себя или в параллельные им прямые.

7. Докажите, что параллельный перенос переводит плоскости сами в себя или в параллельные им плоскости.

8. Докажите, что параллельный перенос переводит векторы в равные им векторы.

9. Сколько существует различных параллельных переносов, переводящих в себя данную: а) прямую; б) плоскость?

10. Докажите, что композиция (последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом. Зависит ли эта композиция от порядка выполнения параллельных переносов?

* **11.** Нарисуйте фигуру, состоящую из кубов, которые получаются из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельными переносами на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$.

* **12.** Докажите, что кубами, полученными параллельными переносами данного куба, можно заполнить всё пространство. Назовите какие-нибудь другие фигуры, параллельными переносами которых можно заполнить всё пространство.

* **13.** Движение переводит прямые сами в себя или в параллельные им прямые. Является ли это движение параллельным переносом?

* **14.** Движение переводит плоскости сами в себя или в параллельные им плоскости. Является ли это движение параллельным переносом?

* **15.** Движение переводит векторы в равные им векторы. Является ли это движение параллельным переносом?

§ 19. Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая её прямая (рис. 44). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведём прямую, параллельную прямой l. Она пересечёт плоскость π в некоторой точке A' (см. задачу 11 из § 12), которая называется **параллельной проекцией точки** A на плоскость π в направлении прямой l.

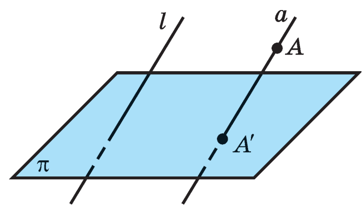


Рис. 44

Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется её проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется **параллельным проектированием** на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть F — некоторая фигура в пространстве. Проекции её точек на плоскость π образуют фигуру F', которая называется **параллельной проекцией фигуры** F. Говорят также, что фигура F' получена из фигуры F параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то её проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то её проекцией является прямая.

Доказательство. Пусть прямая k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 45). Возьмём какую-нибудь точку A на прямой k и проведём через неё прямую a, параллельную l. Её пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A.

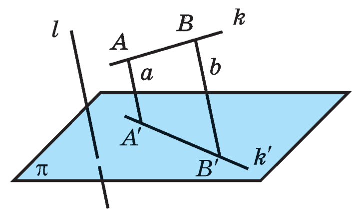


Рис. 45

Через прямые a и k проведём плоскость α. Её пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. ■

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того, лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Отношение длин отрезков,

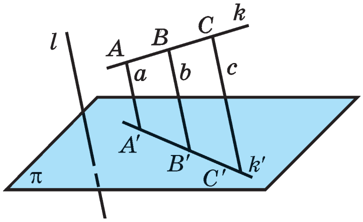


Рис. 46

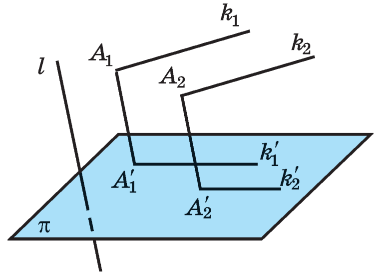


Рис. 47

лежащих на одной прямой, при параллельном проектировании сохраняется. В частности, середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Пусть k' является проекцией прямой k на плоскость π в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 46). Поскольку прямые k и k' лежат в одной плоскости, то из обобщённой теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$. ■

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 47). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойств параллельных плоскостей линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны. ■

Упражнения

○ **1.** В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

2. Сколько точек может получиться при параллельном проектировании трёх различных точек пространства? Сделайте чертёж.

3. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертёж.

4. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертёж.

5. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертёж.

6. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертёж.

7. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертёж.

8. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертёж.

9. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделайте чертёж.

○ **10.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

○ **11.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

○ **12.** В пространстве задана прямая. Может ли её параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

○ **13.** Можно ли по параллельной проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?

○ **14.** В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием её параллельной проекции на плоскость?

○ **15.** Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

○ **16.** Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

17. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше (меньше) самого отрезка?

18. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования?

* **19.** Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

* **20.** Точки A', B' являются параллельными проекциями точек A, B. $AA' = a$, $BB' = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите расстояние между точкой C и её проекцией C'.

§20. Параллельные проекции плоских фигур

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в поверхность основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги — основаниями цилиндров и конусов.

Т е о р е м а. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то её параллельная проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.

Доказательство. Пусть A, B — точки фигуры F и A', B' — их параллельные проекции (рис. 48). Тогда $ABB'A'$ — параллелограмм. Поэтому параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$ переводит точку B в B'. Поскольку точку B фигуры F можно выбирать произвольно, то этот параллельный перенос переводит фигуру F в фигуру F'. Значит, фигуры F и F' равны. ■

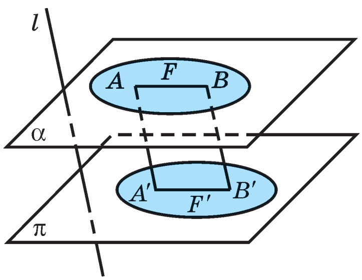


Рис. 48

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то её проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причём если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако поскольку при параллельном проектировании длина отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть непрямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 49). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

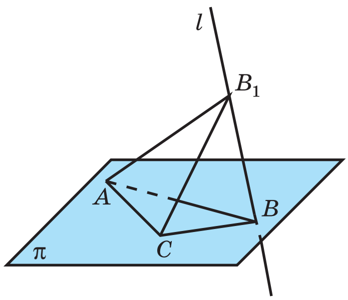


Рис. 49

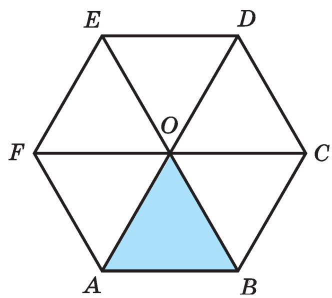


Рис. 50

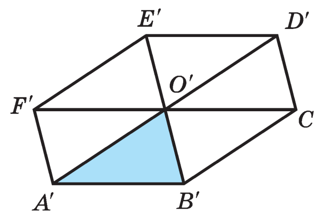


Рис. 51

Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 50). Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией на плоскость π может быть произвольный треугольник $A'O'B'$ (рис. 51). Далее отложим $O'D' = A'O'$ и $O'E' = B'O'$. Теперь из точек A' и D' проведём прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B' и E' проведём прямые, параллельные прямой $A'O'$. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Выясним, какая фигура является параллельной проекцией окружности. Пусть F — окружность в пространстве, F' — её проекция на плоскость π в направлении прямой l.

Если прямая l параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности. Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость окружности (рис. 52). Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости π, и $A'B'$ — его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмём какой-нибудь другой диаметр, CD, и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, её проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

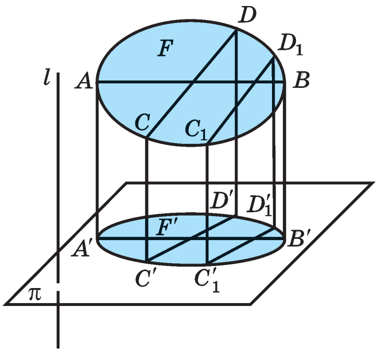


Рис. 52

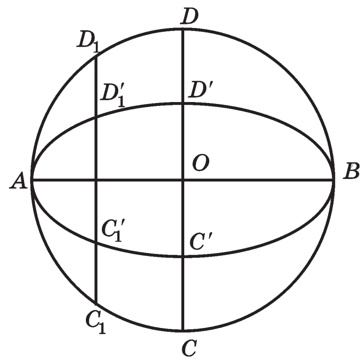


Рис. 53

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь её диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется **эллипсом**. Например, на рисунке 53 изображён эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

Упражнения

1. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треугольника?
2. Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника быть: а) прямоугольный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?
3. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется в:
а) равносторонний треугольник;
б) равнобедренный треугольник?
4. Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?
5. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?
6. Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?
7. Параллельной проекцией каких плоских фигур может быть квадрат?
8. Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция?
9. В какую фигуру может проектироваться трапеция?
10. Изобразите параллельную проекцию: а) прямоугольника; б) трапеции.

○ **11.** Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника: а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

*__12.__ Изобразите параллельную проекцию правильного восьмиугольника.

*__13.__ Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников.

14. Нарисуйте эллипсы, полученные из окружности сжатием и растяжением в: а) 1,5 раза; б) 2 раза; в) 3 раза.

*__15.__ Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображения двух её перпендикулярных диаметров.

*__16.__ Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение касательной: а) параллельной данной хорде; б) проходящей через данную точку.

*__17.__ Изобразите параллельную проекцию квадрата: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

*__18.__ Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника: а) вписанного в данную окружность; б) описанного около неё.

*__19.__ Постройте изображение прямоугольного треугольника: а) вписанного в окружность; б) описанного около окружности.

*__20.__ Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника:
а) с вписанной в него окружностью;
б) с описанной около него окружностью.

§ 21. Изображение пространственных фигур

Как говорилось выше, для изображения пространственных фигур используют параллельную проекцию. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется **плоскостью изображений**, а сама проекция фигуры — **изображением.**

Приведём примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Изображение параллелепипеда строится исходя из того, что все его грани — параллелограммы, и, следовательно, изображаются параллелограммами (см. рис. 12).

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (см. рис. 11). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (см. рис. 13).

Рис. 54

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (см. рис. 14).

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить её с вершинами многоугольника (см. рис. 17). Полученные отрезки будут изображать боковые рёбра пирамиды.

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определённым законам, способно передать впечатление о трёхмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

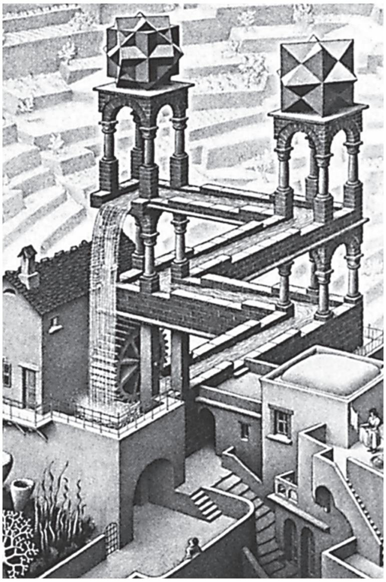


Рис. 55

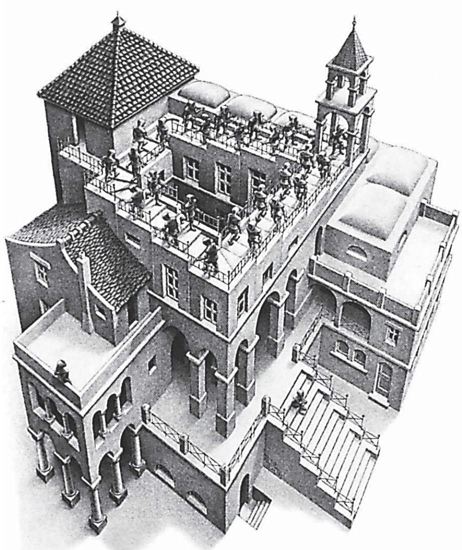


Рис. 56

В живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (*impossibility* — невозможность) — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М. Эшер (1898—1972) в гравюрах «Бельведер» (рис. 54), «Водопад» (рис. 55), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 56) изобразил невозможные объекты.

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 57.

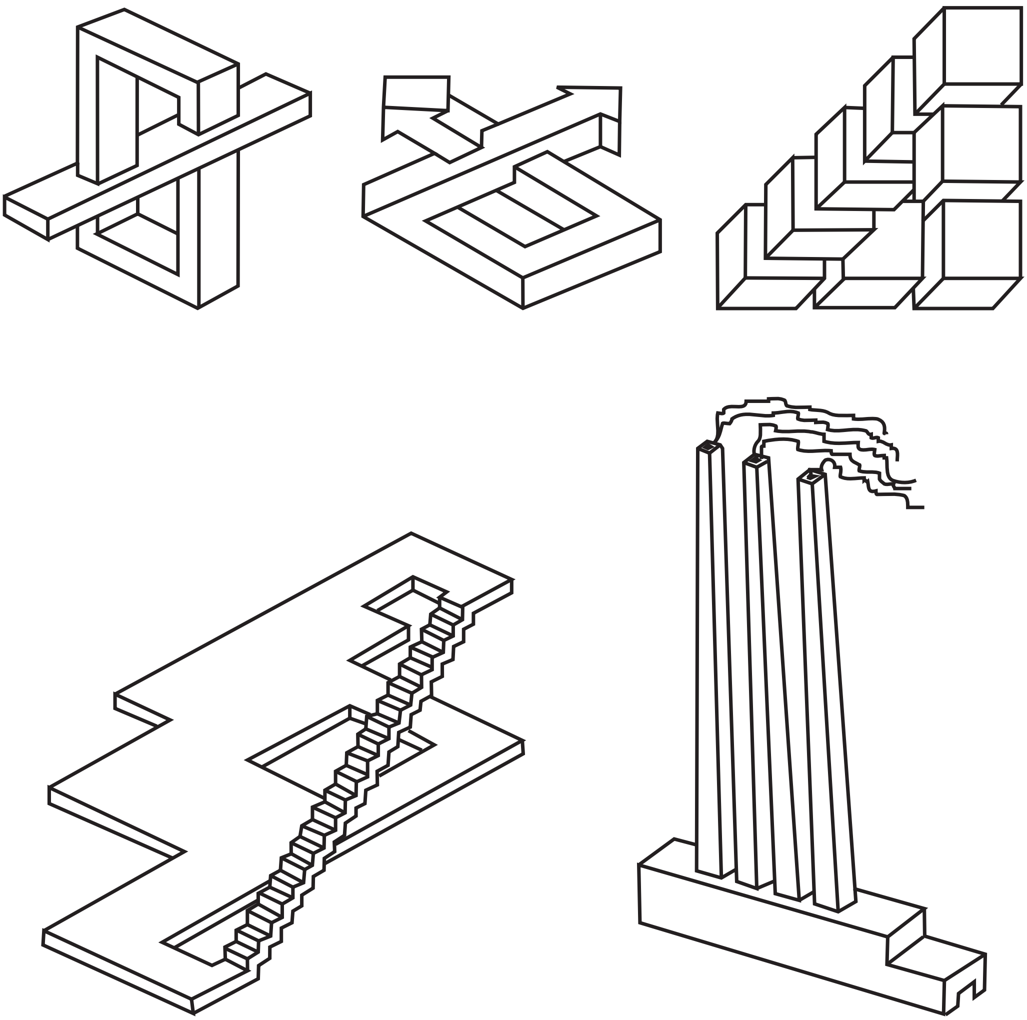


Рис. 57

Упражнения

1. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.
2. Постройте изображение куба, ребро которого параллельно плоскости проектирования, а грани — нет.
3. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов.
4. ○ На рисунке 13 изображён прямоугольный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его рёбра параллельны плоскости проектирования?
5. ○ На рисунке 12 изображён наклонный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его рёбра параллельны плоскости проектирования?
6. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.
7. ○ На рисунке 14 изображена треугольная призма. Верно ли утверждение о том, что какие-то её рёбра параллельны плоскости проектирования?
8. Постройте изображение правильного тетраэдра $ABCD$, грань ABD которого параллельна плоскости проектирования. Каким будет изображение треугольника ABD?
9. Изобразите в параллельной проекции правильную четырёхугольную пирамиду.
10. Изобразите правильный октаэдр $SABCDS'$, две диагонали которого AC и SS' параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырёхугольника $ASCS'$?
11. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображённые на рисунке 58?
12. * Возможен ли многогранник, изображение которого показано на рисунке 59?

