И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

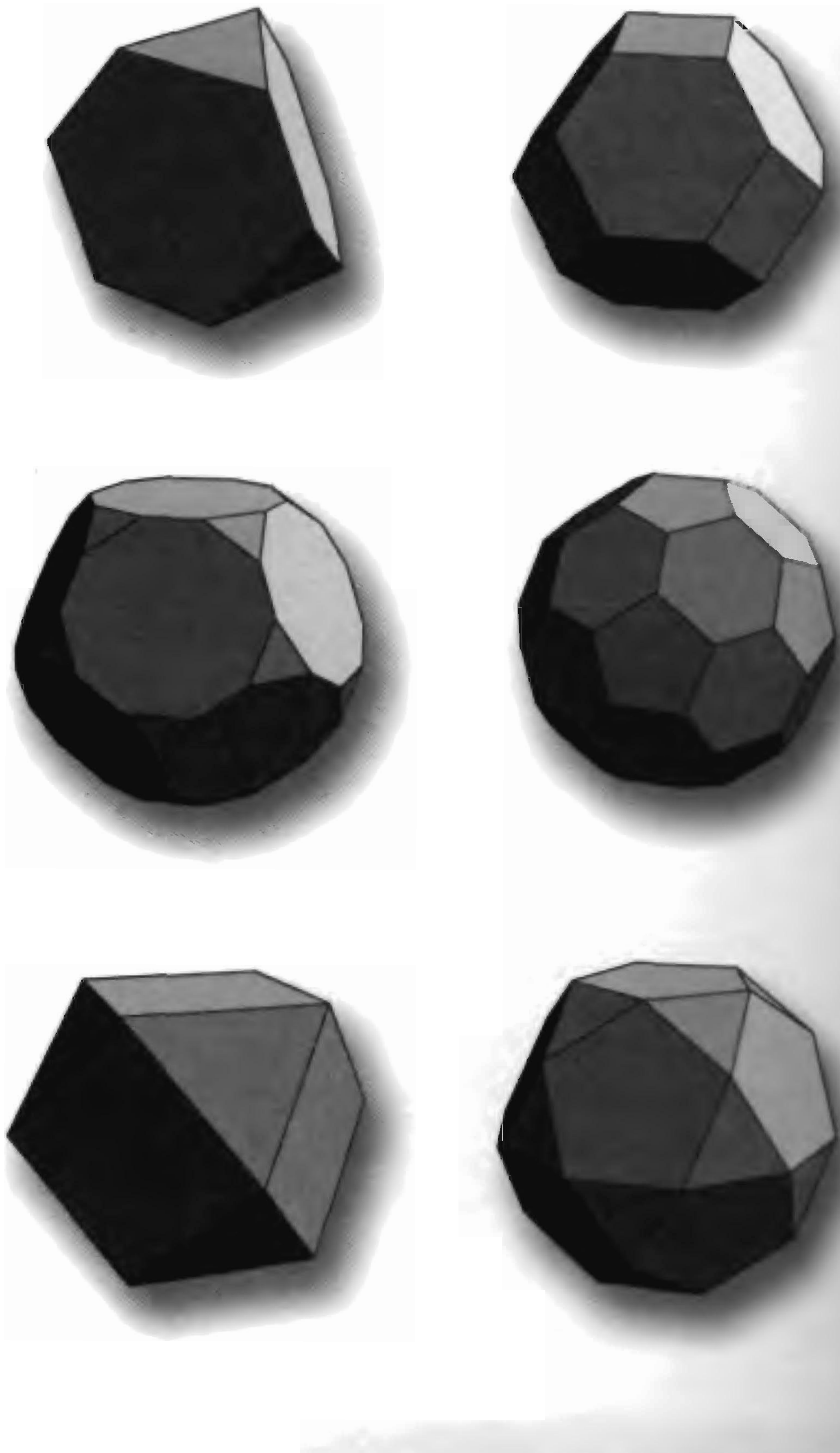
УЧЕБНИК

БАЗОВЫЙ
И ПРОФИЛЬНЫЙ
УРОВНИ

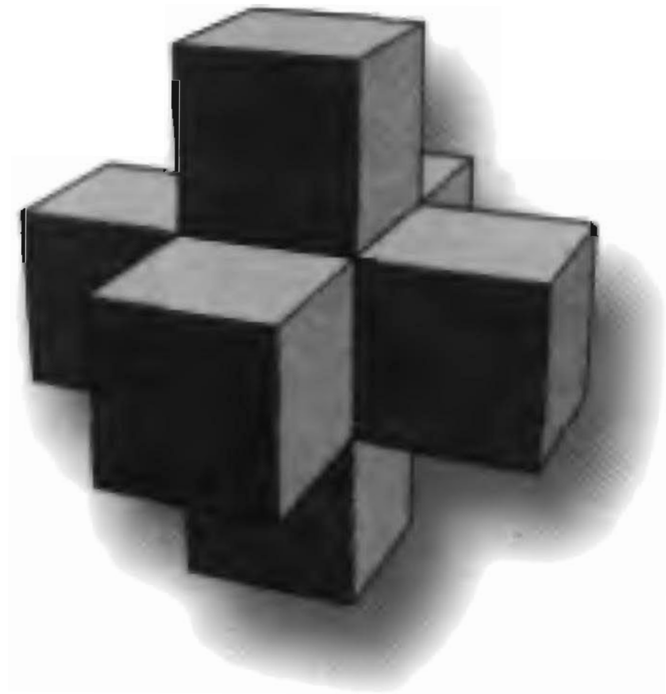
10–11

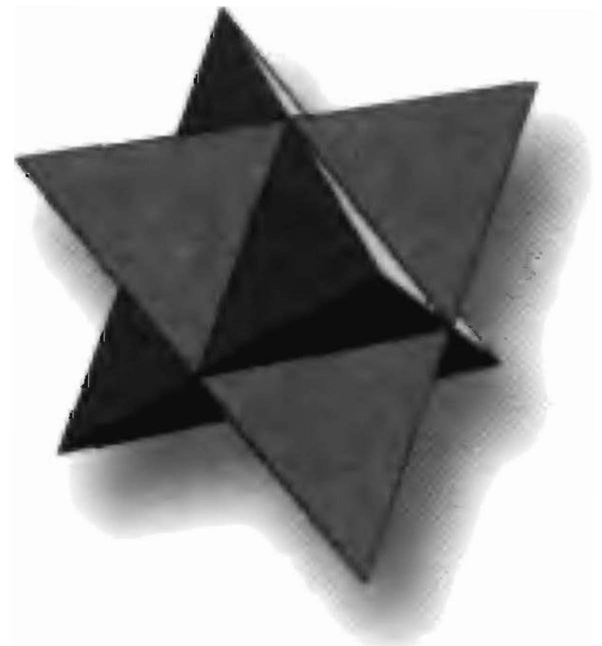
МНЕМОЗИНА
МОСКОВСКИЙ УЧЕБНИК

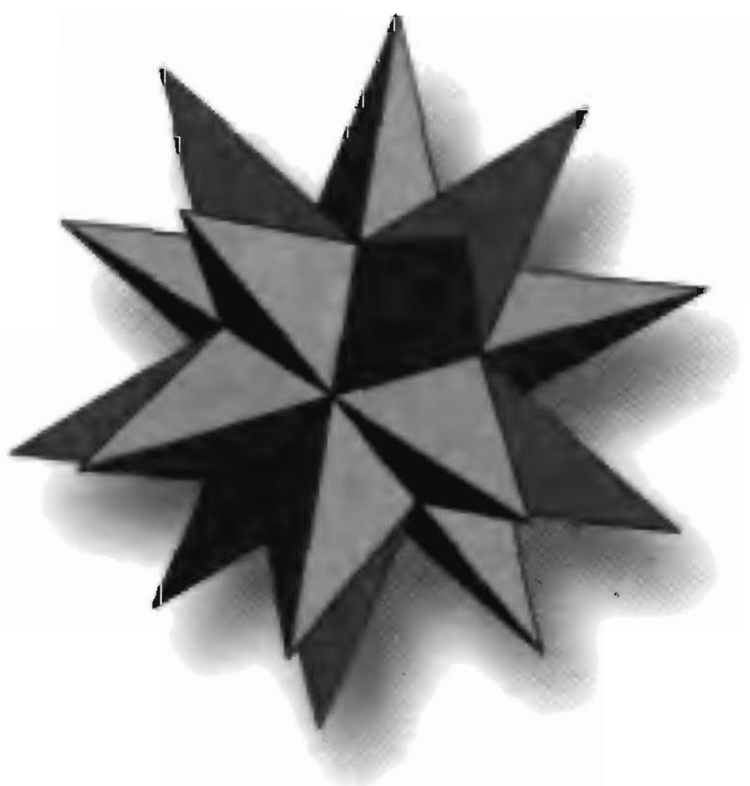
ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ



НЕВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ







И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

10–11 классы

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных
учреждений

(базовый и профильный уровни)

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

5-е издание, исправленное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

ОАО «Московские учебники»

Москва 2008

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01–665/5/7д от 29.10.2007)

Смирнова И. М.

С50 Геометрия. 10—11 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Мнемозина, 2008. — 288 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01106-4

Предлагаемый учебник двухуровневый: с учетом параграфов со звездочкой он соответствует профильному уровню, без их учета — базовому. Наряду с традиционными вопросами геометрии пространства в качестве дополнительного в учебник включен материал научно-популярного и прикладного характера, а также помещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения. Большое внимание уделено использованию средств наглядности.

Данный учебник концептуально согласуется с учебниками по алгебре и началам анализа А. Г. Мордковича.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна,
Смирнов Владимир Алексеевич

ГЕОМЕТРИЯ

10—11 классы

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.
Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06. Тираж 22 200 экз. Заказ № 10940

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
www.mnemozina.ru
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б. Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.
Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел.: (495) 657-98-98 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Московские учебники и Картолитография».
125252, Москва, ул. Зорге, 15.

ISBN 978-5-346-01106-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вы начинаете изучать один из самых увлекательных и важных разделов геометрии — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, стереометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Кроме этого, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых ученых: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и др.

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке. Формы правильных, полуправильных и звездчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора».

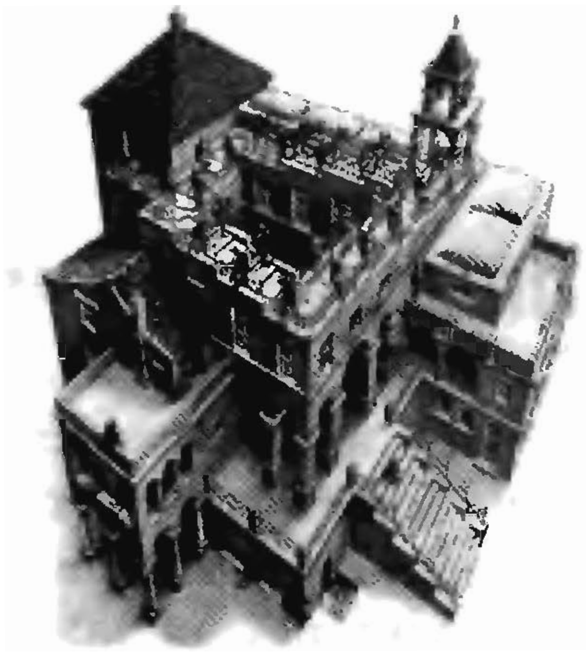
Вот с какой замечательной наукой вам предстоит познакомиться.

Предлагаемый учебник, помимо традиционного материала, содержит материал научно-популярного и прикладного характера, нестандартные и исследовательские задачи. В нем используются следующие обозначения:

○ — устная задача;

* — дополнительный материал, задачи повышенной трудности;

■ — окончание доказательства.



ВВЕДЕНИЕ

Стереометрия, или геометрия в пространстве, это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов «стерео» — тело и «метрео» — измерять, т. е. буквально стереометрия означает «теломерие».

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий ученый Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала пойдет на постройку, уметь вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Египетские пирамиды, сооруженные за 2, 3 и 4 тысячи лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчеты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII века до н. э., в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Для своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь — тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 1, а); земля — гексаэдр (куб — многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 1, б); воздух — октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 1, в); вода — икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 1, д).

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: «Тетра» — четыре; «Гекса» — шесть; «Окто» — восемь; «Икоси» — двадцать; «Додека» — двенадцать; «Эдра» — грань.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, жившего около 300 г. до н. э. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III век н. э.) изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

Славу Евклиду создала его книга «Начала». В ней впервые было дано научное изложение геометрии и представлено стройное аксиоматическое учение. На протяжении более двух тысячелетий они оставались основой изучения систематического курса геометрии.

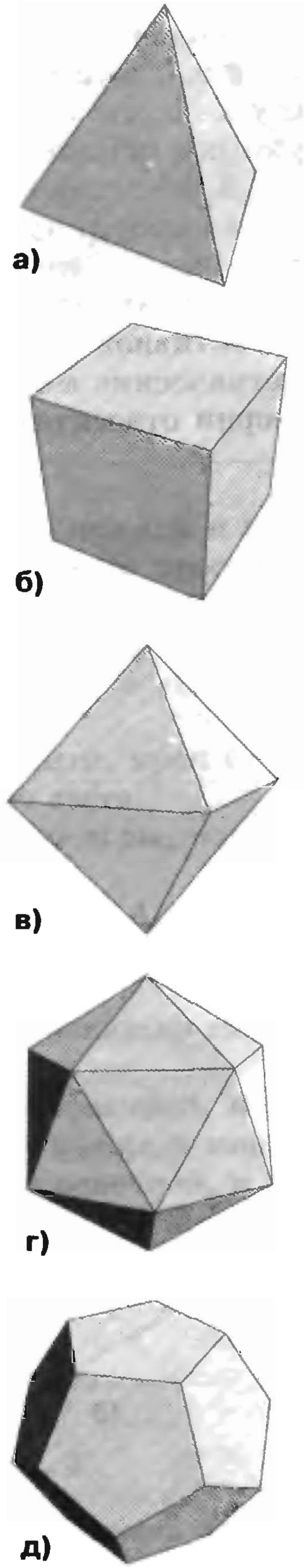


Рис. 1

В одном из рассказов о Евклиде говорится: «Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его “Начала”. Евклид на это ответил: “В геометрии нет царского пути”».

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и др. Геометрические методы широко используются в других науках, например теории относительности, квантовой механике, кристаллографии.

Глава I

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. Основные понятия и аксиомы стереометрии

Основными понятиями стереометрии являются **точка, прямая и плоскость**, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ..., прямые — строчными латинскими буквами a, b, c, ..., плоскости — греческими α, β, γ, ...

Точки, прямые и плоскости будем изображать, как показано на рисунке 2.

Обратим внимание на то, что прямая является бесконечной, а мы изображаем лишь конечный участок прямой — отрезок, который можно продолжать в обе стороны. Плоскость также является бесконечной, и мы будем изображать лишь ее конечный участок.

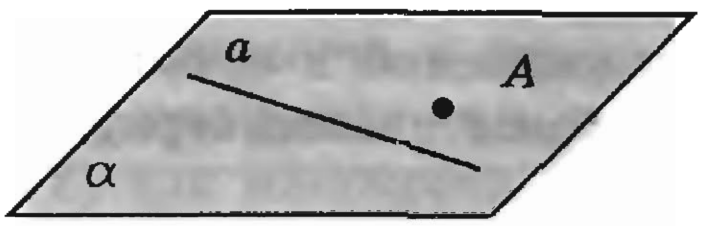


Рис. 2

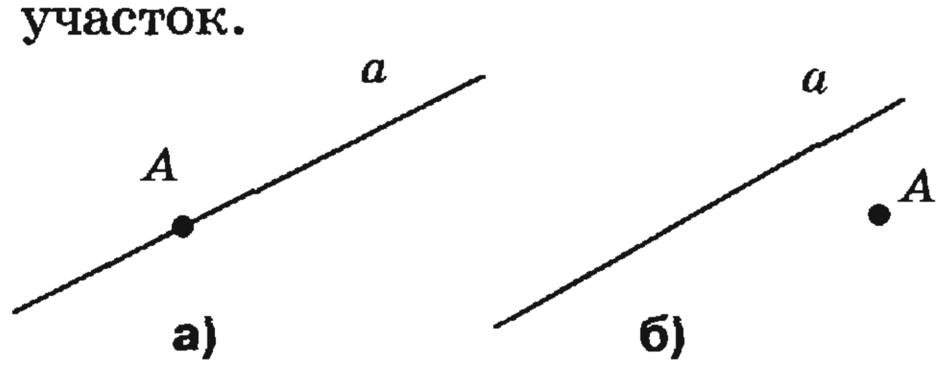


Рис. 3

Точка может принадлежать (рис. 3, а) или не принадлежать данной прямой (рис. 3, б). В случае если точка принадлежит прямой, говорят также, что прямая проходит через точку.

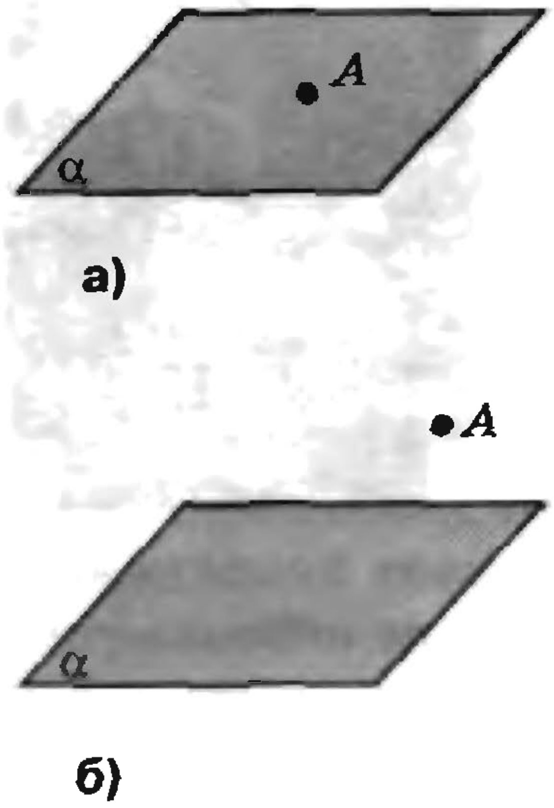


Рис. 4

Аналогично, точка может принадлежать (рис. 4, а) или не принадлежать данной плоскости (рис. 4, б). В *случае если точка принадлежит плоскости*, говорят также, что плоскость проходит через точку.

Будем говорить, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую, если каждая точка этой прямой принадлежит плоскости (рис. 5, а).

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, будем говорить, что прямая пересекает плоскость (рис. 5, б).

Будем говорить, что две плоскости пересекаются *по прямой, если их общими точками являются точки* этой прямой и только они (рис. 6).

Так же как и в планиметрии, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве принимаются без доказательства и называются **аксиомами.**

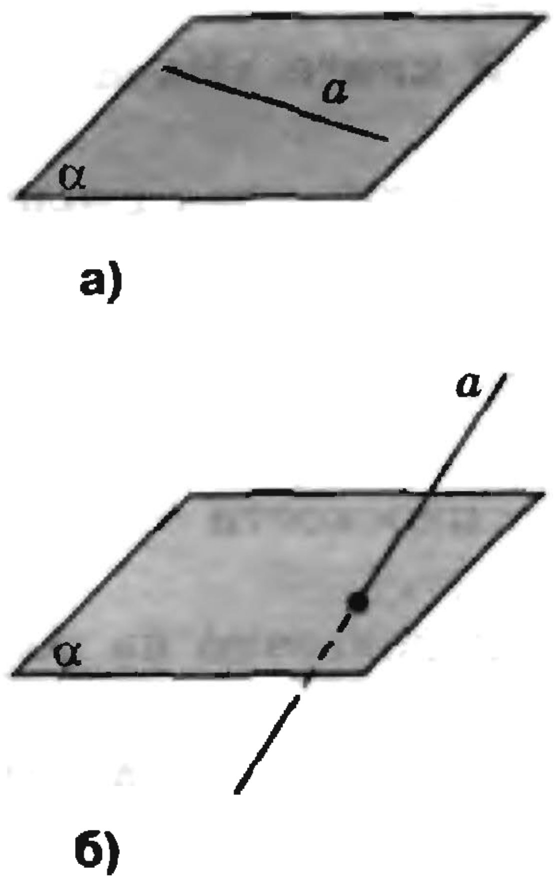


Рис. 5

Сформулируем следующие аксиомы стереометрии:

1. Через *любые две точки пространства* проходит единственная прямая.
2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.
4. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.
5. *Для прямых и плоскостей в пространстве* выполняются аксиомы планиметрии.

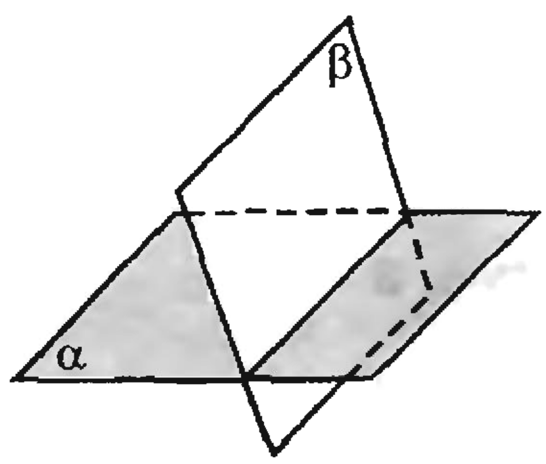


Рис. 6

Поскольку две точки определяют прямую, через них проходящую, то для обозначения прямой указывают какие-нибудь две точки, принадлежащие этой прямой. Например, прямая AB, прямая C_1D_1 и т. д.

Аналогично, поскольку три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость, через них проходящую, то для обозначения плоскости указывают какие-нибудь три точки этой плоскости, не принадлежащие одной прямой. Например, плоскость ABC, плоскость $D_1E_1F_1$ и т. д.

Так же как и на плоскости, для пространства определяются понятия движения, равенства и подобия. А именно, **движением** называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = AB$. Две фигуры F и F' в пространстве называются **равными**, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

Подобием называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — некоторое положительное число, называемое коэффициентом подобия. Две фигуры — F и F' — в пространстве называются **подобными**, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Упражнения

○ **1.** Представляя себе стены класса как участки плоскостей, укажите:
   а) две пересекающиеся прямые;
   б) две пересекающиеся плоскости;
   в) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
   г) две непересекающиеся прямые;
   д) плоскость и непересекающую ее прямую;
   е) две непересекающиеся плоскости;
   ж) три пересекающиеся плоскости.

2. Изобразите:
   а) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
   б) две непересекающиеся прямые;
   в) плоскость и непересекающую ее прямую;
   г) плоскость и лежащие в ней две пересекающиеся прямые;
   д) три плоскости, пересекающиеся по общей прямой;
   е) три плоскости, попарно пересекающиеся по прямым, которые пересекаются в одной точке.

3. Сколько прямых проходит через две данные точки?

4. Сколько плоскостей может проходить через три данные точки?

5. Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

6. При каком расположении трех точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

○ **7.** Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки?

○ **8.** Могут ли две плоскости иметь две общие прямые?

○ **9.** Как расположены две плоскости, если в каждой из них лежит один и тот же треугольник?

○ **10.** Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: а) только одна вершина прямоугольника; б) только две его вершины; в) только три вершины?

○ **11.** Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости, если известно, что этой плоскости принадлежат: а) две точки дуги; б) три точки дуги?

○ **12.** Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежит: а) центр вписанной в треугольник окружности; б) центр описанной около него окружности?

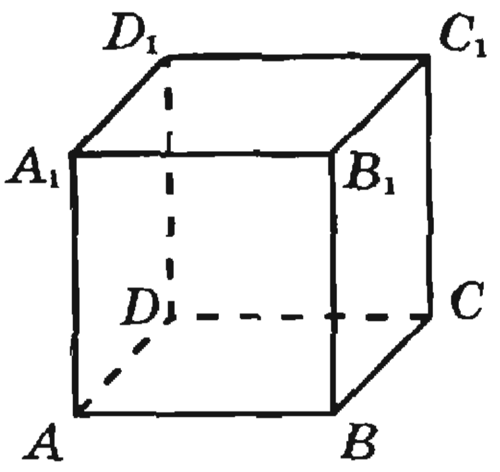


Рис. 7

13. Из прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7), назовите:
а) пары пересекающихся прямых;
б) тройки прямых, пересекающихся в одной точке;
в) пары пересекающихся плоскостей;
г) тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке.

***14.** Из шести спичек сложите четыре равных треугольника.

***15.** Докажите, что движение пространства переводит: а) прямые в прямые; б) отрезки в отрезки; в) лучи в лучи.

***16.** Могут ли при движении: а) разные точки переходить в одну точку; б) разные прямые переходить в одну прямую; в) разные плоскости переходить в одну плоскость?

§ 2. Следствия из аксиом стереометрии

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки — A_1 и A_2 (рис. 8). Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые в пространстве, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a лежит в плоскости α. ■

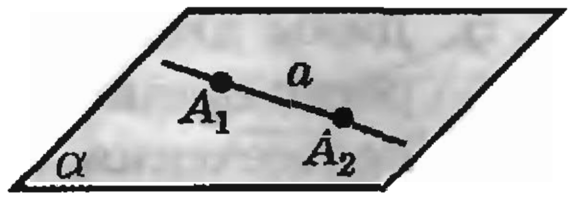


Рис. 8

Свойство 2. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C (рис. 9). *В силу аксиомы 2, через точки A, B, C* проходит единственная плоскость α. По свойству 1, прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A.

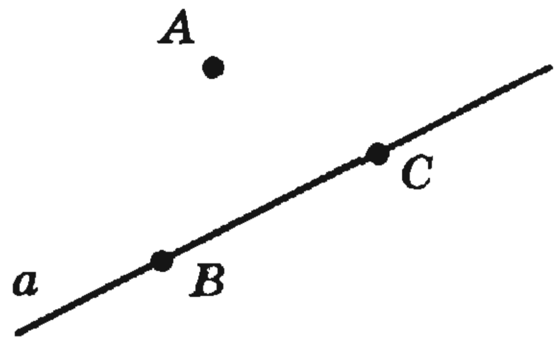


Рис. 9

Покажем, что эта плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2, она должна совпадать с плоскостью α.

Свойство 3. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок 10.

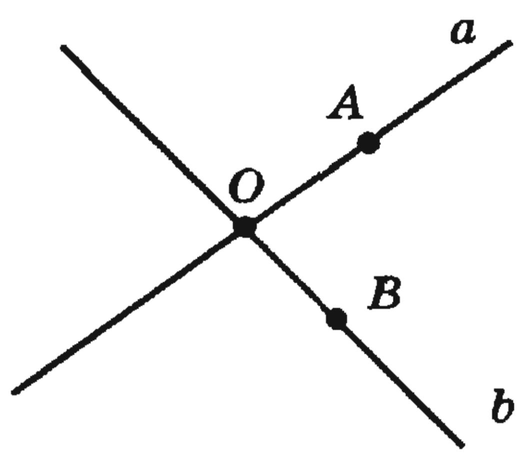


Рис. 10

Упражнения

1. Могут ли пересекающиеся плоскости иметь общую точку, не принадлежащую линии пересечения этих плоскостей?
2. Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой?
3. Докажите, что для любой плоскости существуют точки, ей не принадлежащие.
4. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.

5. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат в одной плоскости.
6. Докажите, что если имеется конечное число прямых, каждые две из которых пересекаются, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.
7. Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?
8. Даны три плоскости. На каждой плоскости две прямые. Сколько всего прямых?
9. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек; г*) n точек?
10. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные тройки из: а) трех точек; б) четырех точек; в) пяти точек; г*) n точек?
11. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях: а) двух плоскостей; б) трех плоскостей; в) четырех плоскостей; г*) n плоскостей?
12. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в) четыре плоскости?

§ 3. Пространственные фигуры

Среди пространственных фигур выделяются многогранники.

Определение. **Многогранником** называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых **гранями** многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются, соответственно, **ребрами** и **вершинами** многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Примерами многогранников являются следующие.

Куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 11).

Параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 12).

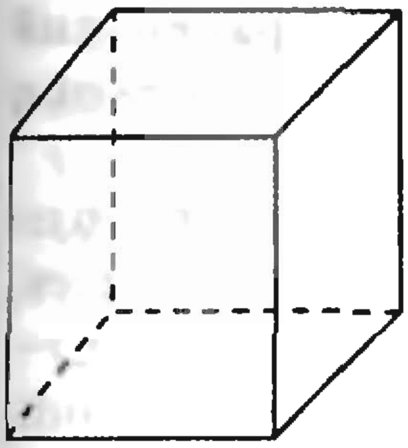


Рис. 11

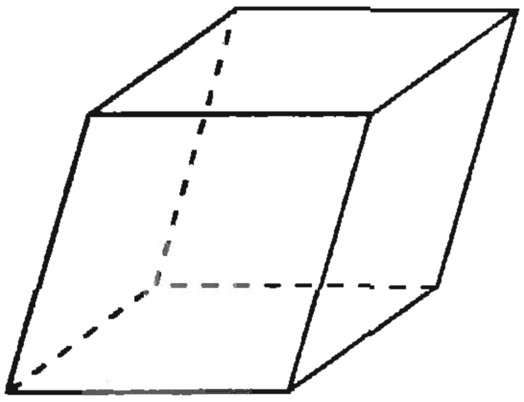


Рис. 12

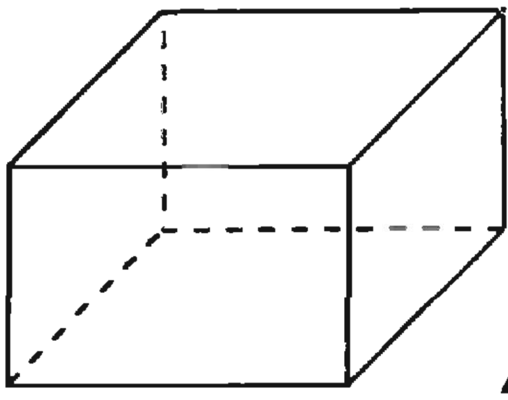


Рис. 13

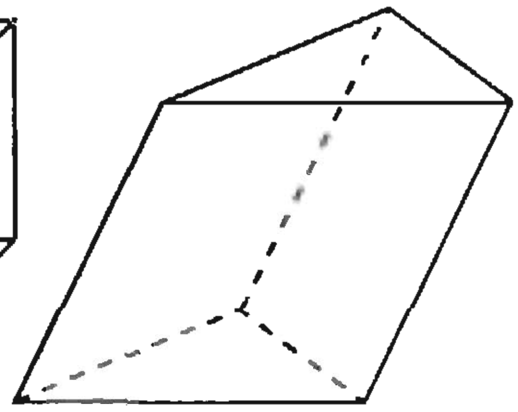


Рис. 14

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 13).

Призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых **основаниями** призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых **боковыми гранями** призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются **боковыми ребрами** призмы (рис. 14).

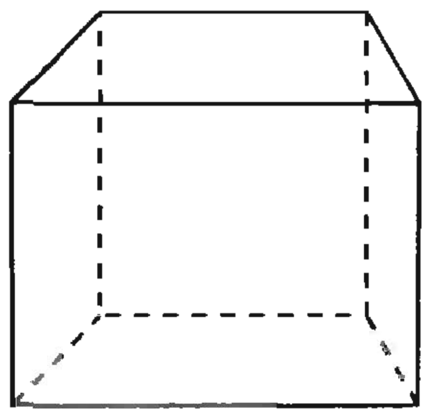


Рис. 15

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 15), называется **прямой**. В противном случае призма называется **наклонной** (рис. 14).

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 16).

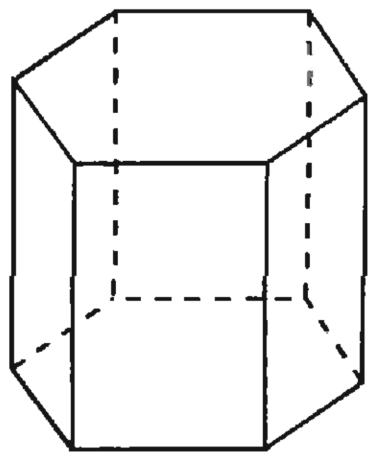


Рис. 16

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно, треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. Например, на рисунке 14 изображена наклонная треугольная призма, на рисунке 15 — прямая четырехугольная призма, на рисунке 16 — правильная шестиугольная призма.

Пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого **основанием** пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых **боковыми гранями** пирамиды. Общая вершина боковых граней называется **вершиной** пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются **боковыми ребрами** (рис. 17).

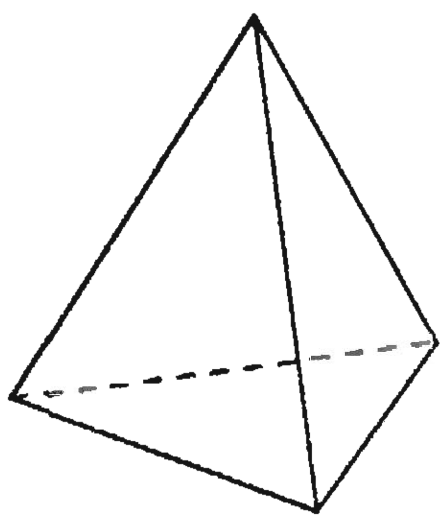


Рис. 17

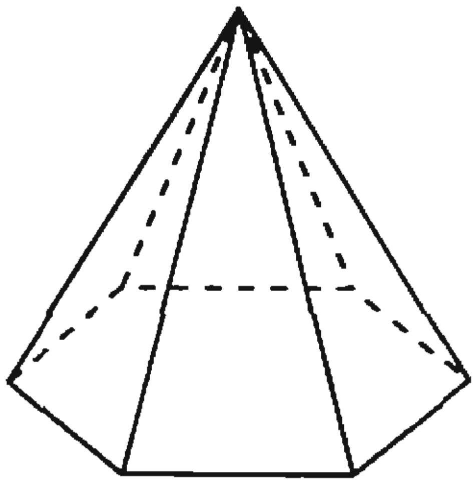


Рис. 18

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые ребра которой равны, называется **правильной** (рис. 18).

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно, треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. На рисунке 17 изображена треугольная пирамида, называемая также тетраэдром, на рисунке 18 — правильная шестиугольная пирамида.

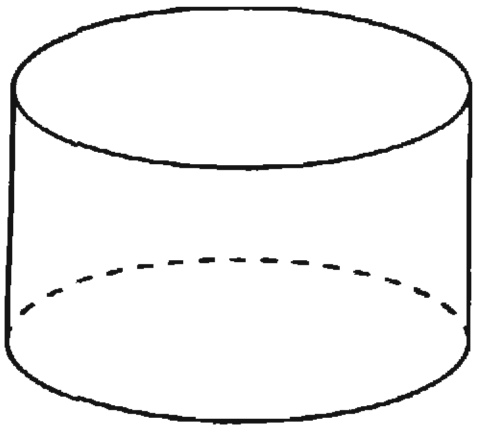


Рис. 19

Во введении были представлены правильные многогранники: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

Примерами пространственных фигур являются знакомые вам **цилиндр** (рис. 19), **конус** (рис. 20), **шар** (рис. 21). Их определения будут даны позднее.

В дальнейшем мы рассмотрим и другие пространственные фигуры, в том числе полуправильные и звездчатые многогранники.

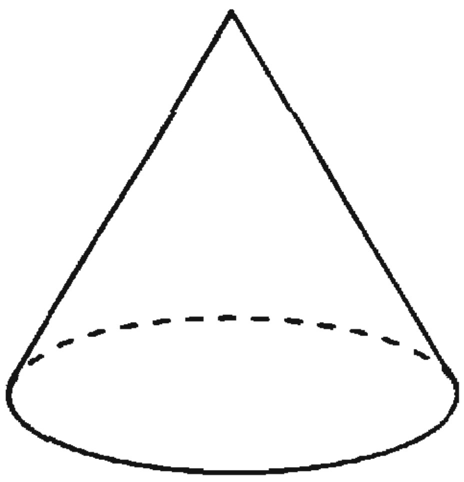


Рис. 20

Упражнения

1. Изобразите:
а) параллелепипед;
б) четырехугольную призму;
в) четырехугольную пирамиду.

○ **2.** Верно ли, что плоскости, проходящие через вершины S, A, B и S, C, D пирамиды $SABCD$, пересекаются в одной точке S?

○ **3.** Может ли призма иметь:
а) 9 вершин; б) 16 вершин?

4. Докажите, что число вершин произвольной призмы четно.

○ **5.** Существует ли призма, которая имеет:
а) 14 ребер; б) 15 ребер?

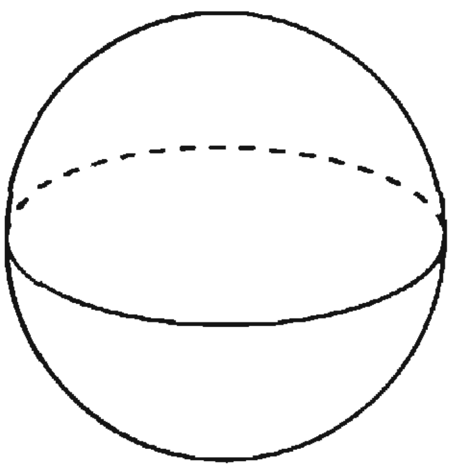


Рис. 21

6. Докажите, что число ребер произвольной призмы делится на три.

○ **7.** Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 15 ребер?

8. Призма имеет: а) 10 вершин; б) 18 ребер; в) 8 граней. Определите ее вид.

○ **9.** Может ли пирамида иметь: а) 3 вершины; б) 7 вершин?

○ **10.** Существует ли пирамида, которая имеет: а) 20 ребер; б) 21 ребро?

11. Докажите, что любая пирамида имеет четное число ребер.

○ **12.** Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет 32 ребра?

13. Пирамида имеет: а) 6 вершин; б) 22 ребра; в) 10 граней. Определите ее вид.

14. Сколько диагоналей имеет: а) куб; б) параллелепипед; в) n-угольная призма; г) n-угольная пирамида.

15. Разделите куб на шесть четырехугольных пирамид.

***16.** Может ли многогранник иметь 7 ребер?

***17.** Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

***18.** Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

***19.** Докажите, что для любого $n > 5$ и отличного от 7 существует многогранник с n ребрами.

20. Существуют ли отличные от куба многогранники, все грани которых являются равными между собой квадратами?

21. Существует ли многогранник, все грани которого параллелограммы, но который не является призмой?

22. По аналогии с определениями круга и окружности сформулируйте определения шара и сферы.

§ 4. Моделирование многогранников

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в *данной плоскости*, то полученная фигура на плоскости называется **разверткой** многогранника. Например, на рисунке 22 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.

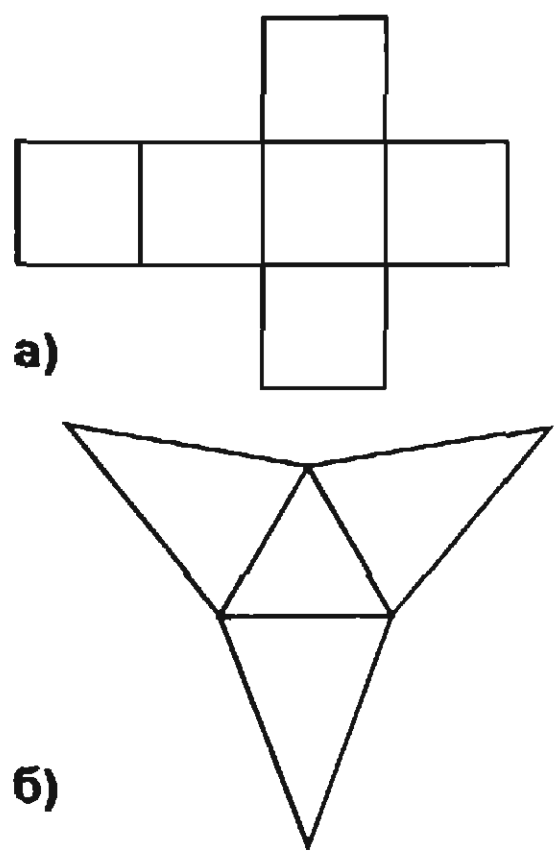


Рис. 22

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку

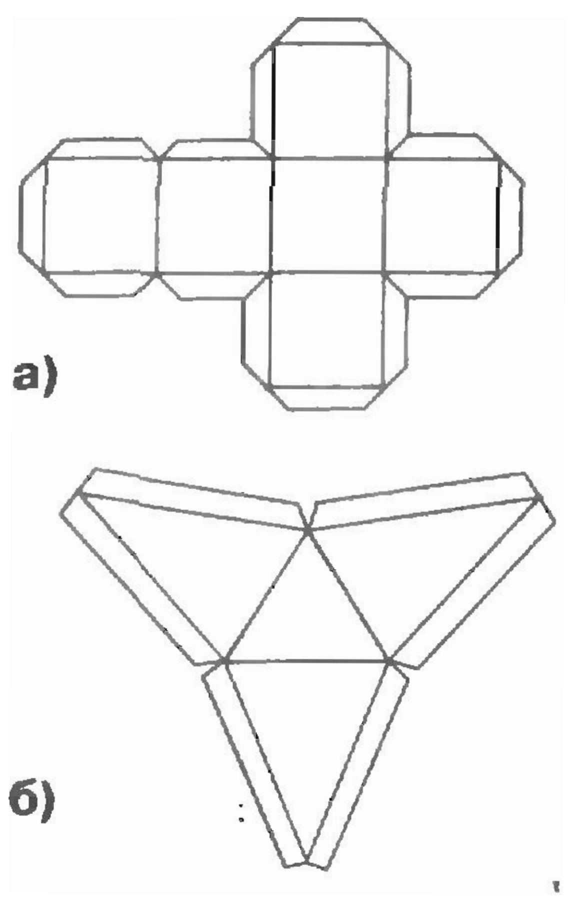


Рис. 23

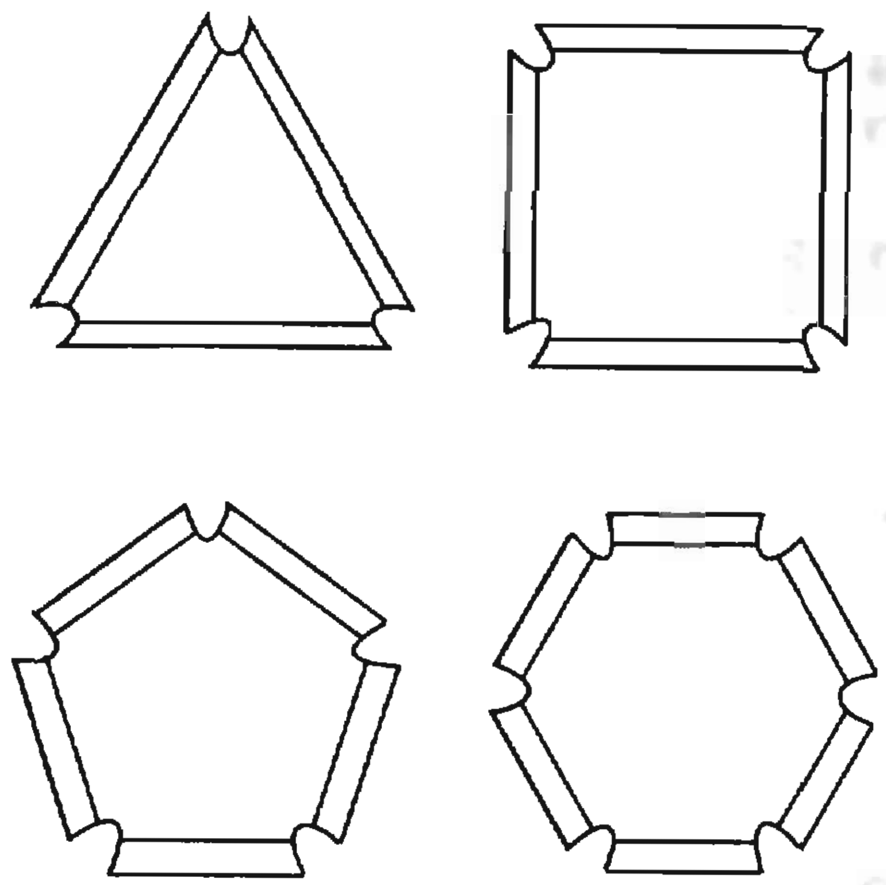


Рис. 24

многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка (рис. 23).

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала, с отгибающимися клапанами (рис. 24) и резиновых колечек — основной крепежной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 24.

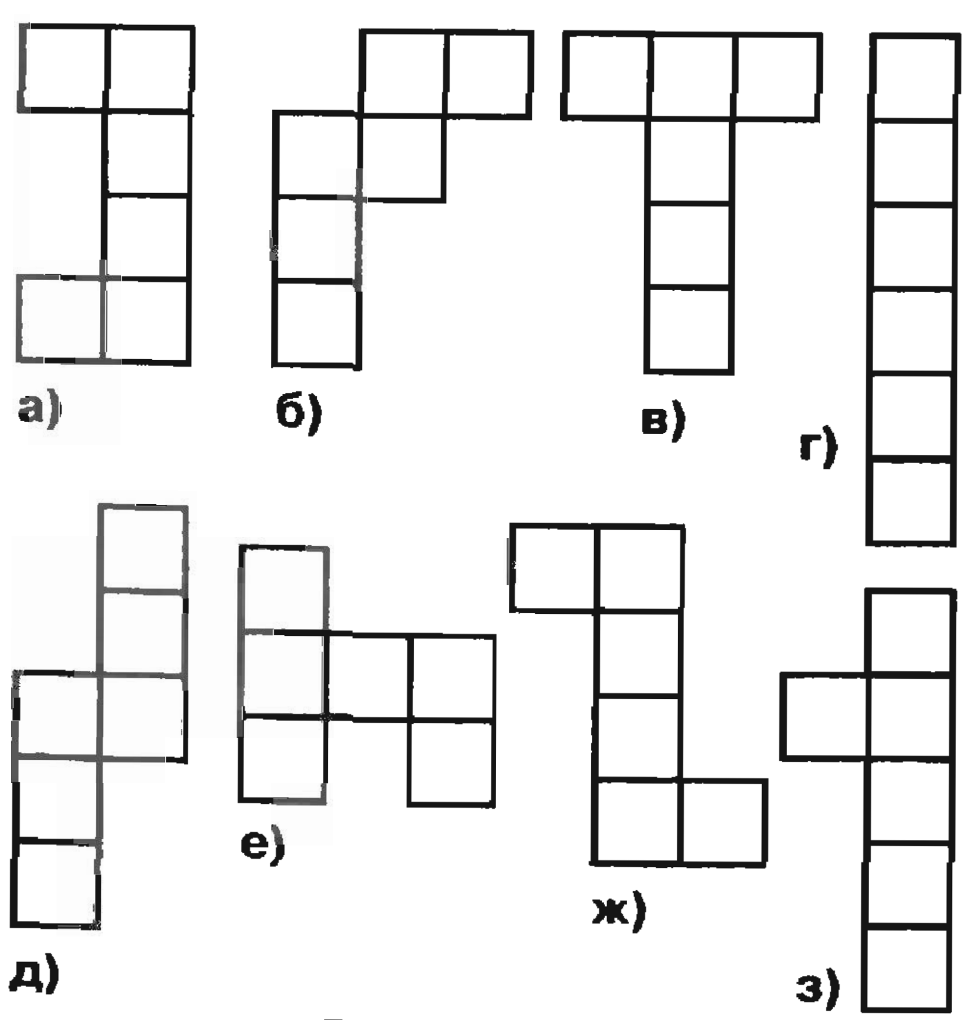


Рис. 25

Упражнения

1. Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырехугольной пирамиды.
2. Какие из изображенных на рисунке 25 фигур являются развертками куба?

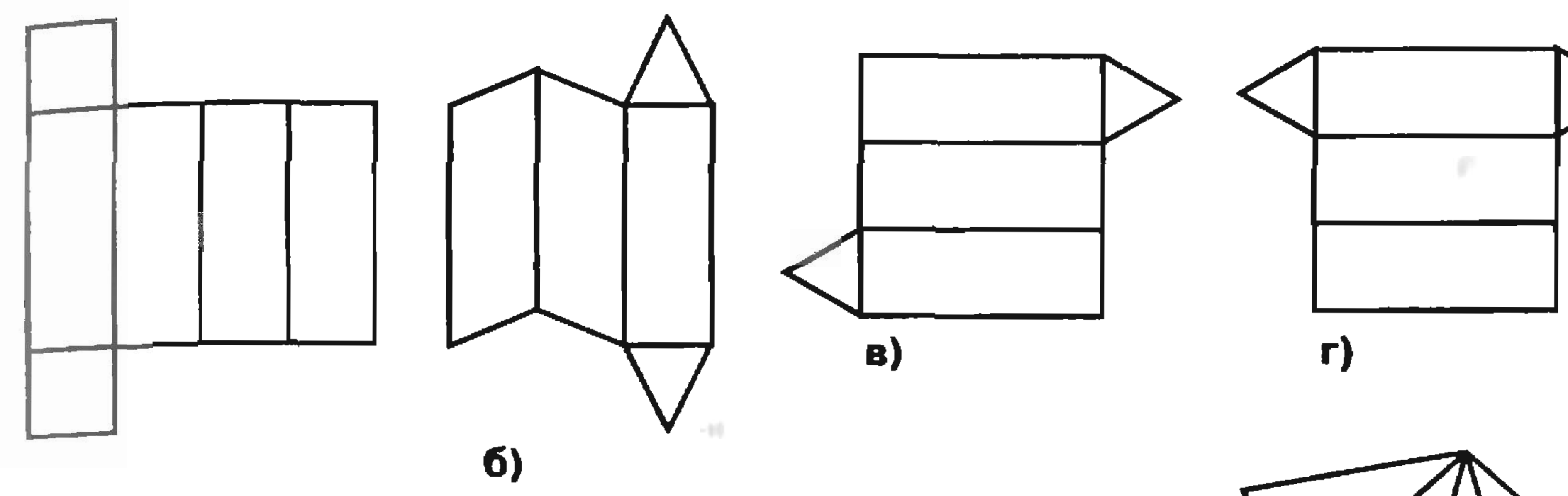


Рис. 26

3. На рисунке *26 найдите фигуры, которые являются* развертками призм. Определите вид этих призм.
4. Среди данных на рисунке 27 разверток найдите развертки пирамид. Определите их вид.
*5. Может ли разверткой пирамиды быть: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) параллелограмм?
6. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и тетраэдра.
7. Изготовьте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, *пятиугольников и шестиугольников с равными* сторонами. Сделайте с помощью этого конструктора несколько моделей многогранников.
8. Сделайте из конструктора модели правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр).
9. Составьте модель многогранника из двух квадратных и восьми треугольных граней конструктора.
10. Составьте модель многогранника из четырех шестиугольных и четырех треугольных граней конструктора.
11. Составьте модель многогранника (кубооктаэдр) из восьми треугольных и шести квадратных граней конструктора.

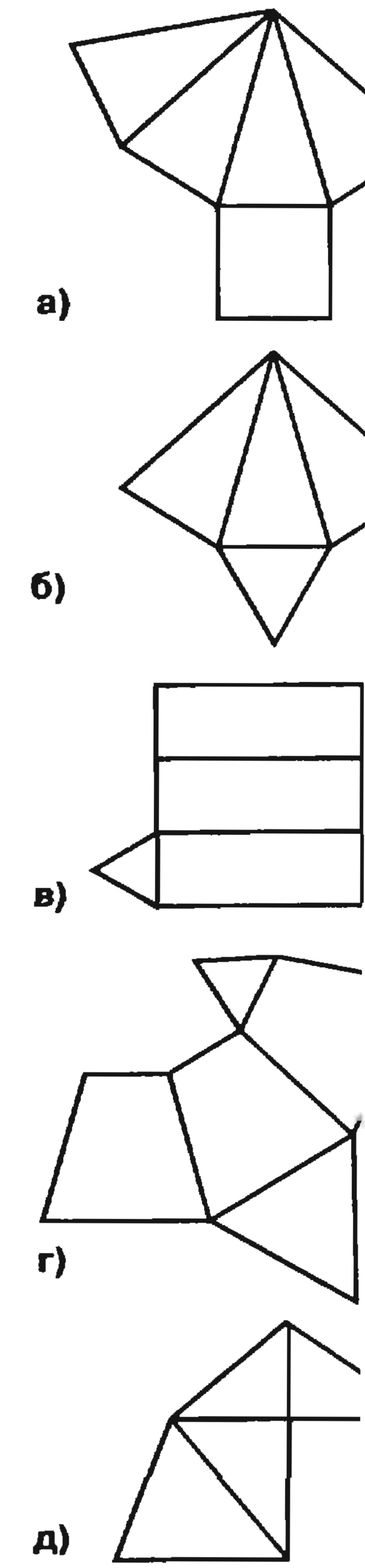


Рис. 27

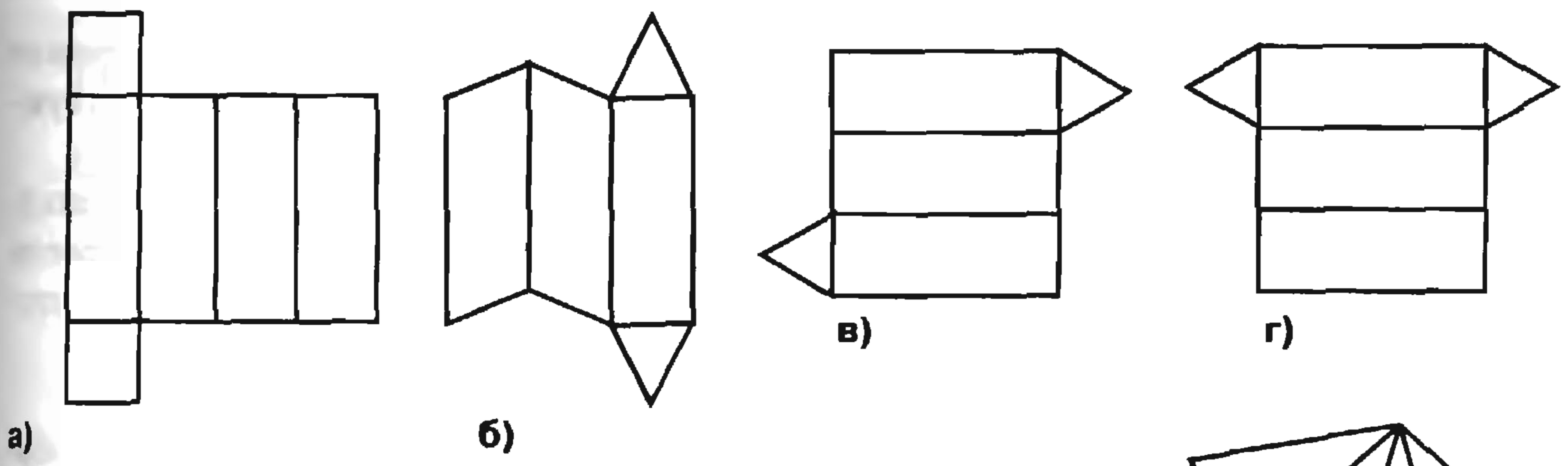


Рис. 26

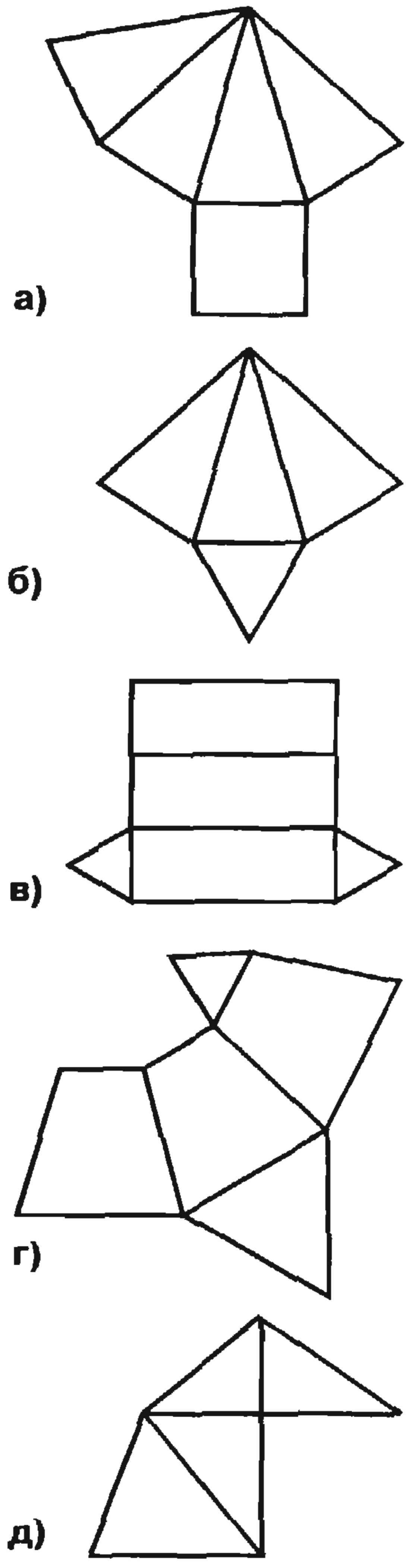


Рис. 27

3. На рисунке 26 найдите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

4. Среди данных на рисунке 27 разверток найдите развертки пирамид. Определите их вид.

* **5.** Может ли разверткой пирамиды быть: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) параллелограмм?

6. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и тетраэдра.

7. Изготовьте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с равными сторонами. Сделайте с помощью этого конструктора несколько моделей многогранников.

8. Сделайте из конструктора модели правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр).

9. Составьте модель многогранника из двух квадратных и восьми треугольных граней конструктора.

***10.** Составьте модель многогранника из четырех шестиугольных и четырех треугольных граней конструктора.

***11.** Составьте модель многогранника (кубооктаэдр) из восьми треугольных и шести квадратных граней конструктора.

12. Можно ли окрасить грани куба тремя красками так, чтобы соседние грани были окрашены в различные цвета? Сделайте соответствующую модель.

***13.** Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра; г) додекаэдра?

***14.** Из 9 спичек сложите 7 равных треугольников.

***15.** Найдите самый короткий путь по поверхности куба $A...D_1$ из вершины A в вершину C_1.

Глава II

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 5. Параллельность прямых в пространстве

Напомним, что две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Дадим теперь определение параллельности прямых в пространстве.

Определение. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 28).
Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и A_1B_1 параллельны (рис. 29).

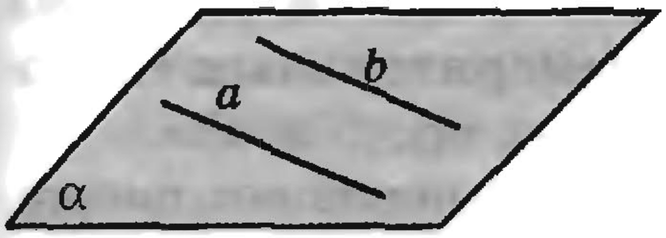


Рис. 28

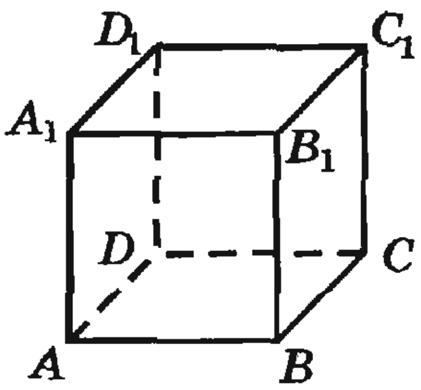


Рис. 29

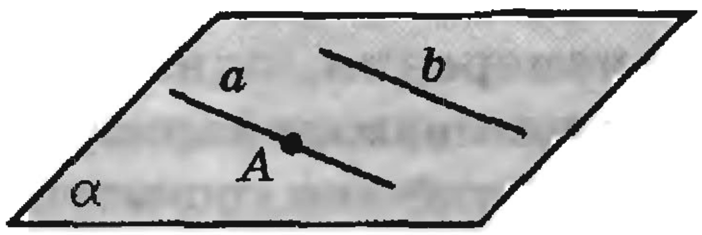


Рис. 30

Теорема. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой b. Проведем через эту прямую и точку A плоскость α (рис. 30). Эта плоскость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовем ее a, параллельная прямой b. Она и будет искомой прямой, параллельной данной. ■

Исторические сведения

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счету постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в 7-м классе: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому или его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято утверждение о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своих идей. Он не только был убежден в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твердо верил в ее применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на многие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Упражнения

1. Запишите пары параллельных ребер: а) в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) в призме $ABCA_1B_1C_1$.

○ **2.** Будут ли противоположные ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны?

○ **3.** В каких пирамидах имеются параллельные ребра?

○ **4.** Используя модели правильных многогранников, установите, имеет ли параллельные ребра (если имеет, то сколько пар): а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр.

○ **5.** Сформулируйте, какие две прямые в пространстве являются непараллельными?

○ **6.** Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

○ **7.** В пространстве даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых проходит через эту точку: а) параллельных данной прямой; б) не пересекающих данную прямую?

○ **8.** Верно ли для пространства утверждение, справедливое на плоскости: «Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны»?

9. Пусть a и b — пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 — прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?

10. Докажите, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

11. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

12. Сколько плоскостей можно провести через различные пары из: а) трех попарно параллельных прямых; б) четырех попарно параллельных прямых; в*) n попарно параллельных прямых, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

13. Седьмое свойство стереометрии в «Началах» Евклида формулируется так:

«Если будут две параллельные прямые и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными». Докажите.

14. Даны две параллельные прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие каждую из них, лежат в одной плоскости.

***15.** Докажите, что если каждые две из нескольких данных прямых пересекаются, то все эти прямые либо проходят через одну точку, либо лежат в одной плоскости.

§ 6. Скрещивающиеся прямые

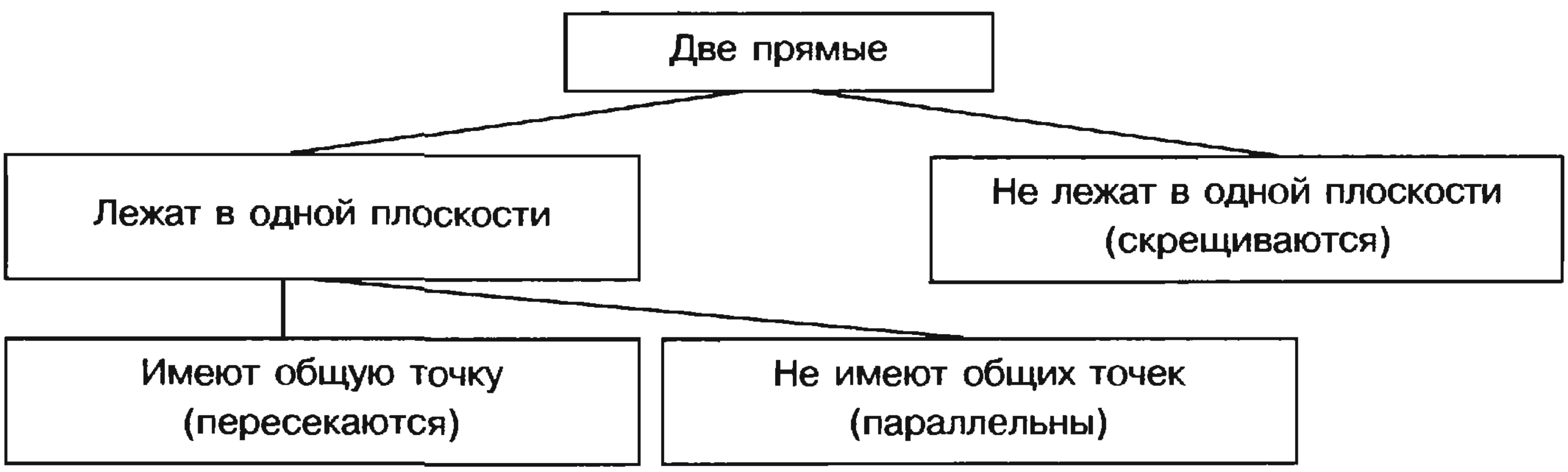
Мы уже знаем, что две прямые в пространстве могут пересекаться, а также быть параллельными. В отличие от плоскости, в пространстве существует еще один случай взаимного расположения двух прямых, когда они не пересекаются и не параллельны.

Определение. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка скрещиваются, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и A_1D_1 скрещиваются.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы.



Следующую теорему называют признаком скрещивающихся прямых, поскольку она дает достаточное условие для того, чтобы прямые были скрещивающимися.

Теорема. (Признак скрещивающихся прямых.) Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

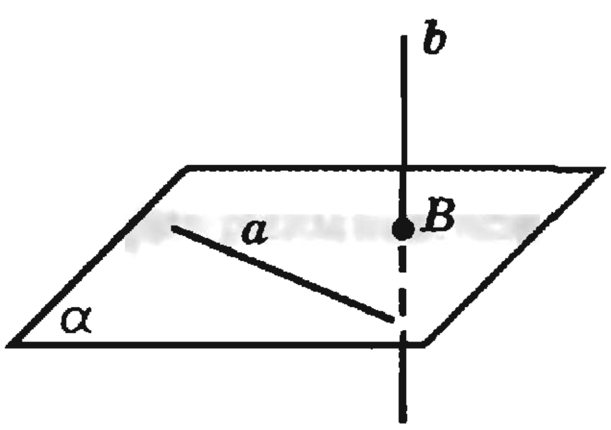


Рис. 31

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a (рис. 31). Если бы прямые a и b лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежала бы прямая b и ей принадлежала бы точка B.

Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая b лежала бы в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, a и b не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются. ■

Упражнения

1. Запишите пары скрещивающихся ребер в: а) параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$; в) тетраэдре $ABCD$; г) пирамиде $SABCD$.

○ **2.** Имеет ли скрещивающиеся ребра (если имеет, то сколько пар): а) октаэдр; б*) икосаэдр; в*) додекаэдр?

○ **3.** Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

○ **4.** Прямая лежит в плоскости. Сколько прямых, скрещивающихся с этой прямой, проходит через точку, взятую в той же плоскости?

5. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

6. Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Как могут быть расположены эти прямые относительно друг друга?

7. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B — прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Какая прямая будет линией пересечения плоскостей α и β?

8. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 32). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают прямые a и b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

9. Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 33, а)?

10. Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 33, б)?

11. Каково взаимное расположение диагоналей пространственного четырехугольника $ABCD$ (вершины A, B, C, D не принадлежат одной плоскости)?

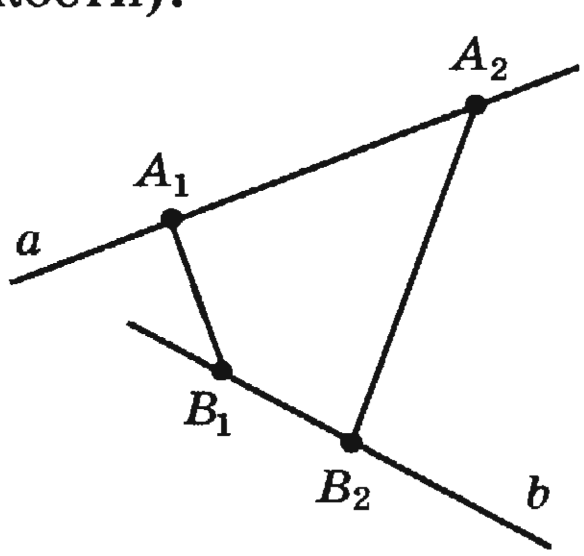
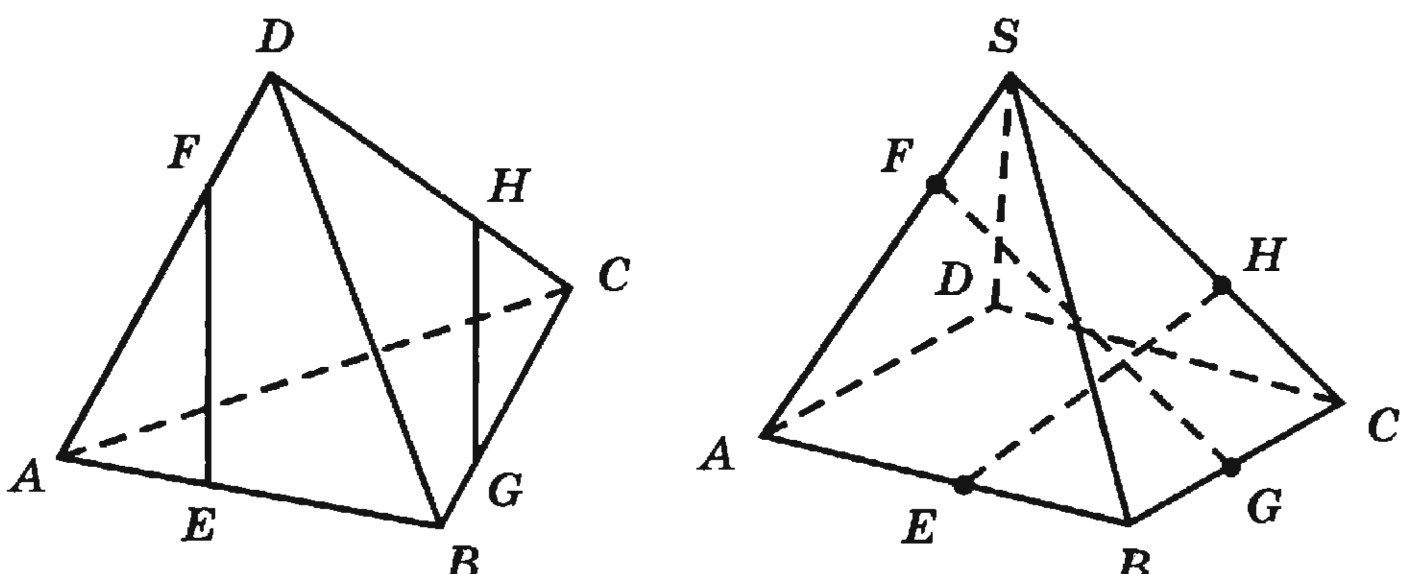


Рис. 32



а) б)

Рис. 33

12. Даны скрещивающиеся прямые a и b, прямая c пересекает каждую из них. Докажите, что любая прямая, параллельная c, скрещивается по крайней мере с одной из данных прямых.

13. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Точка C принадлежит прямой a. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает прямую a.

14. Даны две прямые — a и b. Через данную точку K, не принадлежащую данным прямым, проведите прямую, скрещивающуюся с каждой из них, если известно, что они: а) пересекаются; б) скрещиваются.

15. Даны две скрещивающиеся прямые — m и n. Через точку M, принадлежащую прямой m, проведите прямую, скрещивающуюся с n.

***16.** Докажите, что два отрезка, соединяющих середины скрещивающихся сторон пространственного четырехугольника $ABCD$, пересекаются.

***17.** Сколько пар скрещивающихся прямых определяется различными парами из: а) четырех точек; б) пяти точек; в*) n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

§ 7. Параллельность прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость относительно друг друга.

Прямая может лежать в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Определение. Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют ни одной общей точки.

Зафиксируем случаи взаимного расположения прямой и плоскости с помощью следующей схемы.

Будем говорить, что ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Следующая теорема связывает понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых и дает достаточное условие параллельности двух прямых в пространстве.

Теорема. (Признак параллельности двух прямых.) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 34). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а прямая a не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b. Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак параллельности прямой и плоскости.) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 35). Докажем, что прямая a параллельна плоскости β. Предположим противное, т. е. что прямая a пересекает плоскость β в некоторой точке C. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$ по условию). Точка C принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \beta$. ■

Теорема *. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 36). Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в курсе планиметрии. Рассмотрим случай, когда прямые не лежат в одной

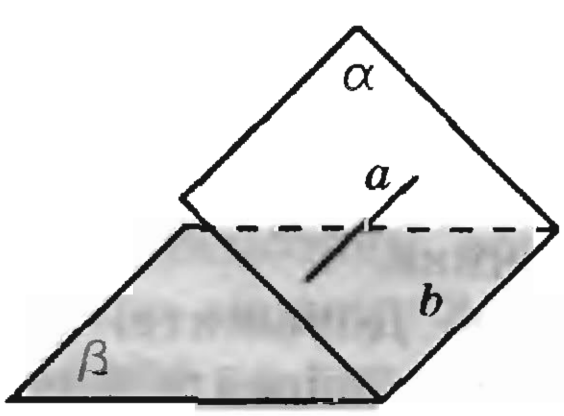


Рис. 34

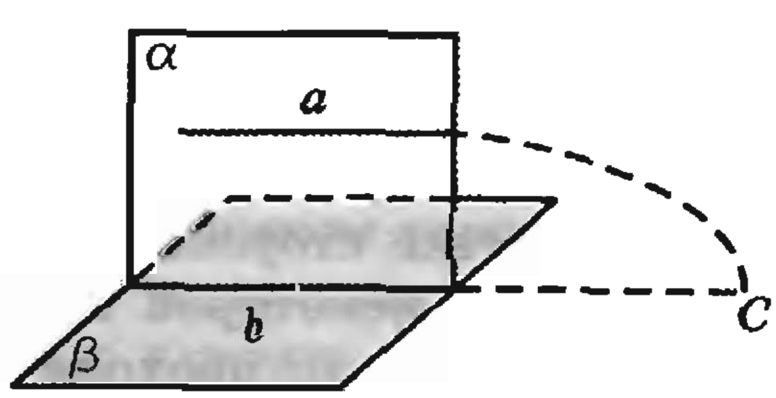


Рис. 35

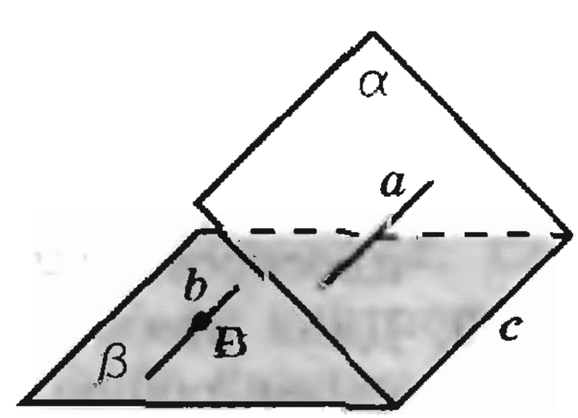


Рис. 36

плоскости. Докажем, что прямые a и b параллельны. Для этого нужно доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Через прямые a и c проведем плоскость α. Через прямые b и c проведем плоскость β. Заметим, что прямая a параллельна плоскости β и, следовательно, не пересекается с прямой b. Осталось доказать, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Для этого через прямую a и какую-нибудь точку B прямой b проведем плоскость γ. Она пересечет плоскость β по прямой, параллельной прямой c. Эта прямая должна совпадать с прямой b, так как иначе через точку B в плоскости β проходили бы две прямые, параллельные прямой c. Следовательно, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Упражнения

○ **1.** Укажите случаи взаимного расположения прямой и плоскости.

○ **2.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите параллельные ребра и грани.

○ **3.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите параллельные ребра и грани.

○ **4.** Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

○ **5.** Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

○ **6.** Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

○ **7.** Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

○ **8.** Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

9. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

10. Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости β, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены остальные стороны $ABCDEF$ относительно плоскости β?

11. Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

12. Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что через любую точку этой плоскости проходит прямая, параллельная данной прямой.

13. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит прямая, параллельная этой плоскости. Сколько таких прямых?

14. Докажите, что если две прямые параллельны, то через одну из них проходит плоскость, параллельная другой. Сколько таких плоскостей?

15. Даны две скрещивающиеся прямые. Как через одну из них провести плоскость, параллельную другой?

16. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней SAB и SCD и плоскости основания $ABCD$?

** **17.*** Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

18. Докажите, что ребра одного основания призмы параллельны другому основанию этой призмы.

19. В *пространственном четырехугольнике* $ABCD$ (вершины не принадлежат одной плоскости) середины сторон соединены последовательно отрезками. Докажите, что полученный четырехугольник есть параллелограмм.

20. Докажите, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

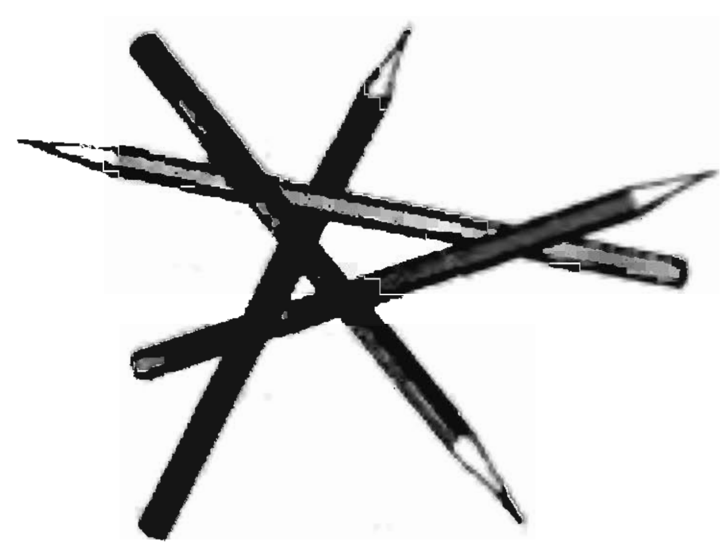


Рис. 37

21. Докажите, что если прямая параллельна прямой, пересекающей данную плоскость, то она также пересекает эту плоскость.

* **22.** Возможно ли такое расположение карандашей, какое изображено на рисунке 37?

§ 8. Параллельность двух плоскостей

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Согласно аксиоме 3, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.

Две плоскости

Имеют общую точку (пересекаются по прямой)

Не имеют общих точек (параллельны)

Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 38). Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости γ. Кроме того, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Следующая теорема дает достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема. (Признак параллельности двух плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости β. Предположим про-

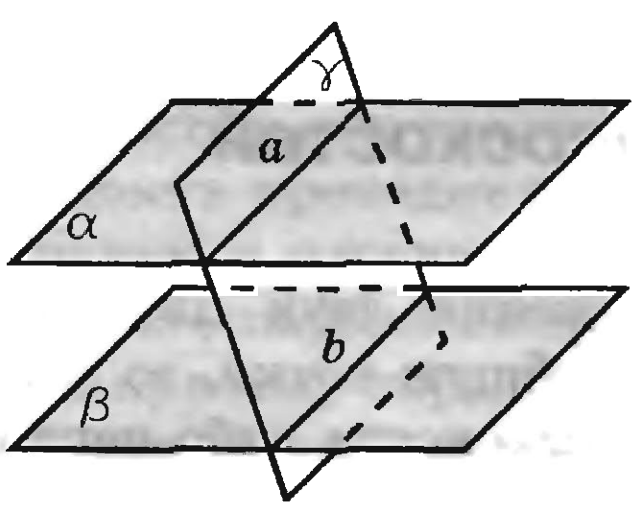


Рис. 38

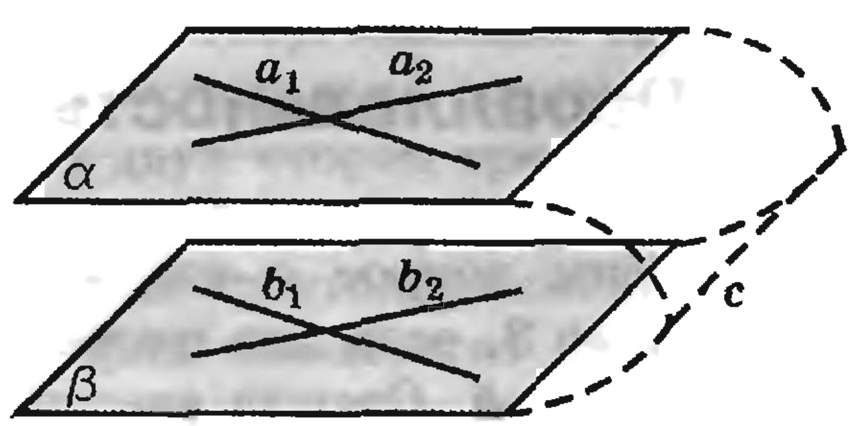


Рис. 39

тивное, т. е. что плоскости α и β пересекаются, и пусть c — линия их пересечения (рис. 39). По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой c. Аналогично, прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, и, следовательно, они параллельны. ■

Будем говорить, что две грани многогранника параллельны, если они *лежат в параллельных плоскостях.*

Докажем, что основания призмы параллельны. Действительно, боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому два смежных ребра одного основания призмы соответственно параллельны двум смежным ребрам другого ее основания. Следовательно, основания призмы параллельны.

Упражнения

○ **1.** Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.

○ **2.** Укажите параллельные грани: а) параллелепипеда $A...D_1$; б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.

○ **3.** Имеет ли параллельные грани (если имеет, то сколько пар): а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

○ **4.** Могут ли быть параллельными: а) две боковые грани призмы; б*) три боковые грани призмы?

○ **5.** Какие две плоскости считаются *непараллельными*?

○ **6.** Верно ли утверждение: «Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

○ **7.** Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?

○ **8.** Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

○ **9.** Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

○ **10.** Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости?

○ **11.** Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?

12. Докажите, что плоскость, проведенная через вершины A, D_1 и C куба $A...D_1$, параллельна плоскости, проведенной через вершины A_1, B и C_1.
13. Докажите первую теорему этого параграфа методом от противного.
14. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная исходной плоскости.
15. Плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым, соответственно, b и c. Будут ли плоскости β и γ параллельны? Ответ обоснуйте. Сделайте соответствующий чертеж.

*16. Докажите, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

*17. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

*18. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

*19. Каковы возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если две из них параллельны?

*20. Каковы возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если они попарно пересекаются?

§ 9. Векторы в пространстве

В планиметрии изучались векторы на плоскости, здесь же мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Определение. **Вектором** в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также нулевой вектор, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$ и изображается стрелкой. Будем также обозначать векторы строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной, или **модулем**, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора в пространстве называются **одинаково (противоположно) направленными**, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковые длины и направления.

Так же, как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора — $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора умножается на $|t|$, а направление остается прежним, если $t > 0$, и изменяется на противоположное, если $t < 0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости. Среди них:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.
4. $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$.
5. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой, аналогично тому, как это делалось для плоскости.

Докажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда (рис. 40): $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

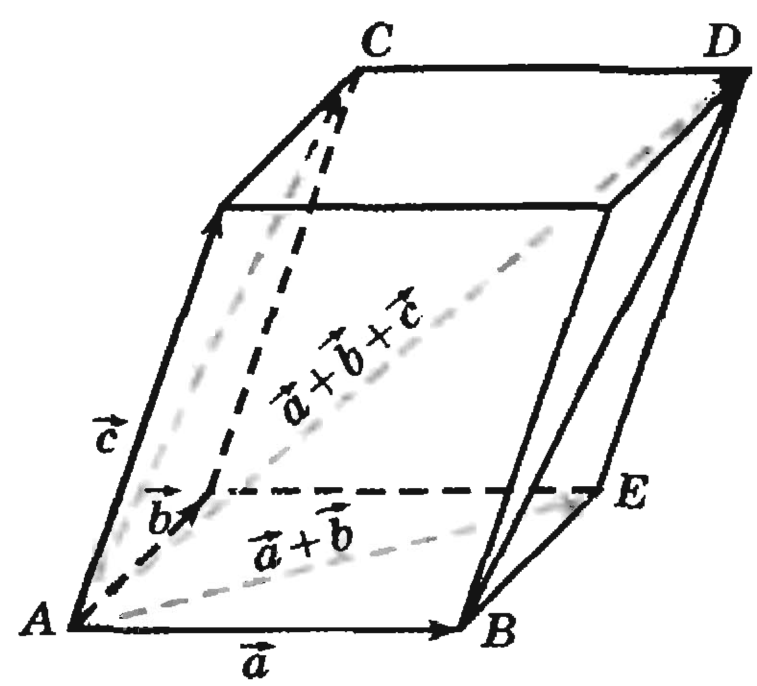


Рис. 40

Упражнения

1. Для данного вектора $\vec{a}$ постройте векторы: $-\vec{a}$; $2\vec{a}$; $\frac{5}{2}\vec{a}$.

○ 2. В параллелепипеде $A...D_1$ назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

○ 3. В параллелепипеде $A...D_1$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

○ 4. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ быть равными между собой?

○ 5. Всегда ли верно равенство $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$?

○ 6. В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

7. Точка B — середина отрезка AC, а точка C — середина отрезка BD. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

8. Для параллелепипеда $A...D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;
б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;
в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;
г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$.

9. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$.

10. В параллелепипеде $A...D_1$ укажите векторы, равные $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

11. $A...D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение
$$\overrightarrow{B_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$

12. Докажите выполнимость свойств 3, 4, 5.

13. Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

14. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

15. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

*16. Точка O — центр описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

*17. Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

***18.** Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

***19.** $A...D_1$ — куб. Укажите такую точку X, для которой верно равенство $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} + \overrightarrow{XD_1} = \vec{0}$.

***20.** В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами скрещивающихся ребер AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

§ 10. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение. Два вектора называются **коллинеарными**, если при откладывании их от одной точки они располагаются на одной прямой.

Заметим, что коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. То, что векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$ коллинеарны, следует непосредственно из определения умножения вектора на число. Докажем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Из коллинеарности векторов следует, что точки O, A и B принадлежат одной прямой. Если точки A и B лежат по одну сторону от точки O, то положим $t = OB : OA$, если они лежат по разные стороны от точки O, то положим $t = -OB : OA$. В обоих случаях будут выполняться равенство $\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OA}$ и, следовательно, равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. ■

Определение. Три вектора называются **компланарными**, если при откладывании их от одной точки они располагаются в одной плоскости.

Теорема. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно представить единственным образом в виде $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

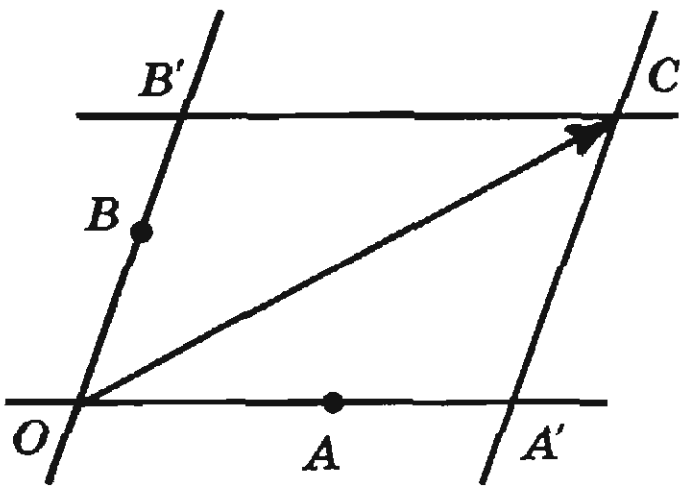


Рис. 41

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O и обозначим их концы, соответственно, A, B и C. Из условия теоремы следует, что точки A, B и C лежат в одной плоскости. Если точка C принадлежит прямой OA, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $s = 0$. Аналогично, если точка C принадлежит прямой OB, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $t = 0$.

Пусть теперь точка C не принадлежит прямым OA и OB. Проведем через нее прямые, параллельные прямым OA и OB. Соответствующие точки пересечения обозначим A' и B' (рис. 41). Тогда $\overrightarrow{OA'} = t\overrightarrow{OA} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = s\overrightarrow{OB} = s\vec{b}$, и, следовательно, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = t\vec{a} + s\vec{b}$. ■

Упражнения

○ **1.** В параллелепипеде $A...D_1$ назовите пары коллинеарных векторов.

○ **2.** В параллелепипеде $A...D_1$ назовите тройки компланарных векторов.

○ **3.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$?

○ **4.** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$ компланарны. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$?

5. Докажите, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых или одной прямой.

6. Докажите, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они лежат на прямых, параллельных одной плоскости.

7. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $|\vec{a}| > |\vec{b}|$. Какое направление имеет вектор $\vec{a} + \vec{b}$? Чему равна его длина?

9. В тетраэдре $ABCD$ точки M_1, M_2 являются точками пересечения медиан, соответственно, граней ADB и BDC. Докажите, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Найдите отношение длин этих векторов.

10. Точки E и F являются серединами, соответственно, ребер AD и B_1C_1 параллелепипеда $A...D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ компланарны.

* **11.** Докажите, что если выполняется равенство $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$, то точки A, B и C принадлежат одной прямой. Причем если $0 < t < 1$, то точка C лежит между A и B.

*12. Докажите, что если выполняется равенство $\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+(1-t-s)\overrightarrow{OC}$, то точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

*13. Докажите, что для правильного пятиугольника $ABCDE$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, где O — центр описанной окружности.

*14. Докажите, что для произвольного тетраэдра $ABCD$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, где O — центроид (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней).

15. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке, совпадающей с центроидом.

16. Докажите, что для произвольного тетраэдра $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD})$, где O — центроид тетраэдра.

*17. Докажите, что для любой системы точек $A_1, \ldots, A_n$ в пространстве существует единственная точка O (центроид) такая, что для произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1}+\ldots+\overrightarrow{XA_n})$.

§ 11. Параллельный перенос

В курсе планиметрии в качестве одного из видов движения плоскости рассматривался параллельный перенос на заданный вектор. Здесь мы определим понятие параллельного переноса в пространстве.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A' так, что векторы $\overrightarrow{AA'}$ равны заданному вектору $\vec{a}$, называется **параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$.

Говорят, что фигура F' получается **параллельным переносом** фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются всевозможными параллельными переносами точек фигуры F на вектор $\vec{a}$ (рис. 42).

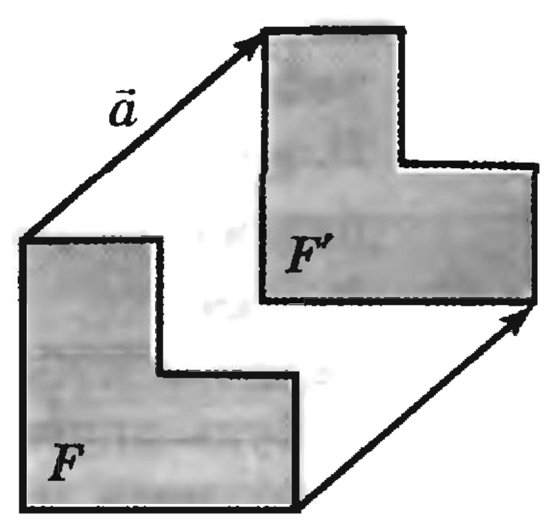


Рис. 42

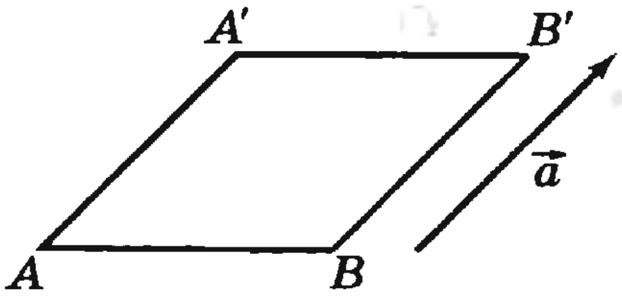


Рис. 43

Теорема. Параллельный перенос является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно (рис. 43). Тогда $AA'B'B$ — параллелограмм, и, следовательно, $AB = A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением. ■

Упражнения

○ **1.** Существует ли параллельный перенос, переводящий ребро AB куба $A...D_1$ в ребро: а) A_1B_1; б) C_1D_1; в) B_1C_1; г) D_1C_1?

○ **2.** Существует ли параллельный перенос, при котором: а) одна грань призмы переводится в другую грань этой призмы; б) одна грань пирамиды переводится в другую грань этой пирамиды?

○ **3.** Можно ли параллельным переносом перевести одну грань в другую в: а) тетраэдре; б) кубе; в) октаэдре; г) икосаэдре; д) додекаэдре?

○ **4.** Может ли параллельный перенос переводить саму в себя: а) прямую; б) плоскость; в) призму; г) пирамиду?

○ **5.** Может ли параллельный перенос переводить: а) две точки в одну точку; б) две прямые в одну прямую; в) две плоскости в одну плоскость?

6. Докажите, что параллельный перенос переводит прямые сами в себя или в параллельные им прямые.

7. Докажите, что параллельный перенос переводит плоскости сами в себя или в параллельные им плоскости.

8. Докажите, что параллельный перенос переводит векторы в равные им векторы.

9. Сколько существует различных параллельных переносов, переводящих в себя данную: а) прямую; б) плоскость?

10. Докажите, что композиция (последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом. Зависит ли эта композиция от порядка выполнения параллельных переносов?

***11.** Нарисуйте фигуру, состоящую из кубов, полученных из куба $A...D_1$, параллельными переносами на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$.

***12.** Докажите, что кубами, полученными параллельными переносами данного куба, можно заполнить все пространство. Назовите какие-нибудь другие фигуры, параллельными переносами которых можно заполнить все пространство.

***13.** Движение переводит прямые сами в себя или в параллельные им прямые. Является ли это движение параллельным переносом?

***14.** Движение переводит плоскости сами в себя или в параллельные им плоскости. Является ли это движение параллельным переносом?

***15.** Движение переводит векторы в равные им векторы. Является ли это движение параллельным переносом?

§ 12. Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая ее прямая (рис. 44). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, *проведем прямую, параллельную прямой* l. Она пересечет плоскость π в некоторой точке A' (см. задачу 11 из § 5), которая называется **параллельной проекцией** точки A на плоскость π в направлении прямой l.

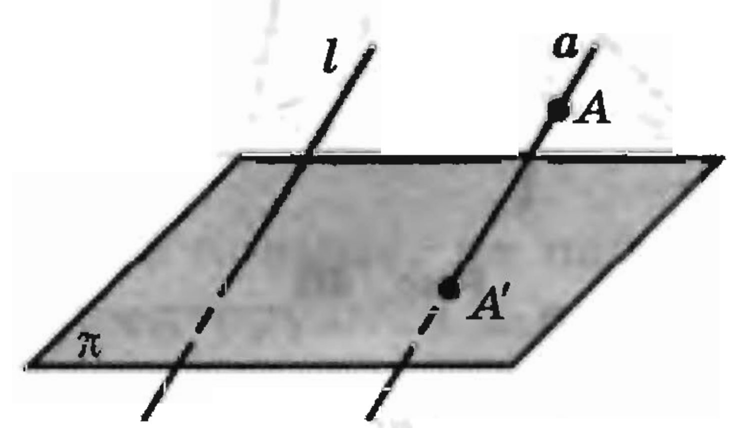


Рис. 44

Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется ее проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется **параллельным проектированием** на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть F — некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру F', которая называется **параллельной проекцией** фигуры F. Говорят также, что фигура F' получена из фигуры F параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. *Если прямая параллельна или совпадает с прямой* l, *то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой* l, *то ее проекцией является прямая.*

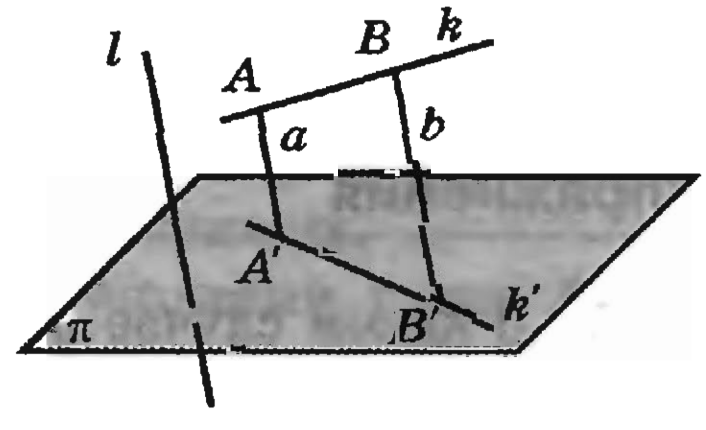


Рис. 45

Доказательство. Пусть прямая k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 45). Возьмем какую-нибудь точку A на прямой k и проведем через нее прямую a, параллельную l. Ее пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведем плоскость α. Ее пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. ■

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того, лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, при параллельном проектировании сохраняется. В частности, середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

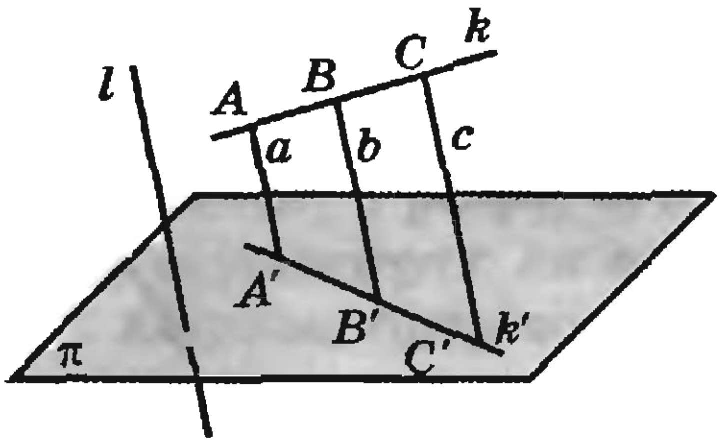


Рис. 46

Доказательство. Пусть k' является проекцией прямой k на плоскость π в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 46). Поскольку прямые k и k' лежат в одной плоскости, то из обобщенной теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$. ■

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

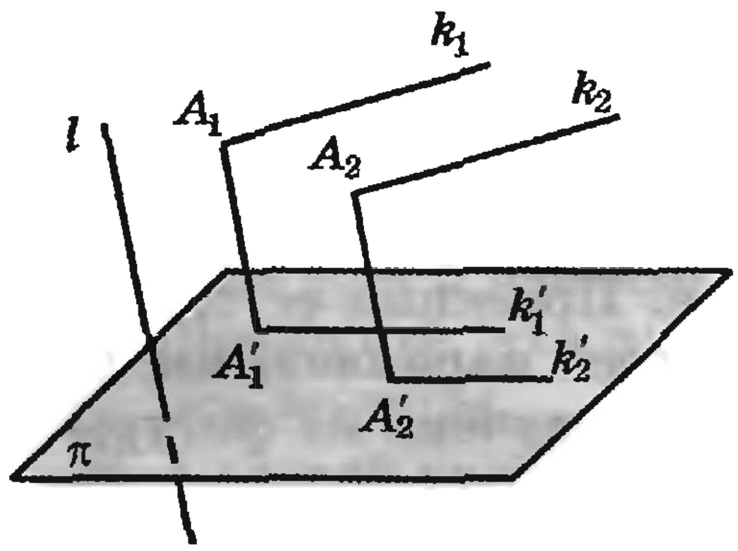


Рис. 47

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же, как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 47). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойств параллельных плоскостей линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны. ■

Упражнения

○ **1.** В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

2. Сколько точек может получиться при параллельном проектировании трех различных точек пространства? Сделайте чертеж.

3. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертеж.

4. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертеж.

5. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертеж.

6. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертеж.

7. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

8. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

9. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

°**10.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

°**11.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

°**12.** В пространстве задана прямая. Может ли ее параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

°**13.** Можно ли по параллельной проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?

°**14.** В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием ее параллельной проекции на плоскость?

°**15.** Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

°**16.** Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

17. Может ли параллельная проекции отрезка быть больше (меньше) самого отрезка?

18. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования?

***19.** Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

***20.** Точки A', B' являются параллельными проекциями точек A, B. $AA' = a$, $BB' = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите расстояние между точкой C и ее проекцией C'.

§ 13. Параллельные проекции плоских фигур

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно *важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят* в поверхность основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги — основаниями цилиндров и конусов.

Теорема. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то ее параллельная проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.