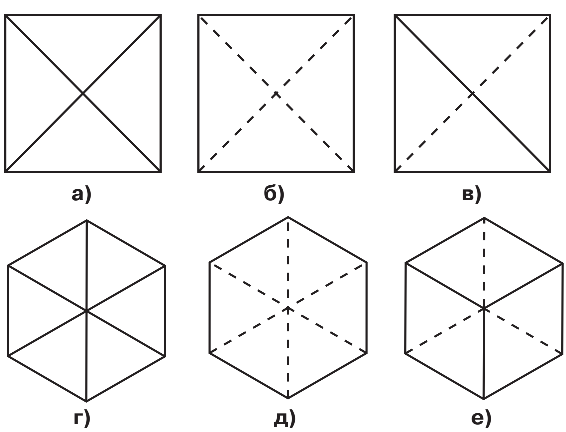


Рис. 58

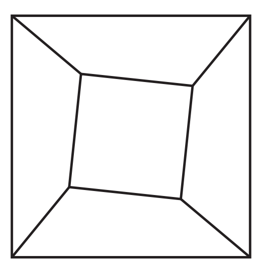


Рис. 59

§ 22. Сечения многогранников

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 60); б) иметь одну общую точку — вершину многогранника (рис. 61); в) иметь общий отрезок — ребро многогранника (рис. 62); г) иметь общий многоугольник — грань многогранника (рис. 63).

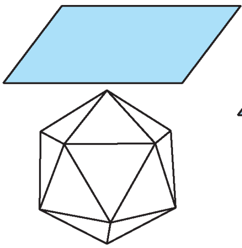


Рис. 60

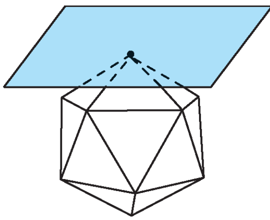


Рис. 61

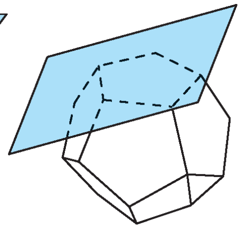


Рис. 62

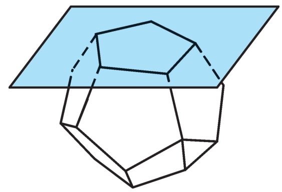


Рис. 63

Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общей частью многогранника и плоскости будет многоугольник, называемый **сечением** многогранника плоскостью (рис. 64).

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и два прилежащих к ней боковых ребра, называется **диагональным сечением** (рис. 65).

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется **диагональным сечением** (рис. 66).

Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна её основанию (рис. 67). Часть пирамиды, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённой пирамидой**. Сечение пирамиды также называется **основанием** усечённой пирамиды.

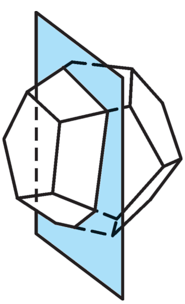


Рис. 64

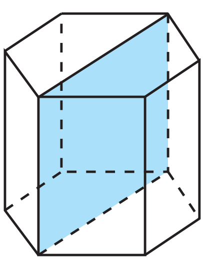


Рис. 65

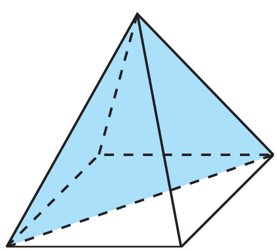


Рис. 66

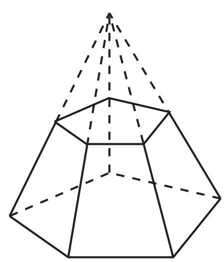


Рис. 67

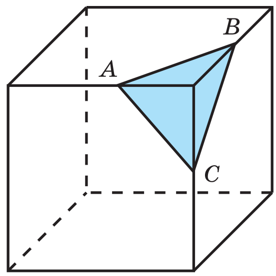


Рис. 68

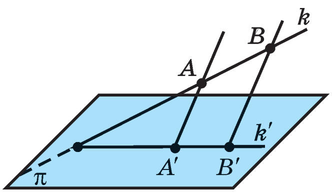


Рис. 69

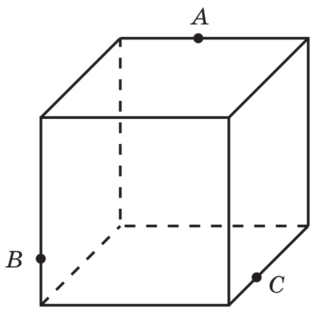


Рис. 70

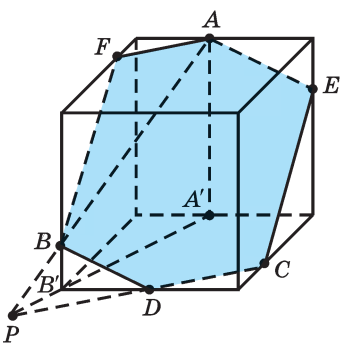


Рис. 71

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью.

Пусть дано изображение куба и три точки — A, B, C, принадлежащие рёбрам этого куба, выходящим из одной вершины. Тогда, для того чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, достаточно просто соединить их отрезками. Полученный треугольник ABC и будет искомым изображением сечения куба (рис. 68).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость. А именно: пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 69).

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходящего через три точки A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся рёбрам этого куба (рис. 70). Найдём пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (рис. 71). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст ещё одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведём прямую, параллельную BD, и точку её пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведём прямую, параллельную CD, и точку её пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F,

B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 71).

В качестве примера построим изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки — A, B, C, принадлежащие её рёбрам (рис. 72). Проведём прямую AB и точку её пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим E. Проведём прямую EC и точку её пересечения с ребром основания пирамиды обозначим D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырёхугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

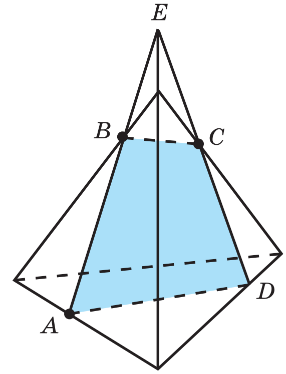


Рис. 72

Упражнения

1. Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью?

2. Сколько диагональных сечений имеет n-угольная:
а) призма; б) пирамида?

3. Сколько вершин, рёбер и граней имеет n-угольная усечённая пирамида?

4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) треугольник;
б) правильный треугольник;
в) равнобедренный треугольник;
г) прямоугольный треугольник;
д) тупоугольный треугольник?

5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) квадрат; г) ромб;
б) прямоугольник; д) трапеция;
в) параллелограмм; е) прямоугольная трапеция?

6. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) пятиугольник;
б) правильный пятиугольник?

7. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) шестиугольник;
б) правильный шестиугольник;
в) многоугольник с числом сторон больше шести?

8. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B, D_1 и середину ребра CC_1. Определите его вид.

9. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и A_1D_1. Определите его вид.

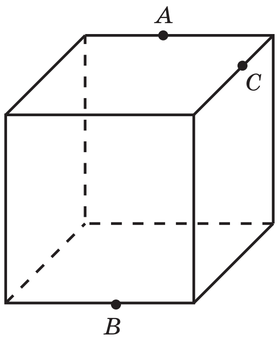


Рис. 73

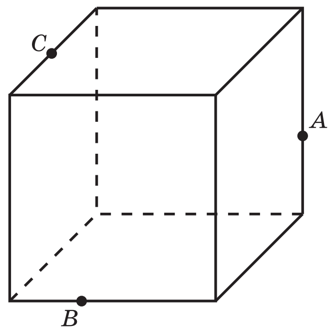


Рис. 74

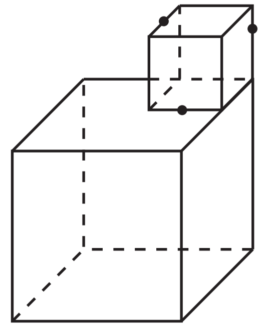


Рис. 75

10. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1. Определите его вид. Найдите его площадь, если рёбра куба равны 1.

11. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины рёбер AB и AD. Найдите его площадь, если рёбра куба равны 1.

12. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках 73, 74.

13. Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 75). Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые принадлежат скрещивающимся рёбрам меньшего куба.

14. Постройте сечение правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещивающейся с ней стороны верхнего основания. Определите его вид. Найдите его площадь, если все рёбра призмы равны 1.

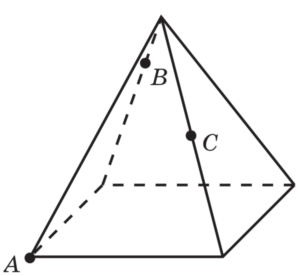


Рис. 76

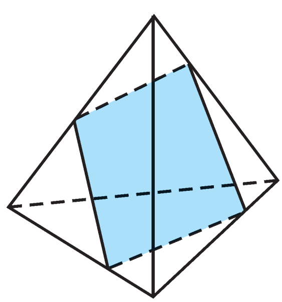


Рис. 77

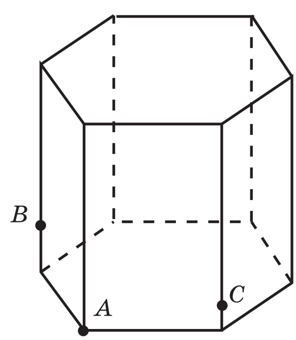


Рис. 78

15. Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной грани BCD и проходящей через середину ребра AD. Найдите его площадь, если все рёбра тетраэдра равны 1.

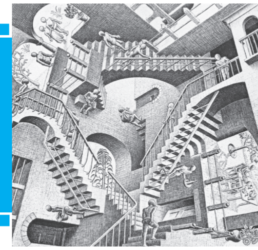
16. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 76.

17. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырёхугольник, изображённый на рисунке 77?

18. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 78.

Глава III

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ



§ 23. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых

Определение угла в пространстве аналогично определению угла на плоскости.

Определение. **Углом** в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами.

Определение. **Углом между двумя пересекающимися прямыми** в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.

Определение. Две пересекающиеся прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых. Углом между двумя пересекающимися отрезками будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в кубе пересекающиеся рёбра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с рёбрами этой грани углы 45°.

Так же как и для плоскости, два луча в пространстве называются **сонаправленными**, если один из них содержит другой или они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, соединяющей их вершины.

Используя свойства параллельного проектирования, докажем следующую теорему.

Теорема. Углы с сонаправленными сторонами равны.

Доказательство. Пусть лучи a_1, b_1 с вершиной в точке C_1 соответственно сонаправлены лучам a_2, b_2 с вершиной в точке C_2. Предположим, что лучи лежат в разных плоскостях γ_1, γ_2 (рис. 79). Случай, когда лучи лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Заметим, что, по признаку параллельности, плоскости γ_1 и γ_2 параллельны. Параллельное проектирование в направлении прямой C_1C_2 на плоскость γ_2 переводит лучи a_1, b_1 в лучи a_2, b_2 соответственно. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ■

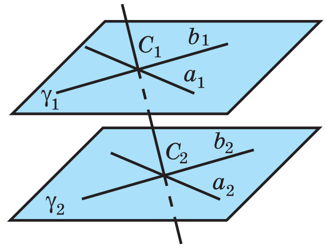


Рис. 79

Следствие. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 80). Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведём через неё прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно.

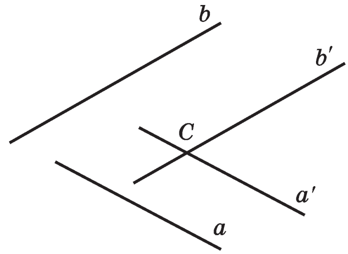


Рис. 80

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две скрещивающиеся прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

Два отрезка будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

Упражнения

○ **1.** Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **2.** Даны прямая и точка вне её. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **3.** Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

○ **4.** Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

5. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BC; б) AB_1 и CD_1; в) AC и BD_1.

6. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и CD; в) AA_1 и BE; г) AB и B_1D_1; д) AB_1 и DE_1.

7. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми: а) AC и BD; б) AB и B_1C_1; в) AB и A_1C_1; г) AB_1 и BC_1; д) BC_1 и DA_1.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E_1, F_1 — середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите угол между прямыми AE_1 и BF_1.

9. В правильном тетраэдре найдите угол между высотами двух соседних граней, проведёнными к общему ребру.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) CC_1 и AB; б) CC_1 и AB_1; в) AB и B_1C_1; г) AB и CA_1; д) AB_1 и BC_1.

11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) AB и SC; б) SB и SD.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) AA_1 и BC_1; б) AA_1 и DE_1; в) AB_1 и BC_1; г) AB_1 и BF; д) AB_1 и CD_1; е) AB_1 и DC_1.

§ 24. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определим понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Заметим, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, ей параллельная, и, значит, исходная прямая не была бы перпендикулярна данной плоскости.

Следующая теорема даёт достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

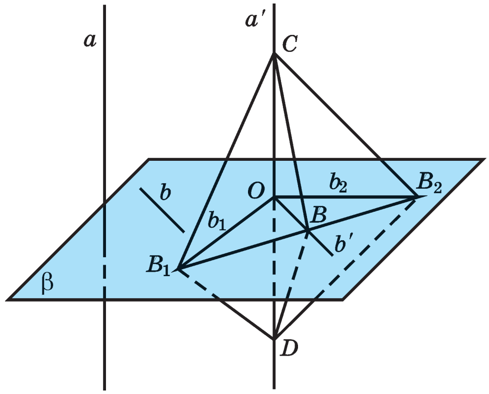


Рис. 81

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 81). Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведём через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'. Для этого в плоскости β проведём прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$. Аналогично из равенства треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по трём сторонам). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по двум сторонам и углу между ними). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по трём сторонам), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β. ■

Воспользуемся этим признаком для доказательства того, что боковые рёбра прямой призмы перпендикулярны её основаниям.

Действительно, боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники. Поэтому каждое боковое ребро перпендикулярно двум прилежащим сторонам основания призмы и, следовательно, перпендикулярно основанию.

Определение. Параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования, называется **ортогональным проектированием**.

Так как ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

* Выясним, как строится ортогональная проекция прямоугольного параллелепипеда. Для этого докажем, что если в треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S равны 90°, то ортогональная проек-

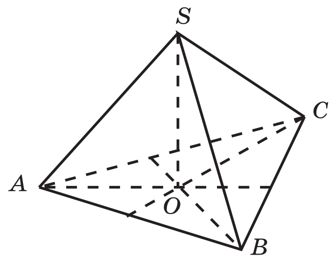


Рис. 82

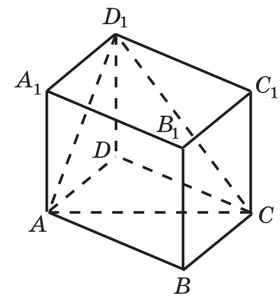


Рис. 83

ция вершины S на плоскость основания совпадает с ортоцентром O (точка пересечения высот) треугольника ABC (рис. 82).

Действительно, прямая SC перпендикулярна прямым SA и SB. Следовательно, она перпендикулярна плоскости грани SAB и, значит, перпендикулярна прямой AB. Прямая SO перпендикулярна плоскости основания ABC и, следовательно, перпендикулярна AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна прямым SC и SO. Следовательно, AB перпендикулярна плоскости SCO и, значит, перпендикулярна прямой CO, лежащей в этой плоскости. Аналогично показывается, что AC перпендикулярна BO, BC перпендикулярна AO.