Доказательство. Пусть A, B — точки фигуры F и A', B' — их параллельные проекции (рис. 48). Тогда $ABB'A'$ — параллелограмм. Поэтому параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$ переводит точку B в B'. Поскольку точку B фигуры F можно выбирать произвольно, то этот параллельный перенос переводит фигуру F в фигуру F'. Значит, фигуры F и F' равны. ■

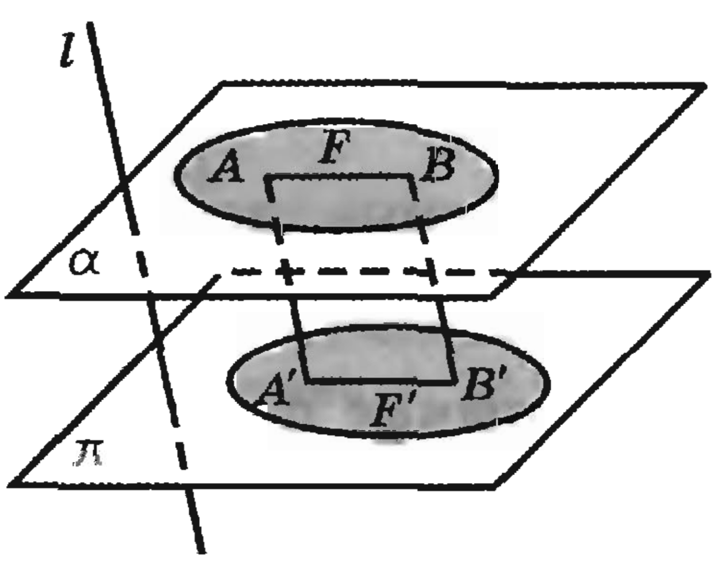


Рис. 48

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причем если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако поскольку при параллельном проектировании длина отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем,

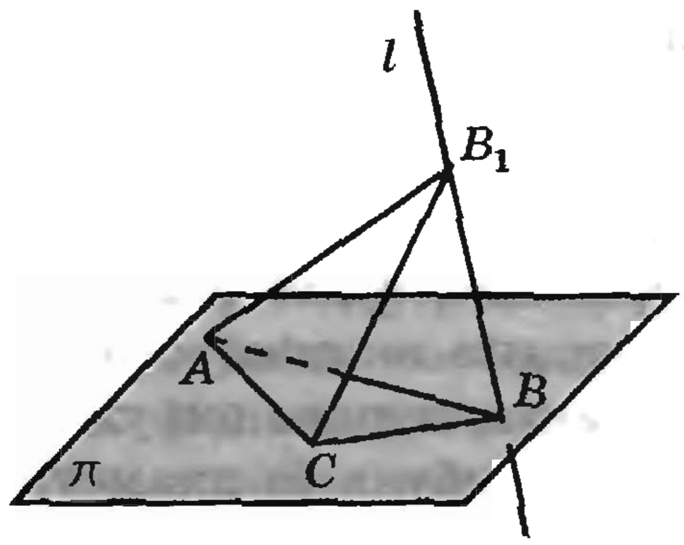


Рис. 49

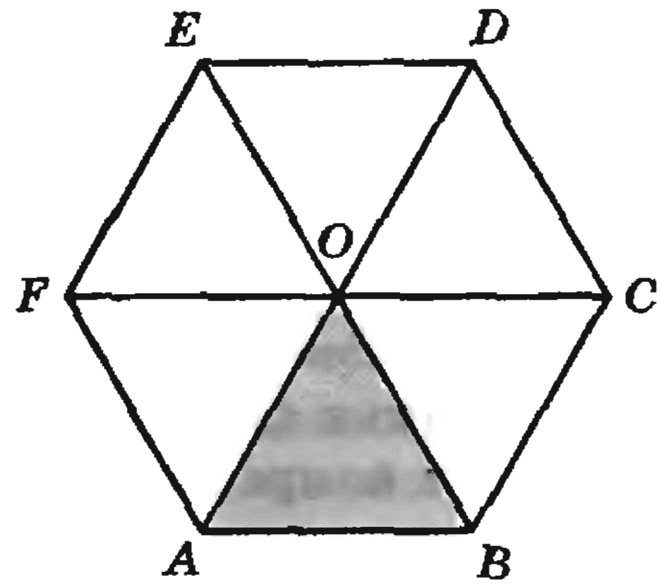


Рис. 50

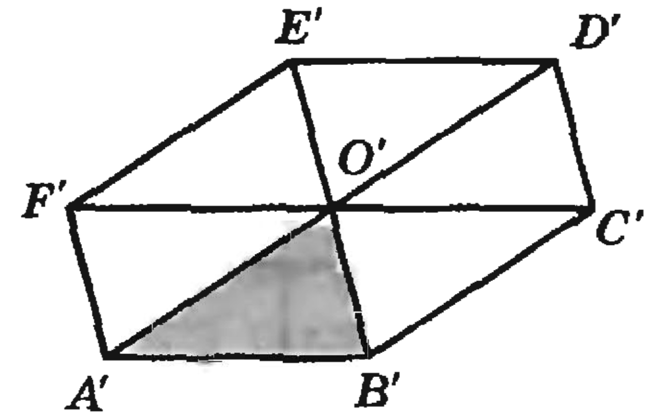


Рис. 51

что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 49). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 50). Выберем какой-нибудь треугольник, например, AOB. Его проекцией может быть произвольный треугольник $A'O'B'$ на плоскость π (рис. 51). Далее отложим $O'D'=A'O'$ и $O'E'=B'O'$. Теперь из точек A' и D' проведем прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B' и E' проведем прямые, параллельные прямой $A'O'$. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Выясним, какая фигура является параллельной проекцией окружности. Пусть F — окружность в пространстве, F' — ее проекция на плоскость π в направлении прямой l.

Если прямая l параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности. Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость окружности (рис. 52). Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости π, и $A'B'$ — его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмем какой-нибудь другой диаметр, CD, и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Так как при параллельном проектировании

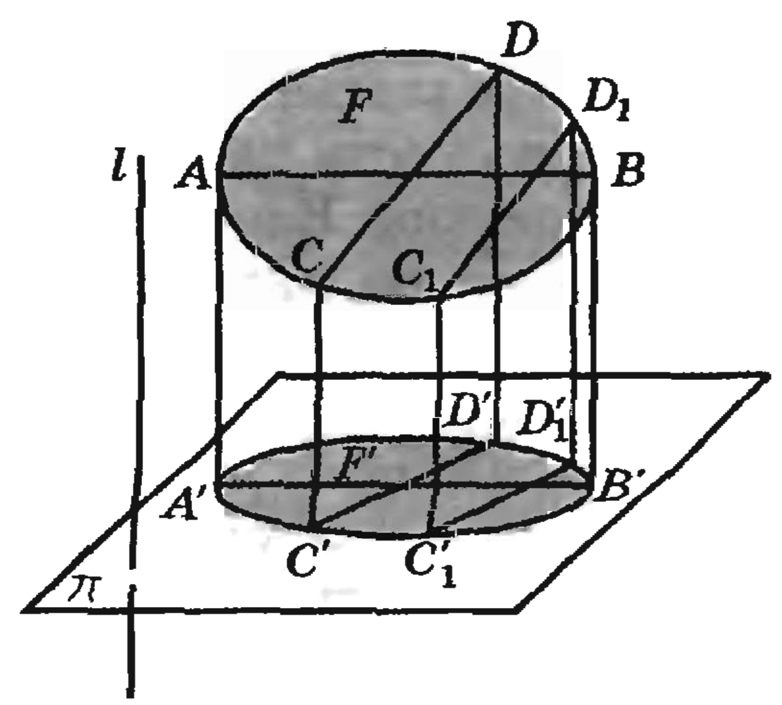


Рис. 52

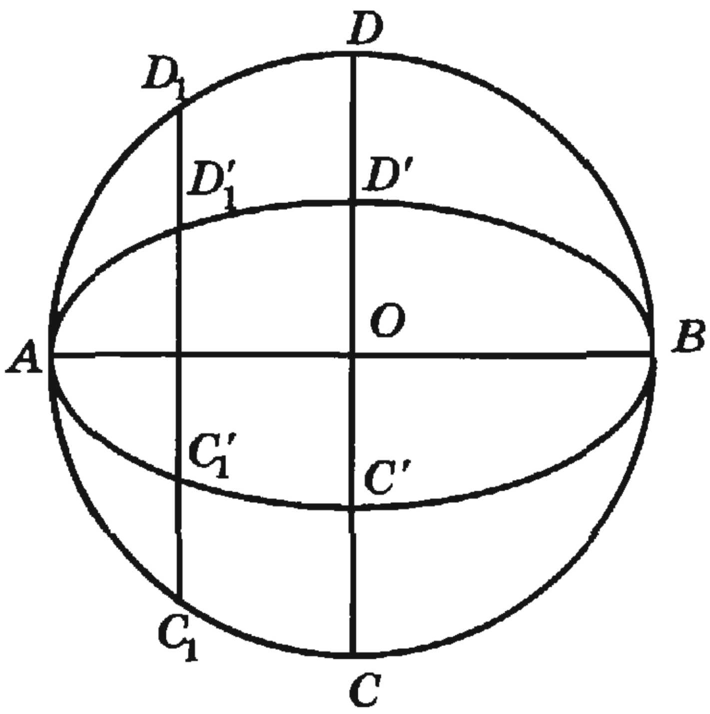


Рис. 53

сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь ее диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется **эллипсом**. Например, на рисунке 53 изображен эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

Упражнения

○ **1.** Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треугольника?

○ **2.** Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника быть: а) прямоугольный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?

3. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется: а) в равносторонний треугольник; б) в равнобедренный треугольник?

4. Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?

5. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?

○ **6.** Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?

7. Параллельной проекцией каких фигур может быть квадрат?

8. Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция?

9. В какую фигуру может проектироваться трапеция?

10. Изобразите параллельную проекцию: а) прямоугольника; б) трапеции.

○ **11.** Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника: а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

***12.** Изобразите параллельную проекцию правильного восьмиугольника.

***13.** Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников.

14. Нарисуйте эллипсы, полученные из окружности сжатием и растяжением: а) в 1,5 раза; б) в 2 раза; в) в 3 раза.

***15.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображения двух ее перпендикулярных диаметров.

***16.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение касательной: а) параллельной данной хорде; б) проходящей через данную точку.

***17.** Изобразите параллельную проекцию квадрата: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

***18.** Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника: а) вписанного в данную окружность; б) описанного около нее.

***19.** Постройте изображение прямоугольного треугольника: а) вписанного в окружность; б) описанного около окружности.

***20.** Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

§14. Изображение пространственных фигур

Как говорилось выше, для изображения пространственных фигур используют параллельную проекцию. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется **плоскостью изображений**, а сама проекция фигуры — **изображением**.

Приведем примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани — параллелограммы, и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 12).

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 11). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 13).

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 14).

Рис. 54

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника (рис. 17). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать впечатление о трехмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

В живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (*impossibility* — «невозможность») — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М. Эшер (1898—1972) в гравюрах «Бельведер» (рис. 54), «Водопад» (рис. 55), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 56) изобразил невозможные объекты.

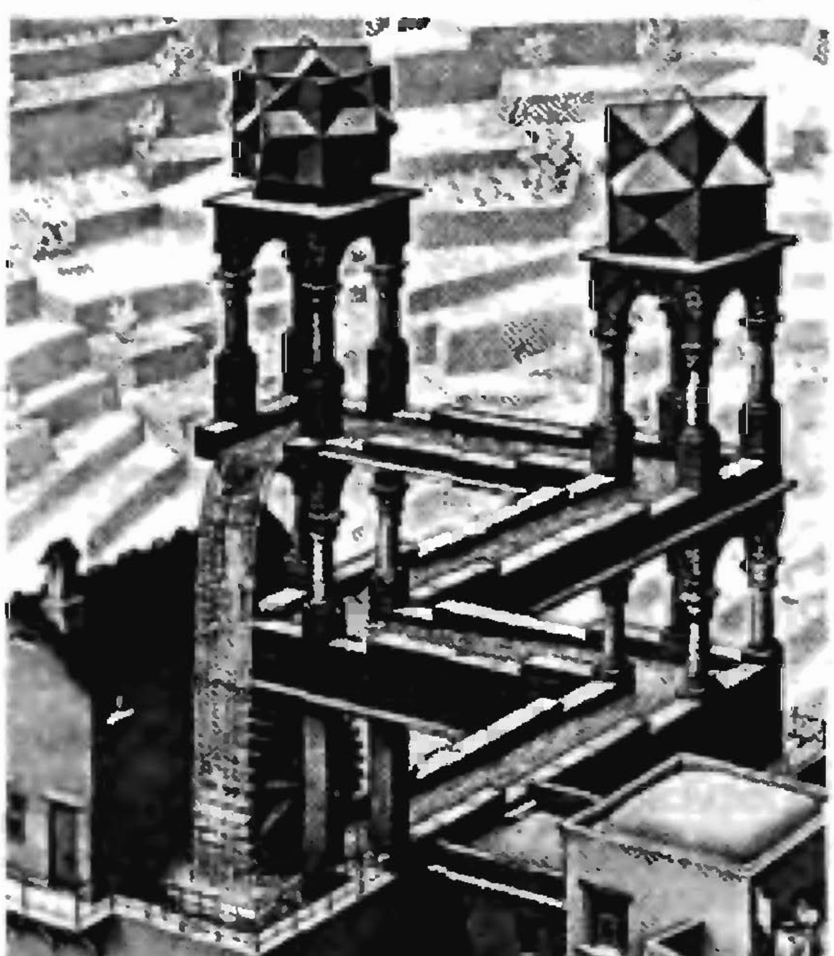


Рис. 55

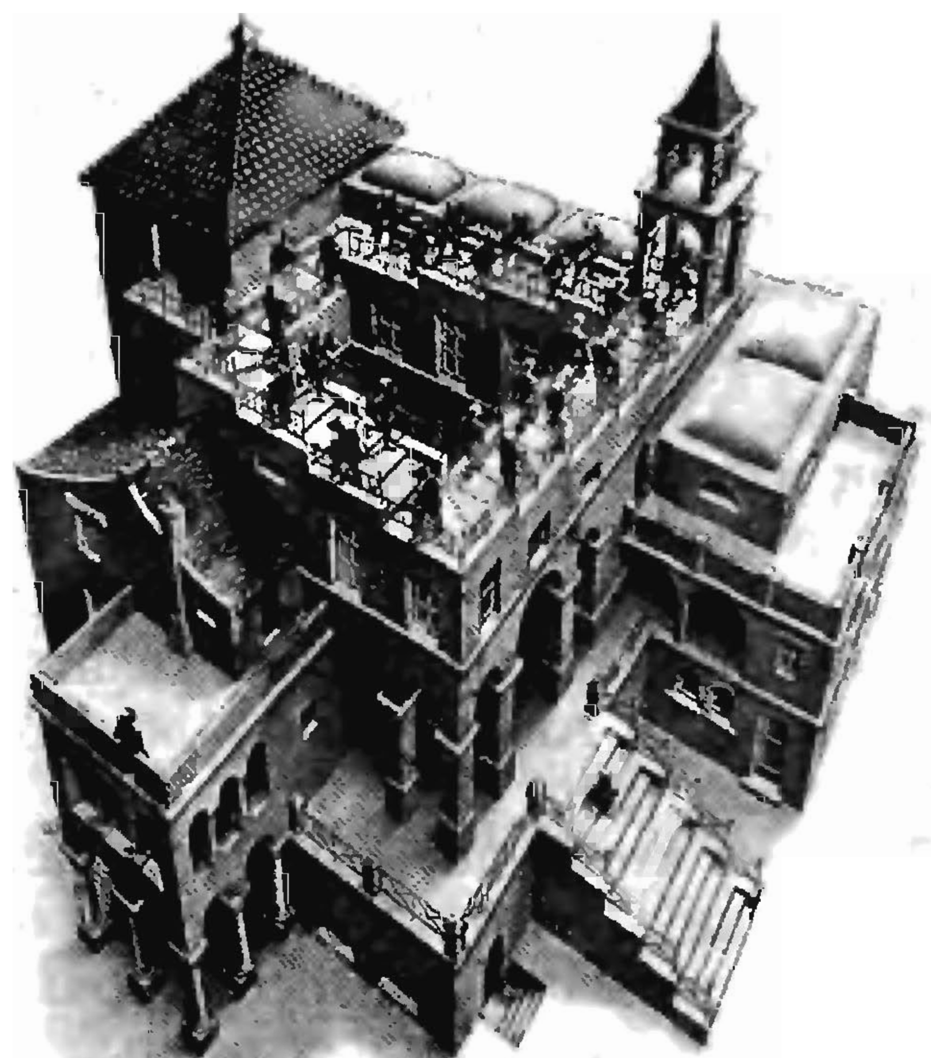


Рис. 56

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 57.

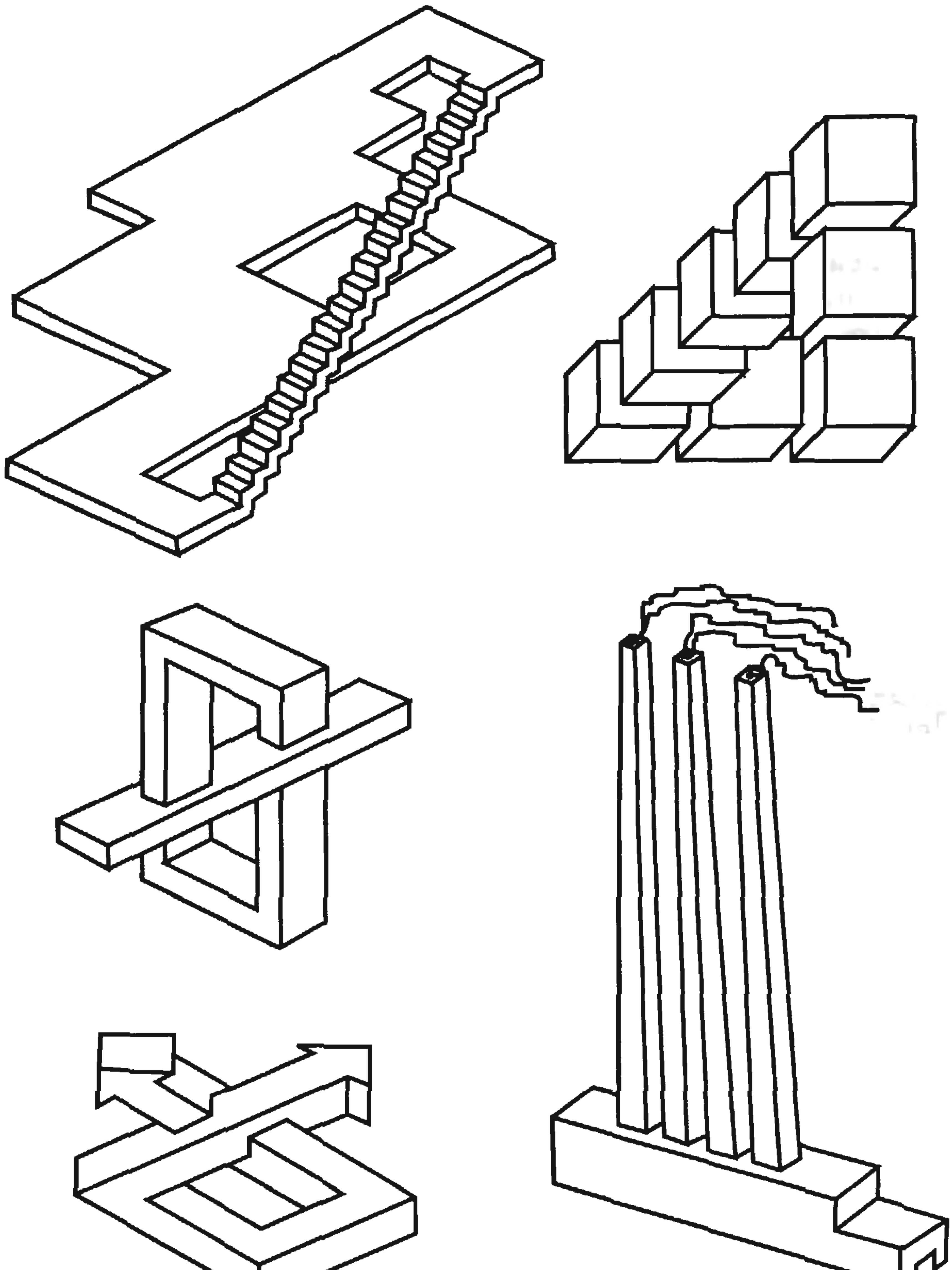


Рис. 57

Упражнения

1. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

2. Постройте изображение куба, ребро которого параллельно плоскости проектирования, а грани — нет.

3. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов.

○ **4.** На рисунке 13 изображен прямоугольный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

5. На рисунке 12 изображен наклонный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

6. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

7. На рисунке 14 изображена треугольная призма. Верно ли утверждение о том, что какие-то ее ребра параллельны плоскости проектирования?

8. Постройте изображение правильного тетраэдра $ABCD$, грань ABD которого параллельна плоскости проектирования. Каким будет изображение треугольника ABD?

9. Изобразите в параллельной проекции правильную четырехугольную пирамиду.

10. Изобразите правильный октаэдр $SABCDS'$, две диагонали которого AC и SS' параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырехугольника $ASCS'$?

11. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображенные на рисунке 58?

***12.** Возможен ли многогранник, изображение которого показано на рисунке 59?

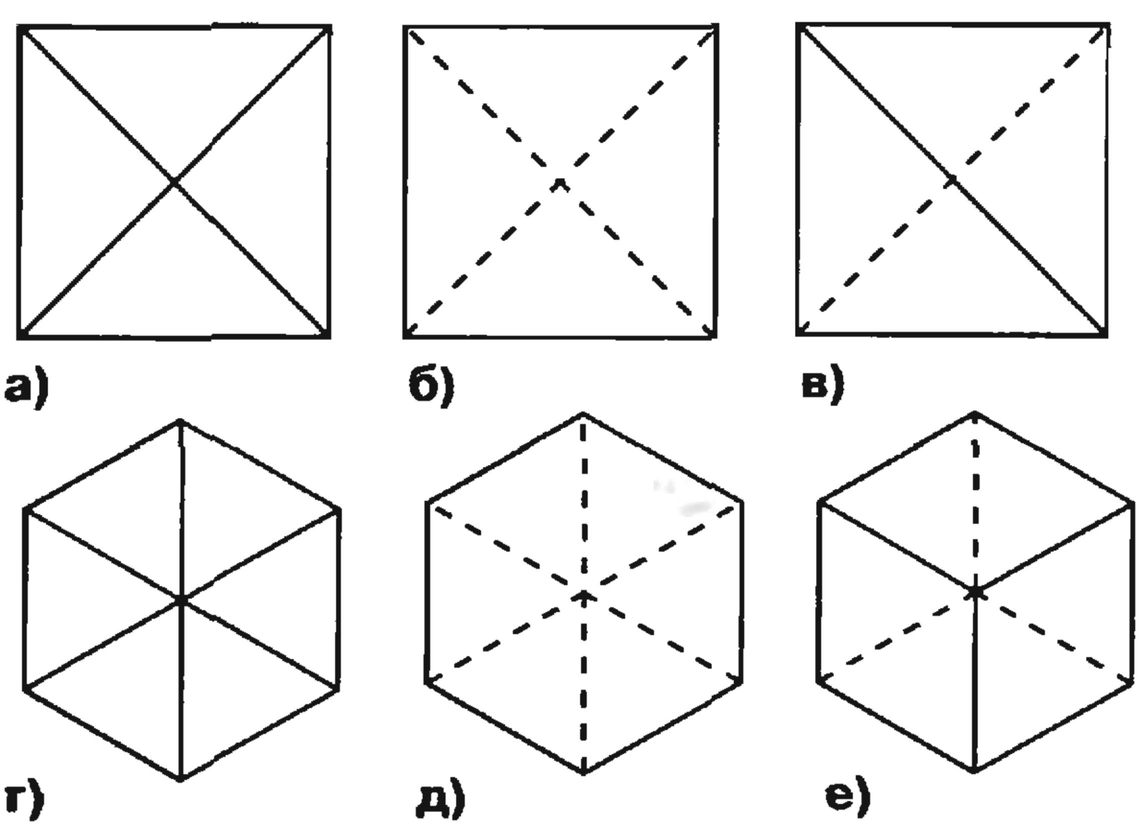


Рис. 58

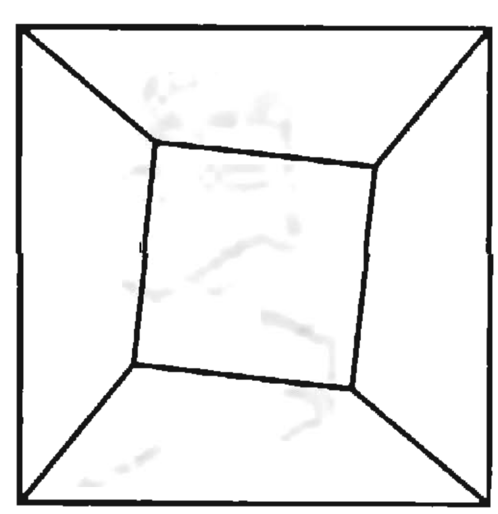


Рис. 59

§ 15. Сечения многогранников

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 60); б) иметь одну общую точку — вершину многогранника (рис. 61); в) иметь общий отрезок — ребро многогранника (рис. 62); г) иметь общий многоугольник — грань многогранника (рис. 63).

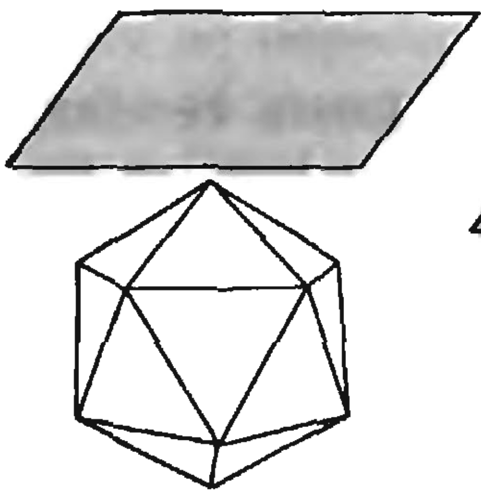


Рис. 60

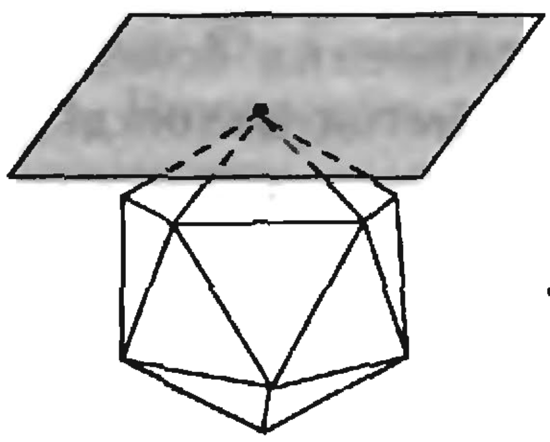


Рис. 61

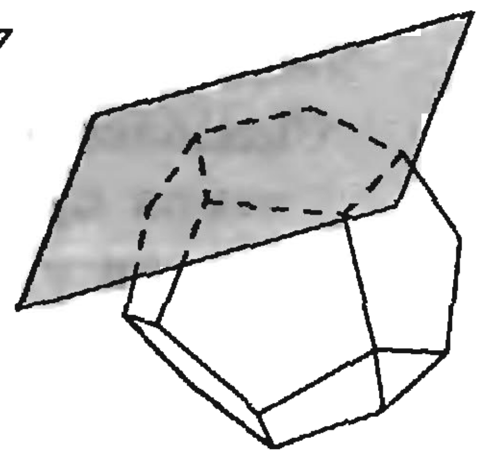


Рис. 62

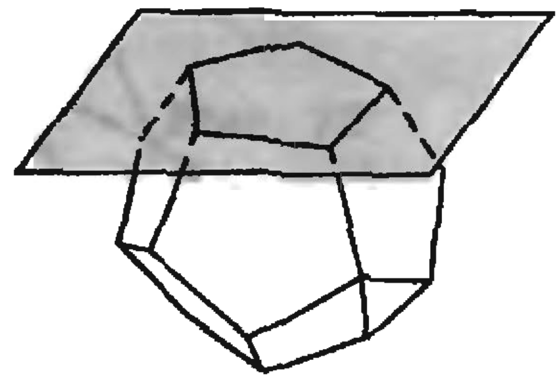


Рис. 63

Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общей частью многогранника и плоскости будет многоугольник, называемый **сечением** многогранника плоскостью (рис. 64).

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и два прилежащих к ней боковых ребра, называется **диагональным сечением** (рис. 65).

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется **диагональным сечением** (рис. 66).

Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна ее основанию (рис. 67). Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой.** Сечение пирамиды также называется **основанием** усеченной пирамиды.

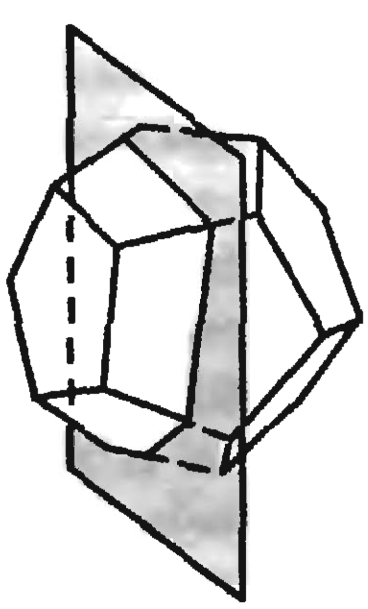


Рис. 64

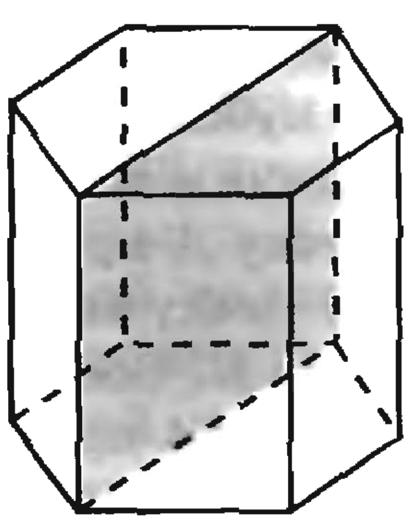


Рис. 65

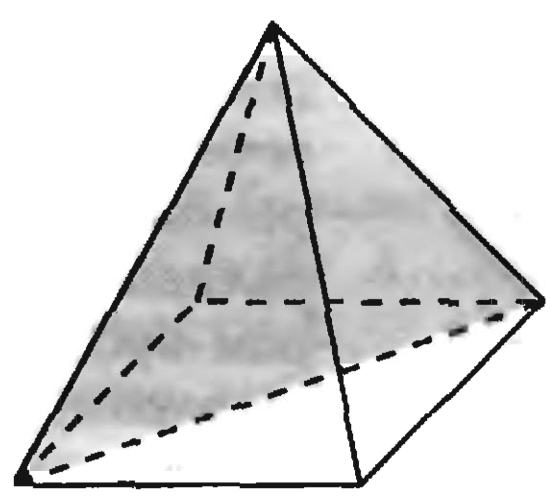


Рис. 66

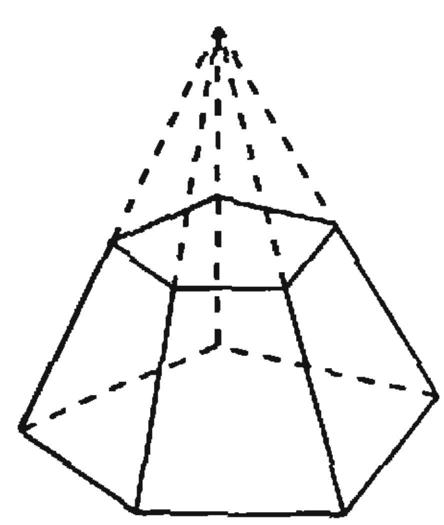


Рис. 67

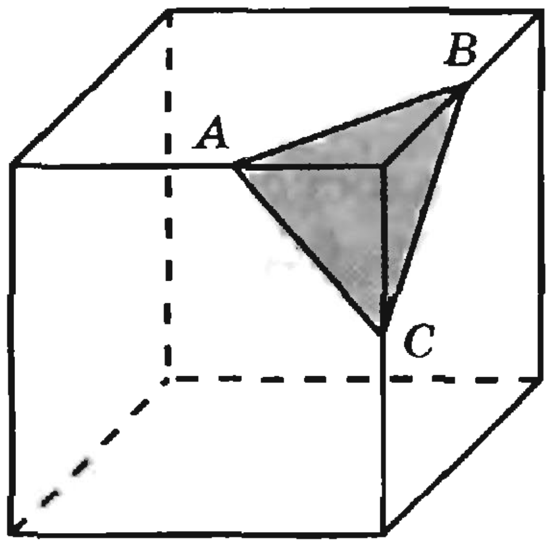


Рис. 68

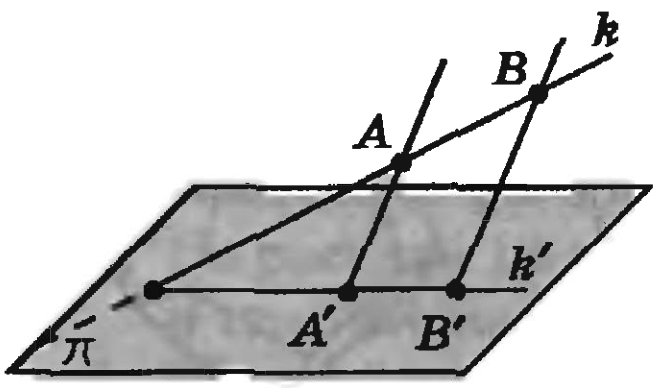


Рис. 69

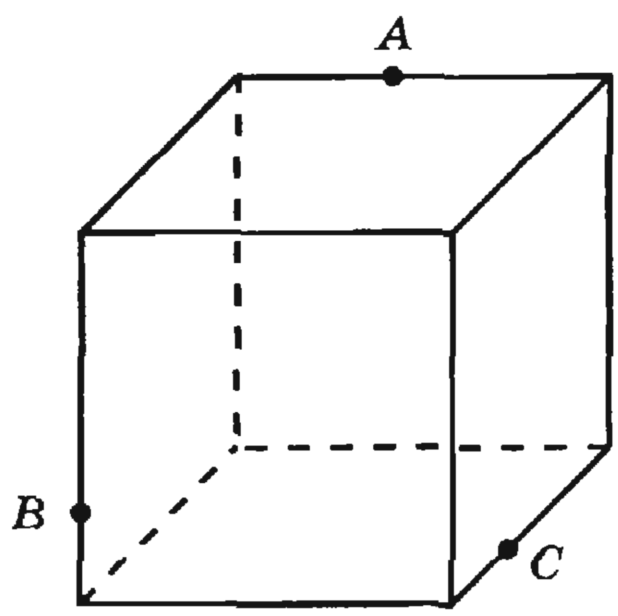


Рис. 70

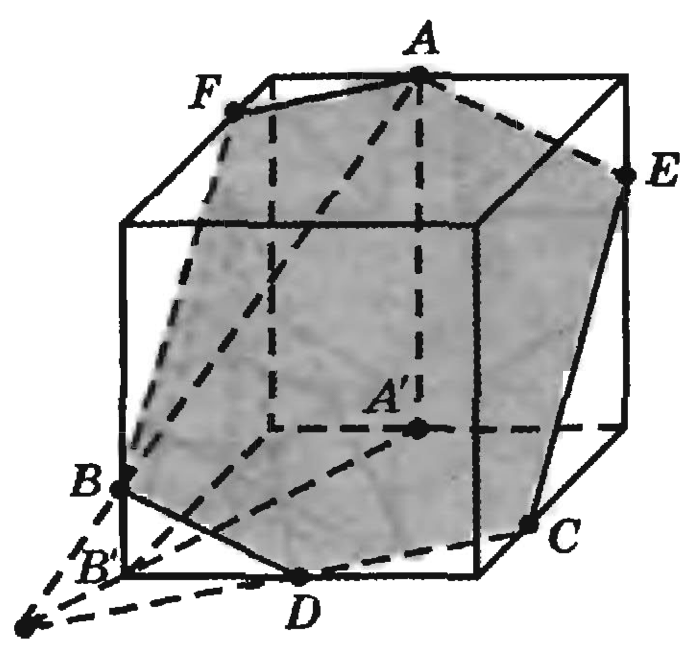


Рис. 71

Рассмотрим вопрос о построении сечений *многогранника плоскостью.*

Пусть дано изображение куба и три точки — A, B, C, принадлежащие ребрам этого куба, выходящим из одной вершины. Тогда, для того чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, достаточно просто соединить их отрезками. Полученный треугольник ABC и будет искомым изображением сечения куба (рис. 68).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 69).

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходящего через три точки A, B, C, принадлежащие попарно *скрещивающимся ребрам этого куба* (рис. 70). Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (рис. 71). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F,

B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 71).

В качестве примера построим изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки — A, B, C, принадлежащие ее ребрам (рис. 72). Проведем прямую AB и точку ее пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и точку ее пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

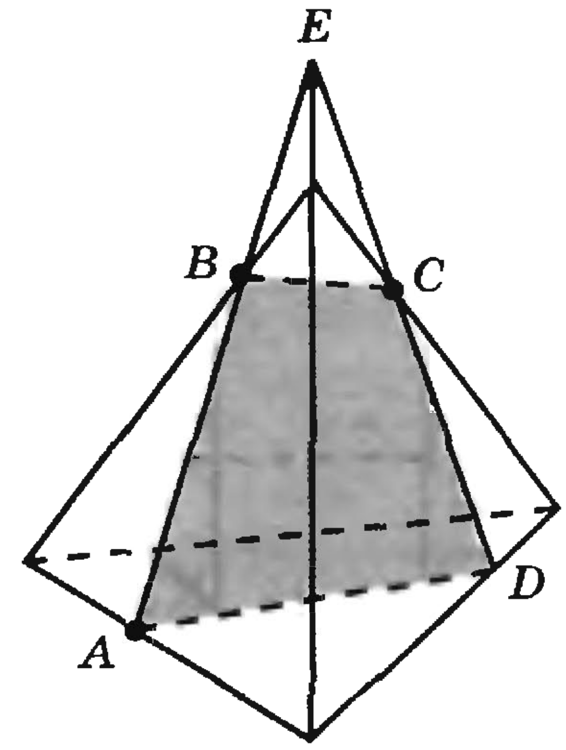


Рис. 72

Упражнения

1. Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью?
2. Сколько диагональных сечений имеет n-угольная:
   а) призма; б) пирамида?
3. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная усеченная пирамида?
4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
   а) треугольник;
   б) правильный треугольник;
   в) равнобедренный треугольник;
   г) прямоугольный треугольник;
   д) тупоугольный треугольник?
5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
   а) квадрат; г) ромб;
   б) прямоугольник; д) трапеция;
   в) параллелограмм; е) прямоугольная трапеция?
6. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
   а) пятиугольник;
   б) правильный пятиугольник?
7. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
   а) шестиугольник;
   б) правильный шестиугольник;
   в) многоугольник с числом сторон больше шести?
8. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку K — середину ребра CC_1?
9. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G — середины, соответственно, ребер AD, A_1B_1, B_1C_1?

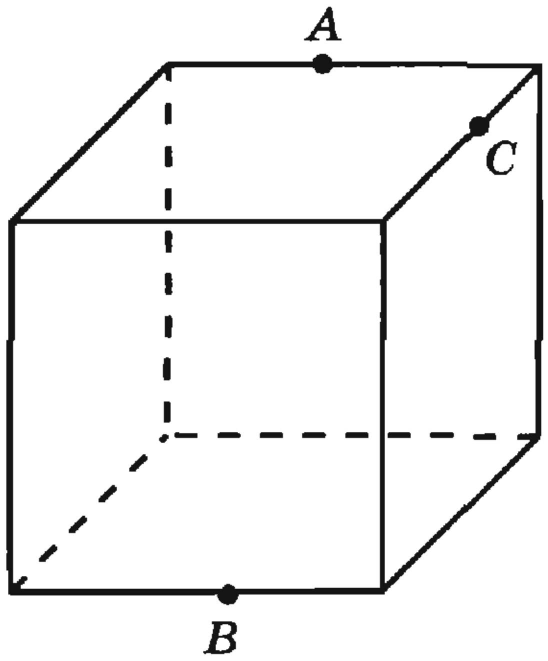


Рис. 73

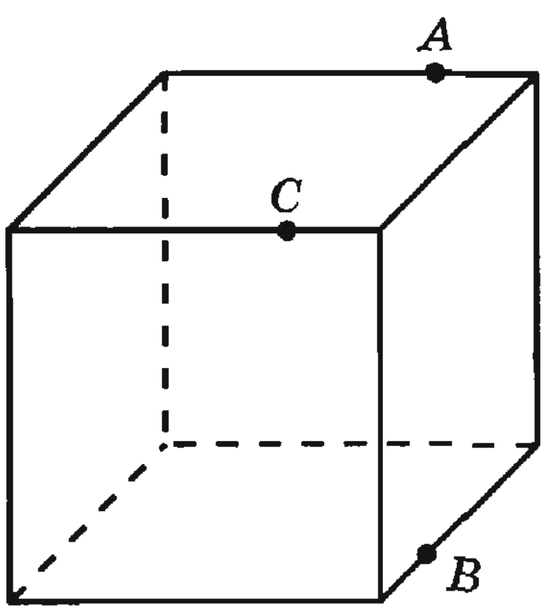


Рис. 74

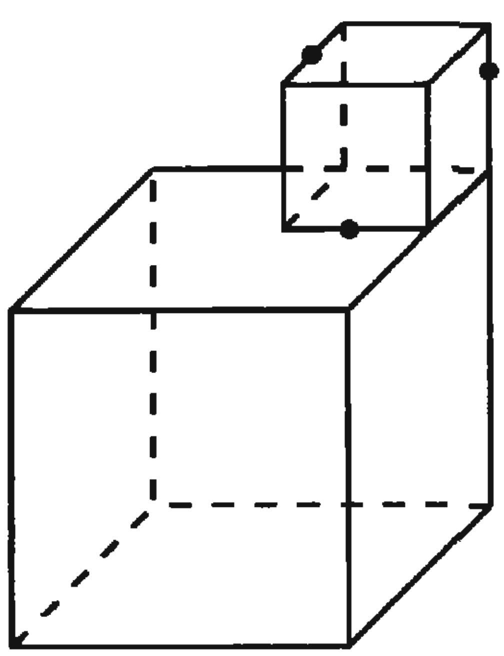


Рис. 75

10. Дан куб $A...D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

11. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках 73, 74.

12. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

13. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

***14.** Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 75). Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые принадлежат скрещивающимся ребрам меньшего куба.

***15.** Найдите сечение куба плоскостью, имеющее наибольшую площадь.

16. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 76.

○17. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

18. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N — середины, соответственно, ребер AD, CD?

19. Как построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной грани BDC и проходящей через точку K — середину ребра AD?

20. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?

21. Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.

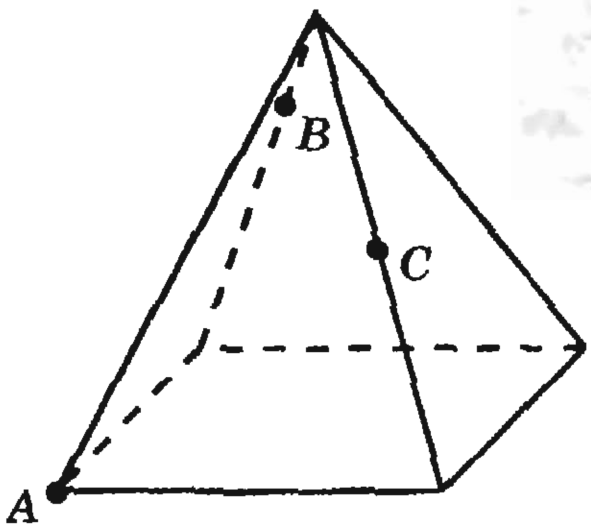


Рис. 76

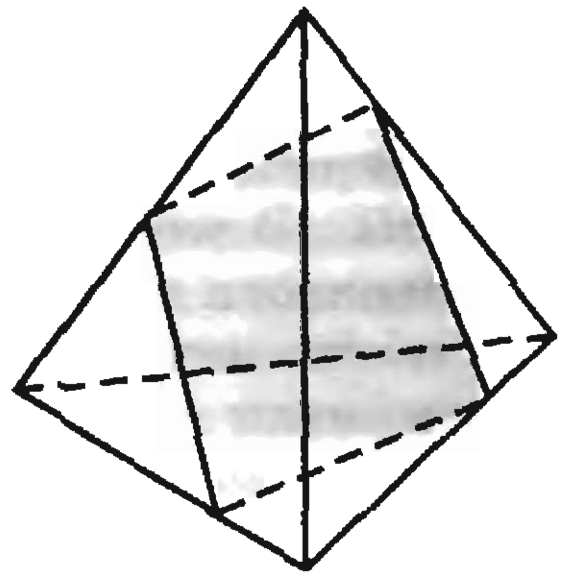


Рис. 77

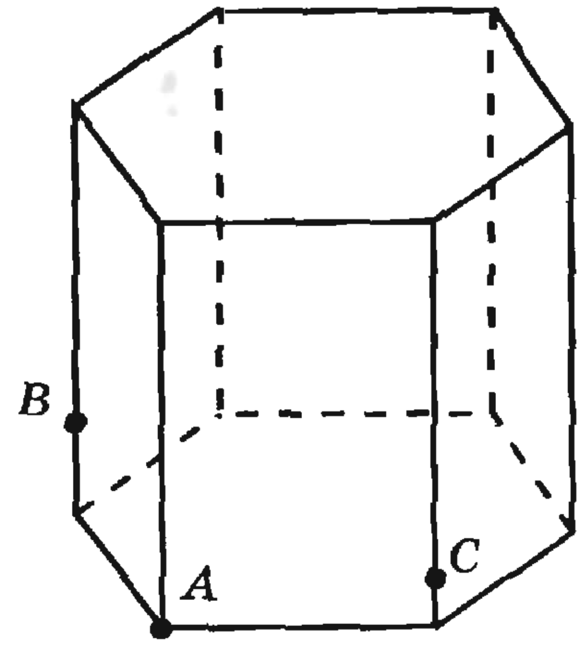


Рис. 78

22. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник, изображенный на рисунке 77?

23. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 78.

24. Определите вид сечения правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещивающейся с ней стороны верхнего основания.

25. Верно ли утверждение о том, что в сечении правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух соседних боковых ребер и вершину верхнего основания, принадлежащей смежной боковой грани, получается равнобедренная трапеция?

26. Как пересечь правильную треугольную призму тремя плоскостями таким образом, чтобы получилась правильная шестиугольная призма? Сделайте соответствующее построение.

Глава III

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§16. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых

Определение угла в пространстве аналогично определению угла на плоскости.

Определение. **Углом** в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами.

Определение. **Углом между двумя пересекающимися прямыми** в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.

Определение. *Две пересекающиеся прямые в пространстве называются* **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка перпендикулярны, *если они лежат на перпендикулярных прямых. Углом между дву*мя пересекающимися отрезками будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы $45°$.

Так же, как и для плоскости, два луча в пространстве называются **сонаправленными**, если один из них содержит другой или они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, соединяющей их вершины.

Используя свойства параллельного проектирования, докажем следующую теорему.

Теорема. Углы с сонаправленными сторонами равны.

Доказательство. Пусть лучи a_1, b_1 с вершиной в точке C_1 соответственно сонаправлены лучам a_2, b_2 с вершиной в точке C_2. Предположим, что лучи лежат в разных плоскостях γ_1, γ_2 (рис. 79). Случай, когда лучи лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Заметим, что, по признаку параллельности, плоскости γ_1 и γ_2 параллельны. Параллельное проектирование в направлении прямой C_1C_2 на плоскость γ_2 переводит лучи a_1, b_1 в лучи a_2, b_2 соответственно. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ■

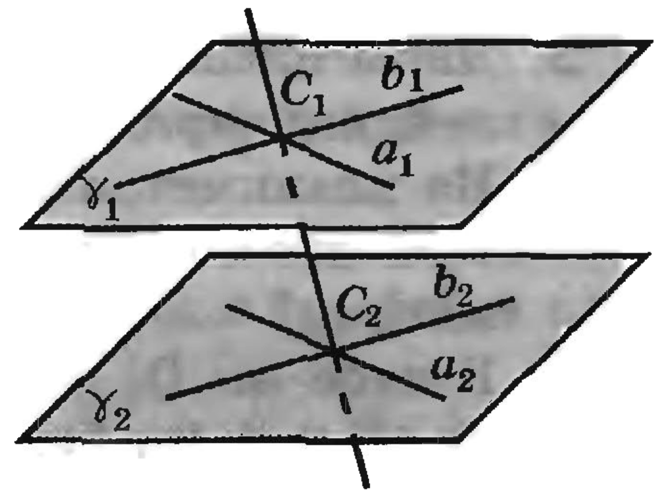


Рис. 79

Следствие. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 80). Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведем через нее прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то *это определение не зависит от выбора точки* C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

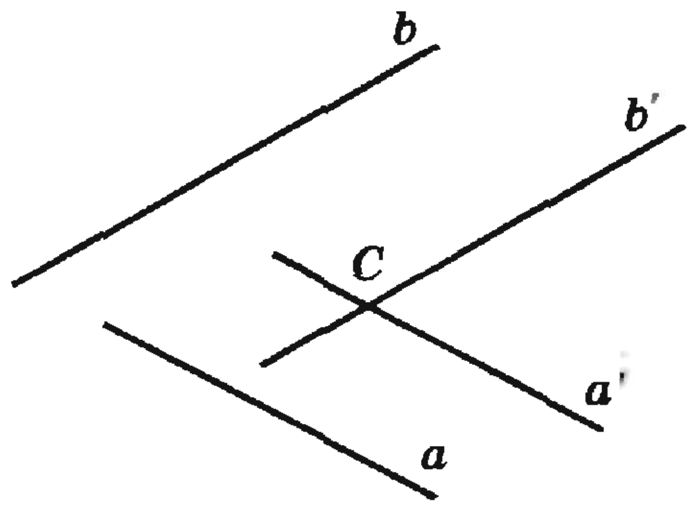


Рис. 80

Две скрещивающиеся прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними *прямой*.

Два отрезка будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

Упражнения

○ **1.** Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **2.** Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **3.** Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

○ **4.** Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

5. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых:
а) AD и A_1B_1; б) AC и B_1D_1; в) AC и DD_1.

6. Чему равен угол между пересекающимися ребрами: а) куба; б) правильного тетраэдра?

7. Найдите угол между диагональю грани куба и пересекающимся с ней ребром.

8. Найдите угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю основания.

9. Найдите угол между пересекающимися диагоналями двух различных граней куба.

10. Найдите угол между диагональю куба и пересекающим ее ребром куба.

11. Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, которые образуют прямые:
а) AA_1 и B_1C_1; б) AA_1 и CD.

12. В кубе $A...D_1$ найдите углы между скрещивающимися прямыми:
а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AB_1 и BC_1.

13. В пирамиде, все грани которой правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенными к общему ребру.

14. В треугольной призме, боковыми гранями которой являются квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.

15. Найдите угол между двумя непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

16. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания, равной боковому ребру, найдите угол между стороной основания и скрещивающимся с ней боковым ребром.

17. Могут ли быть перпендикулярными прямые OB и OC, если углы AOB и AOC равны каждый $60°$?

18. A, B, C — точки на попарно перпендикулярных лучах OA, OB, OC. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $OA = OB = OC$.

19. В прямоугольном параллелепипеде угол между диагоналями одного из диагональных сечений равен $90°$. Может ли угол между диагоналями разных диагональных сечений равняться $90°$?

20. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, вдвое больше стороны основания. Найдите углы между диагоналями параллелепипеда.

21. Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под прямым углом. Укажите взаимное расположение прямых b и c (в общем случае) и угол между ними.

22. Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под углом 45°. Укажите взаимное расположение прямых b и c (в общем случае) и угол между ними.

23. Концы отрезка AB принадлежат двум плоскостям α и β, которые пересекаются по прямой MN. В плоскости β проведена прямая BC, параллельная прямой MN. Прямая BC образует с прямой AB угол в 30°. Найдите углы между прямыми AB и MN.

24. Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, образуемые: а) радиусами OK и O_1K_1 окружностей, вписанных в грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, проведенными в точки касания с ребрами DC и A_1D_1; б) прямыми BD и O_1K_1.

25. На поверхности куба найдите точки, из которых диагональ куба видна под наименьшим углом.

§17. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определим понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Заметим, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, ей параллельная, и, значит, исходная прямая не была бы перпендикулярна данной плоскости.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 81). Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведем через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых

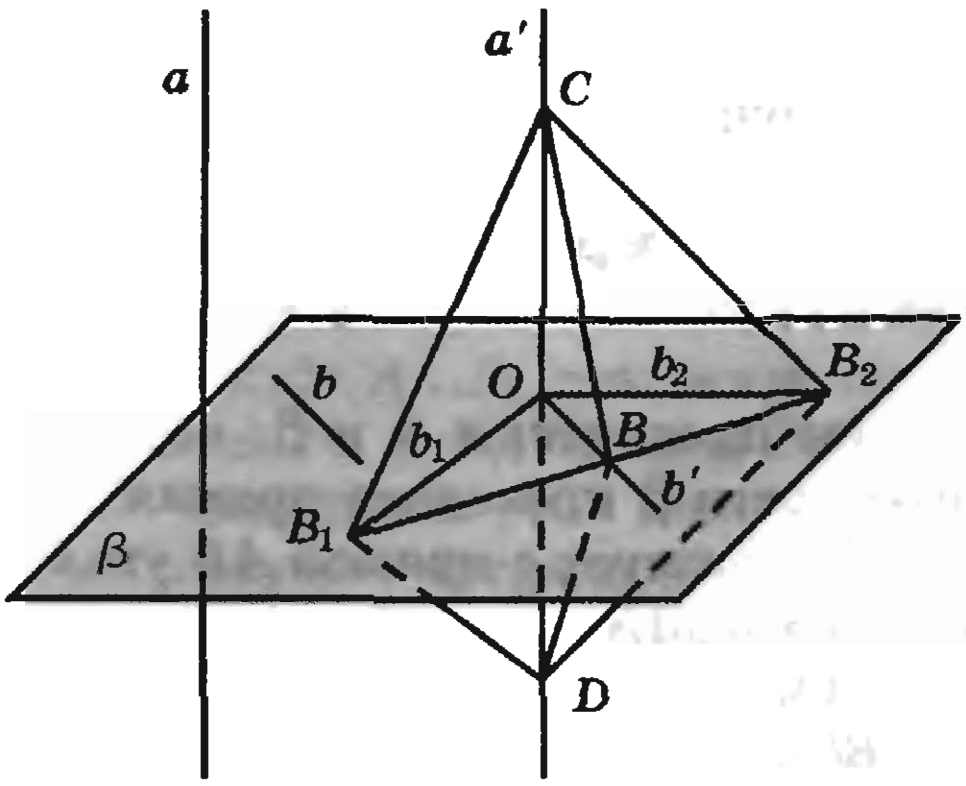


Рис. 81

a', b'. Для этого в плоскости β проведем прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$. Аналогично, из равенства треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по двум сторонам и углу между ними). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по трем сторонам), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β. ■

Воспользуемся этим признаком для доказательства того, что боковые ребра прямой призмы перпендикулярны ее основаниям.

Действительно, боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники. Поэтому каждое боковое ребро перпендикулярно двум прилежащим сторонам основания призмы и, следовательно, перпендикулярно основанию.

Определение. Параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования, называется **ортогональным проектированием.**

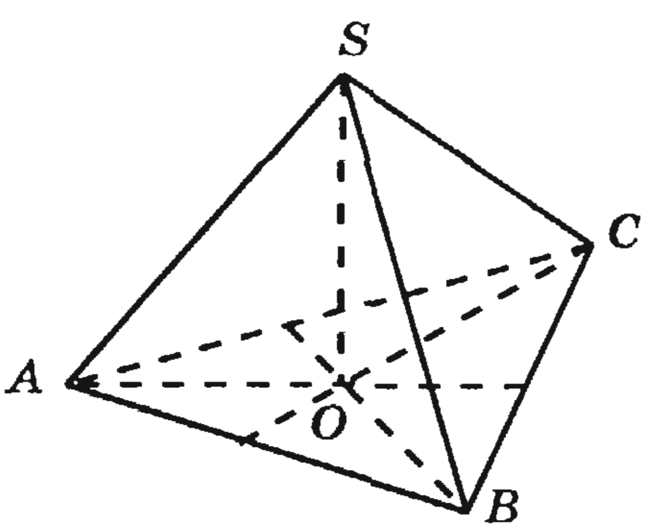


Рис. 82

Так как ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, то оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

(*) Выясним, как строится ортогональная проекция прямоугольного параллелепипеда. Для этого докажем, что если в треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S равны 90°, то ортогональная проекция вершины S на плоскость основания совпадает с ортоцентром O (точка пересечения высот) треугольника ABC (рис. 82).

Действительно, прямая SC перпендикулярна прямым SA и SB. Следовательно, она перпендикулярна плоскости грани SAB и, значит, перпендикулярна прямой AB. Прямая SO перпендикулярна плоскости основания ABC и, следовательно, перпендикулярна AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна прямым SC и SO. Следовательно, AB перпендикулярна плоскости SCO и, значит, перпендикулярна прямой CO, лежащей в этой плоскости. Аналогично показывается, что AC перпендикулярна BO, BC перпендикулярна AO.

Из этого следует, что если даны изображения A, C и D_1 вершин прямоугольного параллелепипеда, то изображение вершины D будет точкой пересечения высот треугольника ACD_1. Соединяя точку D с точками A, C и D_1, построим изображения трех ребер параллелепипеда. Проводя отрезки, параллельные построенным, получим изображения остальных ребер параллелепипеда (рис. 83).

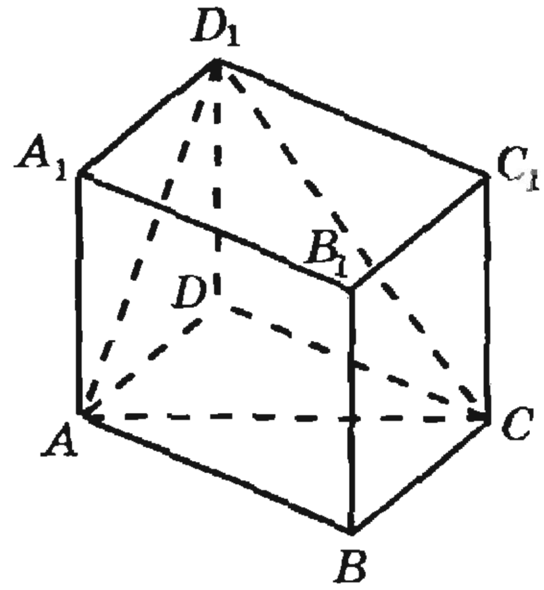


Рис. 83

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

○ **2.** Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

○ **3.** Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

4. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде боковое ребро перпендикулярно плоскости основания.

5. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде диагональ основания перпендикулярна пересекающему ее боковому ребру.

6. Докажите, что в кубе каждое ребро перпендикулярно двум его граням.

7. Боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно диагоналям основания. Докажите, что этот параллелепипед является прямым.

8. В правильном тетраэдре проведите плоскость, перпендикулярную его ребру.

9. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC_1 и BD.

10. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде сторона основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней ребру.

○ **11.** Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

○ **12.** Верно ли, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная: а) его диаметру; б) двум его диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

○ **13.** Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

○ **14.** При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

15. Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

16. Прямая AB пересекает плоскость β. В плоскости β расположен треугольник CDE; AB перпендикулярна CD и AB перпендикулярна DE. Каково взаимное расположение прямых AB и CE?

17. Два прямоугольных треугольника ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета — AC и CD — проведена плоскость α. 1) Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой c плоскости α, проведенной через точку C. 2) Можно ли опустить условие о несовпадении плоскостей данных треугольников? 3) Можно ли опустить условие о том, что c проходит через точку C?

18. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b, c.

19. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

20. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна плоскости α, то прямая a перпендикулярна плоскости β.

21. Докажите, что через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

22. Докажите, что через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

○ **23.** Может ли ортогональная проекция отрезка быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка?

○ **24.** Может ли ортогональная проекция угла быть: а) меньше угла; б) равна углу; в) больше угла?

○ **25.** Может ли ортогональная проекция квадрата быть: а) прямоугольником; б) параллелограммом; в) трапецией?

26. Постройте какую-нибудь ортогональную проекцию прямоугольного параллелепипеда.

***27.** Какой фигурой является ортогональная проекция куба на плоскость, перпендикулярную диагонали куба?

***28.** Треугольная пирамида $SABC$ ортогонально проектируется на основание ABC. Докажите, что если вершина S проектируется внутрь треугольника ABC, то плоские углы при вершине пирамиды меньше их ортогональных проекций.

*29. Какова наибольшая площадь ортогональной проекции правильного тетраэдра с ребром a?

*30. В каком случае площадь ортогональной проекции прямоугольного параллелепипеда будет наибольшей?

*31. Постройте какую-нибудь ортогональную проекцию куба.

§18. Перпендикуляр и наклонная

Пусть точка A не принадлежит плоскости π. Проведем прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскости π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим O. Отрезок AO называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость π.

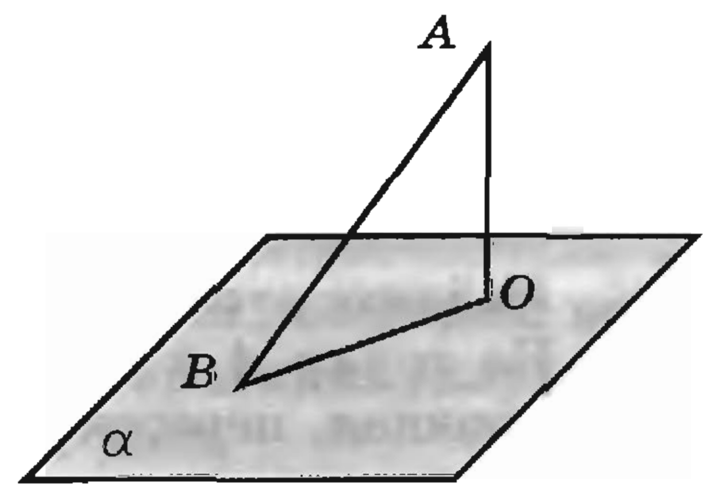
Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется **высотой пирамиды**.

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого ее основания, называется **высотой призмы**.

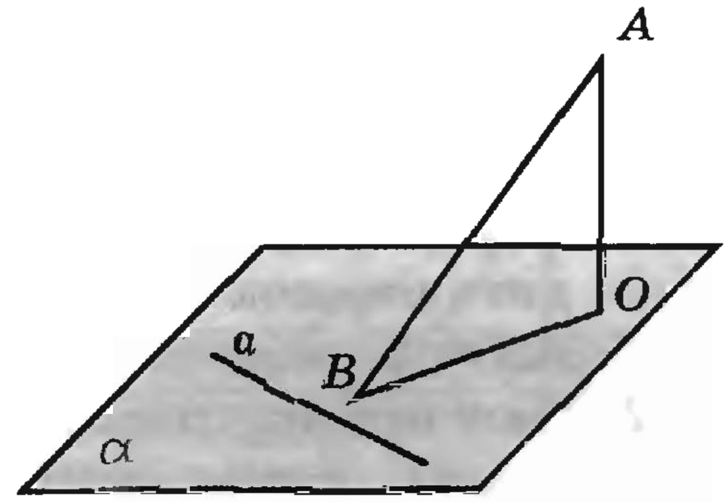
Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной называют также отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости, и не являющийся перпендикуляром.

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

Доказательство. Пусть AB — наклонная к плоскости α, AO — перпендикуляр, опущенный на эту плоскость (рис. 84, а). Соединим отрезком точки O и B. Треугольник AOB прямоугольный, AB — гипотенуза, AO — катет. Следовательно, $AO < AB$. ■



а)



б)

Рис. 84

Теорема. (О трех перпендикулярах.) Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Доказательство. Пусть прямая a плоскости α перпендикулярна проекции OB наклонной AB (рис. 84, б). Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым — OB и AO. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая a перпендикулярна плоскости AOB, и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB. ■

Упражнения

1. Докажите теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах: «Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость».

2. Останется ли справедливой теорема о трех перпендикулярах, если в ее формулировке слова «лежащая в плоскости» заменить словами «параллельная плоскости»?

3. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA, SB, SC и SD укажите наименьший и наибольший.

4. Дано изображение правильной пирамиды $SABC$. Постройте изображение ее высоты.

5. В данном изображении куба $A...D_1$ проведите перпендикуляр из вершины A_1 на плоскость ABC_1.

6. В данном изображении куба $A...D_1$ проведите перпендикуляр на плоскость ACB_1 из вершины: а) D_1; б) C_1.

7. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость, соответственно, в точках B и C. Найдите проекцию отрезка AC, если $AC = 37$ см, $AB = 35$ см.

8. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость, соответственно, в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60°$.

9. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость, соответственно, в точках B и C. Найдите отрезок AB, если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

10. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

11. Отрезок BC длиной 12 см является проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC, и $AD : DC = 2 : 3$. Найдите отрезок AD и его проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.

12. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны, соответственно, 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите проекцию гипотенузы.

13. Сторона ромба равна a, острый угол 60°. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна b. Найдите проекции диагоналей ромба.

14. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC_1 и BD.

15. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру.

16. Докажите, что равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость.

17. Докажите, что если наклонные, проведенные из одной точки к одной плоскости, имеют равные ортогональные проекции, то равны и сами наклонные.

18. Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.

19. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек.

20. *Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой.*

§19. Угол между прямой и плоскостью

Определим понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение. **Углом между наклонной и плоскостью** называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Теорема. Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из всевозможных углов между этой наклонной и прямыми, лежащими в данной плоскости.

Доказательство. Пусть a — наклонная к плоскости α, O — их точка пересечения, b — ортогональная проекция наклонной, c — прямая в плоскости α, проходящая через точку O (рис. 85). Требуется доказать, что угол между прямыми a и b меньше угла между прямыми a и c.

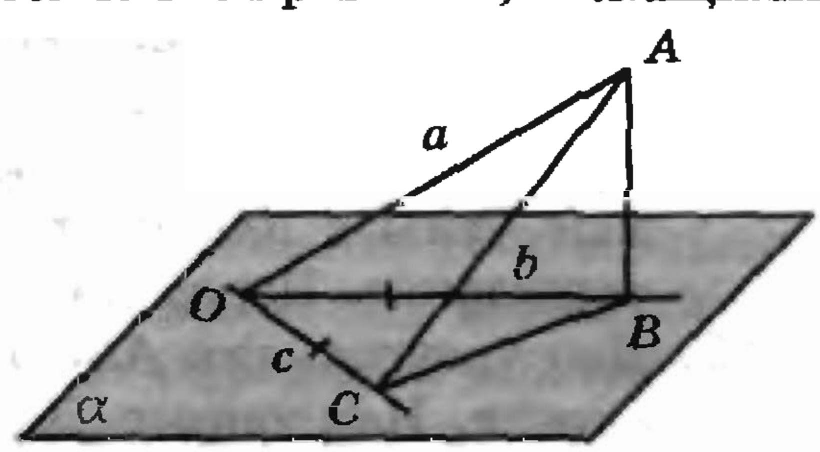


Рис. 85

Для этого на прямой a возьмем точку A, отличную от O, и ее ортогональную проекцию B. На прямой c отложим отрезок OC, равный OB. В треугольниках AOB и AOC сторона AO общая, $OB = OC$ и $AB < AC$. Следовательно, $\angle AOB < \angle AOC$. ■

Углом между отрезком и плоскостью будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

Упражнения

1. В кубе найдите угол между: а) диагональю боковой грани и плоскостью основания; б) диагональю куба и плоскостью основания; в) диагональю боковой грани и диагональным сечением.
2. Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и не содержащей его гранью.
3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро — b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
4. ○ Даны две параллельные наклонные, проведенные к одной и той же плоскости. Что можно сказать о величине углов, которые они образуют с плоскостью?
5. ○ Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли прямые параллельны?
6. ○ Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены плоскости относительно друг друга?
7. Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из точки, не принадлежащей плоскости, образуют с ней равные углы.
8. Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?
9. Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60°? Каков наибольший угол между катетом и этой плоскостью?
10. Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.
11. Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?
12. Дан треугольник ABC и точка D, которая не принадлежит его плоскости. Наклонные DA, DB, DC составляют равные углы с плоскостью треугольника. Докажите, что точка D ортогонально проекти-

руется на плоскость треугольника в центр описанной около треугольника окружности.

13. Дан треугольник ABC и точка K, которая не принадлежит его плоскости. KD, KE, KF — перпендикуляры, опущенные из точки K на стороны треугольника. Эти перпендикуляры одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что точка K ортогонально проектируется в центр вписанной в треугольник окружности.
14. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.
15. Основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости α (плоскость треугольника не совпадает с плоскостью α). Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны к плоскости α или угол наклона высоты, опущенной на основание треугольника, к плоскости α?
16. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
17. Какую фигуру на плоскости α образуют основания наклонных, проведенных к плоскости α из точки, не принадлежащей плоскости, и образующих равные углы с плоскостью α?
18. *Докажите, что ортогональная проекция наклонной равна произведению этой наклонной на косинус угла, который она образует с плоскостью проектирования.*

§ 20. Расстояния между точками, прямыми и плоскостями

Напомним, что в планиметрии расстоянием между прямой и не принадлежащей ей точкой называлась длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называлось расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

Поскольку в пространстве прямая и точка, ей не принадлежащая, а также две параллельные прямые лежат в одной плоскости, то эти определения расстояний между прямой и точкой, а также между двумя параллельными прямыми годятся и для пространства. Определим понятия расстояния между точкой и плоскостью в пространстве и расстояния между параллельными плоскостями.

Определение. **Расстоянием** между точкой и не проходящей через нее плоскостью называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

Из свойств перпендикуляра и наклонной следует, что расстояние между точкой и плоскостью является наименьшим из всевозможных расстояний от этой точки до точек плоскости.

Определение. **Расстоянием** между двумя параллельными плоскостями называется расстояние от какой-нибудь точки одной плоскости до другой плоскости.

Докажем, что расстояние между двумя параллельными плоскостями не зависит от выбора точки.

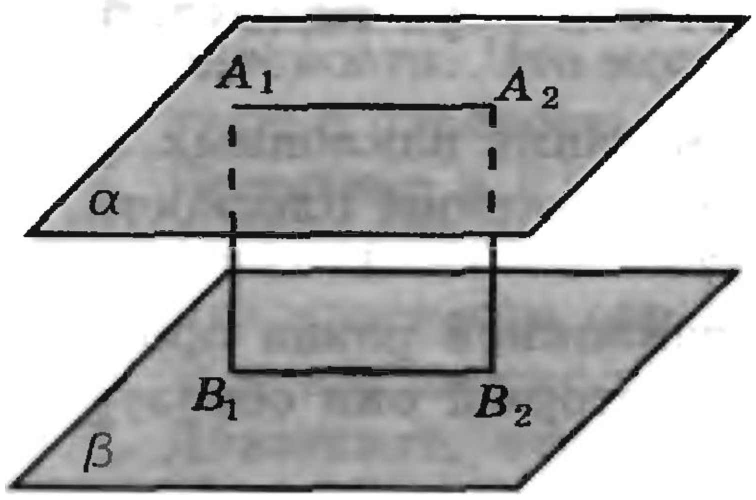


Рис. 86

Пусть даны параллельные плоскости α и β, точки A_1, A_2 плоскости α и их ортогональные проекции B_1, B_2 на плоскость β (рис. 86). Тогда расстояние от точки A_1 до плоскости β равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до плоскости β равно A_2B_2. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$. ■

Определим теперь понятие расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Определение. Отрезок, соединяющий точки на скрещивающихся прямых и перпендикулярный этим прямым, называется их **общим перпендикуляром**. Длина общего перпендикуляра называется **расстоянием** между скрещивающимися прямыми.

Теорема. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым существует и единственен.

Доказательство. Пусть a, b — скрещивающиеся прямые. Через одну из них, например b, проведем плоскость β, параллельную прямой a. Это можно сделать, проведя прямую a', параллельную a и пересекающую b (рис. 87). Тогда пересекающиеся прямые a', b будут определять искомую плоскость β. Рассмотрим ортогональную проекцию a_0 прямой a на плоскость β. Она будет параллельна прямой a и пересечет прямую b в некоторой точке B, которая является ортогональной проекцией некоторой точки A прямой a. Отрезок AB будет искомым. Действительно, он перпендикулярен плоскости β и, следовательно, прямым b и a_0, т. е. он является общим перпендикуляром к прямым a и b.

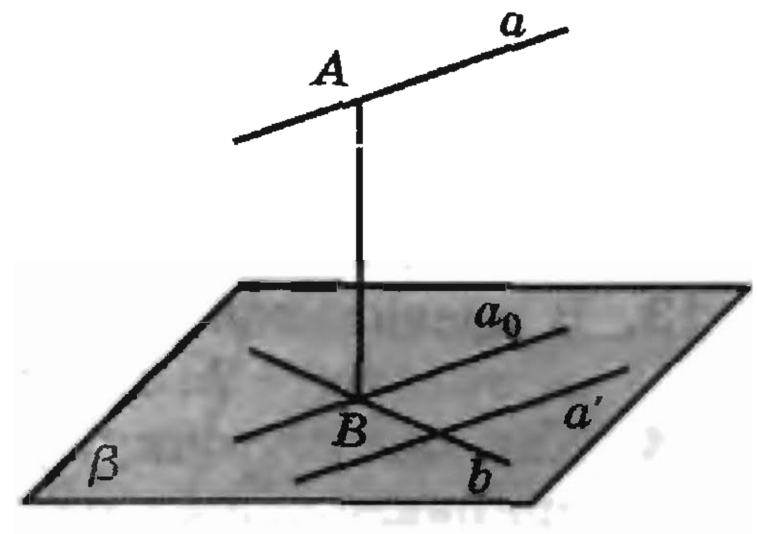


Рис. 87

Докажем единственность. Пусть дан общий перпендикуляр к прямым a и b. Тогда его ортогональная проекция на плоскость β должна совпадать с точкой B, а перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, должен совпадать с отрезком AB. Следовательно, данный общий перпендикуляр будет совпадать с отрезком AB. ■

Упражнения

1. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α: а) равно ортогональной проекции наклонной; б) в два раза меньше самой наклонной.
2. В кубе $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной A_1 и: а) ребром CD; б) диагональю BD; в) диагональю AC_1.
3. ○ Чему равно расстояние между параллельными гранями в кубе?
4. ○ В кубе $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние: а) от вершины A_1 до плоскости ABC; б) от вершины A до плоскости BB_1D_1.
5. Найдите расстояние между вершиной A_1 и плоскостью AB_1D_1 куба $A...D_1$, если ребро куба равно a.
6. В прямой четырехугольной призме, в основании которой — ромб со стороной a и острым углом φ, найдите расстояние между противоположными боковыми гранями.
7. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите расстояние между его скрещивающимися ребрами.
8. В правильной треугольной призме со стороной основания a и боковым ребром b найдите расстояния между скрещивающимися ребрами.
9. Для куба $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися прямыми: а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AD и A_1B_1; г) AC и B_1D_1; д) AC и DD_1; е) AC_1 и BD.
10. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

11. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых.

12. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро — b. Найдите высоту пирамиды.

13. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота — h. Найдите боковое ребро пирамиды.

14. Как найти точку, равноудаленную от четырех данных точек, не принадлежащих одной плоскости?

***15.** Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней.

***16.** Докажите, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек ребер куба, сходящихся в концах диагонали куба, рассекают эту диагональ на три равные части.

***17.** Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой **центроидом** тетраэдра, которая делит эти отрезки в отношении 3 : 1, считая от вершин тетраэдра.

***18.** Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми является наименьшим из всевозможных расстояний между точками на этих прямых.

***19.** Дана плоскость α и две точки — A и B — по одну сторону от нее. Найдите точку C на плоскости α, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.

***20.** Дана прямая a и две точки — A и B — такие, что прямые a и AB скрещиваются. Найдите точку C на прямой a, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей.

§ 21. Двугранный угол

Полуплоскость можно считать пространственным аналогом луча на плоскости. Тогда пространственным аналогом угла на плоскости будет фигура, называемая двугранным углом.

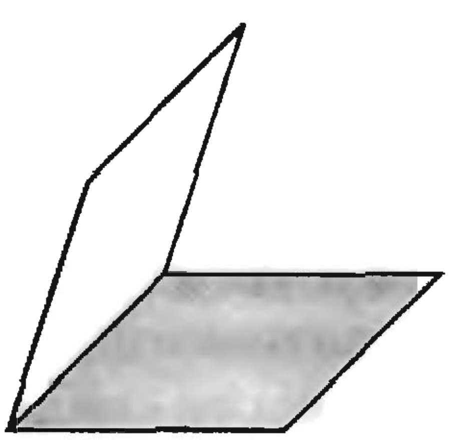


Рис. 88

Определение. **Двугранным углом** называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 88). Полуплоскости называются **гранями** двугранного угла, а их общая граничная прямая — **ребром** двугранного угла.

Пусть α и β — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 89). Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии ее пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется **линейным углом** данного двугранного угла.

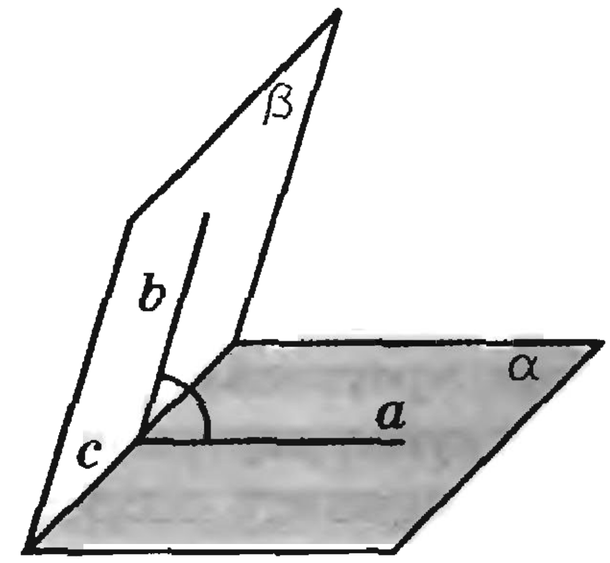


Рис. 89

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, пусть γ_1, γ_2 — плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости α и β по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 90). Лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2 сонаправлены, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ■

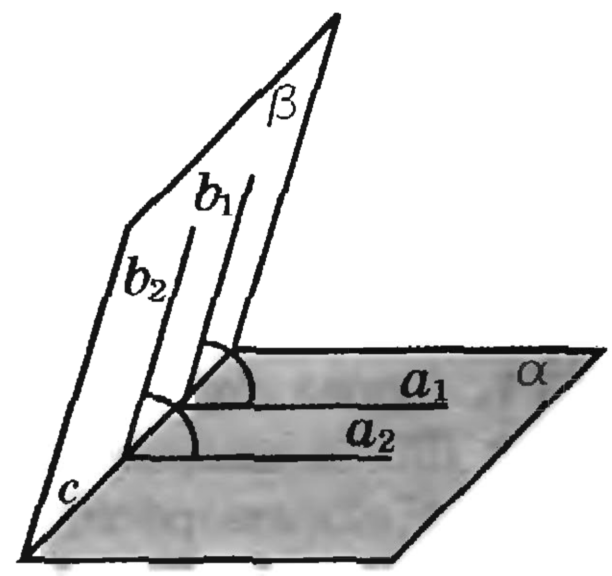


Рис. 90

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол прямой.

Определение. **Углом между двумя пересекающимися плоскостями** называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

Упражнения

1. Что можно сказать о взаимном расположении плоскости линейного угла некоторого двугранного угла и ребра этого двугранного угла?
2. Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?
3. Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?
4. Треугольник MAB и квадрат $ABCD$ заданы таким образом, что MB — перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и ABC?

○ **5.** Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что $ABCD$ — параллелограмм и угол BAD — острый.

6. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ заданы таким образом, что AD перпендикулярна плоскости параллелограмма, угол BCD тупой. Можно ли считать угол ACD углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$? Постройте линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, так, чтобы одна его сторона проходила через точку A.

7. В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

8. В кубе $A...D_1$ найдите угол наклона плоскости ABC_1 к плоскости ABC.

9. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

10. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

11. Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость α под углом $30°$ к плоскости треугольника. Высота AD треугольника ABC равна a. Найдите расстояние от вершины A треугольника до плоскости α.

12. Через катет $BC = a$ равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол C равен $90°$) проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол $30°$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

13. Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость под углом $30°$ к плоскости треугольника; угол C равен $150°$, $AC = 6$. Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости.

14. Дан квадрат $ABCD$, через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α, образующая с диагональю BD угол $60°$. Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α?

15. Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) равнобедренная трапеция?

16. Докажите, что если основанием высоты пирамиды является центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны.

***17.** Нарисуйте многогранник, ограниченный плоскостями, проходящими через все 12 ребер куба и образующими углы $45°$ с гранями куба, сходящимися в этих ребрах (ромбододекаэдр).

***18.** Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекцией.

***19.** В основании прямой призмы — параллелограмм со сторонами, равными 4 дм и 5 дм. Угол между ними 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол 45°.

***20.** Боковое ребро прямой призмы равно 6 см. Ее основание — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 2 см. Найдите площади сечений призмы плоскостями, проходящими через каждый из данных катетов и образующими углы 60° с плоскостью основания.

***21.** Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины двух сторон основания и образующей угол 45° с его плоскостью, если известно, что плоскость пересекает: а) только одно боковое ребро призмы; б) два ее боковых ребра.

***22.** Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен: а) 30°; б) φ.

***23.** Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q.

§ 22. Перпендикулярность плоскостей

Определим понятие перпендикулярности двух плоскостей.

Определение. Две плоскости называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

Следующая теорема дает достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

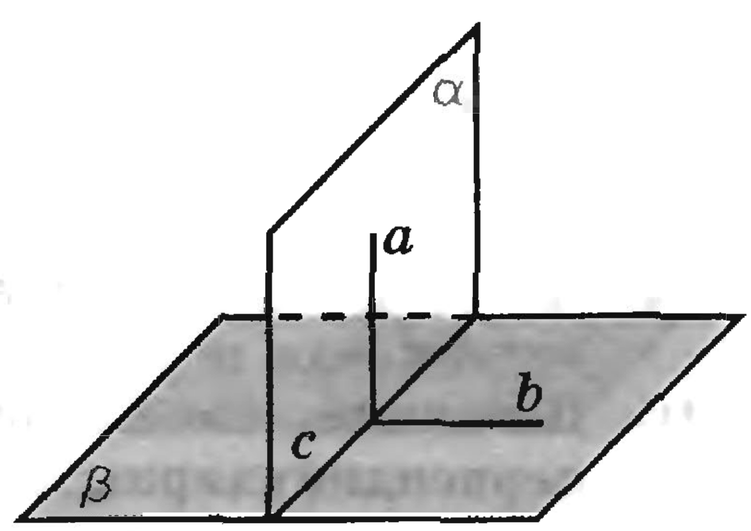


Рис. 91

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β, c — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 91). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β

через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведем прямую b, перпендикулярную прямой c. Через прямые a и b проведем плоскость γ. *Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b в этой плоскости.* Поскольку прямая a перпендикулярна плоскости β, то угол, образованный a и b, прямой. Он является линейным углом соответствующего двугранного угла. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны. ■

Воспользуемся этим признаком для доказательства того, что боковые грани прямой призмы перпендикулярны ее основаниям.

Действительно, как было доказано ранее, боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям. Боковые грани проходят через боковые ребра и, следовательно, также перпендикулярны основаниям прямой призмы.

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

○ **2.** Верно ли, что прямая и плоскость, перпендикулярные другой плоскости, параллельны между собой?

○ **3.** Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

○ **4.** Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

5. Две плоскости перпендикулярны. Укажите возможные случаи взаимного расположения прямой, лежащей в одной из этих плоскостей, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. (Проиллюстрируйте свой ответ на модели.)

○ **6.** Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

○ **7.** Плоскость и прямая параллельны. Будет ли верно утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

○ **8.** Верно ли, что плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, не перпендикулярна этой плоскости?

9. Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

10. Докажите, что диагональные сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D куба $A...D_1$ перпендикулярны.

11. Докажите, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной плоскости. Сколько таких плоскостей?

12. Докажите, что если прямая лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.

13. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны и из точки одной из них проведен перпендикуляр к другой плоскости, то этот перпендикуляр целиком лежит в первой плоскости.

14. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна третьей плоскости.

15. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) перегнули по высоте CD таким образом, что плоскости ACD и BCD образовали прямой угол. Найдите углы ADB и ACB.

16. Существует ли треугольная пирамида, у которой три грани попарно перпендикулярны?

***17.** Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

***18.** Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны основанию?

***19.** Могут ли боковыми гранями наклонной призмы быть: а) 2 прямоугольника; б) 3 прямоугольника; в) 4 прямоугольника?

§ 23*. Центральное проектирование. Изображение пространственных фигур в центральной проекции

Наряду с параллельным проектированием, применяемым в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет так называемое центральное проектирование, используемое в живописи, фотографии и т. д. Восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

Пусть π — некоторая плоскость, а S — не принадлежащая ей точка, **центр проектирования** (рис. 92). Для точки A пространства проведем прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется **центральной проекцией** точки A на плоскость π. Обозначим ее A'. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A', называется **центральным проектированием**, или **перспективой**.

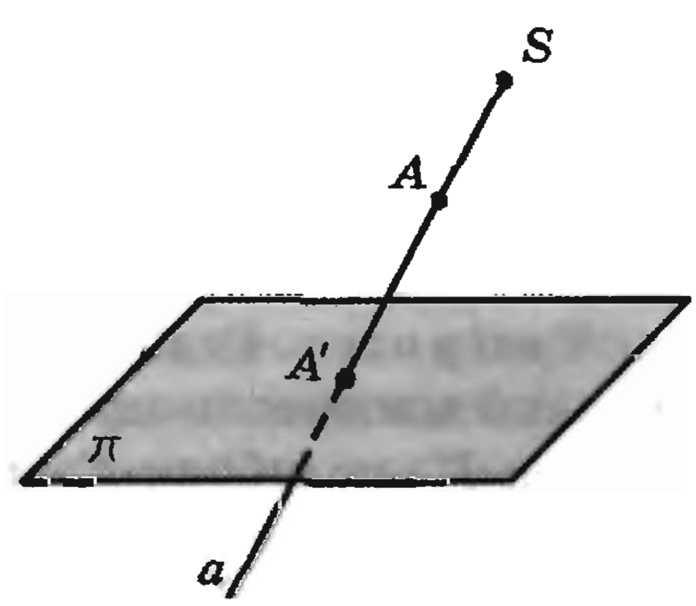


Рис. 92

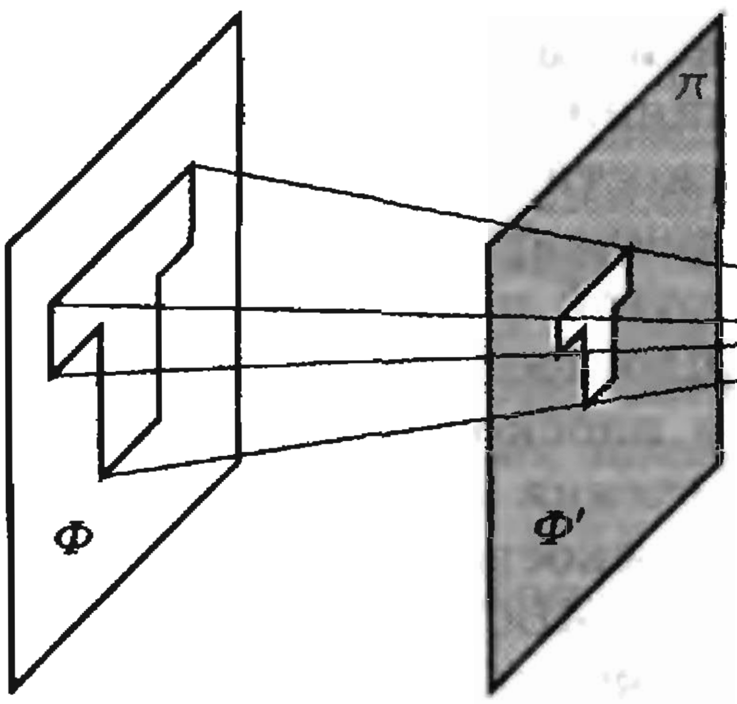


Рис. 93

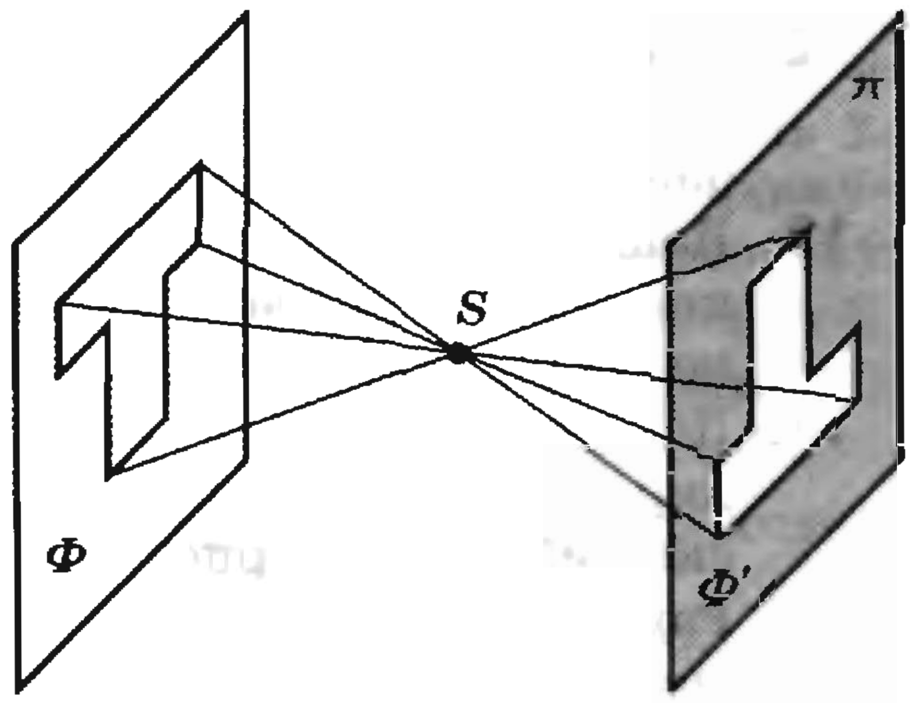


Рис. 94

Заметим, что центральная проекция не определена для точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр проектирования и параллельной плоскости проектирования.

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции ее точек на плоскость образуют фигуру Φ', которая называется **центральной проекцией** фигуры Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является **перспективой** фигуры Φ.

На рисунке 93 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ', будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование дает наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

На рисунке 94 показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования.

На рисунке 95 показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Примеры таких проекций дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Такие проекции получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

Теорема. Если плоская фигура F расположена в плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная F, причем коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 96).

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их центральные проекции. Через центр S

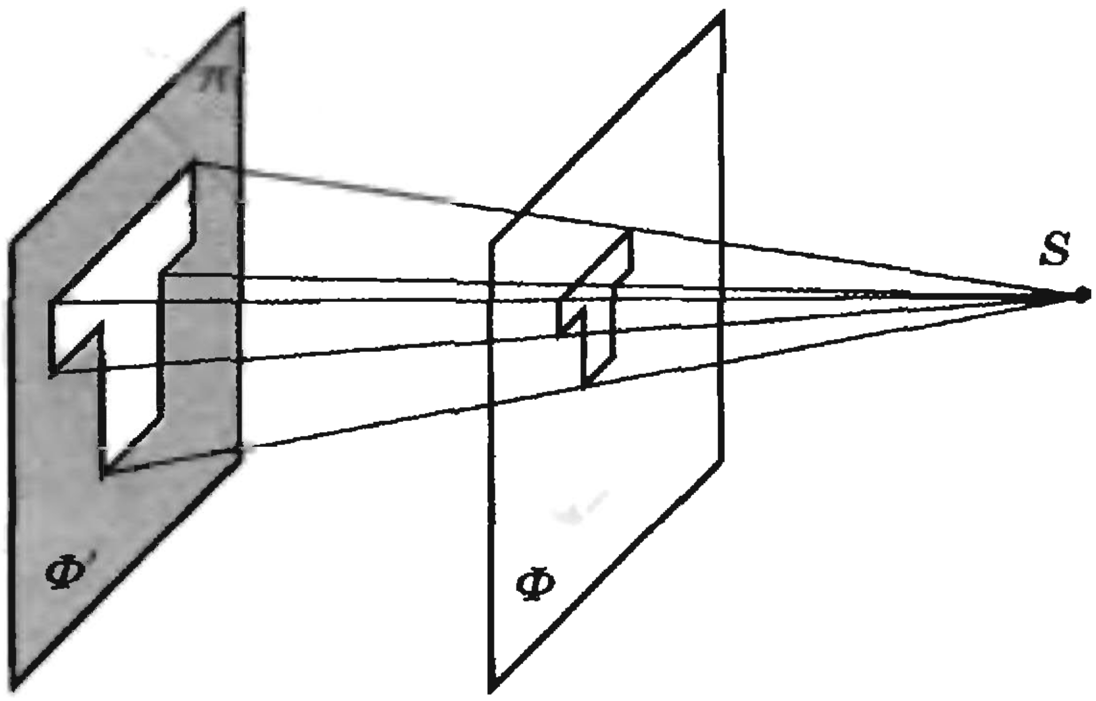


Рис. 95

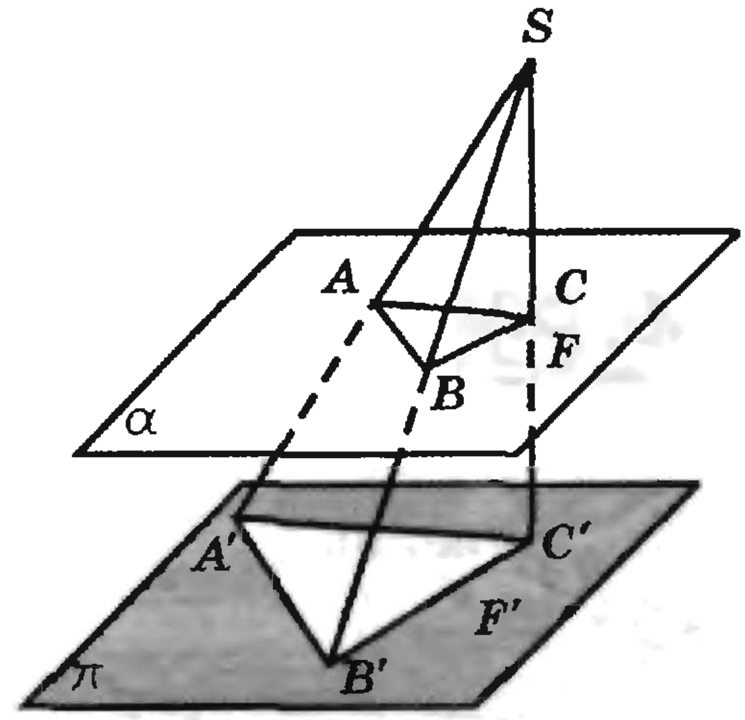


Рис. 96

проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно. Для точек A и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$. Таким образом, определенное преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны. ■

Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая. Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и точку S проведем плоскость α и линию ее пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 97). В плоскости α через точку S проведем прямую, параллельную a, и точку ее пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что точкам прямой a, за исключением точки A_0, для которой прямая A_0S параллельна плоскости π, соответствуют точки прямой a', за исключением точки S'. Таким образом, прямая a' без точки S' и является искомой проекцией прямой a на плоскость π.

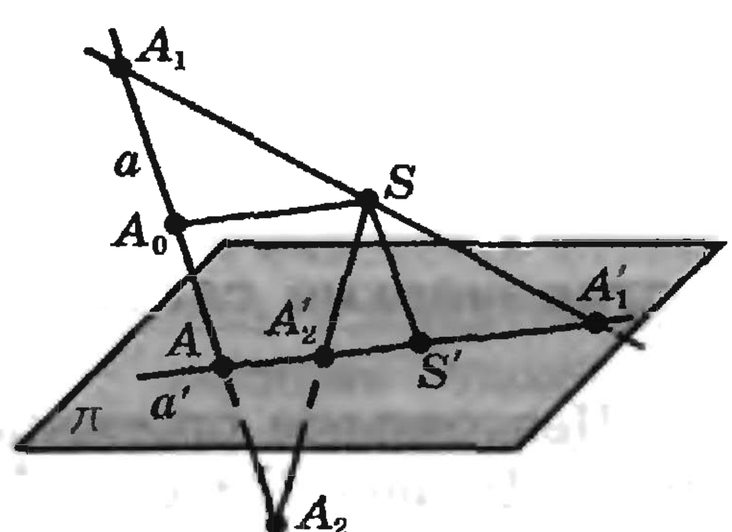


Рис. 97

Выясним, в какие фигуры при центральном проектировании переходят параллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся прямые.

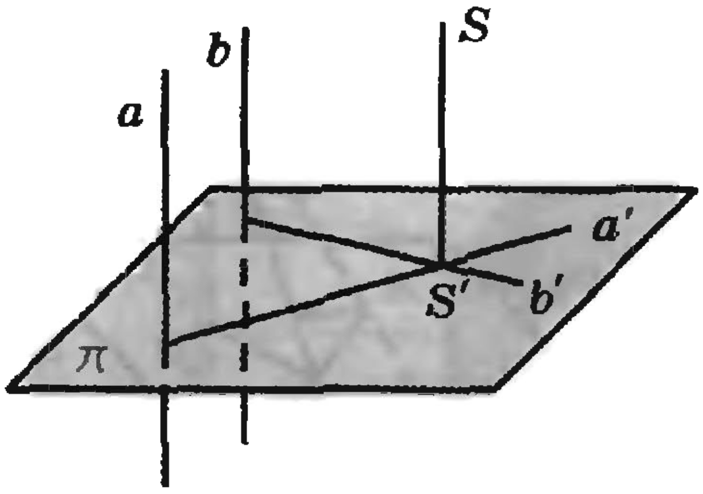


Рис. 98

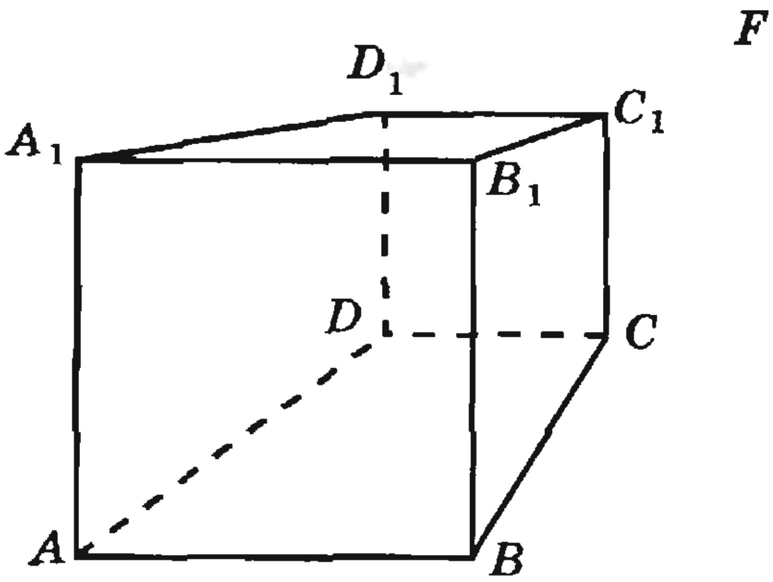


Рис. 99

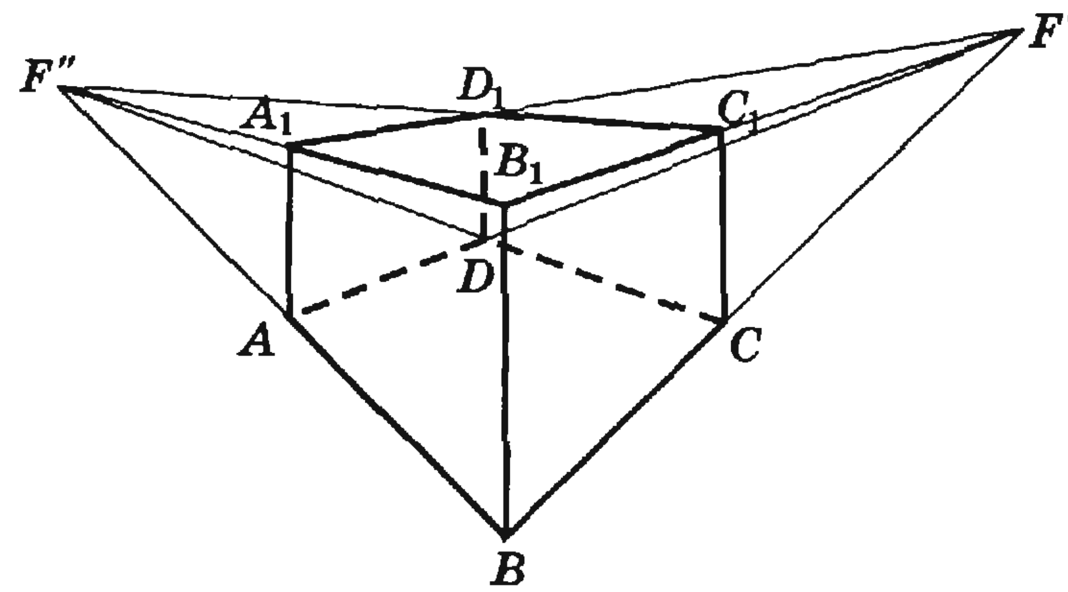


Рис. 100

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 98). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b' за исключением их общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. п.

Приведем примеры изображения простейших пространственных фигур в центральной проекции.

На рисунке 99 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

На рисунке 100 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

Исторические сведения

Центральное проектирование, или перспектива, как наука, возникла еще в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах Эсхила (525—456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О геометрии» известного мыслителя и ученого Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых «Начал», он написал много других сочинений. В том числе, в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того, как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы

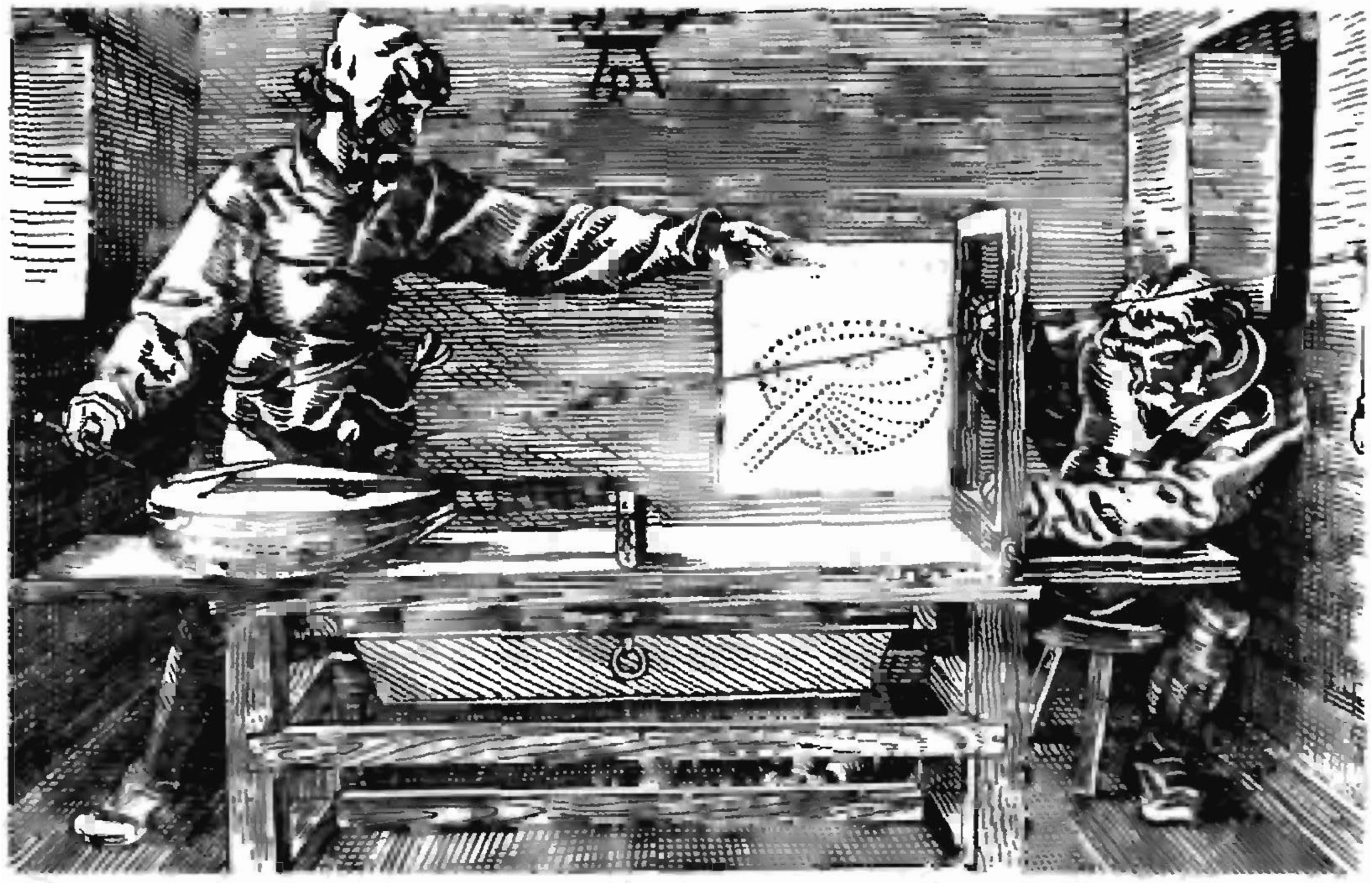


Рис. 101

ощущаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу. Поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основанием ее служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввел также постулат о том, что кажущиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, ум. ок. 25 г. до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены ученым в труде «Об архитектуре», состоящем из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. При этом теоретиком перспективы считается итальянский архитектор Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотившими ее достижения в своих полотнах, — великие художники Леонардо да Винчи (1452—1519), Альбрехт Дюрер (1471—1528) и многие другие.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, некоторые из которых он изобразил на своих гравюрах. Например, на рисунке 101 изображена гравюра, на которой показано, что для получения перспективного изображения предмета между глазом наблюдателя и предметом помещается рамка, разделенная на небольшие квадраты сеткой. С помощью натянутой нити сначала копируются контуры модели, а затем полученное изображение переносится на бумагу.

Леонардо да Винчи в своем произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части.

1. Линейная перспектива, которая изучает законы построения уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.
2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.
3. Перспектива четкости очертания формы предмета, в которой анализируется изменение степени отчетливости границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают французского ученого, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 году, явилась первым систематизированным изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Русские художники XVII—XIX вв. хорошо владели теорией перспективы и применяли ее в своих картинах. Крупнейшим представителем русской академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был А. П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного изучения теории перспективы и применения ее законов в академическом рисунке.

Более 20 лет вел поиск способа овладения видением натуры на основе законов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов (1780—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необходимо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рассматривал как метод изображения реальных предметов в конкретной обстановке.

Большое значение придавал изучению перспективы замечательный русский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим ученикам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите ее в работу, в рисование. Никогда не отделяйте ее от рисования, как это делают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами перспективы — напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спутником вашей работы и стражем верности».

Упражнения

○ **1.** Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? Для каких точек она не существует?

2. Найдите геометрическое место точек в пространстве, для которых не существует центральных проекций на плоскость π с центром проектирования S.
○ 3. Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые перейти в пересекающиеся?
○ 4. В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?
○ 5. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования?
○ 6. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если центр проектирования находится между фигурой и плоскостью проектирования? Где используется такое изображение?
○ 7. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если она расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования? Где используется такое изображение?
○ 8. Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, которая расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования?
9. Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 93, 94, 95, для центральных проекций фигуры, изображенной на рисунке 102.

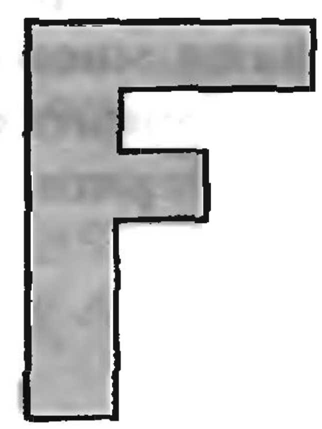
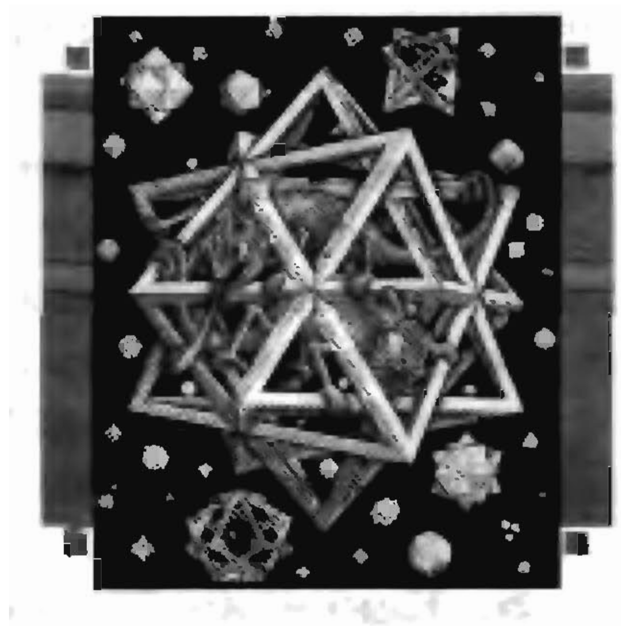


Рис. 102

10. Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования (рис. 97). Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная выше плоскости проектирования. Куда переходит часть этой прямой, расположенная ниже плоскости проектирования?
11. Постройте центральную проекцию куба, аналогичную изображенной на рисунке 99, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.
12. Постройте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.
13. Постройте центральную проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость, не параллельную ее основанию.
14. В пирамиде с высотой 3 м на расстоянии 2 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите коэффициент подобия сечения и основания пирамиды.
15. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через точки M, N и K, принадлежащие, соответственно, граням ADB, BDC и ABC.
16. Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и N граней ABD и BDC соответственно и параллельной ребру AC.

Глава IV

МНОГОГРАННИКИ



§ 24. Многогранные углы

Пусть в плоскости π дан многоугольник M и точка S вне этой плоскости (рис. 103). Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке S, пересекающими данный многоугольник, называется **многогранным углом**. Точка S называется **вершиной** многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника, — **ребрами** многогранного угла. Углы, образованные соседними ребрами, называются **плоскими углами** многогранного угла, а также **гранями** многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SABC...$, указывающими его вершину S и вершины A, B, C, ... многоугольника.

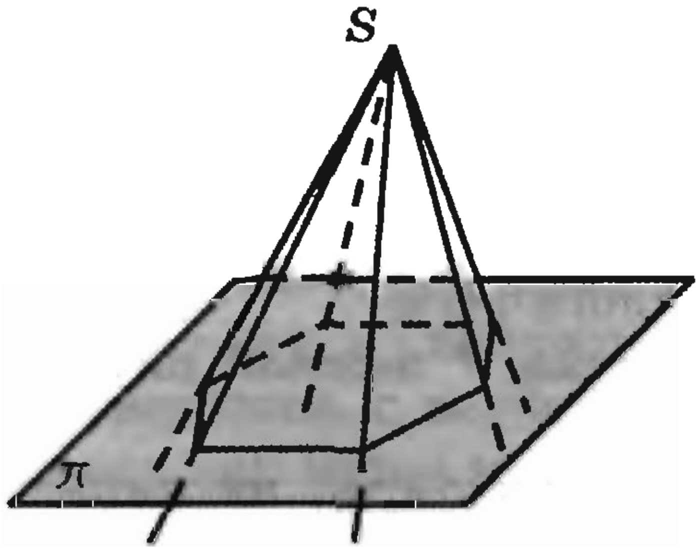


Рис. 103

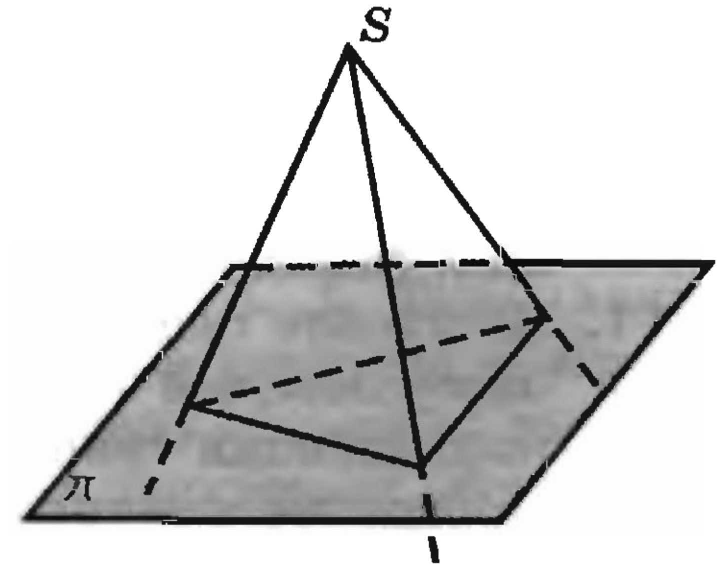


Рис. 104

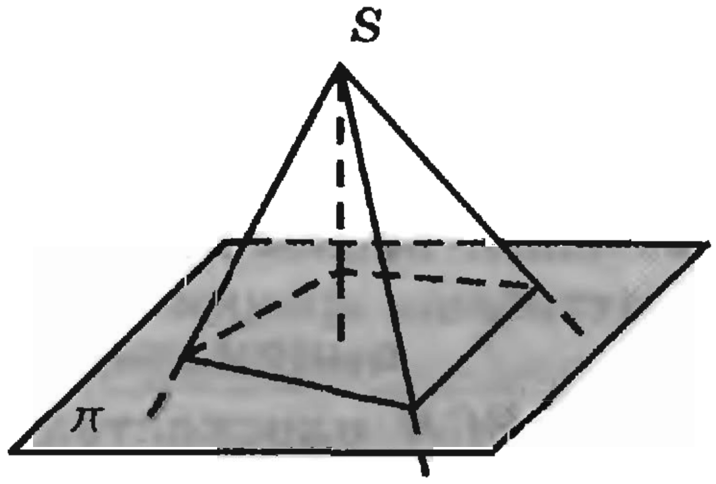


Рис. 105

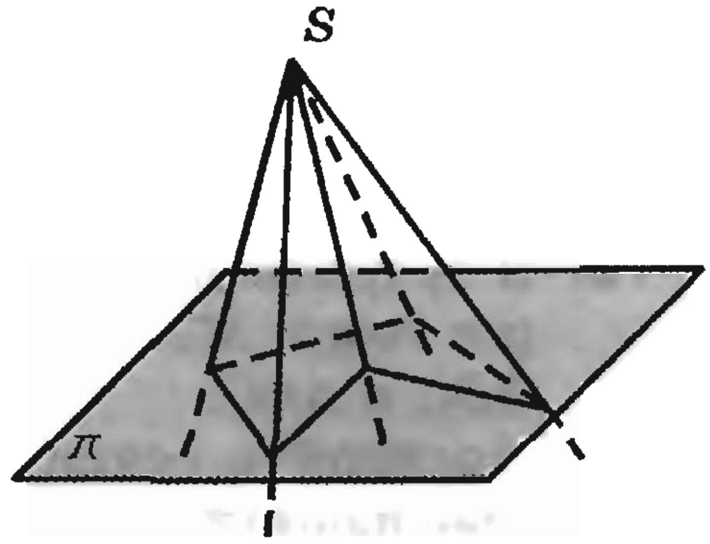


Рис. 106

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными (рис. 104), четырехгранными (рис. 105), пятигранными (рис. 106) и т. д. Для плоских углов трехгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

Теорема. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

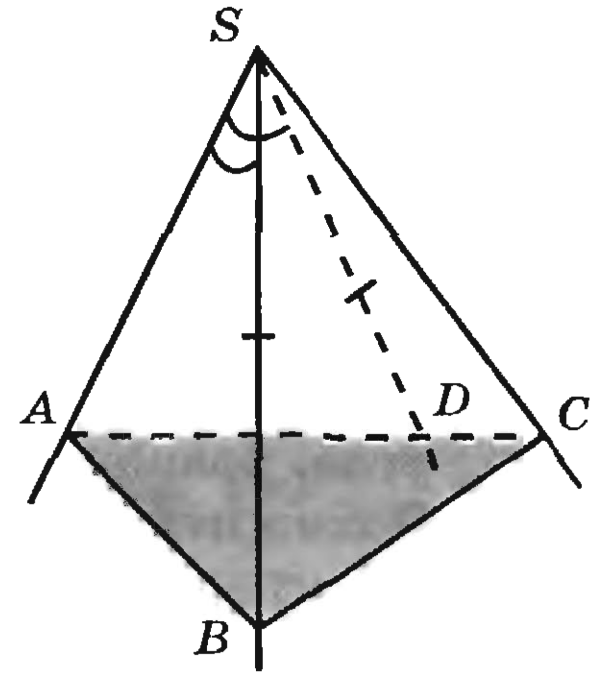


Рис. 107

Доказательство. Пусть в трехгранном угле $SABC$ наибольший из плоских углов есть угол ASC (рис. 107). Тогда выполняются неравенства

$$\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC;$$
$$\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB.$$

Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный углу ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними), и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол, и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. ■

Упражнения

○ **1.** Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

○ **2.** Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

○ **3.** Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

4. Докажите, что всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

5. Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы прямые.

6. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

7. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

8. Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах от вершины отложены равные отрезки *OA*, *OB*, *OC*. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью *ABC*.

9. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

***10.** Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней.

***11.** Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.

***12.** Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла и перпендикулярные этим граням, все три пересекаются по одной прямой.

***13.** Докажите, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и через биссектрисы его противоположных граней, все три пересекаются по одной прямой.

***14.** Докажите, что любой трехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

§25. Выпуклые многогранники

Среди плоских и пространственных фигур выделяют так называемые **выпуклые фигуры**. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок. На рисунке 108 приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.

Определение. Многогранный угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

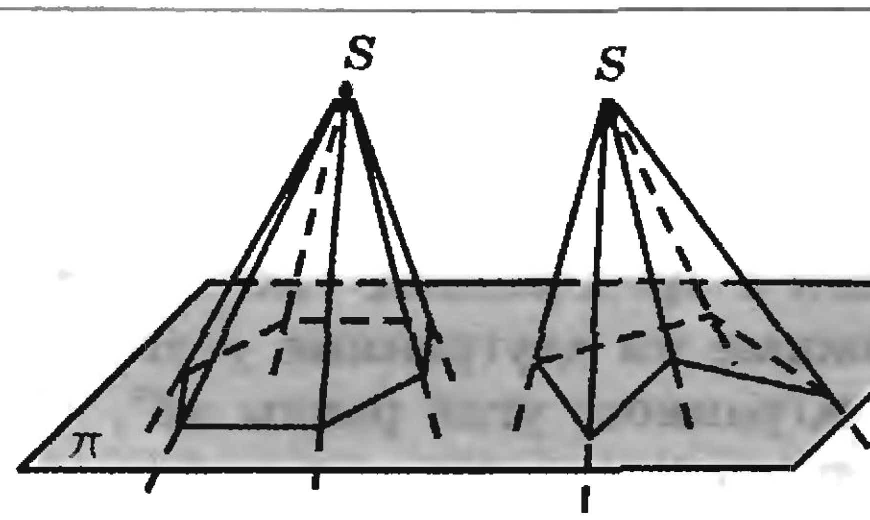


Рис. 108

Теорема. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство. Рассмотрим многогранный угол $SA_1...A_n$ (рис. 109) и применим теорему о сумме плоских углов к трехгранным углам с вершинами в точках A_1, ..., A_n. Получим неравенства $\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3$, ..., $\angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle A_{n-1}A_nS + \angle SA_nA_1$. Сложим почленно эти неравенства. В левой части получим сумму углов n-угольника $A_1...A_n$, которая равна $180°(n-2)$, а в правой части — сумму углов n треугольников A_1A_2S, ..., A_nA_1S, кроме углов при вершине S. Обозначим сумму этих последних углов буквой Σ.

Тогда $180°(n-2) < 180°n - \Sigma$, и, следовательно, $\Sigma < 180° \cdot 2 = 360°$.■

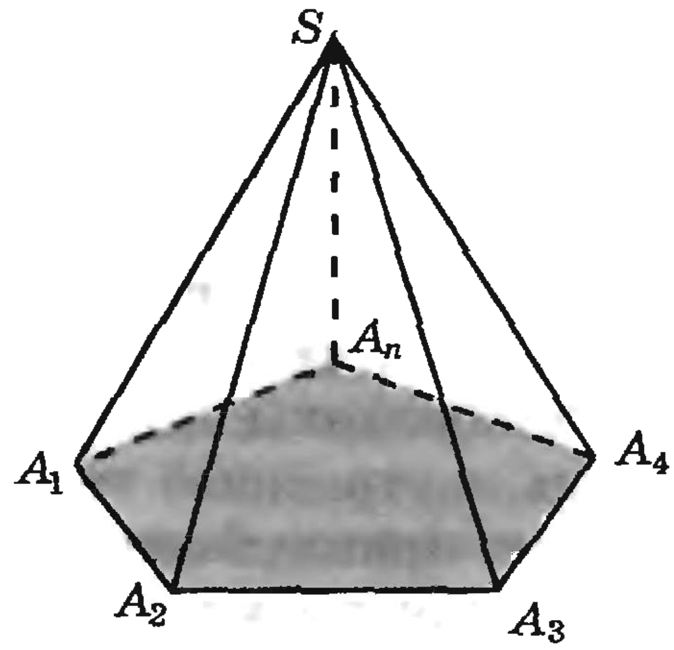
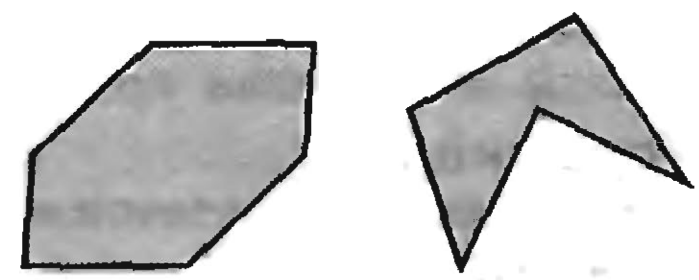


Рис. 109

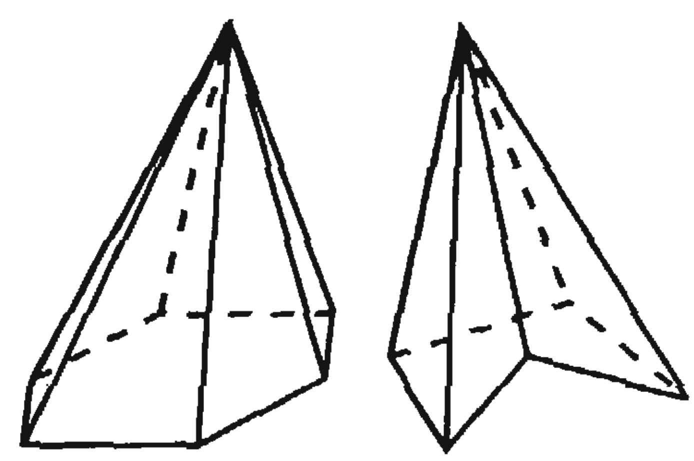
Определение. Многогранник называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.


а) б)
Рис. 110

Все многогранники, которые мы до сих пор изучали, были выпуклыми многогранниками (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.).

На рисунке 110 а, б показаны выпуклый и невыпуклый многоугольники.

На рисунке 111 а, б показаны выпуклый и невыпуклый многогранники.


а) б)
Рис. 111

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

Свойство 1. *В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.*

Действительно, пусть F — какая-нибудь грань многогранника M и точки A, B принадлежат грани F (рис. 112). Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M.

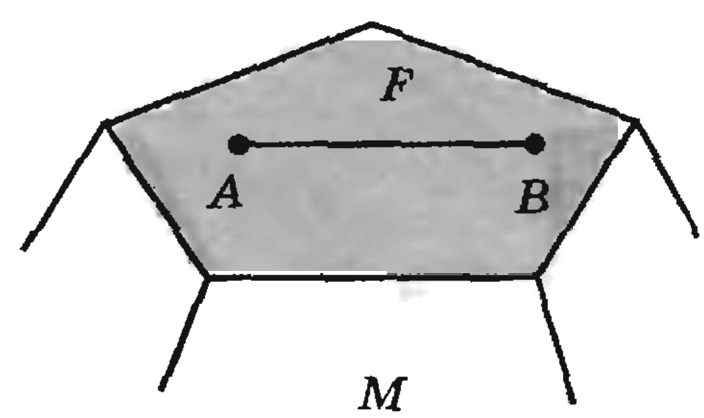


Рис. 112

Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник. ■

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть M — выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M. ■

Упражнения

○ **1.** На рисунке 113 укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.

○ **2.** Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

○ **3.** Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

○ **4.** На рисунке 114 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

○ **5.** Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

○ **6.** *Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани* являются выпуклыми многоугольниками.

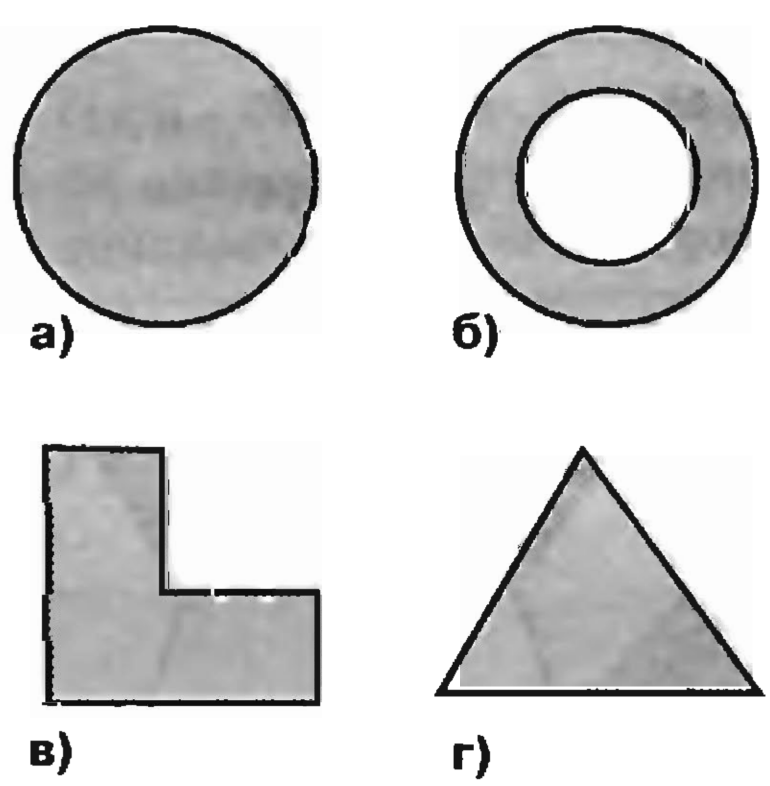


Рис. 113

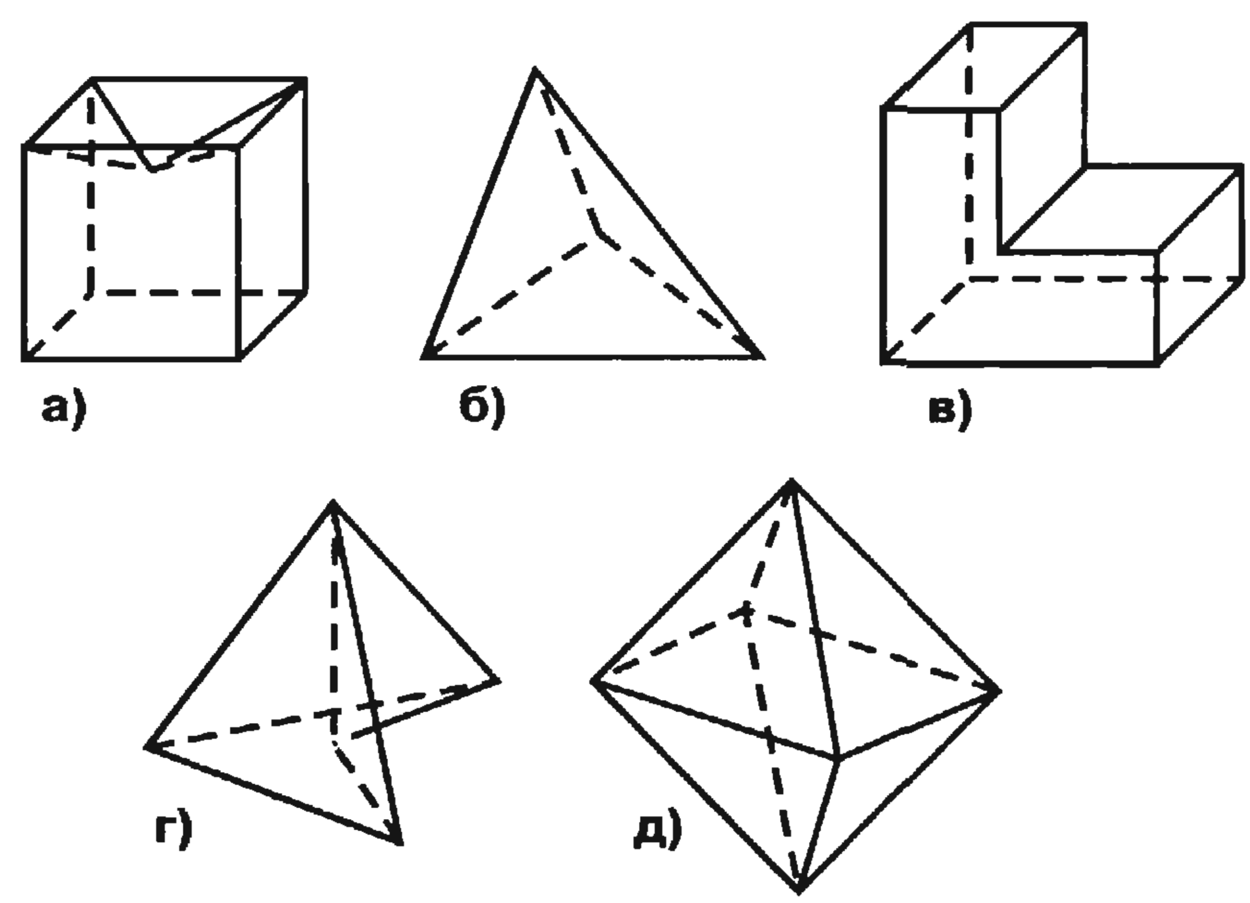


Рис. 114

7. Приведите пример многогранного угла, сумма плоских углов которого больше 360°.
8. Существует ли многогранный угол, имеющий плоские углы: а) 80°, 30°, 70°, 100°; б) 10°, 20°, 80°, 160°?
9. Докажите, что многогранный угол $SA_1...A_n$ является выпуклым тогда и только тогда, когда многоугольник $A_1...A_n$ выпуклый.
10. Где в доказательстве теоремы о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла использовалась выпуклость?
11. Докажите, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.
12. Докажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.
13. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.
14. Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.
15. Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой. Верно ли, что пересечением выпуклых многогранников является выпуклый многогранник?
16. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

*17. Как связано число ребер выпуклого многогранника с числом его плоских углов?

*18. Может ли в выпуклом многограннике быть 21 плоский угол?

*19. Докажите, что для числа вершин B, числа ребер P и числа граней Γ многогранника выполняются неравенства $2P \geqslant 3B$, $2P \geqslant 3\Gamma$.

*20. Докажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

21. Может ли выпуклая наклонная призма иметь среди боковых граней: а) 2 прямоугольника; б) 3 прямоугольника?
22. Может ли выпуклая пирамида иметь: а) 2 боковые грани; б) 3 боковые грани, перпендикулярные ее основанию?

§26*. Теорема Эйлера

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней многогранника.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2, \quad (*)$$

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку (рис. 115, а), содержащую Г′ = Г − 1 многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р ребер.

Если для этой сетки выполняется соотношение

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г}' = 1, \quad (**)$$

то для исходного многогранника будет справедливо требуемое соотношение (*).

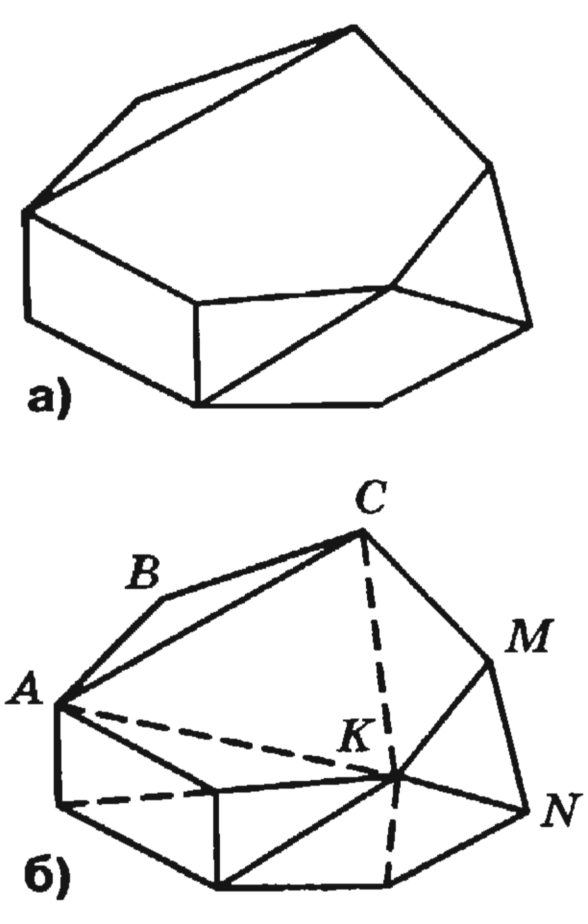


Рис. 115

Покажем, что соотношение (**) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали в сетке будет В вершин, Р + 1 ребер и Г′+1 граней, и, следовательно, В − (Р + 1) + (Г′ + 1) = В − Р + Г′. Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диагонали, разбивающие входящие в нее многоугольники на треугольники (рис. 115, б), и для полученной сетки покажем выполнимость соотношения (**). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра сетки, уменьшая в ней количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) *для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем* случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

В обоих случаях соотношение (**) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из $В - 1$ вершин, $Р - 2$ ребер и $Г' - 1$ граней, $(В - 1) - (Р - 2) + (Г' - 1) = В - Р + Г'$.

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (**). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы *придем к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки* $В = 3$, $Р = 3$, $Г' = 1$, и, следовательно, $В - Р + Г' = 1$. Значит, соотношение (**) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (*). ■

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой ***топологии*** — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера $В - Р + Г = 2$ для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение $В - Р + Г' = 1$, где В — число вершин, Р — ребер и Г' — граней (многоугольников). Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу о трех домиках и трех колодцах.

Задача. *Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?*

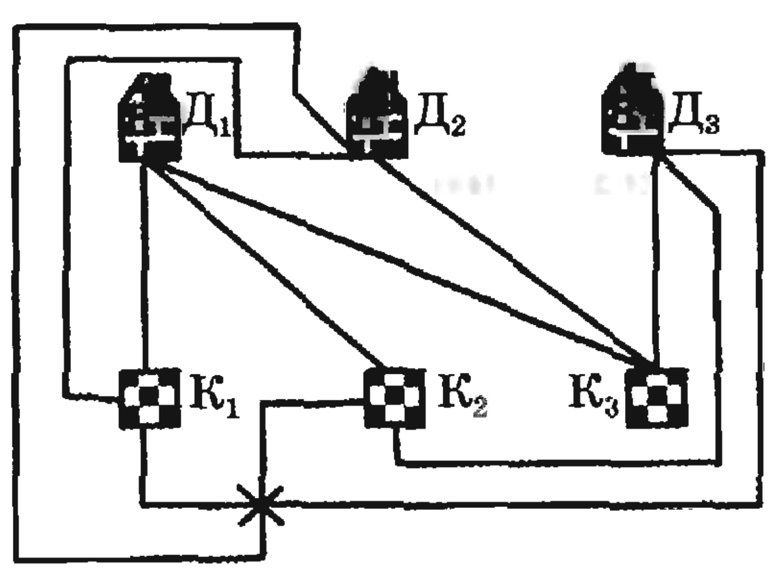


Рис. 116

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы — точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 116). Каждую точку-домик соединим с каждой *точкой-колодцем. Получим девять ребер,* которые попарно не пересекаются.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники — грани. Поэтому для числа вершин, ребер и граней должно выполняться соотношение Эйлера В − Р + Г′ = 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В − Р + Г = 2, причем В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $(5 \cdot 4)/2 = 10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Исторические сведения

В 2007 году исполнится 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707—1783) — одного из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров ученых-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П. С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

Упражнения

○ **1.** Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

○ **2.** Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

○ **3.** Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

○ **4.** Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно: а) 12; б) 15?

5. Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью ребрами.

6. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней и в каждой из них по 13 ребер?

7. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

8. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

* **9.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходятся три ребра.

***10.** Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 ребер, и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

***11.** Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

***12.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется грань, у которой менее шести ребер.

***13.** Докажите, что для числа вершин В и числа граней Г выпуклого многогранника выполняются неравенства $В + 4 \leqslant 2Г \leqslant 4В - 8$.

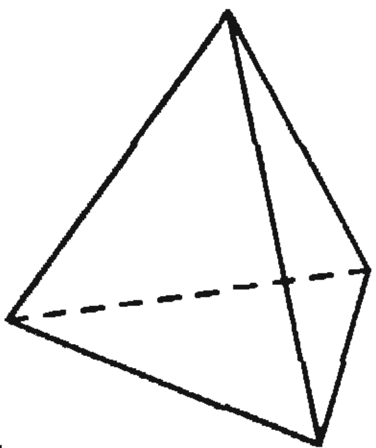
***14.** Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранника равна $360°(n - 2)$, где n — число его вершин.

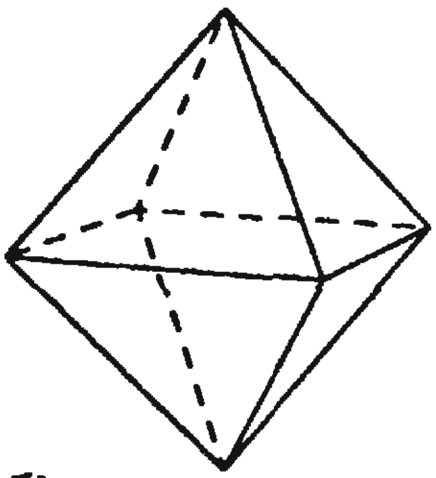
§27. Правильные многогранники

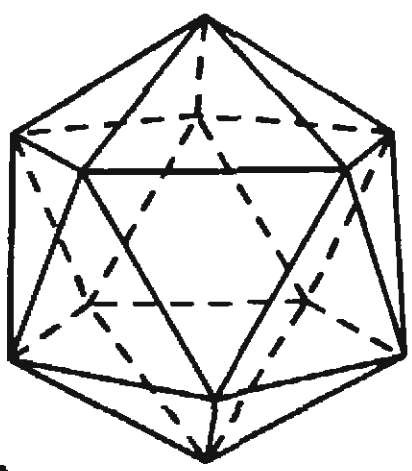
С правильными многогранниками вы познакомились в начале изучения стереометрии. Теперь дадим их определение.

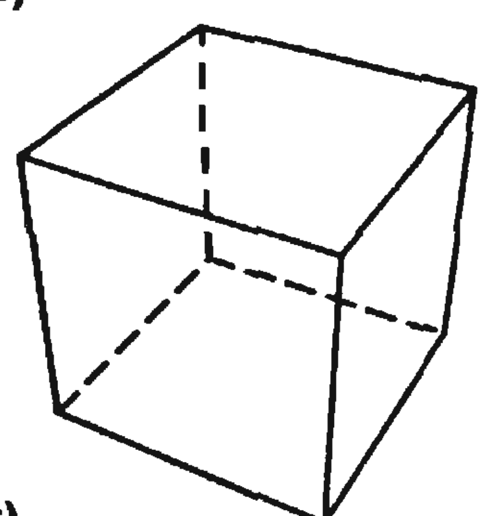
Определение. Выпуклый многогранник называется **правильным,** если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Выясним, сколько и какие правильные многоугольники могут сходиться в вершинах правильного многогранника. Для этого воспользуемся тем, что сумма плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°.


а)


б)


в)


г)

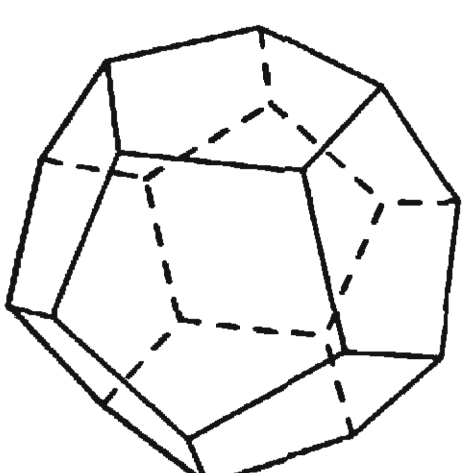

д)

Рис. 117

Наиболее простым правильным многогранником является треугольная пирамида, грани которой правильные треугольники (рис. 117, а). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также **тетраэдром**, что в переводе с греческого языка означает «четырехгранник». Иногда тетраэдром называют произвольную треугольную пирамиду. Поэтому когда речь идет о правильном многограннике, будем говорить — правильный тетраэдр.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходятся четыре грани, изображен на рисунке 117, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется **октаэдром**.

Многогранник, в каждой вершине которого сходятся пять правильных треугольников, изображен на рисунке 117, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется **икосаэдром**.

Заметим, что в вершине выпуклого многогранника может сходиться не более пяти правильных треугольников, так как в противном случае сумма плоских углов при этой вершине будет больше или равна 360°. Поэтому других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то кроме куба (рис. 117, г) других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также **гексаэдром**.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходятся три грани, изображен на рисунке 117, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется **додекаэдром**.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует, и, таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Как говорилось ранее в параграфе 4, модели правильных многогранников можно изготовить из разверток или геометрического конструктора. В качестве примера на рисунке 118 изображена развертка додекаэдра.

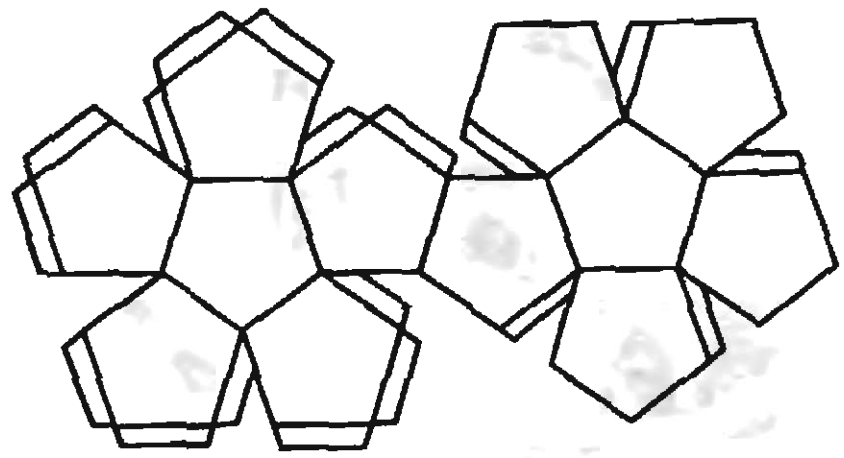


Рис. 118

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429—348 гг. до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также **телами Платона**. Правильным многогранникам посвящена *последняя, XIII книга знаменитых «Начал»* Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи, например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был А. Дюрер. В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 119, а) на переднем плане изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Рис. 119, а

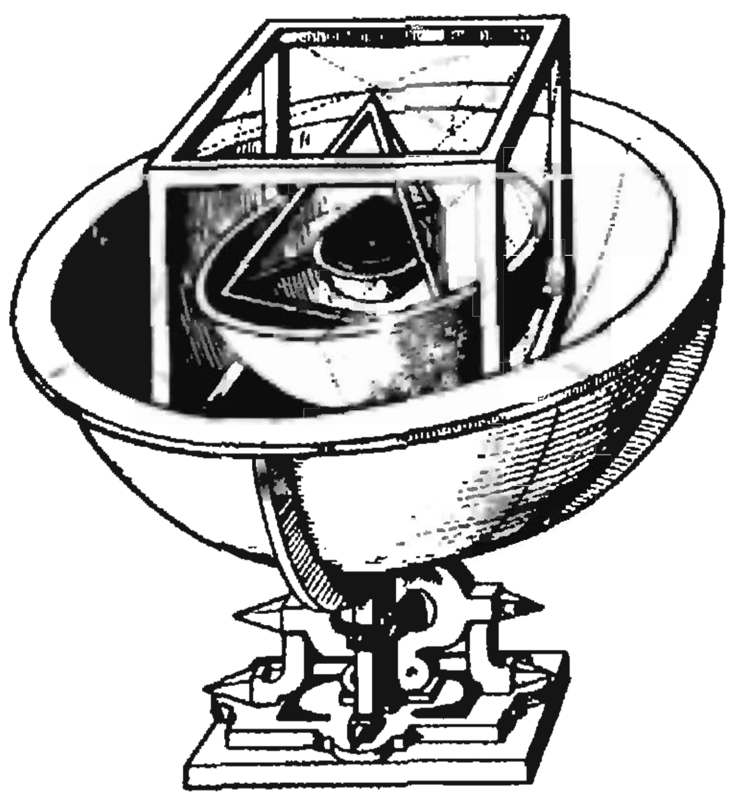


Рис. 119, б

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 119, б).

Упражнения

1. Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?
2. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

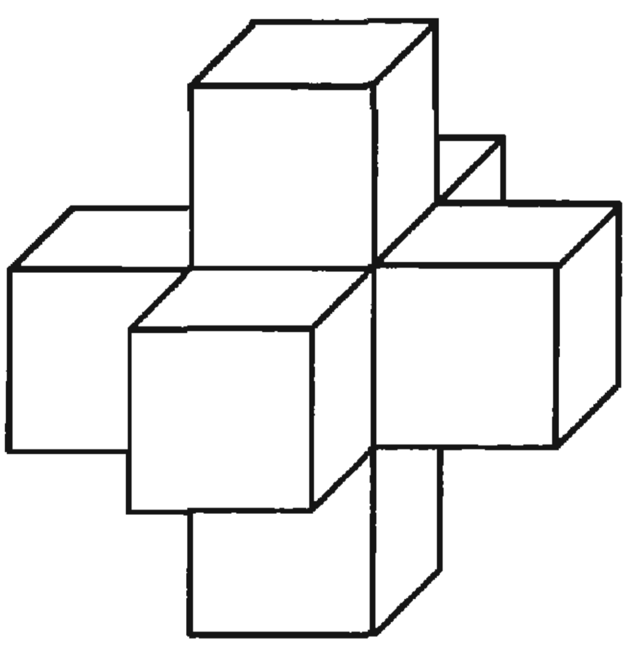


Рис. 120

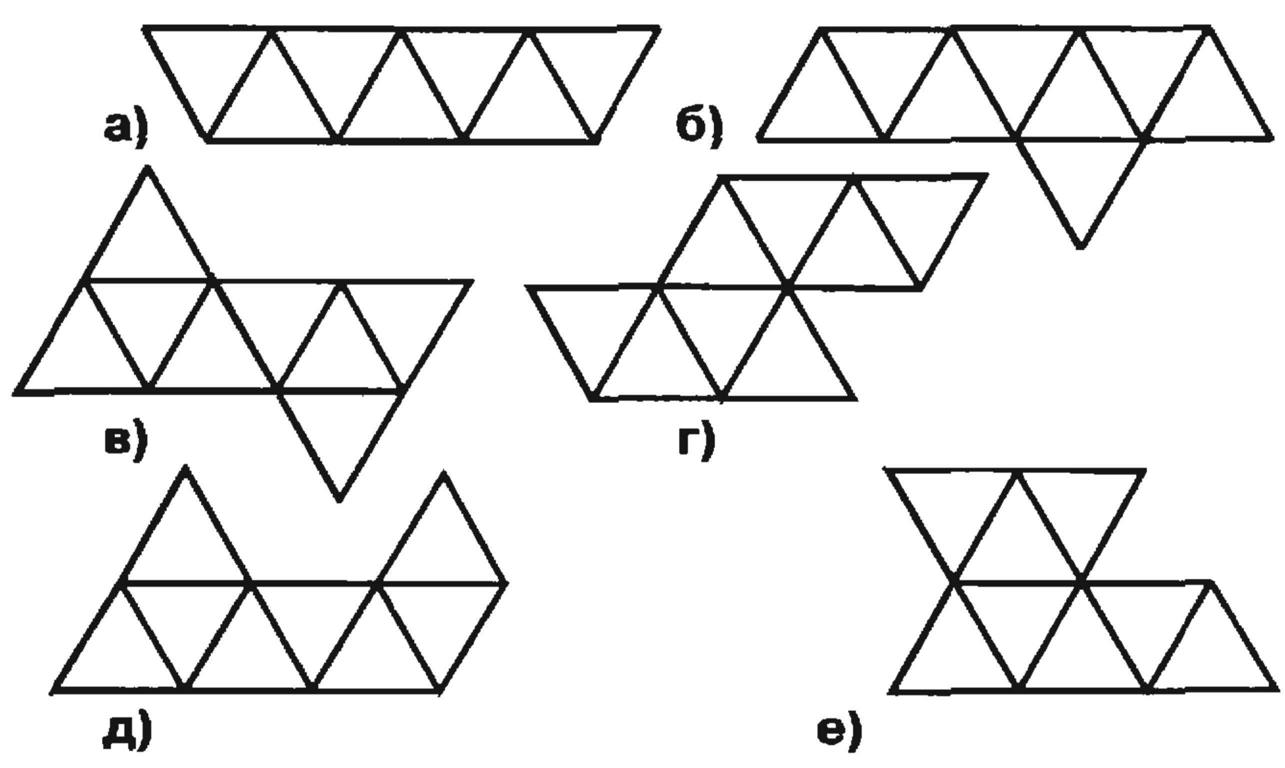


Рис. 121

○ **3.** Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 120) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин и ребер?

○ **4.** Какие из представленных на рисунке 121 фигур можно считать развертками октаэдра?

5. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра и центры граней октаэдра — вершинами куба. Такие два многогранника называются **взаимно двойственными.**

6. Докажите, что додекаэдр и икосаэдр также являются взаимно двойственными многогранниками.

7. Какой многогранник является двойственным тетраэдру?

8. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами (ось октаэдра).

9. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

10. Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?

11. Докажите, что в октаэдре противоположные ребра параллельны.

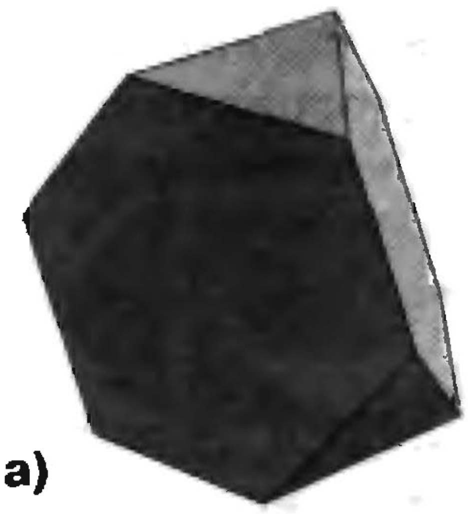
12. Изготовьте из разверток модели правильных многогранников.

§28*. Полуправильные многогранники

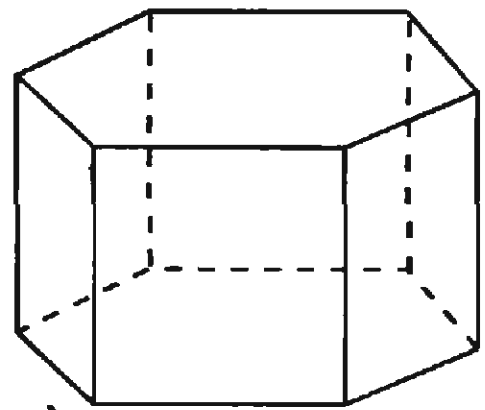
В предыдущем пункте мы рассмотрели правильные многогранники — выпуклые многогранники, у которых гранями являются равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Если допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Определение. **Полуправильным** многогранником называется выпуклый многогранник, у которого гранями являются правильные многоугольники, возможно и с разным числом сторон, и все многогранные углы равны.

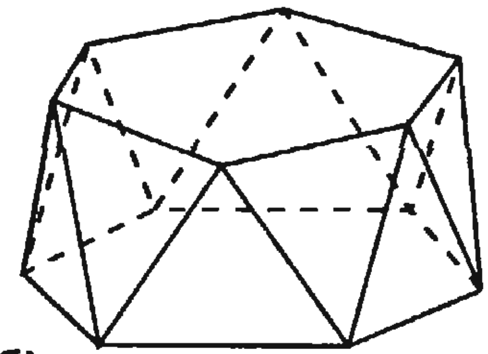
К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная шестиугольная призма на рисунке 122, а имеет своими гранями два правильных



а)

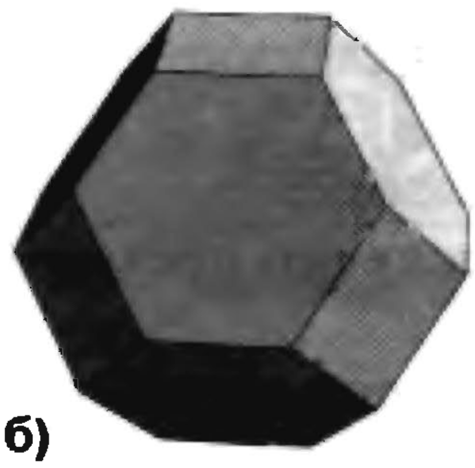


а)

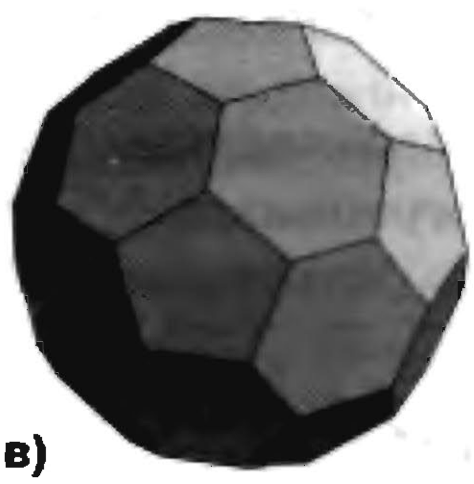


б)

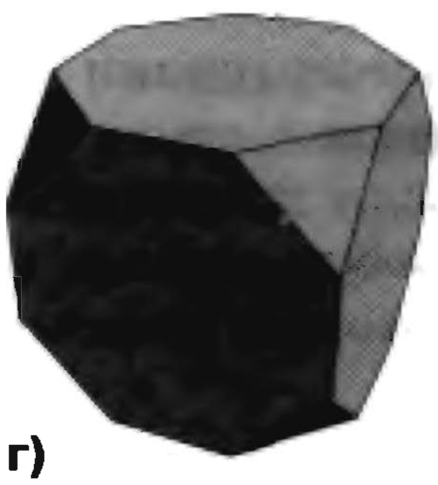
Рис. 122



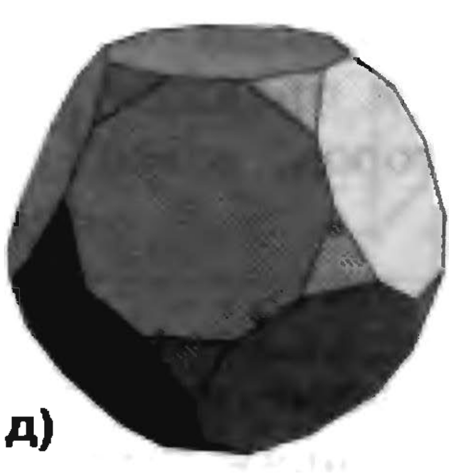
б)



в)



г)



д)

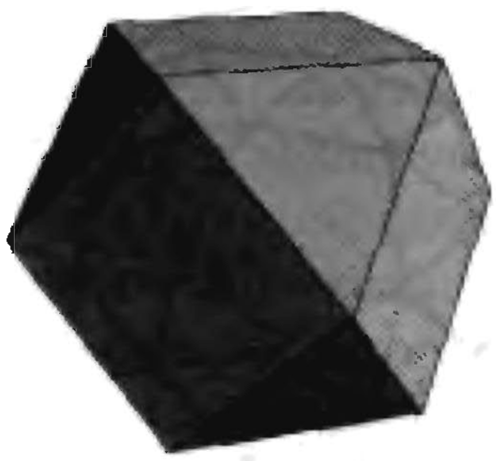
Рис. 123

шестиугольника — основания призмы и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые **антипризмы** с равными ребрами. На рисунке 122, б мы видим шестиугольную антипризму, полученную из шестиугольной призмы (рис. 122, а) поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще 14 полуправильных многогранников, 13 из которых впервые открыл и описал Архимед, — это **тела Архимеда.**

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим **усеченный тетраэдр**, имеющий восемь граней (рис. 123, а). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим, соответственно, **усеченный октаэдр** (рис. 123, б) и **усеченный икосаэдр** (рис. 123, в). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить **усеченный куб** (рис. 123, г) и **усеченный додекаэдр** (рис. 123, д).



а)

б)

Рис. 124

Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется **кубооктаэдром** (рис. 124, а). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

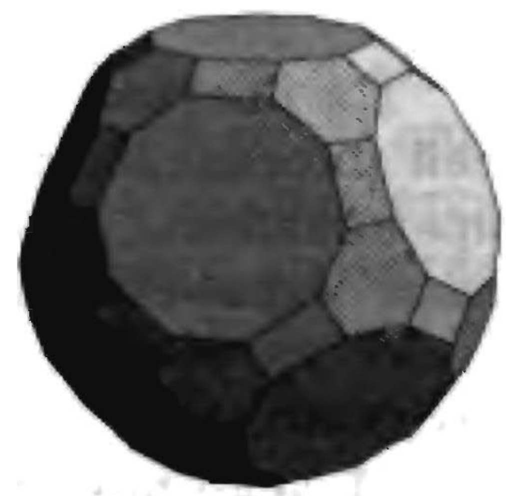
Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется **икосододекаэдром** (рис. 124, б). У него двадцать граней — правильные треугольники и двенадцать граней — правильные пятиугольники, *т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.*

Хотя к последним двум многогранникам нельзя применить операцию усечения, существуют полуправильные многогранники, которые называются **усеченный кубооктаэдр** (рис. 125, а) и **усеченный икосододекаэдр** (рис. 125, б).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

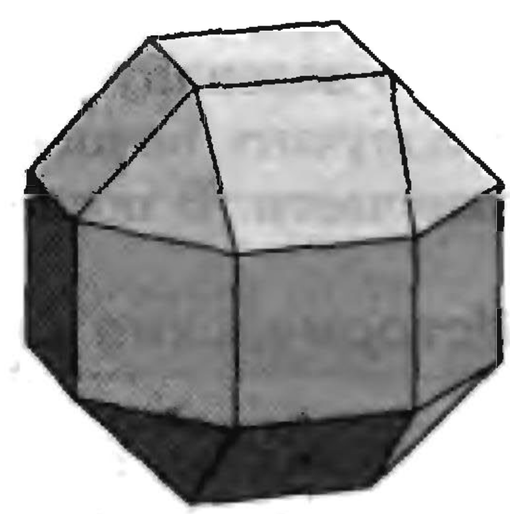
На рисунке 126, а мы видим **ромбокубооктаэдр**. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов. Если повернуть верхнюю восьмиугольную чашу этого многогранника на 45°, то получится новый полуправильный многогранник, который называется **псевдоархимедовым** (рис. 126, б).

а)

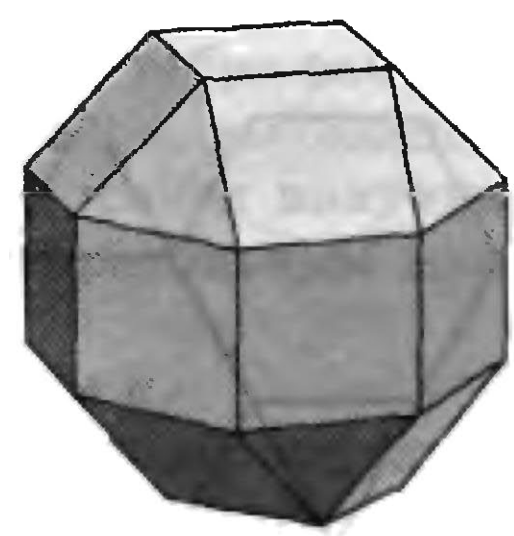


б)

Рис. 125



а)



б)

Рис. 126

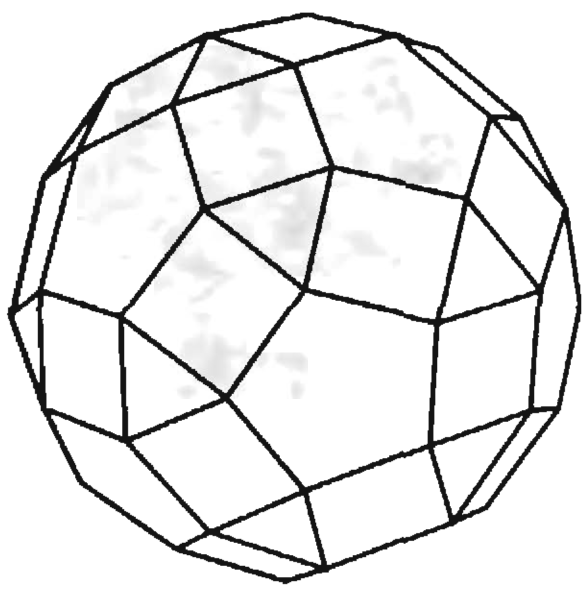


Рис. 127

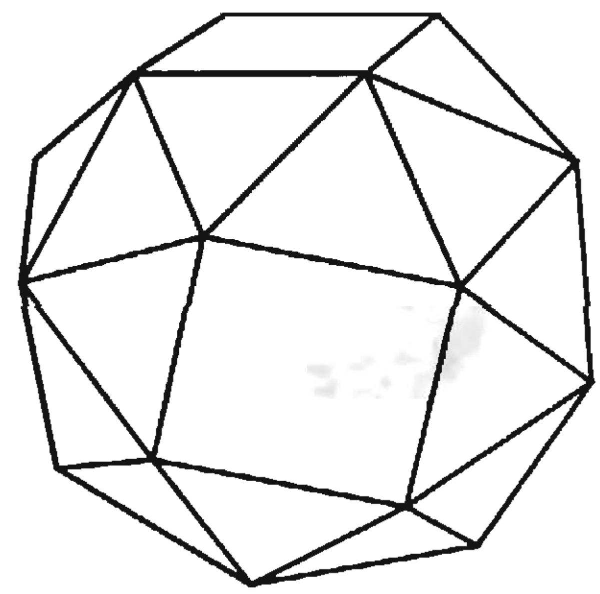


Рис. 128

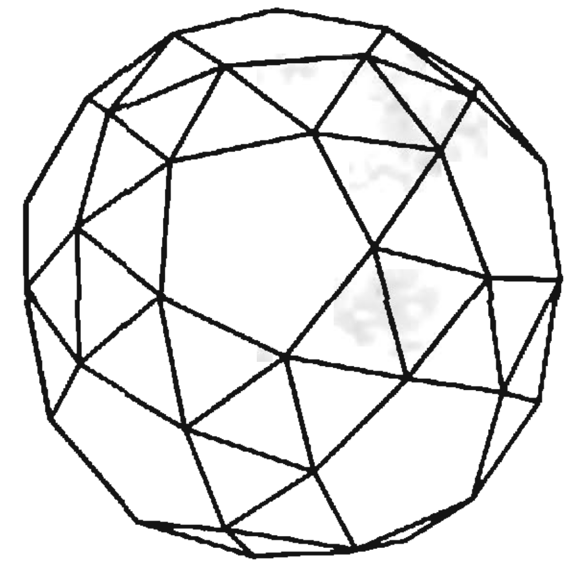


Рис. 129

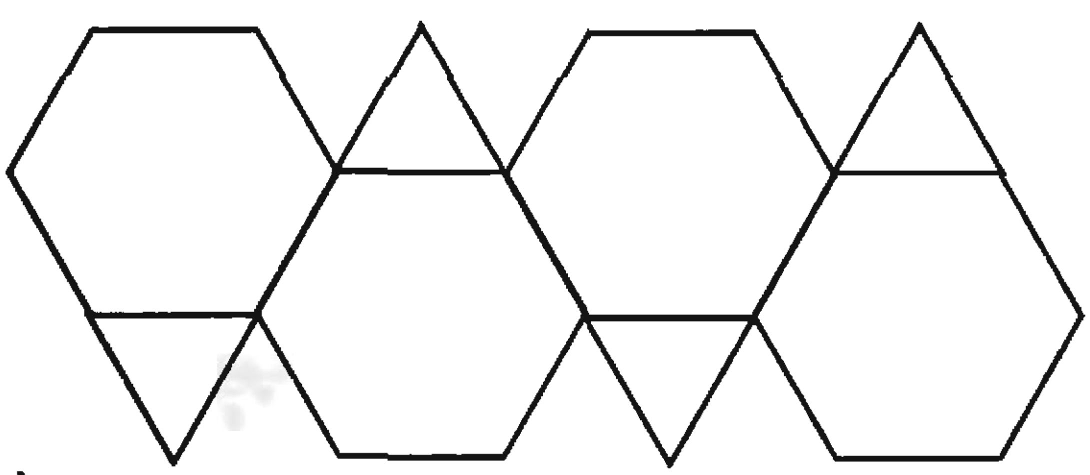
На рисунке 127 изображен **ромбоикосододекаэдр**, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 128 и 129 представлены, соответственно, так называемые **плосконосый** (иногда называют **курносый**) **куб** и **плосконосый (курносый) додекаэдр**, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

Модели полуправильных многогранников можно изготовить из разверток или геометрического конструктора. Например, на рисунке 130, а изображена развертка усеченного тетраэдра. Для большей наглядности шестиугольные грани можно окрасить в один цвет, а треугольные — в другой.

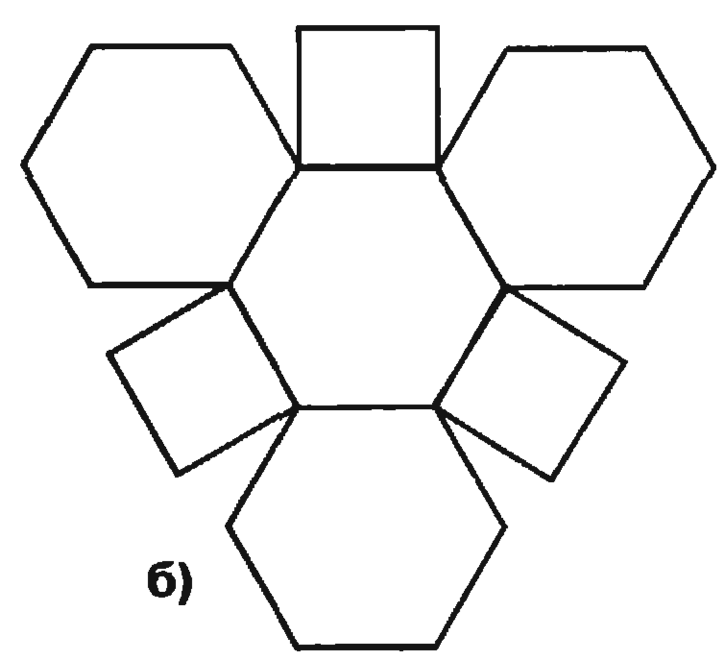
На рисунке 130, б изображена развертка «чаши», которая составляет ровно половину модели усеченного октаэдра. Сначала нужно склеить «чашу» и получить половину модели усеченного октаэдра. Затем подклеить остальные части. В последнюю очередь подклеивается какой-нибудь квадрат.

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287—212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя



а)



б)

Рис. 130

построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число ребер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого ученого «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь ученого телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным ученым — механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для ученых многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема находится в трактате «О плавающих телах» и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений ученого известна катапульта — «архимедов винт» (иногда его называют также «кохлея» — улитка) для поднятия наверх воды — это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле изобразить цилиндр и содержащийся в нем шар и указать соотношение их объемов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого ученого.

Упражнения

○ **1.** Из каких граней состоят усеченный тетраэдр и усеченный куб?

○ **2.** Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, ребер и граней?

3. Докажите, что правильная n-угольная призма ($n = 3, 4, 5...$) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.

4. Найдите высоту шестиугольной антипризмы, если ее ребро равно a.

5. Определите, какую часть ребер правильного тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником.

6. Та же задача для куба. Возьмите ребро куба равным a.

7. Какую часть ребер правильного икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный икосаэдр был полуправильным многогранником?

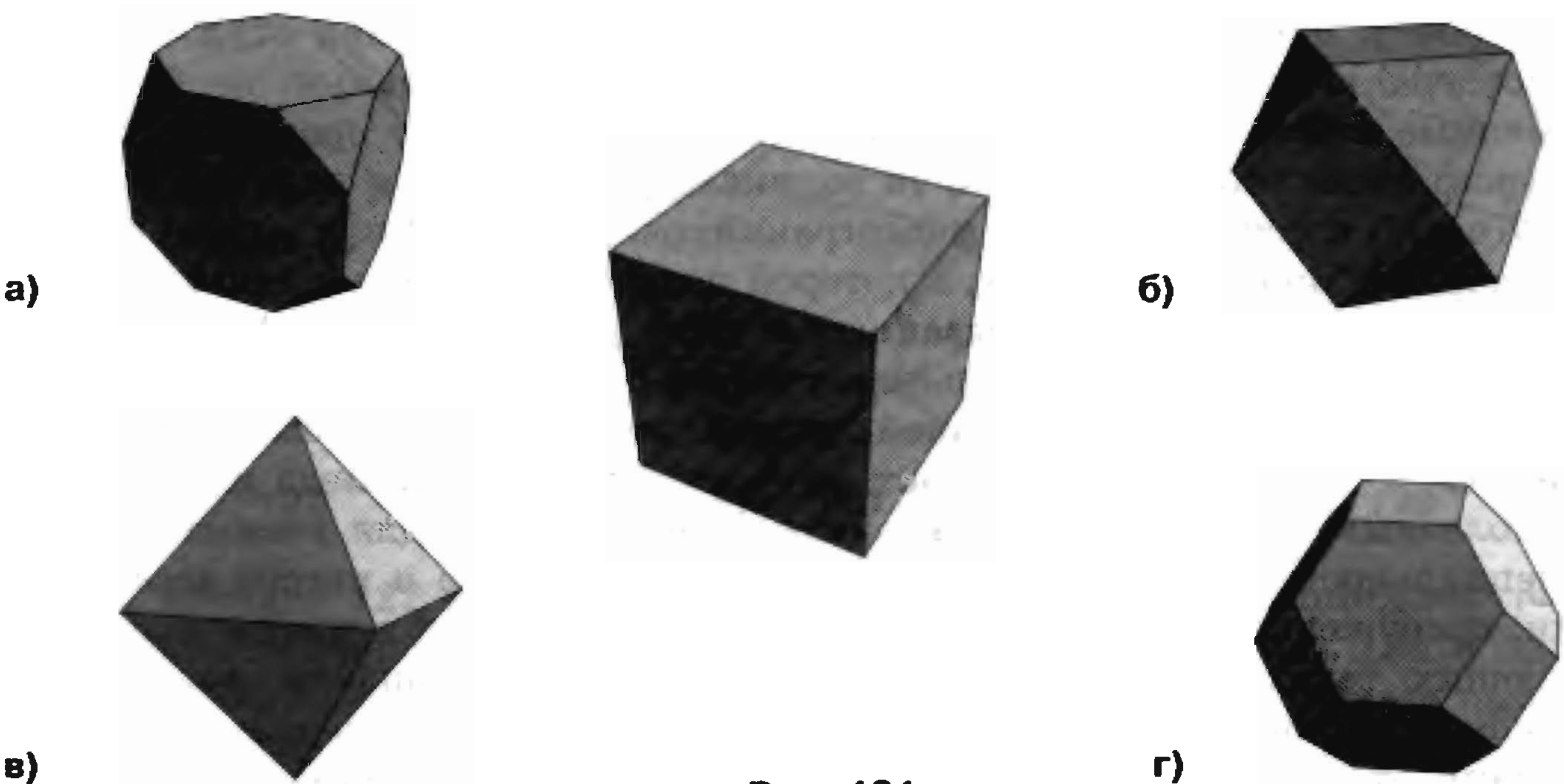
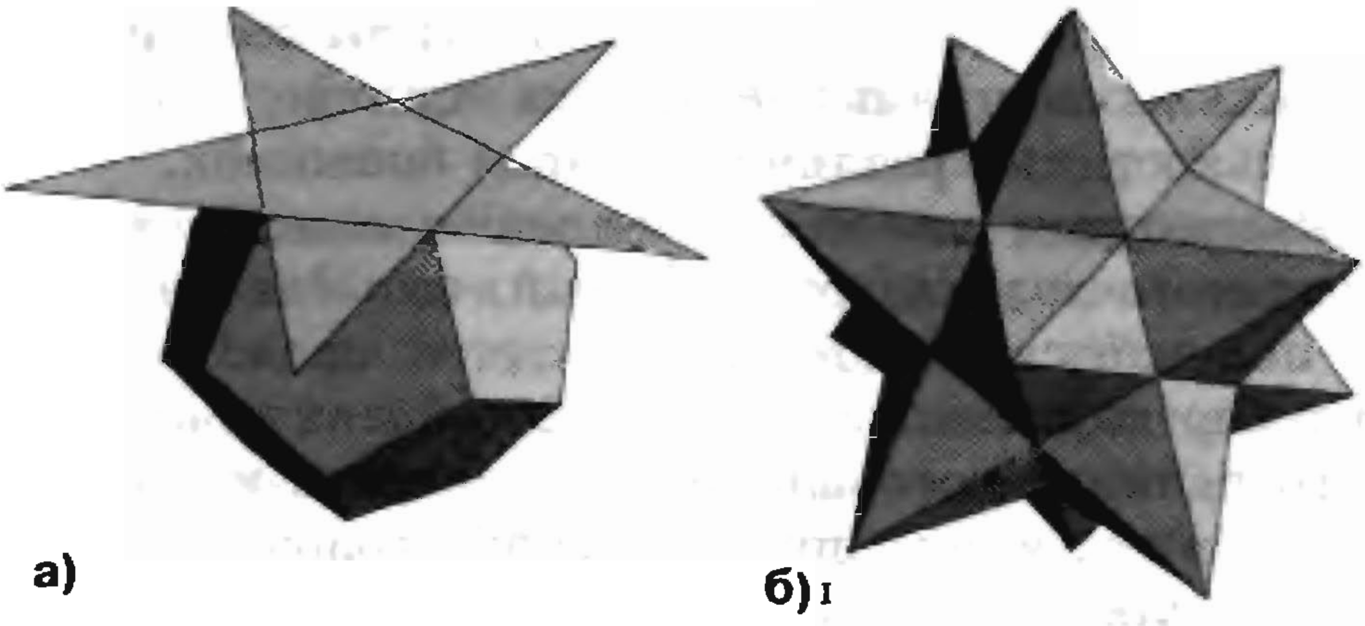


Рис. 131

8. Какую часть ребер правильного додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный додекаэдр был полуправильным многогранником?
9. Определите число вершин, ребер и граней усеченного октаэдра и усеченного додекаэдра.
10. На рисунке 131 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображенные многогранники? Найдите ребра многогранников на рисунках 131, а, б, если ребро куба равно a.
11. Изготовьте модели каких-нибудь полуправильных многогранников.
*12. Нарисуйте многогранники, двойственные: а) правильной шестиугольной призме с равными ребрами; б) четырехугольной антипризме с равными ребрами; в) кубооктаэдру.

§29*. Звездчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые звездчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются **телами Кеплера — Пуансо**. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или ребер.



а) б)

Рис. 132

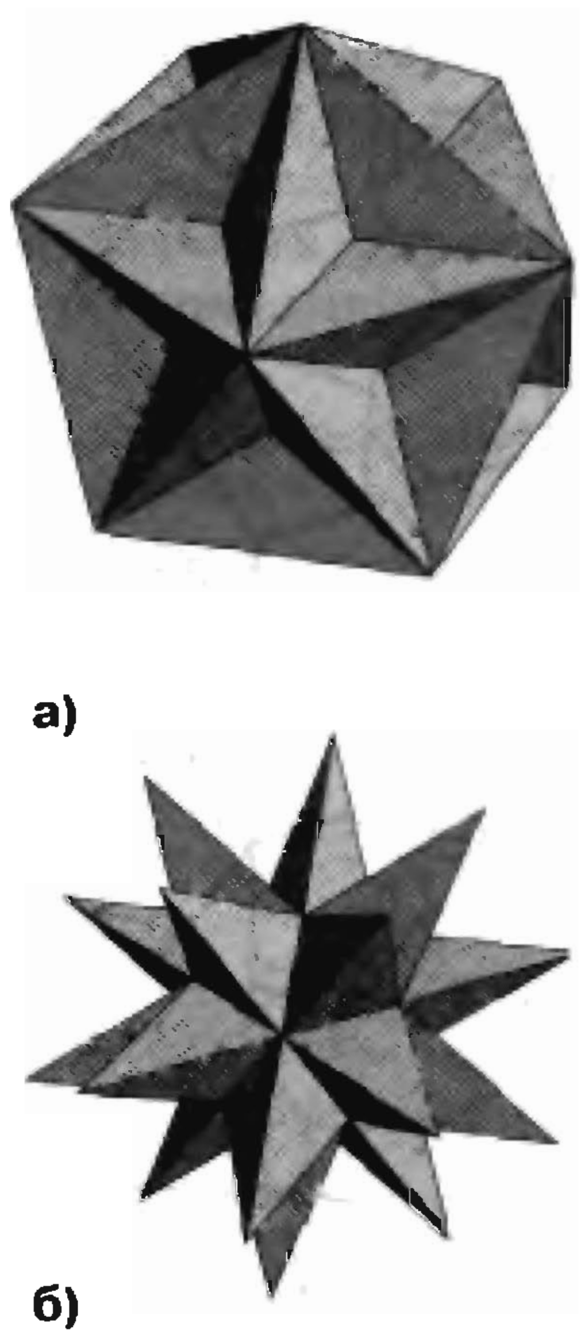
Из тетраэдра, куба и октаэдра звездчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 132, а), и в результате возникает многогранник, который называется **малым звездчатым додекаэдром** (рис. 132, б).

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый **большой додекаэдр** (рис. 133, а). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается **большой звездчатый додекаэдр** (рис. 133, б).

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней икосаэдра получается **большой икосаэдр** (рис. 134).

Таким образом, существуют 4 типа правильных звездчатых многогранников.

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звездчатые многогранники (рис. 135). С древности люди



а) б)

Рис. 133

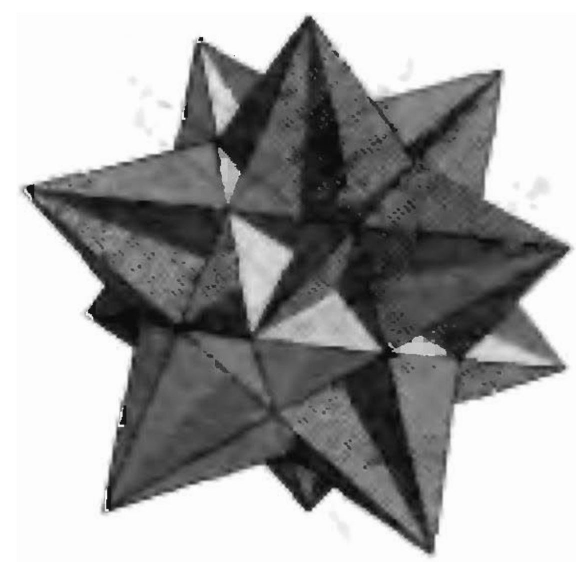


Рис. 134

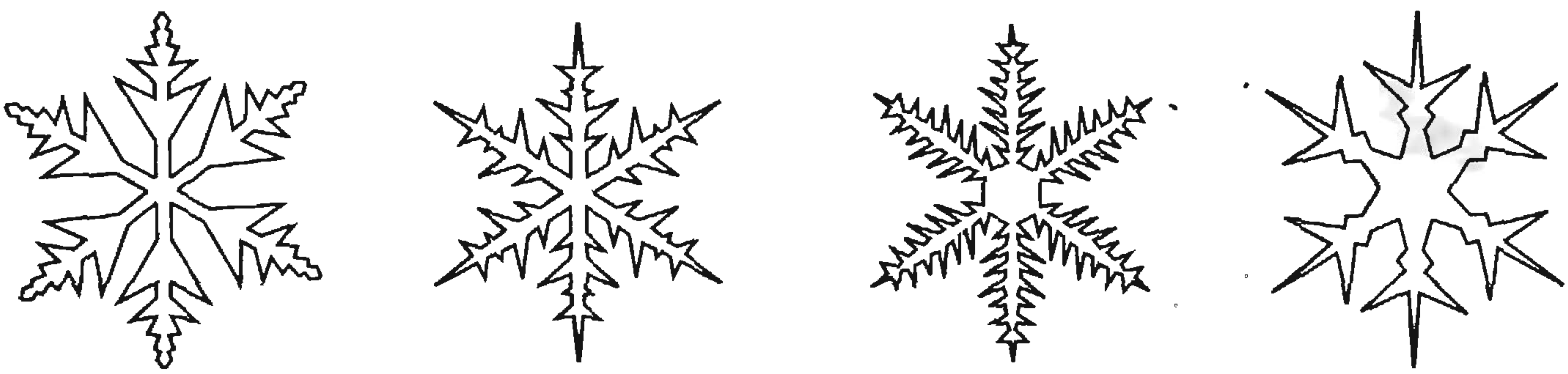
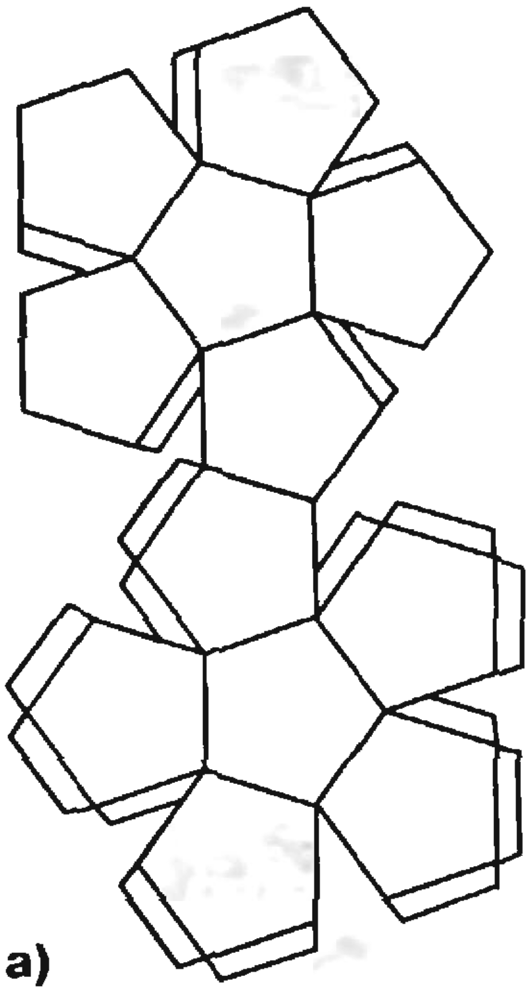


Рис. 135

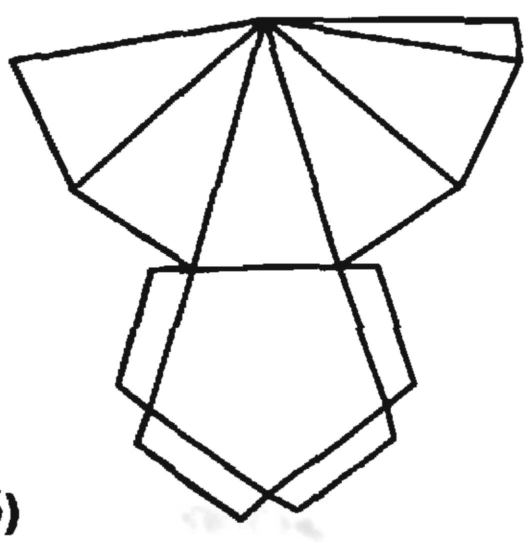
пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

Рассмотрим способ изготовления модели малого звездчатого додекаэдра, который, как сказано выше, *получается из додекаэдра путем продолжения* его ребер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Сначала нужно изготовить модель додекаэдра из развертки (рис. 136, а). После того как модель додекаэдра готова, необходимо изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными граням додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра. Развертка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 136, *б*.



а)



б)

Рис. 136

Рис. 137

Упражнения

1. На рисунке 137 изображен многогранник, называемый **звездчатым октаэдром**, получающийся продолжением граней октаэдра. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им *«Stella octangula»* — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым?
2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?
3. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.
4. Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?
5. Справедливо ли соотношение Эйлера для звездчатых многогранников?
6. Какие ребра должны быть у правильных пятиугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням додекаэдра с ребром *a* получился малый звездчатый додекаэдр (рис. 132, б)?

7. Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням икосаэдра с ребром a получился большой звездчатый додекаэдр (рис. 133, б)?
8. Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при удалении их из граней икосаэдра с ребром a получился большой додекаэдр (рис. 133, а)?
9. *Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых многогранников.*

§ 30*. Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Кристаллы поваренной соли имеют форму куба, **кристаллы льда** и **горного хрусталя (кварца)** напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 138).

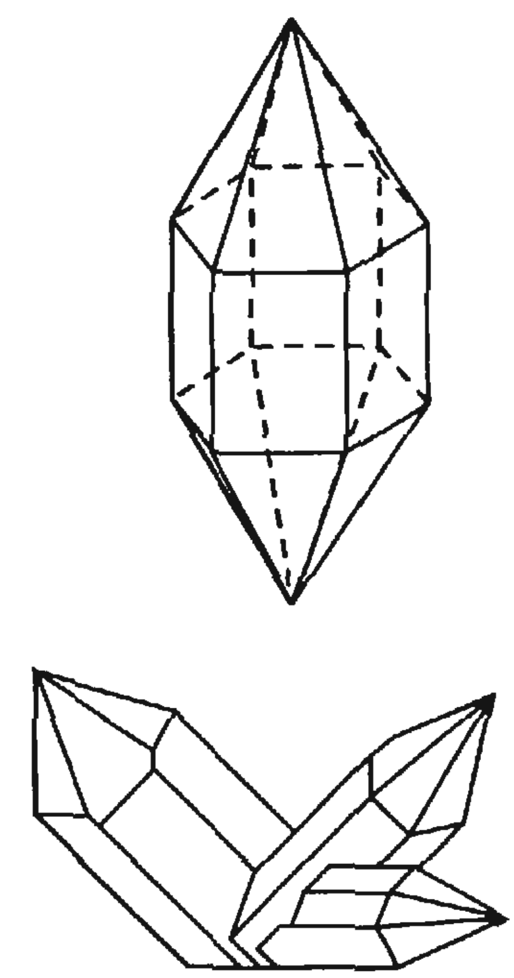


Рис. 138

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде кубооктаэдра.

Кристалл граната имеет форму ромбододекаэдра (иногда его называют ромбоидальный, или ромбический, додекаэдр) — двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов (рис. 139).

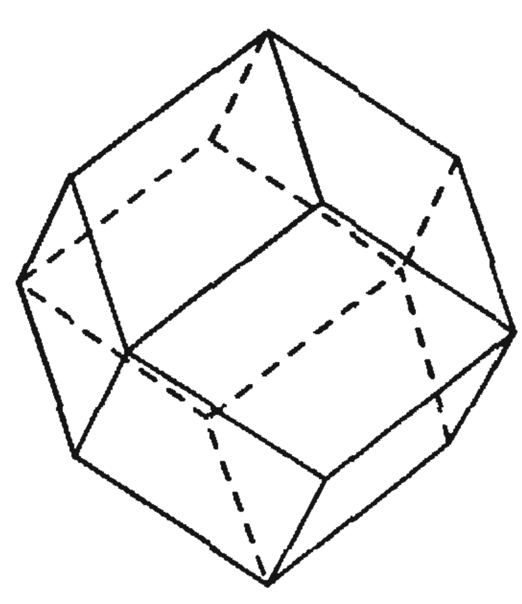


Рис. 139

Для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат — один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на территории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т. е. многогранник-ромбододекаэдр, был известен с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе с древнегреческого языка означало «красная краска». При этом название связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н. э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неолите Египта и в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н. э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например так называемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения камнями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье. Это камень-талисман для людей, родившихся в январе.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П. П. Бажовым в сборнике «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности о месторождениях граната на Урале.

Упражнения

1. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Ребра ромба возьмите равными 6 см, острый угол приблизительно равен 70°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 140, а). Модель лучше сделать двуцветной так, как показано на рисунке 140, б.

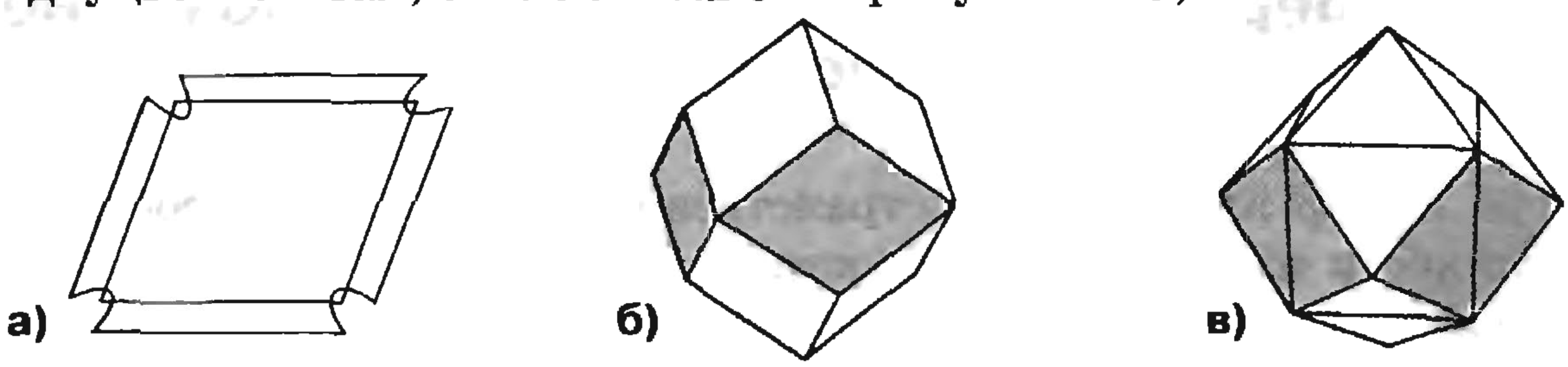


Рис. 140

2. Возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть одинаковых четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба (рис. 140, в). Покажите, что образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

3. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

4. Найдите меньшую диагональ ромба со стороной 6 см, являющегося гранью ромбододекаэдра.

5. Ребро куба равно 1. Найдите ребро соответствующего ромбододекаэдра.

6. Используя модель ромбододекаэдра:

а) подсчитайте количество его граней, ребер и вершин;

б) имеются ли пары параллельных граней? Сколько таких пар?

в) Сколько трехгранных и четырехгранных углов?

г) Определите величину двугранного угла ромбододекаэдра;

д) найдите углы между несмежными гранями четырехгранных углов ромбододекаэдра.

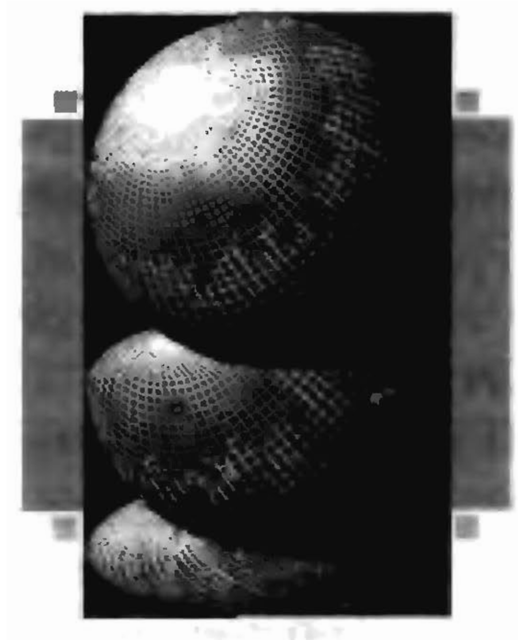
7. *Можно ли равными ромбододекаэдрами заполнить все пространство, т. е. составить пространственный паркет?*

8. Из каких одноименных правильных многогранников можно составить пространственный паркет?

9. Вершинами какого многогранника являются центры граней ромбододекаэдра?

Глава V

КРУГЛЫЕ ТЕЛА



§ 31. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости

Сфера и шар являются пространственными аналогами, соответственно, окружности и круга на плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой **центром**, на данное расстояние, называемое **радиусом**.

Радиусом сферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь ее точку.

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой **центром**, на расстояние, не превосходящее данное, называемое **радиусом**.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется **поверхностью** шара.

Радиусом шара называется также отрезок, соединяющий центр шара и какую-нибудь точку его поверхности.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью**.

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Пусть в пространстве заданы сфера с центром в точке O и радиусом R и плоскость α.

Если эта плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние R, т. е. окружность радиуса R (рис. 141, а).

Эта окружность называется **большой окружностью**. Соответствующий круг называется **большим кругом**.

Если плоскость α не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1. При этом возможны следующие случаи.

1. Длина этого перпендикуляра больше R. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно больше R.

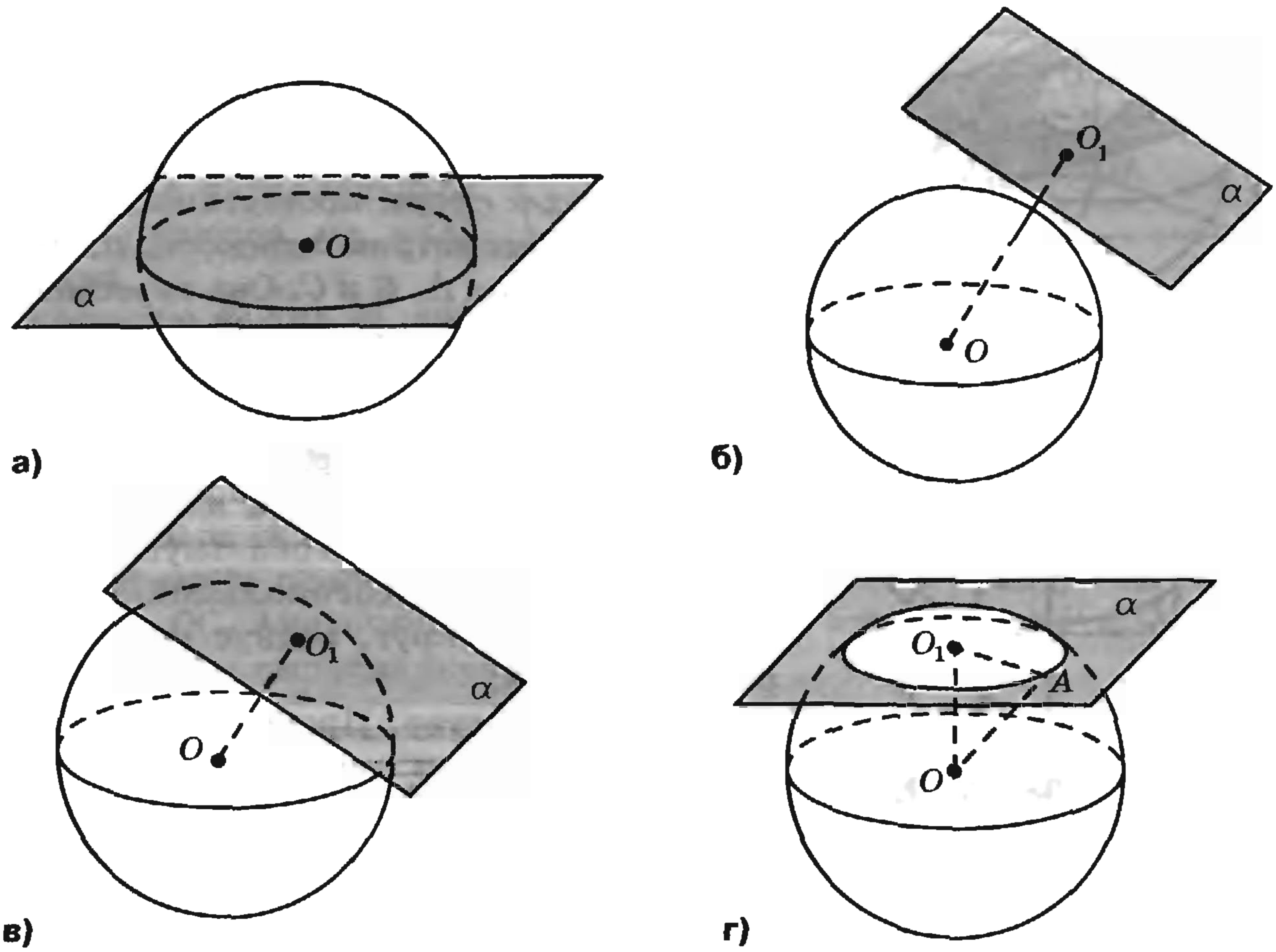


Рис. 141

Следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 141, б).

2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1, т. е. α является касательной плоскостью (рис. 141, в).

3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. Докажем, что в *этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром* в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 141, г).

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению сферы и плоскости α, из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для *точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O* до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит сфере. ■

Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной прямой.**

Для касательных прямых к сфере справедливы свойства, аналогичные свойствам касательных к окружности. В частности, имеет место следующая теорема.