Из этого следует, что если даны изображения A, C и D_1 вершин прямоугольного параллелепипеда, то изображение вершины D будет точкой пересечения высот треугольника ACD_1. Соединяя точку D с точками A, C и D_1, построим изображения трёх рёбер параллелепипеда. Проводя отрезки, параллельные построенным, получим изображения остальных рёбер параллелепипеда (рис. 83).

Упражнения

1. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

2. Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

3. Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

4. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

5. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в его центре и перпендикулярная: а) диаметру; б) двум диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

○ **6.** Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

○ **7.** При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

○ **8.** Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

9. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что перпендикулярны прямая и плоскость соответственно: а) AB и BCC_1; б) AB_1 и BCD_1; в) BD_1 и ACB_1.

10. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BD; б) AB и CB_1; в) AC и BD_1.

11. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде сторона основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру.

12. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что перпендикулярны прямая и плоскость соответственно: а) AA_1 и ABC; б) AB и BDD_1; в) AC и CDD_1; г) AC и BEE_1; д) AD и CEE_1; е) AB_1 и BDE_1.

13. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и BD; в) AA_1 и BE; г) AA_1 и BF; д) AB и BD_1; е) AB и EA_1; ж) AC и DC_1.

14. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

15. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна плоскости α, то прямая a перпендикулярна плоскости β.

16. Докажите, что через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

17. Докажите, что через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

○ **18.** Может ли ортогональная проекция отрезка быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка?

○ **19.** Может ли ортогональная проекция угла быть: а) меньше угла; б) равна углу; в) больше угла?

○ **20.** Может ли ортогональная проекция квадрата быть: а) прямоугольником; б) параллелограммом; в) трапецией?

21. Изобразите ортогональную проекцию прямоугольного параллелепипеда.

*__22.__ Какой фигурой является ортогональная проекция куба на плоскость, перпендикулярную: а) ребру куба; б) диагонали грани куба; в) диагонали куба?

§ 25. Перпендикуляр и наклонная

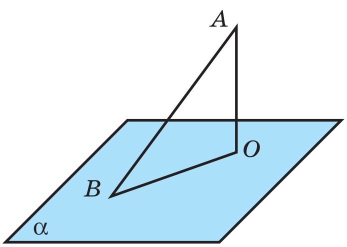
Пусть точка A не принадлежит плоскости π. Проведём прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскости π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим O. Отрезок AO называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость π.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания, называется **высотой пирамиды**.

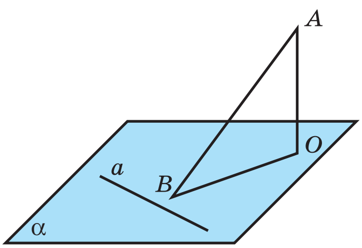
Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого её основания, называется **высотой призмы**.

Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром.

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведённой из той же точки к той же плоскости.



а)



б)

Рис. 84

Доказательство. Пусть AB — наклонная к плоскости α, AO — перпендикуляр, опущенный на эту плоскость (рис. 84, а). Соединим отрезком точки O и B. Треугольник AOB прямоугольный, AB — гипотенуза, AO — катет. Следовательно, $AO < AB$. ■

Теорема. (О трёх перпендикулярах.) Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Доказательство. Пусть прямая a плоскости α перпендикулярна проекции OB наклонной AB (рис. 84, б). Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым — OB и AO. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости AOB, и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB. ■

Упражнения

1. Докажите теорему, обратную теореме о трёх перпендикулярах: «Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость».

2. Останется ли справедливой теорема о трёх перпендикулярах, если в её формулировке слова «лежащая в плоскости» заменить словами «параллельная плоскости»?

3. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA, SB, SC и SD укажите наименьший и наибольший.

4. Дано изображение правильной пирамиды $SABC$. Постройте изображение её высоты.

5. В данном изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите перпендикуляр из вершины A_1 на плоскость ABC_1.

6. В данном изображении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите перпендикуляр на плоскость ACB_1 из вершины: а) D_1; б) C_1.

7. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите ортогональную проекцию отрезка AC, если $AC = 37$ см, $AB = 35$ см.

8. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60°$.

9. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AB, если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

10. Отрезки двух наклонных, проведённых из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

11. Отрезок BC длиной 12 см является ортогональной проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC, и $AD : DC = 2 : 3$. Найдите отрезок AD и его проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.

12. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

13. Сторона ромба равна a, острый угол $60°$. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Ортогональная проекция другой стороны на эту плоскость равна b. Найдите ортогональные проекции диагоналей ромба.

14. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, используя теорему о трёх перпендикулярах, докажите перпендикулярность прямых: а) AB_1 и BD_1; б) AC_1 и BD; в) AD_1 и CA_1.

15. Докажите, что в правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру.

16. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, используя теорему о трёх перпендикулярах, докажите перпендикулярность прямых: а) AC_1 и BE; б) AD_1 и CE; в) AB_1 и BE_1.

17. Докажите, что равные наклонные, проведённые из одной точки к плоскости, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость.

18. Докажите, что если наклонные, проведённые из одной точки к одной плоскости, имеют равные ортогональные проекции, то равны и сами наклонные.

19. Докажите, что если боковые рёбра пирамиды равны, то её высота проходит через центр окружности, описанной около основания этой пирамиды.

20. Докажите, что если высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания, то боковые рёбра этой пирамиды равны.

21. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от двух данных точек.

22. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от трёх данных точек, не принадлежащих одной прямой.

§ 26. Угол между прямой и плоскостью

Определим понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение. **Углом между наклонной и плоскостью** называется угол между этой наклонной и её ортогональной проекцией на эту плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Теорема. Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.

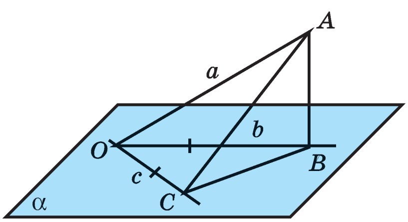


Рис. 85

Доказательство. Пусть a — наклонная к плоскости α, O — их точка пересечения, b — ортогональная проекция наклонной, c — прямая в плоскости α, проходящая через точку O (рис. 85). Требуется доказать, что угол между прямыми a и b меньше угла между прямыми a и c. Для этого на прямой a возьмём точку A, отличную от O, и её ортогональную проекцию B.

На прямой c отложим отрезок OC, равный OB. В треугольниках AOB и AOC сторона AO общая, $OB = OC$ и $AB < AC$. Следовательно, $\angle AOB < \angle AOC$. ■

Углом между отрезком и плоскостью будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

Упражнения

○ **1.** Даны две параллельные наклонные, проведённые к одной и той же плоскости. Что можно сказать о величине углов, которые они образуют с плоскостью?

○ **2.** Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли эти прямые параллельны?

○ **3.** Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены эти плоскости относительно друг друга?

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между: а) прямой AA_1 и плоскостью BCD_1; б) прямой AB_1 и плоскостью BCC_1; в) прямой AA_1 и плоскостью BDC_1; г) прямой AB_1 и плоскостью ABC_1; д) прямой AB_1 и плоскостью BDD_1; е) прямой AC_1 и плоскостью ABC; ж) прямой AC_1 и плоскостью BDD_1; з) прямой AC_1 и плоскостью BDA_1.

5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания этой пирамиды.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между: а) прямой AB_1 и плоскостью ABC; б) прямой AB и плоскостью BCC_1; в) прямой AA_1 и плоскостью ABC_1; г) прямой AB и плоскостью A_1BC_1; д) прямой AB_1 и плоскостью BCC_1; е) прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между: а) прямой AB_1 и плоскостью ABC; б) прямой AC_1 и плоскостью ABC; в) прямой AD_1 и плоскостью ABC; г) прямой AA_1 и плоскостью ABD_1; д) прямой AB_1 и плоскостью ABD_1; е) прямой AA_1 и плоскостью ABC_1; ж) прямой AB_1 и плоскостью ABC_1; з) прямой AA_1 и плоскостью ACD_1; и) прямой BC_1 и плоскостью BDE_1; к) прямой AA_1 и плоскостью ACE_1; л) прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.

8. Докажите, что равные наклонные, проведённые к плоскости из точки, не принадлежащей плоскости, образуют с ней равные углы.

9. Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

10. Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в $60°$? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?

11. Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

12. Будут ли в пирамиде боковые рёбра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

13. Дан треугольник ABC и точка D, которая не принадлежит его плоскости. Наклонные DA, DB, DC образуют равные углы с плоскостью треугольника. Докажите, что точка D ортогонально проектируется на плоскость треугольника в центр описанной около этого треугольника окружности.

14. Дан треугольник ABC и точка K, которая не принадлежит его плоскости. KD, KE, KF — перпендикуляры, опущенные из точки K на стороны треугольника. Эти перпендикуляры образуют равные углы с плоскостью треугольника. Докажите, что точка K ортогонально проектируется в центр вписанной в треугольник окружности.

15. Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости α (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью α). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости α или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости α?

16. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведён отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

17. Какую фигуру на плоскости α образуют основания наклонных, проведённых к плоскости α из точки, не принадлежащей плоскости, и образующих равные углы с плоскостью α?

18. Докажите, что ортогональная проекция наклонной равна произведению этой наклонной на косинус угла, который она образует с плоскостью проектирования.

§ 27. Расстояния между точками, прямыми и плоскостями

Напомним, что в планиметрии расстоянием между прямой и не принадлежащей ей точкой называлась длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называлось расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

Поскольку в пространстве прямая и точка, ей не принадлежащая, а также две параллельные прямые лежат в одной плоскости, то эти определения расстояний между прямой и точкой, а также между двумя параллельными прямыми годятся и для пространства. Определим понятия расстояния между точкой и плоскостью в пространстве и расстояния между параллельными плоскостями.

Определение. **Расстоянием** между точкой и не проходящей через неё плоскостью называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

Из свойств перпендикуляра и наклонной следует, что расстояние между точкой и плоскостью является наименьшим из всевозможных расстояний от этой точки до точек плоскости.

Определение. **Расстоянием** между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от какой-нибудь точки одной плоскости до другой плоскости.

Докажем, что расстояние между двумя параллельными плоскостями не зависит от выбора точки.

Пусть даны параллельные плоскости α и β, точки A_1, A_2 плоскости α и их ортогональные проекции B_1, B_2 на плоскость β (рис. 86). Тогда расстояние от точки A_1 до плоскости β равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до плоскости β равно A_2B_2. Четырёхугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$. ■

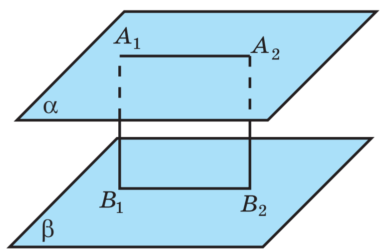


Рис. 86

Определим теперь понятие расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Определение. Отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся прямых и перпендикулярный этим прямым, называется их **общим перпендикуляром**. Длина общего перпендикуляра называется **расстоянием** между скрещивающимися прямыми.

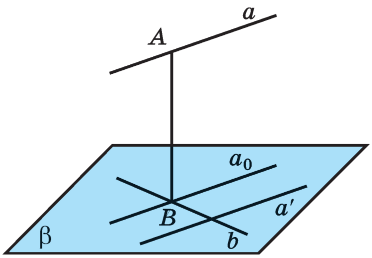


Рис. 87

Теорема. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым существует и единственен.

Доказательство. Пусть a, b — скрещивающиеся прямые. Через одну из них, например b, проведём плоскость β, параллельную прямой a. Это можно сделать, проведя прямую a', параллельную a и пересекающую b (рис. 87). Тогда пересекающиеся прямые a', b будут определять искомую плоскость β. Рассмотрим ортогональную проекцию a_0 прямой a на плоскость β. Она будет параллельна прямой a и пересечёт прямую b в некоторой точке B, которая является ортогональной проекцией некоторой точки A прямой a. Отрезок AB будет искомым. Действительно, он перпендикулярен плоскости β и, следовательно, прямым b и a_0, т. е. он является общим перпендикуляром к прямым a и b.

Докажем единственность. Пусть дан общий перпендикуляр к прямым a и b. Тогда его ортогональная проекция на плоскость β должна совпадать с точкой B, а перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, должен совпадать с отрезком AB. Следовательно, данный общий перпендикуляр будет совпадать с отрезком AB. ■

Упражнения

1. Найдите диагональ куба, все рёбра которого равны 1.
2. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны 2, 3, 6.
3. Основанием прямой четырёхугольной призмы является ромб со стороной 3 и острым углом 60°. Боковое ребро равно 4. Найдите меньшую диагональ призмы.
4. В правильном тетраэдре $ABCD$, рёбра которого равны 1, найдите расстояние между серединами противоположных рёбер AB и CD.
5. Найдите расстояние между противоположными вершинами октаэдра, рёбра которого равны 1.
6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между вершинами: а) A и C; б) A и D; в) A и B_1; г) A и C_1; д) A и D_1.
7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между серединами рёбер: а) AB и CD; б) AB и DE; в) AB и B_1C_1; г) AB и C_1D_1; д) AB и D_1E_1.
8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой: а) BC; б) BC_1; в) B_1C_1; г) BD; д) B_1D_1; е) A_1C; ж) BD_1.

9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой: а) BB_1; б) BC; в) BA_1; г) B_1C_1; д) BC_1.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой: а) BB_1; б) CC_1; в) DD_1; г) DC; д) DE; е) BC; ж) BD; з) BE; и) BF; к) CE; л) CF; м) A_1B_1; н) C_1D_1; о) B_1C_1; п) BD_1; р) BE_1; с) BF_1; т) BC_1; у) CD_1; ф) CE_1; х) CF_1.

11. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости: а) BCC_1; б) CDD_1; в) BB_1D_1; г) BCD_1; д) BDA_1; е) CB_1D_1; ж) BDC_1; з) BA_1C_1.

12. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите высоту пирамиды.

13. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите высоту пирамиды.

14. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а боковые рёбра равны b.

15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости: а) $A_1B_1C_1$; б) BB_1C_1; в) BCA_1; г) CA_1B_1; д) BA_1C_1.

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости: а) $A_1B_1C_1$; б) CDD_1; в) DEE_1; г) BCC_1; д) BDD_1; е) BEE_1; ж) BFF_1; з) CEE_1; и) CFF_1; к) BA_1E_1; л) DA_1B_1; м) CA_1B_1; н) DC_1F_1.

○ **17.** Чему равно расстояние между плоскостями, содержащими параллельные грани единичного куба?

18. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1.

19. В прямой четырёхугольной призме, в основании которой ромб со стороной a и острым углом φ, найдите расстояние между противоположными боковыми гранями.

20. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между плоскостями: а) ABB_1 и DEE_1; б) ABB_1 и CFF_1; в) ACC_1 и DFF_1; г) ABC_1 и CFE_1.

21. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BB_1; б) AA_1 и CC_1; в) AA_1 и BC; г) AA_1 и CD; д) AA_1 и BC_1; е) AA_1 и CD_1; ж) AA_1 и BD; з) AA_1 и BD_1; и) AB_1 и CD_1; к) AB_1 и BC_1; л) AB_1 и A_1C_1; м) AB_1 и BD_1.

22. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, рёбра которого равны 1.

23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и BC_1; в) AB и A_1C_1; г) AB и CA_1; д) AB_1 и BC_1.

24. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и B_1C_1; б) AA_1 и C_1D_1; в) AA_1 и BC_1; г) AA_1 и CD_1; д) AA_1 и DE_1; е) AA_1 и BD_1; ж) AA_1 и CE_1; з) AA_1 и BE_1; и) AA_1 и CF_1; к) AB_1 и DE_1; л) AB_1 и CF_1; м) AB_1 и BC_1; н) AB_1 и BD_1; о) AB_1 и BE_1.