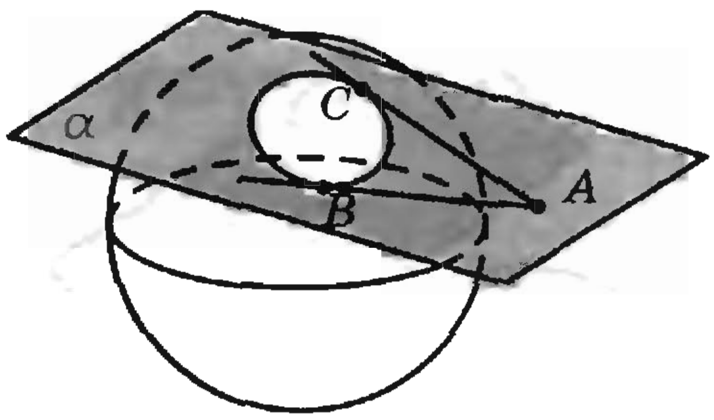


Рис. 142

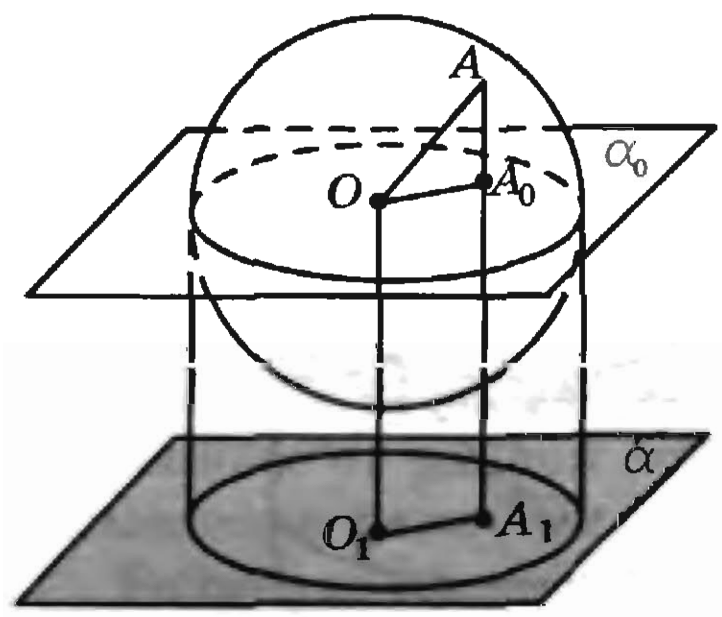


Рис. 143

Теорема. Все отрезки касательных, проведенных из одной точки к данной сфере, равны между собой.

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведенных из точки A (рис. 142). Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$. ■

Для изображения шара и сферы на плоскости используют ортогональную проекцию.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведем плоскость α_0, проходящую через центр сферы O и параллельную плоскости проектирования α. Поскольку плоскости α и α_0 параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 143).

Сечением сферы плоскостью α_0 является окружность радиуса R, равного радиусу сферы. Если A — точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 — ее ортогональная проекция на плоскость α_0, то $OA_0 < OA \leqslant R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α_0 точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса. ■

Для большей наглядности изображения сферы в нем выделяют большую окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр), плоскость которой образует острый угол с направлением проектирования, и полюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется экватором. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости экватора, — параллелями, диаметр, перпендикулярный плоскости экватора, — осью, а большие окружности, проходящие через полюсы, — меридианами.

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами PQ и CD (рис. 144). Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

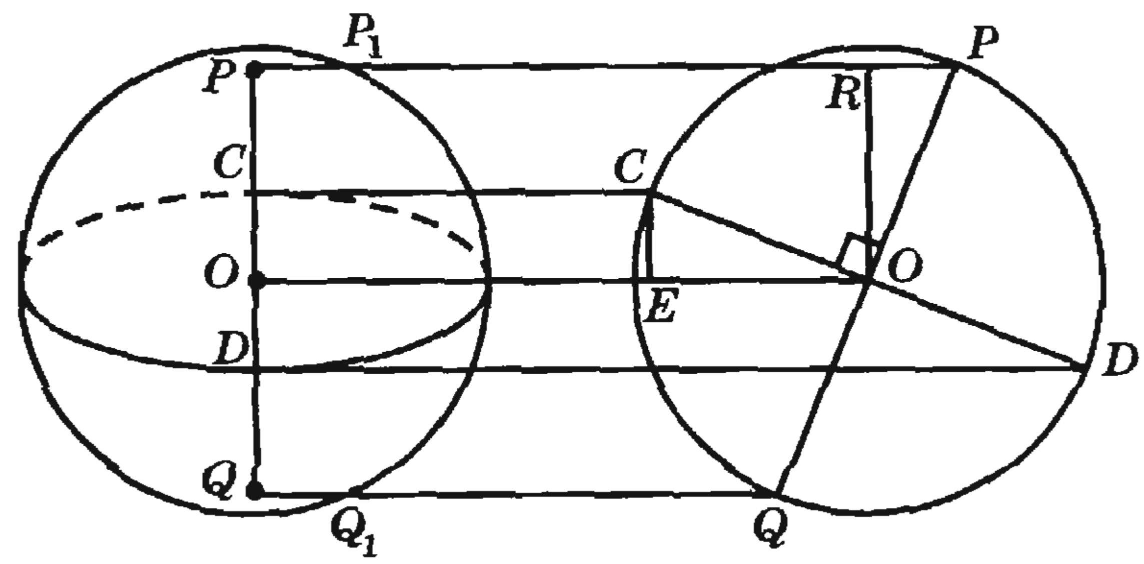


Рис. 144

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Но $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит, $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

Упражнения

○ **1.** Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую ее плоскости?

○ **2.** Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?

○ **3.** Верно ли, что через две точки сферы проходит один большой круг?

○ **4.** Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

○ **5.** Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

6. Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

7. Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

8. Шар радиуса 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Вычислите радиус круга, получившегося в сечении.

9. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении?

10. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Найдите площадь сечения.

11. Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

12. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.

13. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, принадлежащую сфере; в) через точку, лежащую вне сферы?

14. Можно ли провести общую касательную плоскость к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?

15. Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух: а) параллельных плоскостей; б) пересекающихся плоскостей.

16. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величиной φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.

17. Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

°**18.** Сколько можно провести прямых, касающихся сферы в одной и той же точке?

°**19.** Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку: а) на сфере; б) вне сферы?

20. *Докажите, что касательная прямая к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

21. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса R, которые касаются данной: а) прямой; б) плоскости; в) сферы?

22. Можно ли к двум сферам провести общую касательную прямую?

23. Что можно сказать о всех общих касательных прямых, проведенных к двум данным сферам: а) разных радиусов; б) одного радиуса?

***24.** Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор, постройте изображения полюсов.

***25.** Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами изобразите экватор.

§ 32. Многогранники, вписанные в сферу

Эта тема аналогична соответствующей теме курса планиметрии, где, в частности, показывалось, что окружности можно описать около каждого треугольника и около каждого правильного многоугольника.

Аналогом окружности в пространстве является сфера. Аналогом многоугольника является многогранник. При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, аналогом правильных многоугольников — правильные многогранники.

Определение. Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины принадлежат этой сфере. Сама сфера при этом называется **описанной около многогранника**.

Теорема. Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу, и притом только одну.

Доказательство. Обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего находили геометрическое место точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, например A и B (рис. 145, а). Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку AB. Затем находили геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и C. Это серединный перпендикуляр к отрезку AC. Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности.

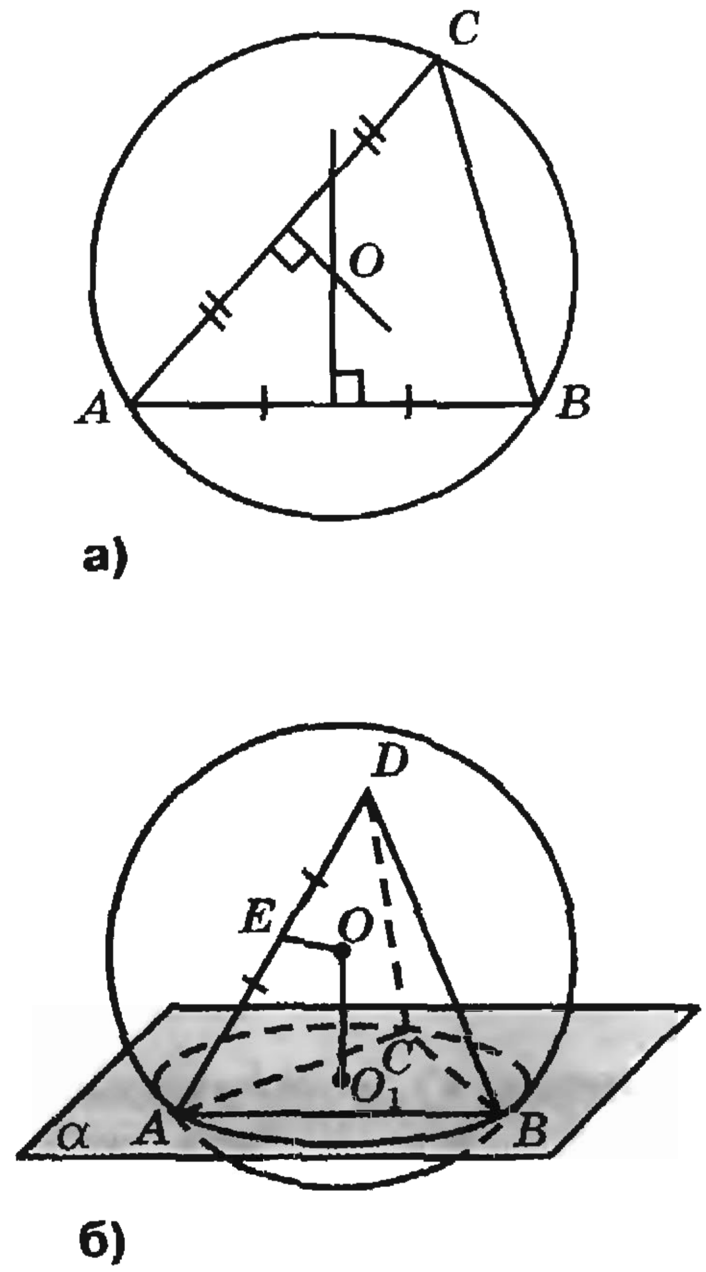


Рис. 145

Рассмотрим теперь пространственную ситуацию и попробуем сделать аналогичные построения.

Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 145, б). Точки A, B, C определяют плоскость α. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех точек — A, B, C, является перпендикуляр, назовем его a, проведенный к плоскости α и проходящий через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности (см. задачу 20 из § 18). Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, D, является плоскость, назовем ее β, перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину — точку E (см. задачу 19 из § 18).

Плоскость β не перпендикулярна плоскости α и, следовательно, пересекает прямую a в некоторой точке O, которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $ABCD$ сферы. Действительно, в силу построения, точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $ABCD$. Причем такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку. ■

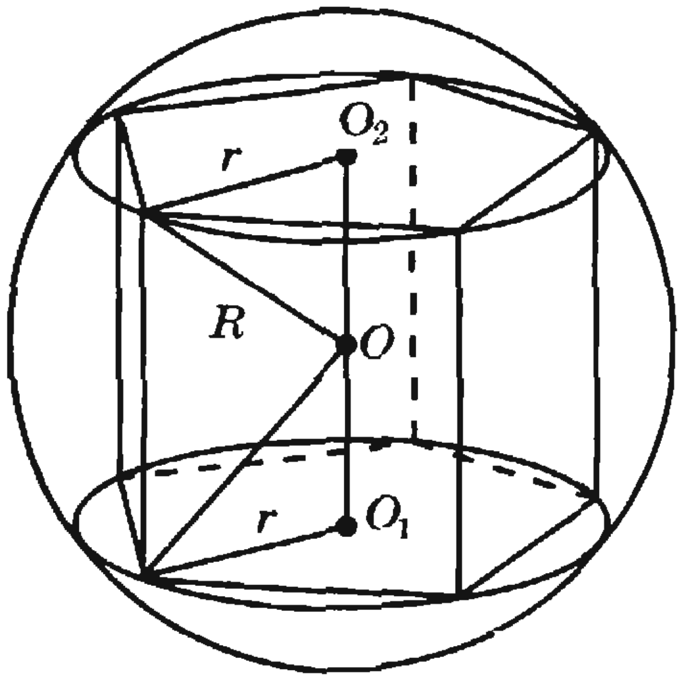


Рис. 146

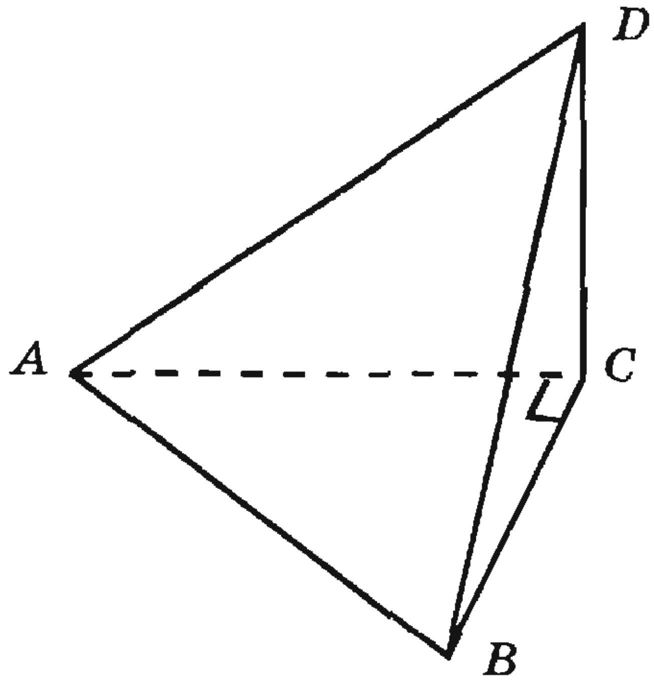


Рис. 147

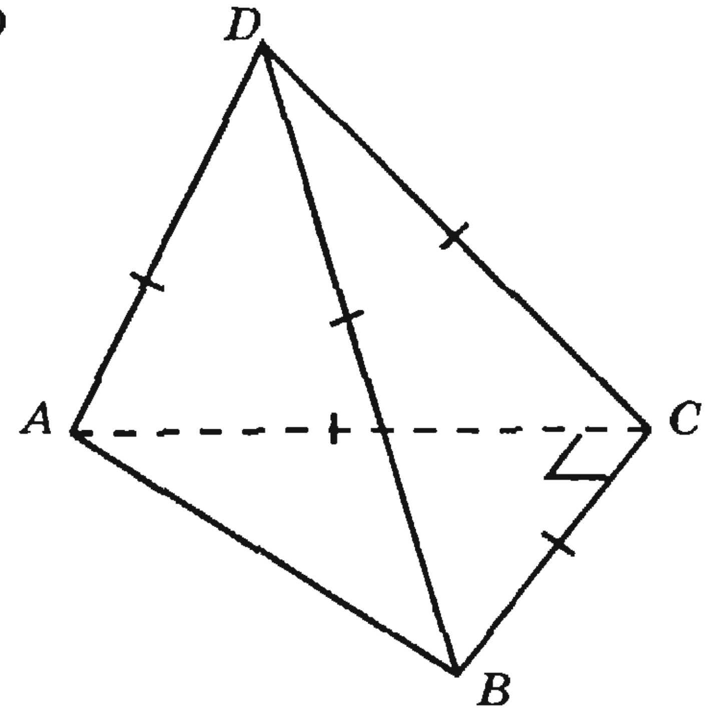


Рис. 148

Выясним, в каком случае около прямой призмы можно описать сферу.

Теорема. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.

Доказательство. Если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере и, следовательно, окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания (рис. 146). Обратно, пусть около основания прямой призмы описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r. Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и тем же радиусом r. Пусть $O_1O_2 = d$, O — середина отрезка O_1O_2. Тогда сфера с центром O и радиусом $R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой. ■

Упражнения

1. Можно ли описать сферу около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм; г) параллелепипеда, одной из граней которого является ромб?
2. Ребро куба равно a. Найдите радиус сферы, описанной около него.
3. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите радиус сферы.
4. Может ли центр описанной около треугольной пирамиды сферы находиться вне этой пирамиды?
5. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

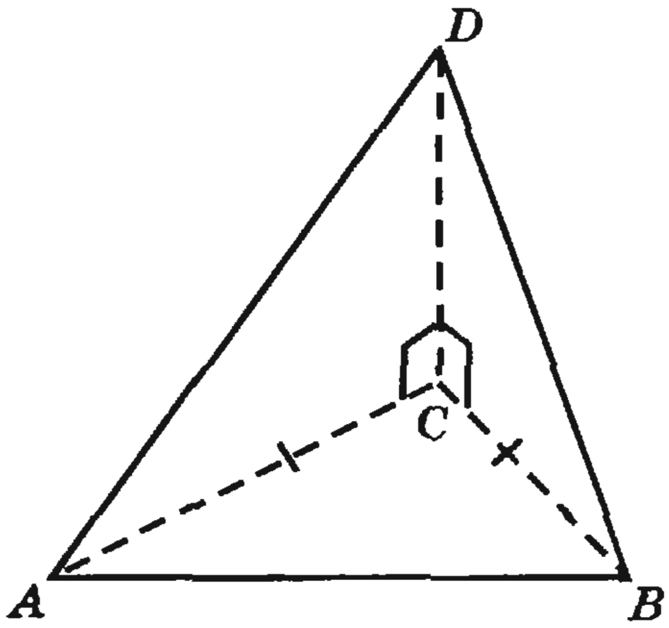


Рис. 149

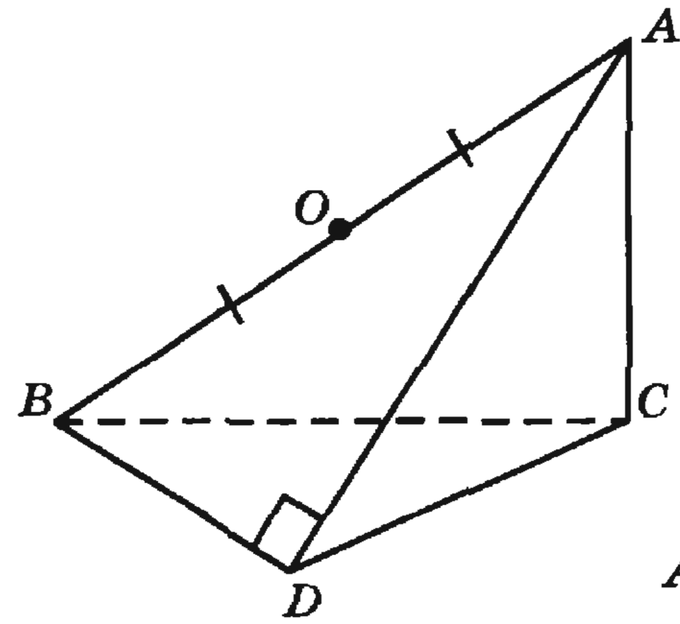


Рис. 150

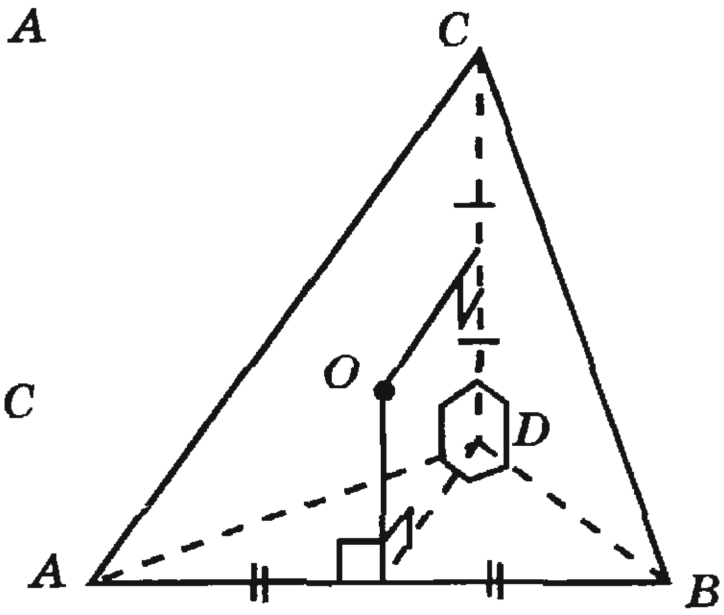


Рис. 151

6. На рисунке 147 изображена пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен 90°. Укажите на чертеже точку O — центр сферы, описанной около пирамиды.

7. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найдите радиус описанной сферы.

○ **8.** Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

○ **9.** Каким свойством должен обладать многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около нее можно было описать сферу?

10. На рисунке 148 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой. $AC = CB = CD = DB = AD = a$. Найдите высоту пирамиды и центр сферы, описанной около нее.

11. На рисунке 149 показана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AC = BC$, ребро DC перпендикулярно плоскости ABC и угол ACB равен 120°. Нарисуйте центр сферы, описанной около пирамиды.

12. На рисунке 150 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDA прямой. Докажите, что точка O — центр сферы, описанной около пирамиды.

13. На рисунке 151 изображена пирамида $ABCD$, у которой углы ADC, CDB и ADB прямые. Докажите, что точка O является центром сферы, описанной около пирамиды.

○ **14.** При каком условии около прямой призмы можно описать сферу?

○ **15.** Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

○ **16.** Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы?

○ **17.** При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находиться: а) внутри призмы; б) на одной из боковых граней призмы; в) вне призмы?

18. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найдите радиус описанной сферы.

° 19. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?

20. Докажите, что около любой правильной усеченной пирамиды можно описать сферу.

*21. Докажите, что около любого правильного многогранника можно описать сферу.

*22. Ребро тетраэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

*23. Ребро октаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

*24. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере так, чтобы расстояния между любыми двумя точками были равны?

*25. Докажите, что если около каждой грани многогранника можно описать окружность и в каждой вершине этого многогранника сходятся три ребра, то около данного многогранника можно описать сферу. Приведите пример многогранника, около каждой грани которого можно описать окружность, а около самого многогранника нельзя описать сферу.

26. Нарисуйте сферу и вписанную в нее треугольную пирамиду с вершиной в полюсе сферы.

27. Нарисуйте сферу и вписанную в нее правильную четырехугольную пирамиду с вершиной в полюсе сферы.

28. Нарисуйте сферу и вписанную в нее призму.

§ 33. Многогранники, описанные около сферы

Здесь мы рассмотрим многогранники, описанные около сферы, но сначала напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. Сам многоугольник при этом называется описанным около окружности.

В планиметрии доказывалось, что в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Для нахождения центра O вписанной в треугольник ABC окружности, нужно провести биссектрисы углов A и B. Их точка пересечения O будет одинаково удалена от всех сторон

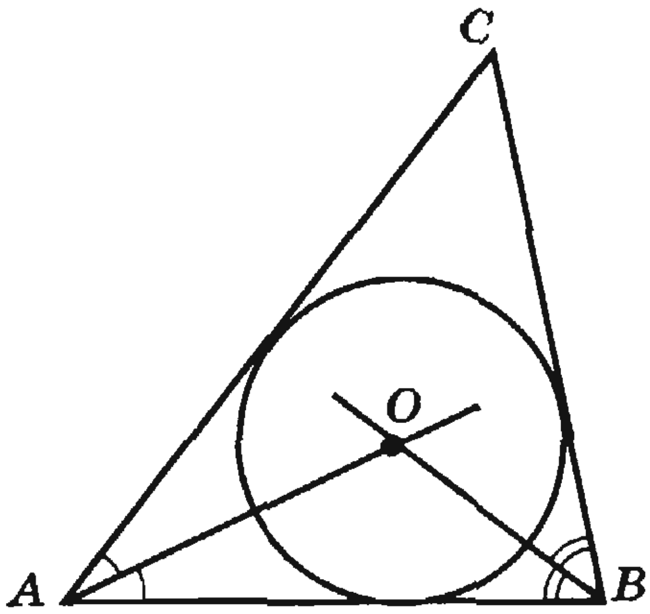


Рис. 152

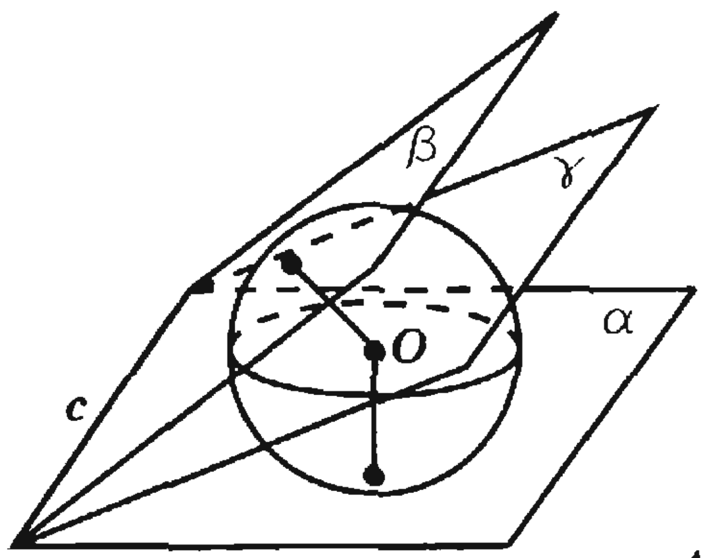


Рис. 153

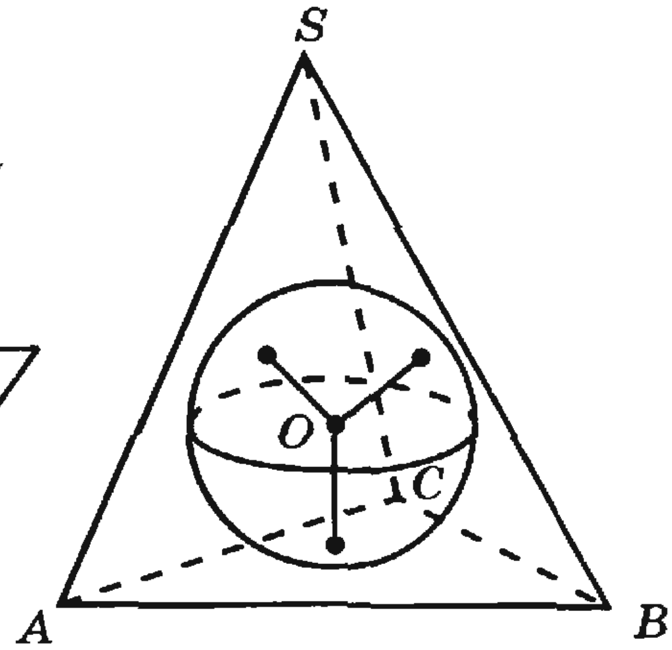


Рис. 154

треугольника и, следовательно, будет искомым центром вписанной окружности (рис. 152). Перейдем теперь к пространственным фигурам.

Определение. Многогранник называется **описанным около сферы**, если плоскости всех его граней касаются сферы. Сама сфера называется **вписанной в многогранник**.

Выясним сначала, какие сферы касаются одновременно двух пересекающихся плоскостей.

Пусть дан двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с общей граничной прямой c. Через прямую c проведем полуплоскость γ, делящую этот двугранный угол пополам (рис. 153). Такая полуплоскость называется **биссектральной**. Точки полуплоскости γ, не принадлежащие прямой c, обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы. Если это расстояние принять за радиус сферы R, то сфера с центром на биссектральной полуплоскости и радиусом R будет касаться плоскости α и плоскости β. Сама биссектральная полуплоскость без прямой c дает геометрическое место центров сфер, лежащих внутри двугранного угла и касающихся плоскостей α и β.

Теорема. *В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.*

Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка, одинаково удаленная от всех граней треугольной пирамиды. Для ее нахождения рассмотрим три биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных боковыми гранями пирамиды и основанием. Они пересекаются в одной точке (докажите это самостоятельно), которая будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы (рис. 154). ■

Выясним, в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке O и радиусом R (рис. 155). Тогда высота призмы равна $2R$. Через центр O проведем сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания, описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность. Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиуса R, а высота призмы равна $2R$. Пусть O — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом R будет искомой сферой, вписанной в призму. ■

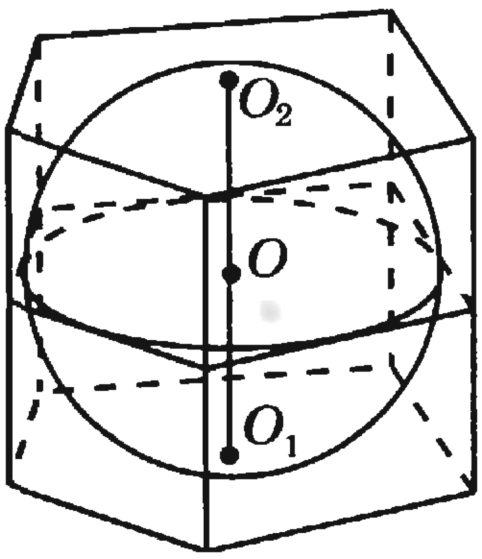


Рис. 155

Упражнения

1. *Можно ли вписать сферу в куб? Что будет центром вписанной сферы?*
2. Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед?
3. При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?
4. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.
5. Докажите, что в пирамиду, у которой двугранные углы при основании равны, всегда можно вписать сферу.
6. Сфера касается боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды и ее основания. Определите радиус сферы, если диагональным сечением пирамиды является равносторонний треугольник, сторона которого равна a.
7. Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c.
8. По ребру a тетраэдра определите радиус вписанной сферы.
9. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а угол между боковой гранью и основанием равен 60°.
10. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб со стороной a и острым углом α. Углы между боковыми гранями и основанием равны φ.

*11. Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань SCB перпендикулярна плоскости основания; ребра SC и SB равны a; плоские углы при вершине равны между собой и равны 60°. Определите радиус вписанной сферы.

12. В правильную 6-угольную призму со стороной основания 1 вписана сфера. Найдите высоту призмы.

13. Гранями параллелепипеда являются ромбы со сторонами 1 и острыми углами 60°. Найдите радиус вписанной сферы.

***14.** Докажите, что в любой правильный многогранник можно вписать сферу. Причем центры вписанной и описанной сфер совпадают.

15. Найдите радиус сферы, вписанной в октаэдр с ребром a.

***16.** Сфера касается всех ребер пирамиды $ABCD$. Докажите, что $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

***17.** Нарисуйте сферу, вписанную в треугольную пирамиду.

***18.** Нарисуйте сферу, вписанную в куб.

§ 34. Цилиндр. Конус

Пусть в пространстве заданы две параллельные плоскости — α и α'. F — круг в одной из этих плоскостей, например α (рис. 156). Рассмотрим ортогональное проектирование на плоскость α'. Проекцией круга F будет круг F'.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их ортогональными проекциями, называется **прямым цилиндром**, или просто **цилиндром**.

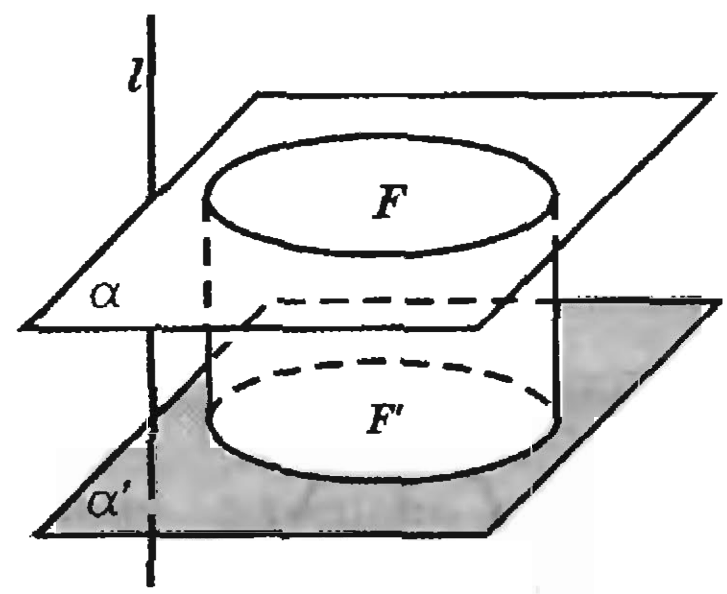


Рис. 156

Круги F и F' называются ***основаниями*** цилиндра.

Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой** цилиндра.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки окружности одного основания цилиндра с их ортогональными проекциями, называется **боковой поверхностью** цилиндра. Сами отрезки называются **образующими** цилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется **осью** этого цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется **осевым сечением** (рис. 157).

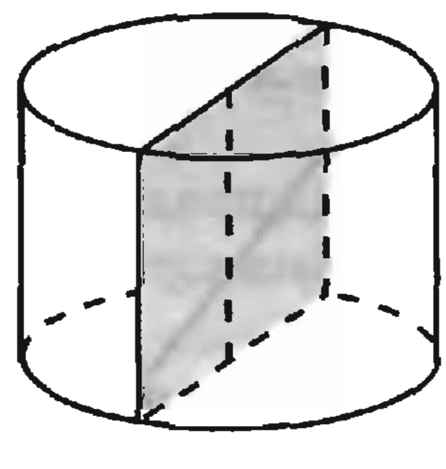


Рис. 157

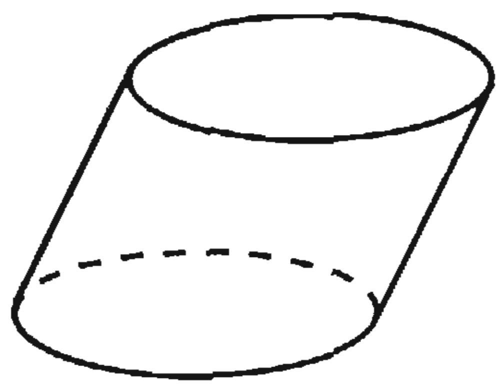


Рис. 158

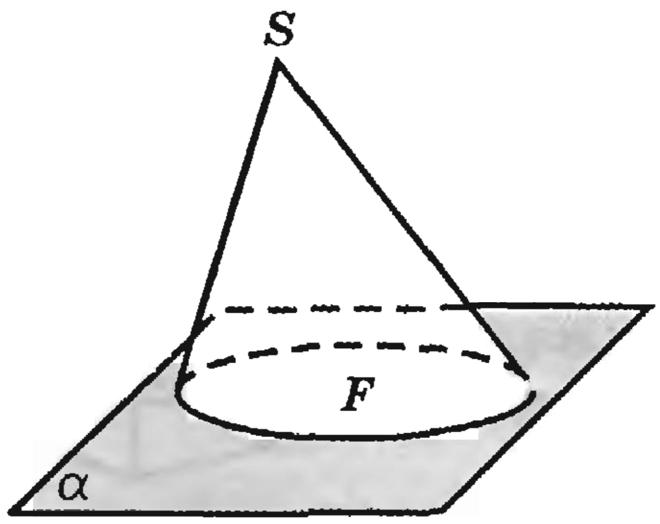


Рис. 159

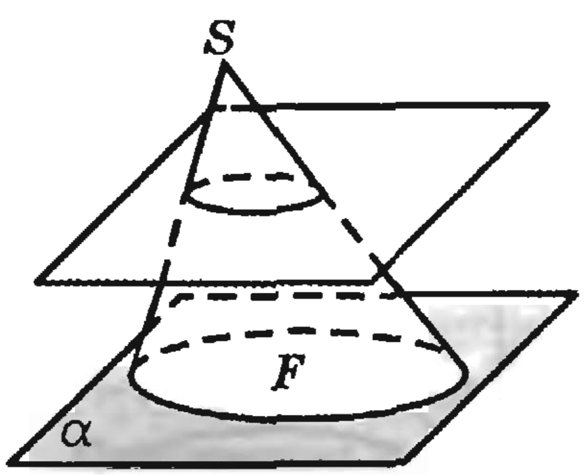
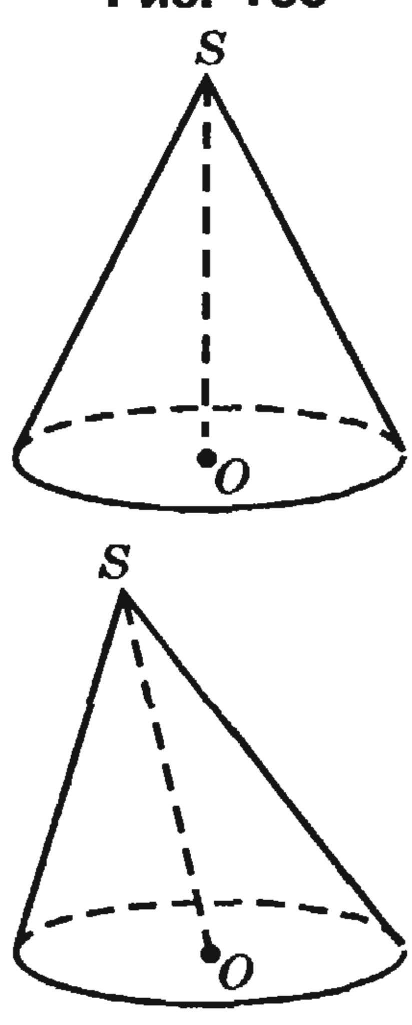


Рис. 160



а)

б)

Рис. 161

В случае если вместо ортогонального проектирования взять параллельное проектирование в направлении наклонной к плоскости α', то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их параллельными проекциями, называется **наклонным цилиндром** (рис. 158).

Обычно цилиндр изображается в ортогональной проекции (рис. 157, 158).

Пусть теперь в пространстве задана плоскость α и точка S, ей не принадлежащая. F — круг в плоскости α (рис. 159).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F, называется **конусом.**

Круг F называется **основанием** конуса, а точка S — **вершиной** конуса.

Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания называется **высотой** конуса.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину конуса с точками окружности его основания, называется **боковой поверхностью** конуса. Сами отрезки называются **образующими** конуса.

Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 160). Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также **основанием** усеченного конуса.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В случае если отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, то конус называется **прямым** (рис. 161, а). В противном случае он называется **наклонным** (рис. 161, б).

В дальнейшем прямые конусы мы будем называть просто конусами.

Прямая, проходящая через вершину и центр основания конуса, называется **осью** этого конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым сечением** (рис. 162).

Обычно конус и усеченный конус изображаются в ортогональной проекции.

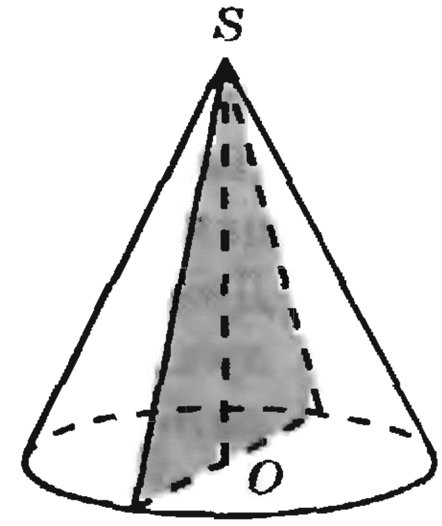


Рис. 162

Упражнения

1. Сколько образующих имеет цилиндр?
2. Что можно принять в цилиндре за его высоту?
3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?
4. Какой фигурой является осевое сечение цилиндра?
5. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?
6. Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить: а) прямоугольник; б) равнобедренный треугольник; в) круг?
7. Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?
8. Изобразите цилиндр в ортогональной проекции.
9. *Докажите, что плоскость, проходящая через образующую цилиндра, перпендикулярна плоскости его основания.*
10. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
11. Радиус основания цилиндра равен r, диагональ осевого сечения — d. Найдите площадь осевого сечения.
12. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна Q. Найдите радиус основания цилиндра.
13. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Чему равна площадь основания цилиндра?
14. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
15. Радиус основания цилиндра равен 1, высота 20, площадь сечения, параллельного оси, равна 20 кв. ед. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?
16. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна Q. Определите площадь осевого сечения.

17. Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудаленных от: а) образующих; б) оснований.

18. Найдите геометрическое место точек пространства, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

19. Два цилиндра имеют две общие образующие. Какая фигура получится при пересечении этих цилиндров плоскостью, перпендикулярной их осям?

°**20.** Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

°**21.** Какой фигурой является осевое сечение конуса?

22. Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

23. Высота конуса h. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

24. Радиус основания конуса равен 1 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.

25. Высота конуса равна 8 м, радиус основания 6 м. Найдите образующую конуса.

26. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.

27. Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

28. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь основания конуса.

29. Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60°. Найдите площадь осевого сечения.

30. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольший периметр?

***31.** Радиус основания не превосходит высоты конуса. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольшую площадь?

32. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от всех образующих конуса.

§ 35. Поворот. Фигуры вращения

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, является класс фигур, называемых фигурами вращения.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки.

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 163).

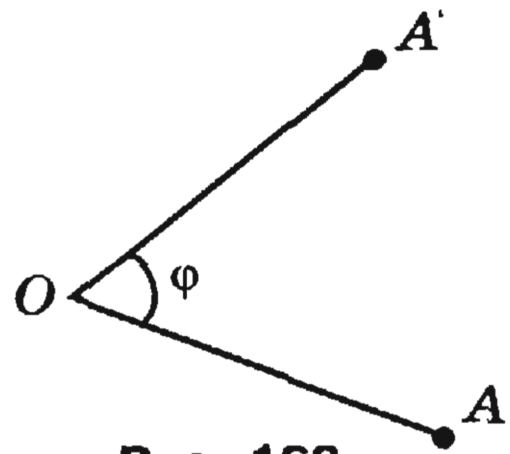


Рис. 163

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 164). Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения a и α обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

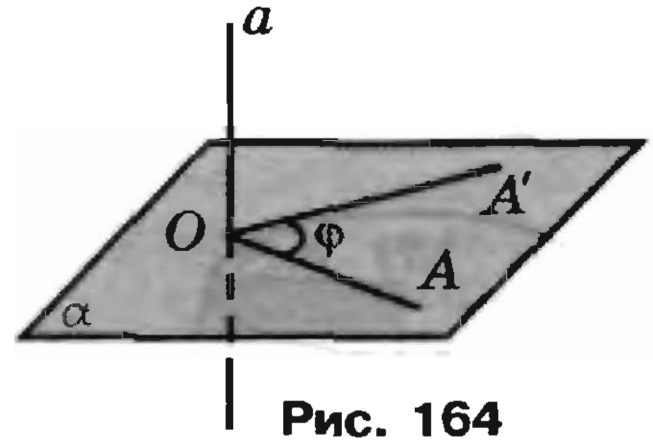


Рис. 164

Определение. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ, называется **поворотом**, или **вращением**. Прямая a при этом называется **осью вращения**.

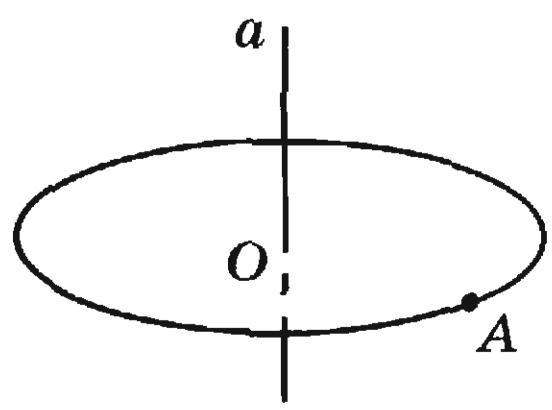


Рис. 165

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a. Фигура Φ при этом называется **фигурой вращения**.

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 165) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

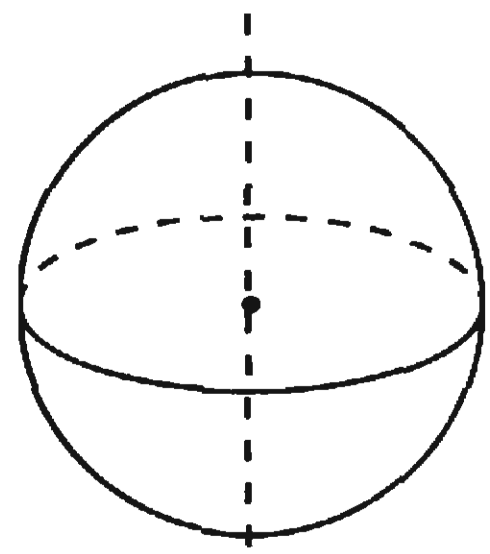


Рис. 166

Сфера получается вращением окружности вокруг ее диаметра. Аналогично, шар получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра (рис. 166).

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 167).

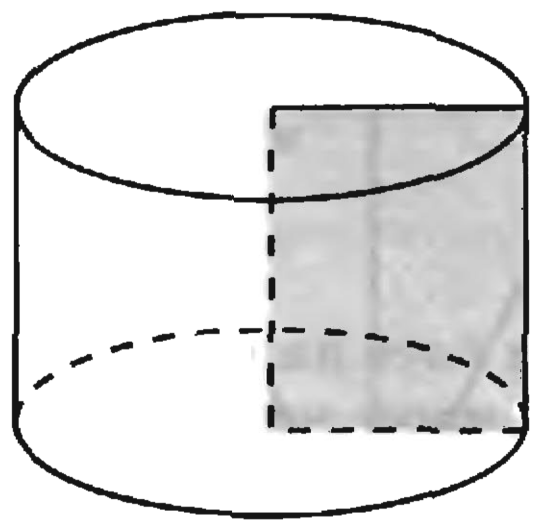
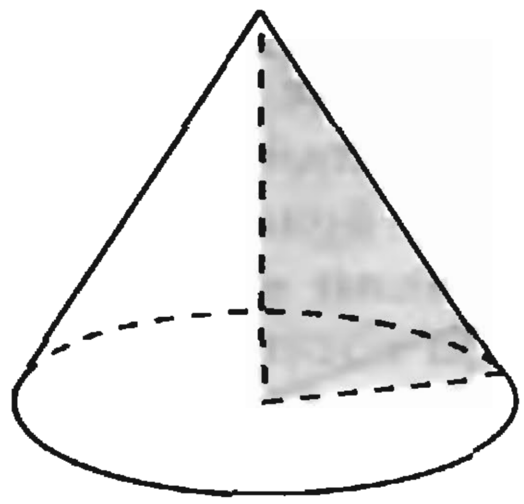
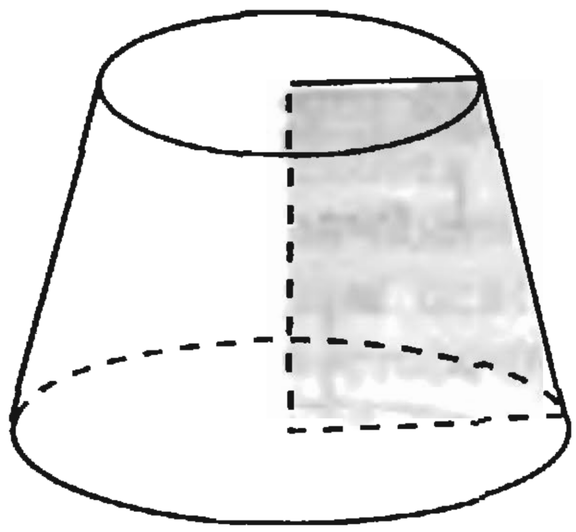


Рис. 167



а)



б)

Рис. 168

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 168, а).

Усеченный конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу (рис. 168, б).

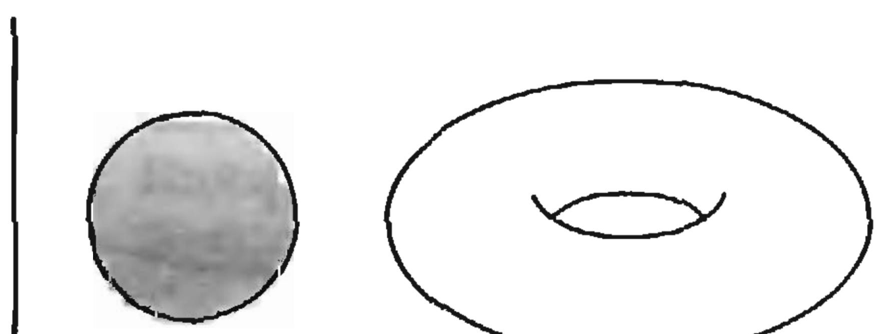
Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек (рис. 169, а), то полученная поверхность вращения называется **тором** и по форме напоминает баранку или бублик (рис. 169, б).

При вращении эллипса вокруг его оси (рис. 170, а) получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения** (рис. 170, б).

При вращении параболы вокруг ее оси (рис. 171, а) получается поверхность, называемая **параболоидом вращения** (рис. 171, б).

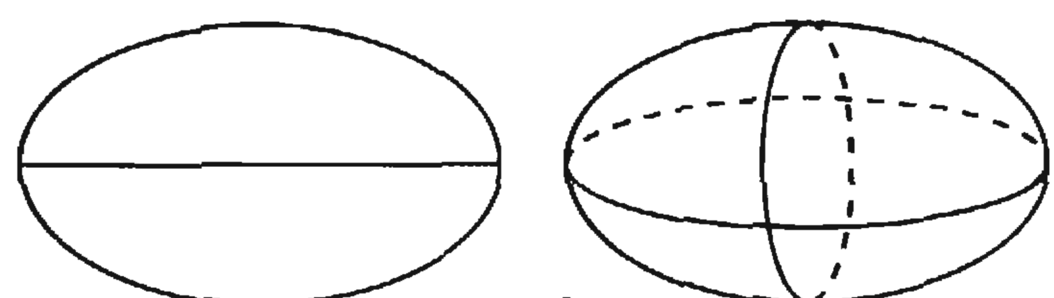
При вращении гиперболы вокруг ее оси (рис. 172, а) получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения** (рис. 172, б).

Выясним, какие фигуры могут получаться при вращении прямой.



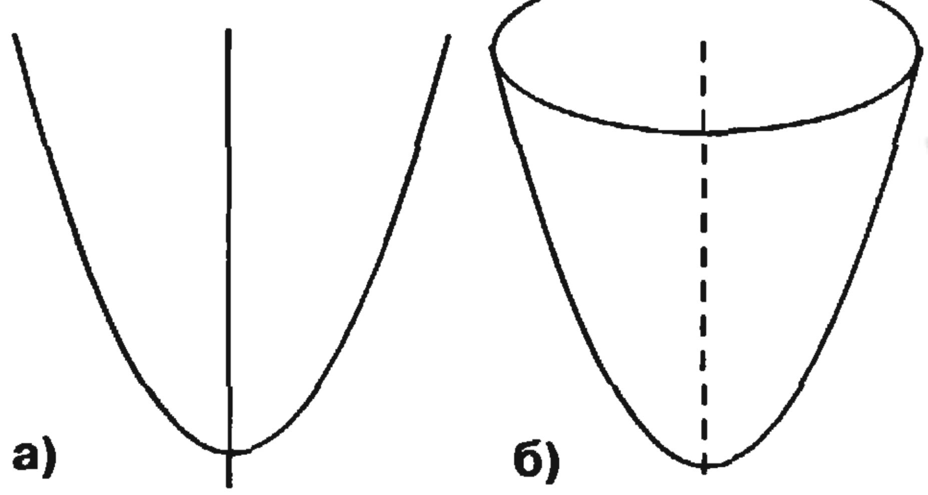
а) б)

Рис. 169



а) б)

Рис. 170



а) б)

Рис. 171

а) б)

Рис. 172

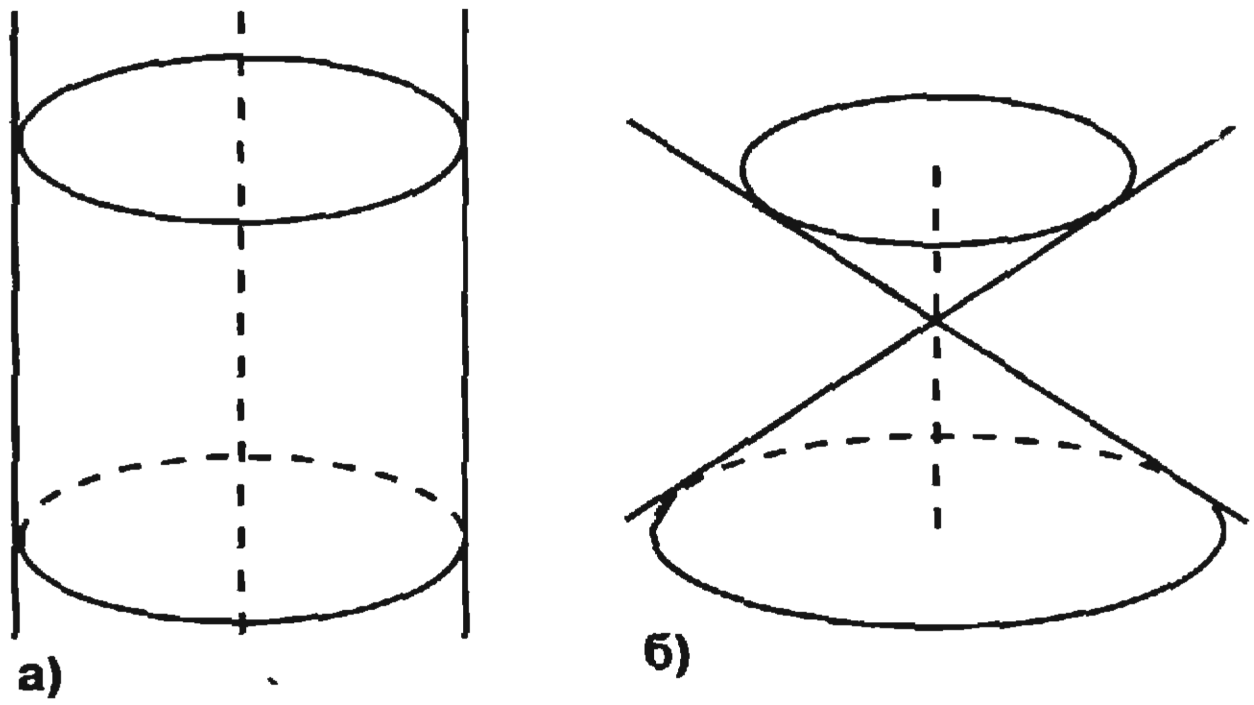


Рис. 173

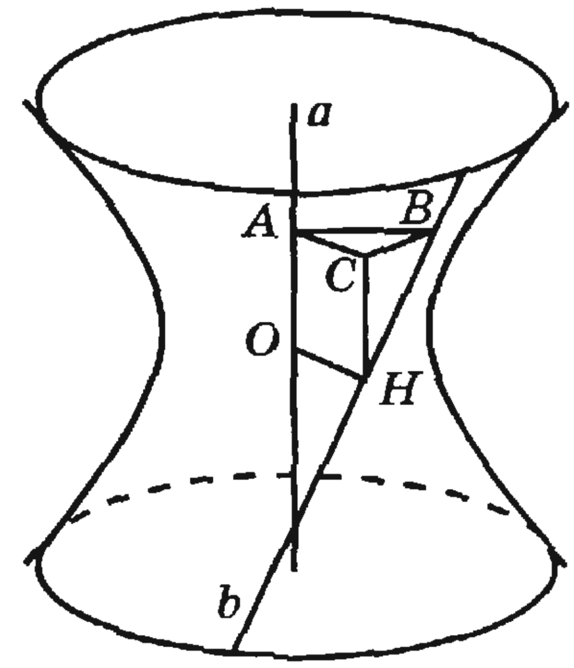


Рис. 174

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая **цилиндрической поверхностью** (рис. 173, а). Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая **конической поверхностью** (рис. 173, б).

Теорема*. При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперболоид вращения.

Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, OH — их общий перпендикуляр (рис. 174). Напомним, что длина d отрезка OH называется расстоянием между прямыми a и b. Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b. Поэтому при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H. Рассмотрим произвольную точку B на прямой b, отличную от H, и опустим из нее перпендикуляр BA на прямую a. При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB. Выразим этот радиус через d. Для этого через точку H проведем прямую, параллельную a, и через точку A — прямую, параллельную OH. Точку пересечения этих прямых обозначим C. Пусть расстояние AB равно x, расстояние OA равно y и угол BHC равен α. Треугольник ABC — прямоугольный, катет AC равен d, катет BC равен $y \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому выполняется равенство

$$x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Перенеся слагаемое, содержащее y, в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d^2, получим уравнение

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1,$$

которое представляет собой уравнение гиперболы. При вращении этой гиперболы получается та же самая фигура, что и при вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения. Следовательно, искомой фигурой вращения является гиперболоид вращения. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует интересная особенность гиперболоидов вращения. Несмотря на искривленность их поверхностей, все они состоят из прямолинейных отрезков. Поэтому форма гиперболоида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская радиобашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почетного академика В. Г. Шухова (1853—1939), составлена из частей гиперболоидов вращения. Ее особенностью является то, что она в действительности состоит из прямолинейных конструкций — металлических стержней.

Заметим, что поверхность фигуры, получающейся при вращении многогранника, определяется вращением некоторых его ребер. При этом если ребро параллельно оси, то при вращении оно дает боковую поверхность цилиндра. Если ребро не параллельно оси, но лежит с ней в одной плоскости, то при вращении оно дает часть конической поверхности. А именно: а) если ребро не пересекает ось, то получается боковая поверхность усеченного конуса; б) если одна вершина ребра принадлежит оси, то получается боковая поверхность конуса; в) если ребро пересекает ось, то получается поверхность, состоящая из двух боковых поверхностей конусов с общей вершиной. Если же ребро многогранника скрещивается с осью вращения, то получается поверхность, являющаяся частью гиперболоида вращения.

Таким образом, поверхность вращения многогранника может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса и частей поверхностей гиперболоидов вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

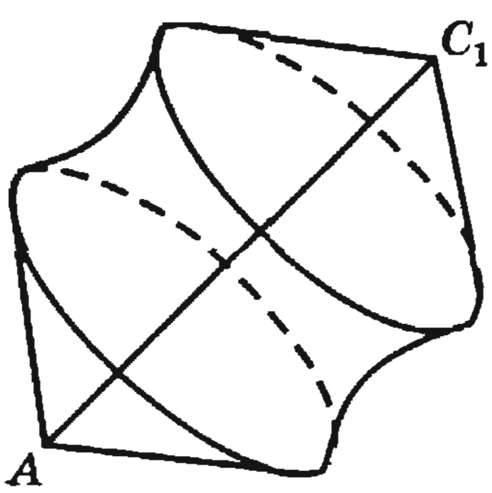


Рис. 175

Выясним, например, какая фигура получается при вращении куба $A...D_1$ вокруг диагонали AC_1.

Ребра этого куба, выходящие из вершины A и вершины C_1, при вращении дадут два конуса с этими вершинами. Поверхность вращения, заключенная между этими конусами получается при вращении ребер куба, скрещивающихся с диагональю AC_1. Следовательно, она является частью гиперболоида вращения, и вся поверхность вращения выглядит так, как показано на рисунке 175.

Упражнения

○ **1.** Какая фигура получается при вращении отрезка OA вокруг прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной OA?

○ **2.** Назовите прямые, при вращении вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

° **3.** Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить цилиндр.

° **4.** Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг высоты, опущенной на основание этого треугольника?

° **5.** Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить: а) конус; б) усеченный конус.

° **6.** Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг диаметра?

7. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC вокруг стороны AB (рис. 176, а, б). Как эту фигуру можно получить из конусов?

8. Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника. Как эту фигуру можно получить из конусов?

9. Нарисуйте фигуры, полученные вращением круга вокруг: а) касательной к окружности круга; б) хорды, не являющейся диаметром круга.

10. Кривая задана уравнением $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Нарисуйте поверхность, которая получается при вращении этой кривой вокруг оси Oy.

11. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 4$ вокруг: а) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

***12.** Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oy.

° **13.** Какая фигура получится при вращении правильной n-угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

° **14.** Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей: а) центры противоположных граней; б) середины противоположных ребер?

° **15.** Какая фигура получается при вращении правильной пирамиды вокруг ее высоты?

° **16.** Какая фигура получается при вращении пирамиды вокруг ее высоты?

17. Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер?

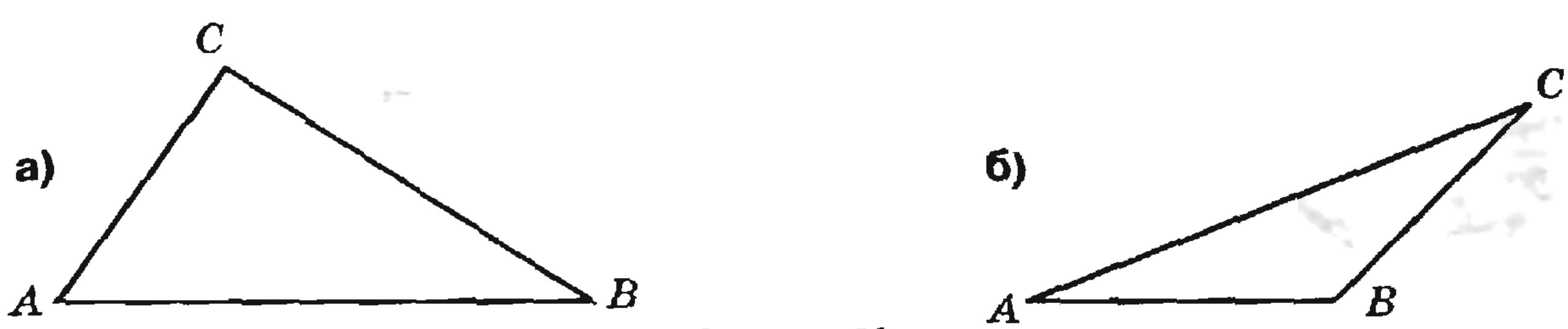


Рис. 176

18. Найдите фигуру, которая получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

***19.** Найдите фигуру, которая получится при вращении икосаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью икосаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

***20.** Найдите фигуру, которая получится при вращении додекаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью додекаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

***21.** Докажите, что если пространственная фигура Φ получается вращением пространственной фигуры F, то ее можно получить вращением плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью вращения.

***22.** Точка, находящаяся на боковой поверхности цилиндра, равномерно вращается вокруг оси цилиндра и одновременно равномерно движется в направлении образующей. Нарисуйте траекторию движения точки (винтовая линия).

§ 36. Вписанные и описанные цилиндры

Сферу можно вписывать не только в многогранник, но и в цилиндр.

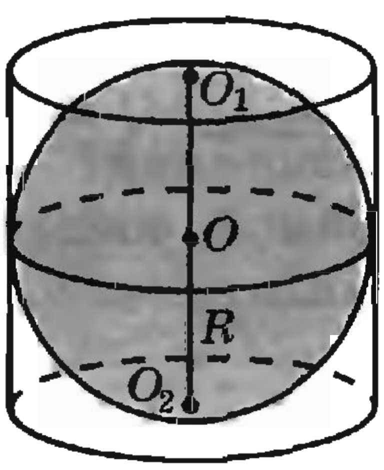


Рис. 177

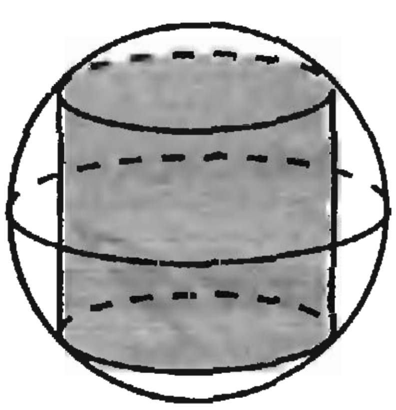


Рис. 178

О п р е д е л е н и е. Сфера называется **вписанной в цилиндр**, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей) (рис. 177). При этом цилиндр называется **описанным около сферы.**

О п р е д е л е н и е. Цилиндр называется **вписанным в сферу**, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около цилиндра** (рис. 178).

Т е о р е м а. Если образующая цилиндра равна диаметру его основания, то в него можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевое сечение цилиндра в этом случае является квадратом (рис. 179).

Впишем в него окружность. Будем теперь вращать квадрат вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси цилиндра. В результате получим исходный цилиндр вместе с вписанной в него сферой. ■

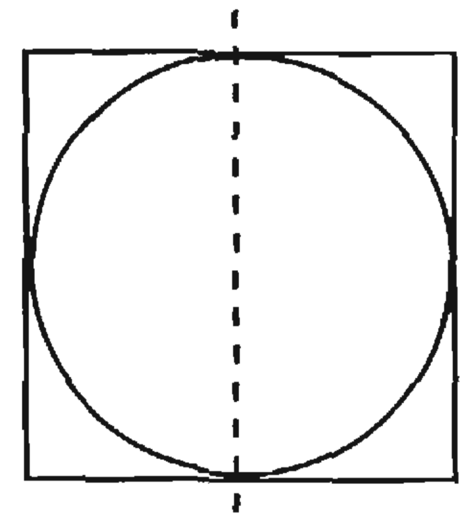


Рис. 179

Определение. Прямая призма называется ***вписанной в цилиндр***, *если ее основания вписаны в основания цилиндра* (рис. 180). При этом цилиндр называется **описанным около призмы**.

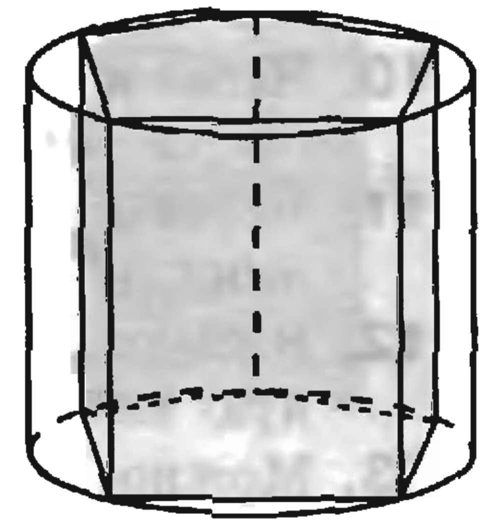


Рис. 180

Ясно, что около прямой призмы можно описать цилиндр тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Определение. **Касательной плоскостью** к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с цилиндром других общих точек (рис. 181).

Определение. Прямая призма называется **описанной около цилиндра**, если ее основания описаны около оснований цилиндра (рис. 182). При этом цилиндр называется **вписанным в призму**.

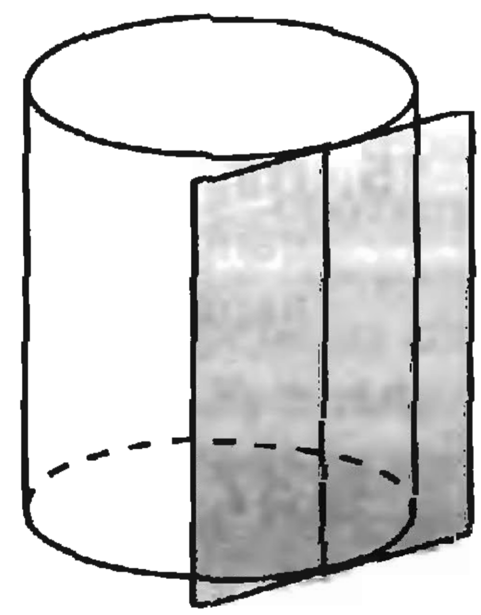


Рис. 181

Ясно, что в прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.

Упражнения

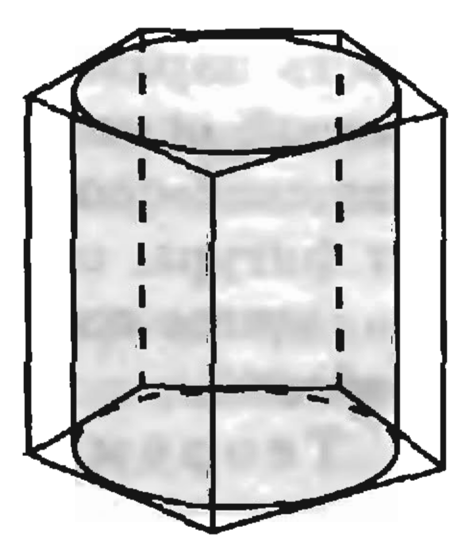


Рис. 182

1. В цилиндр вписана сфера радиуса r. Чему равна высота цилиндра?
2. Можно ли вписать сферу в цилиндр, осевым сечением которого является: а) прямоугольник; б) квадрат?
3. Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?
4. Докажите, что около цилиндра можно описать сферу. Где будет расположен центр этой сферы?

5. Радиус основания цилиндра равен r. Высота равна h. Чему равен радиус описанной сферы?

6. Около цилиндра высоты h описана сфера радиуса R. Найдите радиус основания цилиндра.

° 7. Можно ли описать сферу около наклонного цилиндра?

° 8. Как расположена касательная плоскость к цилиндру по отношению к осевому сечению этого цилиндра, проходящему через образующую, лежащую в касательной плоскости?

° 9. Каково взаимное расположение оси цилиндра и плоскости, касательной к цилиндру?

° 10. Через какие точки пространства можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?

° 11. Через какие прямые можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?

° 12. В каком случае к двум цилиндрам можно провести общую касательную плоскость?

° 13. Можно ли вписать цилиндр в: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?

° 14. Можно ли описать около цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?

15. Нарисуйте: а) сферу, вписанную в цилиндр; б) цилиндр, вписанный в сферу; в) призму, вписанную в цилиндр; г) цилиндр, вписанный в призму.

§ 37*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию. Если же плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

Одним из основных свойств эллипса является следующее **фокальное свойство.**

Теорема. (Фокальное свойство эллипса.) *Внутри эллипса существуют такие точки F_1 и F_2, называемые фокусами эллипса, что сумма расстояний от любой точки A эллипса до этих точек есть величина постоянная.*

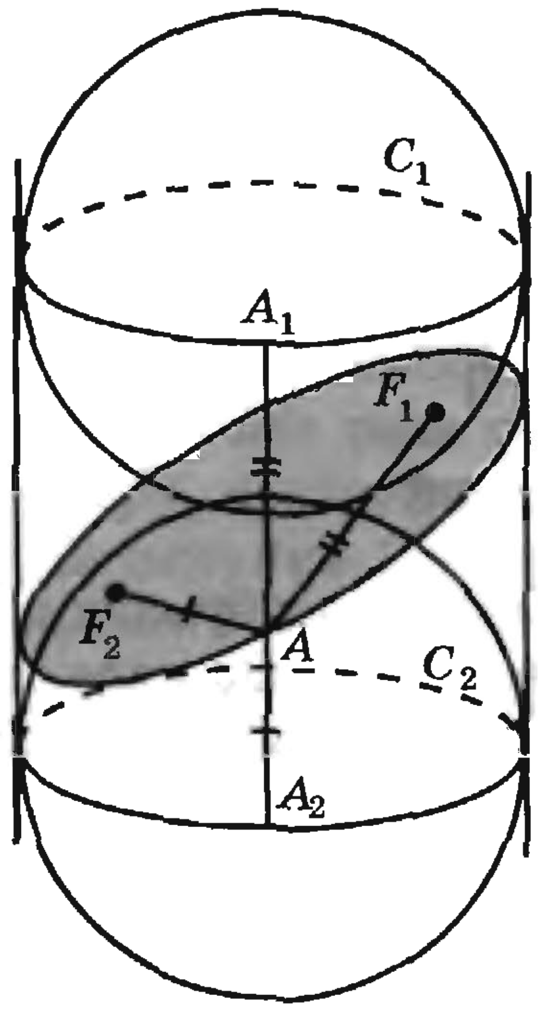


Рис. 183

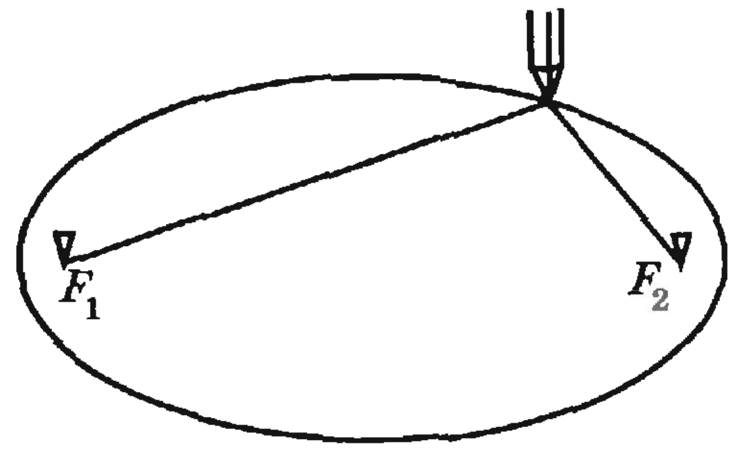


Рис. 184

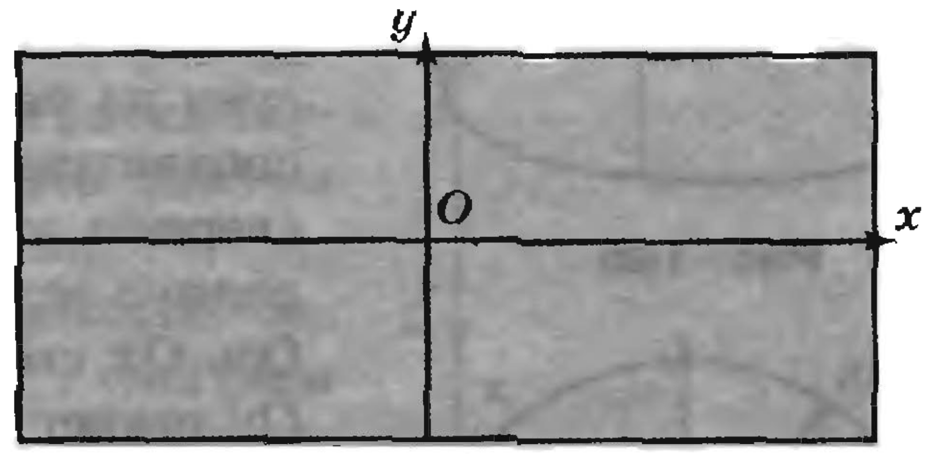


Рис. 185

Доказательство. Пусть эллипс получен в результате сечения цилиндрической поверхности плоскостью α. Впишем в эту поверхность две сферы, касающиеся плоскости α в некоторых точках F_1, F_2 и цилиндрической поверхности по окружностям C_1, C_2 (рис. 183). Пусть A — произвольная точка эллипса. Проведем через нее образующую и обозначим через A_1, A_2 точки пересечения этой образующей с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая A_1A_2 является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 есть расстояние между плоскостями окружностей C_1, C_2. Поэтому оно не зависит от выбора точки A эллипса, т. е. является постоянной величиной. ■

Фокальное свойство эллипса позволяет рисовать эллипс на бумаге. Для этого к двум точкам F_1, F_2 листа бумаги прикрепляют кнопками или булавками концы нити. Затем, натягивая нить карандашом, проводят им линию, которая и будет представлять собой эллипс (рис. 184).

Отрезок, соединяющий точки эллипса и проходящий через фокусы эллипса, называется **большой осью** эллипса. Половина этого отрезка называется **большой полуосью**.

Отрезок, соединяющий точки эллипса, проходящий через середину отрезка F_1F_2 и перпендикулярный ему, называется **малой осью** эллипса. Половина этого отрезка называется **малой полуосью**.

Рассмотрим еще одно свойство сечений цилиндра плоскостью, а именно связь этих сечений с тригонометрическими функциями.

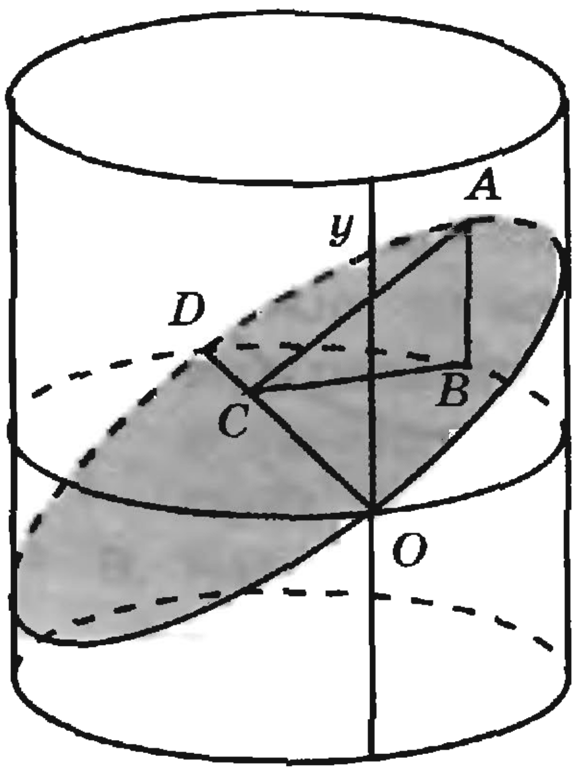


Рис. 186

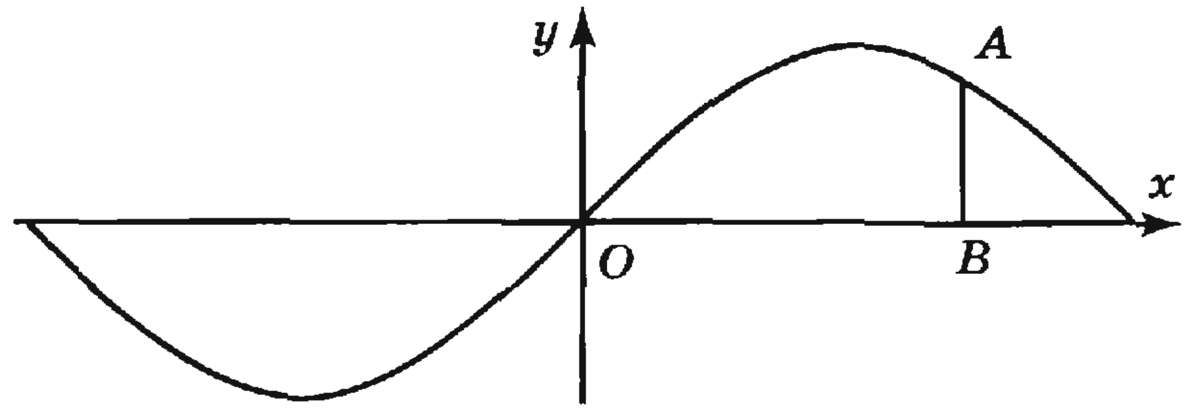


Рис. 188

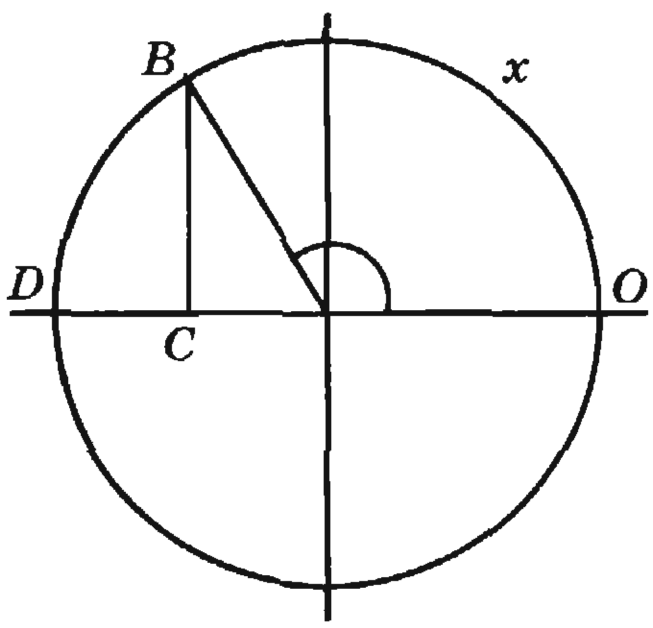


Рис. 187

Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат *Ox* и *Oy* параллельно соответствующим сторонам (рис. 185). Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось *Ox* свернется в окружность радиуса 1, а ось *Oy* станет образующей цилиндра (рис. 186). Через диаметр *OD* полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45°. В этом случае сечением будет эллипс.

Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернется в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого из произвольной точки *A* на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности *OD*. Получим, соответственно, точки *B* и *C*. Треугольник *ABC* прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 45°$. Следовательно, $AB = BC$. Заметим, что $BC = \sin x$, где x — длина дуги *OB*. Для этого достаточно обратиться к рисунку 187 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$ (рис. 188).

Упражнения

° **1.** Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклоненном стакане?

2. Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

3. Используя карандаш, бумагу, нить и кнопки, нарисуйте эллипс.

4. Плоскость сечения цилиндра составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите отношение малой оси эллипса к большой. При каком угле это отношение равно 0,5?

5. Докажите, что сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов равна длине большой оси эллипса.
6. Докажите, что расстояния от концов малой оси эллипса до его фокусов равны половине большой оси.
7. Для эллипса с заданными большой и малой осями постройте его фокусы. В частности, для эллипса, полученного из окружности сжатием в два раза относительно данного диаметра, постройте фокусы эллипса.
8. На рисунке 189 дано изображение осевого сечения цилиндра. Через точки A и B цилиндра проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте фокусы эллипса, получившегося в сечении.
9. Пусть эллипс получен из окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, сжатием в k раз в направлении оси Oy. Найдите: а) уравнение эллипса; б) большую и малую оси; в) координаты фокусов.

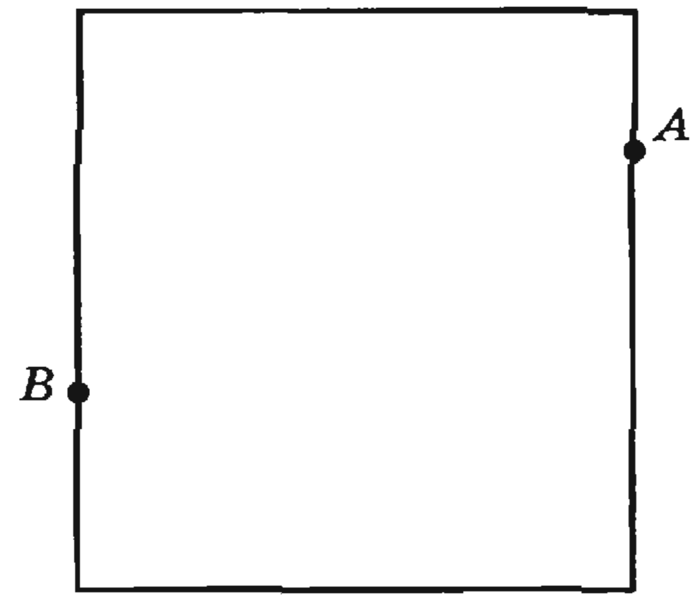


Рис. 189

*10. Докажите, что площадь эллипса, у которого большая и малая полуоси равны, соответственно, R, r, выражается формулой $S = \pi Rr$. (Воспользуйтесь формулой площади ортогональной проекции многоугольника.)

*11. В основании цилиндра круг радиуса R. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

12. Докажите, что если сечение цилиндра, свернутого из бумаги, проводить не под углом 45°, а под углом φ, то уравнение соответствующей кривой будет иметь вид $y = k \sin x$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$.
13. Нарисуйте кривые, соответствующие углам: а) $\varphi = 30°$; б) $\varphi = 60°$.
14. Докажите, что если исходный прямоугольник свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произвести с этим цилиндром аналогичные операции, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = a \sin \frac{x}{a}$.
15. Нарисуйте график функции: а) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.
16. Докажите, что если плоскость сечения проходит не через точку O, а через диаметр, образующий с OD (рис. 186) угол φ_0, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = \sin(x - \varphi_0)$.

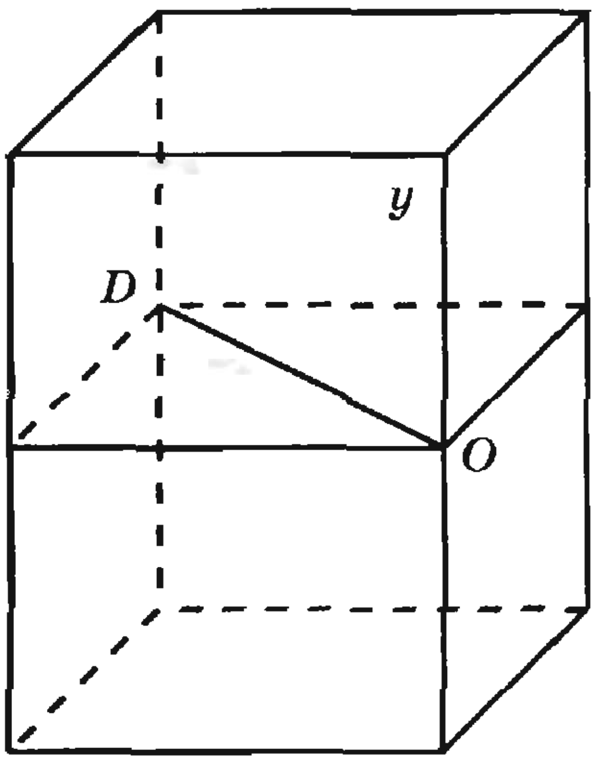


Рис. 190

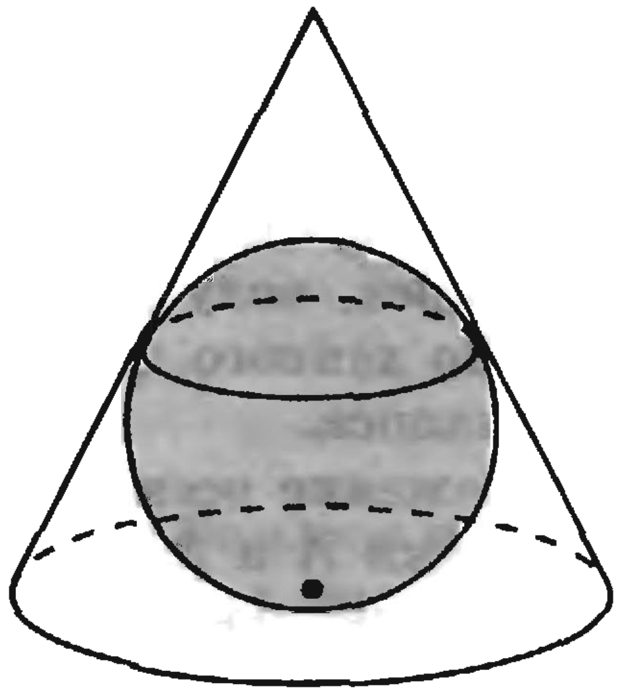


Рис. 191

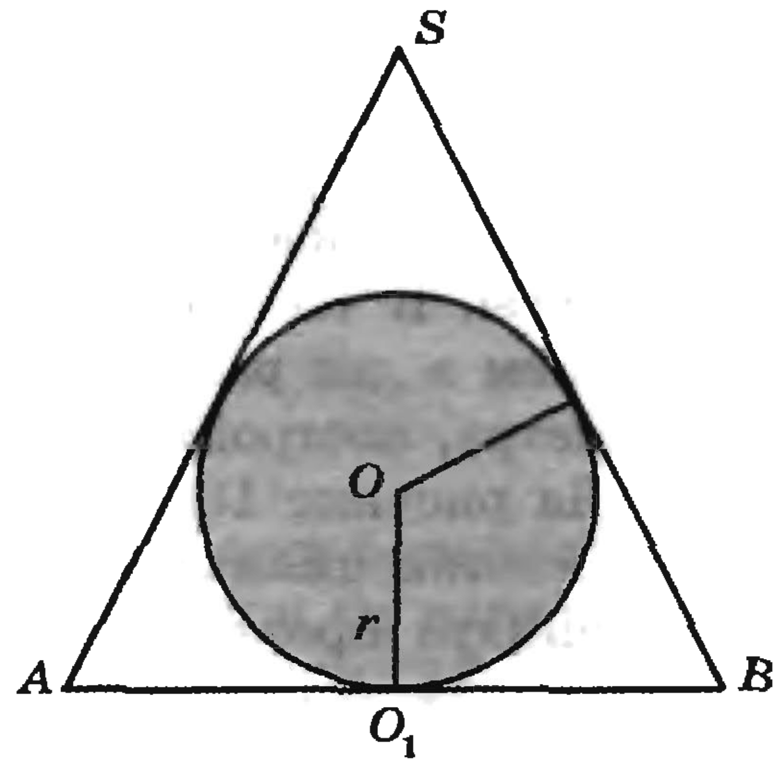


Рис. 192

17. Нарисуйте график функции: а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

18. Какой угол φ_0 нужно взять, чтобы получить график функции $y = \cos x$?

19. Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат (рис. 185). Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы (рис. 190). Сторону основания призмы примем за 1. Через точки O и D проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45°. Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая? Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

20. На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в трех см от верхнего края виднеется капля меда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха. Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли? Диаметр банки 12 см.

§ 38. Вписанные и описанные конусы

Рассмотрим вопрос о возможности вписать сферу в конус.

Определение. Сфера называется **вписанной в конус**, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей; рис. 191). При этом конус называется **описанным около сферы**.

Теорема. В конус можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник. Впишем в него окружность (рис. 192). Будем теперь вращать треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси конуса. В результате получим исходный конус вместе с вписанной в него сферой. ■

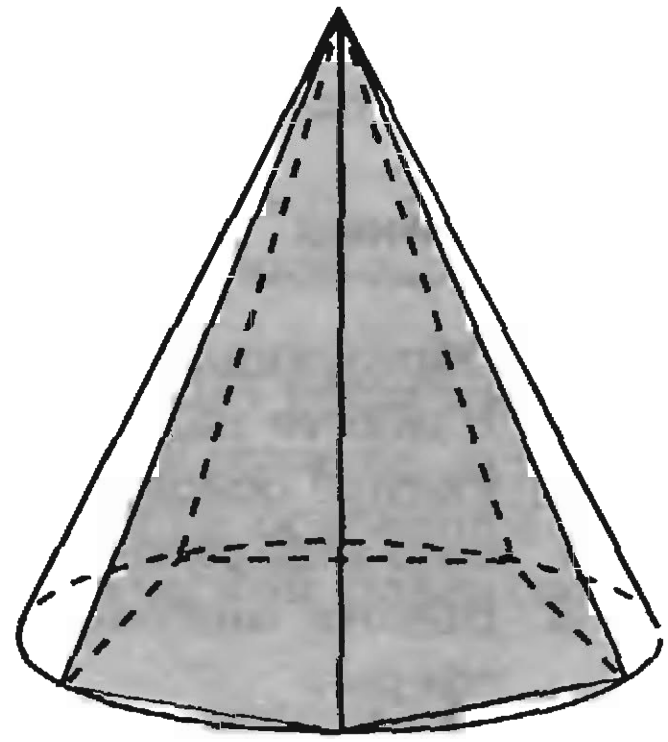


Рис. 193

Определение. Конус называется **вписанным в сферу**, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около конуса.**

Теорема. Около конуса можно описать сферу.

Доказательство аналогично предыдущему.

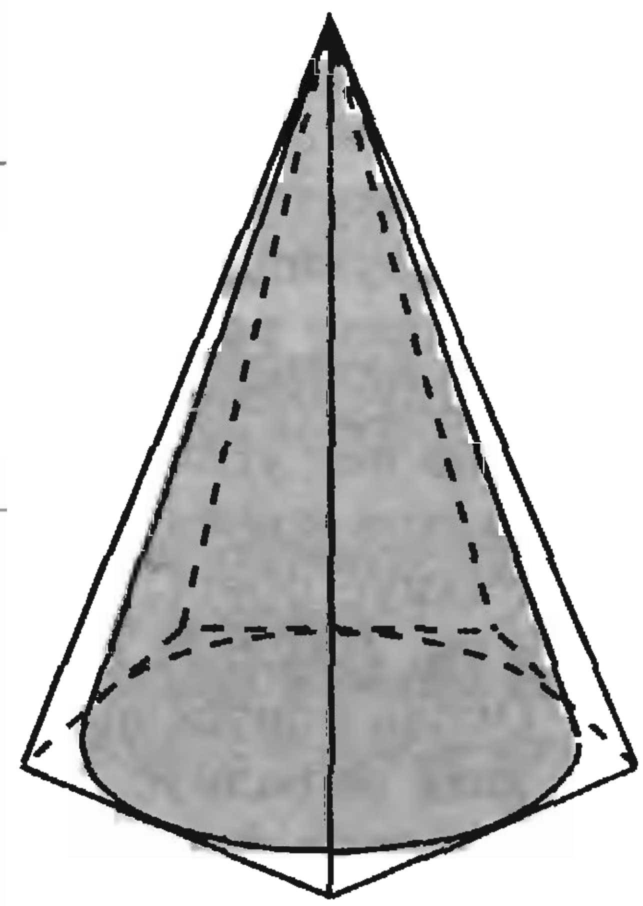


Рис. 194

Определение. Пирамида называется **вписанной в конус**, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина *совпадает с вершиной конуса (рис. 193).* При этом конус называется **описанным около пирамиды.**

Ясно, что около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Определение. **Касательной плоскостью** к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с конусом других общих точек.

Определение. Пирамида называется **описанной около конуса,** если ее основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 194). При этом конус называется **вписанным в пирамиду.**

Ясно, что в пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.

Упражнения

1. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания и равна d. Найдите радиус вписанной сферы.
2. Радиус основания конуса равен r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите радиус вписанной сферы.
3. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найдите радиус вписанной сферы.
4. В конус высоты h и основанием радиуса r вписана сфера. Найдите ее радиус.
5. Найдите формулу, выражающую радиус сферы, вписанной в конус, через радиус основания r и угол наклона φ образующей конуса к основанию.
6. Докажите, что около конуса можно описать сферу.
7. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания и равна d. Найдите радиус описанной сферы.
8. Радиус основания конуса равен r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите радиус описанной сферы.
9. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найдите радиус описанной сферы.
10. Радиус сферы 5 см. В сферу вписан конус, радиус его основания 4 см. Найдите высоту конуса.
11. Около конуса высоты h и основанием радиуса r описана сфера. Найдите ее радиус.
12. Найдите формулу, выражающую радиус сферы, описанной около конуса, через радиус основания r и угол наклона φ образующей конуса к основанию.
13. Высота конуса h, образующая b. Найдите радиус описанной сферы.

○ 14. Можно ли вписать конус в: а) треугольную пирамиду; б) четырехугольную пирамиду, в основании которой прямоугольник; в) правильную шестиугольную пирамиду?

○ 15. Можно ли описать конус около: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды, в основании которой ромб; в) четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат; г) правильной шестиугольной пирамиды?

★ 16. Найдите условия, при которых сферу можно вписать в усеченный конус.

★ 17. В усеченный конус, радиусы оснований которого R и r, вписана сфера. Найдите ее радиус.

★ 18. Докажите, что около наклонного конуса можно описать сферу.

§ 39*. Конические сечения

Для данного конуса рассмотрим коническую поверхность, образованную прямыми, проходящими через вершину конуса и точки окружности основания конуса (рис. 195).

Сечения конической поверхности плоскостью можно рассматривать как центральную проекцию окружности основания конуса на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания и не проходит через вершину конуса, то в сечении конической поверхности получается окружность.

Исследуем другие возможные случаи сечения конической поверхности плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.

Доказательство. Докажем, что сечение удовлетворяет фокальному свойству эллипса: сумма расстояний от произвольной точки сечения до двух данных точек есть величина постоянная.

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1, F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно (рис. 196).

Пусть A — произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая AS является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной

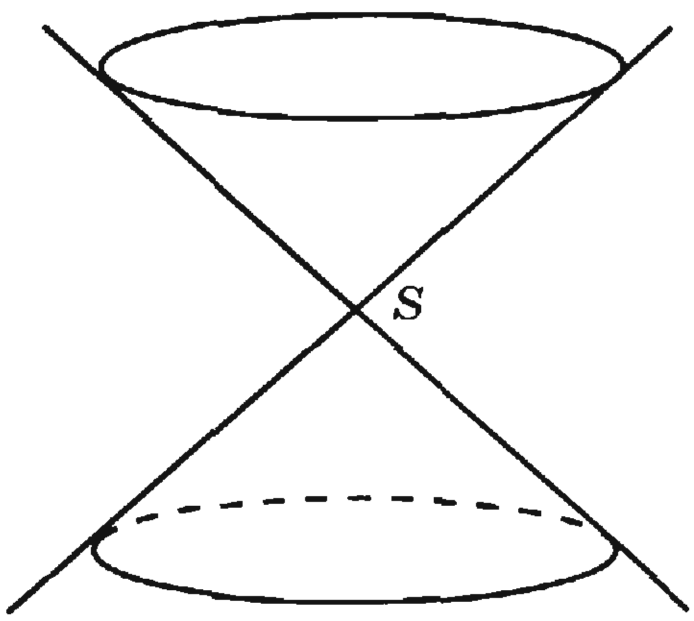


Рис. 195

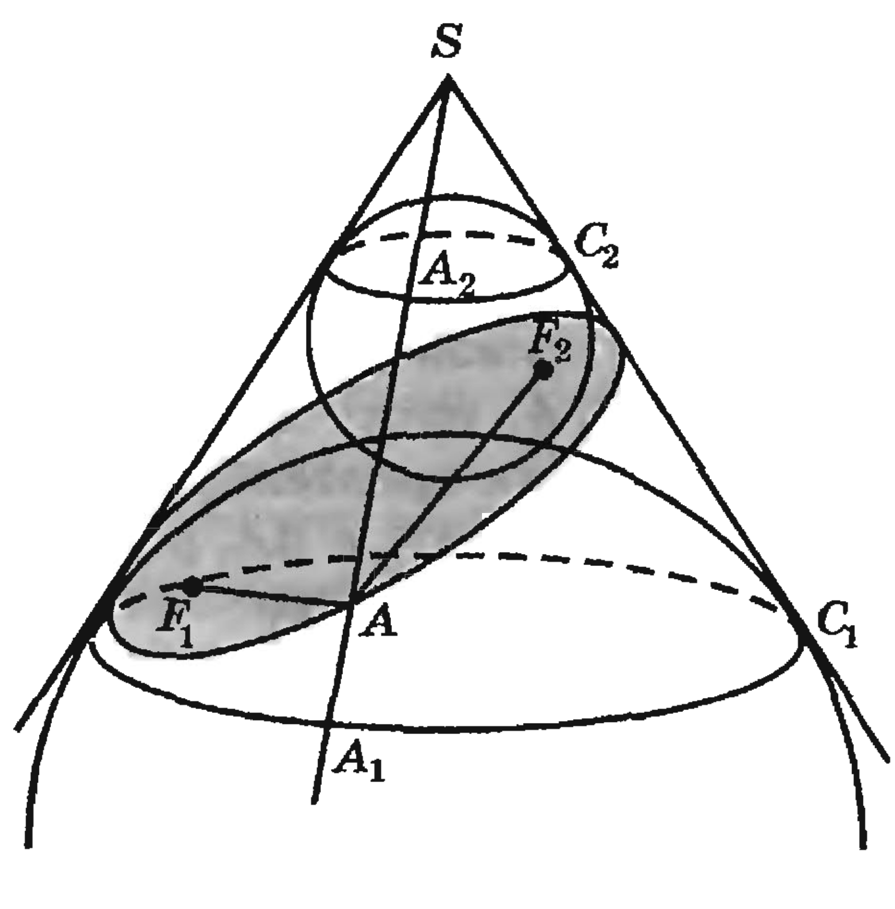


Рис. 196

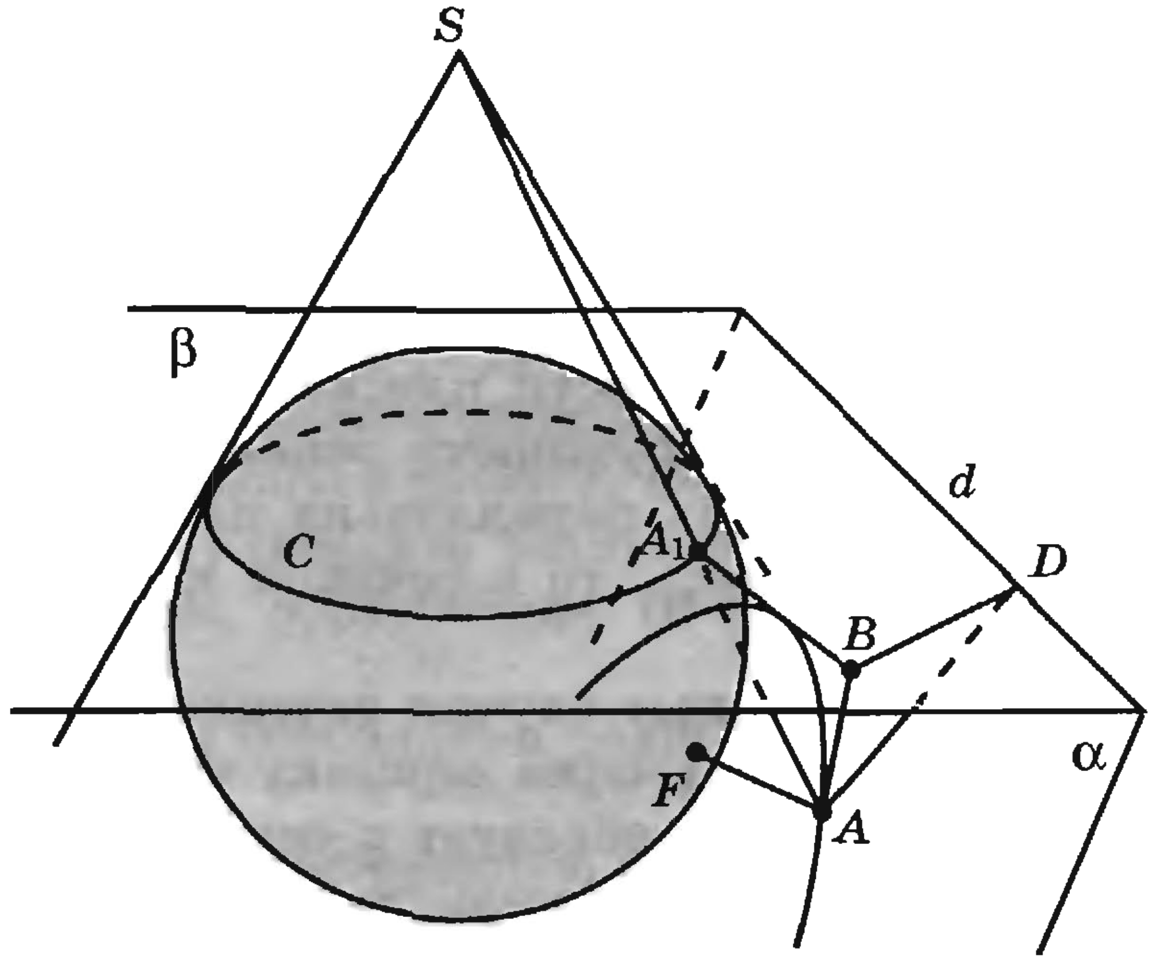


Рис. 197

точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна образующей соответствующего усеченного конуса. Поэтому сумма расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. ■

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.

Доказательство. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой d, называемой директрисой, лежащих в этой плоскости. Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F и конической поверхности по окружности C, лежащей в плоскости β, перпендикулярной оси. Плоскости α и β образуют между собой угол $90° - \varphi$ и пересекаются по некоторой прямой d (рис. 197).

Пусть A — произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1 точку ее пересечения с окружностью C. Заметим, что прямая AS является касательной к сфере. Прямая AF также является касательной. Отрезки AF и AA_1 равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость β и перпендикуляр AD на прямую d. Угол A_1AB равен φ. Угол ADB является углом между плоскостями α и β и поэтому равен $90° - \varphi$. Следовательно, угол BAD равен φ.

Прямоугольные треугольники ABA_1 и ABD равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому $AA_1 = AD$. Окончательно получаем равенство $AF = AD$, которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки F равно расстоянию от этой точки до прямой d, т. е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола. ■

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.

Доказательство. Напомним, что гиперболой *называется геометрическое место точек на* плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек плоскости постоянен. Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 и F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.

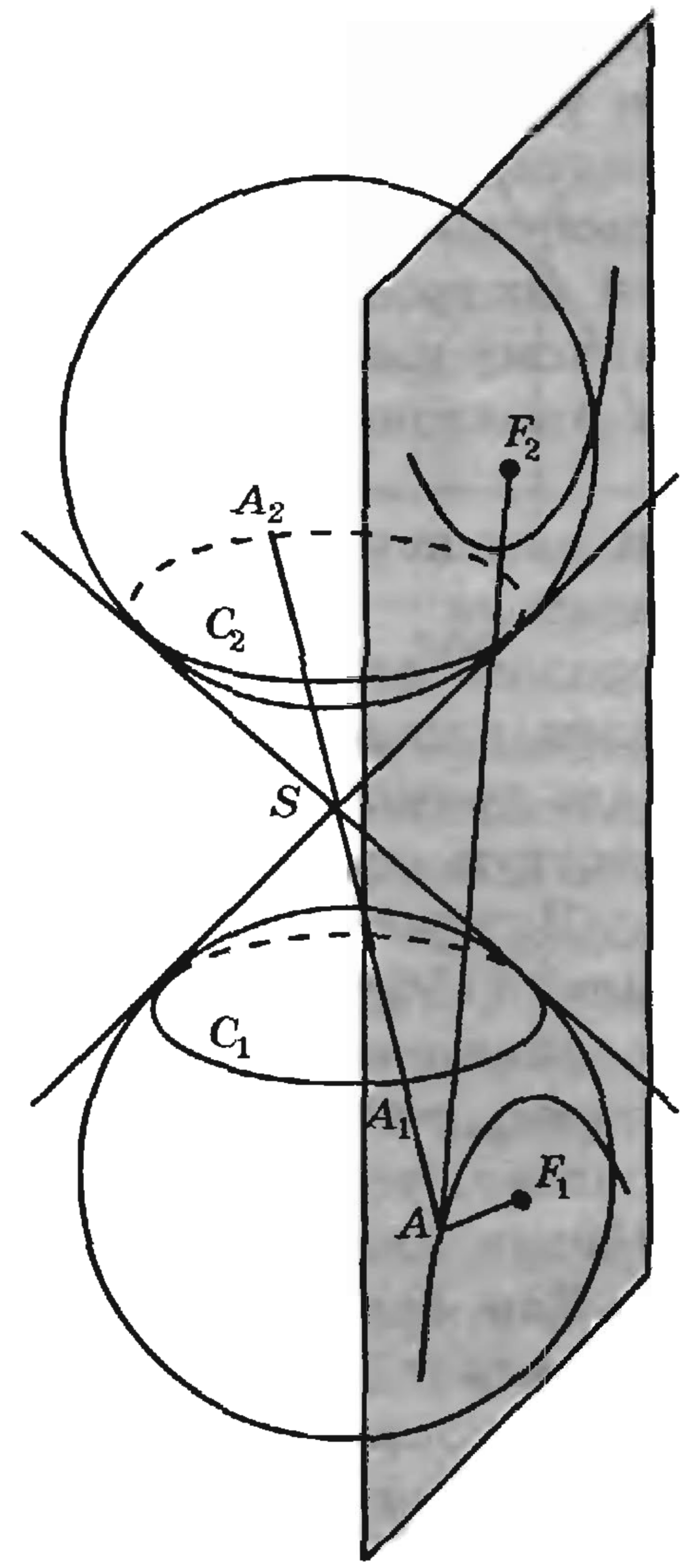


Рис. 198

Пусть A — точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка F_1 (рис. 198). Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не *зависит от выбора точки A сечения. Она равна* сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность $AF_2 - AF_1$ расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. Аналогичным образом показывается, что если точка A расположена в той же части конической поверхности, что и точка F_2, то разность $AF_1 - AF_2$ будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола. ■

Исторические сведения

Конические сечения с древних времен привлекали к себе внимание ученых. Так, древнегреческий ученый Менехм (IV в. до н. э.) пользовался параболой и гиперболой для решения знаменитой задачи удвоения куба. Исследовали свойства конических сечений Евклид (IV в. до н. э.) и Архимед (III в. до н. э.). Полное и систематическое учение об этих кривых было изложено Аполлонием Пергским (III—II вв. до н. э.) в восьмитомном труде «Конические сечения». Там он впервые показал, как можно получить эти кривые, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Он же ввел термины «эллипс», «парабола» и «гипербола», означающие в переводе с греческого, соответственно, «недостаток», «приложение» и «избыток». Происхождение этих названий связано с задачей построения прямоугольника с заданным основанием, равновеликого данному квадрату. Переводя с геометрического языка, которым пользовался Аполлоний, на современный алгебраический язык, получаем уравнение

$$y^2 = 2px + lx^2,$$

где эллипсу соответствует отрицательное, гиперболе — положительное, а параболе — равное нулю значение второго члена в правой части. Таким образом, для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y, равна площади прямоугольника со сторонами $2p$ и x. Для эллипса площадь прямоугольника меньше, а для гиперболы — больше площади соответствующего квадрата.

Интерес к коническим сечениям особенно возрос после того, как Г. Галилей (1564—1642) установил, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается по параболе, а И. Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым они описывают эллипсы. Позднее было установлено, что кометы и другие небесные тела движутся по эллипсам, параболам или гиперболам в зависимости от их начальной скорости.

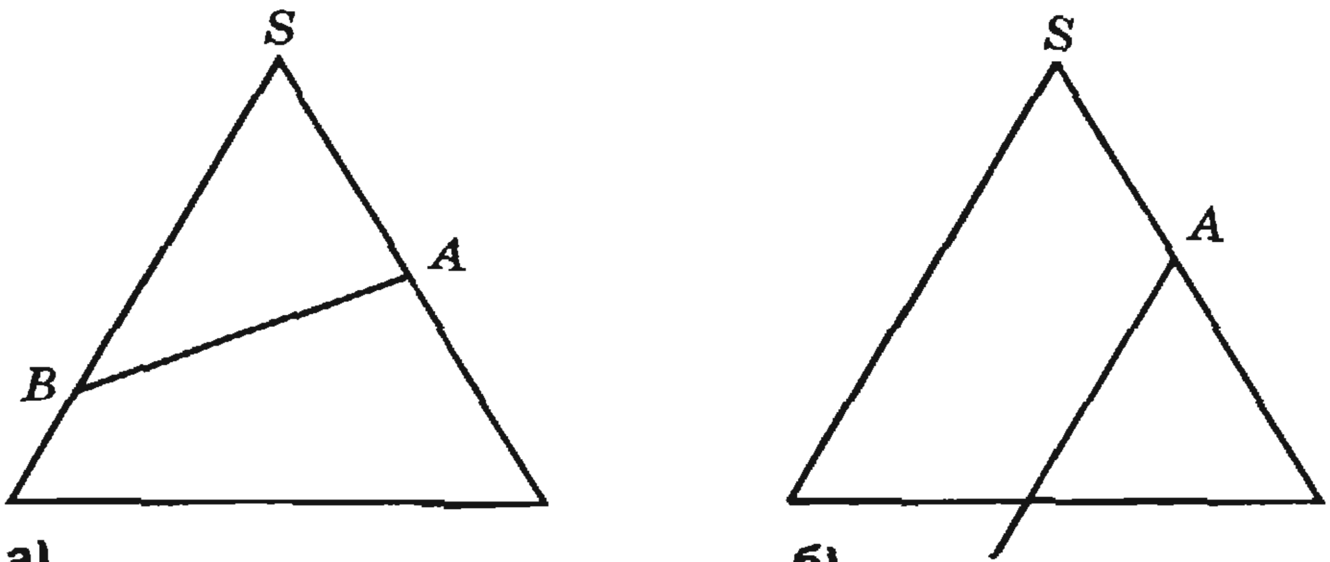
Так, если скорость космического корабля при выходе на орбиту Земли составляет 7,9—11,1 км/с (первая космическая скорость), то он будет двигаться вокруг Земли по эллиптической орбите.

Если его скорость составляет 11,2—16,7 км/с (вторая космическая скорость), то он будет двигаться по параболической орбите и покинет зону земного притяжения. Однако он не сможет выйти за пределы Солнечной системы.

Если же его скорость больше 16,7 км/с (третья космическая скорость), то он будет двигаться по гиперболической орбите и уйдет за пределы Солнечной системы.

Упражнения

1. Какую форму принимает поверхность воды в наклоненной конусообразной колбе?
2. Пучок света карманного фонарика имеет форму конуса. Какую форму имеет освещенный фонариком участок ровной поверхности в зависимости от угла наклона фонарика?
3. Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное: а) оси; б) образующей?
4. Может ли центральная проекция сферы быть фигурой, ограниченной: а) окружностью; б) эллипсом; в) параболой; г) гиперболой?



а) б)

Рис. 199

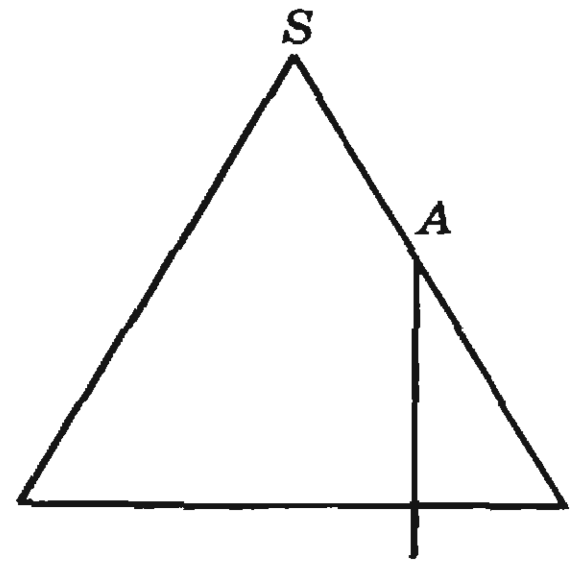


Рис. 200

○ **5.** Через центр основания конуса и середину образующей проведена плоскость. Что представляет собой сечение конуса этой плоскостью?

6. Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, образующей с осью угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

7. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания. Под каким углом к оси нужно провести сечение конуса плоскостью, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

* **8.** Выведите уравнение параболы, взяв за ось абсцисс прямую, параллельную директрисе и равноудаленную от этой директрисы и фокуса. За ось ординат возьмите прямую, проходящую через фокус и перпендикулярную директрисе.

* **9.** Выведите уравнение гиперболы, взяв за ось абсцисс прямую, проходящую через фокусы. За ось ординат возьмите серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокусы.

10. На рисунке 199, а изображено осевое сечение конической поверхности. Через точки A и B проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображения фокусов эллипса, получившегося в сечении.

11. На рисунке 199, б изображено осевое сечение конической поверхности. Через точку A параллельно образующей проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображение фокуса параболы, получившейся в сечении.

12. На рисунке 200 изображено осевое сечение конической поверхности. Через точку A параллельно оси проведена плоскость, перпендикулярная этому сечению. Постройте изображения фокусов гиперболы, получившейся в сечении.

***13.** Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной, равной единице. Через середину образующей проведено сечение конуса плоскостью, перпендикулярной этой образующей. Найдите площадь сечения.

§ 40. Симметрия пространственных фигур

По словам известного немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), «симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д.

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрии. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно точки** O, называемой **центром симметрии,** если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе (рис. 201).

Фигура Φ в пространстве называется **центрально-симметричной** относительно точки O, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 202). Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно прямой** a, называемой **осью симметрии,** если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 203). Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

Рис. 201

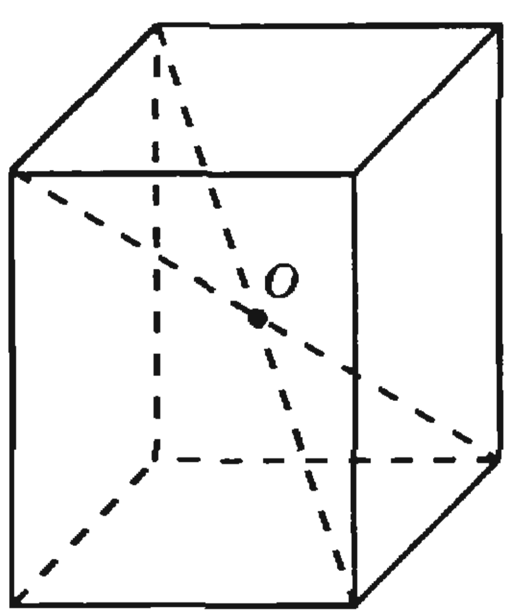


Рис. 202

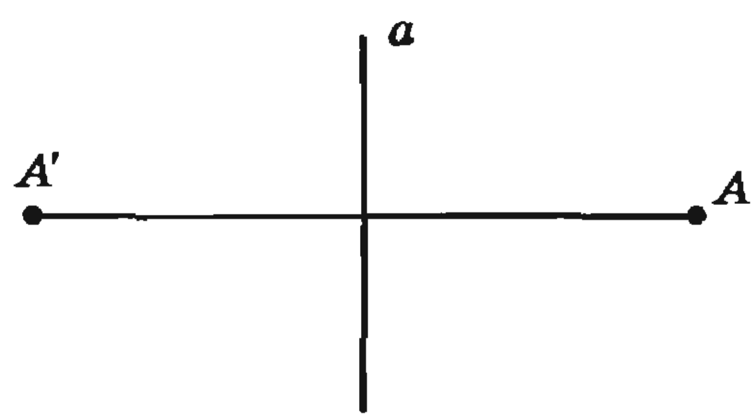


Рис. 203

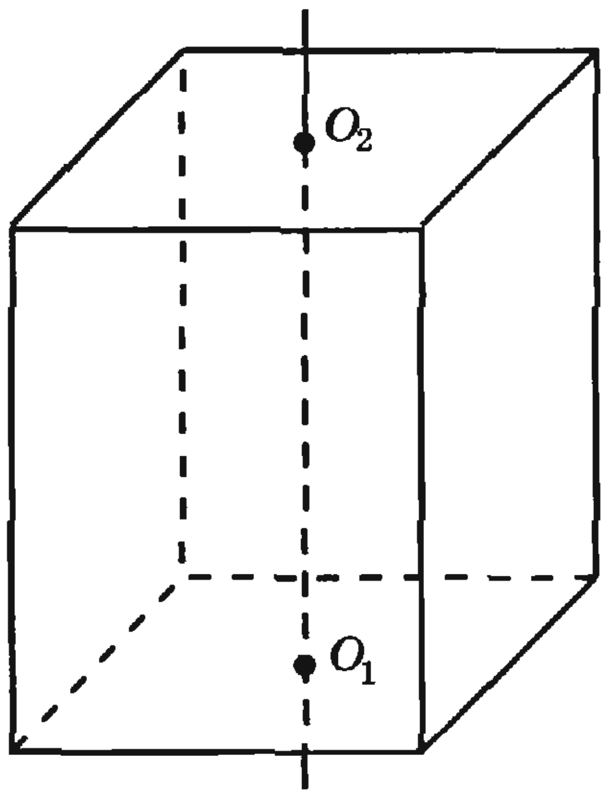


Рис. 204

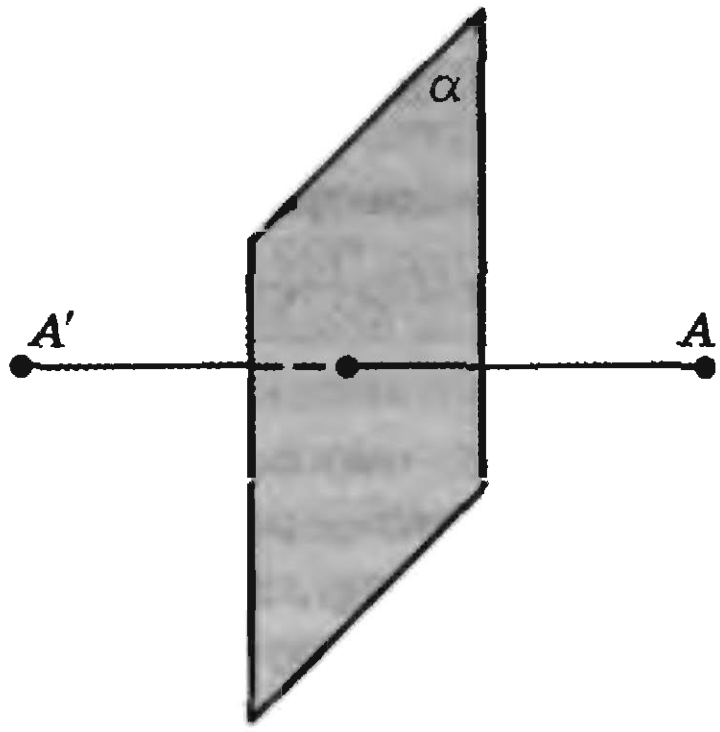


Рис. 205

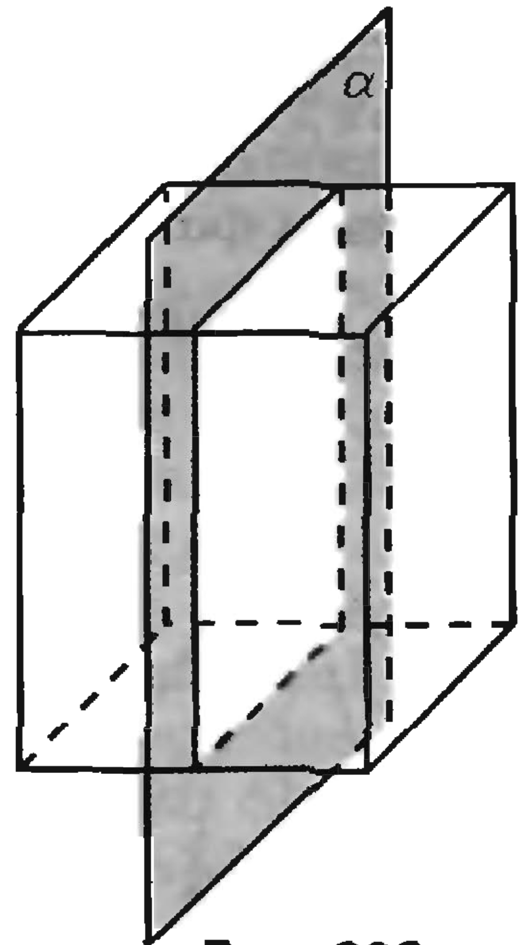


Рис. 206

Фигура Φ в пространстве называется **симметричной относительно *оси а*,** *если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой* оси некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней (рис. 204), прямой круговой цилиндр симметричен относительно своей оси и т. д.

Определение. Точки A и A' в пространстве называются **симметричными относительно плоскости α,** называемой **плоскостью симметрии**, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе. (рис. 205).

Симметрия относительно плоскости называется также **зеркальной симметрией**.

Фигура Φ в пространстве называется **зеркально-симметричной относительно плоскости α**, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней (рис. 206). Цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось и т. д.

Помимо осей симметрии, определенных выше, рассматриваются также оси симметрии n-го порядка, $n \geqslant 2$.

Определение. Прямая a называется **осью симметрии n-го порядка** фигуры $Ф$, если при повороте фигуры $Ф$ на угол $\frac{360°}{n}$ вокруг прямой a фигура $Ф$ совмещается сама с собой.

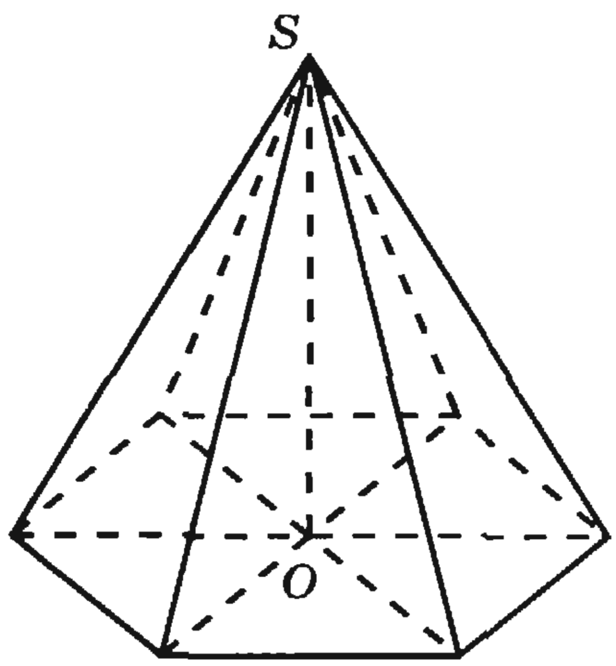


Рис. 207

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Например, в правильной n-угольной пирамиде прямая, проходящая через вершину и центр основания, является осью симметрии n-го порядка (рис. 207).

Отметим, что из многогранников наиболее симметричными являются правильные многогранники.

Например, икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.

2. Шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противоположные вершины; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней; пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных ребер икосаэдра.

3. Пятнадцать плоскостей симметрии, проходящих через пары противоположных ребер икосаэдра.

Исторические сведения

Одним из самых ярких проявлений симметрии в природе являются кристаллы. Свойства кристаллов определяются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке. Внешние формы кристаллов являются следствием их внутренней симметрии.

Первые, еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, *когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных* доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные постройки в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853—1919). Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей внес Е. С. Федоров немалый вклад. В 1890 году он строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный «хаос» бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. Это открытие сродни открытию периодической таблицы Д. И. Менделеева. «Царство кристаллов» является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Упражнения

1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.
2. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
3. Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.
4. Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
5. Сколько осей симметрии имеет шар?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
7. Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии и наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.
8. Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.
9. Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?
10. Какими видами симметрии обладает куб?
11. Сколько у правильной шестиугольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

12. Сколько у правильной $(2n - 1)$-угольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
13. Каким видом симметрии обладает наклонная призма, в основании которой лежит правильный многоугольник с четным числом сторон?
14. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
15. Какими видами симметрии обладает наклонный параллелепипед?
16. Имеет ли центр симметрии наклонная призма, основанием которой является правильный девятиугольник?
17. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная пирамида, в основании которой лежит многоугольник с: а) четным числом сторон; б) нечетным числом сторон?
18. Сколько у правильной n-угольной усеченной пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
19. Может ли неправильная пирамида иметь: а) ось симметрии; б) плоскости симметрии? Приведите примеры таких пирамид.
20. Существуют ли центрально-симметричные усеченные пирамиды?
21. Верно ли, что центрально-симметричный многогранник имеет четное число вершин, ребер и граней?

*22. Укажите элементы симметрии правильных многогранников.

*23. Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии?

*24. Докажите, что если две пересекающиеся перпендикулярные прямые в пространстве являются осями симметрии данной фигуры Φ, то и прямая, проходящая через точку пересечения и перпендикулярная этим прямым, также будет осью симметрии фигуры Φ.

*25. Докажите, что фигура в пространстве не может иметь четное (ненулевое) число осей симметрии.

*26. Докажите, что если грани выпуклого многогранника имеют центры симметрии, то и сам многогранник имеет центр симметрии. Приведите пример многогранника, у которого есть центр симметрии, а его грани не имеют центров симметрии.

§ 41. Движение

Напомним, что **движением** называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. если точки A и B переходят, соответственно, в точки A' и B', то $AB = A'B'$.

Ранее в параграфе 11 было доказано, что параллельный перенос является движением. Докажем, что центральная и зеркальная симметрии также являются движениями.

Теорема. Центральная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B (рис. 208, а). *Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны по* первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними), и, значит, $AB = A'B'$. Таким образом, центральная симметрия сохраняет расстояния, и, следовательно, является движением. ■

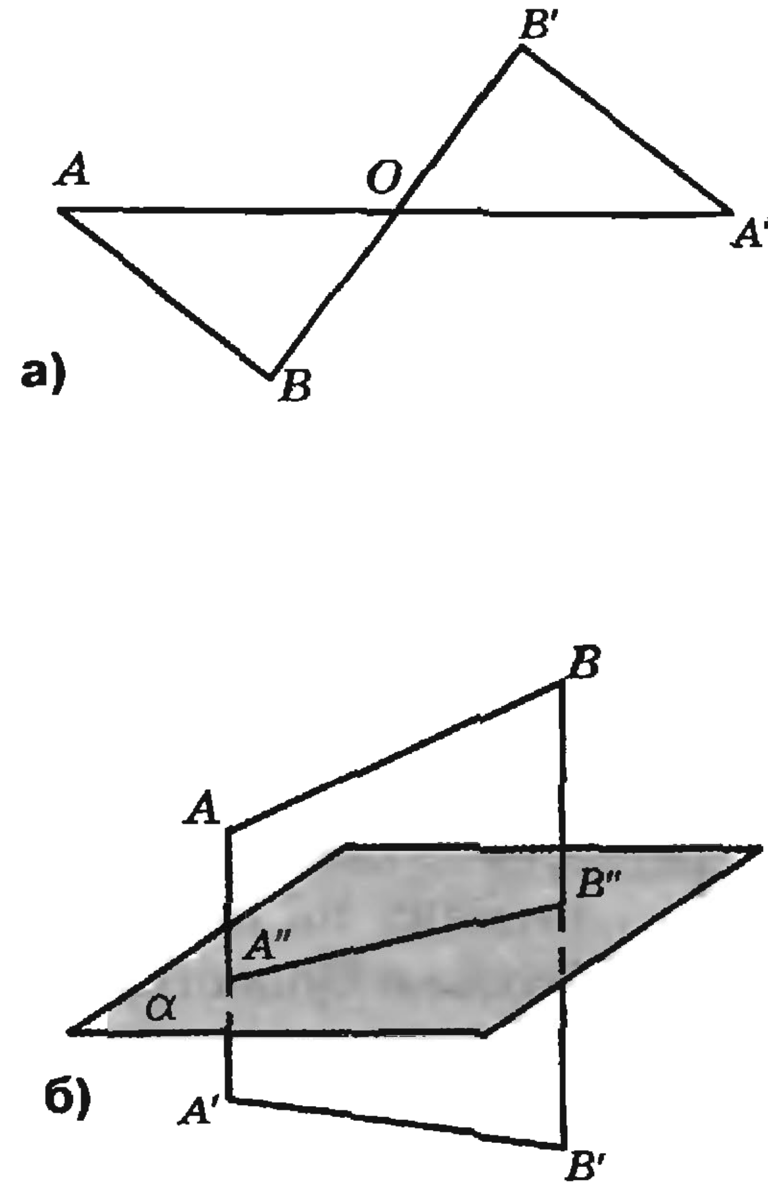


Рис. 208

Теорема. Зеркальная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно плоскости α точек A, B (рис. 208, б), A'', B'' — ортогональные проекции точек A, B на плоскость α. Тогда точки A, B, A', B' принадлежат одной плоскости и точки A', B' симметричны в этой плоскости точкам A, B относительно прямой $A''B''$. Из свойств симметрии на плоскости следует, что $AB = A'B'$. Таким образом, зеркальная симметрия сохраняет расстояния, и, следовательно, является движением. ■

Аналогичным образом можно доказать, что движениями являются поворот и осевая симметрия.

Упражнения

○ **1.** Назовите движение, которое оставляет на месте только: а) одну точку; б) точки одной прямой; в) точки одной плоскости.

○ **2.** Существуют ли движения (если существуют, то какие), переводящие данную прямую в другую данную прямую: а) параллельную первой; б) пересекающую первую; в) скрещивающуюся с первой?

3. Докажите, что движение переводит сферу в сферу того же радиуса.

* **4.** Докажите, что если движение оставляет на месте две: а) пересекающиеся прямые; б) параллельные прямые, то оно оставляет на месте и всю плоскость, в которой лежат эти прямые.

* **5.** Докажите, что если движение оставляет на месте три точки, не принадлежащие одной прямой, то оно оставляет на месте и всю плоскость, которой принадлежат эти точки.

6. С помощью каких движений можно перевести грань ABC правильного тетраэдра $ABCD$ в грань ABD так, чтобы ребро AB оставалось на месте?

7. Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D правильного тетраэдра $ABCD$, соответственно, в вершины: а) B, C, A, D; б) B, A, C, D; в) C, B, A, D?

* 8. Докажите, что для любой перестановки вершин A, B, C, D правильного тетраэдра существует движение, переводящее вершины A, B, C, D в вершины с заданным порядком следования.

* 9. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

*10. Сколько существует различных движений, переводящих правильный тетраэдр в себя?

11. Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D куба $A...D_1$, соответственно, в вершины: а) A_1, B_1, C_1, D_1; б) A_1, D_1, C_1, B_1; в) A_1, B_1, D_1, C_1?

*12. В кубе закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

*13. Сколько существует различных движений, переводящих куб в себя?

*14. Сколько имеется различных движений, переводящих в себя: а) октаэдр; б) икосаэдр; в) додекаэдр?

15. Докажите, что движением является: а) поворот; б) осевая симметрия.

*16. Докажите, что параллельный перенос может быть получен в результате последовательного выполнения (композиции) двух зеркальных симметрий.

*17. Представьте поворот вокруг оси в виде композиции двух зеркальных симметрий.

*18. Представьте центральную симметрию в виде композиции трех зеркальных симметрий.

§ 42*. Ориентация поверхности. Лист Мёбиуса

Пусть в пространстве заданы плоскость и поворот этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 209, а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако если мы будем смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 209, б).

Таким образом, направление поворота не является свойством, изначально присущим плоскости, и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется **ориентацией плоскости**.

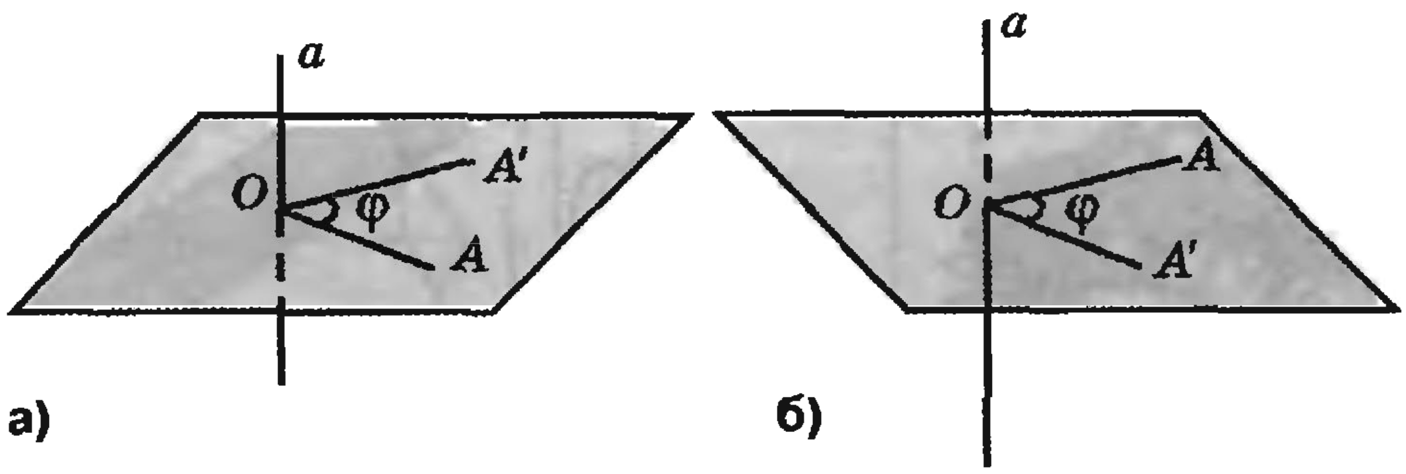


Рис. 209

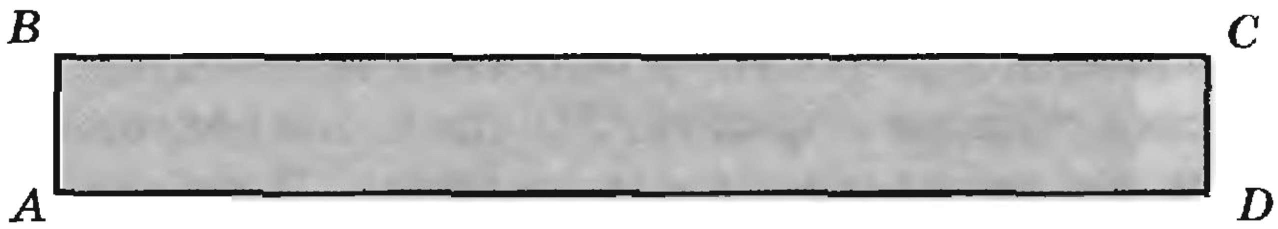


Рис. 210

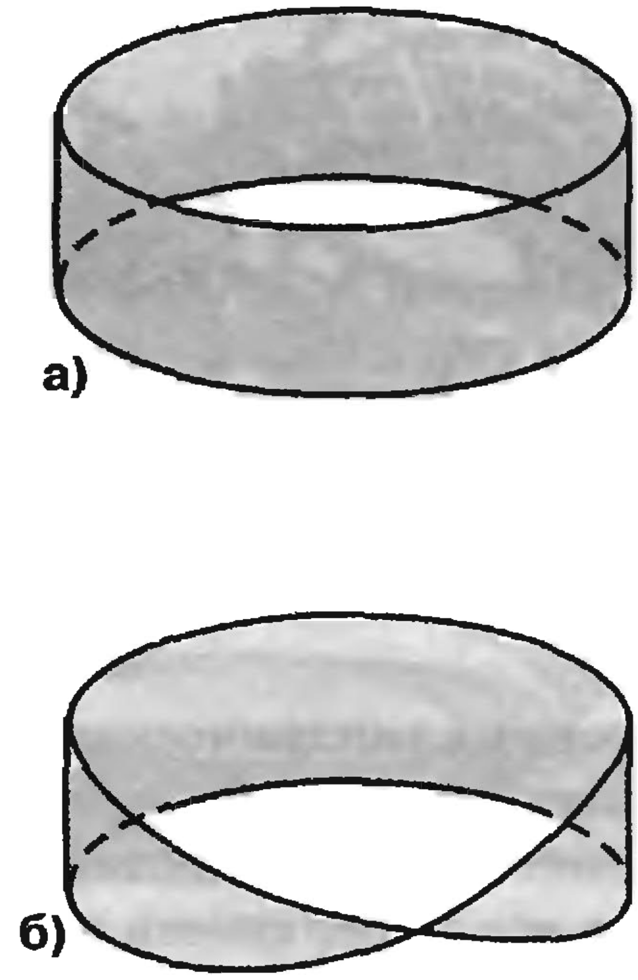


Рис. 211

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая **листом**, или **лентой**, **Мёбиуса**, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мёбиусом (1790—1868).

Изготовить модель листа Мёбиуса очень просто. Возьмем бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 210). Если склеить противоположные стороны AB и CD, совместив точку A с точкой D, а точку B с точкой C, то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 211, *а*). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180° и соединить точку A с точкой C, точку B с точкой D (рис. 211, б), то получим лист Мёбиуса.

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств. Например, попытаемся ответить на вопрос: «Сколько краев имеет лист Мёбиуса?» В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать ее вдоль края. В результате мы придем в то же самое выбранное место.

Кроме этого, лист Мёбиуса имеет только одну сторону. До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера,

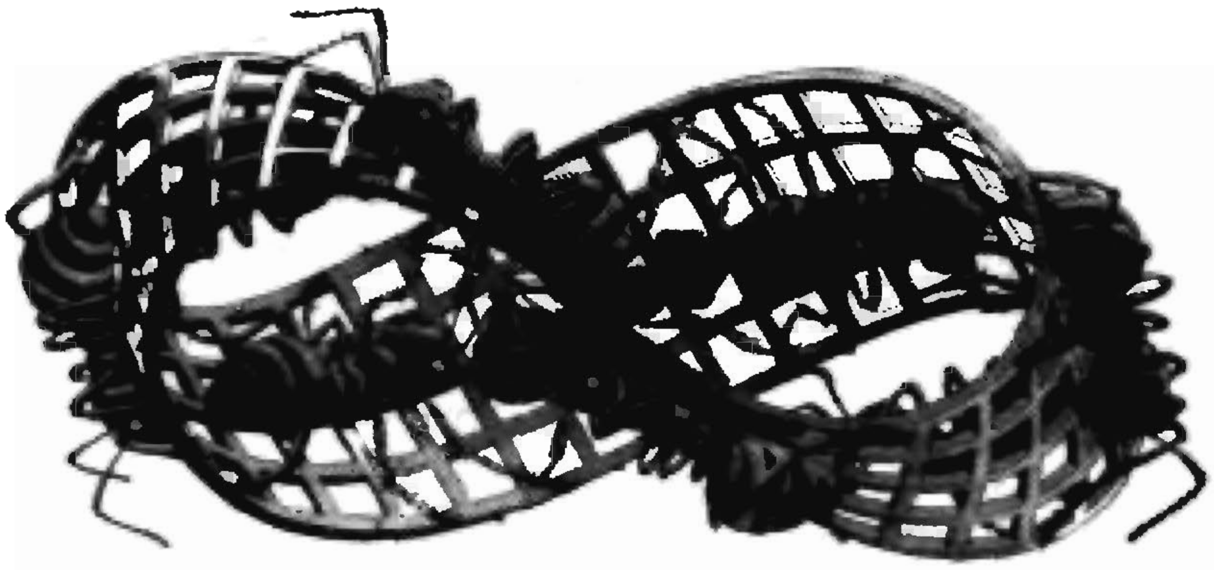


Рис. 212

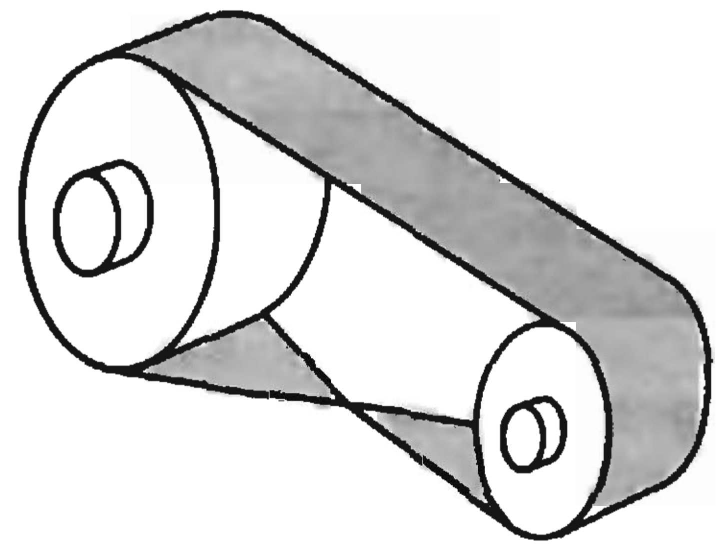


Рис. 213

тор, цилиндрическая и коническая поверхности. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнем закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы проделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав закрашивание с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М. Эшера (рис. 212).

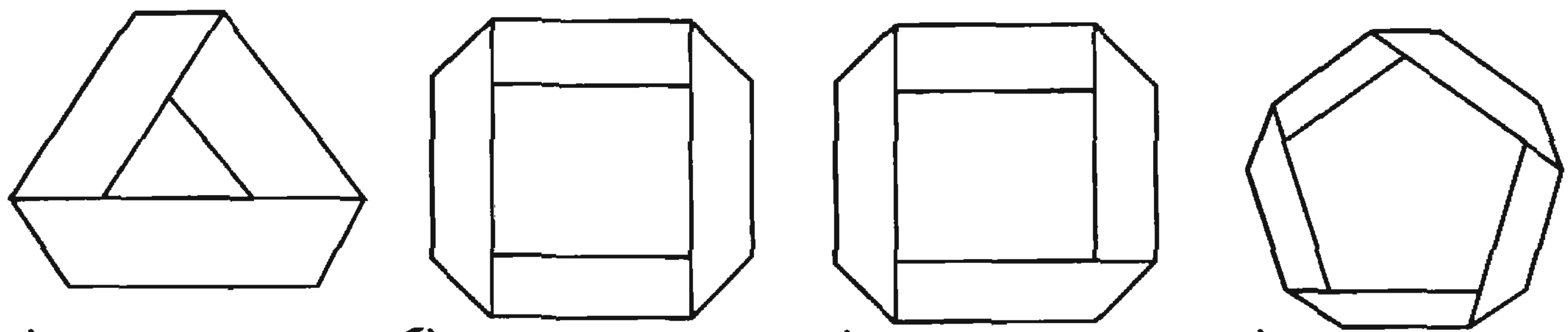
Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ременных передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса (*рис. 213*), *то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный.* Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя ее часть, как у обычной ременной передачи.

Проделаем еще один опыт. Проведем на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: «Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?» Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента, в чем легко убедиться, разрезав лист Мёбиуса.

Упражнения

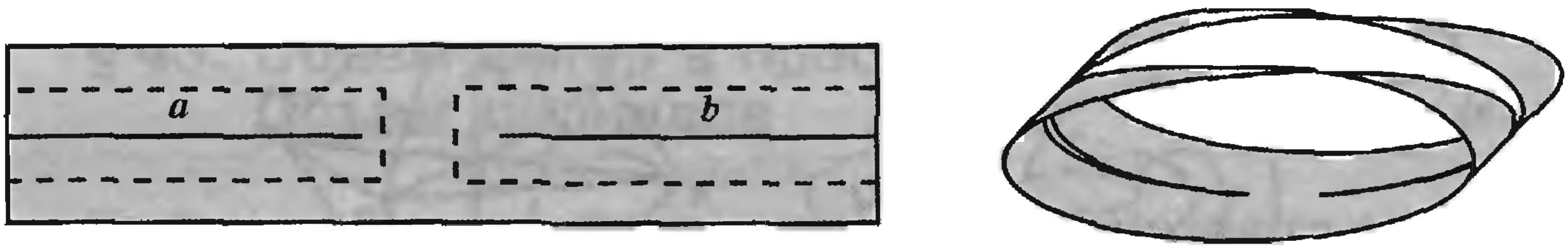
○ **1.** Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?

○ **2.** Является ли ориентируемой: а) сфера; б) боковая поверхность цилиндра; в) поверхность конуса?



а) б) в) г)

Рис. 214



а) б)

Рис. 215

○ **3.** Сколько сторон имеет тор (напомним, это поверхность, полученная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей эту окружность)?

○ **4.** Является ли ориентируемой поверхностью: а) дважды перекрученная лента; б) трижды перекрученная лента?

○ **5.** На рисунке 214 укажите изображения листа Мёбиуса.

6. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ склеиваются противоположные стороны AB и EF, CD и GH. Сколько сторон имеет получившаяся поверхность, если: а) оба склеивания производятся без перекручивания; б) одно склеивание производится с перекручиванием, а другое — без него; в) оба склеивания производятся с перекручиванием?

7. Сколько сторон имеет поверхность, полученная при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?

8. Что получится, если дважды перекрученную ленту разрезать по средней линии?

9. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?

***10.** Возьмите полоску бумаги и сделайте два разреза — a и b (рис. 215, а). Соедините между собой пары концов, как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображенная на рисунке 215, б, называемая **сиамским листом Мёбиуса**. Что получится, если разрезать ее вдоль пунктирной линии (рис. 215, а)? Сколько будет частей, краев и перекручиваний?

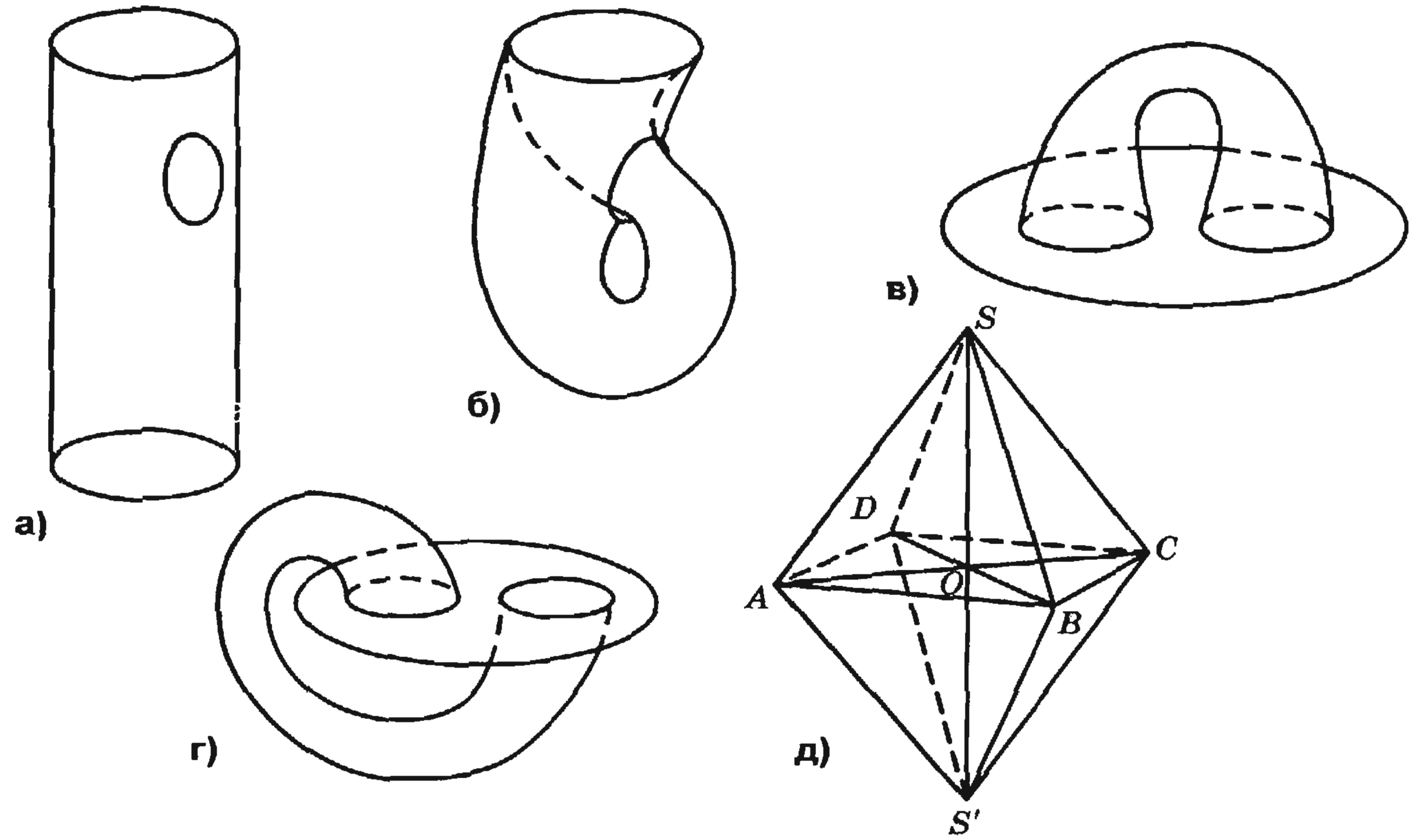


Рис. 216

***11.** Отрезок AB, параллельный прямой a, вращается вокруг этой прямой и одновременно вращается вокруг своего центра в плоскости отрезка AB и прямой a. За время полного оборота вокруг прямой a отрезок совершает поворот на 180° вокруг своего центра. Какую фигуру в пространстве описывает этот отрезок? Какую фигуру в пространстве будет описывать этот отрезок, если за время полного оборота вокруг прямой a он совершит поворот на 360° вокруг своего центра?

***12.** Покажите, что задача о трех домиках и трех колодцах, расположенных на листе Мёбиуса, имеет решение: их можно соединить непересекающимися дорожками.

***13.** Представим себе боковую поверхность цилиндра, сделанную из эластичного материала. Вырежем в ней круглое отверстие (рис. 216, а), проденем в него один конец цилиндра и склеим окружности оснований. Получившаяся поверхность изображена на рисунке 216, б (**бутылка Клейна**). Сколько у нее сторон?

***14.** В круге вырезали два круглых отверстия и к их краям приклеили основания боковой поверхности цилиндра (рис. 216, в, г). Сколько сторон имеет образовавшаяся поверхность?

***15.** В поверхности октаэдра $SABCDS'$ вырезали два треугольника SAB, $S'BC$ и добавили треугольники SAO, $S'CO$, $SS'B$, где O — центр симметрии октаэдра (рис. 216, д). Сколько сторон имеет получившаяся поверхность? Какая у нее граница?

Глава VI

ОБЪЕМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

§ 43. Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра

Проблема нахождения объемов пространственных фигур с древних времен привлекала к себе внимание ученых. Вычислением объемов простейших пространственных фигур занимались Демокрит, Евдокс (406—355 гг. до н. э.), Архимед. В средние века нахождением объемов пространственных фигур занимались И. Кеплер, Б. Кавальери (1598—1647), П. Ферма (1601—1665) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII века в работах И. Ньютона (1643—1727) и Г. Лейбница (1646—1716) дало мощный метод вычисления объемов произвольных пространственных фигур. Знакомство с этим методом происходит в курсе алгебры и начал анализа. Здесь же мы рассмотрим само понятие объема, его свойства и вычисление объемов основных пространственных фигур.

Объем — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно, соответственно, 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Объем — число V, показывающее сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре. Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому на практике после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы ***свойства***, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.

3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

Для нахождения объемов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью дадим общее определение цилиндра.

Пусть α и π — две параллельные плоскости, l — пересекающая эти плоскости прямая; F — фигура на одной из этих плоскостей, F' — ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l (рис. 217, а). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **цилиндром**. Фигуры F и F' называются **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют **высотой** цилиндра.

В случае если в определении цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям, то цилиндр называется **прямым** (рис. 217, б). В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

Заметим, что частным случаем цилиндра является призма.

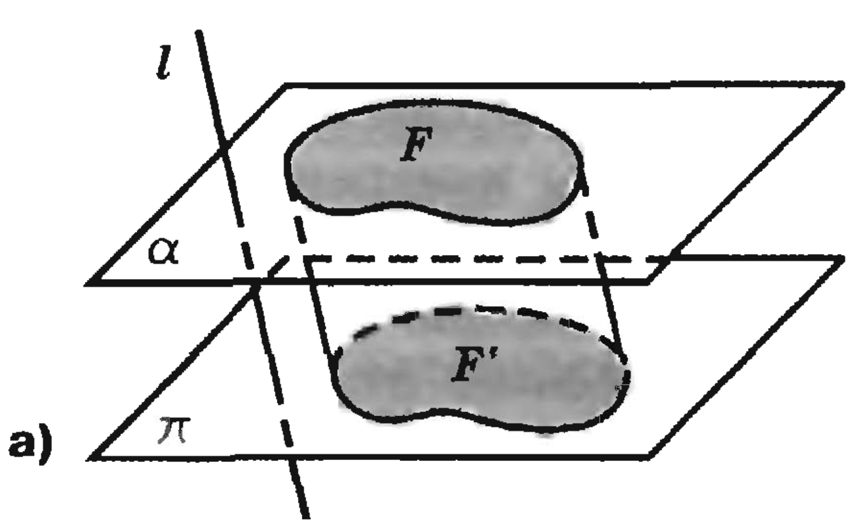
В случае если основание F цилиндра является кругом, то цилиндр называется **круговым**.

Ранее мы рассматривали только круговые цилиндры и называли их просто цилиндрами.

Здесь мы найдем формулу для вычисления объема прямого цилиндра, основанием которого является произвольная плоская фигура.

Теорема. Объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда в основании цилиндра Φ_1 квадрат со стороной, равной единице, и высота которого равна h (рис. 218, а). Так как единица измерения длины укладывается в высоте h раз, то и единичный куб будет укладываться в этом цилиндре h раз, и, следовательно, объем цилиндра равен h.



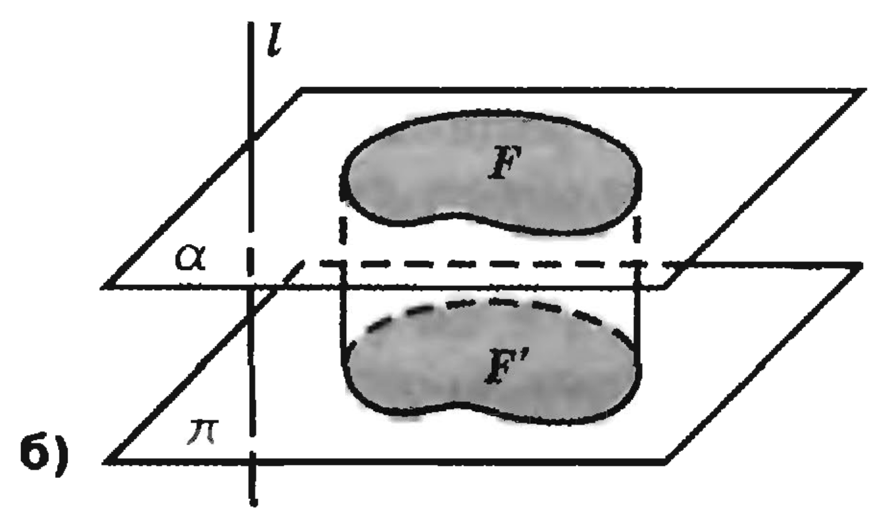


Рис. 217

Упражнения

○ **1.** Может ли объем фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулем?

○ **2.** Приведите примеры равновеликих, но не равных пространственных фигур.

○ **3.** Чему равен объем пространственного креста (рис. 219), если ребра образующих его кубов равны единице?

○ **4.** Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке 220?

○ **5.** Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см (рис. 221). Найдите объем оставшейся части.

○ **6.** Через два противоположных ребра куба провели плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

7. Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объем.

8. Является ли частным случаем цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) пирамида?

9. Осевое сечение прямого кругового цилиндра — квадрат со стороной a см. Найдите объем цилиндра.

10. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

11. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

12. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой 5 см и высота 8 см.

13. Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

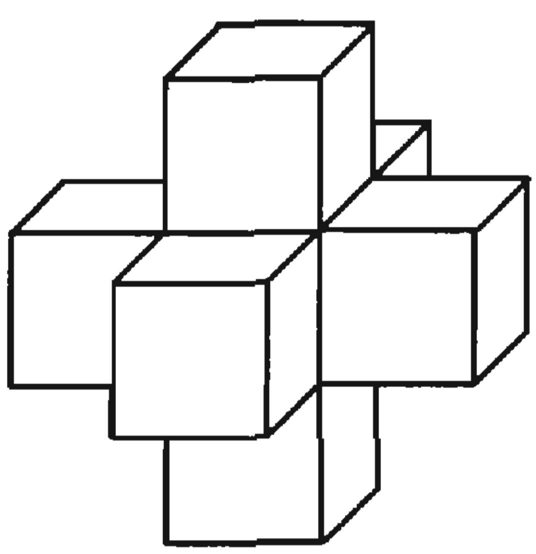


Рис. 219

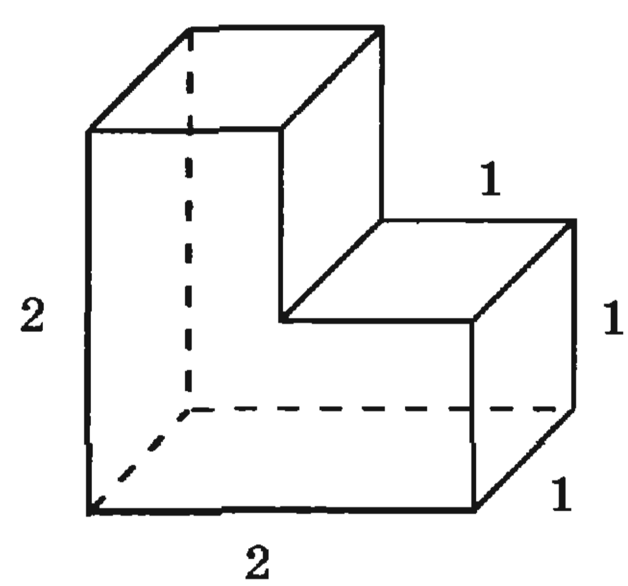


Рис. 220

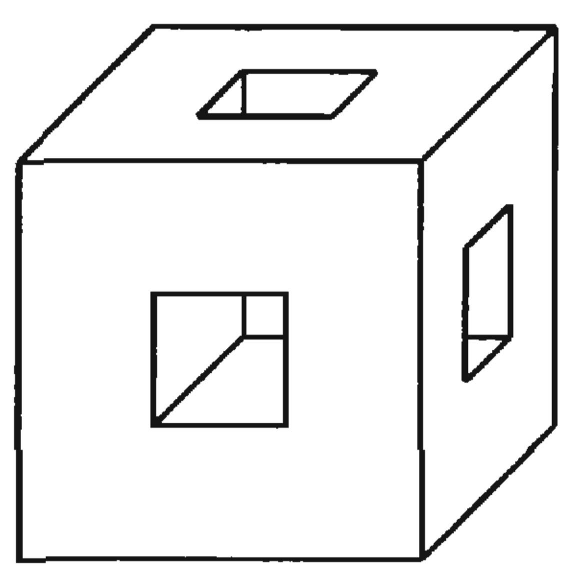


Рис. 221

14. Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см^3.

15. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

16. Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.

17. Объем правильной шестиугольной призмы равен V. Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

18. Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : n?

19. Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

20. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

21. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определите объем этого параллелепипеда.

22. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем призмы.

23. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.

24. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b. Как относятся объемы цилиндров?

25. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

26. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

27. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?

***28.** Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

***29.** Через вершину A и ребро B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провели плоскость. Какая из частей призмы, на которые она разбивается плоскостью, имеет больший объем?

***30.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две равновеликие части.

***31.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину оси прямого кругового цилиндра, делит его на две равновеликие части.

***32.** Верно ли, что любая плоскость, проходящая через середину оси правильной n-угольной призмы, делит призму на две равновеликие части? Рассмотрите случаи, когда n четно и n нечетно.

***33.** Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 1, а высота равна 0,5.

***34.** Найдите объем ромбододекаэдра с ребром a.

***35.** Используя свойства объема, докажите, что если фигура F_1 содержится в фигуре F, то имеет место неравенство $V(F_1) \leqslant V(F)$.

***36.** Докажите, что объем наклонного цилиндра равен произведению его образующей на площадь сечения плоскостью, перпендикулярной этой образующей.

§ 44. Принцип Кавальери

Рассмотрим метод вычисления объемов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 222), то объемы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2 составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 222). Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объемы соответствующих слоев. Следовательно, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев.

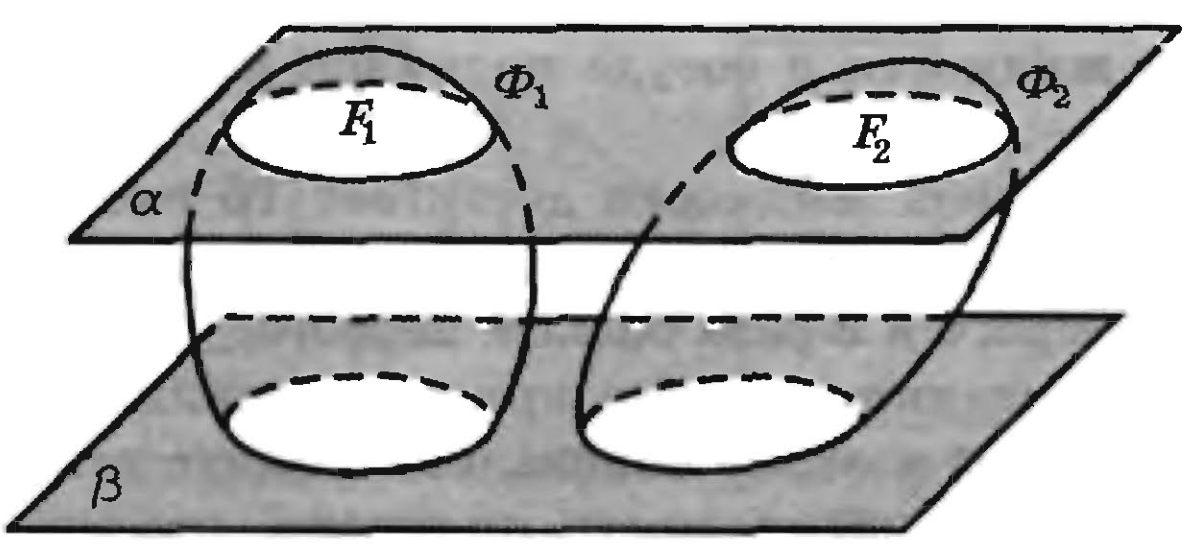


Рис. 222

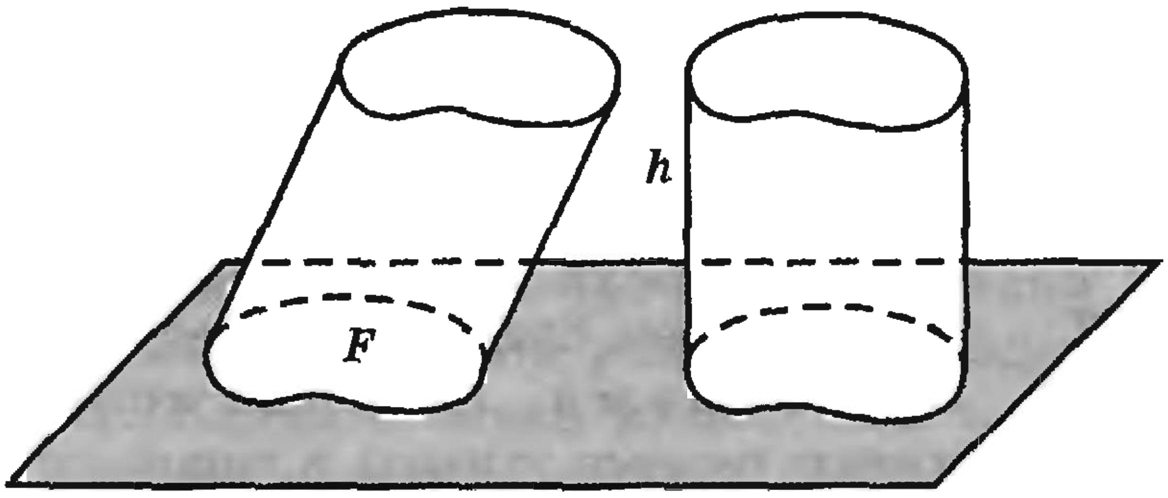


Рис. 223

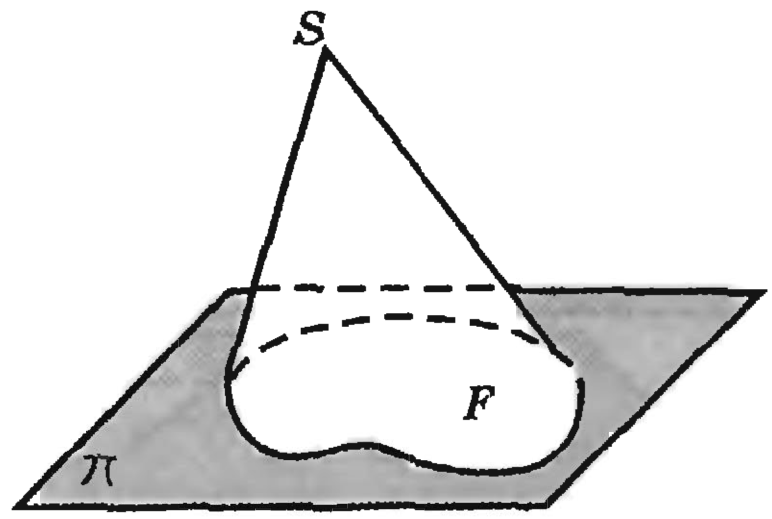


Рис. 224

Теорема. Объем наклонного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра так, чтобы их основания находились на одной плоскости (рис. 223). Тогда сечения этих цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F, и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери, отсюда следует равенство объемов цилиндров, и, значит, для объема наклонного цилиндра имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ■

Следствие 1. Объем наклонной призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле

$$\boxed{V = S \cdot h.}$$

Следствие 2. Объем наклонного кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h.}$$

Дадим общее определение конуса, позволяющее объединить в один класс рассмотренные ранее конусы и пирамиды.

Пусть F — фигура на плоскости π и S — точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **конусом** (рис. 224). Фигура F называется **основанием** конуса, точка S — **вершиной** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется **высотой** конуса.

В случае, если F является кругом, конус называется **круговым**. Если высота кругового конуса проходит через центр основания, то такой конус называется **прямым круговым**. Раньше мы рассматривали прямые круго-

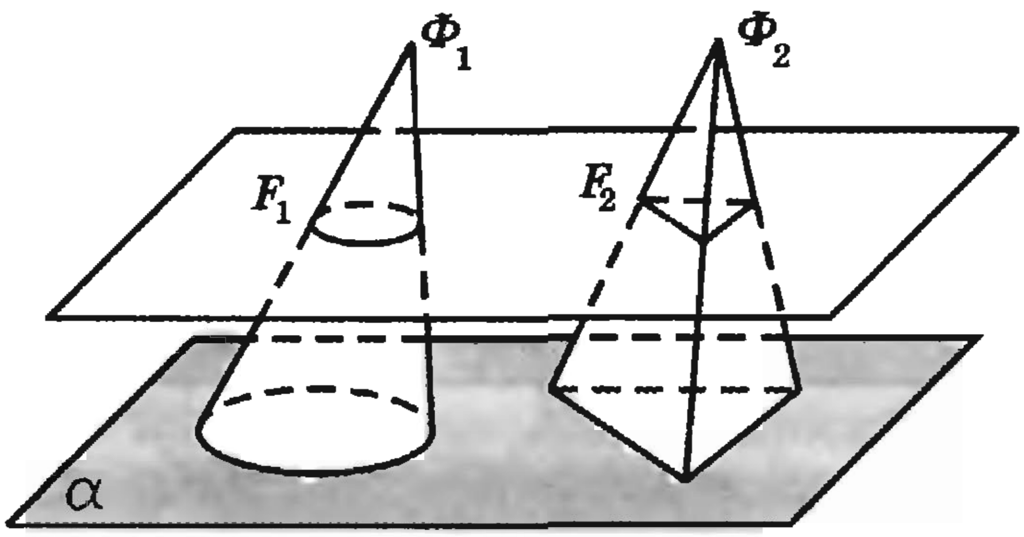


Рис. 225

вые конусы и называли их просто конусами. Заметим, что частным случаем конуса в новом понимании является также пирамида.

Используя принцип Кавальери, докажем следующую теорему.

Теорема. Если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.

Доказательство. Пусть конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 225). Проведем плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда по теореме из § 23 фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2, соответственно, выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, и, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы конусов равны. ■

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что две призмы, имеющие общее основание, равновелики?

○ **2.** Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

○ **3.** Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований наклонного кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

○ **4.** В основаниях наклонной призмы — квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

○ **5.** Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

○ **6.** Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания наклонного кругового конуса, делит его на равновеликие части?

○ **7.** В основании пирамиды — квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

○ **8.** Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

9. Найдите объем наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.

10. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними 45°. Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем параллелепипеда.

11. Найдите объем наклонного параллелепипеда, у которого площадь основания равна Q, а боковое ребро, равное b, наклонено к плоскости основания под углом φ.

12. Найдите объем наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

13. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найдите объем параллелепипеда.

14. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна d. Найдите объем призмы.

***15.** Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Определите объем призмы.

***16.** Докажите, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объем имеет прямая призма.

***17.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей наклонного параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

***18.** Даны три параллелепипеда. Проведите плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема.

***19.** Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2 соответственно, причем площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объемы фигур Φ_1 и Φ_2?

***20.** Докажите, что фигура Φ, полученная вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$, вокруг оси Oy, равновелика прямой призме, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными единице, и высота призмы равна π. Нарисуйте фигуру Φ и найдите ее объем.

§ 45. Объем пирамиды

Первые упоминания о вычислении объема пирамиды найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Любопытно, что они не вывели общей формулы для нахождения объема пирамиды, а вычисляли объемы конкретных пирамид. Так им удалось найти объем правильной четырехугольной пирамиды с основанием, равным единице измерения, и высотой, равной $\frac{1}{2}$. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на 6 равных правильных четырехугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 226). Все 6 полученных пирамид равны, отсюда следует, что объем каждой из них равен $\frac{1}{6}$ объема куба.

Теорема. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC — треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 227). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1, разбивают эту призму на три пирамиды — A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ — с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны.

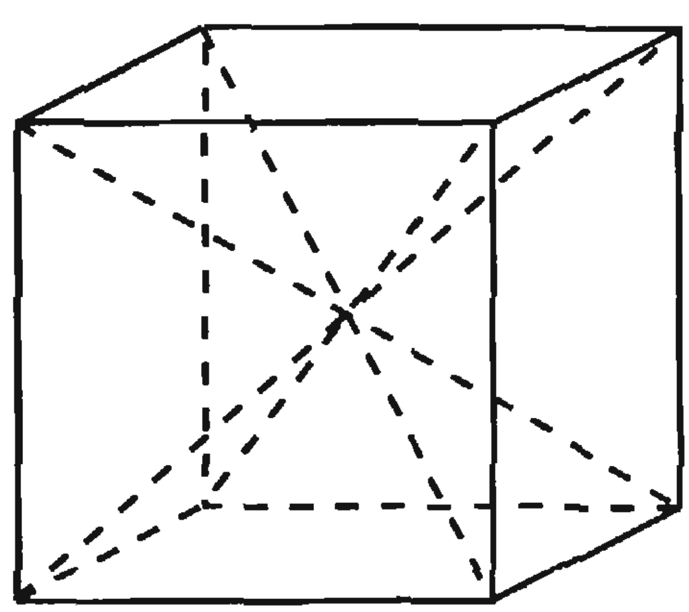


Рис. 226

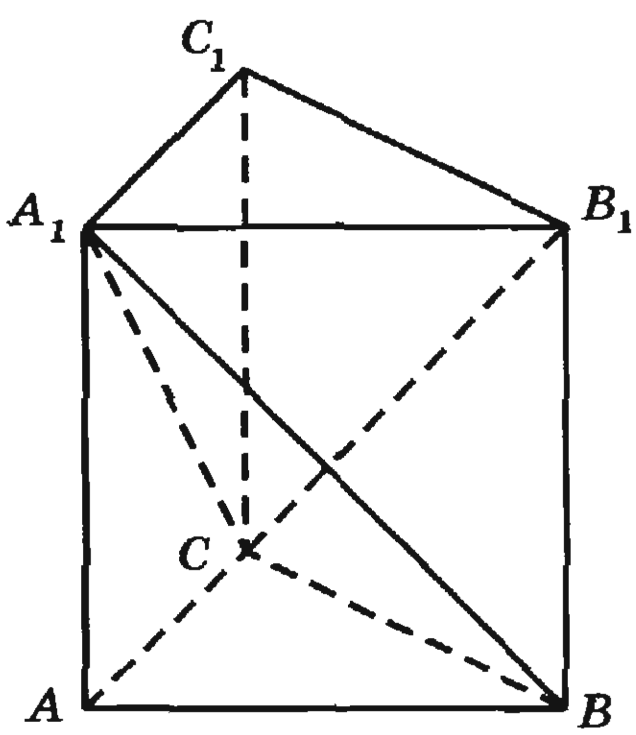


Рис. 227

Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S \cdot h,}$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой — многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа, объемы этих пирамид равны, и, следовательно, имеет место формула

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S \cdot h,}$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота. ■

Исторические сведения

Впервые формулу объема пирамиды в общем виде нашел Архимед. Для этого он разработал следующий метод: высота пирамиды разбивается на n равных частей и через точки деления проводят плоскости, параллельные основанию пирамиды. При этом пирамида разбивается на слои. Для каждого такого слоя строятся две призмы, одна из которых содержится в слое, а другая содержит слой (чертеж к этой задаче получил название «чертовой лестницы», рис. 228).

Зная, что объем призмы есть произведение площади основания на высоту, получают, что сумма объемов призм, содержащихся в слоях, равна $\frac{1}{3}SH\left(1-\frac{1}{n}\right)^3$, где S — площадь основания пирамиды и H — высота; сумма объемов призм, содержащих слои, равна $\frac{1}{3}SH\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$. Тогда если V — объем пирамиды, то

$$\frac{1}{3}SH\left(1-\frac{1}{n}\right)^3 < V < \frac{1}{3}SH\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

При увеличении n левая и правая части сколь угодно мало отличаются от $\frac{1}{3}SH$, и, следовательно, получаем формулу объема пирамиды

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

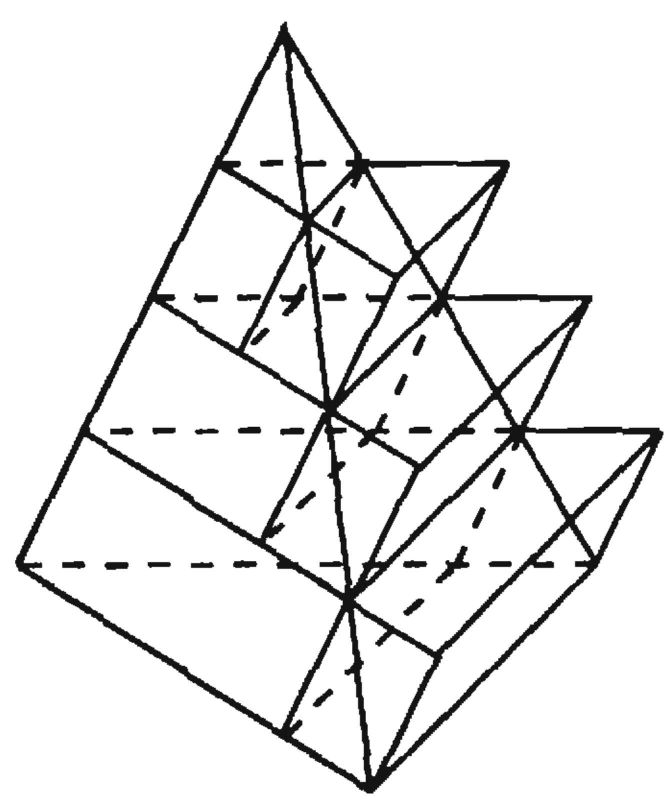


Рис. 228

Упражнения

○ **1.** Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?

○ **2.** Найдите объем пирамиды, высота которой h, а в основании — прямоугольник со сторонами a и b.

○ **3.** Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, высота — h.

○ **4.** Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h, а диагональ основания — d.

○ **5.** Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

6. Напишите формулу объема правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

7. Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1.

8. Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.

9. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.

10. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найдите боковое ребро.

11. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найдите объем пирамиды.

12. Напишите формулу объема правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

13. Как изменится объем правильной пирамиды, если высота ее будет увеличена в n раз, а сторона основания уменьшена во столько же раз?

14. Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна b, а плоские углы при вершине равны $60°$, $90°$ и $90°$.

15. Пирамида, объем которой равен V, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.

16. В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.

17. Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.

18. Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.

19. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а угол между боковой гранью и основанием 45°. Найдите объем пирамиды.

20. Параллельно основанию пирамиды проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей пирамиды?

21. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны a, проведите сечение через вершину D параллельно ребру AC и точку M — середину ребра BC. Определите:

а) вид сечения;

б) площадь сечения;

в) *угол* φ *между плоскостью сечения и плоскостью* ABC тетраэдра;

г) объемы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения.

***22.** Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

***23.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

***24.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

***25.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

***26.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер. Один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

***27.** Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Найдите объем этой пирамиды.

***28.** По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка постоянной длины AB и CD. Докажите, что объем пирамиды $ABCD$ при этом не меняется.

***29.** Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

***30.** Плоскость пересекает ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A', B', C' соответственно. Найдите объем пирамиды

$SA'B'C'$, если объем исходной пирамиды равен V и $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$.

*31. Докажите, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

*32. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного многогранника, до плоскостей всех его граней не зависит от выбора этой точки.

*33. В пирамиду $ABCD$ с высотами граней h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар радиуса R. Докажите, что имеет место равенство

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}.$$

§ 46. Объем конуса

Напомним, что конусом в пространстве мы называем фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры, называемой основанием конуса, с точкой, лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса.

Теорема. Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного конуса с основанием площади S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой (рис. 225). Тогда эти пирамида и конус имеют равные объемы. Но для объема пирамиды имеет место формула

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S\cdot h.}$$

Следовательно, она имеет место и для объема произвольного конуса. ■

В частности, для кругового конуса, в основании которого — круг радиуса R и высота которого равна h, имеет место формула

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h.}$$

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 229).

Полученное при этом сечение конуса также называется **основанием усеченного конуса**. Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой усеченного конуса**.

Теорема*. Объем усеченного конуса выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s),$$

где S, s — площади оснований, g — высота усеченного конуса.

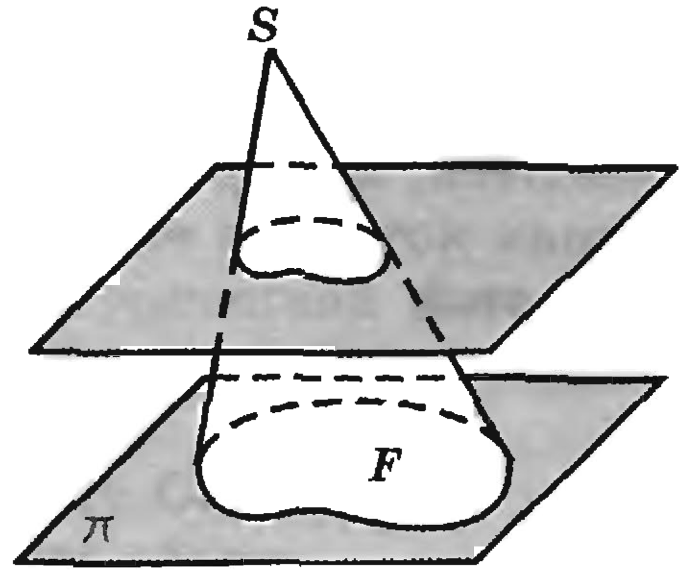


Рис. 229

Доказательство. Представим усеченный конус как разность большего и меньшего конусов. Тогда объем усеченного конуса находится как разность объемов большего и меньшего конусов.

Если площади оснований большего и меньшего конусов равны, соответственно, S, s, а высоты — H, h, то объем усеченного конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить высоты H и h через высоту g усеченного конуса и площади оснований. Ясно, что $H = g + h$. Выразим h через g, S и s. Заметим, что в сечении конуса плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до плоскости сечения и плоскости основания. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{g+h}\right)^2 \text{ или } \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h}{g+h},$$

из которого можно найти неизвестную высоту h:

$$h = \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь h в выражение для объема усеченного конуса, получим

$$V = \frac{1}{3}\left(S\left(\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}} + g\right) - s\,\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}\left(g\,\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}g\,(S + \sqrt{Ss} + s). \blacksquare$$

Формула объема усеченного конуса, в частности, применима к нахождению объемов усеченной пирамиды и усеченного прямого кругового конуса. Так, например, объем усеченного прямого кругового конуса, в основаниях которого — круги радиусов R и r, а высота равна h, выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2).}$$

Упражнения

1. Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?
2. Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?
3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40π см^3.
4. ○ Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?
5. Напишите формулу объема прямого кругового конуса с радиусом основания R и образующей b.
6. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.
7. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 90°. Вычислите объем конуса.
8. Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.
9. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем тела вращения.
10. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объемы этих конусов?
11. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объем тела вращения.
12. Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.
13. Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h. Найдите его объем.
14. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h. Найдите его объем.

***15.** Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 м и 1 м. Найдите объем.

***16.** Площади оснований усеченной пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2, а высота исходной пирамиды равна 35 м. Найдите объем.

***17.** Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b, боковое ребро составляет с основанием угол 30° ($a > b$).

***18.** Радиусы оснований усеченного конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите его объем.

19. Объем усеченного конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.

***20.** Усеченный конус, у которого радиусы оснований 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?

***21.** На меньшем основании усеченного конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания. Объем цилиндра составляет седьмую часть объема усеченного конуса. Найдите зависимость между радиусами оснований усеченного конуса.

***22.** Объем конуса равен V. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.

***23.** Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем.

§ 47. Объем шара и его частей

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объема шара.

Теорема. Объем шара радиуса R выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Доказательство. Пусть дан полушар радиуса R, основание которого расположено на плоскости α. Рассмотрим цилиндр, основание которого — круг радиуса R, расположенный в той же плоскости α, и высота которого равна R (рис. 230). В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что фигура, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объемы.

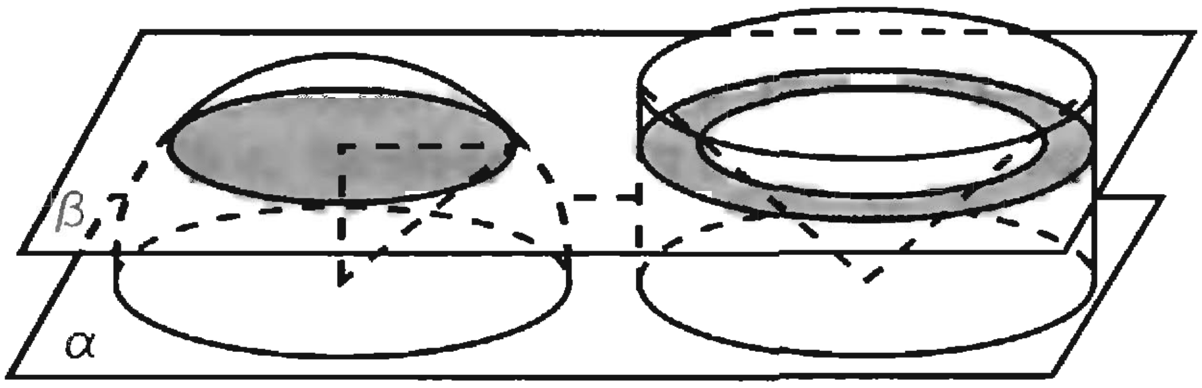


Рис. 230

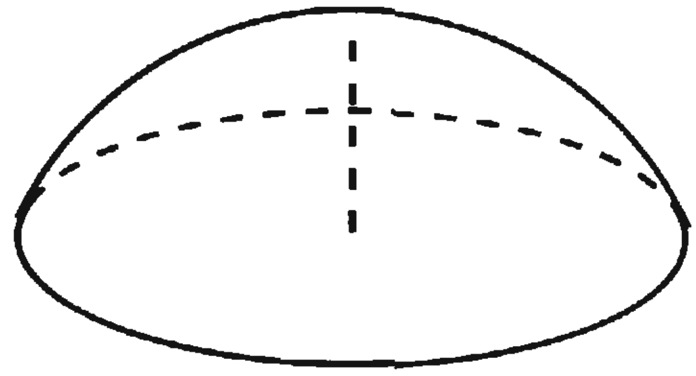


Рис. 231

Проведем плоскость β, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$ и площади $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего — R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

Шаровым кольцом называется фигура, заключенная между поверхностями двух шаров с общим центром.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 231). Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется **основанием шарового сегмента.** Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется **высотой шарового сегмента.**

Теорема. Объем шарового сегмента высоты h, отсекаемого от шара радиуса R, выражается формулой

$$\boxed{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).}$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рисунке 230, и предположим, что плоскость β отсекает от полушара сегмент высоты h. Тогда она отсекает от цилиндра и вписанного в него конуса

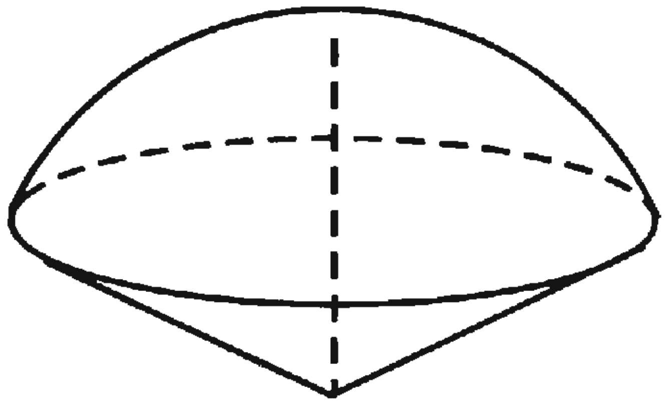


Рис. 232

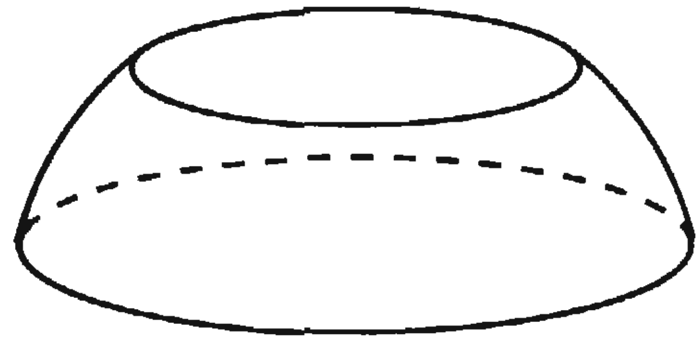


Рис. 233

цилиндр и усеченный конус высоты h. По принципу Кавальери, объем V шарового сегмента будет равен разности объемов этих цилиндра и усеченного конуса. Объем $V_ц$ цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объем $V_{ус.к}$ усеченного конуса равен разности объемов большого и малого конусов, т.е.

$$V_{ус.к} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}(R-h)^3 = \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Следовательно,

$$V = V_ц - V_{ус.к} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \blacksquare$$

Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной — центр шара (рис. 232).

Шаровым поясом будем называть часть шара, заключенную между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 233). Сечения шара этими плоскостями называются **основаниями шарового пояса**, а расстояние между ними называется **высотой шарового пояса**.

Упражнения

○ **1.** Найдите объем шара, диаметр которого равен 4 см.

○ **2.** Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?

○ **3.** Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

○ **4.** Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?

○ **5.** Во сколько раз объем Земли больше объема Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

○ **6.** Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным единице.

7. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.
8. Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)
9. Найдите формулу объема шарового кольца, заключенного между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$).
10. Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.
11. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
12. Найдите формулу объема шарового сектора радиуса R и углом при вершине φ.
13. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара — 75 см?
14. Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара — 5 см. (Рассмотрите два случая.)
15. Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

*16. Найдите объем шара, вписанного в октаэдр с ребром a.

*17. Шар касается всех двенадцати ребер куба с ребром a. Найдите объем части шара, заключенной внутри этого куба.

*18. Найдите объем тора, полученного вращением круга радиуса r вокруг оси, отстоящей от центра круга на расстоянии h ($h > r$).

§ 48. Площадь поверхности

Площадью поверхности многогранника, по определению, считается сумма площадей входящих в эту поверхность многоугольников.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.

Рассмотрим вопрос о нахождении площадей поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса. Будем, как и раньше, называть их просто цилиндром и конусом.

Теорема. Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой

$$\boxed{S = 2\pi R(R + b).}$$

Доказательство. Поверхность цилиндра состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности (рис. 234). Разверткой боковой поверхности является прямоугольник с основанием $2\pi R$ и высотой b. Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi Rb + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + b). \blacksquare$$

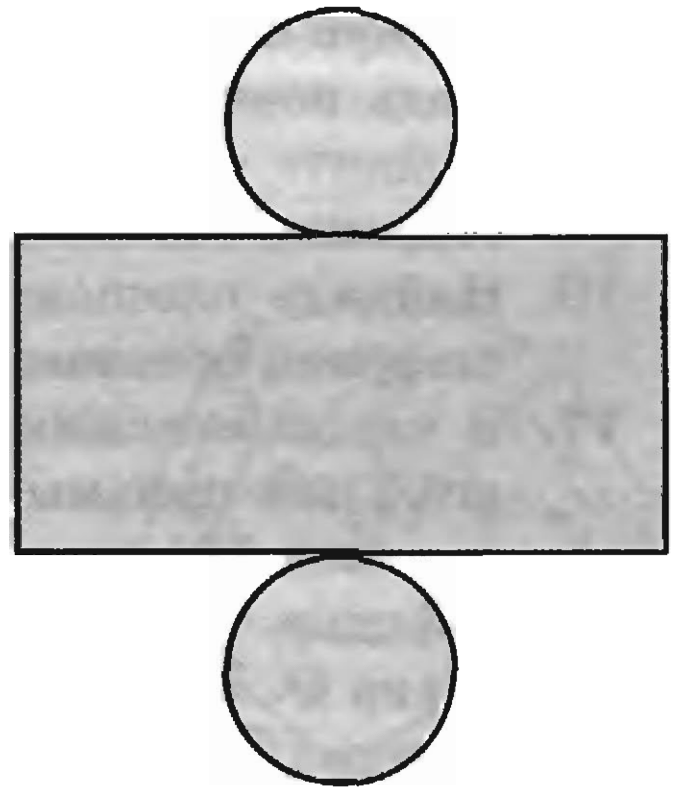


Рис. 234

Теорема. Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой

$$\boxed{S = \pi R(R + b).}$$

Доказательство. Поверхность конуса состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (рис. 235), радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна πRb, а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R + b). \blacksquare$$

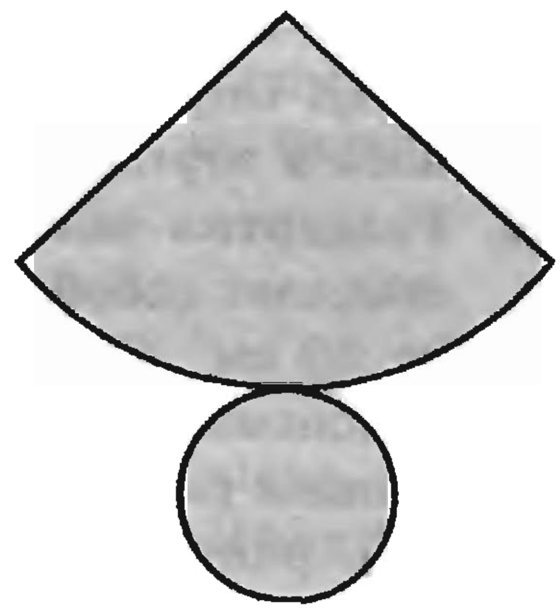


Рис. 235

Упражнения

○ **1.** Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?

○ **2.** Чему равна площадь поверхности: а) тетраэдра с ребром 1; б) икосаэдра с ребром 1?

○ **3.** Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.

○ **4.** Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5. Из прямоугольного листа бумаги образуйте боковую поверхность цилиндра. Сколькими способами это можно сделать? Сравните их площади.

6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

7. *Осевое сечение цилиндра — квадрат. Площадь основания равна S. Найдите площадь поверхности цилиндра.*

8. Радиус основания конуса равен 3 м, высота — 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.
9. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.
10. Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.
11. В каком отношении делится боковая поверхность правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии ее оснований?
12. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
13. Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.
14. Площадь боковой грани правильной четырехугольной призмы равна Q. Определите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.
15. Развертка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см^2. Найдите площадь грани пирамиды.
16. В основании пирамиды, боковые грани которой образуют с основанием равные углы, лежит ромб. Площадь одной из боковых граней равна Q. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.
17. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды в два раза больше площади основания. Определите угол наклона боковой грани к плоскости основания.
18. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур?
19. Найдите площадь поверхности усеченного прямого кругового конуса с основаниями радиусов r, R и образующей b. Нарисуйте развертку боковой поверхности усеченного конуса.
20. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 см.
21. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания цилиндра.
22. Площади боковых поверхностей двух конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг каждого из его катетов, равны. Определите вид треугольника.

*23. Докажите, что площадь любой грани произвольного тетраэдра меньше суммы площадей остальных трех граней.

§ 49. Площадь поверхности шара и его частей

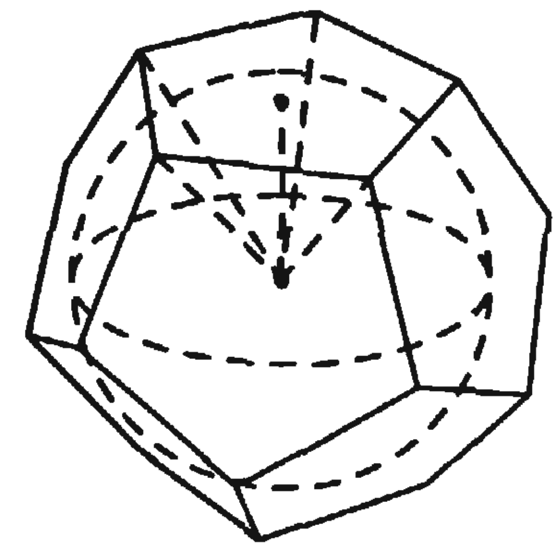


Рис. 236

Для нахождения площади поверхности шара уже нельзя, как мы это делали для цилиндра и конуса, воспользоваться разверткой, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника (рис. 236). Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Отсюда объем многогранника вычисляется по формуле

$$\boxed{V_{\text{м}} = \frac{1}{3}S_{\text{м}}R,}$$

где $S_{\text{м}}$ — площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Получающиеся при этом многогранники будут все больше и больше приближаться к шару, а их поверхности будут приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом все время сохраняется приведенная выше формула объема, получаем, что для объема шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула $V = \frac{1}{3}SR$. С другой стороны, объем шара выражается формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{1}{3}SR = \frac{4}{3}\pi R^3$, из которого получаем формулу площади поверхности шара:

$$\boxed{S = 4\pi R^2.}$$

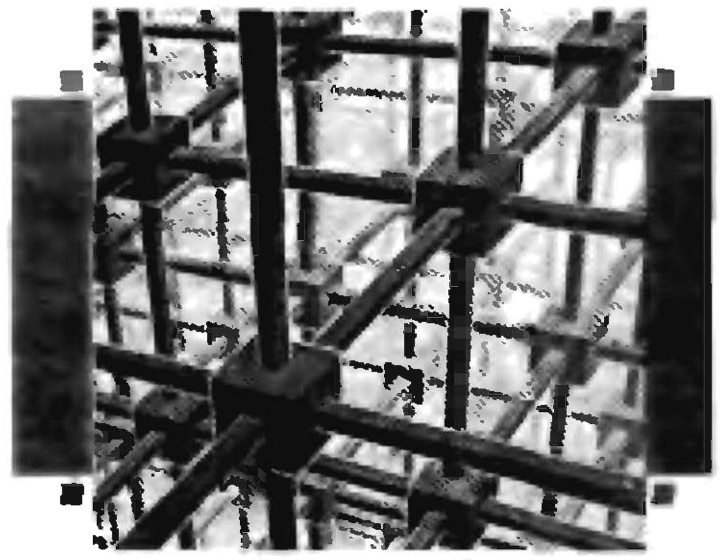
Упражнения

1. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.
2. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?
3. Во сколько раз площадь поверхности Земли больше площади поверхности Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

4. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.
5. Шар с центром в точке O касается плоскости α в точке A. Точка B принадлежит плоскости α, и $OB = 26$ см; $AB = 24$ см. Найдите площадь поверхности шара.
6. Площадь поверхности шара равна 225π м^2. Найдите его объем.
○ 7. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.
○ 8. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?
○ 9. Объемы двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их площади поверхностей?
10. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?
11. Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.
12. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.
13. Докажите, что если около шара описан конус, у которого высота вдвое больше диаметра шара, то объем и площадь поверхности конуса вдвое больше объема и площади поверхности шара соответственно.
14. Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.
15. В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм^2 и 4π м^2, а расстояние между ними 9 дм. Найдите площадь поверхности шара.
*16. Найдите площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара.
*17. Найдите площадь поверхности шарового пояса, если радиусы его оснований R_1 и R_2, а радиус шара R. Рассмотрите два случая.
*18. Шар радиуса R пересечен двумя параллельными плоскостями, которые делят перпендикулярный им диаметр шара в отношении $1:2:3$. Определите площадь поверхности шара, заключенной между секущими плоскостями.
*19. В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и три его грани, исходящие из одной вершины, продолжены до пересечения со сферой. Вычислите площадь части поверхности сферы, заключенной внутри образовавшегося трехгранного угла.
*20. Сфера радиуса R проходит через центр заданной сферы радиуса r. Докажите, что площадь шапочки, вырезанной из заданной сферы сферой радиуса R, не зависит от R.