*__25.__ Докажите, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

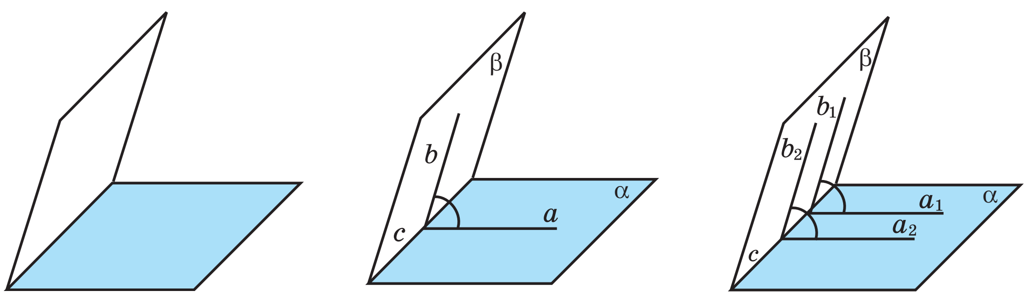
*__26.__ Докажите, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми является наименьшим из всевозможных расстояний между точками на этих прямых.

§ 28. Двугранный угол

Полуплоскость можно считать пространственным аналогом луча на плоскости. Тогда пространственным аналогом угла на плоскости будет фигура, называемая двугранным углом.

Определение. **Двугранным углом** называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 88, а). Полуплоскости называются **гранями** двугранного угла, а их общая граничная прямая — **ребром** двугранного угла.

Пусть α и β — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 88, б). Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии её пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется **линейным углом** данного двугранного угла.



а) б) в)

Рис. 88

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, пусть γ_1, γ_2 — плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости α и β по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 88, в). Лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2 сонаправлены, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ■

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол прямой.

Определение. **Углом между двумя пересекающимися плоскостями** называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Теорема*. Площадь S' ортогональной проекции плоской фигуры Φ на другую плоскость равна произведению площади S этой фигуры на косинус угла φ между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, т. е. имеет место формула $S' = S \cdot \cos \varphi$.

Доказательство разбивается на несколько этапов.

Если Φ — прямоугольник со сторонами a, b, сторона a которого параллельна плоскости проектирования, то проекцией является прямоугольник со сторонами a и $b \cos \varphi$ (рис. 89, а). Следовательно, имеет место требуемая формула.

Если Φ — прямоугольный треугольник с катетами a, b, катет a которого параллелен плоскости проектирования, то проекцией является прямоугольный треугольник с катетами a и $b \cos \varphi$ (рис. 89, б). Следовательно, имеет место требуемая формула.

Если Φ — треугольник, одна сторона которого параллельна плоскости проектирования, то его можно разбить или дополнить до двух прямо-

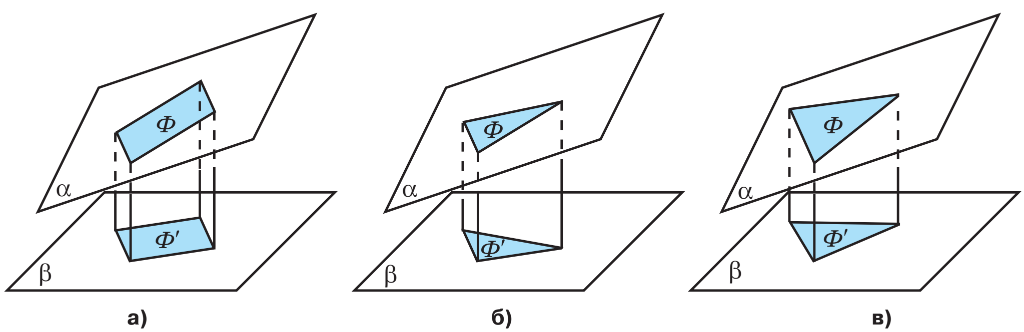
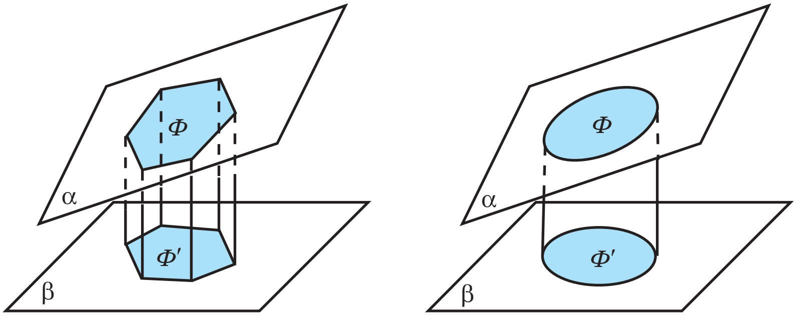


Рис. 89



а) б)

Рис. 90

угольных треугольников и применить к ним полученную ранее формулу (рис. 89, в).

Если Φ — произвольный треугольник, то его можно разбить на треугольники, у которых одна сторона параллельна плоскости проектирования, и применить к ним полученную ранее формулу.

Если Φ — многоугольник, то его можно разбить на треугольники (рис. 90, а) и применить к ним полученную ранее формулу.

Если Φ — произвольная фигура, то её можно приблизить многоугольниками (рис. 90, б) и применить к ним полученную ранее формулу.

Упражнения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями: а) ABC и CDD_1; б) ABC и CDA_1; в) ABC и BDD_1; г) ABC и BDC_1; д) ABC и AB_1D_1; е) ACC_1 и BDD_1; ж) ABC_1 и BB_1D_1; з) BC_1D_1 и BDA_1; и) BDC_1 и BDA_1.

2. Найдите двугранный угол, образованный двумя гранями правильного тетраэдра.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между плоскостями: а) ABC и BB_1C_1; б) ABC и A_1B_1C; в) ABC и ACB_1; г) ACC_1 и BCC_1; д) ACB_1 и A_1BC_1.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде, все рёбра которой равны 1, найдите двугранный угол, образованный: а) соседними боковыми гранями; б) боковой гранью и основанием пирамиды.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между плоскостями: а) ABC и ABB_1; б) ABB_1 и BCC_1; в) ABB_1 и CDD_1; г) ACC_1 и CDD_1; д) ACC_1 и DEE_1; е) ACC_1 и CEE_1; ж) ABC и BCD_1; з) ABC и BCE_1; и) ABC и BDE_1; к) ABC и BDF_1; л) ABC и ADE_1; м) CDE_1 и AFE_1; н) CDF_1 и AFD_1; о) BCD_1 и AFE_1.

6. В правильной шестиугольной пирамиде, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите двугранный угол, образованный:
а) соседними боковыми гранями;
б) боковой гранью и основанием пирамиды.

7. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух пересекающихся плоскостей.

8. Докажите, что если высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями и основанием пирамиды, равны.

9. Найдите площадь сечения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящего через:
а) вершину A и середины рёбер BB_1 и DD_1;
б) вершину C_1 и середины рёбер AB и AD;
в) середины рёбер AB, AD и BB_1.

10. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, проходящего через вершины: а) A, B и C_1; б) A, B и D_1.

§ 29. Перпендикулярность плоскостей

Определим понятие перпендикулярности двух плоскостей.

О п р е д е л е н и е. Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

Следующая теорема даёт достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Т е о р е м а. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β, c — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 91). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведём прямую b, перпендикулярную прямой c. Через прямые a и b проведём плоскость γ. Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпенди-

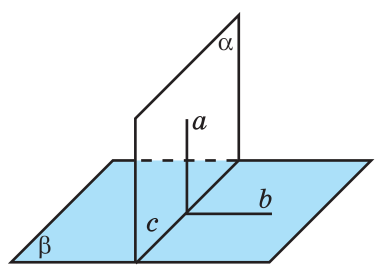


Рис. 91

кулярна двум пересекающимся прямым a и b в этой плоскости. Поскольку прямая a перпендикулярна плоскости β, то угол, образованный a и b, прямой. Он является линейным углом соответствующего двугранного угла. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны. ■

Воспользуемся этим признаком для доказательства того, что боковые грани прямой призмы перпендикулярны её основаниям.

Действительно, как было доказано ранее, боковые рёбра прямой призмы перпендикулярны основаниям. Боковые грани проходят через боковые рёбра и, следовательно, также перпендикулярны основаниям прямой призмы.

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

○ **2.** Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную: а) точку; б) прямую?

3. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность плоскостей: а) ABC и ADD_1; б) ACC_1 и BDD_1.

4. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите перпендикулярность плоскостей: а) ABC и ABB_1; б) ABC и ACC_1; в) ABC и ADD_1; г) ACC_1 и BEE_1; д) ADD_1 и BEE_1.

5. Докажите, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной плоскости. Сколько таких плоскостей?

6. Докажите, что если прямая лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.

7. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна третьей плоскости.

8. Существует ли треугольная пирамида, у которой три грани попарно перпендикулярны?

* **9.** Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

* **10.** Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны основанию?

§ 30*. Центральное проектирование. Изображение пространственных фигур в центральной проекции

Наряду с параллельным проектированием, применяемым в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет так называемое центральное проектирование, используемое в живописи, фотографии и т. д. Восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

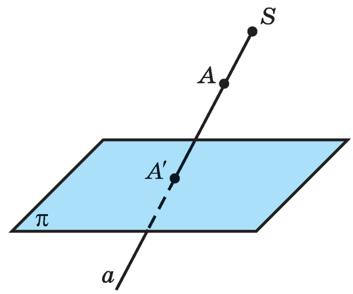


Рис. 92

Пусть π — некоторая плоскость, а S, не принадлежащая ей точка, — **центр проектирования** (рис. 92). Для точки A пространства проведём прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется **центральной проекцией** точки A на плоскость π. Обозначим её A'. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A', называется **центральным проектированием** или **перспективой**.

Заметим, что центральная проекция не определена для точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр проектирования и параллельной плоскости проектирования.

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции её точек на плоскость образуют фигуру Φ', которая называется **центральной проекцией** фигуры Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является **перспективой** фигуры Φ.

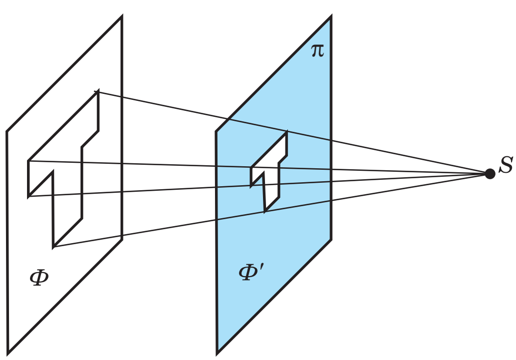


Рис. 93

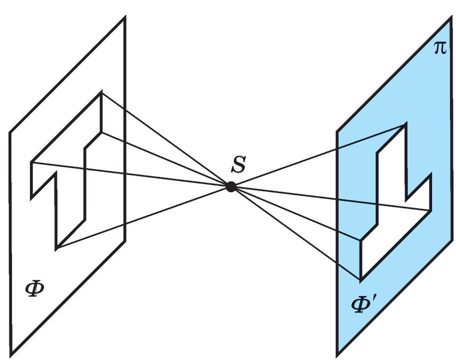


Рис. 94

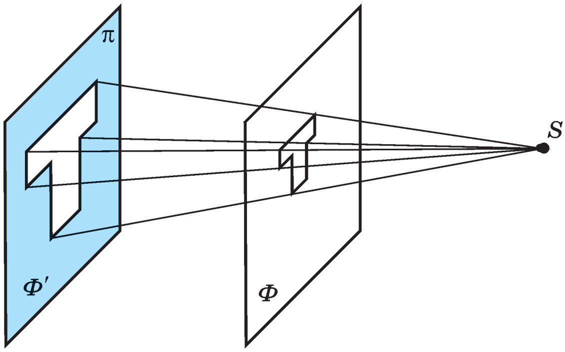


Рис. 95

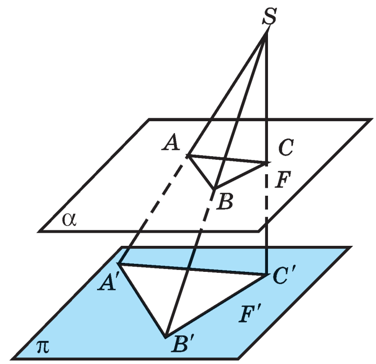


Рис. 96

На рисунке 93 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ', будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование даёт наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

На рисунке 94 показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевёрнутое изображение получается на плёнке фотоаппарата, объектив которого помещён в центр проектирования.

На рисунке 95 показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Примеры таких проекций дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Такие проекции получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

Теорема. Если плоская фигура F расположена в плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то её центральной проекцией будет фигура F', подобная F, причём коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 96).

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их центральные проекции. Через центр S проведём прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно. Для точек A и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$.

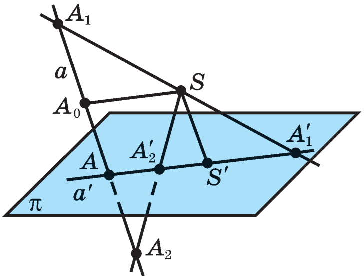


Рис. 97

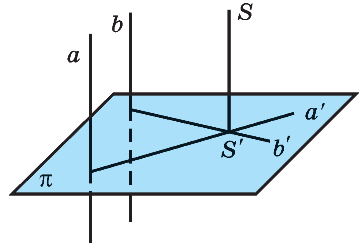


Рис. 98

Таким образом, определённое преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны. ■

Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая. Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдём проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и точку S проведём плоскость α и линию её пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 97). В плоскости α через точку S проведём прямую, параллельную a, и точку её пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что точкам прямой a, за исключением точки A_0, для которой прямая A_0S параллельна плоскости π, соответствуют точки прямой a', за исключением точки S'. Таким образом, прямая a' без точки S' и является искомой проекцией прямой a на плоскость π.

Выясним, в какие фигуры при центральном проектировании переходят параллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся прямые.

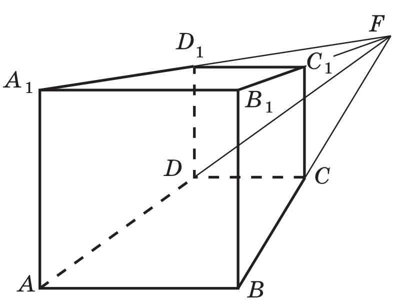


Рис. 99

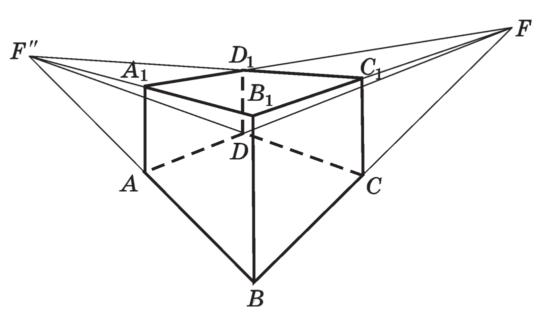


Рис. 100

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 98). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b' за исключением их общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. п.

Приведём примеры изображения простейших пространственных фигур в центральной проекции.

На рисунке 99 изображён куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

На рисунке 100 изображён куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

Исторические сведения

Центральное проектирование, или перспектива, возникла как наука ещё в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах Эсхила (525—456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О геометрии» известного мыслителя и учёного Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых «Начал», он написал много других сочинений. В том числе в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того, как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу. Поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основанием её служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввёл также постулат о том, что кажущиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, ум. ок. 25 г. до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены учёным в труде «Об архитектуре», состоящем из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. При этом теоретиком перспективы считается итальянский архитектор Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотившими её достижения в своих полотнах, — великие художники Леонардо да Винчи (1452—1519), Альбрехт Дюрер (1471—1528) и многие другие.