Глава VII

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ



§ 50. Прямоугольная система координат в пространстве

В курсе планиметрии мы познакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Напомним, что **координатной прямой** называется такая прямая, на которой выбраны точка O, называемая началом координат, и единичный вектор $\overrightarrow{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой. **Прямоугольной системой координат на плоскости** называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Оно обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются, соответственно, осью абсцисс и осью ординат (рис. 237).

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое координатой этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел (x, y), называемых координатами точки на плоскости относительно данной системы координат.

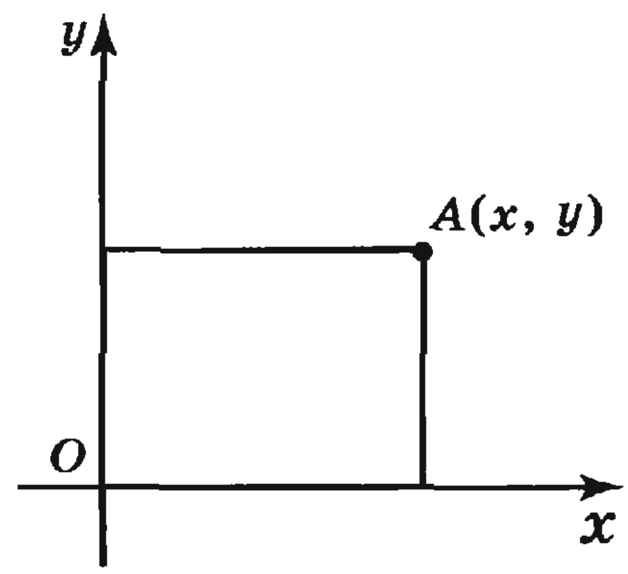


Рис. 237

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также **декартовой системой координат**, а сами координаты — **декартовыми координатами**. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и наоборот, алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом сведении, называется **методом координат**.

О п р е д е л е н и е. **Прямоугольной системой координат в пространстве** называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.

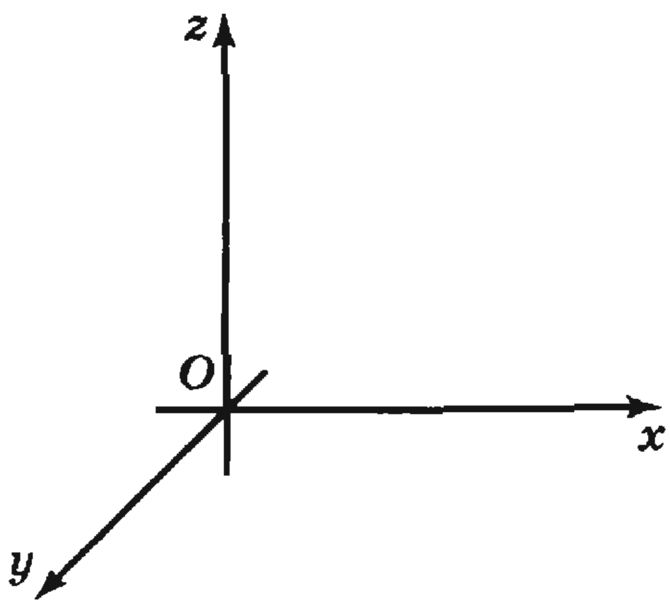


Рис. 238

Определение. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются, соответственно, **осью абсцисс, осью ординат** и **осью аппликат** (рис. 238). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

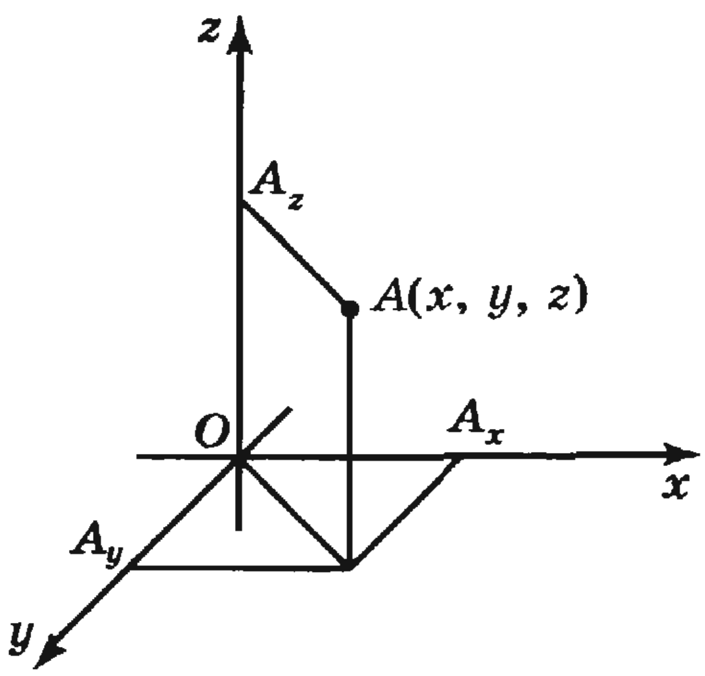


Рис. 239

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x (рис. 239). Координата этой точки на оси Ox называется **абсциссой** точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются, соответственно, **ординатой** и **аппликатой** точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел (x, y, z) называется координатами точки A в пространстве.

Исторические сведения

Р. Декарт — один из выдающихся ученых XVII века. Поражает широта его интересов. Ученым получены серьезные научные результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени, она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал «главные правила метода», а именно:

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII—XIX вв. на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Упражнения

1. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве изобразите точки с координатами: (1, 2, 3), (2, −1, 1), (−1, 3, 2).

○ **2.** Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1, 3, 4)$ и $B(5, -6, 2)$ на: а) плоскость Oxy; б) плоскость Oyz; в) ось Ox; г) ось Oz.

○ **3.** Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

○ **4.** На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

○ **5.** На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, 3)$ от координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

○ **6.** Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?

7. Какому условию удовлетворяют координаты точек пространства, одинаково удаленные от: а) двух координатных плоскостей Oxy, Oyz; б) всех трех координатных плоскостей?

8. Дан куб $A...D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B. Положительные лучи осей координат, соответственно, BA, BC и BB_1. Назовите координаты всех вершин куба.

9. Куб $A...D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр нижнего основания куба, ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты $(-2, 2, 0)$. Найдите координаты всех остальных вершин куба.

10. Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Найдите координаты остальных вершин октаэдра.

11. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами $(1, 2, 3)$ относительно координатных плоскостей?

12. Для данной системы координат в пространстве изобразите точки $A(1, 1, -1)$ и $B(1, -1, 1)$. Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Плоскость координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли отрезок AB через начало координат?

***13.** Плоскость проходит через точки с координатами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Принадлежит ли этой плоскости точка с координатами:

а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; б) $(1, 1, 0)$; в) $(0, 0, 0)$?

14. Пусть в пространстве заданы точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты середины отрезка A_1A_2.

15. Найдите координаты середины отрезка: а) AB, если $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 1, 1)$; б) CD, если $C(3, 4, 0)$ и $D(3, -1, 2)$.

16. Точка A имеет координаты $(x,\ y,\ z)$. Найдите координаты симметричной точки относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

***17.** Дан тетраэдр $ABCD$. Вершины A и B имеют, соответственно, координаты $(1,\ 0,\ 0)$ и $(-1,\ 0,\ 0)$. Основание тетраэдра ABC лежит в плоскости Oxy. Найдите координаты других вершин тетраэдра. Сколько случаев возможно?

§ 51. Расстояние между точками в пространстве

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1,\ y_1)$ и $A_2(x_2,\ y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

Теорема. Расстояние между точками $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ в пространстве выражается формулой

$$\boxed{A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.}$$

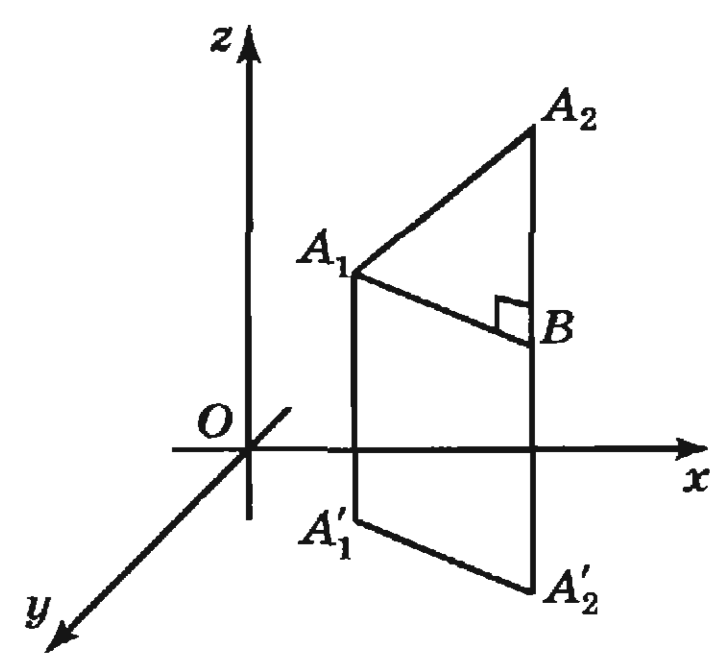


Рис. 240

Доказательство. Для точек $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ пространства рассмотрим прямую A_1A_2. Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz, и пусть A_1', A_2' — ортогональные проекции, соответственно, точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 240). Ясно, что эти проекции имеют координаты $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B — прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_1 - z_2|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad ■$$

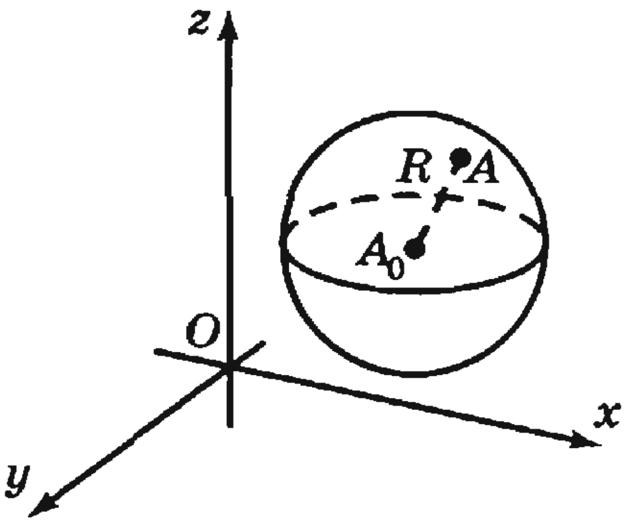


Рис. 241

Непосредственно из определения шара и сферы следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \leqslant R^2,}$$

а координаты точек соответствующей сферы — равенству

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.}$$

Последнее равенство называется **уравнением сферы** с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R (рис. 241).

Упражнения

○ **1.** Найдите расстояние между точками $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(-1, 1, 1)$, $B_1(3, 4, 0)$ и $B_2(3, -1, 2)$.

○ **2.** Какая из точек — $A(2, 1, 5)$ или $B(-2, 1, 6)$ — лежит ближе к началу координат?

3. Даны точки $M(1, -2, -3)$, $N(-2, 3, 1)$ и $K(3, 1, -2)$. Найдите периметр треугольника MNK.

4. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$.

○ **5.** Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:

а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$;

б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=11$.

6. Напишите уравнение сферы:

а) с центром в точке $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1;

б) с центром в точке $C(1, -2, 3)$ и радиусом 4.

7. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1, 2, -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

8. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(3, -2, 1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

9. Найдите уравнения сфер радиуса R, касающихся трех координатных плоскостей.

10. Докажите, что уравнение $x^2-4x+y^2+z^2=0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

11. Точка $A(0, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ принадлежит сфере с центром $O(3, 0, 0)$. Напишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли этой сфере точки $M(5, 0, 2\sqrt{3})$ и $K(4, -1, 0)$?

12. Как расположена точка $A(5, 1, 2)$ относительно сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0?$$

13. Как расположены относительно друг друга сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1,\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1?$$

14. Напишите уравнение окружности, лежащей в плоскости Oxy и являющейся пересечением сферы $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$ с этой плоскостью.

15. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$?

***16.** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 4D$, задает сферу. Найдите координаты центра и радиус сферы. Какая фигура получится, если $A^2 + B^2 + C^2 = 4D$?

§ 52. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора.**

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами** (рис. 242).

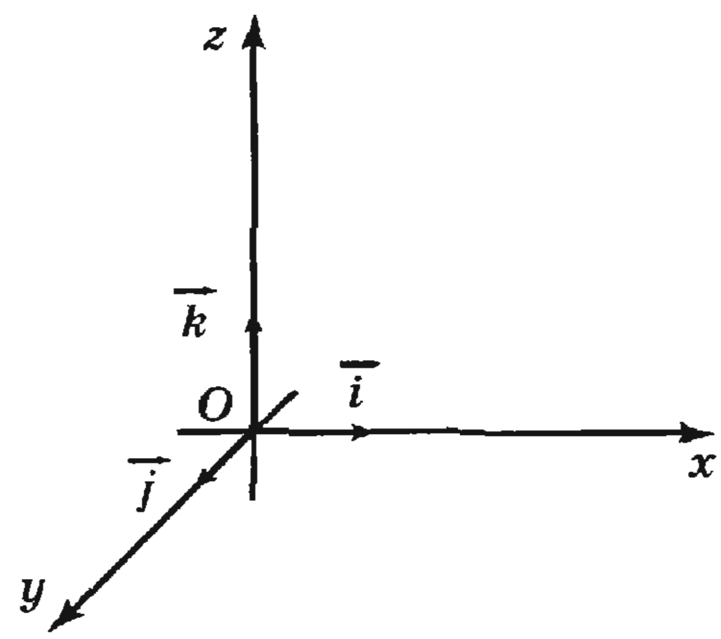


Рис. 242

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ (рис. 243). Точка A имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$, и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ■

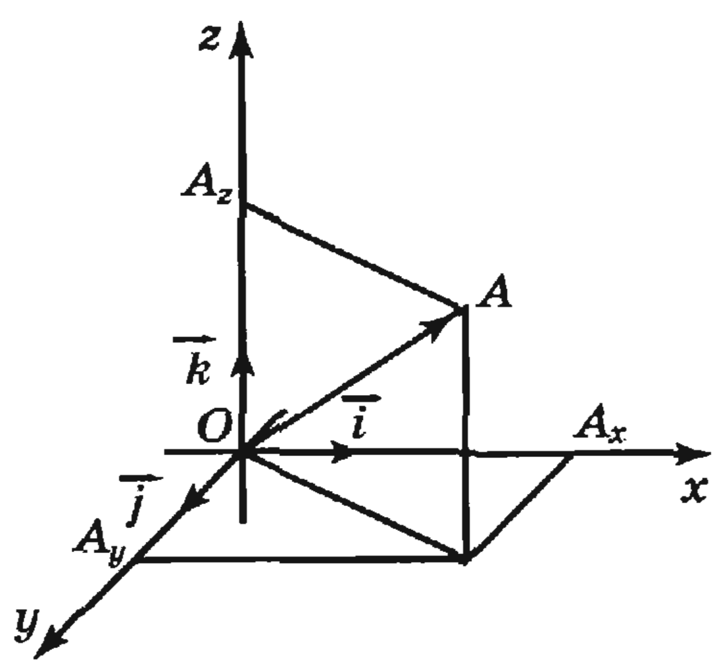


Рис. 243

Теорема. Сумма $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ имеет координаты $(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_2 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} + (z_1+z_2)\vec{k},$$

и, следовательно, тройка чисел $(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1+\vec{a}_2$. ■

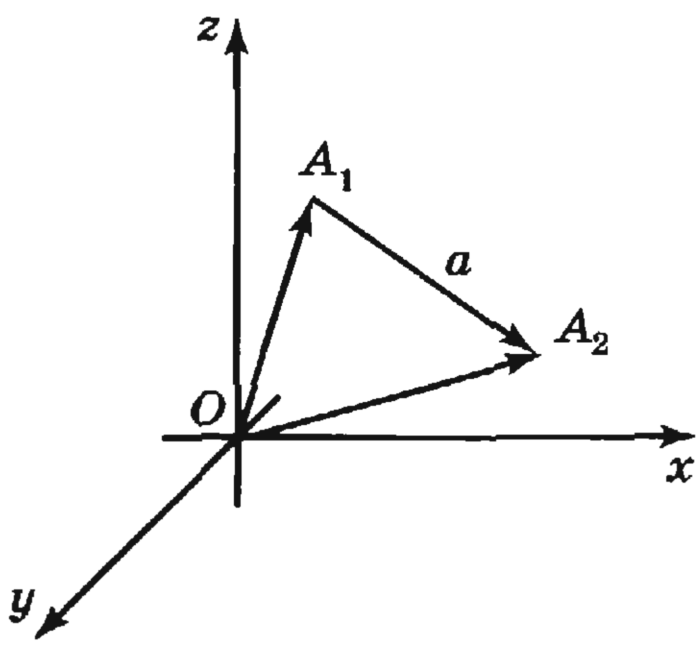


Рис. 244

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1-\vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ имеет координаты $(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и концом — точку $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ (рис. 244). Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

Длина вектора $\vec{a}(x,\ y,\ z)$ выражается через координаты по формуле

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек $A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то его длина выражается формулой

$$\boxed{|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

Упражнения

1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}=-2\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k}$; б) $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}$; в) $\vec{c}=-3\vec{j}+2\vec{k}$; г) $\vec{d}=-5\vec{i}+5\vec{k}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A\ (2,\ -6,\ 9)$, $B\ (-5,\ 3,\ -7)$; б) $A\ (1,\ 3,\ -8)$, $B(6,\ -5,\ -10)$; в) $A(-3,\ 1,\ -20)$, $B(5,\ 1,\ -1)$.

○ **3.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b, c). Найдите координаты $\overrightarrow{BA}$.

○ **4.** Векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны. Как связаны между собой их координаты?

5. В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина O — начало координат, ребра OA, OC, OO_1 лежат на осях координат Ox, Oy и Oz, соответственно, и $OA = 2$, $OC = 3$, $OO_1 = 4$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$.

6. Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0, 2)$, $\vec{b}(0, 3, -4)$.

7. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2, 8)$ и $\vec{b}(2, -4, 3)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a}+5\vec{b}$.

8. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4, –3, 0) и точка M — (1, –3, –7).

9. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy; б) параллелен координатной прямой Ox?

10. Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке A(1, 2, 3) и: а) перпендикулярного плоскости Oxy; б) параллельного прямой Ox.

11. Найдите длину вектора: а) $\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$; б) $8\vec{i}+\vec{k}$; в) $-\vec{j}+2\vec{k}$.

12. Длина вектора равна 3. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.

13. Найдите длины векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(1, 0, 2)$, $\vec{b}(0, 3, -4)$.

§ 53. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами и скалярное произведение векторов в пространстве определяются аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. А именно угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю. В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

Определение. **Скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^{\,2}$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

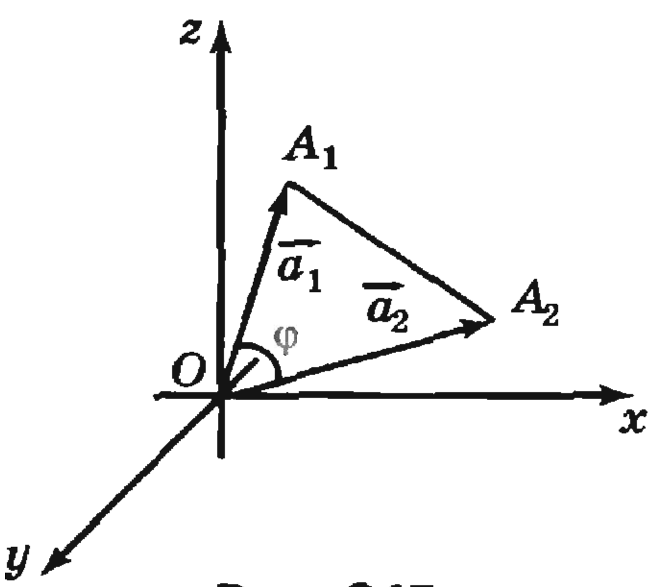


Рис. 245

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 245). По теореме косинусов, имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos \varphi$$

и, следовательно, равенство

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^{\,2} + \vec{a}_2^{\,2} - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 .$$

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$
$$\vec{a}_2^{\,2} = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные **свойствам произведения чисел:**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

Упражнения

○ **1.** Дан куб $A...D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

○ **2.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(2, -1, 0)$.

3. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

4. Используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1(2, 3, -1)$ и $\vec{a}_2(1, -2, 4)$; б) $\vec{a}_1(1, 2, -2)$ и $\vec{a}_2(1, 0, -1)$.

5. При каком значении z векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны?

6. Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x, y, z)$ имеют место равенства $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k}$.

7. Докажите, что, каковы бы ни были векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

8. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

9. Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

10. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2, -1, 0)$, $\vec{b}(4, 3, 1)$?

11. Докажите, что в треугольнике ABC, где $A(2, 1, 3)$, $B(1, 1, 4)$ и $C(0, 1, 3)$, угол B прямой.

*12. Докажите, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

*13. Точка K — середина ребра AA_1 куба $A...D_1$. L — середина ребра AD, M — центр грани CC_1D_1D. Докажите, что $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{B_1L} = 0$.

Указание. Введите прямоугольную систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с вершиной A и ребра, выходящие из нее, лежали на координатных осях.

*14. Точки M, N, P — середины ребер AB, AD, DC правильного тетраэдра с ребром a. Найдите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC}$.

*15. Из точки O на прямую a опущен перпендикуляр OA. Докажите, что для произвольной точки B прямой a скалярное произведение $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ не зависит от положения точки B.

*16. Докажите, что единичный вектор, образующий с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ углы α, β, γ соответственно, имеет координаты $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

*17. Найдите углы, которые образует с координатными векторами вектор: а) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; б) $-3\vec{j} - \vec{k}$; в) $-5\vec{i}$; г) $(0, 3, 4)$.

*18. Найдите координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам с координатами $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$.

*19. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3, 4, 7)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(5, -1, 2)$ в положение $N(2, 1, 3)$.

§ 54. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a, b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. Плоскость в пространстве задается уравнением

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.

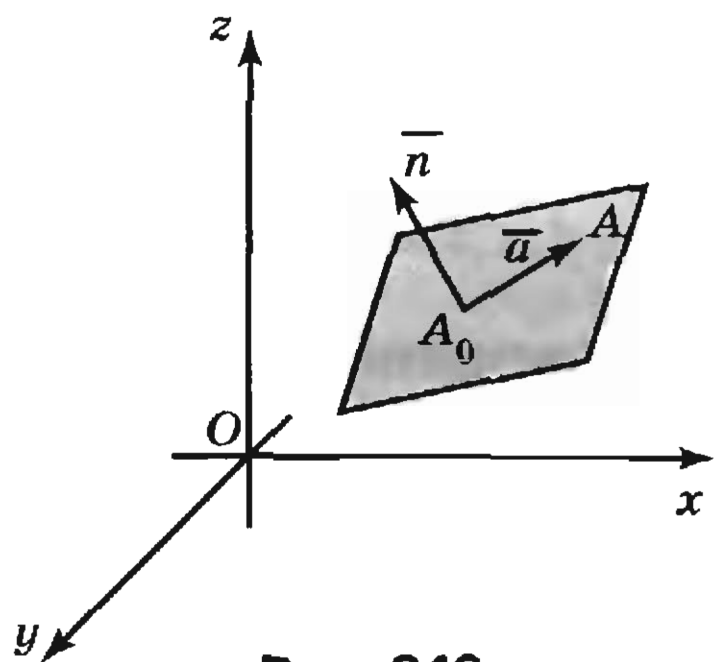


Рис. 246

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}(a, b, c)$ — перпендикулярный этой плоскости вектор (рис. 246). Тогда произвольная точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только том случае, когда вектор $\overline{A_0A}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overline{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

которое задает искомую плоскость. Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0. \blacksquare$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ коллинеарны, и, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad (*)$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2). Поэтому *такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа* t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$. При этом если $d_2 = td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Упражнения

○ **1.** Найдите уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

○ **2.** Даны точки $A(3, 2, 5)$, $B(-1, -2, 2)$, $C(7, 0, -9)$, $D\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 6\right)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

○ **3.** Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

○ **4.** Найдите координаты точек пересечения плоскости $ax + by + cz + d = 0$ с осями координат.

5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, 2, 0)$, с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1, 1)$.

6. Точка $H(-2, 4, -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$; б) $M(3, -1, 2)$, $N(4, 1, -1)$ и $K(2, 0, 1)$.

8. Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку $M(1, -2, 4)$ и параллельна координатной плоскости Oxz; б) проходит через точку $M(0, 2, 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ и параллельна оси аппликат.

9. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:
а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, -1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.

11. Приведите примеры уравнений взаимно перпендикулярных плоскостей.

12. Перпендикулярны ли плоскости:
а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;
б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

13. Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями:
а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

14. Докажите, что плоскости $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$ не имеют ни одной общей точки.

***15.** Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

***16.** Вычислите расстояние от начала координат до плоскости:
а) $2x - 2y + z - 6 = 0$;
б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

***17.** Принадлежат ли одной плоскости точки $A(1, 0, -2)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(2, -1, 1)$?

***18.** Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, пересечена плоскостью. Найдите координаты центра и радиус окружности сечения, если плоскость задана уравнением: а) $z = 0$; б) $y = 1$; в) $x + y + z = 2$.

***19.** Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке с координатами: а) $(0, 3, 0)$; б) $(2, -2, 1)$.

***20.** Докажите, что уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в точке $A(m, p, q)$, имеет вид $mx + py + qz = R^2$.

§ 55*. Уравнения прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}(a, b, c)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

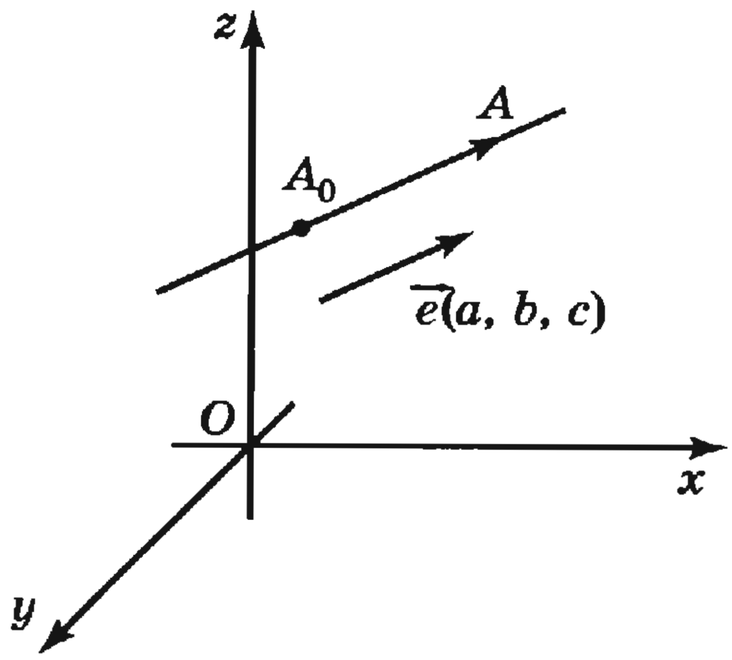


Рис. 247

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x, y, z)$, чтобы она принадлежала прямой a, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}\,(a, b, c)$ (рис. 247).

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}\,(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{e}\,(a, b, c)$, и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Они называются **параметрическими уравнениями прямой в пространстве.**

В случае если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}\,(a, b, c)$ в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}(ka, kb, kc)$, то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = kat + x_0, \\ y = kbt + y_0, \\ z = kct + z_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами (x, y, z), удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением, и найдем его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2, $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (aT, bT, cT). Разделив вектор перемещения на время T, получим, что вектор скорости имеет координаты (a, b, c). Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$\boxed{|\vec{e}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

Упражнения

1. Какими уравнениями задаются координатные прямые?
2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -2, 3)$ с направляющим вектором $\vec{e}\,(2, 3, -1)$.
3. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2, 1, -3)$, $A_2(5, 4, 6)$.
4. Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных: а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz?
5. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, 2, -3)$ и перпендикулярной плоскости $x + y + z + 1 = 0$.
6. В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x=a_1t+x_1, \\ y=b_1t+y_1, \\ z=c_1t+z_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a_2t+x_2, \\ y=b_2t+y_2, \\ z=c_2t+z_2 \end{cases}$$

определяют перепендикулярные прямые?

7. Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x-1=5t, \\ y-1=4t, \\ z-1=7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

8. Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 1, 2)$.

9. Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x-1=2t, \\ y-1=-t, \\ z-1=3t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3=t, \\ y=8t, \\ z-4=2t. \end{cases}$$

10. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}(1, 2, 3)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты $(-1, 1, -2)$. Какие координаты она будет иметь в момент времени $t = 4$?

11. Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t+2, \\ z=3t-3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

12. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 2$ она имела координаты $(3, 4, 0)$, а в момент времени $t = 6$ — координаты $(2, 1, 3)$. Какова скорость движения точки?

***13.** Прямая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=at+x_0, \\ y=bt+y_0, \\ z=ct+z_0. \end{cases}$$

Напишите параметрические уравнения прямых, симметричных данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

***14.** Две пересекающиеся плоскости заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Докажите, что вектор с координатами $(b_1c_2 - b_2c_1,\ a_2c_1 - a_1c_2,\ a_1b_2 - a_2b_1)$ перпендикулярен обеим этим плоскостям.

***15.** Напишите параметрические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x - y - z - 3 = 0$.

***16.** Докажите, что расстояние от точки $A(x, y, z)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, равно

$$\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

17. Найдите расстояние от точки $A(1, 2, -7)$ до плоскости, заданной уравнением $12x + 4y + 3z - 4 = 0$.

***18.** *Плоскость пересекает оси координат в точках* $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$. Найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

***19.** Нарисуйте кривую в пространстве, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = cz + d \end{cases} \quad \text{(винтовая линия).}$$

§ 56. Аналитическое задание пространственных фигур

Ранее было показано, что сфера с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера, задается неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2.$$

Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнем с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением (*), то неравенства $ax + by + cz + d \geqslant 0$ и $ax + by + cz + d \leqslant 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A\ (x, y, z)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

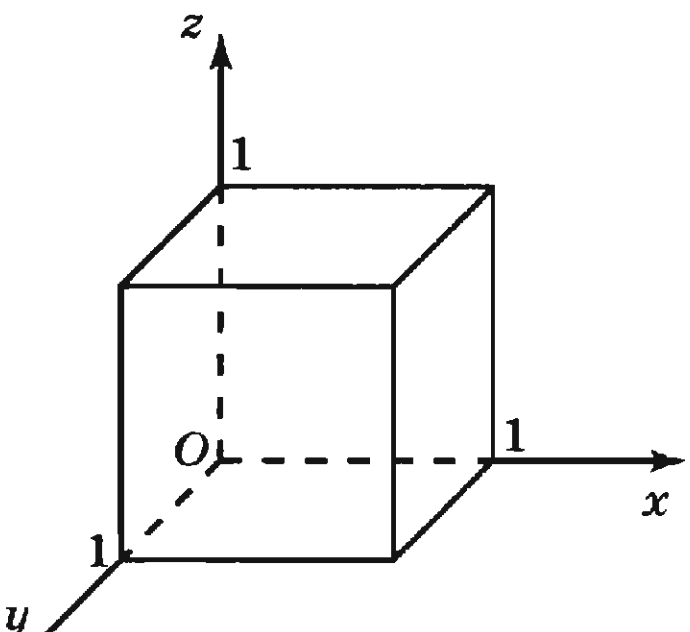


Рис. 248

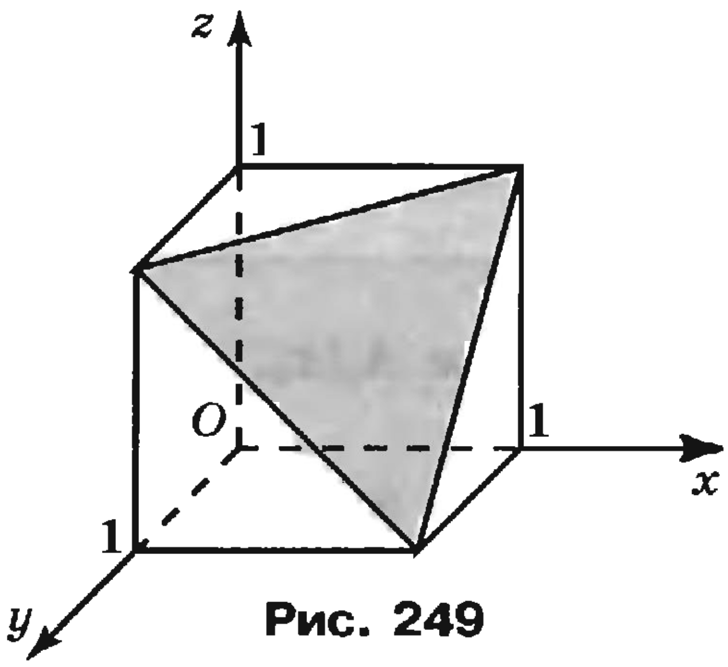


Рис. 249

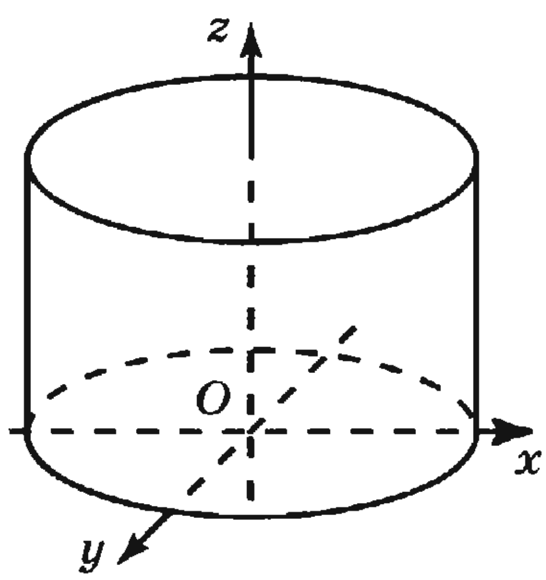


Рис. 250

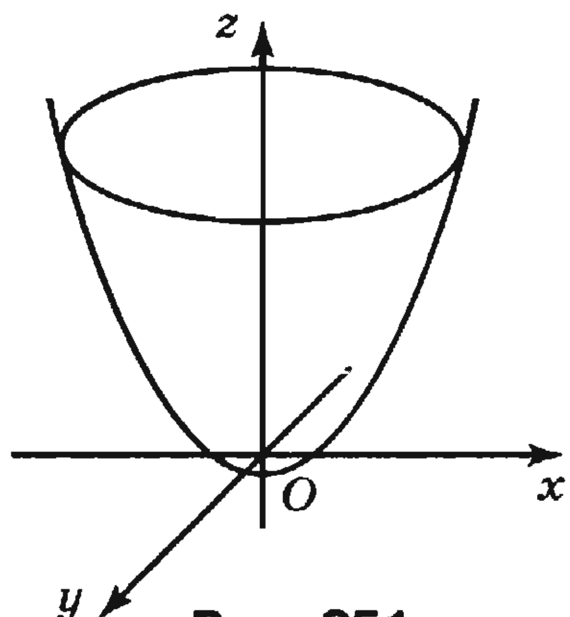


Рис. 251

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств, и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ z \leqslant 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 248).

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y + z \leqslant 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 249).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, цилиндр с радиусом основания R и высотой h можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases} \quad \text{(рис. 250).}$$

Параболоид вращения можно задать уравнением

$$z = a(x^2 + y^2)$$

(рис. 251). В сечении этого параболоида плоскостью $y = c$ получается парабола $z = a(x^2 + c^2)$, а в сечениях плоскостями $z = c$ получаются окружности $x^2 + y^2 = \dfrac{c}{a}$.

Упражнения

1. Два полупространства задаются неравенствами $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0$.
Как будет задаваться пересечение этих полупространств?
2. Определите, какому полупространству — $5x + 3y - z - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leqslant 0$ — принадлежит точка: а) $A(1, 0, 0)$; б) $B(0, 1, 0)$; в) $C(0, 0, 1)$.
3. Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4? \end{cases}$$

4. Какая фигура в пространстве задается неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant y \leqslant h? \end{cases}$$

Изобразите ее.
5. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 8, \\ 0 \leqslant z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ x + y + z - 6 \geqslant 0. \end{cases}$

6. Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты (1, 1, −1), (1, −1, 1), (−1, 1, 1), (−1, −1, −1).
7. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением: а) $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид); б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (коническая поверхность).
8. Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0, 0, h)$ и основание которого — круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.
9. Найдите уравнение эллипсоида вращения — поверхности, полученной вращением эллипса, задаваемого уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вокруг оси: а) Ox; б) Oy.

★10. Найдите уравнение гиперболоида вращения — поверхности, полученной вращением гиперболы, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, вокруг оси: а) Ox; б) Oy.

★11. Докажите, что сечениями параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ плоскостями $z = ax + by + c$ являются эллипсы.

★12. Какая фигура в пространстве задается неравенством

$$|x|+|y|+|z| \leqslant a?$$

★13. Изобразите многогранники, задаваемые неравенствами:

а) $|x|+|y|+|z| \leqslant 4{,}5, \quad |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3, |z| \leqslant 3;$

б) $|x|+|y|+|z| \leqslant 7, \quad |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3, |z| \leqslant 3;$

в) $|x|+|y|+|z| \leqslant 6, \quad |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3, |z| \leqslant 3.$

★14. Изобразите многогранник, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x+y|+|z| \leqslant 1$, $|x-y|-|z| \leqslant 1$ или неравенствам $|x - y|+|z| \leqslant 1$, $|x+y|-|z| \leqslant 1$.

★15. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm 1, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm\varphi, 0)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, являются вершинами икосаэдра.

★16. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm\Phi, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, 0, \pm\Phi)$, $(\pm\Phi, \pm\varphi, 0)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, являются вершинами додекаэдра.

★17. При каком значении a неравенства

$$a|x| + |y| \leqslant 1,\ a|y| + |z| \leqslant 1,\ a|z| + |x| \leqslant 1$$

задают додекаэдр?

★18. При каком значении a неравенства

$$(1-a)|x| + |y| \leqslant 1,\ (1-a)|y| + |z| \leqslant 1,$$
$$(1-a)|z| + |x| \leqslant 1,\ |x| + |y| + |z| \leqslant (1+a)$$

задают икосаэдр?

§ 57*. Многогранники в задачах оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые **задачи оптимизации**. Среди них:

— транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

— задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

— задача составления оптимального плана производства;

— задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья, (в т) на складе		Потребность в сырье, (в т) на заводе			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим **математическую модель.** Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти, соответственно, $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Количество сырья (в т), перевезенное на завод			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20 - x - y - z$
$С_2$	$8 - x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ 8-x \geqslant 0,\ 10-y \geqslant 0,\ 12-z \geqslant 0, \\ 20-x-y-z \geqslant 0, \\ x+y+z-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

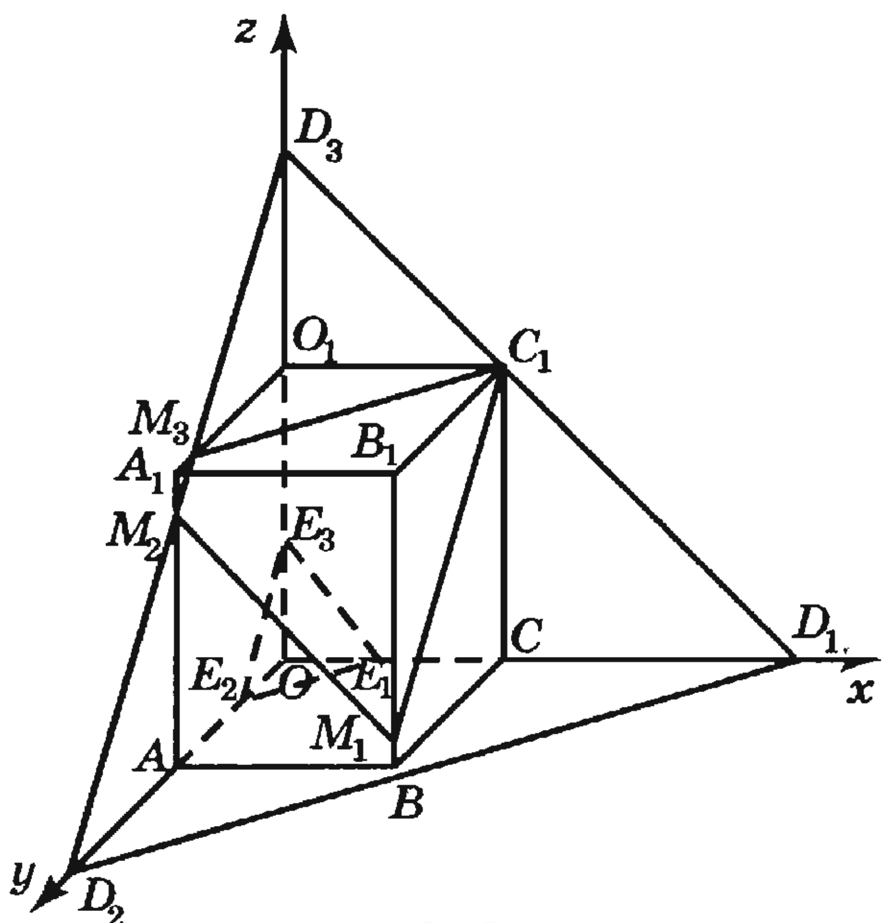


Рис. 252

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строками данной системы. На рисунке 252 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20-x-y-z=0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x+y+z-5=0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нем треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8,\ 10,\ 2)$, $M_2(0,\ 10,\ 10)$, $M_3(0,\ 8,\ 12)$, $C_1(8,\ 0,\ 12)$, $C(8,\ 0,\ 0)$, $B(8,\ 10,\ 0)$, $A(0,\ 10,\ 0)$, $E_1(5,\ 0,\ 0)$, $E_2(0,\ 5,\ 0)$, $E_3(0,\ 0,\ 5)$, $O_1(0,\ 0,\ 12)$, выполняются все условия данной системы. Назовем его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x+6y+4z+10(20-x-y-z)+3(8-x)+7(10-y)+$$
$$+3(12-z)+7(x+y+z-5)=295-x-4y-2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F=295-x-4y-2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f=x+4y+2z$. Тогда $F_{\min}=295-f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax+by+cz$ $(c>0)$ принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax+by+cz$. Тогда уравнение $ax+by+cz=d$ задает плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости, — значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 — в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 253), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

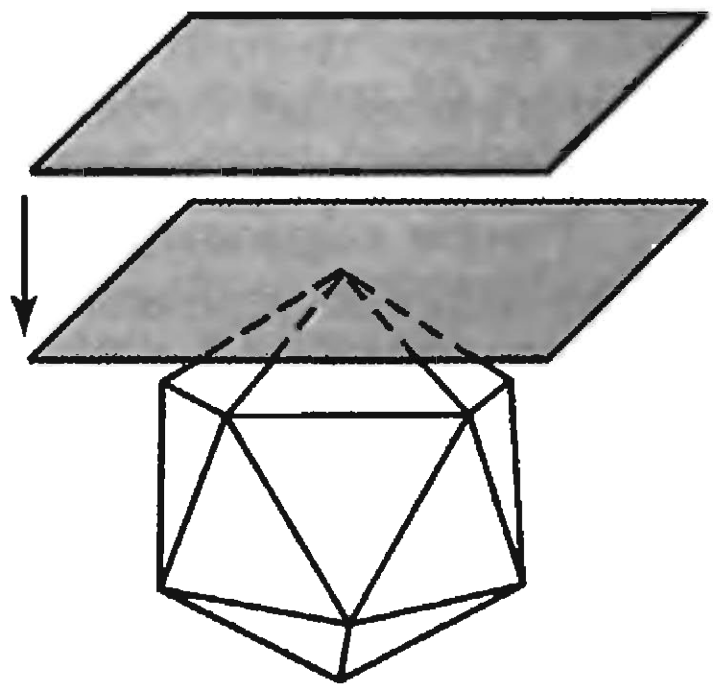


Рис. 253

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M_1) = 52$, $f(M_2) = 60$, $f(M_3) = 56$, $f(C_1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E_1) = 5$, $f(E_2) = 20$, $f(E_3) = 10$, $f(O_1) = 24$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0, 10, 10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Количество сырья (в т), перевезенное на завод			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	0	10	10	0
$С_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем, и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики — **многомерной геометрии.**

Упражнения

1. Найдите фигуру, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ x \leqslant 8,\ y \leqslant 8,\ z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12. \end{cases}$$

○ 2. Какая фигура является графиком линейной функции
$$z = ax + by + c?$$

○ 3. Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

○ 4. Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

○ 5. Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если c: а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

6. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 2 + 2x + y \geqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

* 7. Докажите, что коэффициенты a и b в уравнении линейной функции $z = ax + by + c$ являются тангенсами углов между графиком этой функции и осями Ox и Oy соответственно.

* 8. Найдите угол между графиком линейной функции $z = ax + by + c$ и плоскостью Oxy.

9. На трех складах хранится сырье одинакового вида в количествах, соответственно, 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

10. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

11. Установка собирается из трех различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

§ 58*. Полярные координаты на плоскости

Наряду с декартовыми координатами на плоскости и в пространстве, во многих случаях более удобными оказываются так называемые полярные координаты на плоскости и сферические координаты в пространстве.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных или сферических координат. Последние будут рассмотрены в следующем пункте.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат O и направляющим вектором $\overrightarrow{OE}$ (рис. 254). Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью. Полярными координатами** точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r — расстояние от точки A до точки O, φ — угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая φ — **полярным углом**. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

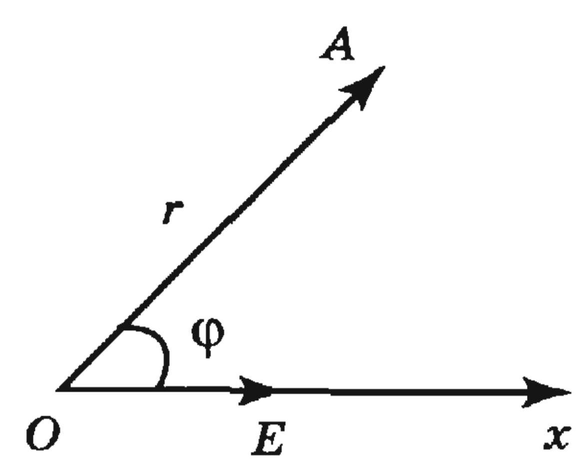


Рис. 254

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости

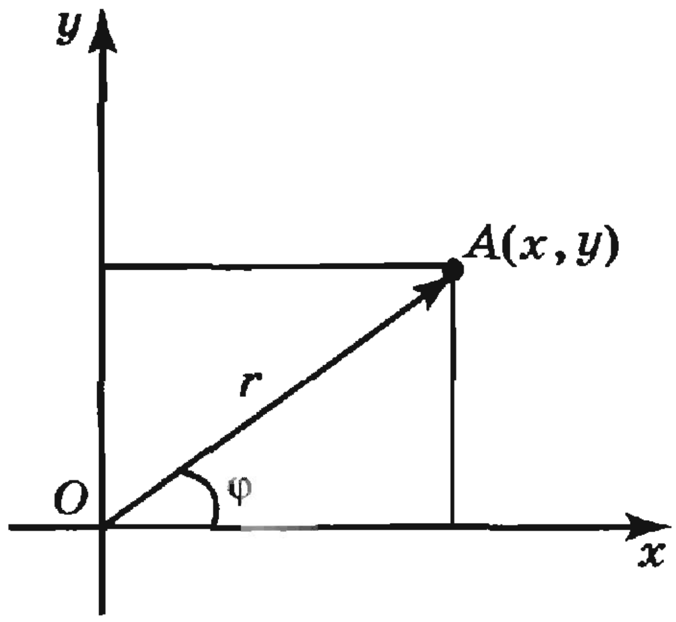


Рис. 255

с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить *полярные координаты* (r, φ) (рис. 255). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

И наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными *для задания кривых на плоскости*, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

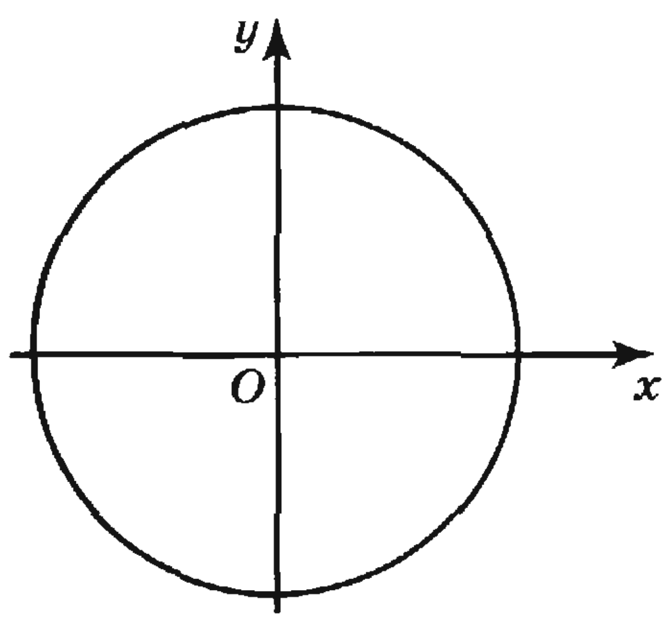


Рис. 256

1. **Окружность** радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r = R$ (рис. 256).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом если угол φ изменяется от 0 до $+\infty$, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ изменяется от 0 до $-\infty$, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. **Спираль Архимеда** — кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a — некоторое фиксированное число (рис. 257).

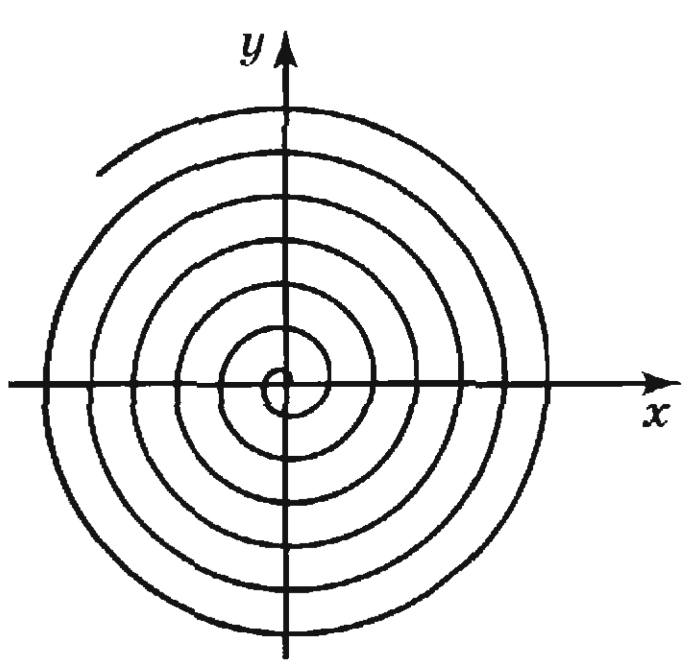


Рис. 257

Предположим, что $a > 0$, и построим эту кривую. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при изменении φ от 0 до $+\infty$. В этом случае радиус r будет возрастать и изменяться от 0 до $+\infty$. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два раза больше.

При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь ученого, ее открывшего и изучившего.

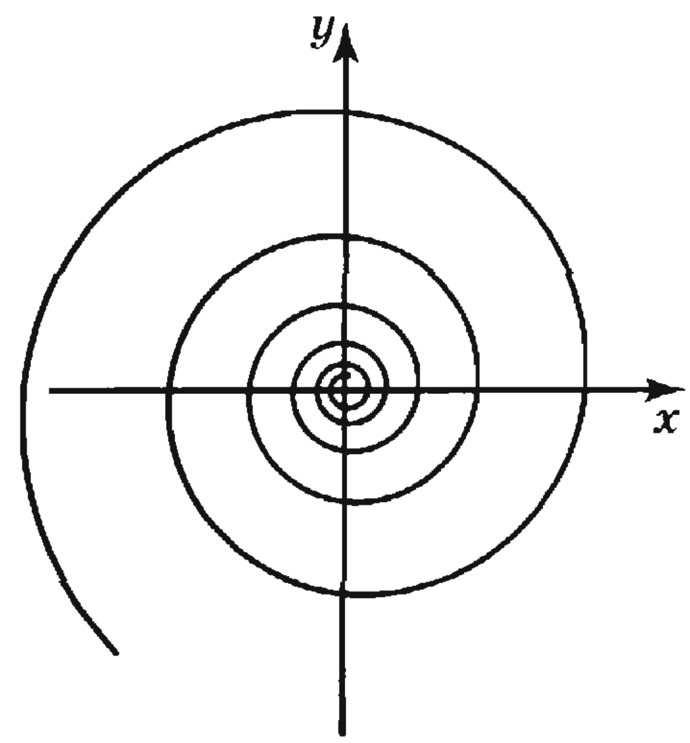


Рис. 258

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

3. **Логарифмическая спираль** задается уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где a — некоторое фиксированное положительное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 258).

В отличие от спирали Архимеда, логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если $a > 1$, то при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, то при увеличении угла радиус уменьшается.

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток логарифмической спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Однако если вместо луны они ориентируются на близко

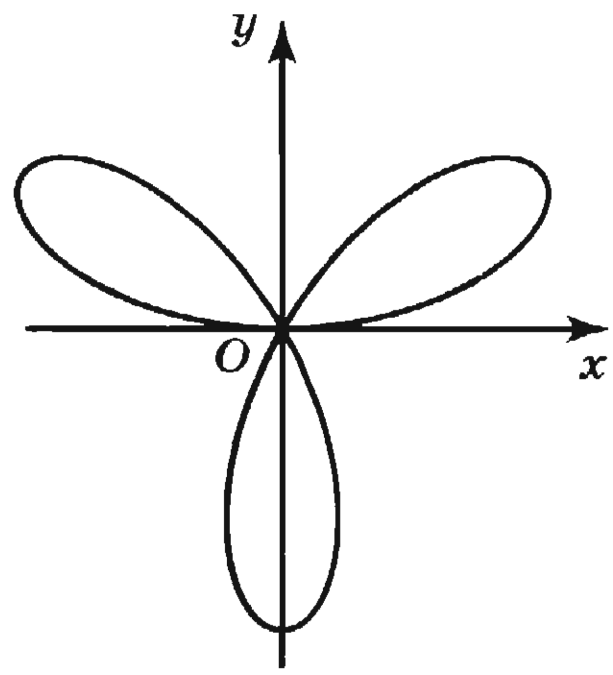


Рис. 259

расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полета и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горных козлов) закручиваются по логарифмической спирали. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает ее нити также по логарифмической спирали. По этой спирали закручены и многие галактики, в частности Галактика нашей Солнечной системы.

4. **Трилистник** — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$ (рис. 259). Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geqslant 0$, решая которое находим допустимые значения углов φ:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}; \ \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi; \ \frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}.$$

В силу периодичности функции $\sin 3\varphi$ (ее период равен $\frac{2\pi}{3}$), достаточно построить искомый график для углов φ в промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$, а в остальных двух промежутках использовать периодичность.

Итак, пусть $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$. Если угол φ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{6}$, $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы, и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от нуля до $\frac{\pi}{3}$ точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется от $\frac{2\pi}{3}$ до π и от $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Упражнения

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1, 0)$, $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: $A\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:

$$A(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ B(-10,\ 0),\ C(1,\ -\sqrt{3}),\ D(-\sqrt{3},\ 1).$$

4. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

5. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых:
а) полярный радиус r постоянен и равен r_0;
б) полярный угол φ постоянен и равен φ_0.

6. Центром правильного шестиугольника является начало координат. Одна из его вершин имеет полярные координаты (1, 0). Найдите полярные координаты остальных вершин.

7. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.

8. Нарисуйте золотую спираль, заданную уравнением $r = a^{\varphi}$, выбрав a так, что $a^{\pi} = 1{,}1$. Предварительно вычислите значения радиуса-вектора для углов $\varphi = \frac{k\pi}{6}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

9. Нарисуйте пятилепестковую розу — кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin 5\varphi.$$

10. Нарисуйте кардиоиду, кривую, задаваемую уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

***11.** Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy, с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задается уравнением

$$r = \frac{a}{1-\cos\varphi}.$$

Почему вершину параболы нужно выкалывать?

***12.** Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1-e\cos\varphi}$$

задает эллипс, если $0 < e < 1$, и гиперболу, если $e > 1$.

***13.** Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

§ 59*. Сферические координаты в пространстве

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолета, корабля и т. д., в астрономии при определении

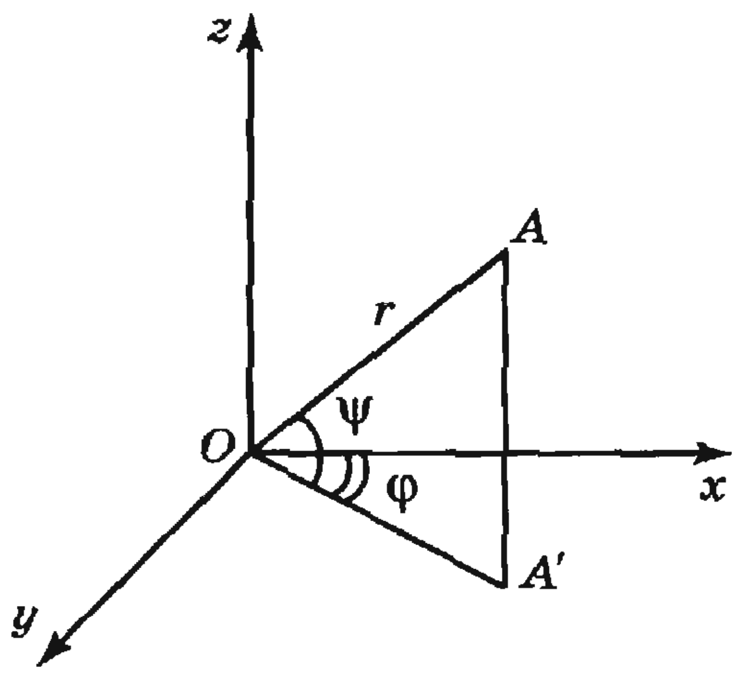


Рис. 260

положения звезд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

Для определения сферических координат рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку A (рис. 260). Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A', а длину вектора OA — через r. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости Oxy обозначим ψ, причем будем считать его изменяющимся от -90° до $+90^\circ$. Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью Ox обозначим φ. Тройка (r, ψ, φ) называется **сферическими координатами точки** A в пространстве.

Декартовы координаты (x, y, z) точки в пространстве выражаются через ее сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

и наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz выбирается проходящей через северный полюс, а ось Ox так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат O, то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами (ψ, φ). При указании этих координат на поверхности Земли для положительных ψ от нуля до 90° добавляют слова «северной широты», а для отрицательных ψ от нуля до -90° берут абсолютную величину ψ и добавляют слова «южной широты». Аналогично, для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова «восточной долготы», а для отрицательных φ от нуля до -180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова «западной долготы». Например, город Москва имеет следующие координаты: $55^\circ 45'$ северной широты и $37^\circ 35'$ восточной долготы.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется **параллелью**. Точки, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую **меридианом**.

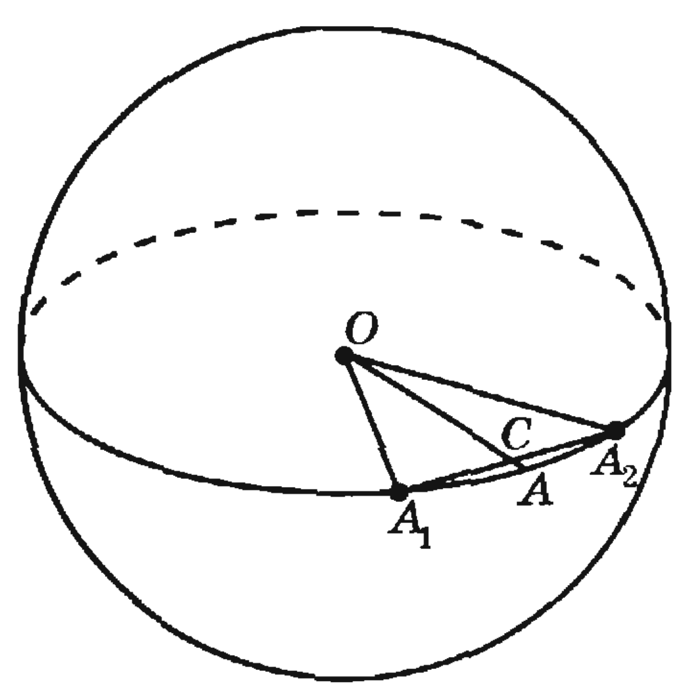


Рис. 261

Выясним, какой путь, соединяющий две точки на сфере, является кратчайшим. Если бы такой путь мы искали в пространстве, то им, очевидно, был бы отрезок, соединяющий эти точки. Однако отрезок не лежит на сфере. Поэтому его требуется заменить таким путем на сфере, который по возможности меньше отличается от прямолинейного отрезка. Пусть C — какая-нибудь точка на отрезке A_1A_2 (рис. 261). Наименее удаленной от нее точкой на сфере является точка A пересечения прямой OC со сферой. Все такие прямые лежат в плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и O. Пересечением этой плоскости со сферой является окружность с центром в точке O. Такие окружности на сфере называются большими окружностями. Оказывается, что искомым кратчайшим путем, соединяющим точки A_1 и A_2 на сфере, является дуга большой окружности, соединяющая эти точки. Такой путь называют **ортодромией**, что в переводе с греческого означает «прямой бег».

В частности, если точки A_1, A_2 расположены на противоположных меридианах, то кратчайшим путем на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через северный или южный полюсы, в зависимости от того, в каких полушариях, северном или южном, лежат эти точки. Например, для точек $A_1(R, 45°, 0°)$, $A_2(R, 45°, 180°)$ угол ψ равен 45°. Кратчайший путь, соединяющий эти точки, проходит через северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиуса $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\frac{\pi R\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути.

Хотя ортодромия и является кратчайшим путем на поверхности Земли, тем не менее самолеты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом движения является кривая, образующая равные углы с разными меридианами. Эта кривая называется **локсодромия**, что в переводе с греческого означает «косой бег». Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоянный курс, используется компас, указывающий направления меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием ЭВМ.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении друг от друга начала и конца пути. В этом случае весь путь разбивается на меньшие участки, движение по которым осуществляется с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс меняется.

Исторические сведения

Представления людей о форме и размерах Земли складывались постепенно, на протяжении многих веков. Первые мысли о шарообразности Земли возникли в VI—V вв. до н. э. Они появились в результате астрономических наблюдений. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень Земли на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, встав между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну, следовательно, Земля круглая, или шарообразная. Мысль о шарообразности Земли подтверждали наблюдения мореплавателей за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль двигается по дуге шаровой поверхности Земли и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблем и наблюдателем.

Заметим, что, когда говорят о шарообразности Земли, не имеют в виду реальную земную поверхность. Поверхность Земли неровная, на ней имеются высокие горы и глубокие ущелья, океанские впадины. Речь идет о некоторой идеальной поверхности, часть которой составляет поверхность Мирового океана. Там же, где нет океанов или морей, такую поверхность представляют мысленно и относительно нее вычисляют высоту рельефа местности. Именно эта высота и указывается на географических картах.

После того как была высказана гипотеза о шарообразности Земли, возник вопрос о нахождении ее размеров. Первый дошедший до нас способ нахождения размеров Земли был предложен и осуществлен ученым из Александрии Эратосфеном в III в. до н. э. Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в городе Сиене (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение солнца от зенита в Александрии составляет $\frac{1}{50}$ часть большой окружности, и, следовательно, длина окружности Земли в 50 раз больше расстояния от Александрии до Сиены. Измерив это расстояние с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. Она оказалась равна 250 тысячам стадий. Стадия не была точно определенной мерой длины. За стадию принималось расстояние, которое проходит человек за время, нужное для подъема Солнца над горизонтом. Учитывая среднюю скорость человека и то, что подъем Солнца над горизонтом происходит за 2 минуты, можно заключить, что стадия составляет примерно 160—185 м. Если за стадию принять 160 м, то получится точный результат 40 000 км. Однако ясно, что измерения Эратосфена не могли быть такими точными хотя бы потому, что Сиена расположена не строго на юг от Александрии и точность измерения расстояния шагами не очень велика.

Более точные измерения Земли, использующие астрономические наблюдения, были проведены только в XVII веке. Для этого на поверхности Земли выбирались два пункта, расположенные на одном меридиане. Наблюдая из них за Солнцем или звездами, например за Полярной звездой, определяли величину φ дуги этого меридиана. Измерив затем расстояние d между этими пунктами, находили длину всей окружности Земли по формуле $l = \frac{360^\circ}{\varphi} \cdot d$.

Измерение больших расстояний на поверхности Земли оказывается не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Как уже отмечалось, земная поверхность неровная. Одни ее точки расположены выше, другие ниже. На пути могут встретиться препятствия: горы, болота, реки и т. д. Преодолеть эти трудности измерения расстояний позволяет способ Фалеса Милетского (VI в. до н. э.). В начале XVII века его усовершенствовал голландский математик В. Снеллиус (1580—1626). Для нахождения расстояния между значительно удаленными друг от друга пунктами Снеллиус строил сеть треугольников с началом в одном и концом в другом, которую он назвал **триангуляцией**. Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины были видны соседние с ней вершины. Измерив расстояние между какими-нибудь соседними вершинами, и углы, образованные сторонами треугольников, с помощью тригонометрических формул можно найти расстояние между исходными пунктами.

Похожая задача возникает при нахождении расстояния между вершинами многогранника. А именно: по известным плоским углам многогранника и одному из ребер найти расстояние между заданными вершинами.

Для вычисления земного меридиана Снеллиус с помощью метода триангуляции измерил расстояние между городками Алькмааром и Берген-оп-Зоомом в Голландии и по нему вычислил длину земного меридиана. В пересчете на километры она оказалась равна 38 605 км. Довольно большая ошибка объясняется тем, что для измерения углов Снеллиус использовал недостаточно точные приборы. Через несколько лет французский ученый Пикар, используя метод Снеллиуса и гораздо более точные приборы, снова измерил длину меридиана. В пересчете на километры она оказалась равна 40 036 км.

После этого многие ученые в разных странах мира стали заниматься вычислением длин дуг меридианов. Оказалось, что длина дуг меридианов в 1° различна, в зависимости от места расположения этих дуг. Разница могла быть за счет погрешности вычислений, а также в случае, если поверхность Земли не является в точности шаровой поверхностью.

Используя физические соображения, основанные на учете вращения Земли, И. Ньютон высказал предположение, что Земля сжата у полюсов, как мандарин, и имеет форму эллипсоида вращения. С другой стороны, немецкий ученый И. Эйзеншмидт, основываясь на таблицах измерений дуг меридианов, утверждал, что Земля не только не сплюснута у полюсов, но, наоборот, вытянута, как лимон. Между учеными разгорелись споры по поводу этих двух точек зрения. Каждая из сторон приводила аргументы в пользу своей правоты.

Для того чтобы разобраться с этим вопросом, в 1735 году Парижская академия решила послать две экспедиции: одну на экватор — в Перу, другую на север — в Лапландию. Преодолев значительные трудности, жару и холод, экспедиции произвели измерения, убедительно доказавшие правоту Ньютона. Длина дуги меридиана в 1° в Лапландии составила 111,95 км, во Франции — 111,21 км, в Перу — 110,61 км. Сжатие поверхности Земли у полюсов составило около 20 км с каждой стороны.

Мы привели данные в километрах, однако в то время ни метра, ни километра еще не существовало. Все измерения проводились в других единицах, большое число которых и неточная определенность вносили существенную путаницу в вычисления. Для того чтобы унифицировать измерения, Национальное собрание Франции в 1791 году решило ввести единую меру длины, в качестве которой была принята одна десятимиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Она была названа **метром**, от греческого слова «метрос», что значит мера. Тогда же были учреждены две экспедиции для точного измерения этого меридиана. Экспедициями была построена сеть треугольников от Барселоны до Дюнкерка на северном берегу Франции. Шесть лет заняли измерения и вычисления, пришедшиеся как раз на годы французской революции. В результате работ был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве и называется архивным метром.

Анализ проведенных измерений длины дуги парижского меридиана позволил П. Лапласу (1749—1827) в начале XIX века сделать еще один важный вывод о форме Земли. Оказалось, что форма Земли не совпадает точно с эллипсоидом. Поверхность Земли имеет неровности. Конечно, речь идет не о неровностях рельефа, а о неровностях мыслимой поверхности Мирового океана. В одних местах эта поверхность имеет большую выпуклость — бугры, в других — она более плоская. Высота этих бугров, по сравнению с размерами Земли, очень небольшая и не превосходит 150 м. Их расположение на поверхности Земли хаотично и зависит от плотности Земли на соответствующих участках.

После открытия Лапласа стало ясно, что измерение только очень длинных дуг дает правильное значение длин меридианов. Россия обладала достаточными просторами для проведения таких измерений, и в начале XIX века они начались под руководством В. Я. Струве (1793—1864). Работа продолжалась в течение сорока лет. В результате была измерена дуга меридиана длиной в 25°20′ (около 2820 км). Погрешность на всем протяжении дуги не превысила 13 м, т. е. одной двухсоттысячной всей дуги.

В XX веке использование ЭВМ, искусственных спутников Земли дало возможность еще более точных измерений. Определяя с помощью радаров расстояния от станции наблюдения до спутников и обрабатывая их на компьютерах, находят траекторию движения спутника, а по ней уточняют и форму Земли.

Упражнения

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: (1, 45°, 120°), (2, –30°, –90°), (1, 90°, 60°).
2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(-1,\ 0,\ 1)$, $C(0,\ 0,\ 2)$.
3. Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$
4. Точка A имеет сферические координаты $(r,\ \psi,\ \varphi)$. Найдите сферические координаты точки, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.
5. Укажите на глобусе точки, имеющие координаты: а) 30° южной широты и 45° восточной долготы; б) 90° северной широты и 25° западной долготы.
6. Укажите приближенные координаты городов: а) Санкт-Петербург; б) Вашингтон; в) Токио.
7. Найдите по глобусу длину кратчайшего пути между Москвой и Вашингтоном.
8. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли примите равным 6000 км.

9. Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при ее продолжении в обе стороны?
10. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.
11. Какая фигура в пространстве задается неравенствами: а) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi$; б) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$; в) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant y$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$?
12. Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}, 0°, 45°)$, $B(2, 60°, 0°)$.
13. Докажите, что для дуг AB, BC, AC больших окружностей на сфере справедливо неравенство, аналогичное неравенству треугольника: $AC \leqslant AB + BC$. (Воспользуйтесь соотношением между плоскими углами трехгранного угла.)

§ 60*. Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур

Компьютерная программа «Математика» разработана в начале 90-х годов прошлого века и позволяет производить различные символьные операции, включающие операции дифференцирования, интегрирования и т. д. Ее важной составной частью является развитая компьютерная графика, позволяющая получать изображения многогранников, поверхностей и других пространственных фигур.

Рассмотрим вопрос об изображении правильных многогранников. В качестве первого примера возьмем додекаэдр. Для получения изображения додекаэдра, после того как вы вошли в программу, нужно набрать

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p]
```

После этого следует нажать клавиши SHIFT и ENTER. В результате на экране появится цветное изображение додекаэдра, заключенного в каркасный куб (рис. 262).

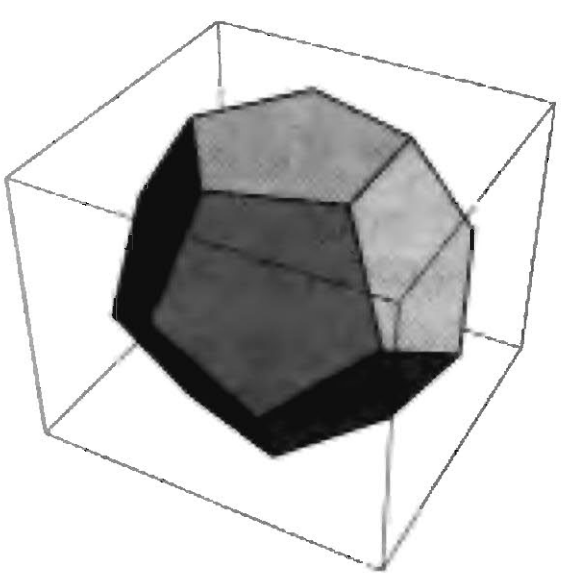


Рис. 262

Если вы хотите убрать куб, то к команде, которую вы набрали, следует добавить

```
Boxed->False
```

В результате получится команда

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False]
```

Нажатие клавиш SHIFT и ENTER приводит к исполнению этой команды. На экране получим изображение додекаэдра (рис. 263).

Рис. 263

Изображение додекаэдра можно увеличивать и уменьшать так же, как это делалось для графиков функций.

Изображение додекаэдра можно поворачивать, задавая координаты точки, из которой мы смотрим на додекаэдр. По умолчанию предполагается точка с координатами (1.3,–2.4,2). Если вы хотите указать другую точку, то к набранной команде следует добавить, например,

```
ViewPoint->{0.8,–2.4,2}
```

В результате получим команду

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False,ViewPoint–> {0.8,–2.4,2}],
```

исполнение которой приводит к рисунку 264.

Рис. 264

Команда

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed–>False,ViewPoint–> {0.8,–2.4,1}]
```

приведет к рисунку 265.

Рис. 265

Для устранения окраски граней додекаэдра следует добавить

```
Shading–>False
```

В результате получим команду

```
<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed–>False,Shading–>False]
```

исполнение которой приведет к рисунку 266.

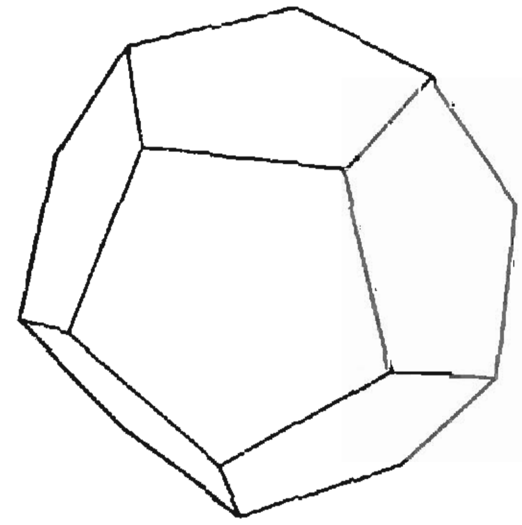


Рис. 266

Если вместо Dodecahedron написать, соответственно, Tetrahedron, Hexahedron, Octahedron, Icosahedron, то получим изображения тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра.

В программе «Математика» имеется операция «Truncate», при которой от правильных многогранников отсекаются углы и в результате получаются полуправильные многогранники.

Так, например, исполнение команды

```
<<Graphics`Polyhedra`
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Truncate[p],Boxed->False]
```

приводит к усеченному додекаэдру (рис. 267).

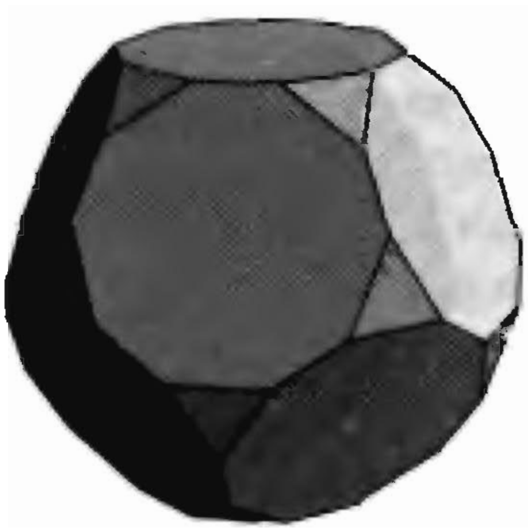


Рис. 267

Операцию усечения можно производить с заданным коэффициентом, показывающим, какая часть ребра отсекается. Так, например, если выбрать коэффициент, равный 0.5, то исполнение соответствующей команды

```
<<Graphics`Polyhedra`
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Truncate[p,0.5],Boxed->False]
```

приводит к полуправильному многограннику, называемому икосододекаэдр (рис. 268). Его гранями являются все грани икосаэдра и все грани додекаэдра.

Рис. 268

Помимо операции усечения в программе «Математика» имеется операция «Stellate», которая приводит к звездчатым многогранникам. Так, например, исполнение команды

```
<<Graphics`Polyhedra`
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Stellate[p,2.2],Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 269), который называется малым звездчатым додекаэдром.

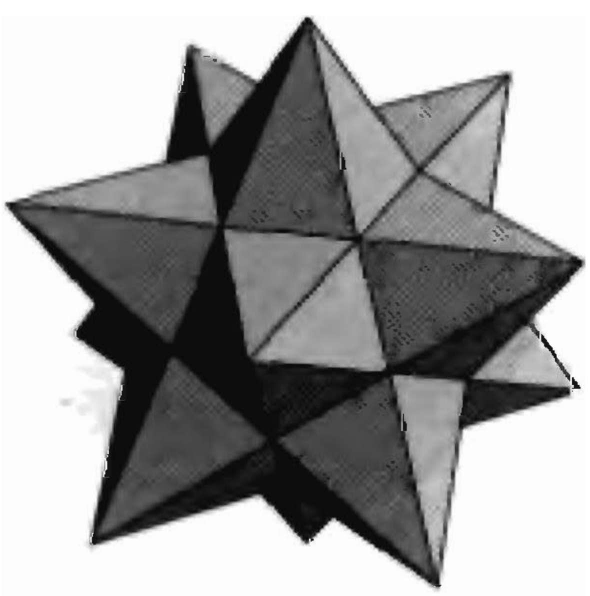


Рис. 269

Операцию «Stellate» тоже можно производить с разными коэффициентами. Если коэффициент меньше единицы, то она производится вовнутрь многогранника. Например, исполнение команды

```
<<Graphics`Polyhedra`
p=Polyhedron[Icosahedron]
Show[Stellate[p,0.7],Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 270), который называется большим додекаэдром.

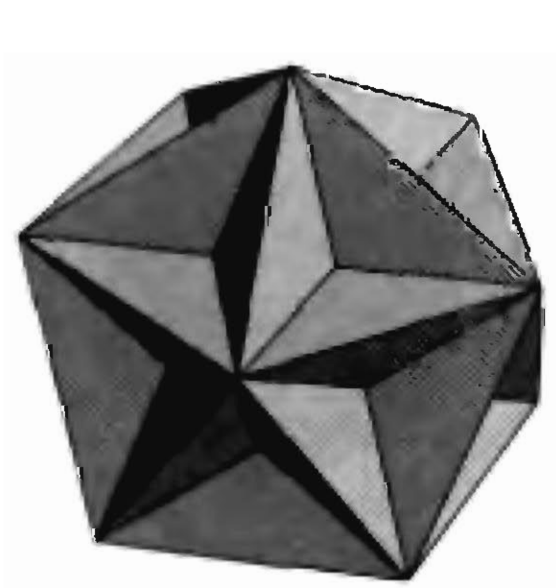


Рис. 270

Операции «Truncate» и «Stellate» можно комбинировать. Например, команда

```
<<Graphics`Polyhedra`
p=Polyhedron[Icosahedron]
Show[Truncate[Stellate[p,0.7],0.5],
Boxed->False]
```

приводит к многограннику (рис. 271), который называется малый битригональный икосододекаэдр.

Команда

<<Graphics\`Polyhedra\`
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Stellate[Stellate[p,2.2],0.5],Boxed->False]

приводит к многограннику (рис. 272), который называется большим икосаэдром.

Последовательное применение операций «Truncate» и «Stellate» к правильным многогранникам дает возможность получать изображения самых различных многогранников.

Рассмотрим теперь вопрос об изображении поверхностей.

Одним из наиболее простых способов задания поверхности в пространстве является задание ее графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Для получения изображения графика функции $z = f(x, y)$, после того как вы вошли в программу, нужно набрать

Plot3D[f[x,y],{x,min,max},{y,min,max},
BoxRatios->Automatic]

где min, max обозначают пределы изменения аргументов x и y.

Нажать клавиши SHIFT и ENTER. В результате на экране появится график функции $y = f(x, y)$.

Например,

Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},
{y,-1,1},BoxRatios->Automatic]

даст график функции $z = x^2 + y^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 273).

Если вместо x^2 + y^2 подставить x^2 - y^2, то получим график функции $z = x^2 - y^2$ (рис. 274).

Если перечисленные выше графики можно нарисовать и без использования компьютерной программы, то изображение следующих поверхностей требует использования компьютерных средств.

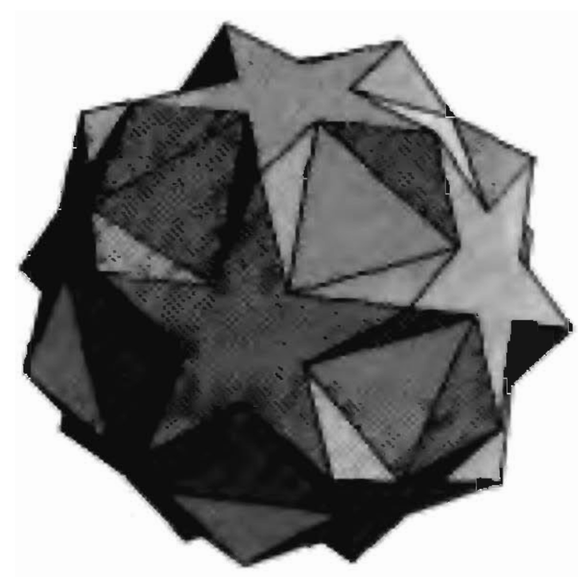


Рис. 271

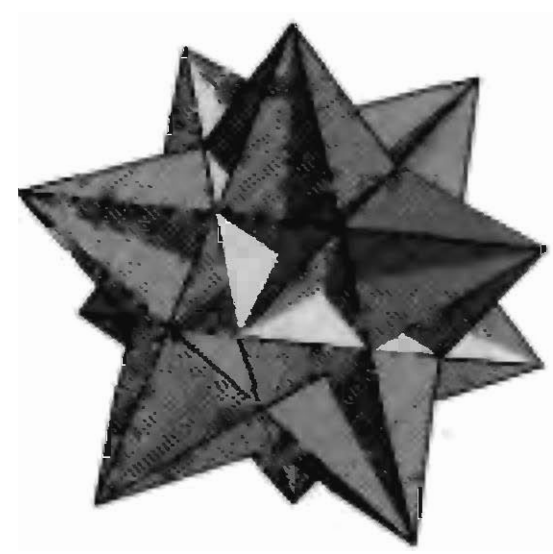


Рис. 272

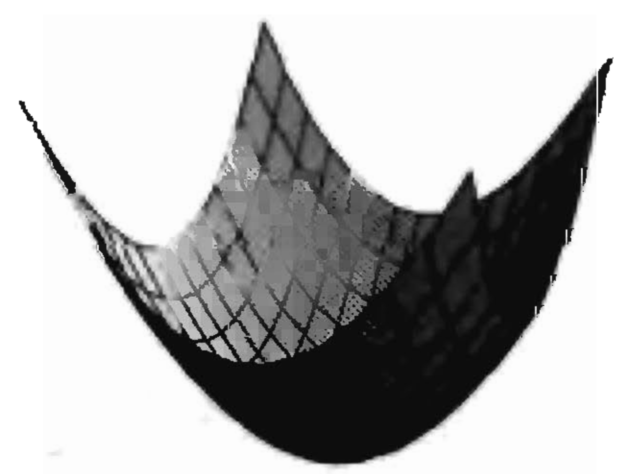


Рис. 273

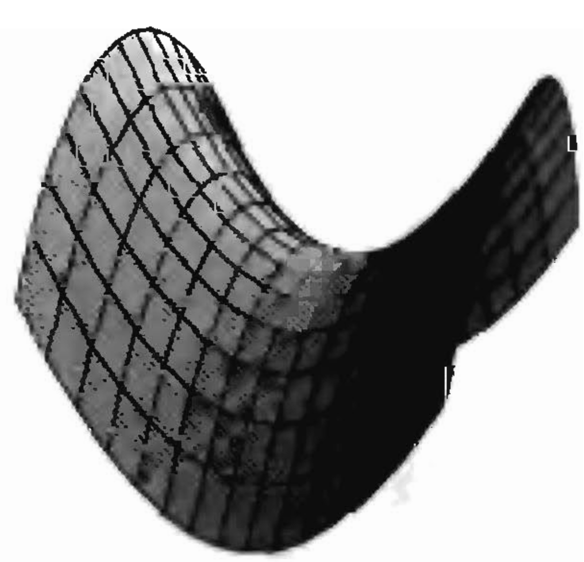


Рис. 274

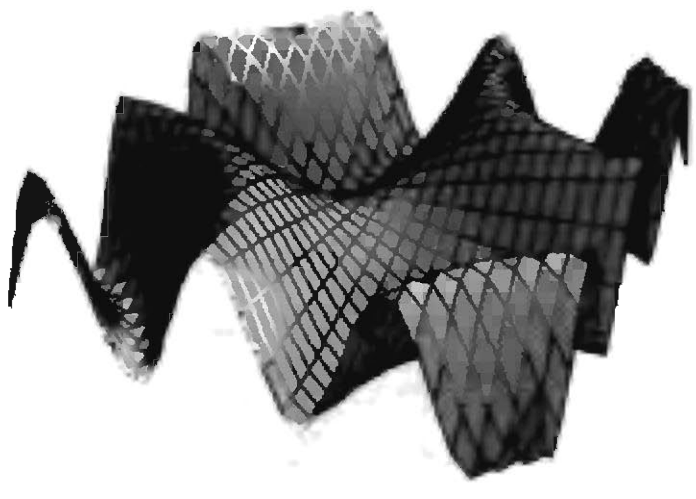


Рис. 275

Рис. 276

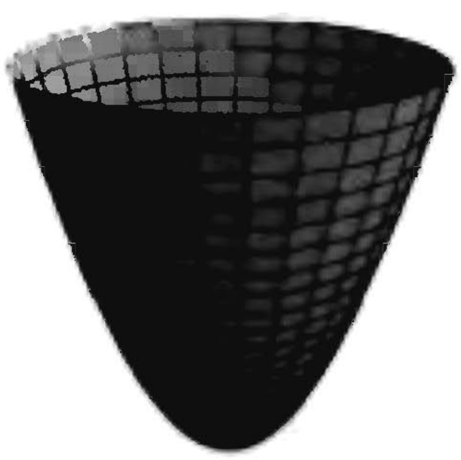


Рис. 277

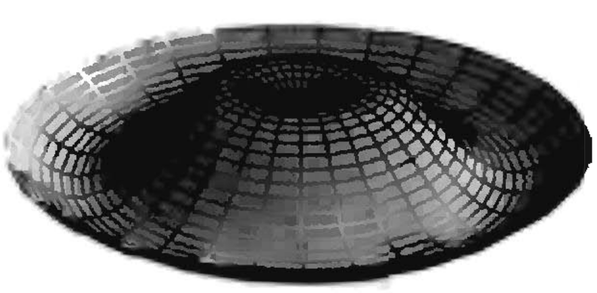


Рис. 278

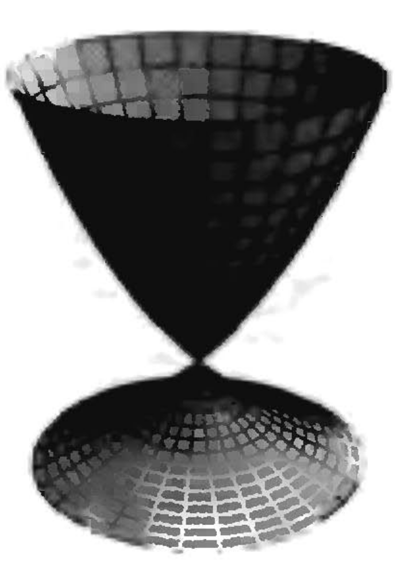


Рис. 279

Например,

Plot3D[Sin[x*y],{x,-Pi,Pi},
{y,-Pi,Pi},BoxRatios->Automatic]

даст график функции $z = \sin(xy)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ (рис. 275).

Если вместо Sin[x*y] подставить Sin[x]*Sin[y], то получим график функции $z = \sin x \cdot \sin y$ (рис. 276).

Программа «Математика» позволяет получать изображения не только поверхностей, заданных уравнением $z = f(x, y)$, но и поверхностей вращения.

Наиболее простой такой поверхностью является параболоид вращения, получающийся вращением графика функции $z = x^2$ вокруг оси Oz. Для получения поверхности вращения следует набрать

<<Graphics"SurfaceOfRevolution"

и нажать клавиши SHIFT и ENTER. Далее набрать

SurfaceOfRevolution[x^2,{x,0,2},
BoxRatios-> Automatic,
ViewPoint->{1,-2,1},PlotPoints->30]

и снова нажать SHIFT и ENTER.

Изображение соответствующей поверхности вращения показано на рисунке 277. Отметим, что это та же самая поверхность, что и на рисунке 273.

Для получения поверхности вращения графика функции $z = \sin x$ вокруг оси Oz следует набрать

<<Graphics"SurfaceOfRevolution"

и нажать клавиши SHIFT и ENTER. Далее набрать

SurfaceOfRevolution[Sin[x],{x,0,Pi},
BoxRatios-> Automatic,
ViewPoint->{1,-2,1},PlotPoints->30]

и снова нажать SHIFT и ENTER.

Изображение соответствующей поверхности вращения показано на рисунке 278.

Если вместо Sin[x] набрать Exp[x] и в качестве пределов изменения x поставить {x,-1,1}, то получится поверхность вращения графика функции $z = e^x$ (рис. 279).

Если вместо Sin[x] подставить 1/x и пределы изменения x взять от 0,25 до 2, то получим поверхность вращения, изображенную на рисунке 280.

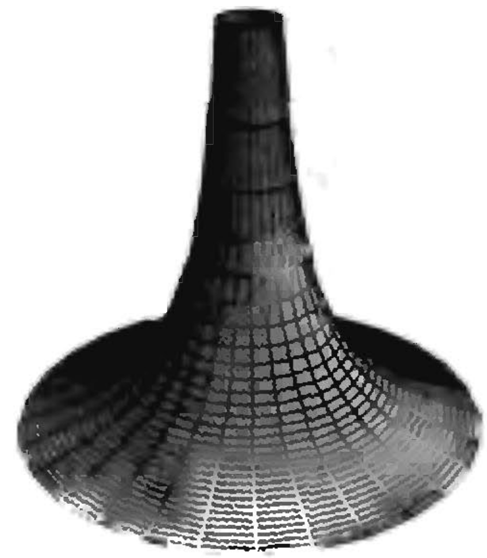


Рис. 280

Вращать можно не только одну, но и несколько кривых. При этом можно отдельно указать ось вращения. Например, выполнение команды

```
<<Graphics`SurfaceOfRevolution`
SurfaceOfRevolution[{{1,0,x},{x,0,0},{1,1,x}},
{x,0,1}, RevolutionAxis->{1,1,1},
BoxRatios-> Automatic,
ViewPoint->{2,-3,1},PlotPoints->25]
```

приведет к поверхности вращения куба вокруг его диагонали (рис. 281).

Рис. 281

Некоторые поверхности программа «Математика» имеет в своей памяти. Так, если набрать

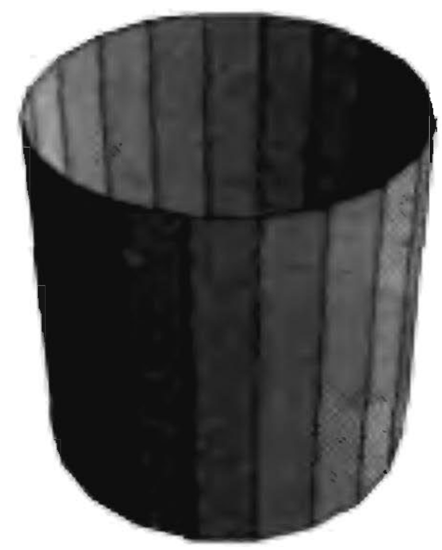
```
<<Graphics`Shapes`
```

и нажать клавиши SHIFT и ENTER, то подгрузится пакет, содержащий некоторые стандартные поверхности.

Если далее набрать

```
Show[Graphics3D[Cylinder[]],Boxed->False]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение боковой поверхности цилиндра (рис. 282, а).

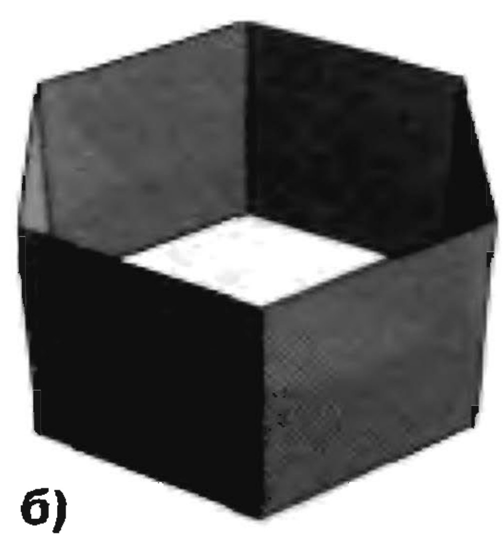


а)

В квадратных скобках можно указать величину радиуса основания, высоты и числа вершин многоугольника в основании цилиндра. Например, исполнение команды

```
Show[Graphics3D[Cylinder[2,1,6]],
Boxed->False]
```

приводит к боковой поверхности прямой шестиугольной призмы (рис. 282, б).



б)

Рис. 282

Если вместо слова Cylinder, написать слово Cone, т. е. набрать

```
Show[Graphics3D[Cone[]],Boxed->False]
```

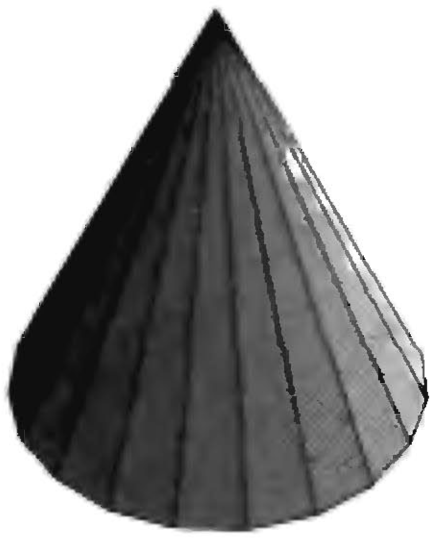


Рис. 283, а

Рис. 283, б

Рис. 284

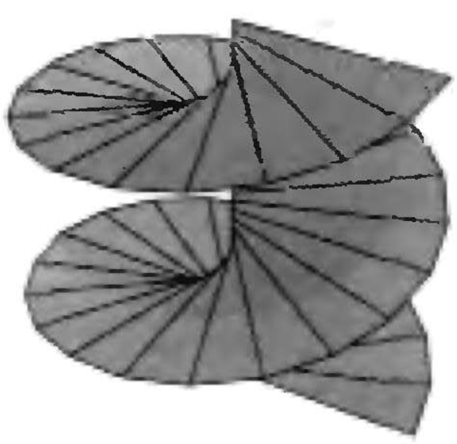


Рис. 285

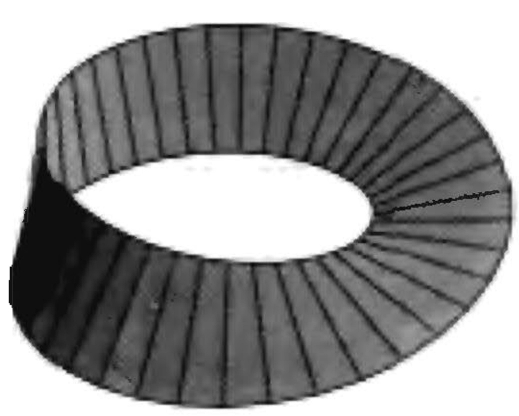


Рис. 286

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности конуса (рис. 283, а).

В квадратных скобках можно указать величину радиуса основания, высоты и числа вершин многоугольника в основании конуса. Например, исполнение команды

```
Show[Graphics3D[Cone[2,1,6]],
Boxed->False]
```

приводит к поверхности прямой шестиугольной пирамиды (рис. 283, б).

Если вместо слова Cone написать слово Torus, т. е. набрать

```
Show[Graphics3D[Torus[]],Boxed->False]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности тора — поверхности, напоминающей баранку или бублик (рис. 284).

Если вместо слова Torus написать слово Helix, т. е. набрать

```
Show[Graphics3D[Helix[]],Boxed->False]
```

и снова нажать SHIFT и ENTER, то в результате получим изображение поверхности, которая называется геликоидом и напоминает винтовую лестницу (рис. 285).

Если вместо Helix написать MoebiusStrip, то получим изображение листа Мёбиуса (рис. 286).

Упражнения

1. Получите изображения правильных многогранников.
2. Произведите операцию усечения правильных многогранников с различными коэффициентами.
3. Почему при образовании малого звездчатого додекаэдра использовался коэффициент 2.2?
4. Почему при образовании большого додекаэдра использовался коэффициент 0.7?

5. Получите изображение многогранника (рис. 287), который называется звездой Кеплера (Stella Octangula).
6. Как получить изображение многогранника (рис. 288), который называется ромбододекаэдр? Его гранями являются 12 ромбов. (Форму ромбододекаэдра имеет кристалл граната.)
7. *Как из тетраэдра получить октаэдр?*
8. Кубооктаэдр имеет своими гранями восемь правильных треугольников и шесть квадратов. Получите изображение этого многогранника (рис. 289).
9. Поверхность футбольного мяча представляет собой поверхность полуправильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники и пятиугольники (рис. 290). Усечением какого правильного многогранника он получается?
10. Получите график функции $z = xy$. Имеет ли эта поверхность: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии?
11. Получите график функции $z = \sin(x + y)$. Имеет ли эта поверхность: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии?
12. Получите изображение конуса как поверхности вращения графика функции $z = x$.
13. *Получите изображение сферы как поверхности вращения.*
14. В команде для получения изображения тора в квадратных скобках подставьте значения 2, 1, 4, 4. Посмотрите, что при этом получится.
15. В команде для получения изображения геликоида в квадратных скобках подставьте значения 2, 2, 3, 20. Посмотрите, что при этом получится.

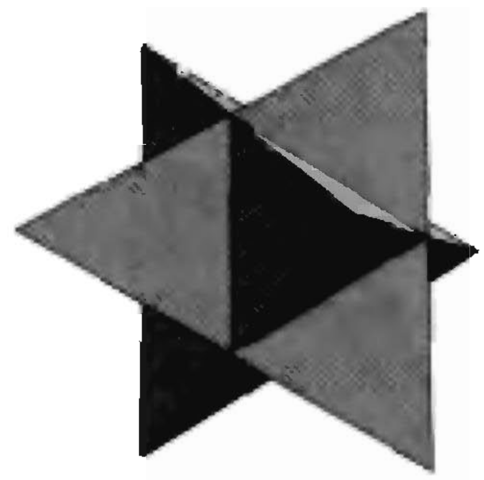


Рис. 287

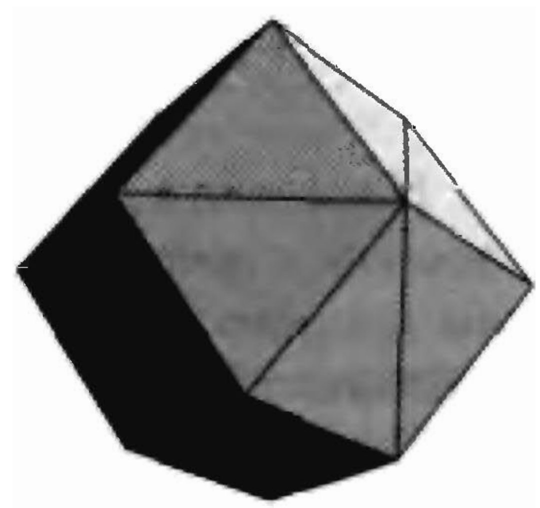


Рис. 288

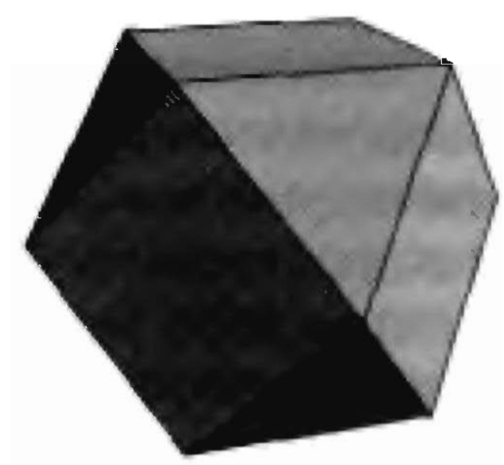


Рис. 289

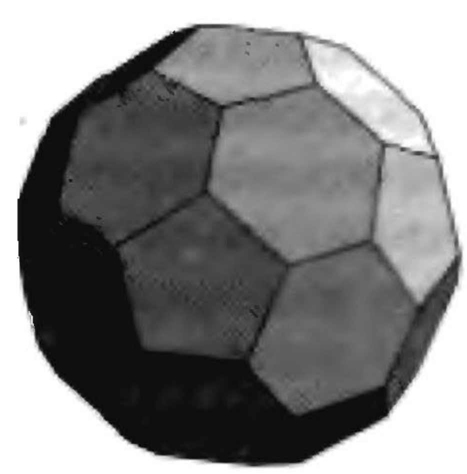
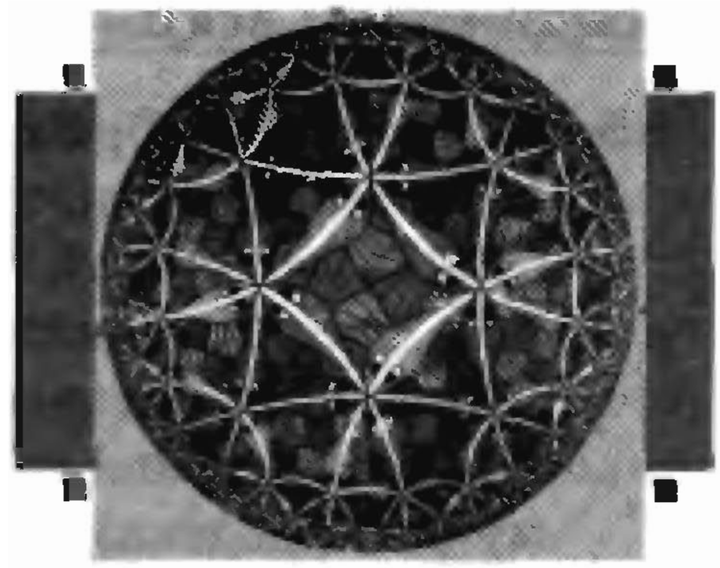


Рис. 290

Глава VIII

ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ*



§ 61. Многоугольники

Напомним, что **ломаной** называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. (рис. 291). Отрезки называются **сторонами ломаной**, а их концы — **вершинами ломаной.**

Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2...A_n$.

Ломаная называется **простой**, если она не имеет точек самопересечения (рис. 292).

Ломаная называется **замкнутой**, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 293).

Одной из важнейших теорем о простых замкнутых ломаных является следующая теорема Жордана.

Теорема. Всякая простая замкнутая ломаная на плоскости разбивает точки плоскости на две области — внутреннюю и внешнюю. При этом всякие две точки из одной области могут быть соединены ломаной, целиком содержащейся в этой области. Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, их соединяющая, пересекается с исходной ломаной.

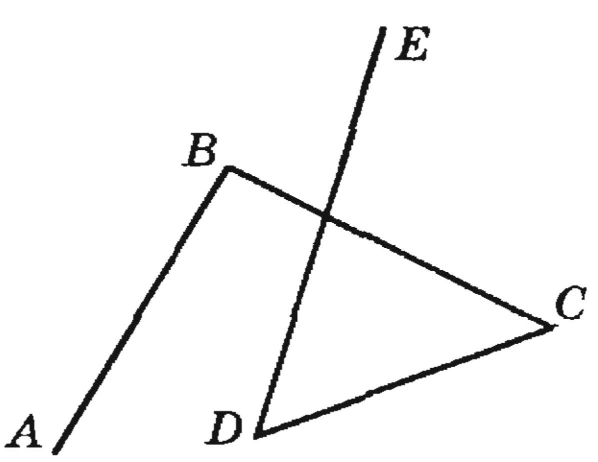


Рис. 291

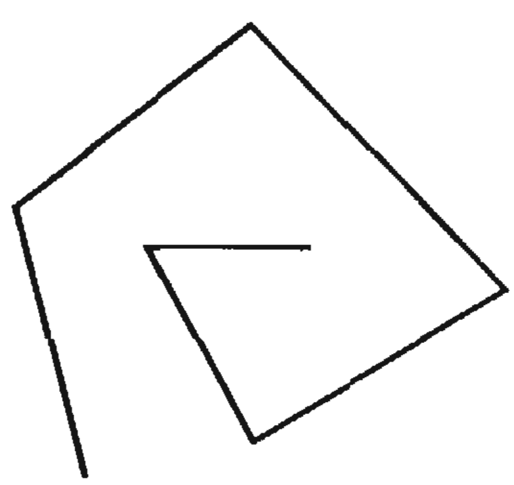


Рис. 292

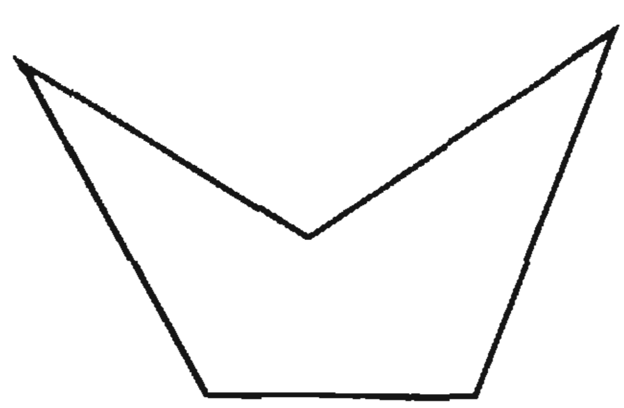
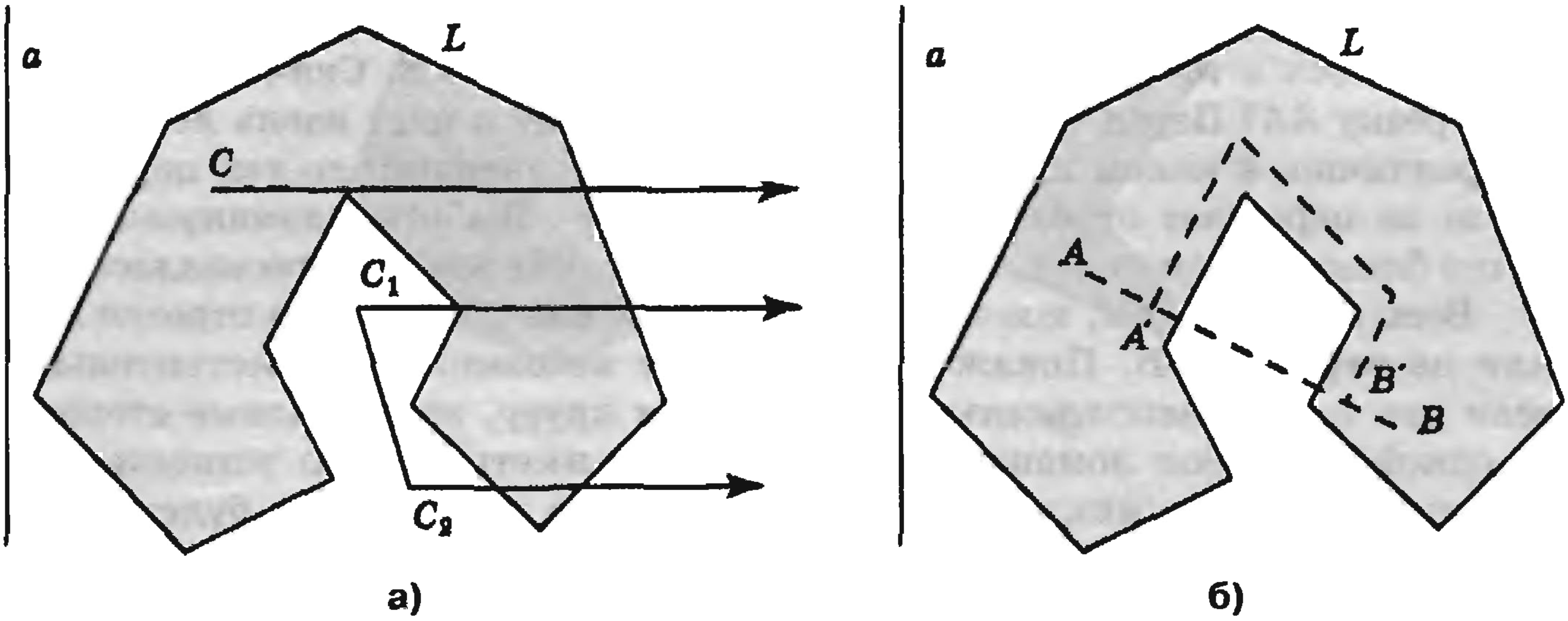


Рис. 293



а) б)

Рис. 294

Доказательство. Пусть L — заданная простая замкнутая ломаная (рис. 294). Выберем на плоскости какую-нибудь прямую a, не перпендикулярную ни одной из сторон ломаной L. Так как число сторон ломаной конечно, то такая прямая существует.

Для точки C плоскости, не принадлежащей ломаной L, рассмотрим луч с вершиной C, перпендикулярный прямой a. Заметим, что ни одна из сторон ломаной не будет целиком лежать на этом луче. Подсчитаем число точек пересечения этого луча с ломаной L. При этом если рассматриваемый луч проходит через вершину ломаной, то эта вершина идет в счет или не идет в зависимости от того, расположены ли прилежащие к этой вершине стороны многоугольника по разные или по одну сторону от данного луча. Если число пересечений нечетно, то точку C отнесем к внутренней области. Если число точек пересечения четно, то точку C отнесем к внешней области.

Заметим, что если отрезок не пересекается с ломаной, то все его точки имеют одинаковую четность. Действительно, четность точки, движущейся по такому отрезку, может измениться только при прохождении соответствующего луча через вершину ломаной. Но, принимая во внимание принятый подсчет точек пересечения, в каждом из двух возможных случаев четность изменится.

Из сказанного следует, что если какая-нибудь ломаная соединяет две точки разной четности, то она пересекается с L. Иначе четность всех точек ломаной, а значит, конечной и начальной точек, была бы одинаковой.

Пусть теперь A и B — две точки одинаковой четности. Покажем, что их можно соединить ломаной, не пересекающейся с L. Действительно, если отрезок AB не пересекается с ломаной, то он является искомой ломаной. Пусть отрезок AB пересекается с ломаной. Обозначим A' и B' соответственно первую и последнюю точки пересечения. Построим ломаную, начинающуюся в точке A и заканчивающуюся в точке B. Сначала она идет по отрезку AA'. Перед точкой A' она поворачивает и идет вдоль ломаной L (безразлично, в каком из двух возможных направлений) до тех пор, пока снова не пересечет отрезок AB около точки B'. Выбирая ломаную достаточно близко к ломаной L, можно добиться, чтобы она не пересекалась с L.

Весь вопрос в том, кончается ли построенная ломаная на отрезке $A'B'$ или на отрезке $B'B$. Покажем, что первое невозможно. Действительно, если две точки расположены близко друг к другу, но по разные стороны от одной из сторон ломаной L, то они будут иметь разную четность, так как выходящие из них лучи будут таковы, что один из них будет иметь на одну точку пересечения с L больше, чем другой.

Таким образом, точки отрезков $A'B'$ и $B'B$, расположенные близко к точке B', имеют различную четность. Следовательно, точки отрезка $A'B'$, расположенные близко к точке B', не могут быть соединены ломаной с точкой A, и значит, построенная ломаная заканчивается на отрезке BB'.

Завершим построение ломаной, соединив отрезком ее последнюю точку с точкой B. В результате получим искомую ломаную, соединяющую точки A и B. ■

Доказанная теорема позволяет дать определение многоугольника.

Многоугольником называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Вершины ломаной называются **вершинами многоугольника**, стороны — **сторонами многоугольника**, а углы, образованные соседними сторонами, — **углами многоугольника**. Точки многоугольника, не лежащие на его сторонах, называются **внутренними**.

Многоугольник называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 295).

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трех, могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 296).

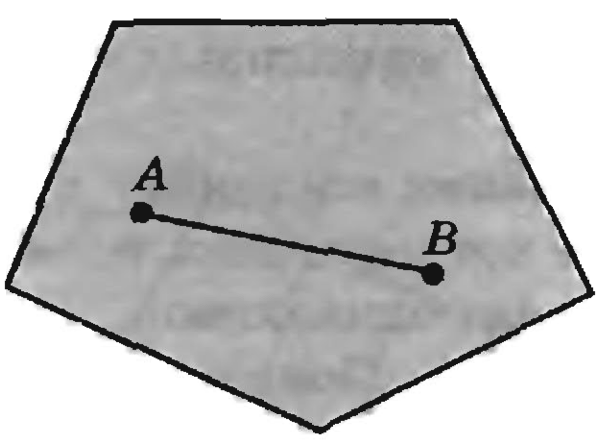
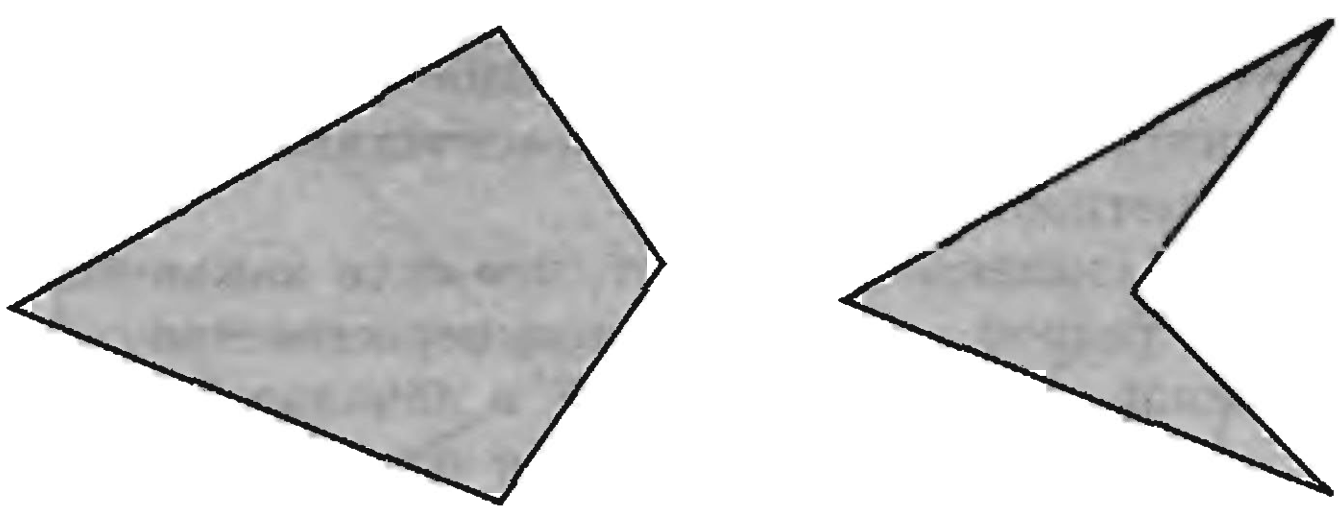


Рис. 295



а) б)

Рис. 296

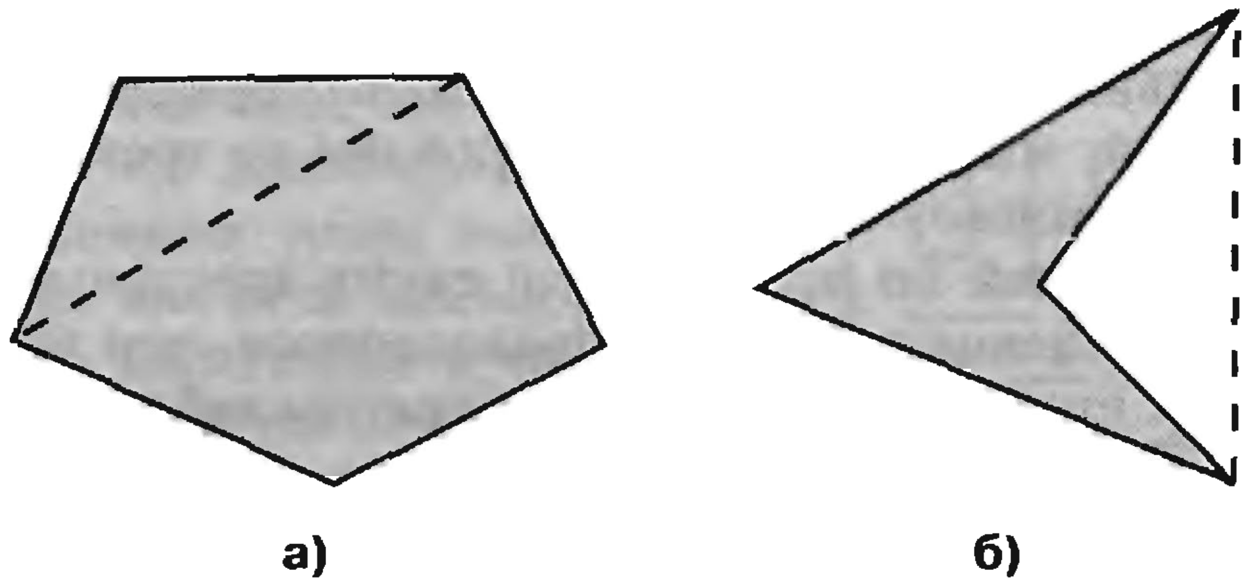


Рис. 297

Диагональю *многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.*

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 297), однако имеет место следующая теорема.

Теорема. В каждом многоугольнике с числом сторон, большим трех, можно провести диагональ, целиком в нем содержащуюся.

Доказательство. Для данного многоугольника M зафиксируем какую-нибудь прямую a и найдем вершину A многоугольника, расстояние от которой до этой прямой наибольшее. Пусть A', A'' — соседние с ней вершины (рис. 298). Если отрезок $A'A''$ целиком содержится в многоугольнике M, то он является искомой диагональю. Если $A'A''$ не содержится целиком в M, то существуют вершины многоугольника M, содержащиеся в треугольнике $A'AA''$. Выберем из них вершину B, наиболее удаленную от прямой a. Тогда отрезок AB будет целиком содержаться в многоугольнике, и, следовательно, он является искомой диагональю. ■

Следствие. Любой n-угольник можно разбить на треугольники, причем число таких треугольников будет равно $n - 2$.

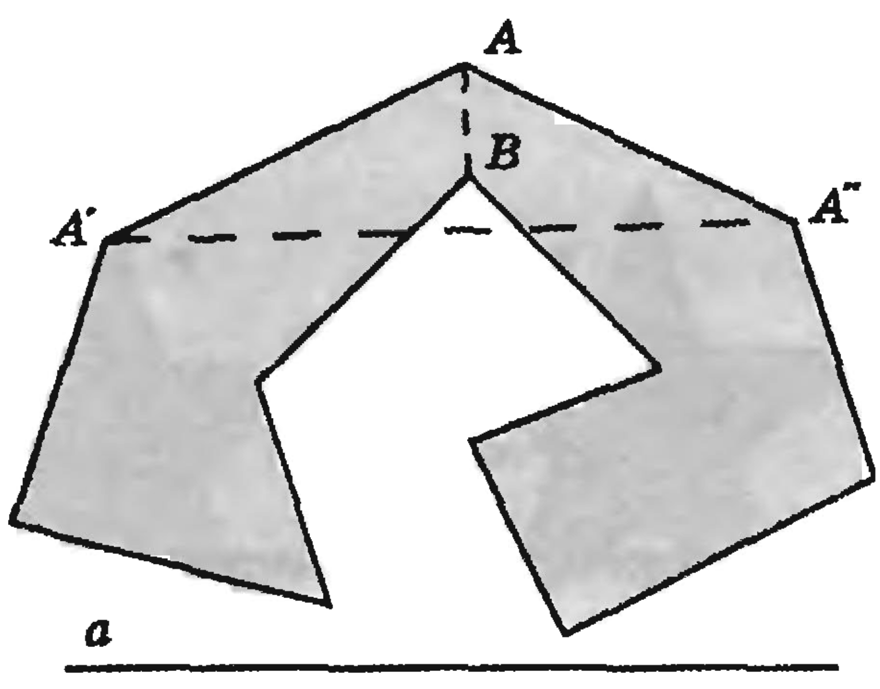


Рис. 298

Действительно, по доказанной теореме многоугольник можно разбить на два многоугольника проведением диагонали. Продолжая процесс проведения диагоналей, мы в конце концов дойдем до треугольников, на которые будет разбит многоугольник.

Докажем индукцией по n, что число таких треугольников равно $n - 2$. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали, что любой m-угольник при $m < n$ проведением диагоналей разбивается на $m - 2$ треугольника. Рассмотрим n-угольник. Проведением диагонали он разбивается на i-угольник и $(n - i + 2)$-угольник. Каждый из них, по предположению индукции, разбивается на $i - 2$ и $n - i$ треугольника, которые вместе составляют разбиение n-угольника на $n - 2$ треугольника.

Упражнения

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?
2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?
3. Укажите, какие фигуры, изображенные на рисунке 299, являются простыми ломаными?

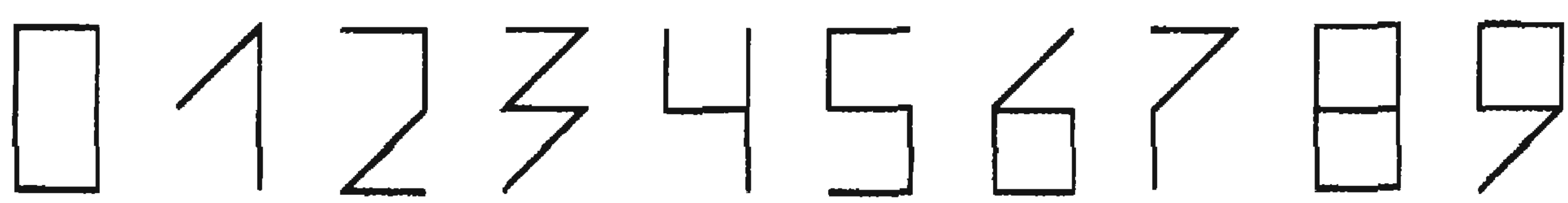
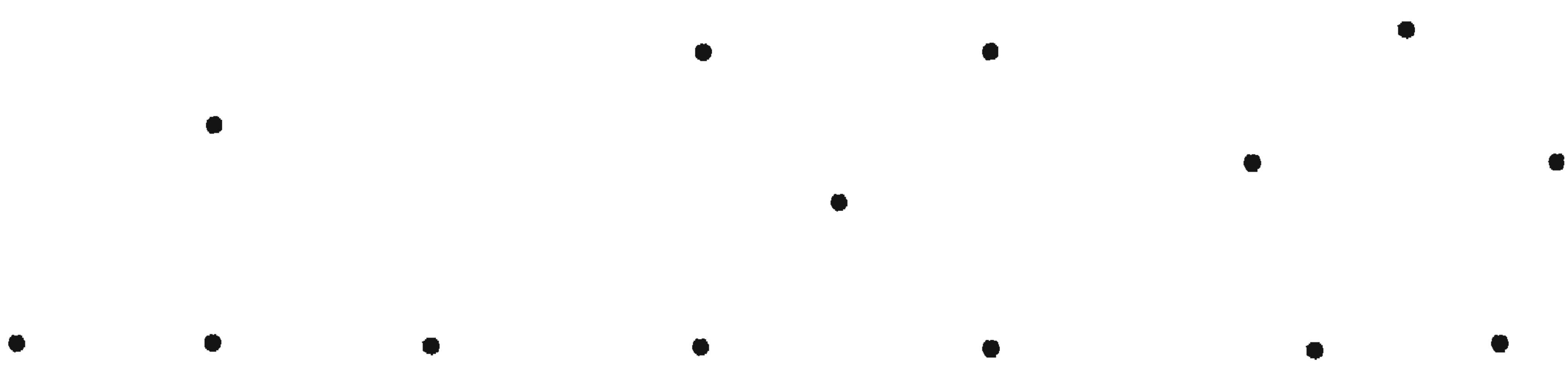


Рис. 299



а) б) в)

Рис. 300

4. Данные точки, изображенные на рисунке 300, соедините простой ломаной.
5. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?

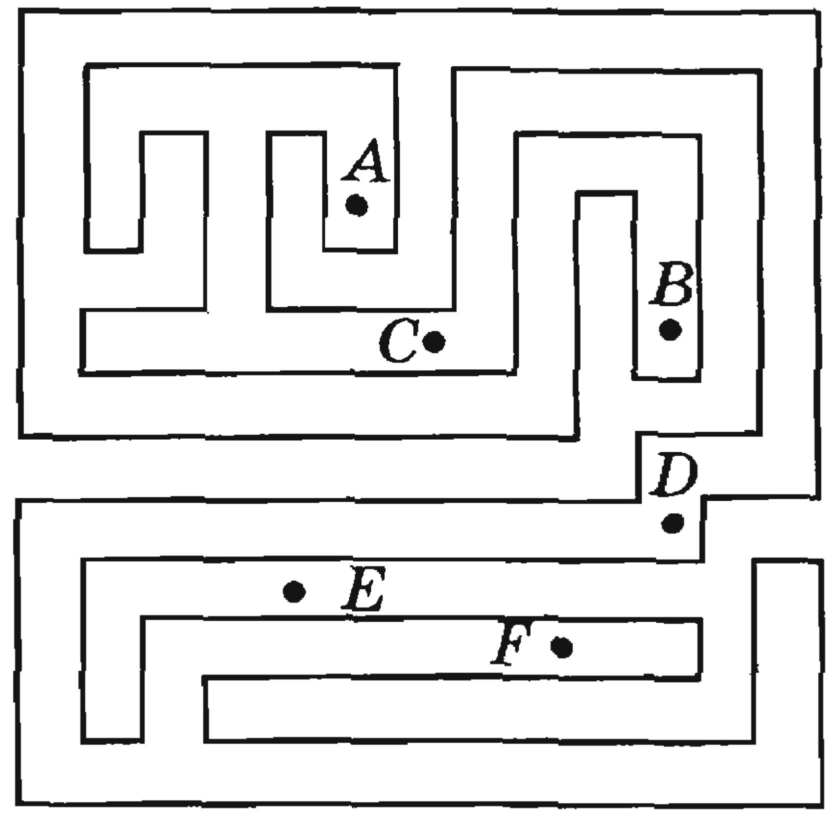


Рис. 301

6. Проверьте, что линия, изображенная на рисунке 301, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.
7. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырехугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.
8. Нарисуйте правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.
9. Укажите, какие из представленных на рисунке 302 фигур являются многоугольниками, а какие нет.
10. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?
11. На сколько треугольников делится выпуклый: а) 4-угольник; б) 5-угольник; в) 6-угольник; г) n-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?
12. Сколько диагоналей имеет: а) шестиугольник; б)* n-угольник?
13. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?
14. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?
15. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) четырех сторон; б) пяти сторон; в) n сторон (n — нечетно)?

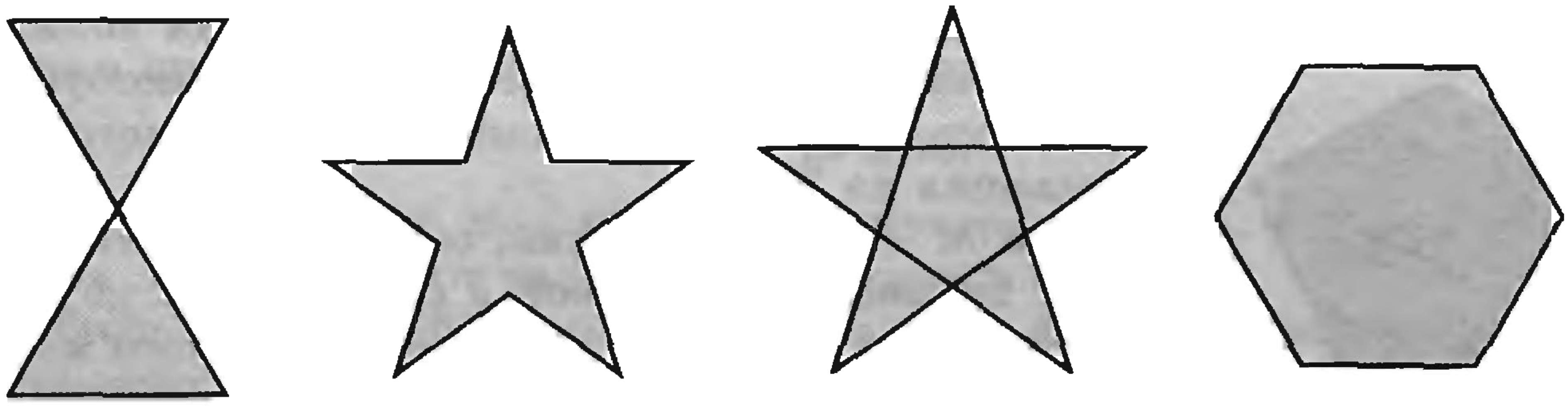

а) б) в) г)

Рис. 302

★16. Нарисуйте замкнутую шестистороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.

★17. Может ли прямая пересекать простую замкнутую ломаную в нечетном числе точек?

★18. Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать ее стороны в нечетном числе точек?

★19. Прямая l пересекает простую замкнутую ломаную в 2003 точках. Докажите, что существует прямая l', пересекающая эту ломаную более чем в 2003 точках.

★20. Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, больших развернутого.

★21. Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

§ 62. Сумма углов многоугольника

В курсе геометрии 7—9 классов доказывалось, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$. Оказывается, что это утверждение справедливо и для невыпуклых многоугольников.

Теорема. Сумма углов произвольного n-угольника равна $180°(n-2)$.

Доказательство. Разобьем многоугольник на треугольники проведением диагоналей (рис. 303). Число таких треугольников равно $n-2$, и в каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Поскольку углы треугольников составляют углы многоугольника, то сумма углов многоугольника равна $180°(n-2)$.

Рассмотрим теперь произвольные замкнутые ломаные, возможно с самопересечениями, $A_1A_2...A_nA_1$ (рис. 304, а). Такие самопересекающиеся ломаные будем называть звездчатыми многоугольниками (рис. 304, б—г).

Зафиксируем направление подсчета углов против часовой стрелки. Заметим, что углы, образованные замкнутой ломаной, зависят от направления ее обхода. Если направление обхода ломаной меняется на противоположное, то углами многоугольника будут углы, дополняющие углы исходного многоугольника до 360°.

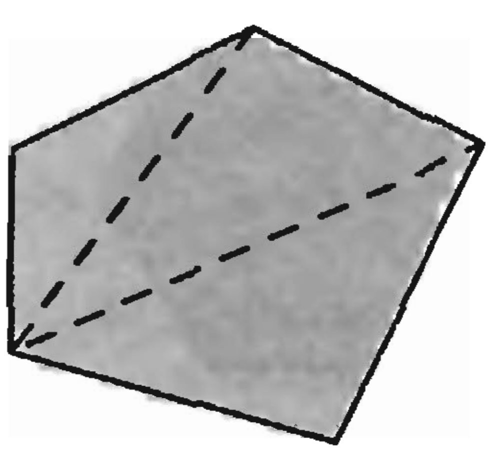


Рис. 303

Если M — многоугольник, образован простой замкнутой ломаной, проходимой в направлении по часовой стрелке (рис. 305, а), то сумма углов этого многоугольника будет равна $180°(n-2)$. Если же ломаная проходится в направлении против часовой стрелки (рис. 15, б), то сумма углов будет равна $180°(n+2)$.

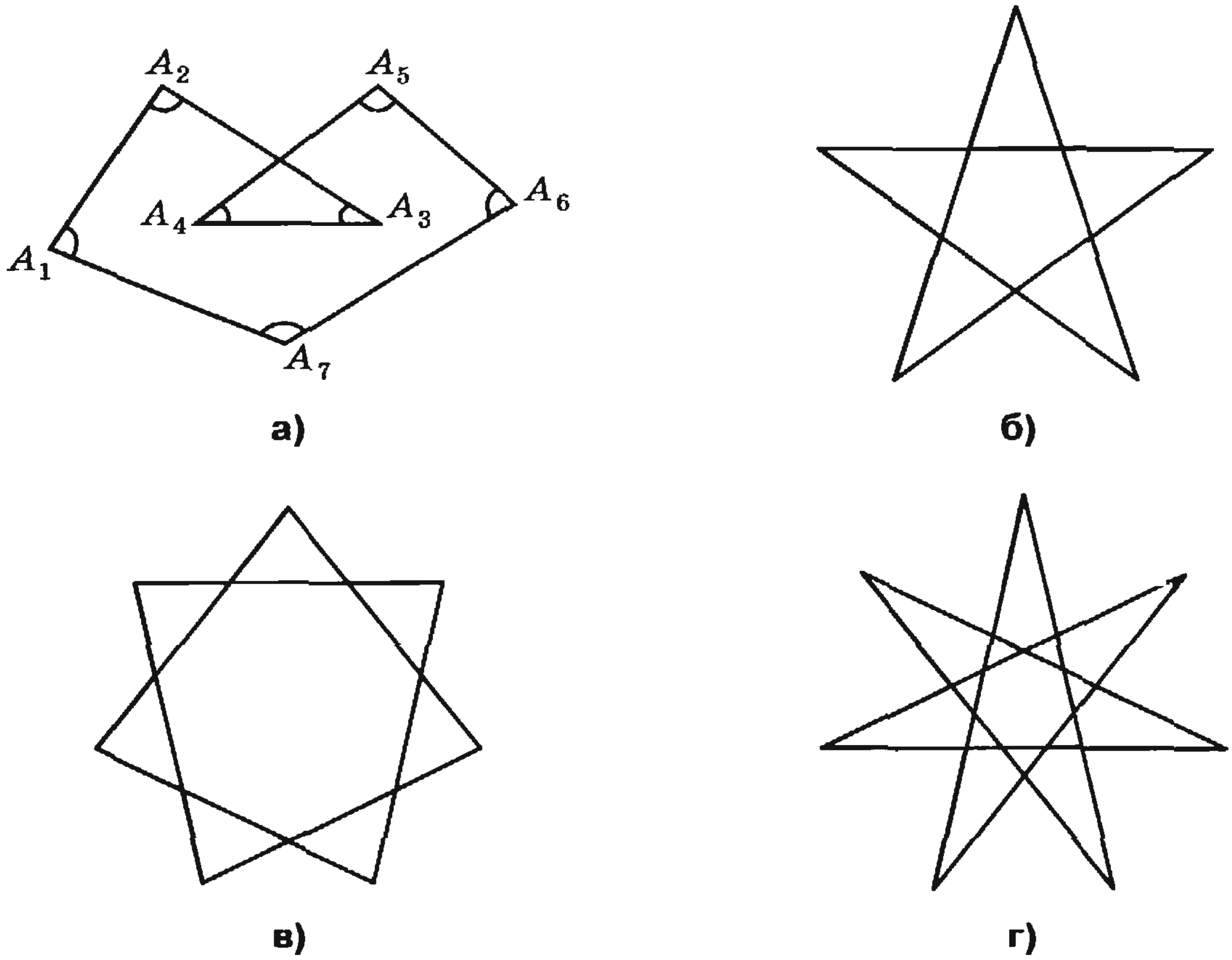


Рис. 304

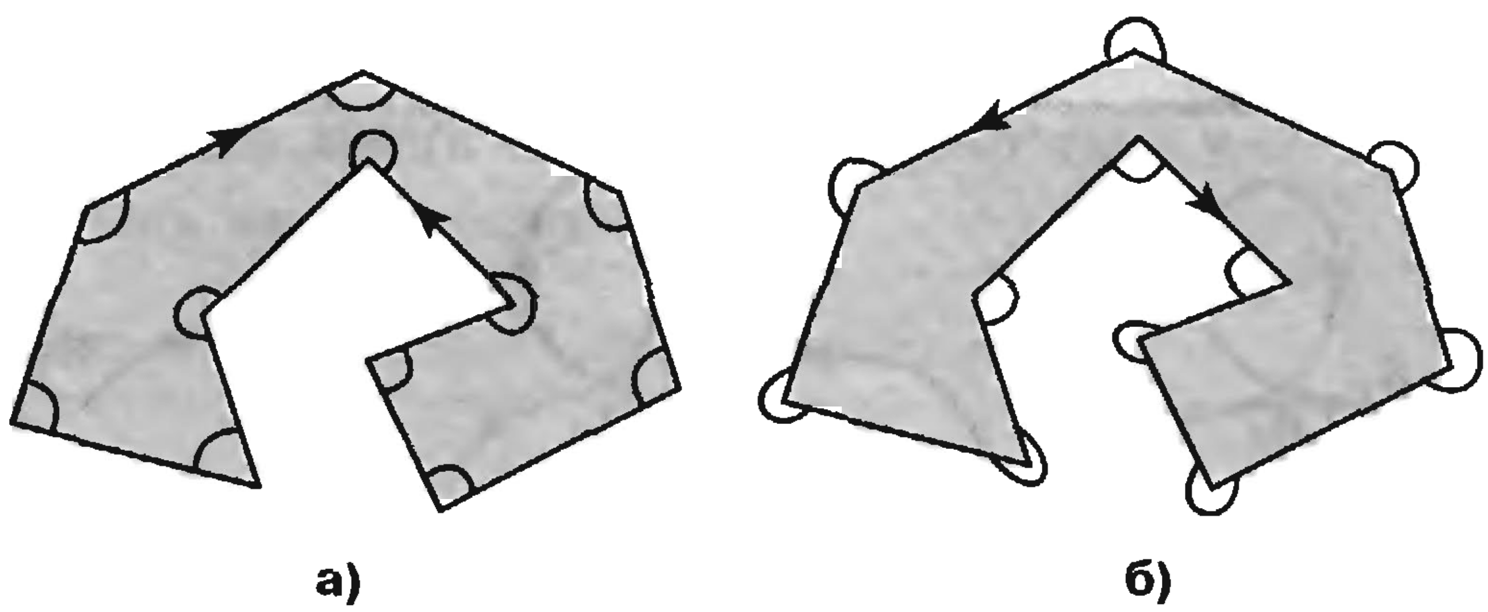


Рис. 305

Таким образом, общая формула суммы углов многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, имеет вид

$$\Sigma = 180°(n \pm 2),$$

где Σ — сумма углов, n — число углов многоугольника, «+» или «−» берутся в зависимости от направления обхода ломаной.

Наша задача состоит в том, чтобы вывести формулу суммы углов произвольного многоугольника, образованного замкнутой (возможно, самопересекающейся) ломаной. Для этого введем понятие степени многоугольника.

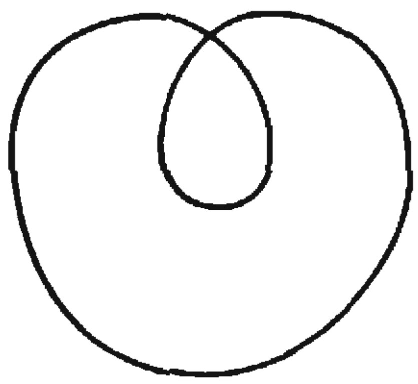


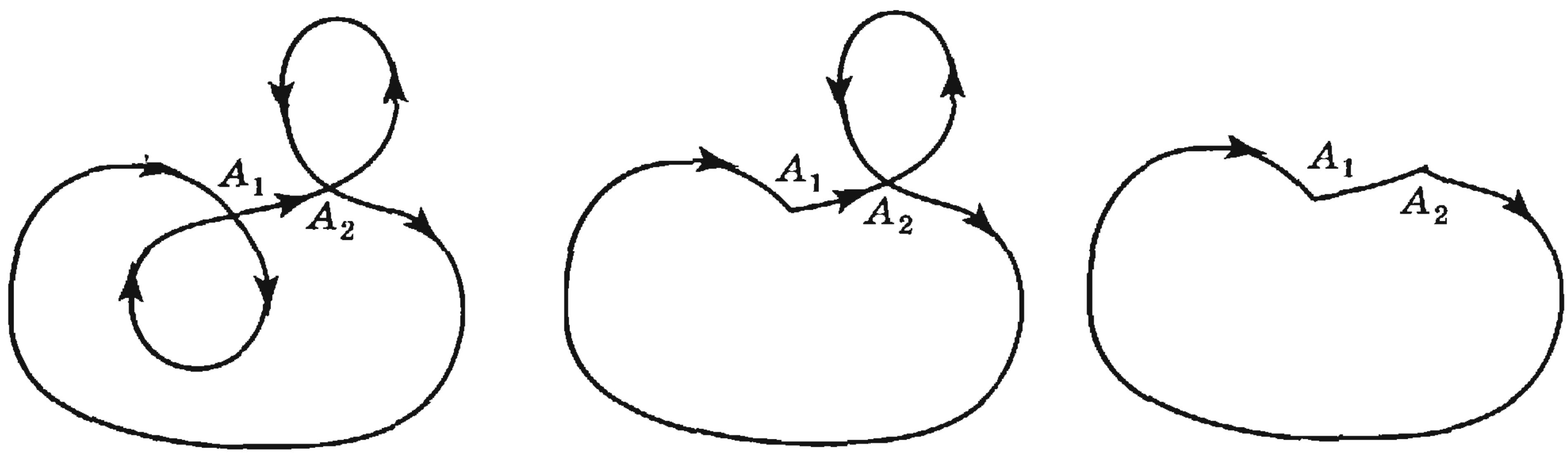
Рис. 306

Степенью многоугольника называется число оборотов, совершаемых точкой при полном последовательном обходе его сторон. Причем обороты, совершаемые в направлении против часовой стрелки, считаются со знаком «+», а обороты по часовой стрелке — со знаком «−».

Ясно, что у многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, степень равна +1 или −1 в зависимости от направления обхода. Степень ломаной на рисунке 304, а равна 2. Степень звездчатых семиугольников (см. рис. 304, в, г) равна соответственно 2 и 3.

Аналогичным образом понятие степени определяется и для замкнутых кривых на плоскости. Например, степень кривой, изображенной на рисунке 306, равна двум.

Для нахождения степени многоугольника или кривой можно поступать следующим образом. Предположим, что, двигаясь по кривой (рис. 307, а), мы, начиная с какого-то места A_1, совершили полный оборот и попали в ту же точку A_1. Удалим из кривой соответствующий участок и продолжим движение по оставшейся кривой (рис. 307, б). Если, начиная с какого-то места A_2, мы снова совершили полный оборот и попали в ту же точку, то удаляем соответствующий участок кривой и продолжаем движение (рис. 307, в). Считая количество удаленных участков со знаками «+» или «−», в зависимости от направления их обхода, получим искомую степень кривой.



а) б) в)

Рис. 307

Теорема. Для произвольного многоугольника имеет место формула

$$\Sigma = 180°(n + 2m),$$

где Σ — сумма углов, n — число углов, m — степень многоугольника.

Доказательство. Пусть многоугольник M имеет степень m и условно изображен на рисунке 308. M_1, ..., M_k — простые замкнутые ломаные, проходя по которым точка совершает полные обороты. A_1, ..., A_k — соответствующие точки самопересечения ломаной, не являющиеся ее вершинами.

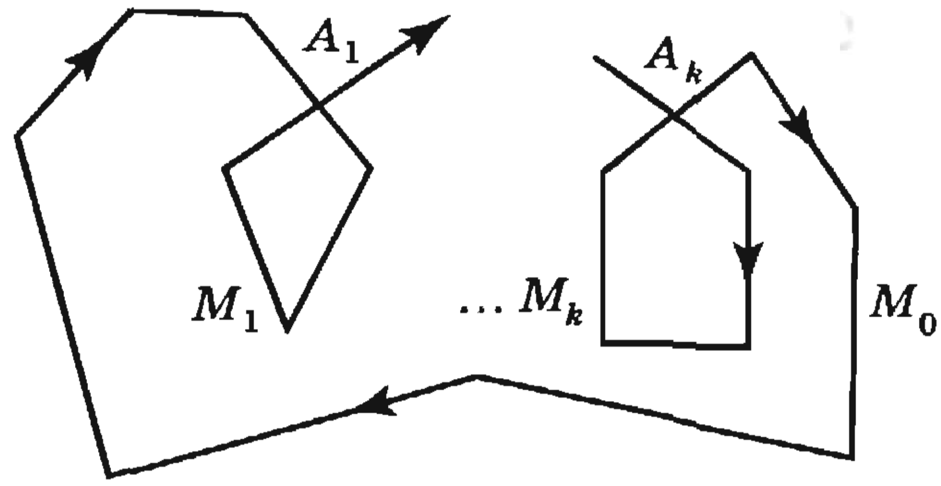


Рис. 308

Обозначим число вершин многоугольника M, входящих в многоугольники M_1, ..., M_k, через n_1, ..., n_k соответственно. Поскольку, помимо вершин многоугольника M, к этим многоугольникам добавляются еще вершины A_1, ..., A_k, то число вершин многоугольников M_1, ..., M_k будет равно соответственно $n_1 + 1$, ..., $n_k + 1$. Тогда суммы их углов будут равны $180°(n_1 + 1 \pm 2)$, ..., $180°(n_K + 1 \pm 2)$. Плюс или минус берется в зависимости от направления обхода ломаных.

Сумма углов многоугольника M_0, оставшегося от многоугольника M после удаления многоугольников M_1, ..., M_k, равна $180°(n - n_1 - ... - n_k + k \pm 2)$.

Суммы углов многоугольников M_0, M_1, ..., M_k дают сумму углов многоугольника M *и в каждой вершине* A_1, ..., A_k *дополнительно получим* $360°$. Следовательно, имеем равенство

$$180°(n_1 + 1 \pm 2) + ... + 180°(n_k + 1 \pm 2) + 180°(n - n_1 - ... - n_k + k \pm 2) = \Sigma + 360°k.$$

Приводя подобные члены, получим

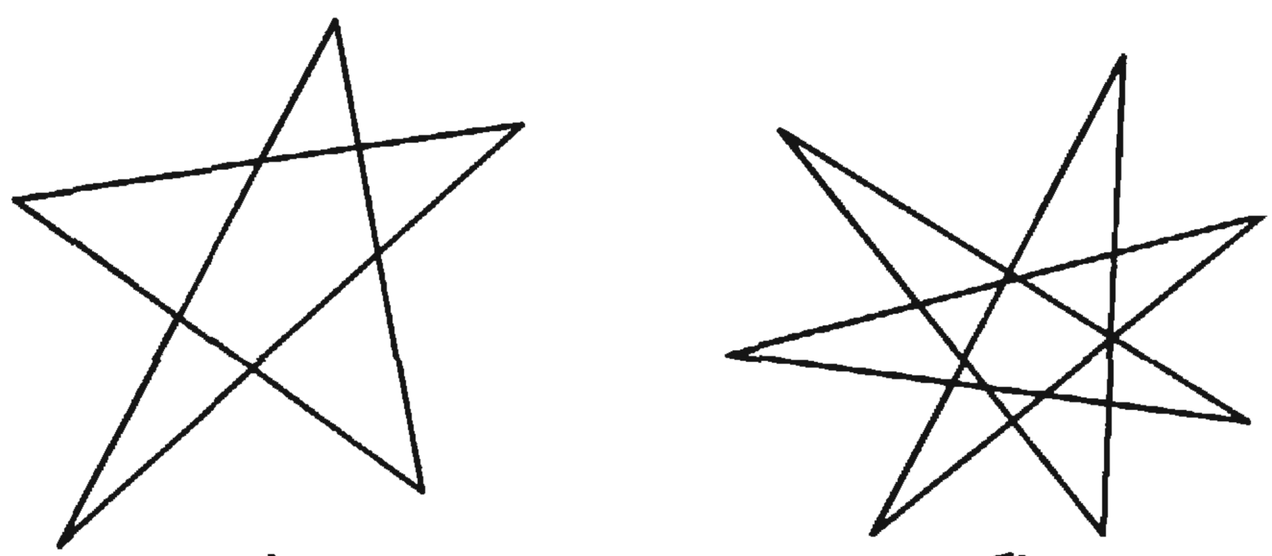
$$\Sigma = 180°(n \pm 2 \pm ... \pm 2) = 180°\,(n + 2m),$$

где m — степень многоугольника M. ■

Упражнения

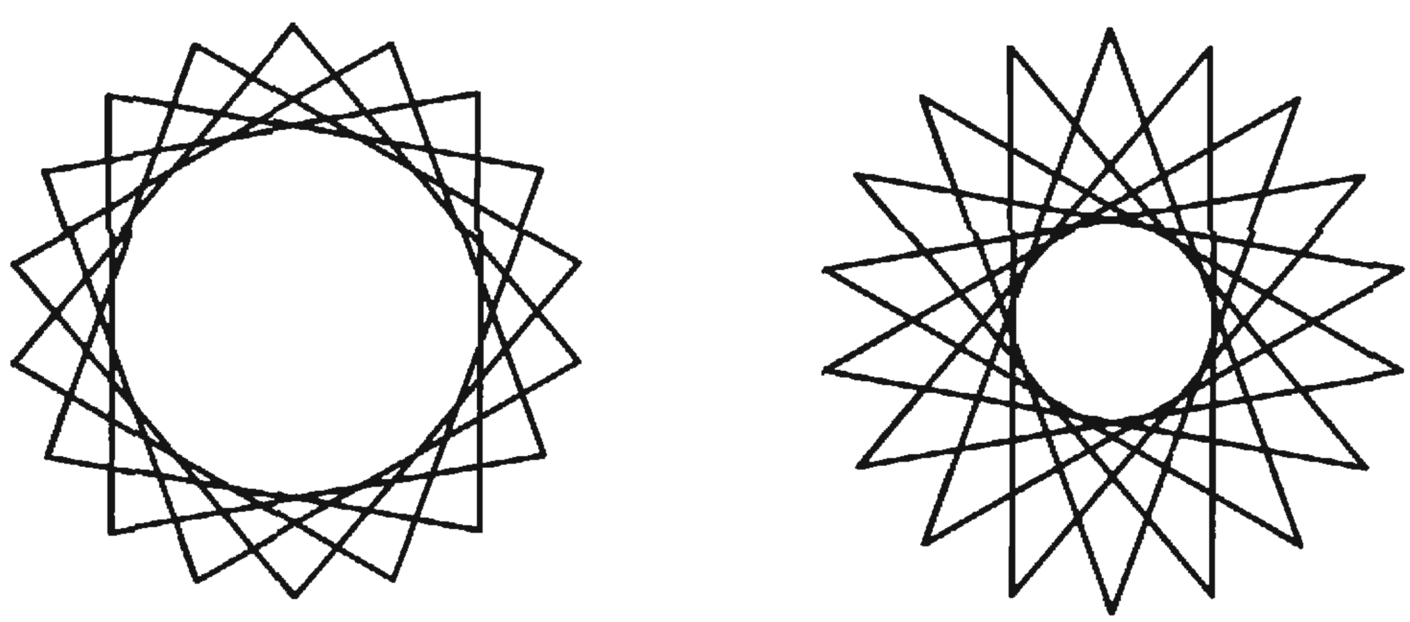
1. По углам φ и ψ при стороне треугольника ($\varphi < \psi$) определите угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противолежащей данной стороне.
2. По углам φ и ψ прямоугольного треугольника ($\varphi < \psi$) определите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.
3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.
4. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC угол ABC равен $80°$. Внутри треугольника взята точка O так, что угол OAC равен $10°$, а угол OCA равен $30°$. Найдите угол AOB.
5. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

6. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?
7. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36°; б) 24°?
8. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.
9. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?
10. Изобразите многоугольник, имеющий четыре острых угла.
11. Найдите суммы углов: а) пятиконечной звездочки; б) семиконечной звездочки (рис. 309, а, б).



а) б)

Рис. 309



а) б)

Рис. 310

12. Чему равны степени звездчатых многоугольников на рисунке 310?
13. Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся две диагонали, угол между которыми не превосходит 5°.
14. В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что разности противоположных сторон такого шестиугольника равны между собой.
★15. Докажите, что утверждение о сумме углов треугольника эквивалентно аксиоме параллельных.

§ 63. Замечательные точки и линии треугольника

Здесь мы рассмотрим свойства биссектрис, медиан и высот треугольника, расширим число замечательных точек и линий треугольника.

Начнем с задач, относящихся к расположению биссектрис, медиан и высот треугольника.

Задача 1. По углам A и B треугольника ABC ($\angle A < \angle B$) определите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины C.

Решение. Пусть CD — высота, CE — биссектриса, тогда $\angle BCD = 90^\circ - \angle B$, $\angle BCE = (180^\circ - \angle A - \angle B) : 2$. Следовательно, $\angle DCE = \dfrac{\angle B - \angle A}{2}$.

Задача 2. К какой из вершин треугольника ближе расположена точка пересечения биссектрис?

Решение. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 311). Воспользуемся тем, что против большей стороны треугольника лежит больший угол. Если $AB > BC$, то $\angle A < \angle C$ и, следовательно, $\angle OAD < \angle OCD$. Поэтому $OC < OA$, т. е. центр O вписанной окружности лежит ближе к вершине, расположенной против большей стороны.

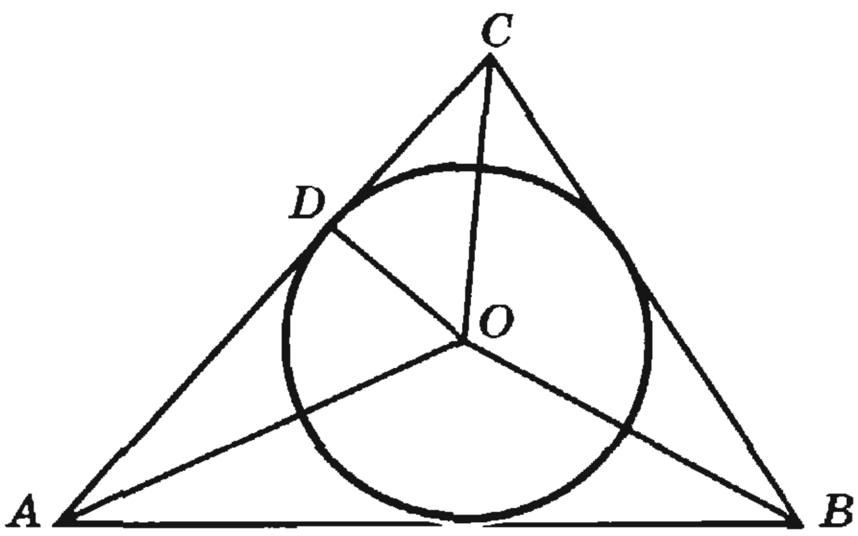


Рис. 311

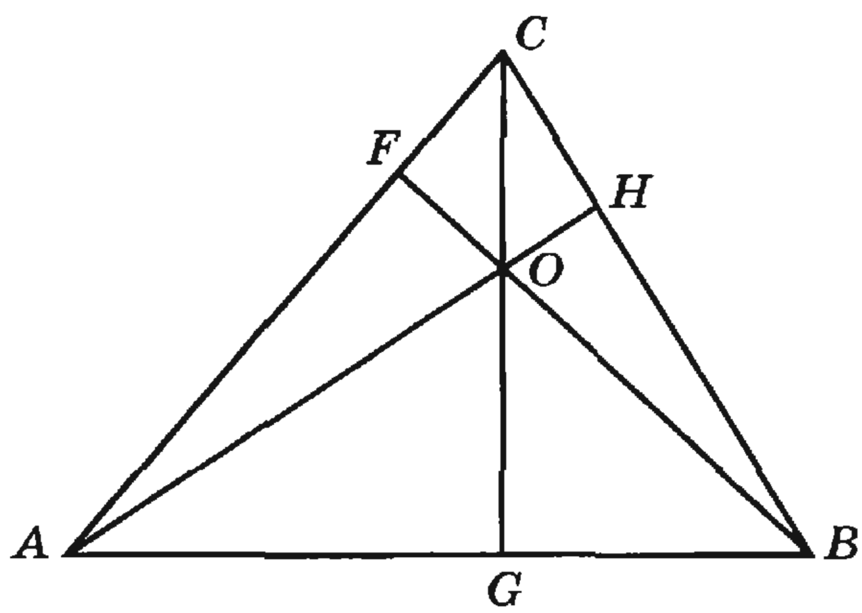


Рис. 312

Задача 3. Какая из высот треугольника наименьшая?

Решение. Пусть O — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 312). Если $AC < AB$, то $\angle C > \angle B$. Окружность с диаметром BC пройдет через точки F и G. Учитывая, что из двух хорд меньше та, на которую опирается меньший вписанный угол, получаем, что $CG < BF$, т. е. *меньше та высота, которая опущена на большую сторону.*

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

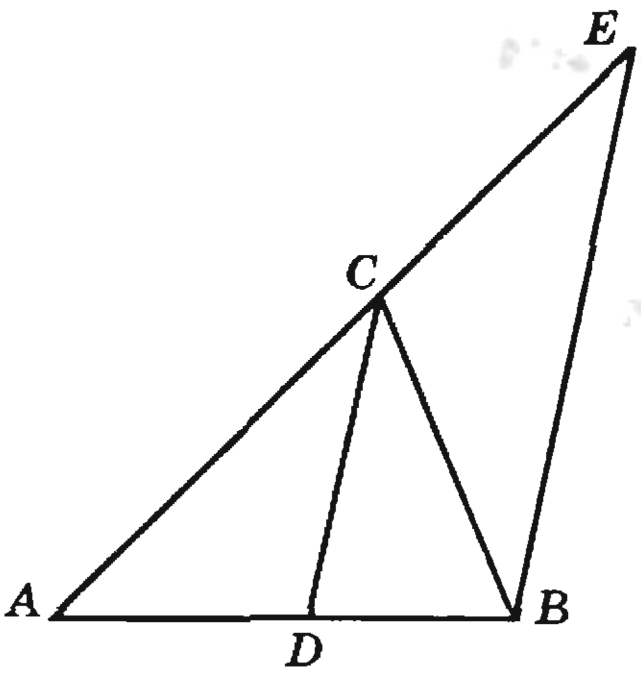


Рис. 313

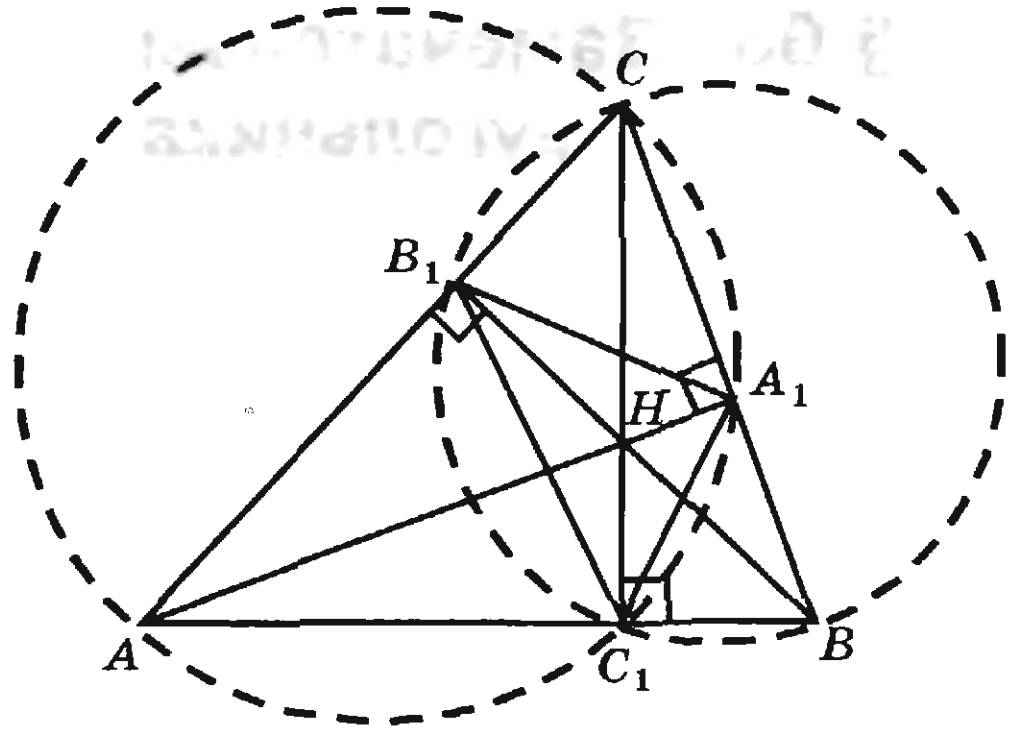


Рис. 314

Доказательство. Пусть CD биссектриса треугольника ABC (рис. 313). Докажем, что $AD : DB = AC : BC$. Проведем прямую BE, параллельную CD. В треугольнике BEC угол B равен углу E. Следовательно, $BC = EC$. По следствию из теоремы о пропорциональных отрезках, $AD : DB = AC : CE = = AC : BC$. ■

Теорема. Пусть в остроугольном треугольнике ABC (рис. 314) точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот. Тогда точка H пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство. На сторонах AC и BC треугольника ABC, как на диаметрах, построим окружности. Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат этим окружностям. Поэтому $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. $\angle B_1BC = \angle CAA_1$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Следовательно, $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$, т. е. CC_1 является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$. Аналогичным образом показывается, что AA_1 и BB_1 являются биссектрисами углов $B_1A_1C_1$ и $A_1B_1C_1$. ■

Рассмотренный треугольник, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника, дает ответ на одну из классических экстремальных задач.

Задача Фаньяно. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

Решение. Пусть ABC — данный остроугольный треугольник. На его сторонах требуется найти такие точки A_1, B_1, C_1, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ был бы наименьшим (рис. 315).

Зафиксируем сначала точку C_1 и будем искать точки A_1 и B_1, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (при данном положении точки C_1).

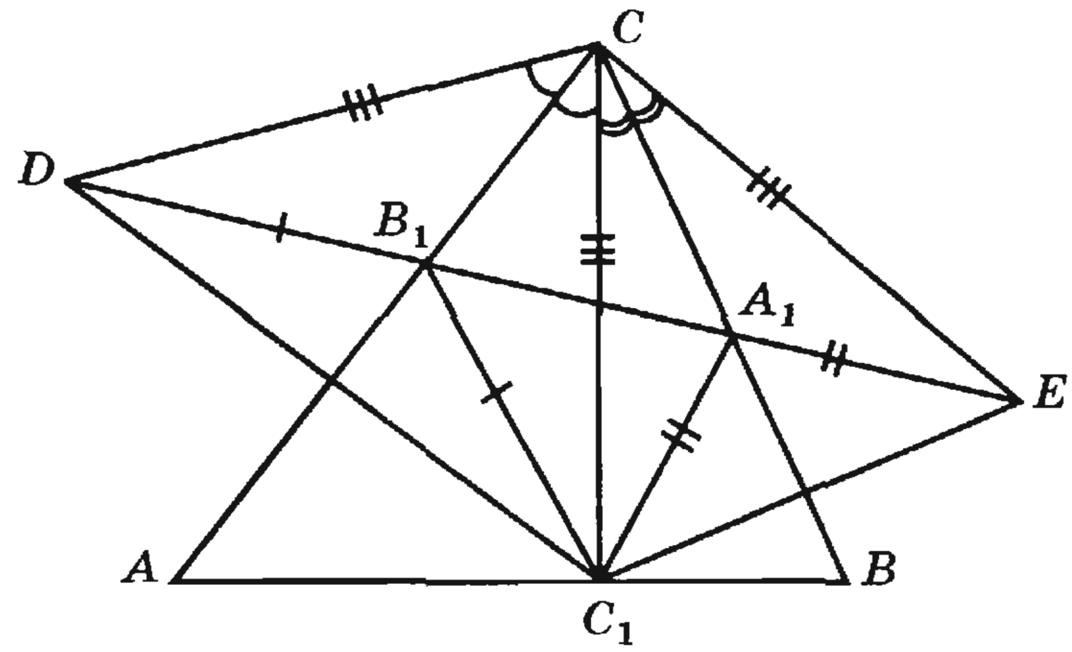


Рис. 315

Для этого рассмотрим точки D и E, симметричные точке C_1 относительно прямых AC и BC. Тогда $B_1C_1 = B_1D$, $A_1C_1 = A_1E$, и, следовательно, периметр треугольника $A_1B_1C_1$ будет равен длине ломаной DB_1A_1E. Ясно, что длина этой ломаной наименьшая, если точки B_1, A_1 лежат на прямой DE.

Будем теперь менять положение точки C_1 и искать такое положение, при котором периметр соответствующего треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

Так как точка D симметрична C_1 относительно AC, то $CD = CC_1$ и $\angle ACD = \angle ACC_1$. Аналогично, $CE = CC_1$ и $\angle BCE = \angle BCC_1$. Следовательно, треугольник CDE равнобедренный. Его боковая сторона равна CC_1. Основание DE равно периметру p треугольника $A_1B_1C_1$. Угол DCE равен удвоенному углу ACB треугольника ABC и, значит, не зависит от положения точки C_1.

В равнобедренном треугольнике с данным углом при вершине основание тем меньше, чем меньше боковая сторона. Поэтому наименьшее значение периметра p достигается в случае наименьшего значения CC_1. Это значение принимается в случае, если CC_1 является высотой треугольника ABC. Таким образом, искомой точкой C_1 на стороне AB является основание высоты, проведенной из вершины C.

Заметим, что мы могли бы фиксировать сначала не точку C_1, а точку A_1 или точку B_1 и получили бы, что A_1 и B_1 являются основаниями соответствующих высот треугольника ABC.

Из этого следует, что искомым треугольником наименьшего периметра, вписанным в данный остроугольный треугольник ABC, является треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC. ■

Рассмотрим теперь замечательные точки и линии треугольника. К числу таких точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся:

а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);

б) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон (центр описанной окружности);

в) точка пересечения высот (ортоцентр);

г) точка пересечения медиан (центроид).

Добавим к ним некоторые другие замечательные точки и линии.

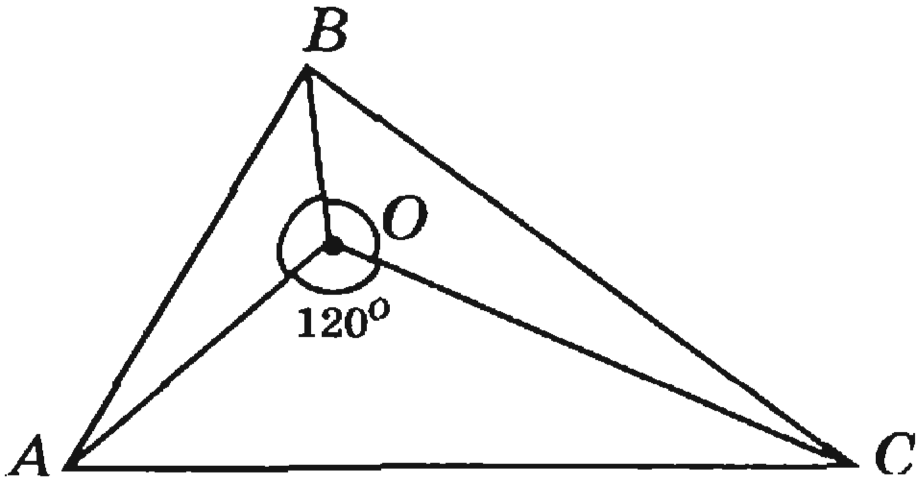


Рис. 316

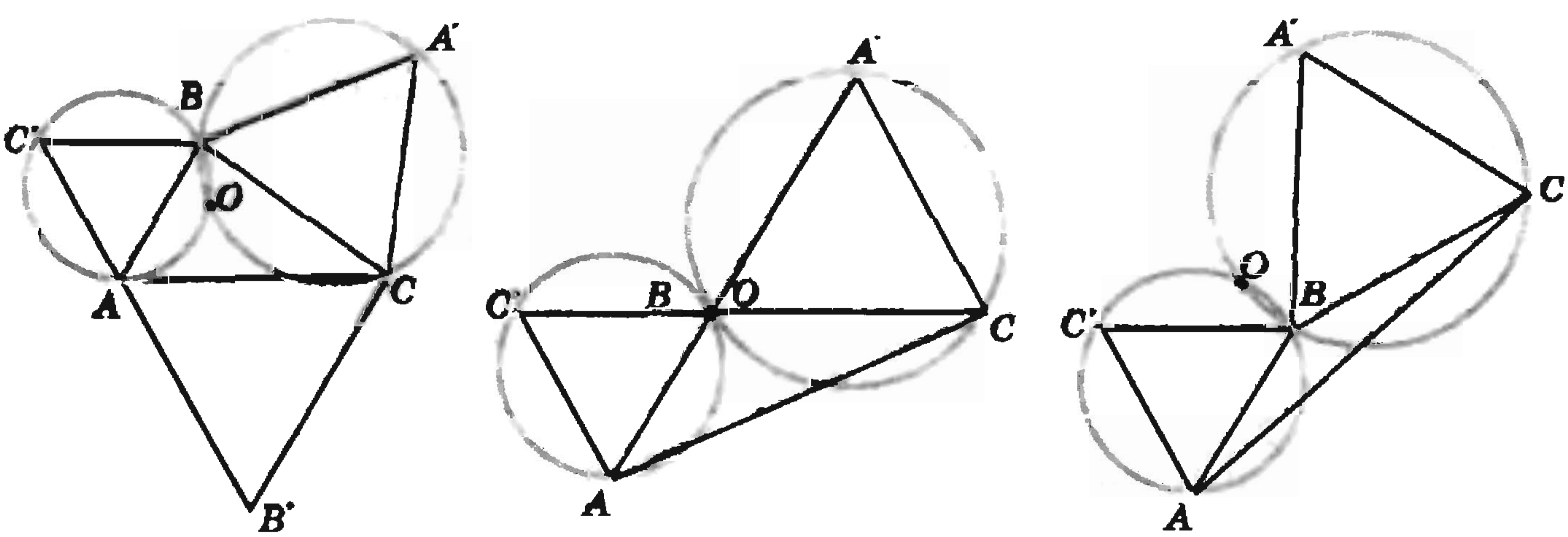
Точка Торричелли. Пусть дан треугольник ABC. Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка O, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 316), т. е. углы AOB, AOC и BOC равны 120°.

Докажем, что в случае если все углы треугольника меньше 120°, точка Торричелли существует.

На стороне AB треугольника ABC построим равносторонний треугольник ABC' (рис. 317, а) и опишем около него окружность. Отрезок AB стягивает дугу этой окружности величиной 120°. Следовательно, точки этой дуги, отличные от A и B, обладают тем свойством, что отрезок AB виден из них под углом 120°. Аналогичным образом, на стороне BC треугольника ABC построим равносторонний треугольник BCA' (рис. 317, а) и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от B и C, обладают тем свойством, что отрезок BC виден из них под углом 120°. В случае, когда углы треугольника меньше 120°, эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке O. В этом случае $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 120°$. Следовательно, и $\angle AOC = 120°$. Поэтому точка O является искомой.

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, равен 120°, точкой пересечения дуг окружностей будет точка B (рис. 317, б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны AB и BC.

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, больше 120° (рис. 317, в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются и точки Торричелли также не существует.



а) б) в)

Рис. 317

С точкой Торричелли связана задача Ферма о нахождении точки, сумма расстояний от которой до трех данных точек наименьшая.

Задача Ферма. Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника принимает наименьшее значение.

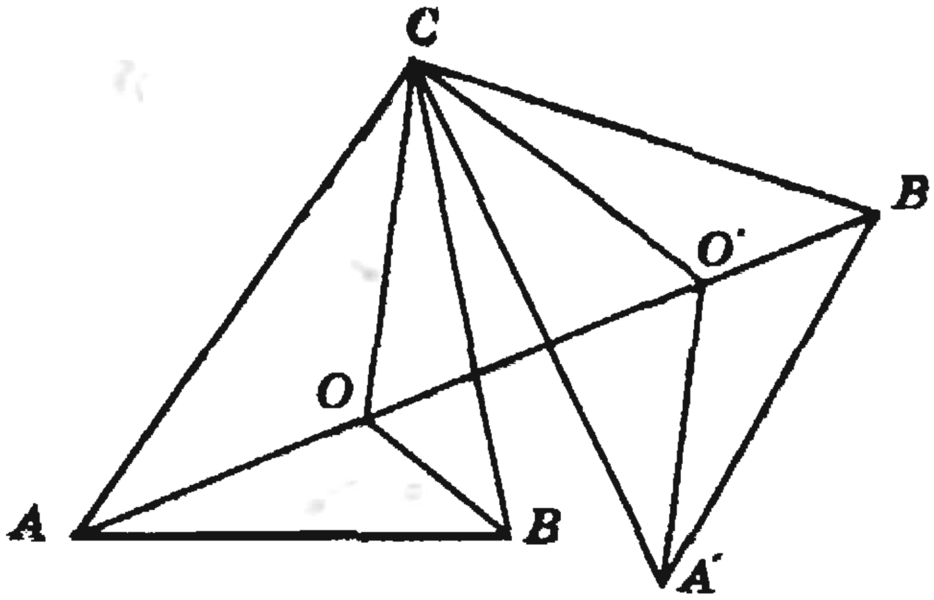


Рис. 318

Решение. Докажем, что в случае если углы треугольника меньше 120°, искомой точкой в задаче Ферма является точка Торричелли.

Повернем треугольник ABC вокруг вершины C на угол 60° (рис. 318). Получим треугольник $A'B'C$. Возьмем произвольную точку O в треугольнике ABC. При повороте она перейдет в какую-то точку O'. Треугольник $OO'C$ равносторонний, так как $CO = CO'$ и $\angle OCO' = 60°$, следовательно, $OC = OO'$. Поэтому сумма длин $OA + OB + OC$ будет равна длине ломаной $AO + OO' + O'B'$. Ясно, что наименьшее значение длина этой ломаной принимает в случае, если точки A, O, O', B' лежат на одной прямой. Если O — точка Торричелли, то это так. Действительно, $\angle AOC = 120°$, $\angle COO' = 60°$. Следовательно, точки A, O, O' лежат на одной прямой. Аналогично, $\angle CO'O = 60°$, $\angle CO'B' = 120°$. Следовательно, точки O, O', B' лежат на одной прямой. Значит, все точки A, O, O', B' лежат на одной прямой. ■

Самостоятельно докажите, что *в случае если один из углов треугольника больше или равен 120°, то решением задачи Ферма является вершина этого угла.*

Окружность девяти точек. Пусть в треугольнике ABC (рис. 319) H — точка пересечения высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот; A_2, B_2, C_2 — середины соответствующих сторон; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH. Тогда точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек или окружностью Эйлера.

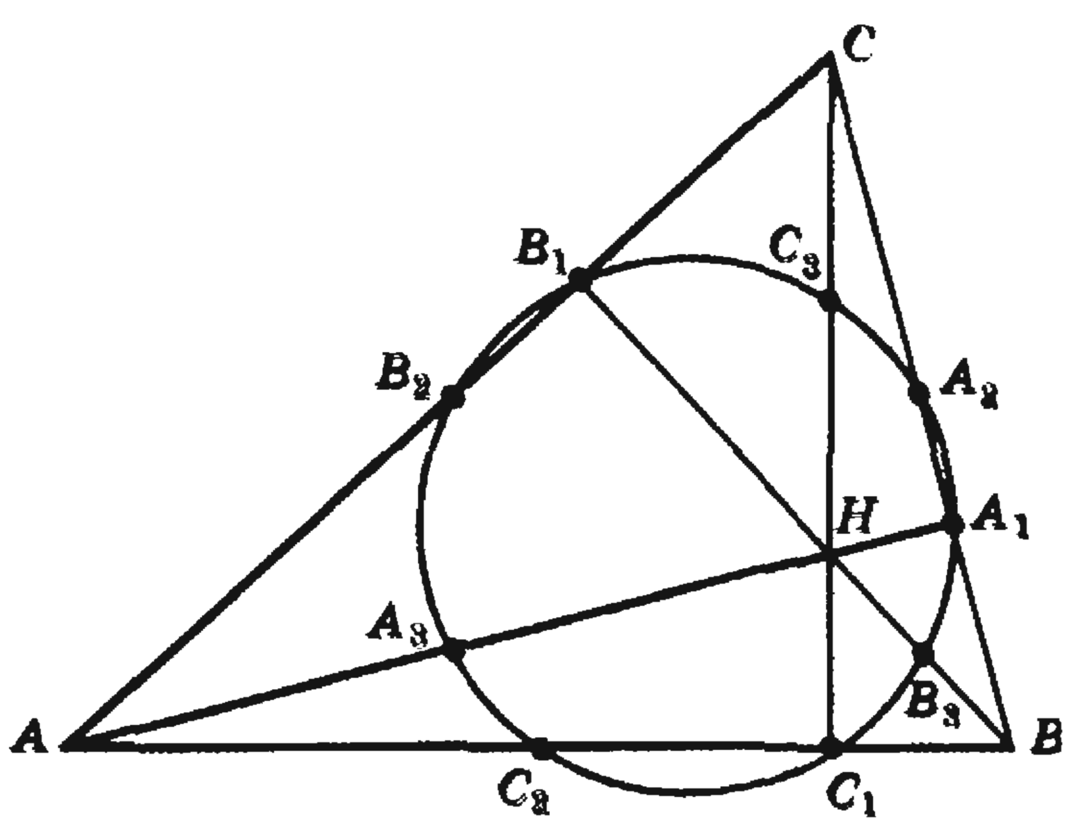


Рис. 319

Действительно, A_3B_2 — средняя линия треугольника AHC и, следовательно, $A_3B_2 \parallel CC_1$. B_2A_2 —

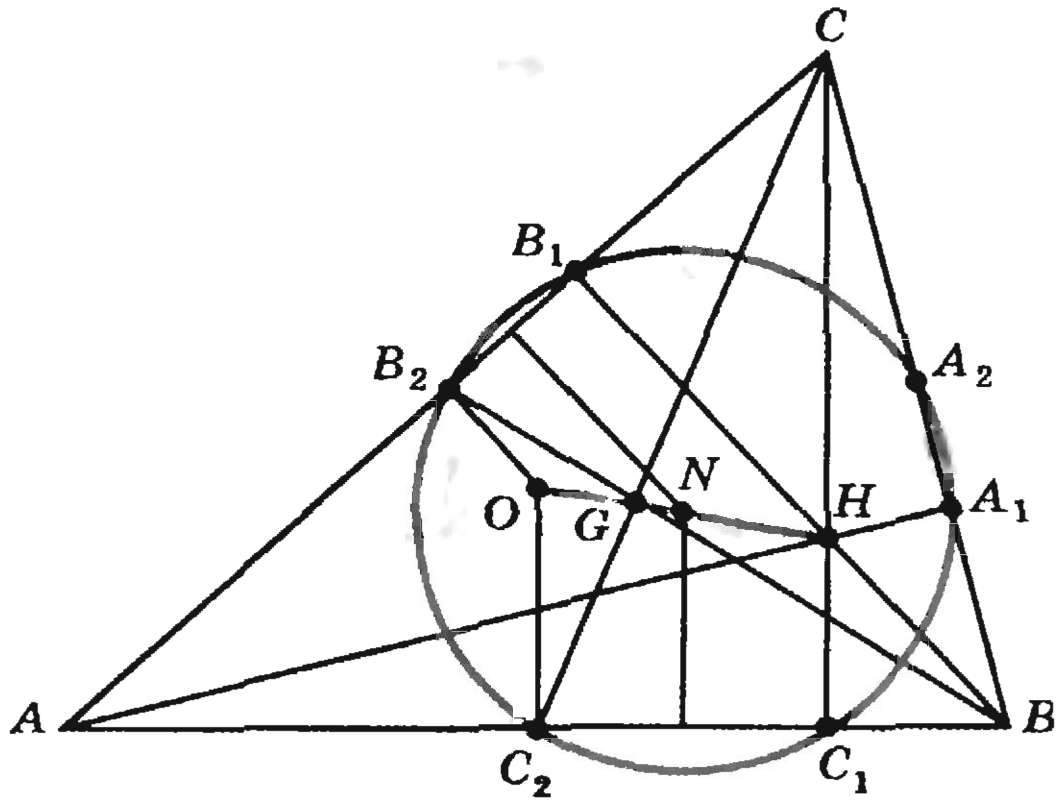


Рис. 320

средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $B_2A_2 \parallel AB$. Так как $CC_1 \perp AB$, то $\angle A_3B_2A_2 = 90°$. Аналогично, $\angle A_3C_2A_2 = 90°$. Поэтому точки A_2, B_2, C_2, A_3 лежат на одной окружности с диаметром A_2A_3. Так как $AA_1 \perp BC$, то точка A_1 также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки A_1 и A_3 лежат на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$. Аналогичным образом показывается, что точки B_1 и B_3, C_1 и C_3 лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности.

Прямая Эйлера. В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.

Действительно, пусть в треугольнике ABC (рис. 320), точка O — центр описанной окружности; G — точка пересечения медиан; H — точка пересечения высот. Требуется доказать, что точки O, G, H лежат на одной прямой и центр окружности девяти точек N делит отрезок OH пополам.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке G и коэффициентом $-0{,}5$. Вершины A, B, C треугольника ABC перейдут соответственно в точки A_2, B_2, C_2. Высоты треугольника ABC перейдут в высоты треугольника $A_2B_2C_2$ и, следовательно, точка H перейдет в точку O. Поэтому точки O, G, H будут лежать на одной прямой.

Покажем, что середина N отрезка OH является центром окружности девяти точек. Действительно, C_1C_2 — хорда окружности девяти точек. Поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде содержит диаметр и пересекает OH в середине N. Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 содержит диаметр и пересекает OH в той же точке N. Значит, N — центр окружности девяти точек. ■

Упражнения

1. Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?

2. Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?
3. Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?
4. Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?
5. К какой из вершин треугольника ближе расположен ортоцентр?
6. К какой из сторон треугольника ближе расположен ортоцентр?
7. К какой из сторон треугольника ближе расположена точка пересечения медиан?
8. Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?
9. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины A, B, C треугольника ABC с вершинами соответственно A', B', C' равносторонних треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (рис. 317, а), пересекаются в точке Торричелли.
10. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $10°$ и $100°$. Найдите углы BOC и COA, где O — центр описанной окружности.
11. Докажите, что из четырех точек, одна из которых есть ортоцентр треугольника с вершинами в трех остальных точках, каждая является центроидом треугольника с вершинами в трех остальных точках.
12. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и DCA лежат на диагонали BD и делят ее на три равные части.
13. Докажите, что биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, расстояния от которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.
14. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA, равны между собой.
15. Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник — равносторонний.

§ 64. Теоремы Менелая и Чевы

Здесь мы рассмотрим общие теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

Начнем с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой (рис. 321). Опустим из вершин треугольника ABC перпендикуляры AA', BB', CC' на эту прямую.

Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'} \quad \text{и} \quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'}.$$

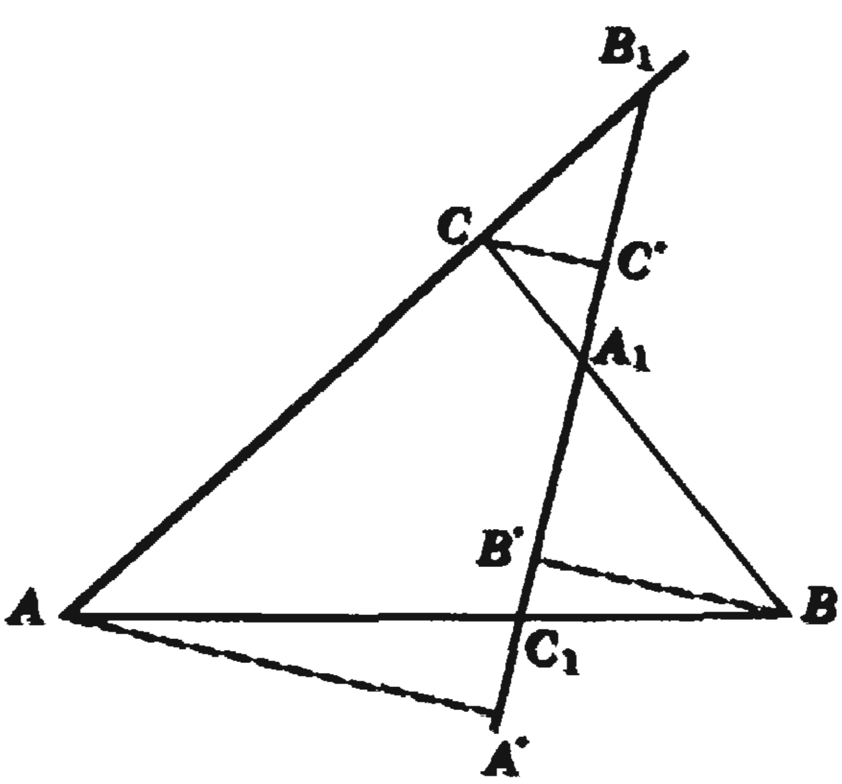


Рис. 321

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AA'}{BB'}\cdot\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}=1.$$

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C'. По доказанному, выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек C' и C_1, и, значит, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой. ■

Рассмотрим несколько примеров решения задач с использованием теоремы Менелая.

Пример 1. Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении $2:1$. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC и $AC = CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC?

Решение. Пусть A_1 — точка пересечения B_1C_1 и BC. По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = 2$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C} = 1$.

Пример 2. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и делятся в ней в отношении 3 : 1, считая от вершин.

Доказательство. Действительно, пусть $ABCD$ — тетраэдр, A_2, B_2, C_2, D_2 — центроиды соответствующих граней, A_1 — середина BC, O — точка пересечения AA_2 и DD_2 (рис. 322).

Применим теорему Менелая к треугольнику A_1DD_2 и прямой AA_2. Имеем

$$\frac{A_1A_2}{A_2D} \cdot \frac{DO}{OD_2} \cdot \frac{D_2A}{AA_1} = 1.$$

Так как A_2 — точка пересечения медиан треугольника BCD, то $\frac{A_1A_2}{A_2D} = \frac{1}{2}$. Так как D_2 — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\frac{D_2A}{AA_1} = \frac{2}{3}$. Поэтому $\frac{DO}{OD_2} = \frac{3}{1}$.

Заметим, что в таком же отношении делят отрезок DD_2 прямые BB_2 и CC_2. Следовательно, они также проходят через точку O и делятся в ней в отношении $3:1$, считая от вершин.

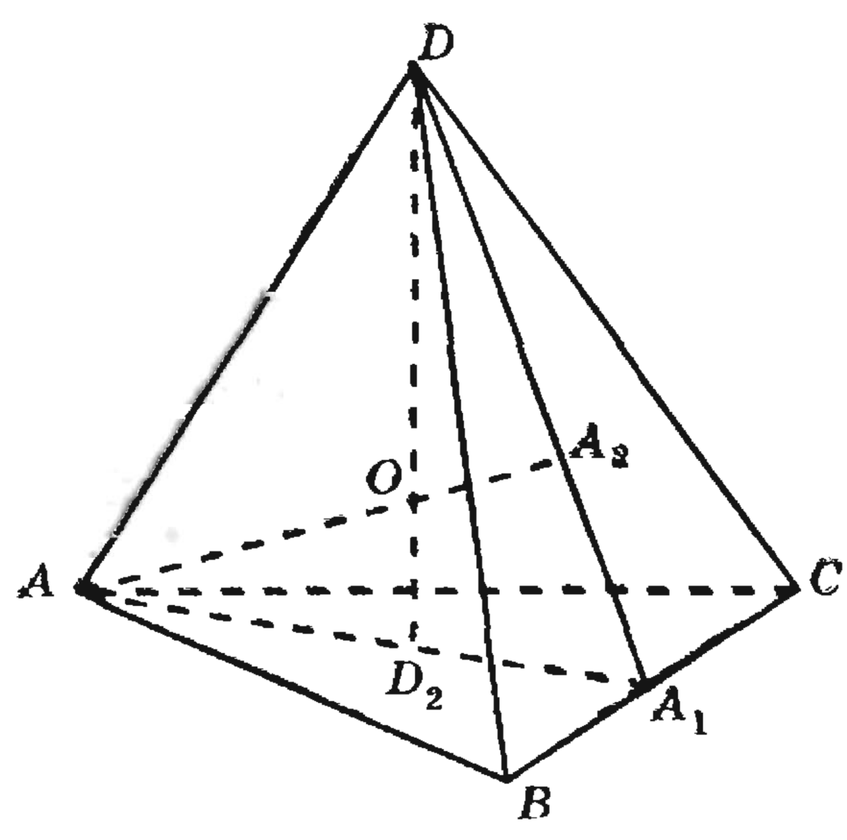


Рис. 322

Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевой.

Теорема Чевы. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.\ (*)$$

Доказательство. Предположим, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O (рис. 323). Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA', BB' на прямую CC_1. Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны, и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

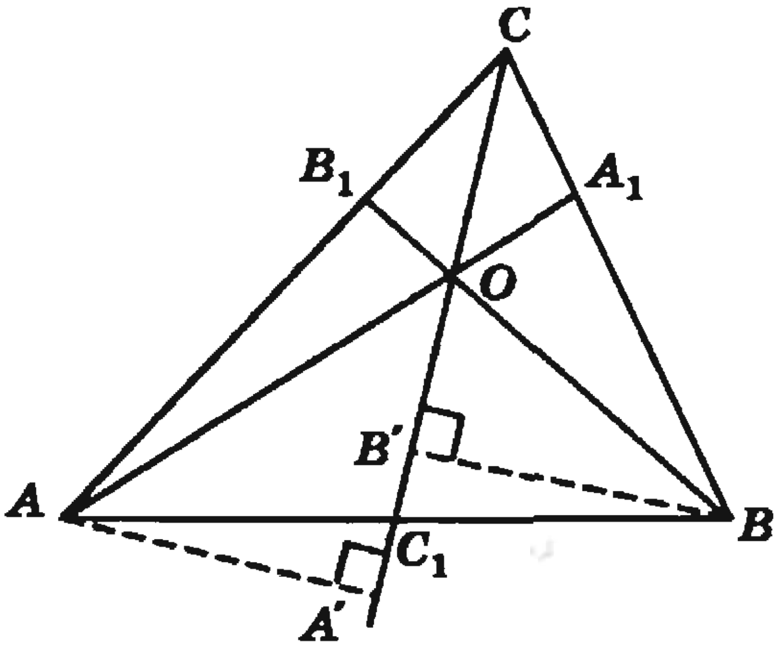


Рис. 323

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{BOA}}{S_{COA}}\quad\text{и}\quad\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Докажем обратное. Пусть для точек A_1, B_1, C_1, взятых на соответствующих сторонах треугольника ABC, выполняется равенство (*). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через O и точку пересечения прямых CO и AB через C'. Тогда, на основании доказанного, имеет место равенство

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Учитывая равенство (*), получим равенство $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек C' и C_1, и, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. ■

Заметим, что из теоремы Чевы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Пример 3. Точки C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении 1 : 2. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону AC.

Решение. По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Чевы, имеем $\frac{CB_1}{B_1A} = 4$.

Воспользуемся теоремой Чевы для установления еще одной замечательной точки треугольника.

Точка Жергона. Прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

Действительно, пусть окружность касается сторон треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 324).

Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, и, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

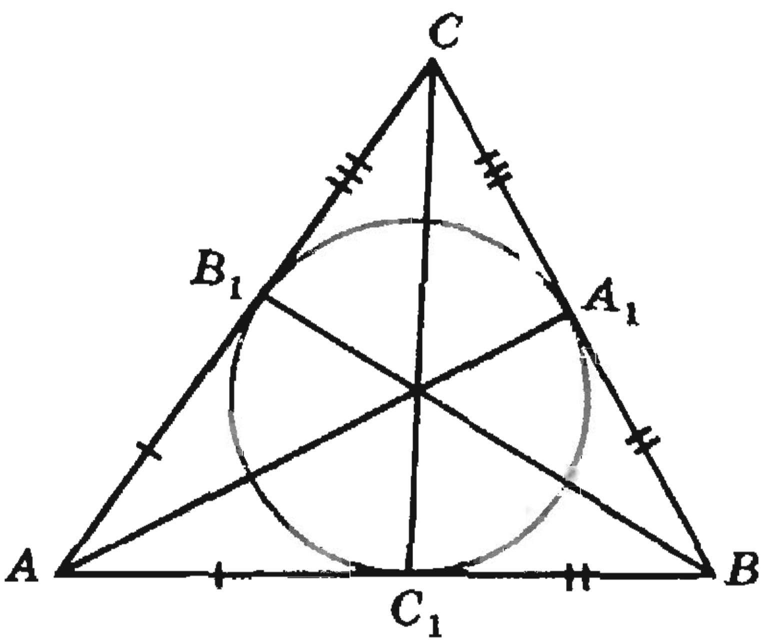


Рис. 324

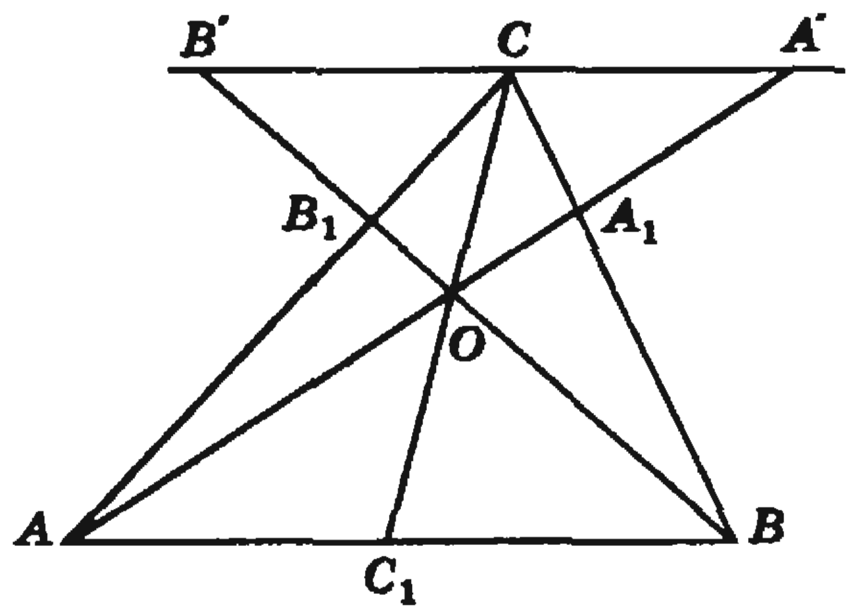


Рис. 325

Теорема Ван-Обеля. *Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, то имеет место равенство*

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Доказательство. Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную AB (рис. 325). Продолжим AA_1 и BB_1 до пересечения с этой прямой в точках A' и B' соответственно. Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C + CB'}{AB} = \frac{A'C}{AB} + \frac{CB'}{AB}.$$

Из подобия треугольников $A'CA_1$ и ABA_1, $CB'B_1$ и ABB_1 имеем:

$$\frac{A'C}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{CB'}{AB} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Следовательно, $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{CA_1}{A_1B} + \dfrac{CB_1}{B_1A}$. ■

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пример 4. В каком отношении делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения?

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC, O — точка их пересечения, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}.$$

Поэтому $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{a+b}{c}$. Аналогично $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{b+c}{a}$ и $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{a+c}{b}$.

Упражнения

1. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC. Точка O — середина отрезка CC_1. В каком отношении делит прямая AO сторону BC?
2. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1 : 2. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 2 : 1. Прямая A_1B_1 пересекает продолжение стороны AB в точке C_1. Найдите отношение $AB : BC_1$.
3. Точки C_1, B_1, A_1 делят стороны AB, AC, BC соответственно в отношениях 4 : 1, 2 : 1, 1 : 2. Выясните, пересекаются ли прямые AA_1, BB_1, CC_1 в одной точке.
4. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1 : 3. В каком отношении должна делить точка B_1 сторону AC, чтобы точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 принадлежала медиане CC_1 треугольника ABC?
5. Используя теорему Ван-Обеля, докажите, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.
6. На продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите отношение, в котором прямая AB_1 делит сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

7. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях 2 : 1 и 1 : 2. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника AOB.

8. На медиане CC_1 треугольника ABC взята точка M. Прямые AM и BM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.

9. Отрезок MN, соединяющий середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, одно из оснований AB или CD которой вдвое больше другого.

10. Пусть на продолжении сторон AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

11. Пусть на стороне AB и продолжении сторон BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

12. *Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке* (**точке Нагеля**). (Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.)

13. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1.$$

14. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2.$$

15. Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1.$$

§ 65. Решение треугольников

Решение треугольника означает нахождение одних элементов треугольника по другим известным его элементам. К решению треугольников, в частности, относятся теоремы косинусов и синусов, рассмотренные в курсе геометрии 7—9 классов. Напомним их формулировки.

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Таким образом, для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Таким образом, для треугольника ABC имеют место равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}.$$

Здесь мы уточним эту теорему и докажем, что для произвольного треугольника ABC отношение его сторон к синусам противолежащих углов постоянно и равно диаметру описанной около этого треугольника окружности, т. е. имеют место равенства

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

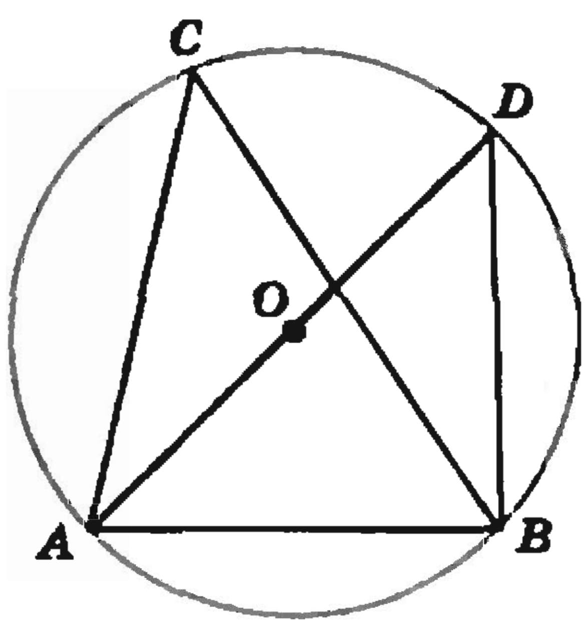


Рис. 326

Действительно, пусть ABC — данный треугольник (рис. 326). Опишем около него окружность с центром O и радиусом R. Рассмотрим треугольник ABD, сторона AD которого проходит через O. Тогда углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. Угол ABD опирается на половину окружности и, следовательно, равен $90°$.

Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R$. Аналогично имеют место равенства $\frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{AC}{\sin B}$. ■

Применим теорему косинусов для доказательства еще одной важной теоремы.