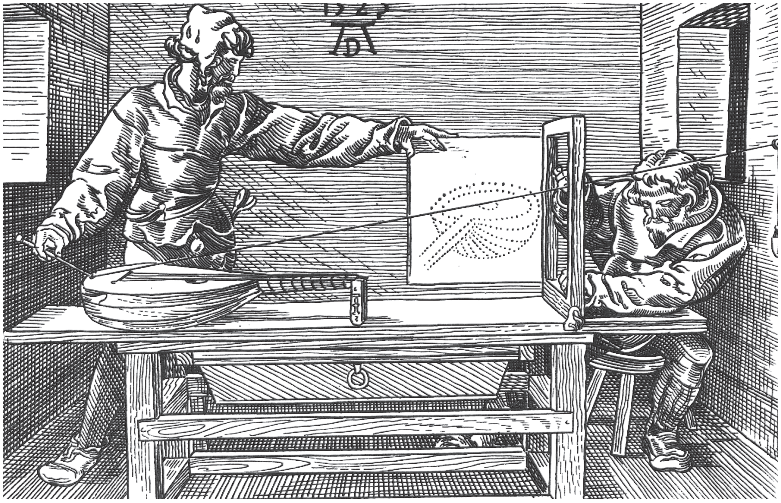


Рис. 101

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, и некоторые из них он изобразил на своих гравюрах. Например, на рисунке 101 изображена гравюра, на которой показано, что для получения перспективного изображения предмета между глазом наблюдателя и предметом помещается рамка, разделённая на небольшие квадраты сеткой. С помощью натянутой нити сначала копируются контуры модели, а затем полученное изображение переносится на бумагу.

Леонардо да Винчи в своём произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части.

1. Линейная перспектива, которая изучает законы построения уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.

2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.

3. Перспектива чёткости очертания формы предмета, в которой анализируется изменение степени отчётливости границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают французского учёного-геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 году, явилась первым систематизированным изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Русские художники XVII—XIX вв. хорошо владели теорией перспективы и применяли её в своих картинах. Крупнейшим представителем русской академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был А. П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного изучения теории перспективы и применения её законов в академическом рисунке.

Более 20 лет вёл поиск способа овладения видением натуры на основе законов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов (1780—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необходимо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рассматривал как метод изображения реальных предметов в конкретной обстановке.

Большое значение придавал изучению перспективы замечательный русский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим ученикам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите её в работу, в рисование. Никогда не отделяйте её от рисования, как это делают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами перспективы — напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спутником вашей работы и стражем верности».

Упражнения

○ **1.** Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? Для каких точек она не существует?

2. Найдите геометрическое место точек в пространстве, для которых не существует центральных проекций на плоскость π с центром проектирования S.

○ **3.** Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые перейти в пересекающиеся?

○ **4.** В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?

○ **5.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования?

○ **6.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если центр проектирования находится между фигурой и плоскостью проектирования? Где используется такое изображение?

○ **7.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если она расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования? Где используется такое изображение?

○ **8.** Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, которая расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования?

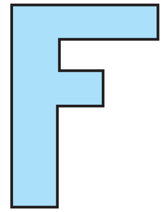


Рис. 102

9. Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 93, 94, 95, для центральных проекций фигуры, изображённой на рисунке 102.

10. Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования (рис. 97). Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная выше плоскости проектирования. Куда переходит часть этой прямой, расположенная ниже плоскости проектирования?

11. Постройте центральную проекцию куба, аналогичную изображённой на рисунке 99, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

12. Постройте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

13. Постройте центральную проекцию правильной четырёхугольной пирамиды на плоскость, не параллельную её основанию.

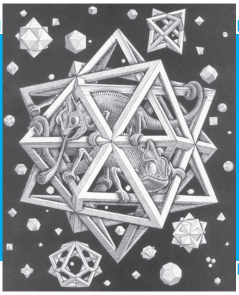
14. В пирамиде с высотой 3 м на расстоянии 2 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите коэффициент подобия сечения и основания пирамиды.

15. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через точки M, N и K, принадлежащие соответственно граням ADB, BDC и ABC.

16. Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и N граней ABD и BDC соответственно и параллельной ребру AC.

Глава IV

МНОГОГРАННИКИ



§ 31. Многогранные углы

По аналогии с понятием многоугольника на плоскости определим понятия многогранной поверхности и многогранного угла в пространстве.

Определение. **Многогранной поверхностью** будем называть поверхность, образованную конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S, в которых соседние углы не имеют общих точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины (рис. 103).

Определение. Фигура, образованная многогранной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется **многогранным углом**. Общая вершина S называется **вершиной** многогранного угла. Лучи SA_1, ..., SA_n называются **рёбрами** многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 — **гранями** многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SA_1...A_n$, указывающими вершину и точки на его рёбрах.

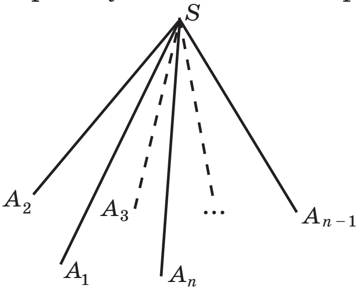


Рис. 103

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трёхгранными (рис. 104), четырёхгранными (рис. 105), пятигранными (рис. 106) и т. д.

Для плоских углов трёхгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

Теорема. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

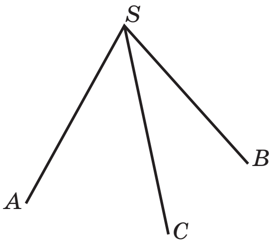


Рис. 104

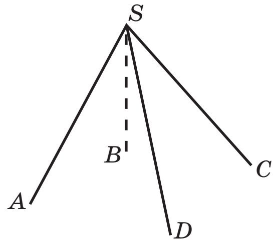


Рис. 105

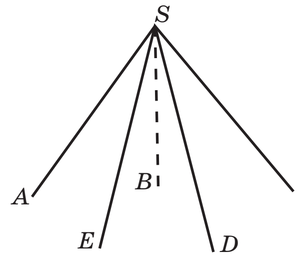


Рис. 106

Доказательство. Пусть в трёхгранном угле $SABC$ наибольший из плоских углов есть угол ASC (рис. 107). Тогда выполняются неравенства

$$\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC;$$
$$\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB.$$

Таким образом, остаётся доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный углу ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними), и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол, и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. ■

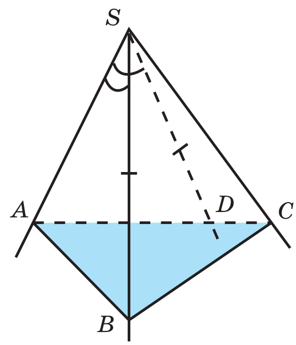


Рис. 107

Среди плоских и пространственных фигур выделяют так называемые **выпуклые фигуры**. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок. На рисунке 108 приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.

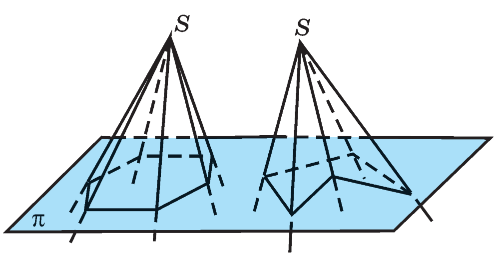


Рис. 108

Определение. Многогранный угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Теорема. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

Доказательство. Рассмотрим многогранный угол $SA_1...A_n$ (рис. 109) и применим теорему о сумме плоских углов к трёхгранным углам с вершинами в точках A_1, ..., A_n. Получим неравенства $\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3$, ..., $\angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1S + \angle SA_1A_2$. Сложим почленно эти неравенства. В левой части получим сумму углов n-угольника $A_1...A_n$, которая равна $180°(n - 2)$, а в правой части — сумму углов n треугольников A_1A_2S, ..., A_nA_1S, кроме углов при вершине S. Обозначим сумму этих последних углов буквой Σ.

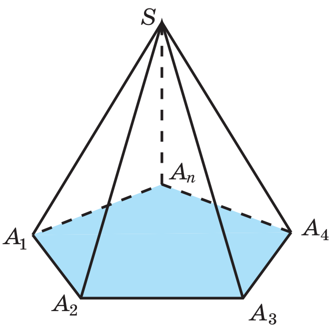


Рис. 109

Тогда $180°(n - 2) < 180°n - \Sigma$, и, следовательно, $\Sigma < 180° \cdot 2 = 360°$. ■

Упражнения

1. Может ли быть трёхгранный угол с плоскими углами: а) $30°$, $60°$, $20°$; б) $45°$, $45°$, $90°$; в) $30°$, $45°$, $60°$?
2. Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трёхгранные углы; б) четырёхгранные углы; в) пятигранные углы.
3. Два плоских угла трёхгранного угла равны $70°$ и $80°$. В каких границах находится третий плоский угол?
4. Докажите, что всякий плоский угол трёхгранного угла больше разности двух других его плоских углов.
5. Докажите, что если в трёхгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы прямые.
6. Плоские углы трёхгранного угла равны $45°$, $45°$ и $60°$. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в $45°$.
7. В трёхгранном угле два плоских угла равны по $45°$; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.
8. Плоские углы трёхгранного угла равны $60°$, $60°$ и $90°$. На его рёбрах от вершины отложены равные отрезки OA, OB, OC. Найди-

те двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью ABC.

9. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60°. На одном из его рёбер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

*10. Найдите геометрическое место внутренних точек трёхгранного угла, равноудалённых от его граней.

*11. Найдите геометрическое место внутренних точек трёхгранного угла, равноудалённых от его рёбер.

*12. Докажите, что три плоскости, проходящие через биссектрисы граней трёхгранного угла и перпендикулярные этим граням, пересекаются по одной прямой.

*13. Докажите, что три плоскости, проходящие через рёбра трёхгранного угла и через биссектрисы его противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

*14. Докажите, что любой трёхгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

° 15. На рисунке 110 укажите выпуклые плоские фигуры.

° 16. Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

° 17. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

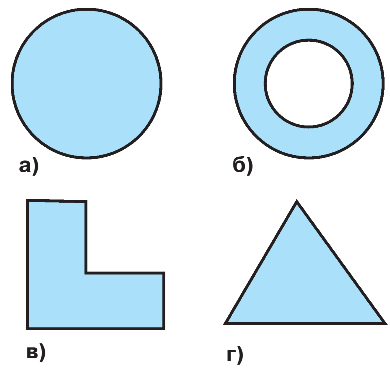


Рис. 110

18. Приведите пример многогранного угла, сумма плоских углов которого больше 360°.

19. Существует ли выпуклый многогранный угол, имеющий плоские углы: а) 80°, 130°, 70°, 100°; б) 10°, 20°, 80°, 160°?

§ 32. Выпуклые многогранники

О п р е д е л е н и е. Многогранник называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

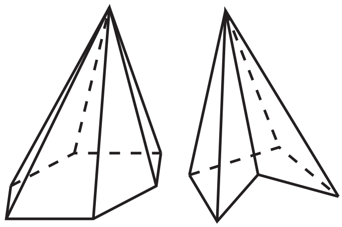


Рис. 111

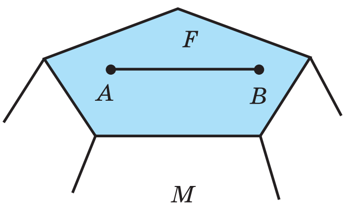


Рис. 112

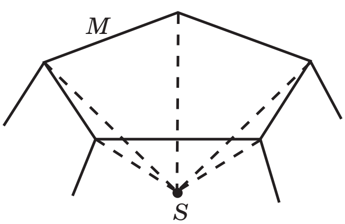


Рис. 113

Все многогранники, которые мы до сих пор изучали, были выпуклыми многогранниками (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.).

На рисунке 111 а, б показаны выпуклый и невыпуклый многогранники.

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть F — какая-нибудь грань многогранника M и точки A, B принадлежат грани F (рис. 112). Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник. ■

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

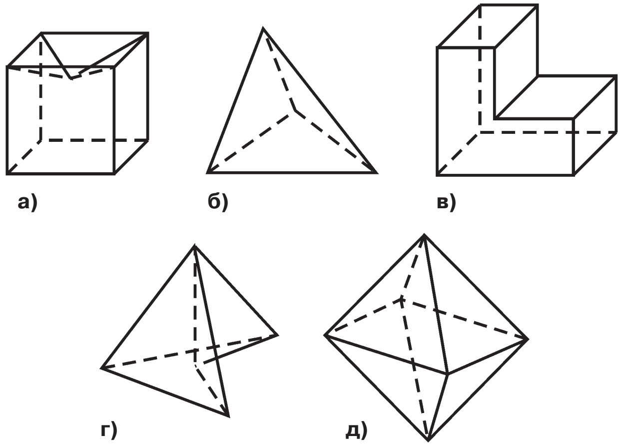
Действительно, пусть M — выпуклый многогранник. Возьмём какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками (рис. 113). Заметим, что в силу выпуклости многогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M. ■

Упражнения

1. На рисунке 114 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

2. Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

3. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.



а) б) в) г) д)

Рис. 114

4. Докажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.
5. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда её основание является выпуклым многоугольником.
6. Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда её основаниями являются выпуклые многоугольники.
7. Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой. Верно ли, что пересечением выпуклых многогранников является выпуклый многогранник?
8. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

* 9. Как связано число рёбер выпуклого многогранника с числом его плоских углов?

*10. Может ли в выпуклом многограннике быть 21 плоский угол?

*11. Докажите, что для числа вершин В, числа рёбер Р и числа граней Г многогранника выполняются неравенства 2Р ⩾ 3В, 2Р ⩾ 3Г.

*12. Докажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

*13. Может ли выпуклая наклонная призма иметь среди боковых граней: а) 2 прямоугольника; б) 3 прямоугольника?

*14. Может ли выпуклая пирамида иметь: а) 2 боковые грани; б) 3 боковые грани, перпендикулярные её основанию?

§ 33*. Теорема Эйлера

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число рёбер, Г — число граней многогранника.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырёхугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырёхугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2, \qquad (*)$$

где В — число вершин, Р — число рёбер и Г — число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку (рис. 115, а), содержащую Г′ = Г − 1 многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р рёбер.

Если для этой сетки выполняется соотношение

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г}' = 1, \qquad (**)$$

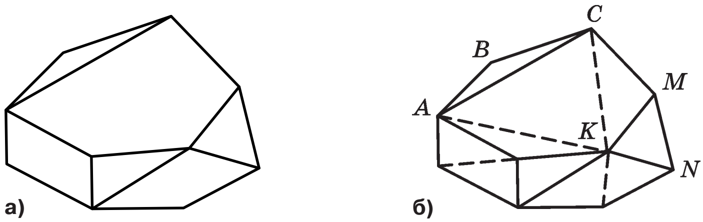


Рис. 115

то для исходного многогранника будет справедливо требуемое соотношение (*).

Покажем, что соотношение (**) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали в сетке будет В вершин, Р + 1 рёбер и Г′ + 1 граней, и, следовательно, В − (Р + 1) + (Г′ + 1)= В − Р + Г′. Пользуясь этим свойством, проведём в сетке диагонали, разбивающие входящие в неё многоугольники на треугольники (рис. 115, б), и для полученной сетки покажем выполнимость соотношения (**). Для этого будем последовательно убирать внешние рёбра сетки, уменьшая в ней количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

В обоих случаях соотношение (**) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из В − 1 вершин, Р − 2 рёбер и Г′ − 1 граней, (В − 1) − (Р − 2) + (Г′ − 1) = В − Р + Г′.

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношения (**). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придём к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки В = 3, Р = 3, Г′ = 1, и, следовательно, В − Р + Г′ = 1. Значит, соотношение (**) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (*). ■

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой ***топологии*** — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера В − Р + Г = 2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом рёбра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, разделённый на более мелкие многоугольники, для

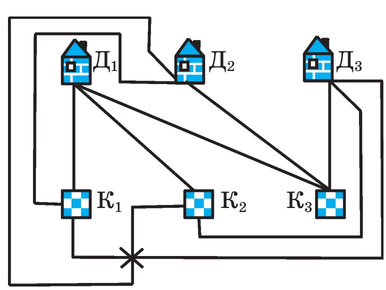


Рис. 116

которых справедливо соотношение В − Р + Г′ = 1, где В — число вершин, Р — рёбер и Г′ — граней (многоугольников). Рёбра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу о трёх домиках и трёх колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы — точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 116). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять криволинейных рёбер, которые попарно не пересекаются.

Эти рёбра образуют на плоскости криволинейный многоугольник, разделённый на более мелкие многоугольники — грани. Поэтому для числа вершин, рёбер и граней должно выполняться соотношение Эйлера В − Р + Г′ = 1. Добавим к рассматриваемым граням ещё одну — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В − Р + Г = 2, причём В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество рёбер должно быть не меньше (5 · 4) : 2 = 10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Исторические сведения

Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков мира. Его работы оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров учёных-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие учёного. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причём последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжёлый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчёты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский учёный П. С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

Упражнения

○ **1.** Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

○ **2.** Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 рёбер; б) 15 рёбер?

○ **3.** Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

○ **4.** Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно: а) 12; б) 15?

5. Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью рёбрами.

6. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней и в каждой из них по 13 рёбер?

7. Гранями выпуклого многогранника являются только четырёхугольники. Сколько у него вершин и граней, если число рёбер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

8. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

* **9.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходятся три ребра.

* **10.** Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 рёбер и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

* **11.** Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

* **12.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, у которой менее шести рёбер.

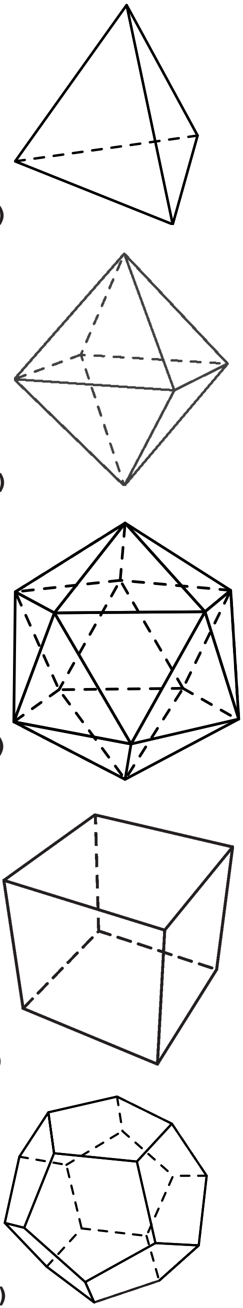
* **13.** Докажите, что для числа вершин В и числа граней Г выпуклого многогранника выполняются неравенства $В + 4 \leqslant 2Г \leqslant 4В - 8$.

* **14.** Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранника равна $360°(n - 2)$, где n — число его вершин.

§ 34. Правильные многогранники

С правильными многогранниками вы познакомились в начале изучения стереометрии. Теперь дадим их определение.

Определение. Выпуклый многогранник называется **правильным**, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.



а) б) в) г) д)

Рис. 117

Выясним, какие правильные многоугольники могут сходиться в вершинах правильного многогранника и сколько их. Для этого воспользуемся тем, что сумма плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°.

Наиболее простым правильным многогранником является треугольная пирамида, грани которой — правильные треугольники (рис. 117, а). В каждой её вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также **тетраэдром**, что в переводе с греческого языка означает «четырёхгранник». Иногда тетраэдром называют произвольную треугольную пирамиду. Поэтому, когда речь идёт о правильном многограннике, будем говорить — правильный тетраэдр.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходятся четыре грани, изображён на рисунке 117, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется **октаэдром**.

Многогранник, в каждой вершине которого сходятся пять правильных треугольников, изображён на рисунке 117, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется **икосаэдром**.

Заметим, что в вершине выпуклого многогранника может сходиться не более пяти правильных треугольников, так как в противном случае сумма плоских углов при этой вершине будет больше или равна 360°. Поэтому других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то кроме куба (рис. 117, г) других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также **гексаэдром**.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходятся три грани, изображён на рисунке 117, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется **додекаэдром**.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует, и, таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

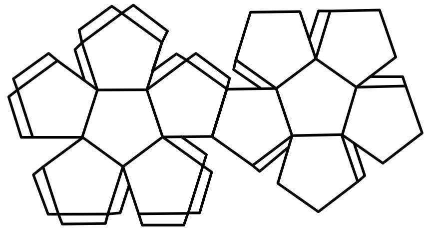


Рис. 118

Как говорилось ранее в параграфе 4, модели правильных многогранников можно изготовить из развёрток или геометрического конструктора. В качестве примера на рисунке 118 изображена развёртка додекаэдра.

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон (429—348 гг. до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также **телами Платона**. Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга знаменитых «Начал» Евклида.

Рис. 119, а

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи, например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был А. Дюрер.

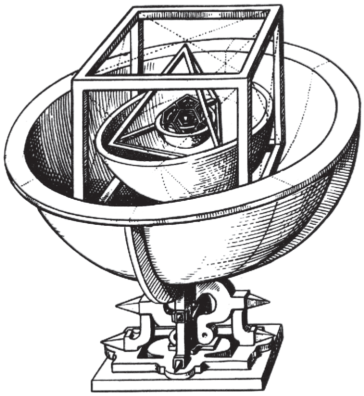


Рис. 119, б

В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 119, а) на переднем плане изображён додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг неё опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 119, б).

Упражнения

○ **1.** Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?

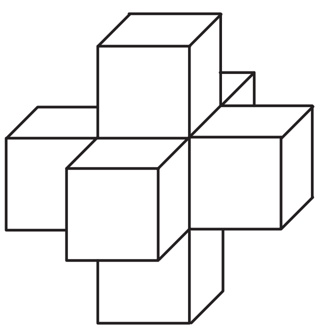


Рис. 120

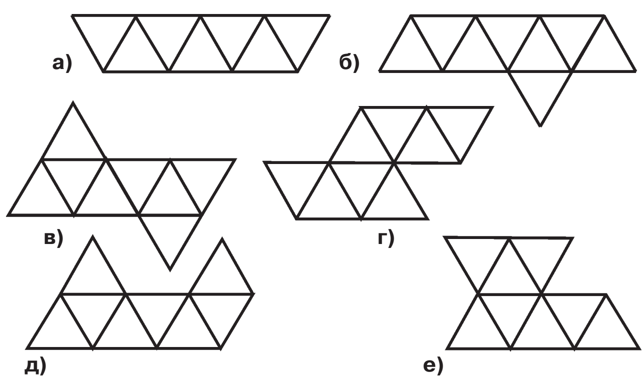


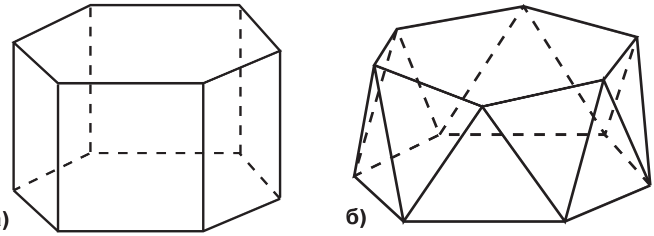
Рис. 121

2. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?
3. Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 120) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин и рёбер?
4. Какие из представленных на рисунке 121 фигур можно считать развёртками октаэдра?
5. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра и центры граней октаэдра — вершинами куба. Такие два многогранника называются **взаимно двойственными**.
6. Докажите, что додекаэдр и икосаэдр также являются взаимно двойственными многогранниками.
7. Какой многогранник является двойственным тетраэдру?
8. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами (ось октаэдра).
9. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?
10. Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?
11. Докажите, что в октаэдре противоположные рёбра параллельны.
12. Изготовьте из развёрток модели правильных многогранников.

§ 35*. Полуправильные многогранники

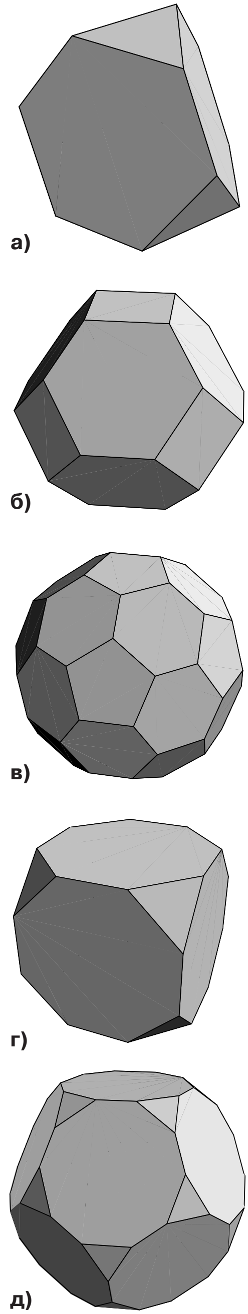
В предыдущем пункте мы рассмотрели правильные многогранники — выпуклые многогранники, у которых гранями являются равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Если допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Определение. **Полуправильным** многогранником называется выпуклый многогранник, у которого гранями являются правильные многоугольники, возможно и с разным числом сторон, и все многогранные углы равны.



а) б)

Рис. 122



а) б) в) г) д)

Рис. 123

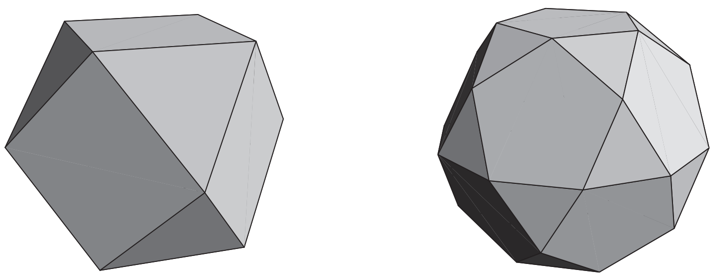
К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все рёбра которых равны. Например, правильная шестиугольная призма на рисунке 122, а имеет своими гранями два правильных шестиугольника — основания призмы и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые **антипризмы** с равными рёбрами. На рисунке 122, б мы видим шестиугольную антипризму, полученную из шестиугольной призмы (рис. 122, а) поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется ещё 14 полуправильных многогранников, 13 из которых впервые открыл и описал Архимед, — это **тела Архимеда**.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим **усечённый тетраэдр**, имеющий восемь граней (рис. 123, а). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно **усечённый октаэдр** (рис. 123, б) и **усечённый икосаэдр** (рис. 123, в). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усечённого икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить **усечённый куб** (рис. 123, г) и **усечённый додекаэдр** (рис. 123, д).

Для того чтобы получить ещё один полуправильный многогранник, проведём в кубе отсекающие плоскости через середины рёбер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется **кубооктаэдром** (рис. 124, а). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

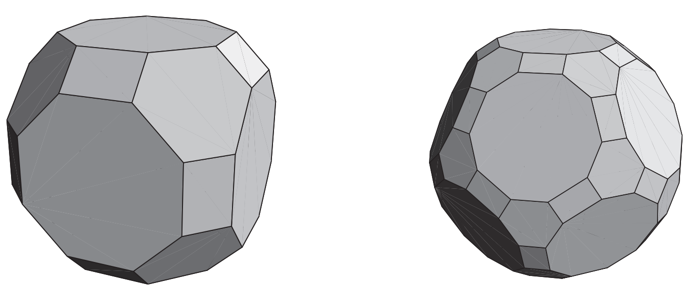


а) б)

Рис. 124

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины рёбер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется **икосододекаэдром** (рис. 124, б). У него двадцать граней — правильные треугольники и двенадцать граней — правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

Хотя к последним двум многогранникам нельзя применить операцию усечения, существуют полуправильные многогранники, которые называются **усечённый кубооктаэдр** (рис. 125, а) и **усечённый икосододекаэдр** (рис. 125, б).

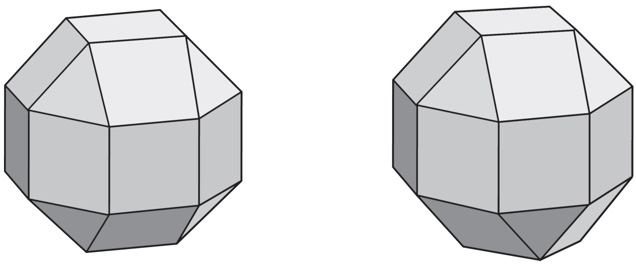


а) б)

Рис. 125

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

На рисунке 126, а мы видим **ромбокубооктаэдр**. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены ещё 12 квадратов. Если повернуть верхнюю восьмиугольную чашу этого многогранника на 45°, то получится новый полуправильный многогранник, который называется **псевдоархимедовым** (рис. 126, б).



а) б)

Рис. 126

На рисунке 127 изображён **ромбоикосододекаэдр**, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и ещё 30 квадратов. На рисунках 128 и 129 представлены соответственно так называемые **плосконосый** (иногда называют **курносый**) **куб** и **плосконосый (курносый) додекаэдр**, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окружённых правильными треугольниками.

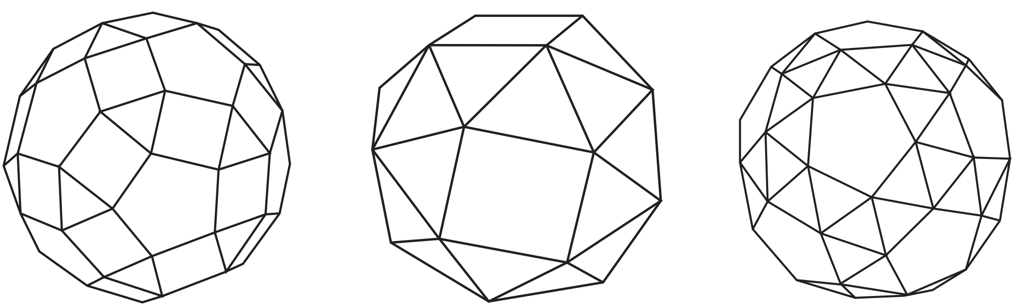


Рис. 127 Рис. 128 Рис. 129

Модели полуправильных многогранников можно изготовить из развёрток или геометрического конструктора. Например, на рисунке 130, а изображена развёртка усечённого тетраэдра. Для большей наглядности шестиугольные грани можно окрасить в один цвет, а треугольные — в другой.

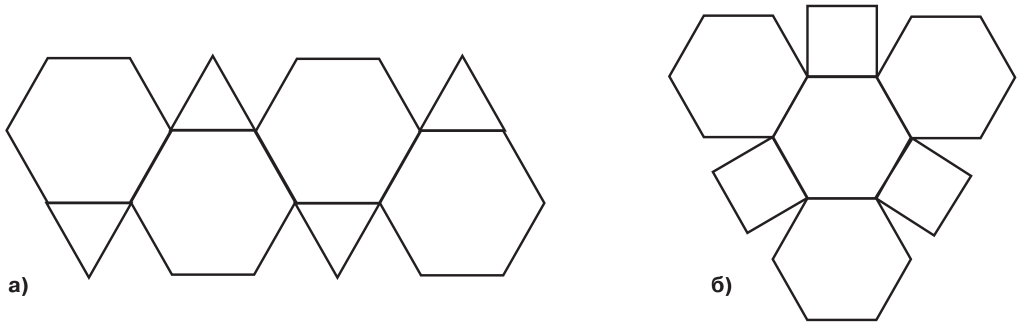


Рис. 130

На рисунке 130, б изображена развёртка «чаши», которая составляет ровно половину модели усечённого октаэдра. Сначала нужно склеить «чашу» и получить половину модели усечённого октаэдра. Затем подклеить остальные части. В последнюю очередь подклеивается какой-нибудь квадрат.

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287—212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноимённые многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число рёбер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого учёного «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь учёного телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным учёным — механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для учёных многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Эта теорема находится в трактате «О плавающих телах» и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений учёного известна катапульта — «архимедов винт» (иногда его называют также «кохлея» — улитка) для поднятия наверх воды — это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле изобразить цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение их объёмов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого учёного.

Упражнения

1. Из каких граней состоят усечённый тетраэдр и усечённый куб?
2. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, рёбер и граней?
3. Докажите, что правильная n-угольная призма ($n = 3, 4, 5...$) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.
4. Найдите высоту шестиугольной антипризмы, если её ребро равно a.
5. Определите, какую часть рёбер правильного тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый тетраэдр был полуправильным многогранником.
6. Та же задача для куба. Возьмите ребро куба равным a.
7. Какую часть рёбер правильного икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый икосаэдр был полуправильным многогранником?
8. Какую часть рёбер правильного додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый додекаэдр был полуправильным многогранником?
9. Определите число вершин, рёбер и граней усечённого октаэдра и усечённого додекаэдра.
10. На рисунке 131 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той

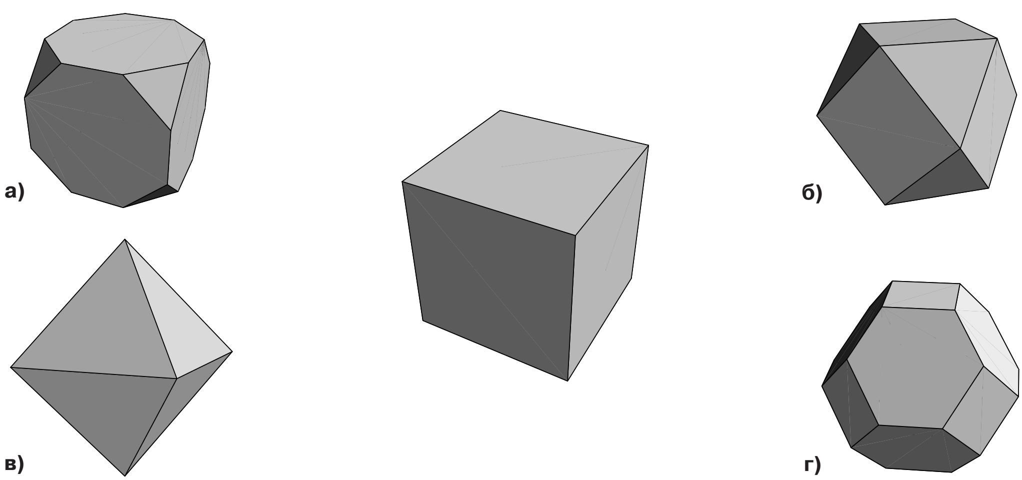


Рис. 131

же операцией. Что это за операция? Как называются все изображённые многогранники? Найдите рёбра многогранников на рисунках 131, а, б, если ребро куба равно a.

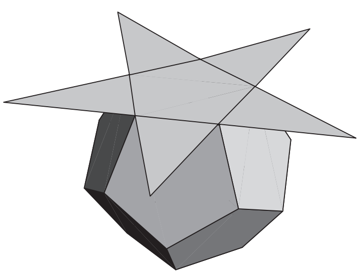
11. Изготовьте модели каких-нибудь полуправильных многогранников.

***12.** Нарисуйте многогранники, двойственные: а) правильной шестиугольной призме с равными рёбрами; б) четырёхугольной антипризме с равными рёбрами; в) кубооктаэдру.

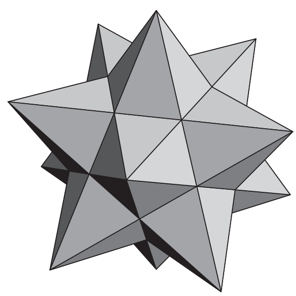
§ 36*. Звёздчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые звёздчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим правильные звёздчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звёздчатые многогранники называются **телами Кеплера — Пуансо**. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или рёбер.

Из тетраэдра, куба и октаэдра звёздчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его рёбер приводит к замене каждой грани звёздчатым правильным пятиугольником (рис. 132, а), и в результате возникает многогранник, который называется **малым звёздчатым додекаэдром** (рис. 132, б).



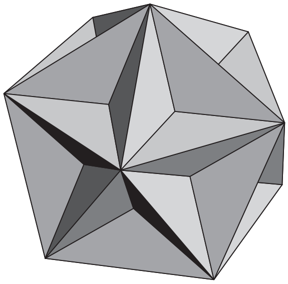
а)



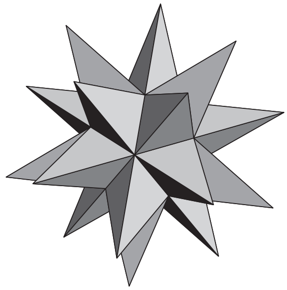
б)

Рис. 132

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый **большой додекаэдр** (рис. 133, а). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звёздчатые пятиугольники, то получается **большой звёздчатый додекаэдр** (рис. 133, б).



а)



б)

Рис. 133

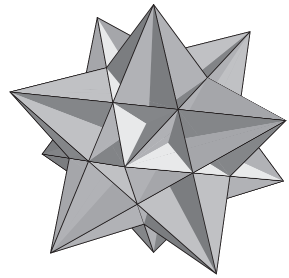


Рис. 134

Икосаэдр имеет одну звёздчатую форму. При продолжении граней икосаэдра получается **большой икосаэдр** (рис. 134).

Таким образом, существуют 4 типа правильных звёздчатых многогранников.

Многие формы звёздчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звёздчатые многогранники (рис. 135). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

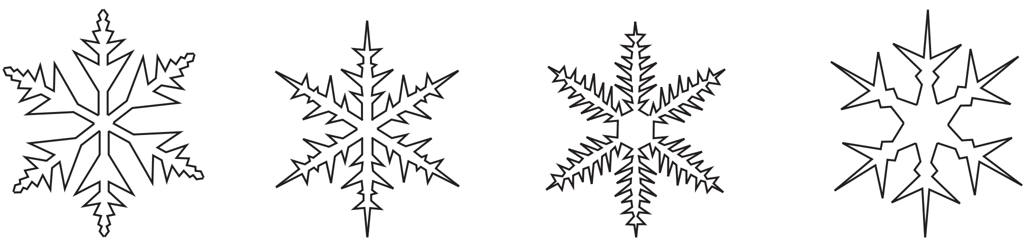
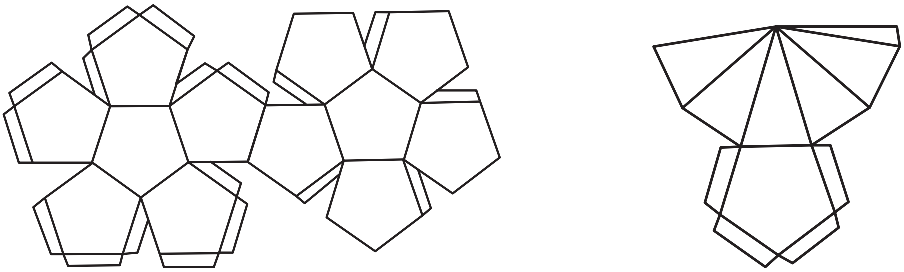


Рис. 135

Рассмотрим способ изготовления модели малого звёздчатого додекаэдра, который, как сказано выше, получается из додекаэдра путём продолжения его рёбер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Сначала нужно изготовить модель додекаэдра из развёртки (рис. 136, а). После того как модель додекаэдра готова, необходимо изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными граням додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра. Развёртка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 136, б.



а) б)

Рис. 136

Упражнения

1. На рисунке 137 изображён многогранник, называемый **звёздчатым октаэдром**, получающийся продолжением граней октаэдра. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им *«stella octangula»* — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звёздчатым?

2. Как можно получить звёздчатый октаэдр из куба?

3. Звёздчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.

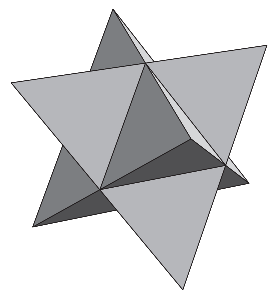


Рис. 137

4. Сколько вершин, рёбер и граней имеет малый звёздчатый додекаэдр?

5. Справедливо ли соотношение Эйлера для звёздчатых многогранников?

6. Какие рёбра должны быть у правильных пятиугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням додекаэдра с ребром a получился малый звёздчатый додекаэдр (рис. 132, б)?

7. Какие рёбра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням икосаэдра с ребром a получился большой звёздчатый додекаэдр (рис. 133, б)?

8. Какие рёбра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при удалении их из граней икосаэдра с ребром a получился большой додекаэдр (рис. 133, а)?

9. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звёздчатых многогранников.

§ 37*. Кристаллы — природные многогранники

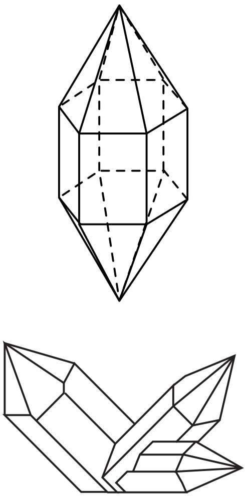


Рис. 138

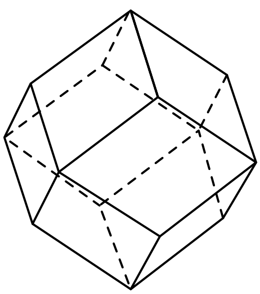


Рис. 139

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Кристаллы поваренной соли имеют форму куба, **кристаллы льда** и **горного хрусталя (кварца)** напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 138).

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде кубооктаэдра.

Кристалл граната имеет форму ромбододекаэдра (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) — двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов (рис. 139).

Для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат — один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на территории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т. е. многогранник-ромбододекаэдр, был известен с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе с древнегреческого языка означало «красная краска». При этом название связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (около двух тысяч лет назад), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неолите Египта и в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н. э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, сплетённых из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например так называемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения камнями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье. Это камень-талисман для людей, родившихся в январе.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжёлые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчёркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, чистоту и возвышенность их чувств. Тот же приём использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П. П. Бажовым в сборнике «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности о месторождениях граната на Урале.

Упражнения

1. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Рёбра ромба возьмите равными 6 см, острый угол приблизительно равен 70°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 140, а). Модель лучше сделать двуцветной так, как показано на рисунке 140, б.

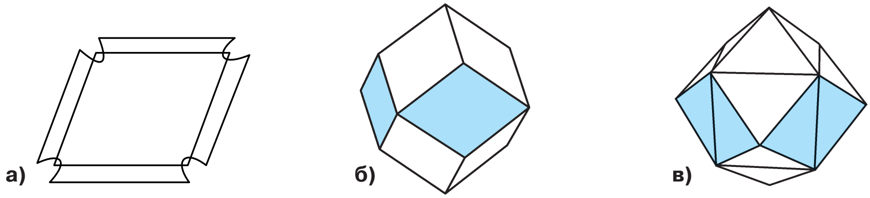


Рис. 140

2. Возьмём два одинаковых куба. Разобьём один из них на шесть одинаковых четырёхугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба (рис. 140, в). Покажите, что образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

3. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

4. Найдите меньшую диагональ ромба со стороной 6 см, являющегося гранью ромбододекаэдра.

5. Ребро куба равно 1. Найдите ребро соответствующего ромбододекаэдра.

6. Используя модель ромбододекаэдра:

а) подсчитайте количество его граней, рёбер и вершин;

б) установите, есть ли пары параллельных граней, и если есть, то сколько;

в) найдите количество трёхгранных и четырёхгранных углов;

г) определите величину двугранного угла ромбододекаэдра;

д) найдите углы между несмежными гранями четырёхгранных углов ромбододекаэдра.

○ **7.** Можно ли равными ромбододекаэдрами заполнить всё пространство, т. е. составить пространственный паркет?

○ **8.** Из каких одноимённых правильных многогранников можно составить пространственный паркет?

○ **9.** Вершинами какого многогранника являются центры граней ромбододекаэдра?

ОТВЕТЫ

§ 2. **1.** 32°. **2.** 108°. **3.** 130°. **4.** 119°. **5.** 61°. **6.** 45°. **7.** 116°. **8.** 36°. **9.** 37°. **10.** 16°. **11.** 24°. **12.** 42°. **13.** 65°. **14.** 21°. **15.** 31°. **16.** 40°. **17.** 56°. **18.** 49°. **19.** 82°. **20.** 105°. **21.** 100°. **22.** 104°. **23.** 35°. **24.** 122°. **25.** 108°. **26.** 60°. **27.** 70°. **28.** 110°. **29.** 40°. **30.** 46°. **31.** 64°. **32.** 118°. **33.** 58°. **34.** 26°. **35.** 62°.

§ 3. **1.** 1. **2.** 16. **3.** 9. **4.** 1,5. **5.** 1. **6.** 9. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 60°. **10.** 12. **11.** 15. **12.** 12. **13.** 15. **14.** 1,5. **15.** 2. **16.** 8. **17.** 45°. **18.** 4. **19.** 24. **20.** 18. **21.** 6. **22.** 8. **23.** 6. **24.** 4. **25.** 3. **26.** 2. **27.** 6. **28.** 2. **29.** 1. **30.** 1. **31.** 3. **32.** $\sqrt{13}$. **33.** $\sqrt{7}$. **34.** –0,6. **35.** $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **36.** 45°. **37.** 0,25. **38.** 30°. **39.** 3. **40.** 8.

§ 4. **1.** 126°. **2.** 90°. **3.** 20. **4.** 20. **5.** 28. **6.** 10. **7.** 3. **8.** 48. **9.** 10. **10.** 10. **11.** 5. **12.** 15. **13.** 69. **14.** 23. **15.** 10. **16.** 3. **17.** 15. **18.** 4. **19.** 20. **20.** 9. **21.** 14. **22.** 0,5. **23.** 12. **24.** 9.

§ 5. **1.** 1. **2.** 30. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 45°. **6.** 1. **7.** 150°. **8.** 1. **9.** 1. **10.** 25. **12.** 6. **12.** 6. **13.** 7. **14.** 82°. **15.** 122°. **16.** 90°. **17.** 24. **18.** 5. **19.** $4(\sqrt{2}+1)$. **20.** 1. **21.** 1. **22.** 1,5. **23.** 22. **24.** 4. **25.** 10. **26.** 2. **27.** 52. **28.** 7. **29.** 14. **30.** 12. **31.** 4. **32.** 1.

§ 6. **1.** 18. **2.** 6. **3.** 18. **4.** 18. **5.** 14. **6.** 48. **7.** 13. **8.** 48. **9.** 8. **10.** В 2 раза. **11.** 30°. **12.** 6. **13.** 8. **14.** 8. **15.** 24. **16.** 3. **17.** 2. **18.** 24. **19.** 6. **20.** 12. **21.** 10. **22.** 20. **23.** 30°. **24.** 6. **25.** 6. **26.** 24. **27.** 3. **28.** 8. **29.** 7. **30.** 15. **31.** 8. **32.** 160. **33.** 30. **34.** 16. **35.** 45. **36.** 160. **37.** 5. **38.** 42. **39.** 30°. **40.** 22. **41.** 30. **42.** 1. **43.** 12. **44.** 135°. **45.** 4.

§ 7. **1.** 0,8. **2.** 0,6. **3.** 1. **4.** –1. **15.** 12. **6.** 9. **7.** –4. **8.** (6, 8). **9.** (6, 2). **10.** 3. **11.** (3, 4) **12.** (8, 2). **13.** (5, 4). **14.** 8. **15.** 2. **16.** 3. **17.** 1,2. **18.** –6. **19.** –0,75. **20.** 10. **21.** 6. **22.** 8. **23.** 5. **24.** 2. **25.** 5. **26.** (4, 3). **27.** 20. **28.** 40. **29.** 32. **30.** 24. **31.** 36. **32.** 32. **33.** 10. **34.** 10. **35.** 10. **36.** 0. **37.** 6. **38.** 8. **39.** 10. **40.** 16. **41.** 12. **42.** 10. **43.** 10. **44.** 10. **45.** 0. **46.** 6. **47.** 3. **48.** 4,5. **49.** (8, 6). **50.** 21. **51.** (2, 2). **52.** 5.

§ 8. **3.** Одна. **4.** Одна, если три данные точки не принадлежат одной прямой. Бесконечно много, если они принадлежат одной прямой. **5.** Бесконечно много. **6.** Если они принадлежат одной прямой. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Совпадают. **10.** а) Да; б) да; в) нет. **11.** а) Нет; б) да. **12.** а) Да; б) нет. **16.** а), б), в) Нет.

§ 9. **1.** Нет. **2.** Нет. **7.** Нет. Одна или три прямые. **8.** 3, 4, 5 или 6. **9.** а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **10.** а) 1; б) 4; в) 10; г) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **11.** а) 1; б) 3; в) 6; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **12.** а) 4; б) 8; в) 15.

§ 10. **2.** Нет. **3.** а) Нет; б) да. **5.** а) Нет; б) да. **7.** 5-угольник. **8.** а) 5-угольная; б), в) 6-угольная. **9.** а) Нет; б) да. **10.** а) Да; б) нет. **12.** 16-угольник. **13.** а) 5-угольная; б) 11-угольная; в) 9-угольная. **14.** а), б) 4; в) $n(n-3)$; г) 0. **15.** 12. **16.** 30. **20.** Да. **21.** Да.

§ 11. **2.** в), д), ж). **3.** а), б), в), г). **4.** а), б), д). **5.** а), в) Да; б), г) нет. **12.** Да. **13.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 4. **15.** $\sqrt{5}$. **16.** $\sqrt{74}$. **17.** 1. **18.** $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. **19.** $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. **20.** $2\sqrt{25\pi^2+9}$.

§ 12. **2.** Нет. **3.** Например, в правильной четырёхугольной. **4.** а) Нет; б) да, 18 пар; в) да, 6 пар; г) да, 15 пар; д) да, 15 пар. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** а) Одна; б) бесконечно много. **9.** Лежат в одной плоскости. **12.** а) 3; б) 6; в) $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 13. **2.** а) Да, 24 пары; б) да, 300 пар; в) да, 300 пар. **3.** Нет. **4.** Бесконечно много, если точка не принадлежит прямой. **5.** Нет. **6.** Прямые пересекаются или скрещиваются. **7.** Прямая, проходящая через C. **8.** Нет. **9.** Скрещиваются. **10.** Нет. **11.** Скрещиваются. **17.** а) 3; б) 15; в) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 14. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** Параллельна им. **8.** Да. **16.** Параллельны. **21.** Нет.

§ 15. **3.** а) Нет; б) да, 3 пары; в) да, 4 пары; г) да, 10 пар; д) да, 6 пар. **4.** а), б) Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Нет. **15.** Не всегда.

§ 16. **4.** Да, если A совпадает с B. **5.** Да. **6.** Если векторы одинаково направлены. **7.** а) Да; б) нет. **8.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **11.** $\overrightarrow{B_1D}$. **19.** Центр куба.

§ 17. **3.** Да. **4.** Да. **9.** $\frac{1}{3}$.

§ 18. **1.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **2.** а) Да; б) нет. **3.** а) Нет; б), в), г), д) да. **4.** а), б) Да; в), г) нет. **5.** а), б), в) Нет. **9.** а), б) Бесконечно много. **13.** Нет. **14.** Нет. **15.** Да.

§ 19. **1.** Если прямая параллельна направлению проектирования. **2.** Три, или две, или одна. **3.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **4.** Если они лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования, но не параллельны ему. **5.** Если они параллельны направлению проектирования. **6.** Пересекающиеся прямые, параллельные прямые, прямая и точка. **7.** Прямая не параллельна направлению проектирования, и через эту прямую и данную точку проходит плоскость, параллельная направлению проектирования. **8.** Пересекаются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **9.** Скрещиваются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Если она параллельна направлению проектирования. **15.** Нет. **16.** Нет. **17.** Да. **18.** Нет. **20.** $\frac{na+mb}{n+m}$.

§ 20. **1.** Треугольник или отрезок. **2.** а), б), в) Да. **4.** Параллелограммом или отрезком. **5.** а), б), в) Да; г) нет. **6.** Нет. **7.** Параллелограммов. **8.** Параллелограммом. **9.** Трапецию или отрезок. **11.** а) Да; б), в) нет. **13.** $\frac{a+b+c}{3}$.

§ 21. **4.** Да. **5.** Нет. **7.** Нет. **11.** а), б) Четырёхугольная пирамида; в) тетраэдр; г), д) шестиугольная пирамида; е) параллелепипед. **12.** Нет.

§ 22. **1.** Многоугольником. **2.** а), б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **3.** $2n$; $3n$; $n+2$. **4.** а), б), в) Да; г), д) нет. **5.** а), б), в), г), д) Да; е) нет. **6.** а) Да; б) нет. **7.** а), б) Да; в) нет. **17.** Нет.

§ 23. **1.** Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** Нет. **7.** а) 90°; б) 90°; в) 45°; г) 60°; д) 90°. **8.** $\cos\varphi = 0{,}8$. **9.** $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. **10.** а) 90°; б) 45°; в) 60°; г) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$; д) $\cos\varphi = \frac{1}{4}$. **11.** а) 60°; б) 90°. **12.** а) 90°; б) 45°; в) $\cos\varphi = \frac{3}{4}$; г) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$; д) $\cos\varphi = \frac{1}{4}$; е) $\cos\varphi = \frac{3}{4}$.

§ 24. **1.** Нет. **2.** Да. **3.** Плоскость, перпендикулярная данной прямой. **4.** Перпендикулярна. **5.** а) Нет; б) да. **6.** Да. **7.** Прямые перпендикулярны. **8.** Прямоугольный. **18.** а) Да; б), в) нет. **19.** а), б), в) Да. **20.** а), б) Да; в) нет. **22.** а) Квадратом; б) прямоугольником; в) правильным шестиугольником.

§ 25. **2.** Да. **3.** SD — наименьший; SB — наибольший. **7.** 12 см. **8.** 12 см. **9.** 2 см. **10.** 9 см. **11.** 6 см; 4,8 см. **12.** $3\sqrt{41}$ см. **13.** b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$. **21.** Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку. **22.** Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника с вершинами в данных точках и перпендикулярная плоскости этого треугольника.

§ 26. **1.** Равны. **2.** Не обязательно. **3.** Параллельны или пересекаются. **4.** а) 45°; б) 45°; в) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 30°; д) 30°; е) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$; з) 90°. **5.** $\cos\varphi = \frac{b\sqrt{3}}{3a}$. **6.** а) 45°; б) 60°; в) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$; д) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$; е) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}$. **7.** а) 45°; б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 30°; г) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$; д) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$; е) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{42}}{14}$; з) 45°; и) $\sin\varphi = 0{,}75$; к) $\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5$; л) $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{26}}{13}$. **9.** 60°. **10.** Нет, 45°. **11.** 30°. **12.** Да, верно. **15.** Угол наклона высоты. **16.** 30°. **17.** Окружность.

§ 27. **1.** $\sqrt{3}$. **2.** 7. **3.** 5. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** 2. **7.** $\sqrt{5}$. **8.** а) 1; б) 1; в) $\sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; ж) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **10.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 1; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) 0,5; к) 1,5; л) $\sqrt{3}$; м) 1; н) 2; о) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; п) 1; р) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; с) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; т) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; у) $\sqrt{3}$; ф) $\frac{\sqrt{39}}{4}$; х) $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **11.** а) 1; б) 1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.** $\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}$. **13.** $\sqrt{\frac{a^2 + 2h^2}{2}}$. **14.** $\sqrt{b^2 - a^2}$. **15.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; д) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **16.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 0,5; з) 1,5; и) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; л) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; м) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; н) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **17.** 1. **18.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **19.** $a \cdot \sin\varphi$. **20.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **21.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 1;

г) 1; д) 1; е) 1; ж) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) 1; к) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; л) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **22.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **23.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; д) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **24.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) 1; ж) 1,5; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $\sqrt{3}$; л) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; м) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; н) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; о) $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

§ 28. 1. а) 90°; б) 45°; в) 90°; г) $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{2}$; д) $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{2}$; е) 90°; ж) 60°; з) 90°; и) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **2.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **3.** а) 90°; б) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) 60°; д) $\cos\varphi = \frac{1}{7}$. **4.** а) $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$; б) $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{2}$. **5.** а) 90°; б) 60°; в) 60°; г) 90°; д) 30°; е) 60°; ж) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; з) 30°; и) 45°; к) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2}{3}$; л) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; м) $\cos\varphi = \frac{1}{7}$; н) 60°; о) $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. **6.** а) $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$; б) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **7.** Две биссектральные плоскости. **9.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **10.** а) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$; б) 3.

§ 29. 1. Нет. **2.** а) Бесконечно много; б) бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости, и одну в противном случае. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Да.

§ 30*. 1. Нет. **2.** Плоскость, параллельная плоскости проектирования и проходящая через центр проектирования. **3.** Да. **4.** Если прямые параллельны плоскости проектирования. **5.** Уменьшенное прямое. **6.** Перевёрнутое. **7.** Увеличенное прямое. **8.** Она будет подобна исходной. **14.** $\frac{2}{3}$.

§ 31. 1. а), б) Нет; в) да. **2.** а) Тетраэдр, куб, додекаэдр; б) октаэдр; в) икосаэдр. **3.** $10° < \varphi < 150°$. **6.** 90°. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** $\sqrt{6}$ см. **10.** Луч, вершиной которого является вершина трёхгранного угла, лежащий на линии пересечения биссектральных плоскостей. **11.** Луч, вершиной которого является вершина трёхгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов. **15.** а) и г). **16.** Да. **17.** Нет. **19.** а) Нет; б) нет.

§ 32. 1. б), д) — выпуклые; а), в), г) — невыпуклые. **2.** Нет. **9.** Число плоских углов равно удвоенному числу рёбер. **10.** Нет. **13.** а) Да; б) нет. **14.** а) Да; б) нет.

§ 33*. 1. Четырёхугольные пирамиды, треугольные бипирамиды. **2.** а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10. **4.** а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7. **6.** Нет. **7.** В = 8, Г = 6. **8.** В = 6, Г = 8.

§ 34. 2. Нет. **3.** Нет, 30 квадратов, В = 32, Р = 60. **4.** в). **7.** Тетраэдр. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** Октаэдр. **10.** $\sqrt{2}$ дм.

§ 35*. **1.** 4 треугольника и 4 шестиугольника, 8 треугольников и 6 восьмиугольников. **2.** Усечённый икосаэдр. **4.** $a\sqrt{\sqrt{3}-1}$. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$. **7.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$. **8.** $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ или $\frac{1}{2}$. **9.** В = 24, Р = 36, Г = 14; В = 60, Р = 90, Г = 32. **10.** Операция усечения; а) усечённый куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усечённый октаэдр; а) $\left(\sqrt{2}-1\right)a$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 36*. **1.** Нет. **2.** Вершины звёздчатого октаэдра являются вершинами куба. **3.** Октаэдр. **4.** 12 вершин выпуклых пятигранных углов; 30 рёбер; 12 звёздчатых пятиугольных граней. **5.** Да. **6.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **7.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **8.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

§ 37*. **3.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **4.** $4\sqrt{3}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** а) Г = 12, Р = 24, В = 14; б) да, 6; в) 8 трёхгранных и 6 четырёхгранных углов; г) 120°; д) 90°. **7.** Да. **8.** Только из кубов. **9.** Кубооктаэдра.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
A a	*A a*	а	N n	*N n*	эн
B b	*B b*	бэ	O o	*O o*	о
C c	*C c*	цэ	P p	*P p*	пэ
D d	*D d*	дэ	Q q	*Q q*	ку
E e	*E e*	э	R r	*R r*	эр
F f	*F f*	эф	S s	*S s*	эс
G g	*G g*	жэ	T t	*T t*	тэ
H h	*H h*	аш (ха)	U u	*U u*	у
I i	*I i*	и	V v	*V v*	вэ
J j	*J j*	йот (жи)	W w	*W w*	дубль-вэ
K k	*K k*	ка	X x	*X x*	икс
L l	*L l*	эль	Y y	*Y y*	игрек
M m	*M m*	эм	Z z	*Z z*	зэт

Греческий алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
Α α	$A\ \alpha$	альфа	Ν ν	$N\ \nu$	ню
Β β	$B\ \beta$	бета	Ξ ξ	$\Xi\ \xi$	кси
Γ γ	$\Gamma\ \gamma$	гамма	Ο ο	$O\ o$	омикрон
Δ δ	$\Delta\ \delta$	дельта	Π π	$\Pi\ \pi$	пи
Ε ε	$E\ \varepsilon$	эпсилон	Ρ ρ	$P\ \rho$	ро
Ζ ζ	$Z\ \zeta$	дзета	Σ σ ς	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	сигма
Η η	$H\ \eta$	эта	Τ τ	$T\ \tau$	тау
Θ θ	$\Theta\ \vartheta$	тета	Υ υ	$\Upsilon\ \upsilon$	ипсилон
Ι ι	$I\ \iota$	йота	Φ φ	$\Phi\ \varphi$	фи
Κ ϰ	$K\ \varkappa$	каппа	Χ χ	$X\ \chi$	хи
Λ λ	$\Lambda\ \lambda$	лямбда	Ψ ψ	$\Psi\ \psi$	пси
Μ μ	$M\ \mu$	мю	Ω ω	$\Omega\ \omega$	омега

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна, **Смирнов** Владимир Алексеевич

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа, геометрия
ГЕОМЕТРИЯ
10 класс
УЧЕБНИК
для общеобразовательных организаций
(базовый и углублённый уровни)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский.* Редакторы *С. В. Бахтина, В. В. Черноруцкий*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева, Т. С. Богданова*
Технический редактор *О. Б. Резчикова.* Корректоры *С. О. Никулаев, В. И. Антонов*
Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат 70×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,95. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284.
www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в типографии филиала
АО «ТАТМЕДИА» «ПИК “Идел-Пресс”».
420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.