Теорема Стюарта. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Точка D делит сторону AB на отрезки $AD = c'$, $DB = c''$ и $CD = d$. Тогда *имеет место равенство* $d^2c = a^2c' + b^2c'' - cc'c''$.

Доказательство. Пусть CE — высота треугольника ABC (рис. 327). По теореме косинусов, примененной к треугольникам ADC и BDC, имеем:

$$b^2 = (c')^2 + d^2 + 2c'DE,$$
$$a^2 = (c'')^2 + d^2 - 2c''DE.$$

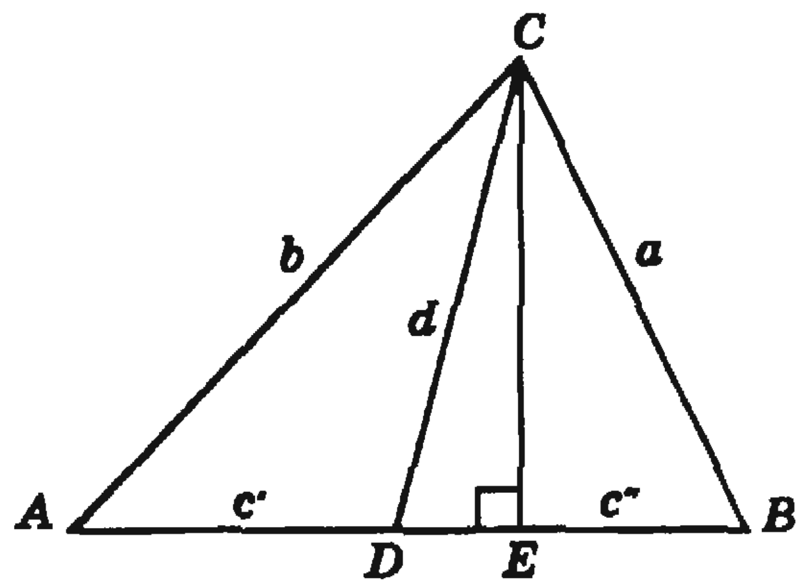


Рис. 327

Умножим первое равенство на c'', второе — на c' и сложим. Получим $b^2c'' + a^2c' = (c'+c'')c'c'' + d^2(c'+c'')$, из которого и следует требуемое равенство.

Используя теорему Стюарта, вычислим биссектрису $CC_1 = \beta_c$ треугольника по его сторонам $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Для этого воспользуемся тем, что биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Обозначим $AC_1 = c'$, $BC_1 = c''$. Тогда $c' + c'' = c$ и $ac' = bc''$. Из этих двух уравнений находим c' и c'':

$$c' = \frac{bc}{a+b}, \quad c'' = \frac{ac}{a+b}.$$

Подставляя теперь эти выражения в равенство теоремы Стюарта, получим $(\beta_c)^2c = a^2\frac{bc}{a+b} + b^2\frac{ac}{a+b} - c\frac{abc^2}{(a+b)^2}$. Откуда

$$\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Рассмотрим формулы, выражающие площадь треугольника через его элементы.

В курсе геометрии 7—9 классов доказывалось, что для площади S треугольника имеют место формулы:

$$S = \frac{1}{2}ah, \qquad (1)$$

где a — сторона треугольника, h — высота, проведенная к этой стороне;

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C, \qquad (2)$$

где a, b — стороны треугольника, C — угол, заключенный между этими сторонами.

Еще одна важная формула, выражающая площадь треугольника через его стороны, впервые была найдена древнегреческим математиком Героном Александрийским (приблизительно I век) и носит название **формулы Герона:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — его полупериметр.

Для доказательства этой формулы воспользуемся формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. Выразим $\cos C$ через стороны треугольника по теореме косинусов, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Отсюда $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Значит,

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 + \cos C)(1 - \cos C) =$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)}{4a^2b^2}.$$

Учитывая, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, получаем

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу площади треугольника, окончательно получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Воспользуемся формулой Герона для выражения радиуса r вписанной в треугольник окружности через стороны a, b, c этого треугольника.

Из курса геометрии 7—9 классов известна формула

$$S = pr,$$

выражающая площадь треугольника через полупериметр p и радиус r вписанной окружности. Подставляя вместо S ее выражение по формуле Герона, получим

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr.$$

Откуда

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Упражнения

1. Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.

2. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°?

3. Вычислите площадь треугольника по трем сторонам: а) 13, 14, 15; б) 5, 5, 6.

4. Стороны треугольника равны a, b и c. Угол C, противолежащий стороне c, равен 120°. Докажите, что выполняется равенство $c^2 = a^2 + ab + b^2$.

5. Докажите, что если для сторон треугольника выполняется равенство $(b + c + a)(b + c - a) = 3bc$, то угол A, лежащий против стороны a, равен 60°.

6. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что имеет место равенство

$$\frac{AC}{\sin\angle BCD} = \frac{BC}{\sin\angle ACD}.$$

7. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите медиану m_c, проведенную к стороне c.

8. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите высоту h_c, проведенную к стороне c.

9. Докажите, что для произвольного треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$ имеет место формула $c = a\cos B + b\cos A$.

10. Докажите, что для произвольного треугольника ABC имеет место формула $\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

11. Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой

$$R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S},$$

где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

12. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними φ. Найдите стороны параллелограмма.

13. Даны стороны параллелограмма a и b и один из его углов ψ. Найдите диагонали параллелограмма.

14. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

15. Докажите аналог теоремы косинусов для четырехугольников: «Квадрат стороны выпуклого четырехугольника равен сумме квадратов трех других сторон без удвоенного произведения пар этих сторон и косинусов углов между ними».

§ 66. Углы и отрезки, связанные с окружностью

В курсе геометрии 7—9 классов доказывалось, что угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Рассмотрим другие возможные случаи расположения угла и окружности.

Теорема. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C внутри окружности и точками A и B на окружности. Пусть A_1, B_1 — точки пересечения с окружностью сторон вертикального к нему угла (рис. 328). Проведем хорду BB_1. Угол ACB является внешним углом треугольника B_1CB. Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B + \angle B_1BA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства, измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство. ■

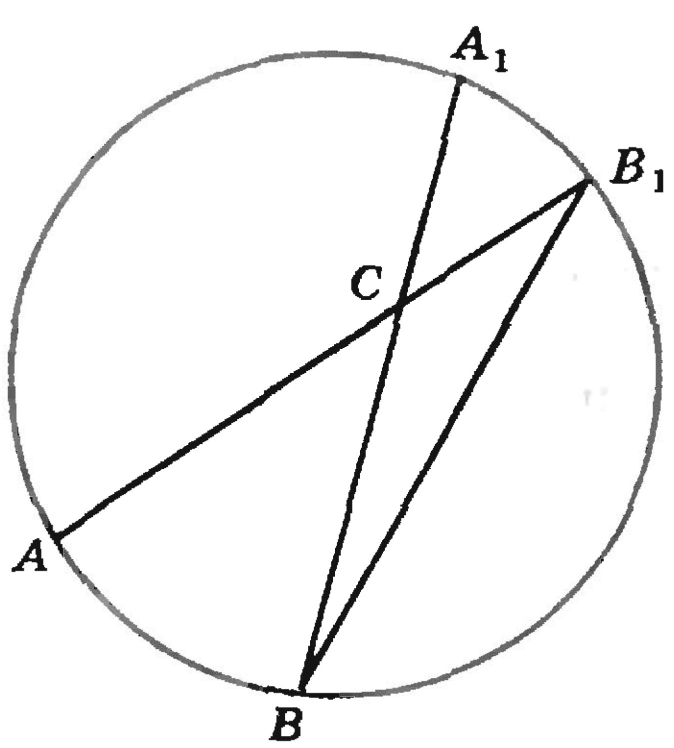
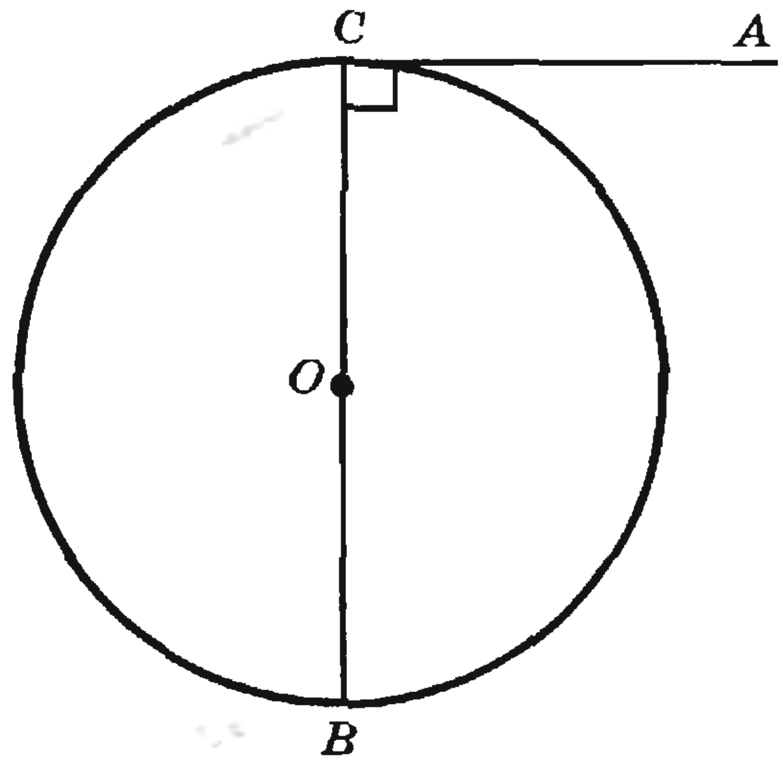


Рис. 328

Теорема. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.

Доказательство. Пусть угол ACB образован касательной AC и хордой BC окружности. Если этот угол прямой (рис. 329, а), то BC — диаметр окружности и, следовательно, угол ACB измеряется половиной дуги полуокружности, заключенной внутри этого угла. Если угол ACB острый (рис. 329, б), то проведем диаметр CD. Имеем $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$. Угол ACD измеряется половиной дуги CBD окружности. Угол BCD измеряется половиной дуги BD окружности.



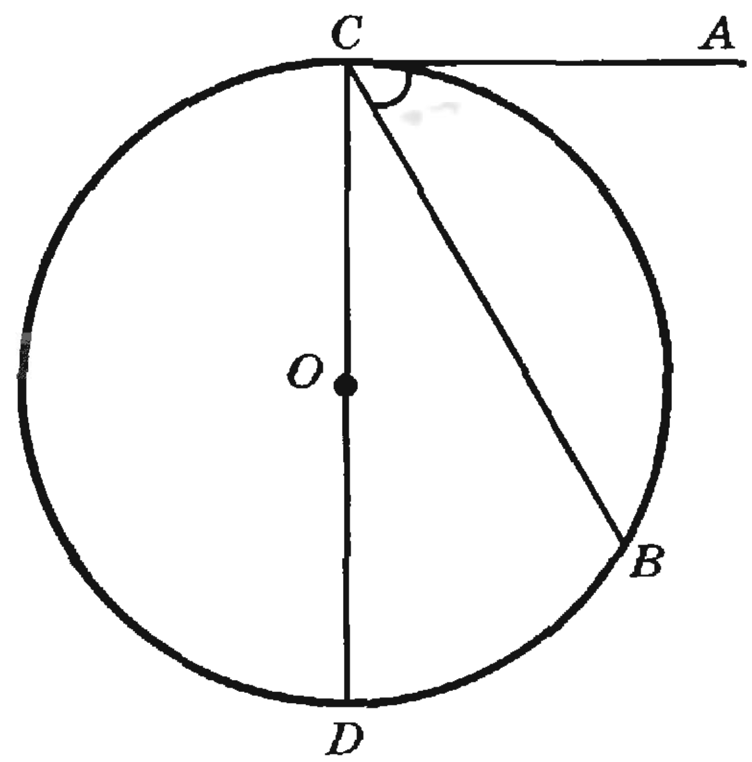


Рис. 329

Следовательно, их разность (угол ACB) измеряется половиной дуги CB окружности, *заключенной внутри этого угла.* ■

Самостоятельно рассмотрите случай, когда угол ACB — тупой.

Теорема. Угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим угол ACB с вершиной C вне окружности и точками A и B на окружности. Пусть A_1, B_1 — точки пересечения с окружностью сторон AC и BC (рис. 330). Проведем хорду AB_1. Угол AB_1B является внешним углом треугольника AB_1C. Следовательно, $\angle ACB = \angle AB_1B - \angle B_1AA_1$. Углы, стоящие в правой части равенства, измеряются половинами соответствующих дуг, что и завершает доказательство. ■

Рассмотрим теперь некоторые свойства отрезков, связанные со взаимным *расположением касательных и хорд окружности.*

Теорема. Произведение отрезков любой хорды, проведенной через внутреннюю точку окружности, равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O, хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E (рис. 331). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

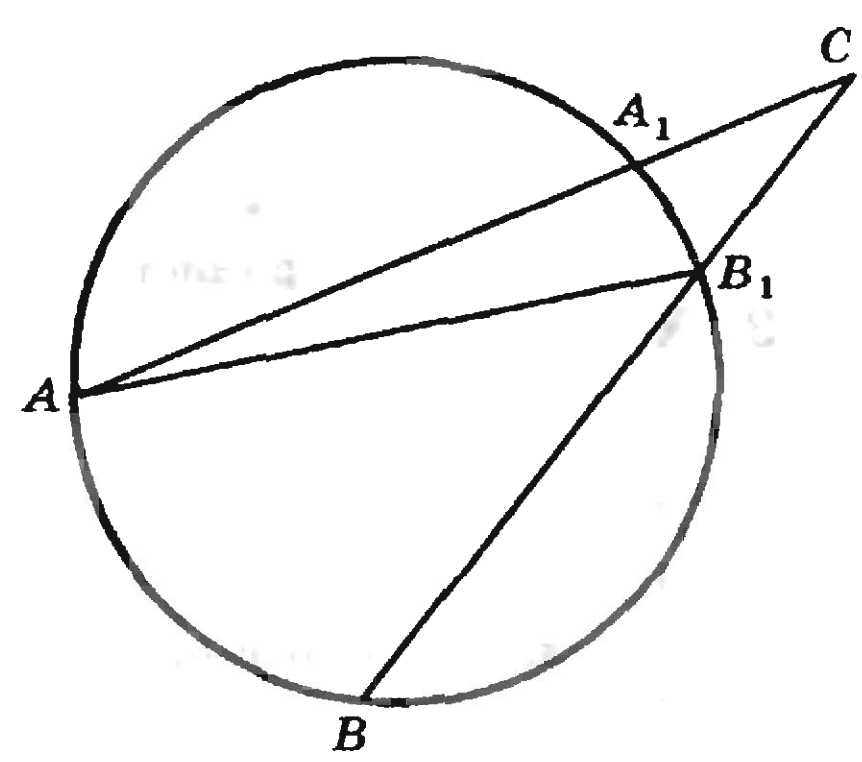


Рис. 330

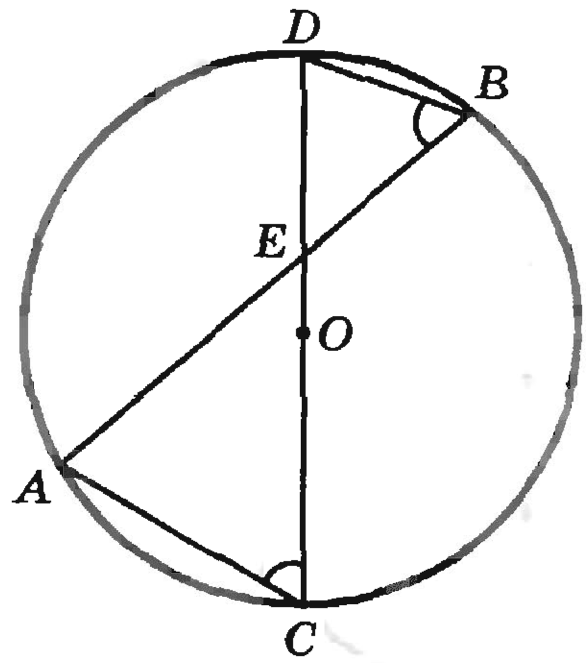


Рис. 331

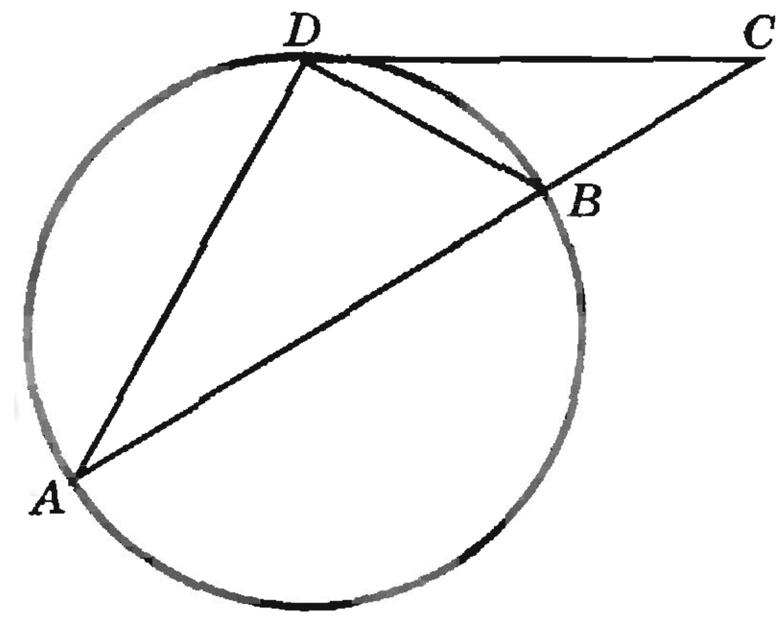


Рис. 332

Треугольники ACE и DBE подобны ($\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$). Следовательно, $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, и, значит, $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. ■

Теорема. Если через внешнюю точку C окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная CD (D — точка касания), то произведение отрезков AC и BC секущей равно квадрату отрезка CD касательной.

Доказательство. Соединим точки B и D отрезком BD (рис. 332). Треугольники ACD и DCB подобны (угол A равен углу BDC, угол C общий). Значит, $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BC}$, и, следовательно, $AC \cdot BC = CD^2$. ■

Упражнения

1. Через концы дуги в $60°$ проведены касательные. Найдите угол между ними.
2. Докажите, что угол между двумя касательными к окружности измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.
3. Хорда AB стягивает дугу окружности в $44°$. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведенными через ее концы.
4. Из точки пересечения двух окружностей проведены их диаметры. Докажите, что другие концы диаметров и вторая точка пересечения окружностей принадлежат одной прямой.
5. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что угол BAC — прямой.

6. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги. Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и принадлежащие разным окружностям, имеют одинаковые градусные величины.
7. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 5 : 4. Найдите величину угла ABC.
8. Окружность разделена точками A, B, C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 : 4. Через точки A, B, C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.
9. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C, для которых угол ACB равен данному углу.
10. Дан отрезок AB и прямая c, ему параллельная. Найдите точку C на прямой c, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.
11. Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая — пополам. Найдите вторую хорду.

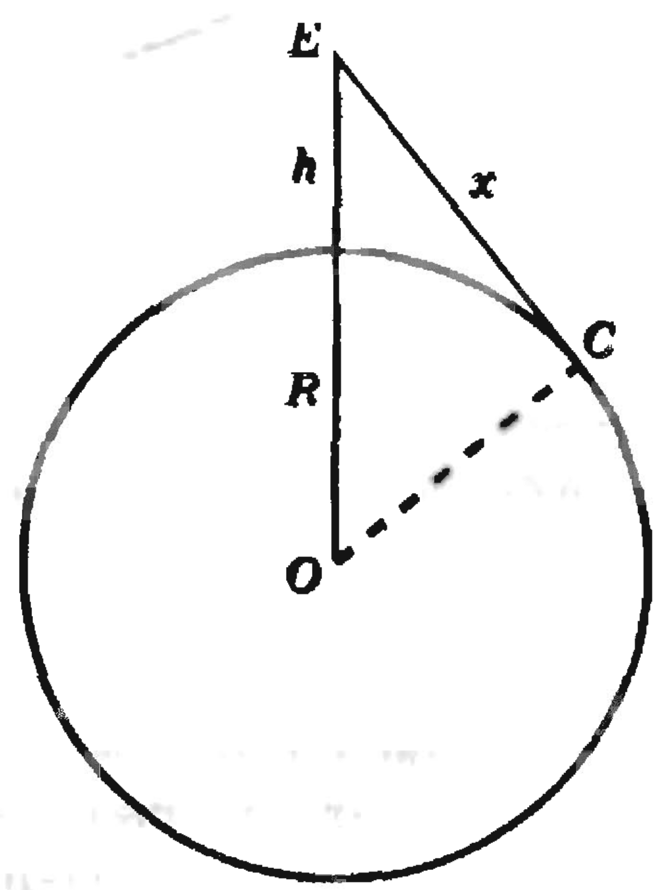


Рис. 333

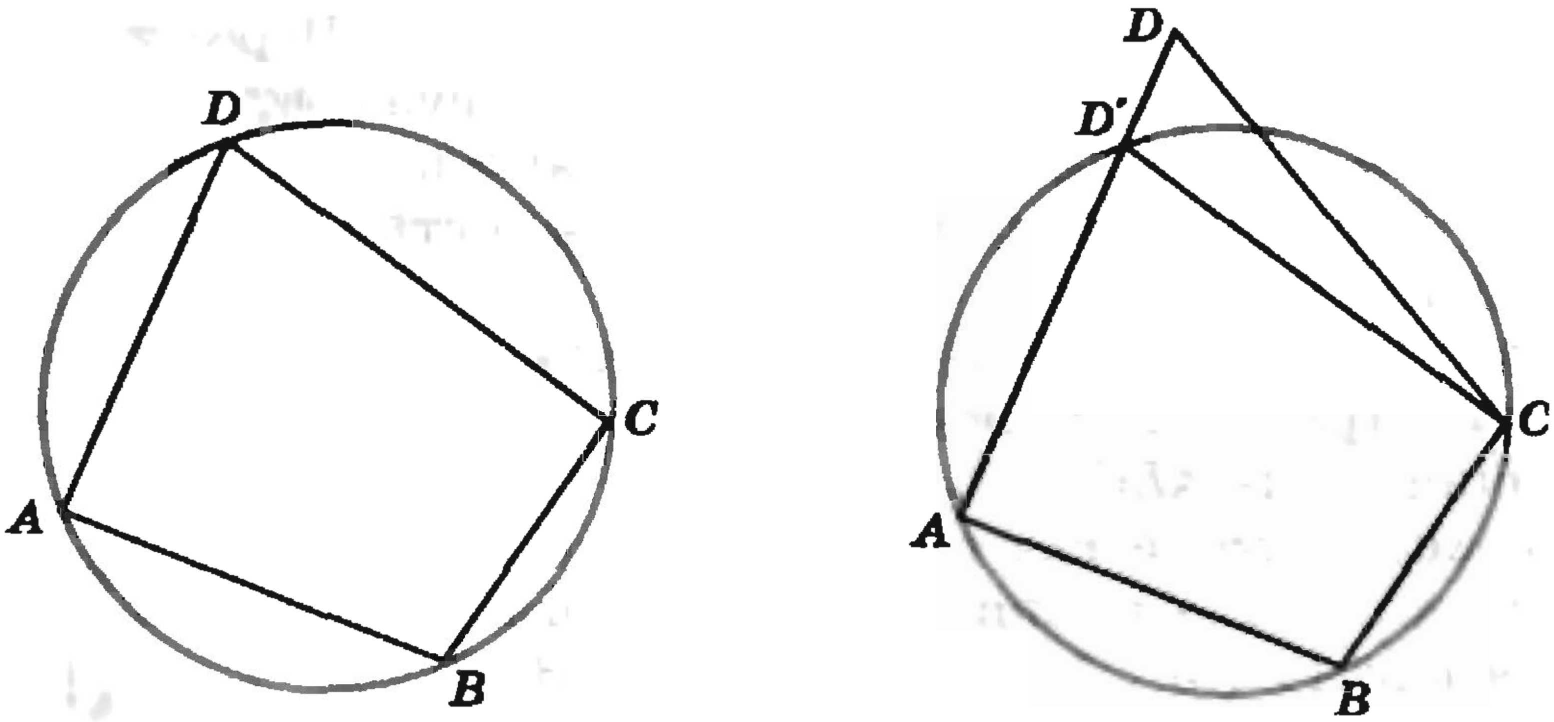
12. Как далеко видна поверхность Земли с самолета (рис. 333), летящего на высоте $h = 10$ км над Землей (радиус Земли $R \approx 6370$ км)?

§ 67. Вписанные и описанные многоугольники

В курсе геометрии 7—9 классов доказывалось, что около всякого треугольника можно описать окружность и во всякий треугольник можно вписать окружность. Оказывается, для четырехугольников это уже не имеет места.

Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, около которого описана окружность (рис. 334, а). Докажем, что $\angle B + \angle D = 180°$. Дей-



а) б)

Рис. 334

ствительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг ADC и ABC, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т. е. их сумма равна 180°.

Обратно, пусть в четырехугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна 180°. Через вершины A, B, C проведем окружность. Предположим, что эта окружность не проходит через вершину D (рис. 334, б). Обозначим точку пересечения окружности с прямой AD через D'. Тогда четырехугольник $ABCD'$ вписан в окружность и, следовательно, $\angle B + \angle D' = 180°$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180°$. Поэтому $\angle D = \angle D'$, что невозможно, так как прямые DC и $D'C$ не являются параллельными. Полученное противоречие показывает, что окружность, проходящая через точки A, B и C, должна пройти и через точку D. ■

Найдем условия, при которых около пятиугольника и шестиугольника можно описать окружности.

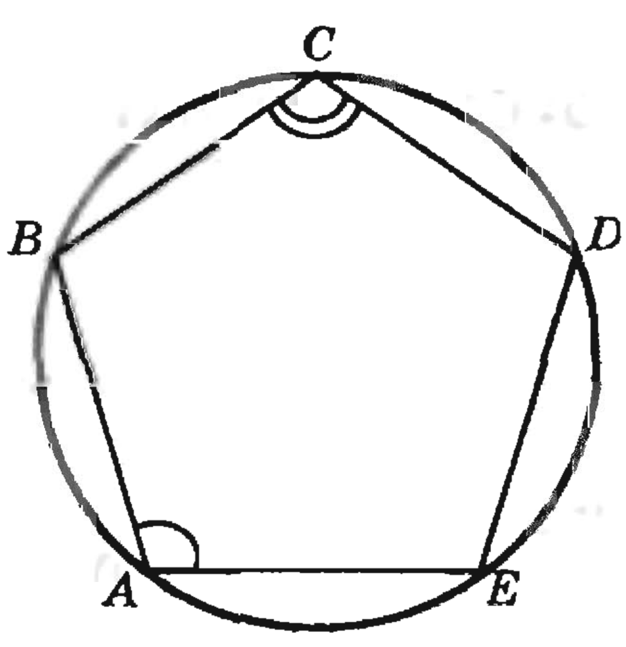


Рис. 335

Теорема. Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180°.

Доказательство следует из того, что углы A и C вписанного пятиугольника $ABCDE$ опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу DE (рис. 335).

Теорема. Сумма трех несмежных углов вписанного шестиугольника равна 360°.

Доказательство следует из того, что углы A, C и E вписанного шестиугольника $ABCDEF$ опираются на дуги, в сумме составляющие две окружности (рис. 336).

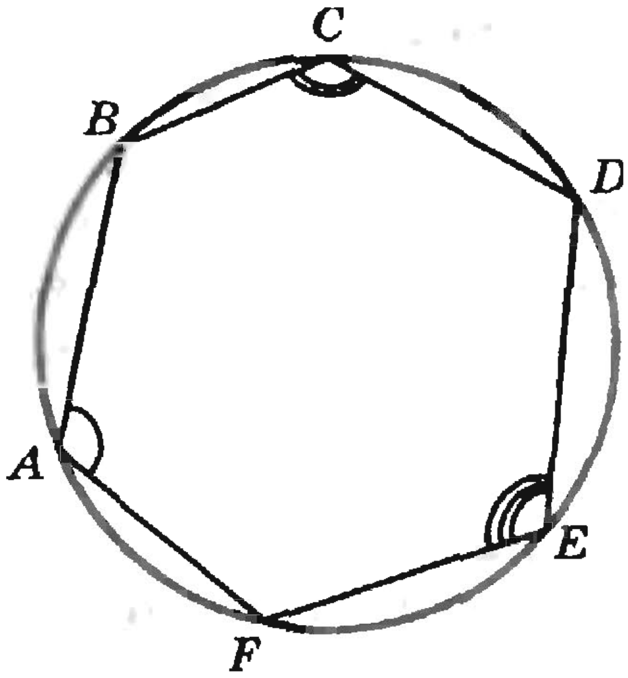


Рис. 336

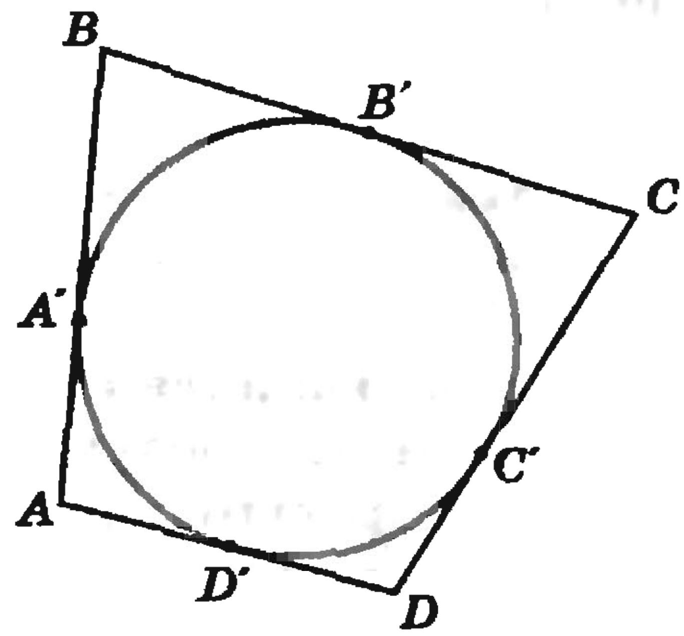


Рис. 337

Перейдем теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанности четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных углов, то для описанности выпуклого четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема. Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 337), A', B', C', D' — точки касания. Тогда $AA' = AD'$, $BA' = BB'$, $DC' = DD'$, $CC' = CB'$. Складывая почленно эти равенства, получим равенство $AB + CD = AD + BC$, означающее, что суммы противоположных сторон вписанного четырехугольника равны. ■

Теорема. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон углов A и D (рис. 338). Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис углов A и D. Предположим, что эта окружность не касается стороны BC. Проведем касательную $B'C'$, для которой угол B' равен углу B. Тогда четырехугольник $AB'C'D$ будет

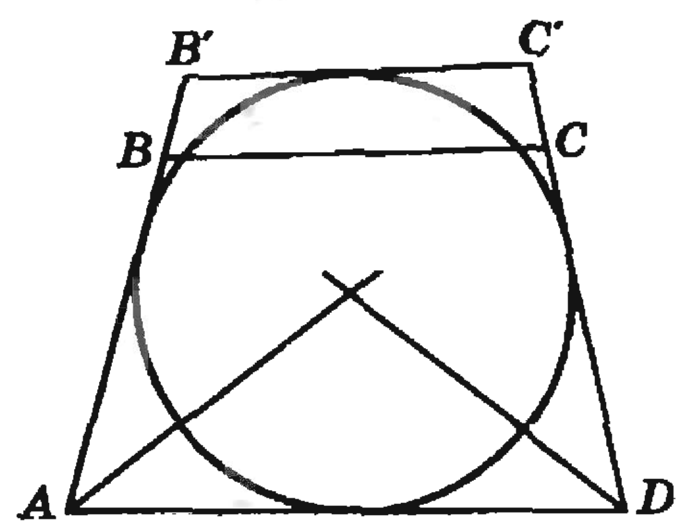


Рис. 338

описан около окружности и, следовательно, для него будет выполняться равенство $AB' + C'D = AD + B'C'$. С другой стороны, по условию выполняется равенство $AB + CD = AD + BC$. Вычитая из первого равенства второе, получим равенство $BB' + CC' = B'C' - BC$, или $B'C' = BB' + BC + CC'$. Последнее равенство не может выполняться для точек, не лежащих на одной прямой, и, значит, неверным было наше предположение о том, что окружность не касается стороны BC. ■

Самостоятельно подумайте, где в доказательстве использовалась выпуклость четырехугольника. Приведите пример невыпуклого четырехугольника, у которого суммы противоположных сторон равны и в который нельзя вписать окружность.

Следующие теоремы, двойственные соответствующим теоремам для вписанных пятиугольников и шестиугольников, предлагаем для самостоятельного доказательства.

Теорема. Сумма любых двух несмежных сторон описанного пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон.

Теорема. Сумма любых трех несмежных сторон описанного шестиугольника равна сумме трех оставшихся сторон.

Упражнения

1. Можно ли описать окружность около: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба?
2. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы?
3. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны?
4. Можно ли описать окружность около пятиугольника, углы которого последовательно равны: 80°, 90°, 100°, 130°, 140°?
5. Можно ли описать окружность около шестиугольника, углы которого последовательно равны: 100°, 110°, 120°, 120°, 130°, 140°?
6. Четыре последовательных угла вписанного шестиугольника равны 100°, 110°, 120°, 120°. Найдите оставшиеся два угла.
7. Стороны вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ равны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найдите его диагонали.
8. Докажите, что сумма любых трех несмежных углов вписанного семиугольника больше 360°.
9. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис. 339)?
10. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание. Можно ли в образованный ими выпуклый четырехугольник вписать окружность?

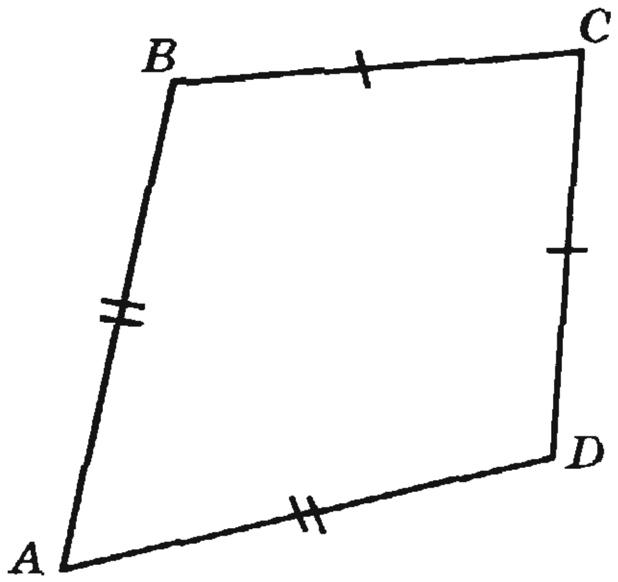


Рис. 339

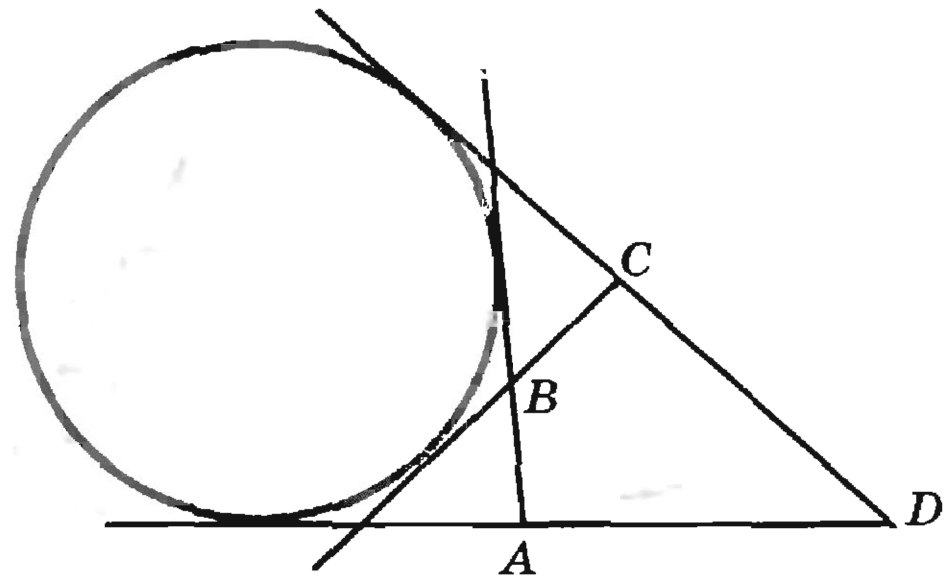


Рис. 340

11. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, стороны которого последовательно равны 1, 2, 3, 4?

12. Противоположные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Можно ли по этим данным найти периметр четырехугольника?

13. Можно ли вписать окружность в пятиугольник, стороны которого последовательно равны: 1, 2, 1, 2, 1?

14. Три последовательные стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность, равны 6 см, 8 см и 9 см. Найдите четвертую сторону и периметр этого четырехугольника.

15. На рисунке 340 изображен четырехугольник $ABCD$ и вневписанная в него окружность, касающаяся продолжений всех его сторон. Установите взаимосвязь между сторонами этого четырехугольника.

§ 68. Парабола

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется **параболой.** Прямая d называется **директрисой**, а точка F — **фокусом** параболы (рис. 341).

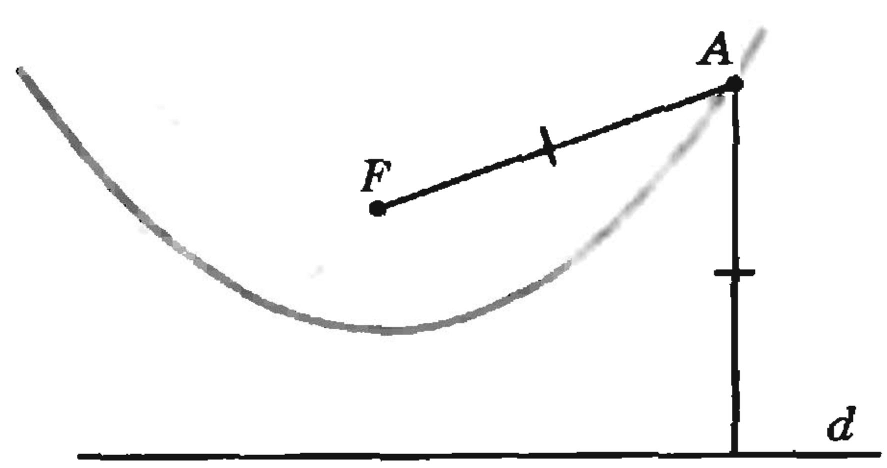


Рис. 341

Для того чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить длиной, равной большему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на нее угольник меньшим катетом. Ка-

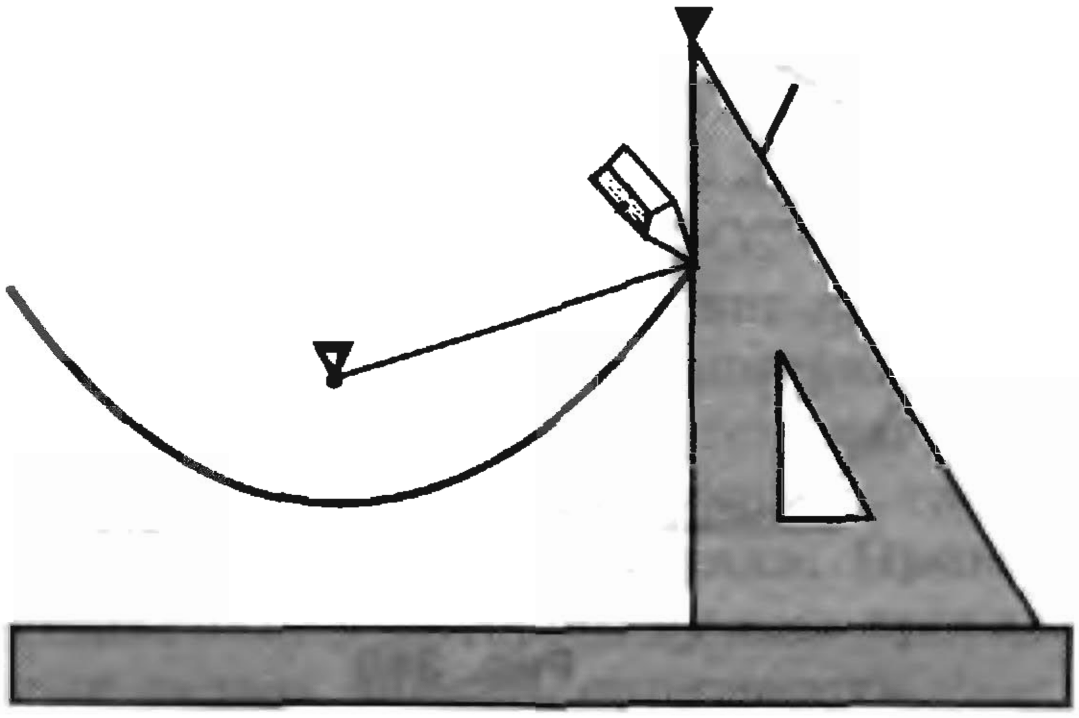


Рис. 342

рандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 342).

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется **вершиной** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется **касательной** к параболе. Общая точка называется **точкой касания.**

Теорема. Пусть A — точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD — перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 343). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла FAD, будет касательной к параболе (рис. 343). Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD. Из произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Тогда

$$A'F = A'D > A'D'.$$

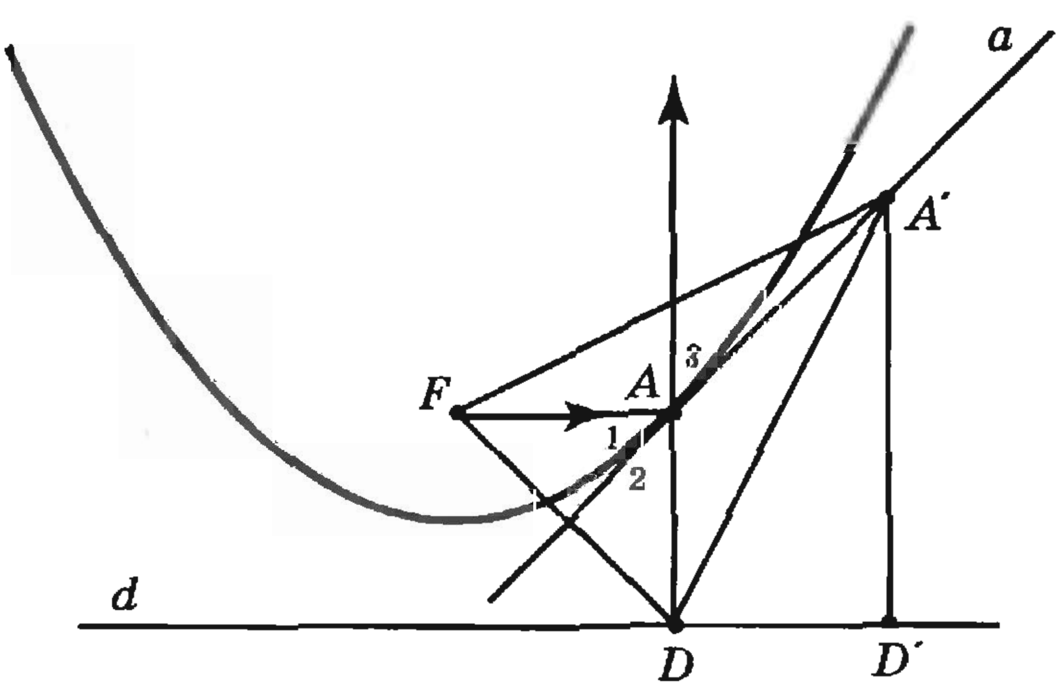


Рис. 343

Это означает, что точка A' не принадлежит параболе, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т. е. является касательной. ■

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a — касательная, AD — прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 343). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD. Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отраженного луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d. Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF проведем окружность и найдем ее точки пересечения с директрисой d. Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 344). Обозначим их D_1 и D_2. Проведем биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Прямые a_1 и a_2, содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведем прямые, перпендикулярные директрисе, и найдем их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2. Они и будут искомыми точками касания.

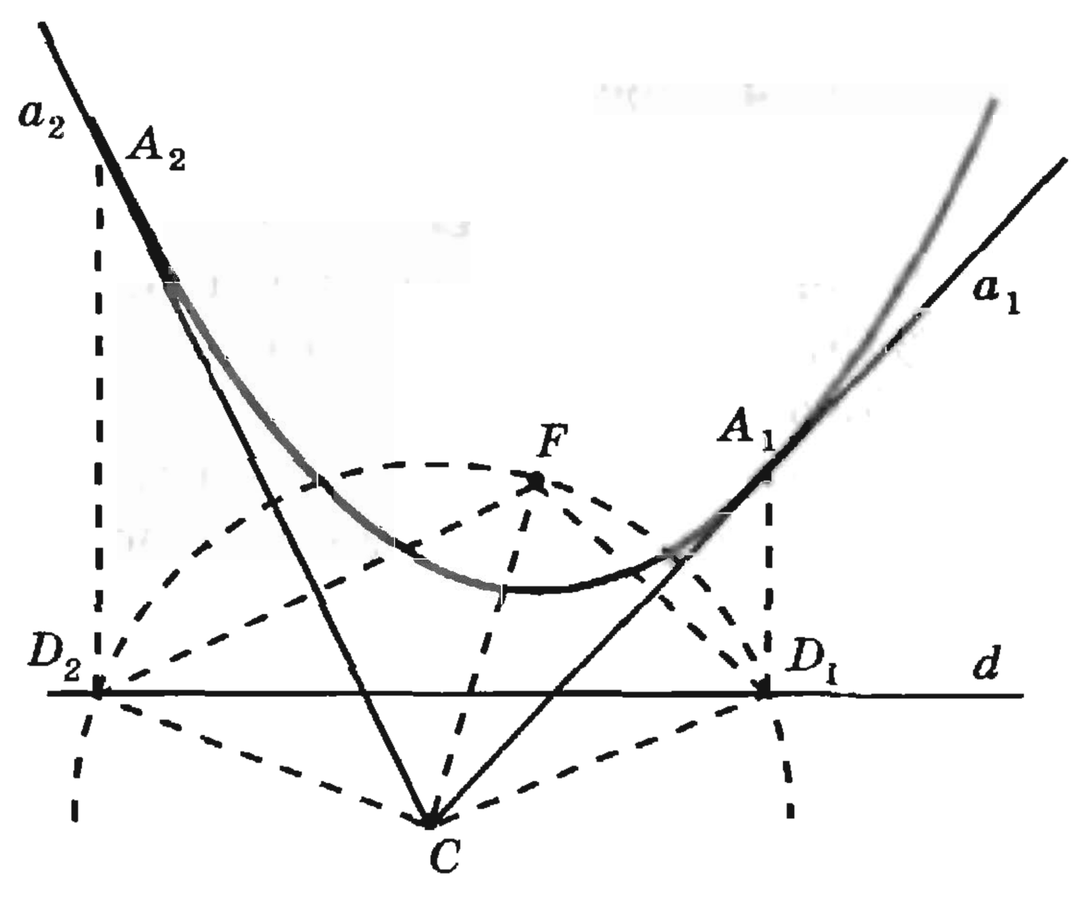


Рис. 344

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D, и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная — биссектриса угла FCD.

В случае, если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

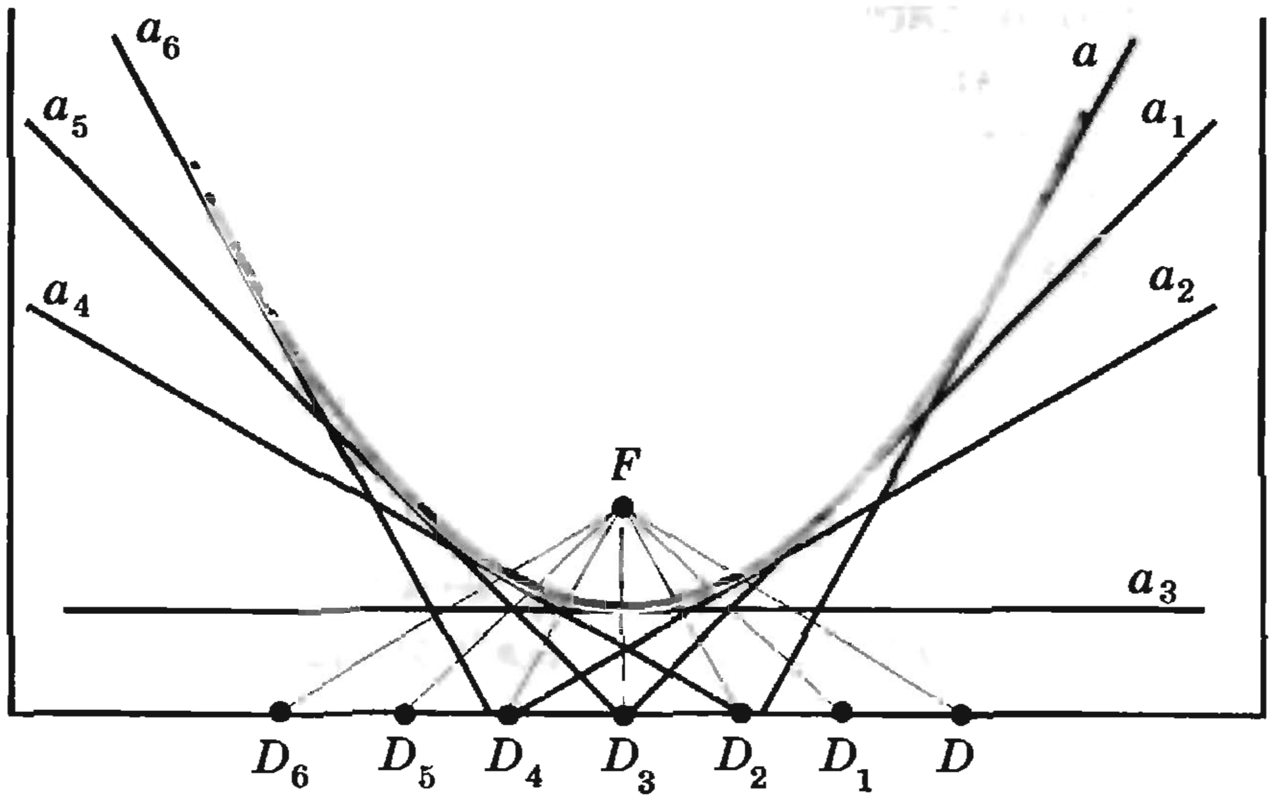


Рис. 345

Лабораторная работа

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большей стороны точку F. Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большей стороне и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 345). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку F с другой точкой большей стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.

2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболе до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболе.

3. Для точки F, не принадлежащей прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.

4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?

5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболе; б) вне параболы.

6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.
7. Докажите, что две касательные к параболе, проведенные из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.
8. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.
9. Для заданных фокуса и директрисы параболы с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.
10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.
11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.
12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.
13. Даны директриса, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус.
14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?
15. Дана парабола. Укажите способ нахождения ее фокуса и директрисы.

§ 69. Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется **эллипсом**. Точки F_1, F_2 называются **фокусами** эллипса.

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому заданному отрезку c (рис. 346). Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть больше отрезка F_1F_2.

Слово «фокус» в переводе с латинского языка означает «очаг», «огонь», и именно это свойство эллипса послужило основанием для того, чтобы назвать точки F_1, F_2 фокусами.

Еще И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в фокусах этих эллипсов.

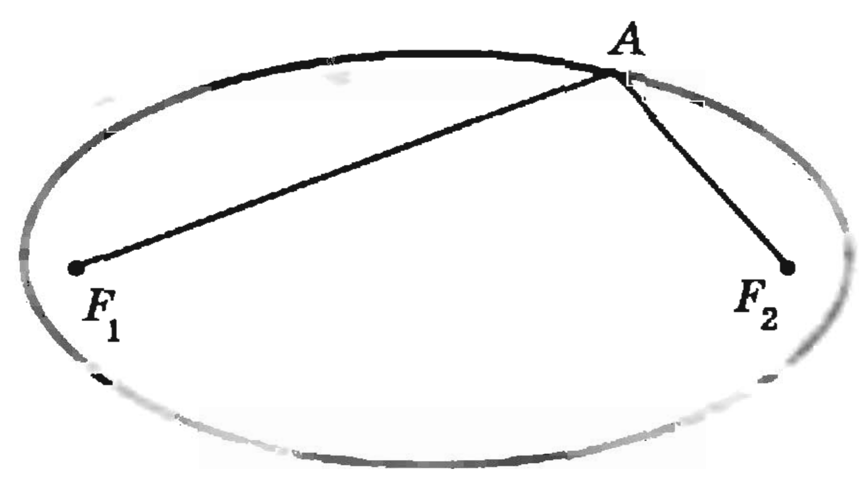


Рис. 346

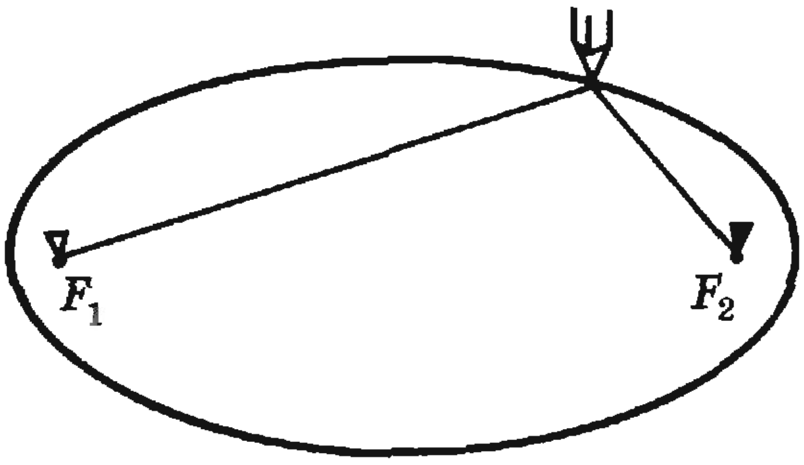


Рис. 347

Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется перигелий, а наиболее удаленная — афелий. Однако из-за того, что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Например, когда Земля бывает в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии — в нашем полушарии лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуется нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 347).

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется **точкой касания**.

Теорема. Пусть A — произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2, будет касательной к эллипсу (рис. 348). Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = F_1A + AF_2 = c.$$

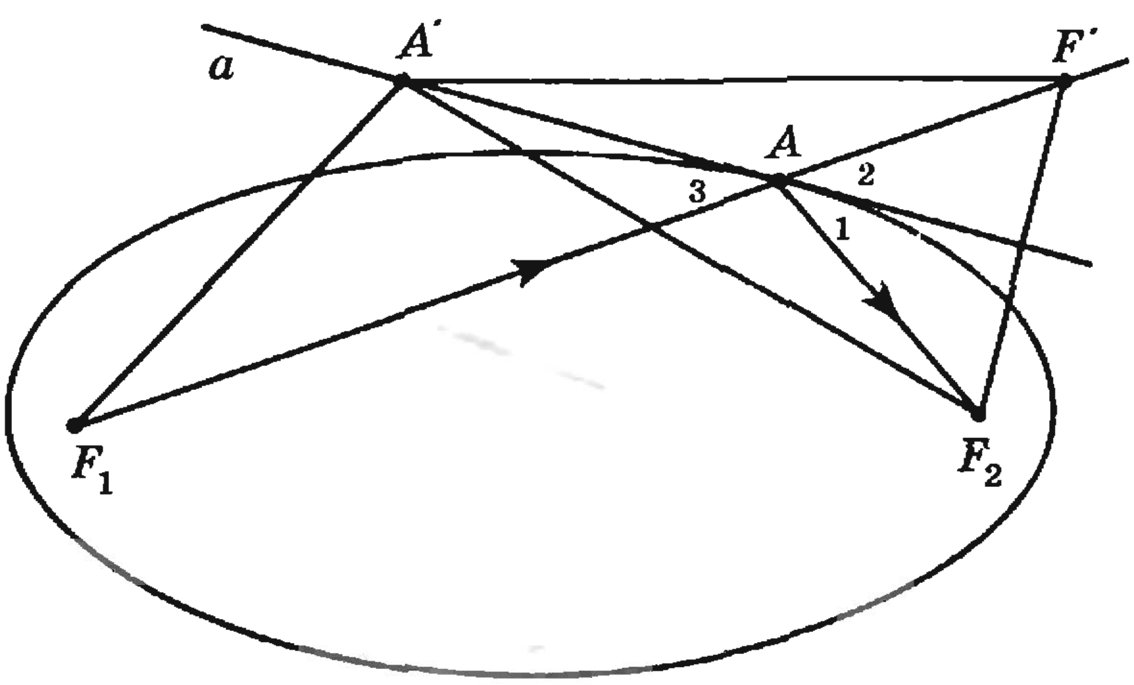


Рис. 348

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной. ■

Фокальное свойство эллипса. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a — касательная (рис. 348). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_2AF'. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 349). Таких точек может быть две — F', F'', одна или ни одной, в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'', соответственно CA' и CA'' будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

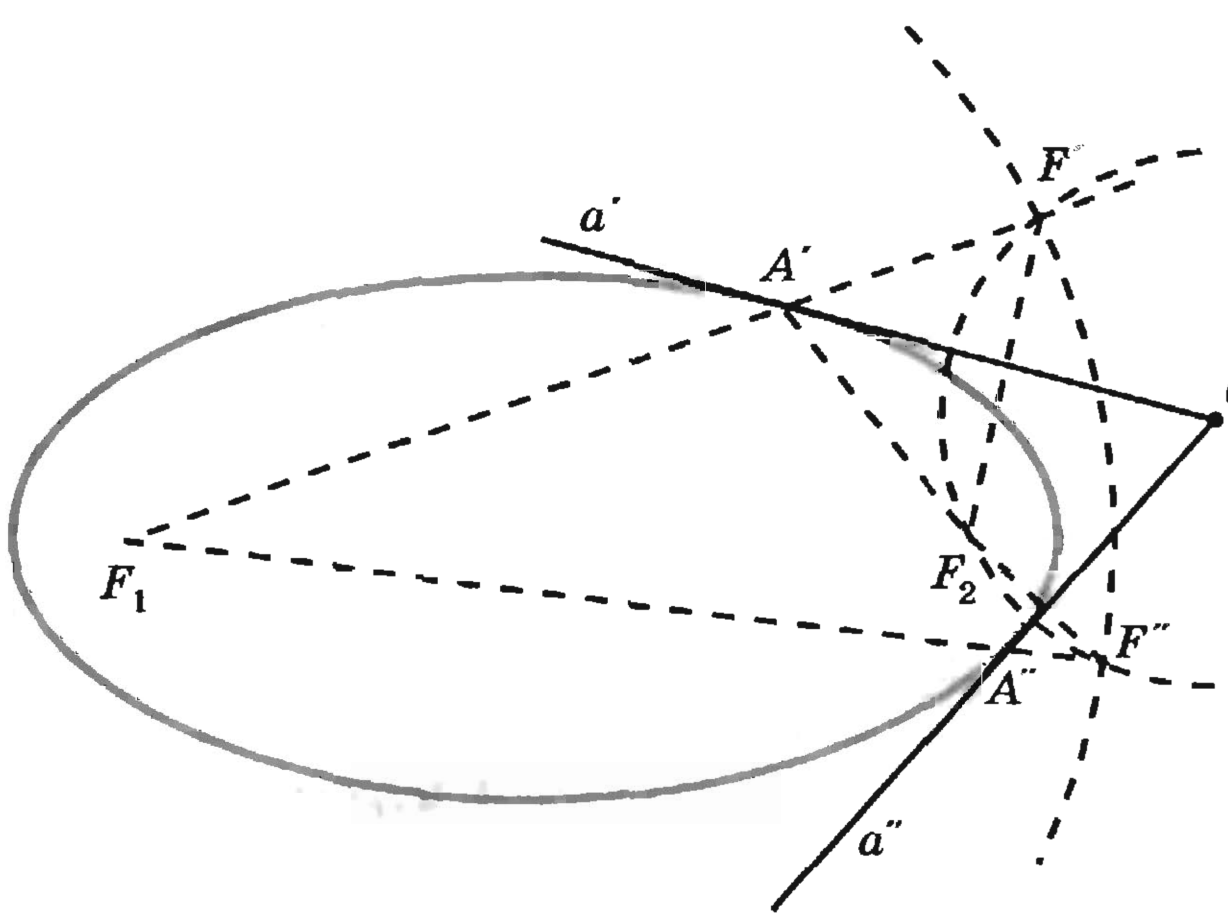


Рис. 349

Лабораторная работа

Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F. Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 350). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнем круг и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

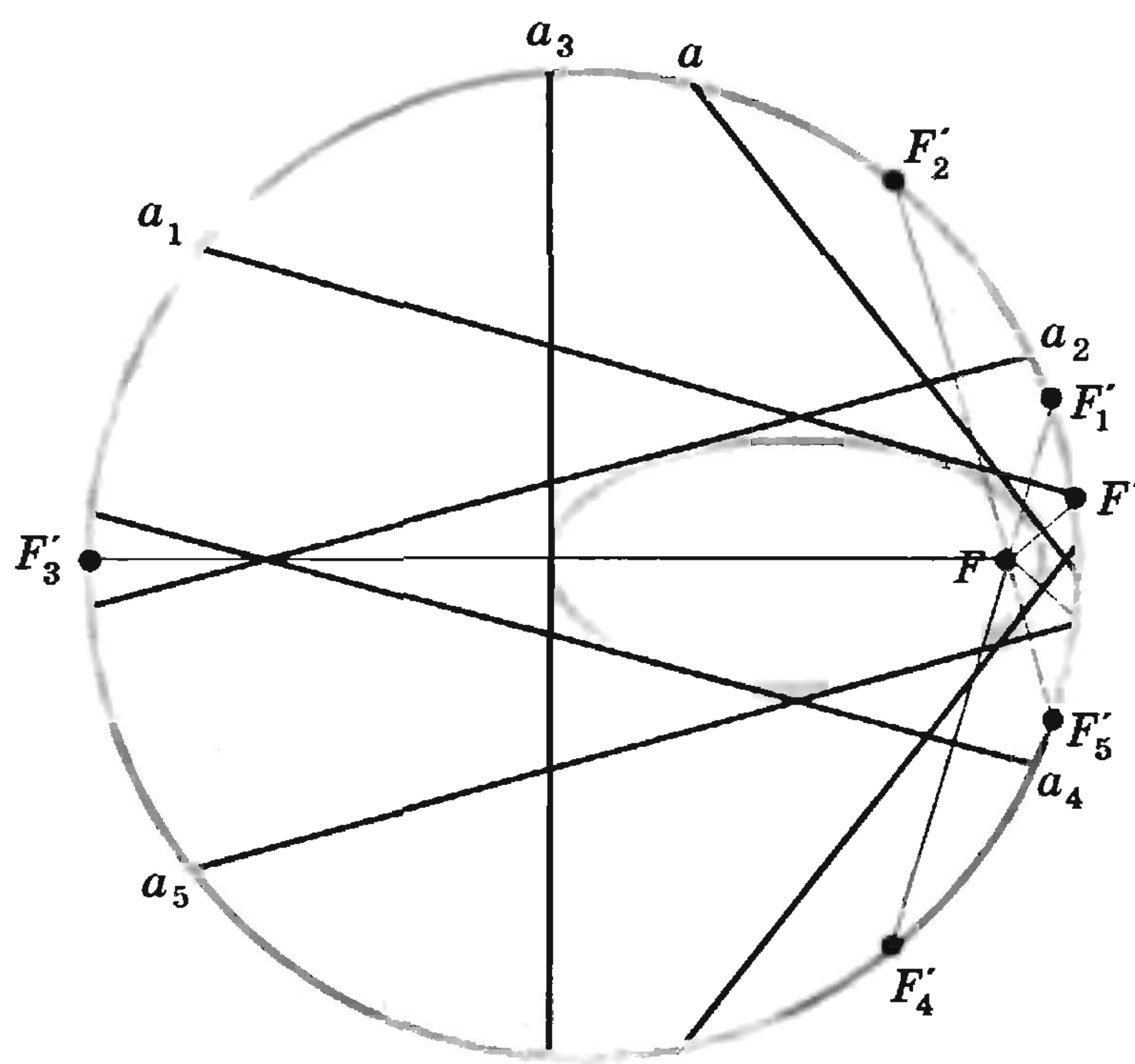


Рис. 350

Для другого способа получения эллипса потребуется сковорода и картонный круг диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

Упражнения

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких эллипсов?
2. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и константой c. Найдите наибольшее расстояние между точками эллипса. Укажите эти точки.
3. Расстояние между фокусами эллипса равно 4 см. Константа c равна 6 см. Найдите наименьшее расстояние от точек эллипса до фокуса.
4. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.
5. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

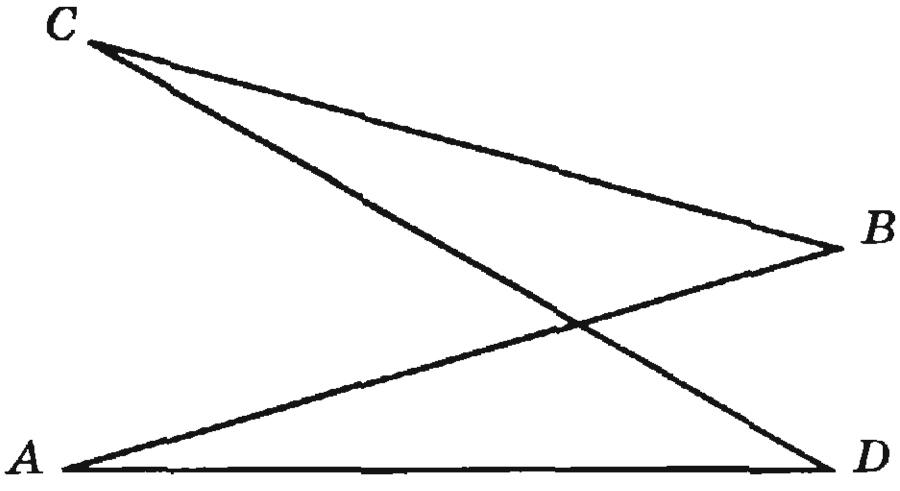


Рис. 351

6. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

7. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c постройте точки на эллипсе, равноудаленные от фокусов. Сколько таких точек?

8. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

9. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

10. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 351), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD.

11. Пусть дан эллипс с центрами F_1, F_2 и константой c. Докажите, что окружность с центром в фокусе и радиусом $r = \frac{1}{2}(c - F_1F_2)$ лежит внутри эллипса. Нарисуйте эти эллипс и окружность.

12. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2.

13. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.

14. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.

15. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.

16. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус эллипса.

***17.** Возьмем сковородку и картонный круг, диаметр которого вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положим круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс. Докажите.

***18.** Леонардо да Винчи предложил следующий способ построения эллипса. Вырежем из бумаги произвольный треугольник ABC. Проведем на листе бумаги две прямые a и b. Будем прикладывать треугольник ABC так, чтобы вершина A принадлежала прямой a, вершина B — прямой b, отмечая всякий раз на бумаге положение вершины C. Различные положения вершины C будут заполнять эллипс. Докажите.

§ 70. Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется **гиперболой**. Точки F_1, F_2 называются **фокусами** гиперболы (рис. 352).

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 - AF_1 = c$, где c — некоторый заданный отрезок.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно первое или второе равенство.

Из неравенства треугольника следует, что отрезок c должен быть меньше отрезка F_1F_2.

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуется линейка, нить, длина которой меньше длины линейки, а разность длин линейки и нити была бы меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав ее к линейке острием карандаша (рис. 353). Если поворачивать линейку вокруг фокуса,

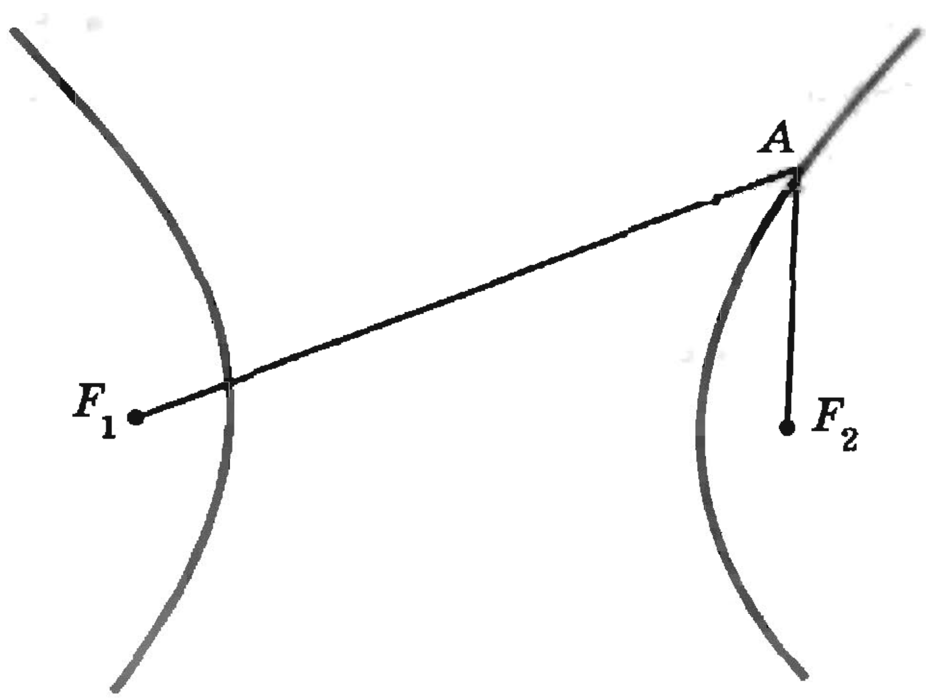


Рис. 352

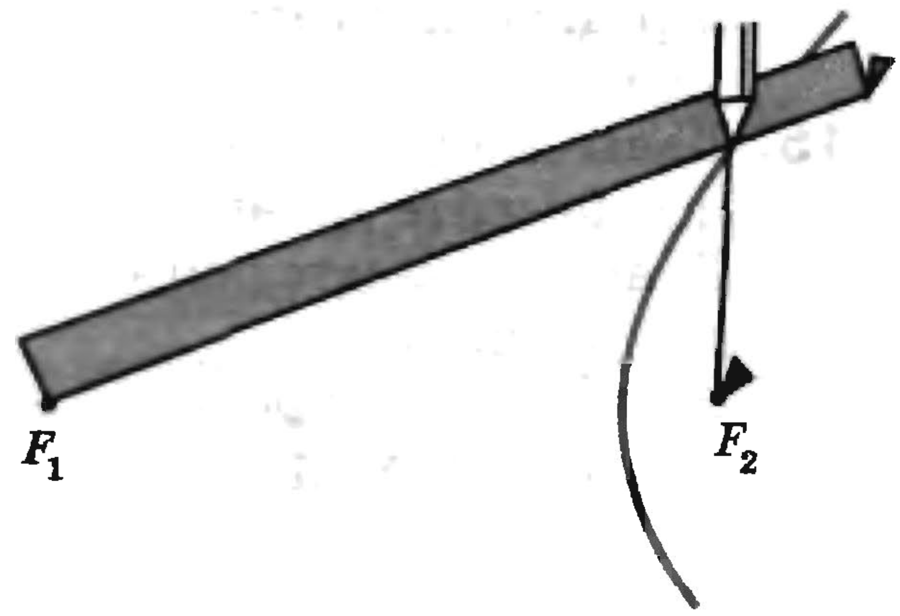


Рис. 353

прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области — внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$, и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A''F_1 - A''F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется **касательной** к гиперболе. Точка A называется **точкой касания.**

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A — точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла F_1AF_2, будет касательной к гиперболе (рис. 354).

Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем:

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = AF_1 - AF_2 = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной. ■

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от нее, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a — касательная (рис. 354). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

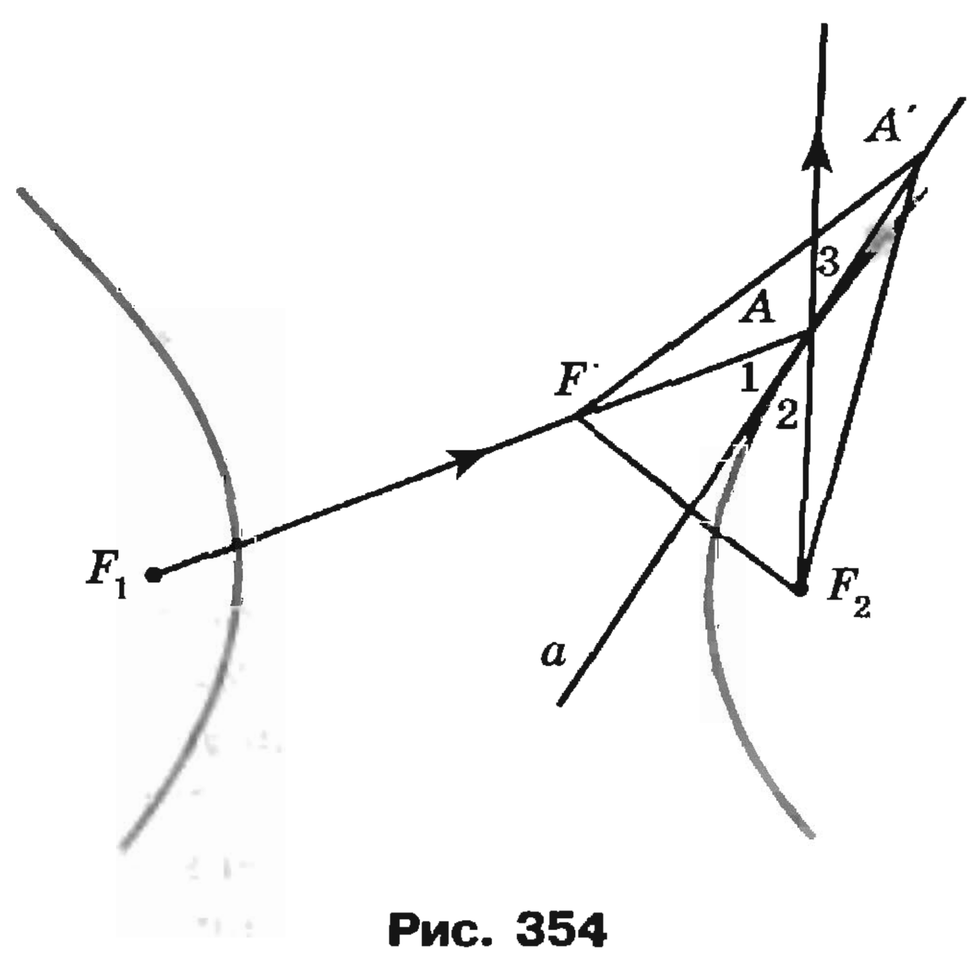


Рис. 354

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами F_1, F_2 и постоянной c. Используя циркуль и линейку, постро-

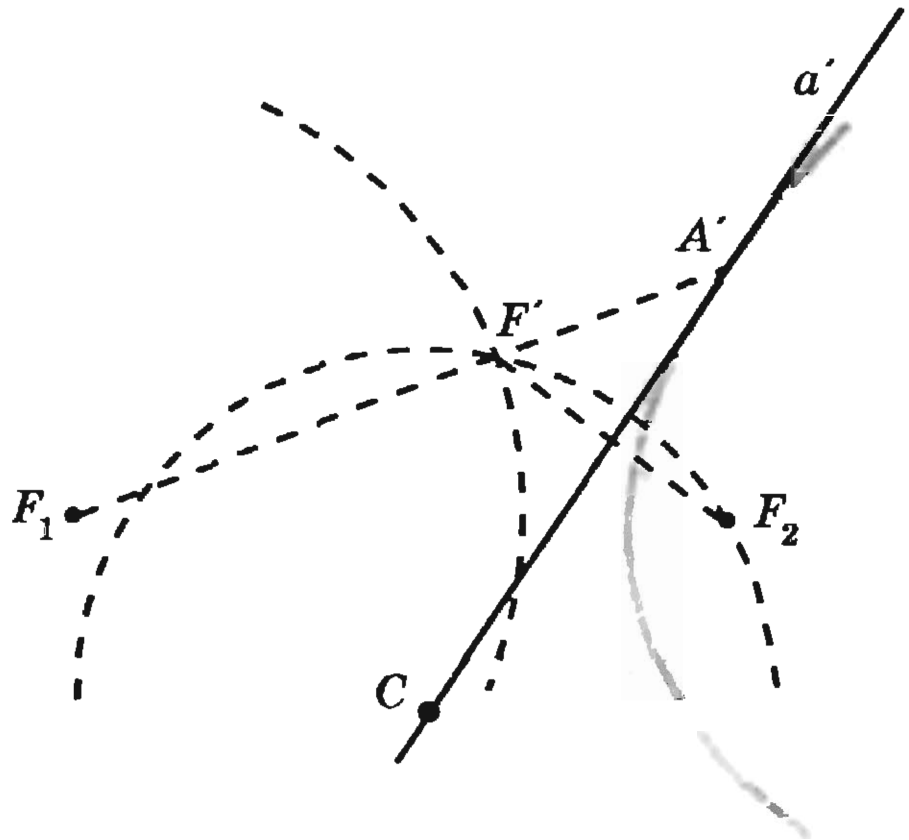


Рис. 355

им касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 355). Таких точек может быть две — F', F'', одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к гиперболе. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), мы будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Упражнения

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких гипербол?
2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.
3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.
4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величи-

ны c; б) больше заданной величины c.

5. Расстояние между фокусами гиперболы равно 6 см, константа c равна 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек гиперболы до фокусов? Укажите соответствующие точки на гиперболе.
6. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

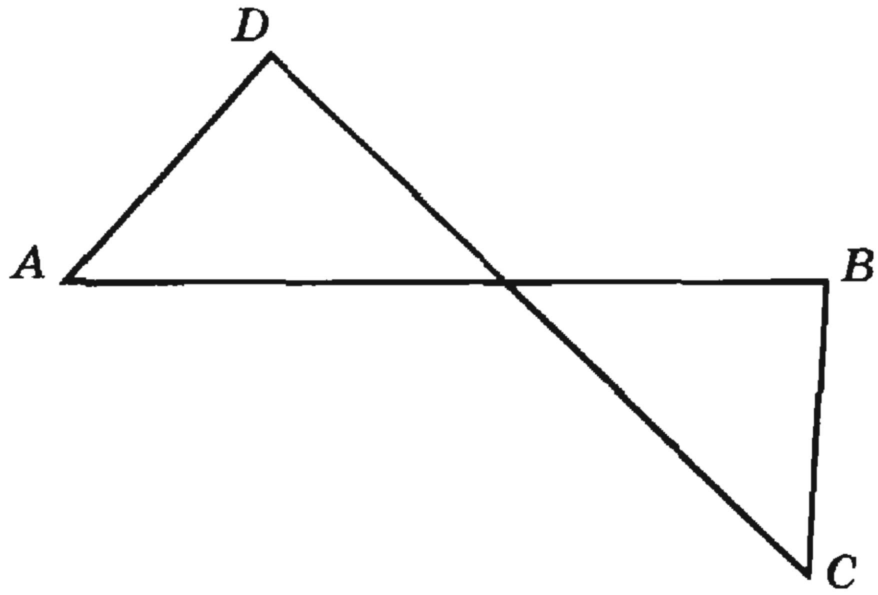


Рис. 356

7. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AB = CD$ и $AD = BC$, сторона AB закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 356). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AD и BC.
8. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.
9. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.
10. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2.
11. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.
12. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные.
13. Даны фокусы F_1, F_2 гиперболы и разность расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C. Найдите точку касания.
14. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную c и нарисуйте гиперболу.
15. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус гиперболы.
16. Даны фокусы F_1 и F_2 гиперболы. Световой луч исходит из фокуса F_1 и отражается от гиперболы в точке A. Постройте отраженный луч.

§ 71. Построение циркулем и линейкой

Построение циркулем и линейкой занимает важное место в школьном курсе геометрии. Среди задач на построение курса геометрии 7—9 классов отметим следующие:

а) деление отрезка пополам и построение серединного перпендикуляра к отрезку;

б) построение биссектрисы угла;

в) проведение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой;

г) проведение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;

д) построение касательной к окружности, проходящей через данную точку;

е) построение треугольника по его элементам;

ж) построение правильных многоугольников, вписанных и описанных около данной окружности и др.

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, какие задачи на построение выполнимы с помощью циркуля и линейки, а какие — нет.

Построение циркулем и линейкой предполагает возможность выполнения следующих операций:

1. Проведение прямой через две данные точки.

2. Проведение окружности с центром в данной точке и данным радиусом.

В результате этих операций к точкам данной совокупности можно присоединять:

а) точку пересечения двух прямых, полученных в результате операции 1;

б) точки пересечения прямой и окружности, полученных в результате операций 1 и 2;

в) точки пересечения двух окружностей, полученных в результате операции 2.

Выясним, какие точки можно построить циркулем и линейкой, исходя из данной совокупности точек A_0, A_1, ...

С помощью циркуля и линейки построим оси координат так, чтобы точка A_0 была началом координат, а отрезок A_0A_1 — единичным отрезком на оси абсцисс.

Каждой точке A на плоскости можно сопоставить ее координаты (x, y). Ясно, что точку A можно построить тогда и только тогда, когда можно построить ее координаты.

Переходя от точек плоскости к координатам, выясним, какие числа можно построить, исходя из данной совокупности действительных чисел.

Теорема. Число c можно построить, исходя из данной совокупности чисел, тогда и только тогда, когда оно выражается через данные числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Доказательство. Покажем достаточность. Если числа a и b можно построить, то можно построить и числа $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$.

Например, для построения $a \cdot b$ сначала построим какой-нибудь угол и отложим на его сторонах отрезки $OA = a$, $OE = 1$ и $OB = b$ (рис. 357). Через точку B проведем прямую, параллельную EA, и обозначим C точку ее пересечения с прямой OA. Отрезок OC будет искомым. Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OE}$ и, следовательно, $OC = OA \cdot OB = a \cdot b$.

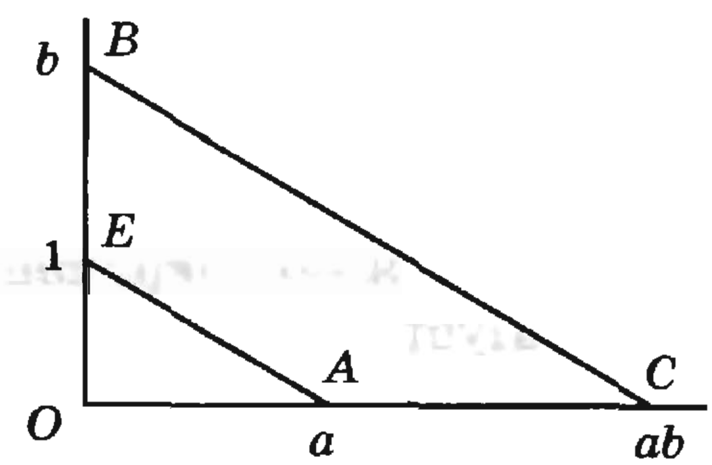


Рис. 357

Аналогичным образом для данных отрезков a, b, c строятся отрезки $\frac{a}{b}$ (рис. 358) и $\sqrt{c}$ (рис. 359). ■

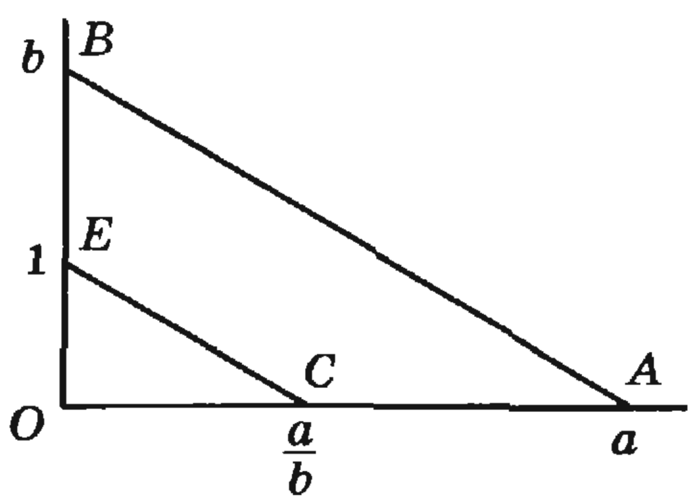


Рис. 358

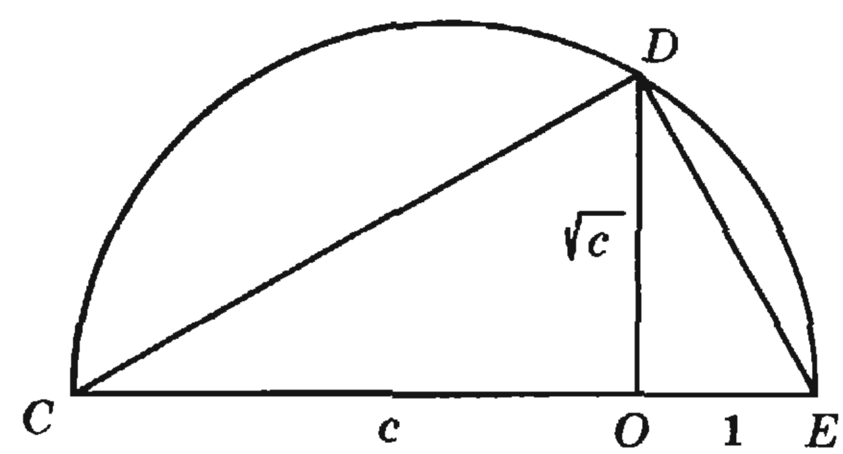


Рис. 359

Таким образом, любое число, выражающееся через данные числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня, можно построить.

Покажем необходимость, а именно, что построения с помощью циркуля и линейки, исходя из данной совокупности действительных чисел, приводят только к числам, выражающимся через данные с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух прямых, проходящих через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, координаты которых принадлежат данной совокупности.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases}(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2,\\ (y_3 - y_4)x + (x_4 - x_3)y = x_4y_3 - x_3y_4.\end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases}a_1x + b_1y = c_1,\\ a_2x + b_2y = c_2.\end{cases}$$

Координаты x и y выражаются через координаты точек A_1, A_2, A_3 и A_4 по формулам:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

т. е. с помощью операций вычитания, умножения и деления.

2. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение прямой, проходящей через данные точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, и окружности с центром в данной точке $A_3(x_3, y_3)$ и радиусом r.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2,\\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2.\end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases}a_1x + b_1y = c_1,\\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2.\end{cases}$$

Выразим x или y из первого уравнения и подставим во второе. Получим квадратное уравнение, корни которого выражаются через числа данной совокупности с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

3. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух окружностей, проходящих через данные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, с данными радиусами r_1, r_2.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2,\\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим линейное уравнение

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2.$$

Добавим к нему второе уравнение. Получим систему, аналогичную системе из второго случая. Поэтому ее решения выражаются через числа данной совокупности с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Что и завершает доказательство.

Рассмотрим теперь некоторые классические задачи на построение.

I. Задача удвоения куба. Она состоит в построении куба, имеющего объем вдвое больший данного. Точнее, для данного единичного отрезка требуется построить циркулем и линейкой ребро куба, имеющего объем, равный двум.

Длина ребра искомого куба является действительным корнем кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$. Поэтому для ответа на вопрос: можно или нельзя выполнить построение циркулем и линейкой, нужно ответить на вопрос: можно ли число $\sqrt[3]{2}$ выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

В курсе алгебры доказывается, что этого сделать нельзя и, следовательно, задача удвоения куба не разрешима.

II. Задача о трисекции угла состоит в делении произвольного угла на три равные части.

Конечно, некоторые углы, например угол, равный 90°, можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим вопрос о возможности такого деления произвольного угла φ.

Используя тригонометрические формулы, нетрудно получить уравнение

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Следовательно, число $\cos\frac{\varphi}{3}$ является корнем уравнения

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0.$$

В частности, если $\varphi = 60°$, получаем уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$, которое заменой $2x$ на y можно привести к виду $y^3 - 3y - 1 = 0$.

Таким образом, ответ на вопрос о возможности деления угла в 60° на три равные части сводится к вопросу о том, можно ли корень этого уравнения выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

В курсе алгебры доказывается, что этого сделать нельзя и, следовательно, задача о трисекции угла не разрешима.

III. Задача о квадратуре круга состоит в построении квадрата, равновеликого данному кругу.

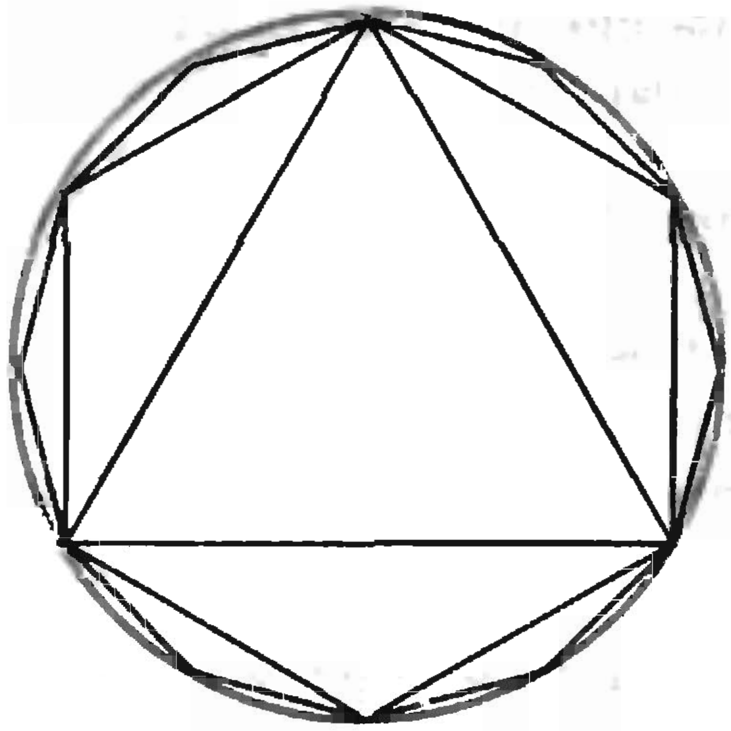


Рис. 360

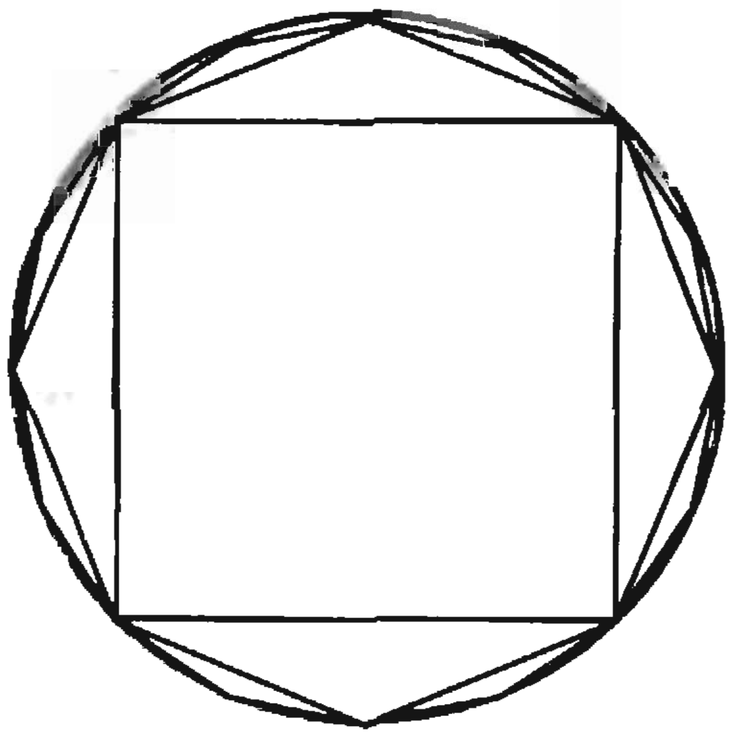


Рис. 361

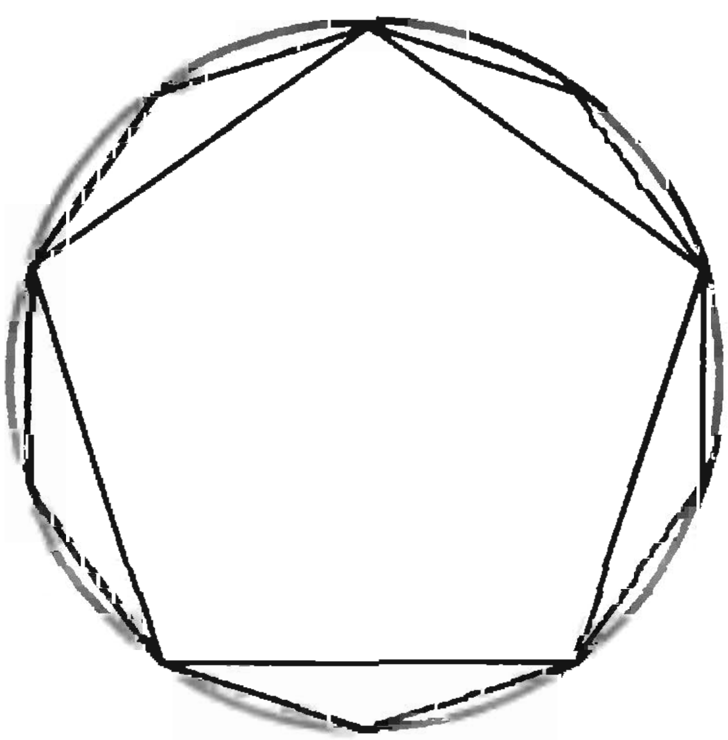


Рис. 362

Она не разрешима с помощью циркуля и линейки, так как сводится к построению числа, которое нельзя выразить через 1 с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

IV. Задача о построении правильных многоугольников, вписанных в единичную окружность. Пусть дана окружность единичного радиуса. С помощью циркуля и линейки можно вписать в эту окружность правильные треугольник, шестиугольник и т. д., $3 \cdot 2^n$-угольник (рис. 360). Аналогично в единичную окружность можно вписать правильные $2 \cdot 2^n$-угольники (рис. 361), правильные $5 \cdot 2^n$-угольники (рис. 362).

Полностью вопрос о возможности построений правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки был исследован Гауссом. А именно, он доказал, что правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда n представимо в виде произведения степени двойки и различных простых чисел Ферма, т. е. простых чисел вида $2^{2^n}+1$. В частности, из этого следует, что правильный семиугольник нельзя построить циркулем и линейкой, а правильный семнадцатиугольник — можно.

Упражнения

1. Постройте середину заданного отрезка.
2. Постройте медиану данного треугольника.
3. Постройте биссектрису данного треугольника.
4. Постройте высоту данного треугольника.
5. Постройте центр вписанной окружности данного треугольника.

6. Постройте центр описанной окружности данного треугольника.

7. Постройте угол величиной: а) $90°$; б) $45°$; в) $22°30'$.

8. Постройте угол вдвое больше данного.

9. По данным отрезкам длины 1 и a постройте отрезок длины: а) a^2; б) a^3; в) $\frac{1}{a}$; г) $\frac{1}{a^2}$.

10. По данным отрезкам длины 1 и a, b укажите способ построения отрезка $\frac{a}{b}$.

11. По данным отрезкам длины 1 и c укажите способ построения отрезка $\sqrt{c}$.

12. Для данного отрезка a постройте отрезок $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

13. Постройте прямоугольный треугольник по заданным катетам.

14. Постройте прямоугольный треугольник по заданному катету и гипотенузе.

15. На данной прямой найдите центр окружности, проходящей через две заданные точки.

16. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

17. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить дугу данной окружности пополам?

18. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол величиной: а) $10°$; б) $15°$; в) $30°$; г) $40°$; д) $50°$?

19. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный длине данной окружности?

ОТВЕТЫ

§ 1. **3.** Одна. **4.** Одна, если три данные точки не принадлежат одной прямой. Бесконечно много, если они принадлежат одной прямой. **5.** Бесконечно много. **6.** Если они принадлежат одной прямой. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Совпадают. **10.** а) Да; б) да; в) нет. **11.** а) Нет; б) да. **12.** а) Да; б) нет. **16.** а), б), в) Нет.

§ 2. **1.** Нет. **2.** Нет. **7.** Нет. Одна или три прямые. **8.** 3, 4, 5 или 6. **9.** а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **10.** а) 1; б) 4; в) 10; г) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **11.** а) 1; б) 3; в) 6; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **12.** а) 4; б) 8; в) 15.

§ 3. **2.** Нет. **3.** а) Нет; б) да. **5.** а) Нет; б) да. **7.** 5-угольник. **8.** а) 5-угольная; б), в) 6-угольная. **9.** а) Нет; б) да. **10.** а) Да; б) нет. **12.** 16-угольник. **13.** а) 5-угольная; б) 11-угольная; в) 9-угольная. **14.** а), б) 4; в) $n(n-3)$; г) 0. **16.** Нет. **20.** Да. **21.** Да.

§ 4. **2.** в), д), ж). **3.** а), б), в), г). **4.** а), б), д). **5.** а), в) Да; б), г) нет. **12.** Да. **13.** а) 4; б) 2; в) 4; г) 4.

§ 5. **2.** Нет. **3.** Например, в правильной четырехугольной. **4.** а) Нет; б) да, 18 пар; в) да, 6 пар; г) да, 15 пар; д) да, 15 пар. **6.** Нет. **7.** а) Одна; б) бесконечно много. **8.** Нет. **9.** Лежат в одной плоскости. **12.** а) 3; б) 6; в) $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 6. **2.** а) Да, 24 пары; б) да, 300 пар; в) да, 300 пар. **3.** Нет. **4.** Бесконечно много, если точка не принадлежит прямой. **5.** Нет. **6.** Прямые пересекаются или скрещиваются. **7.** Прямая, проходящая через C. **8.** Нет. **9.** Скрещиваются. **10.** Нет. **11.** Скрещиваются. **17.** а) 3; б) 15; в) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 7. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** Параллельна им. **8.** Да. **16.** Параллельны. **22.** Нет.

§ 8. **3.** а) Нет; б) да, 3 пары; в) да, 4 пары; г) да, 10 пар; д) да, 6 пар. **4.** а), б) Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Нет. **15.** Не всегда.

§ 9. **4.** Да, если A совпадает с B. **5.** Да. **6.** Если векторы одинаково направлены. **7.** а) Да; б) нет. **8.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **11.** $\overline{B_1D}$. **19.** Центр куба.

§ 10. **3.** Да. **4.** Да. **9.** $\frac{1}{3}$.

§ 11. **1.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **2.** а) Да; б) нет. **3.** а) Нет; б), в), г), д) да. **4.** а), б) Да; в), г) нет. **5.** а), б), в) Нет. **9.** а), б) Бесконечно много. **13.** Нет. **14.** Нет. **15.** Да.

§ 12. **1.** Если прямая параллельна направлению проектирования. **2.** Три, или две, или одна. **3.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **4.** Если они лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования, но не параллельны ему. **5.** Если они параллельны направлению проектирования. **6.** Пересекающиеся прямые, параллельные прямые, прямая и точка. **7.** Прямая не параллельна направлению проектирования, и через эту прямую и данную точку проходит плоскость, параллельная направлению проектирования. **8.** Пересекаются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **9.** Скрещиваются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Если она параллельна направлению проектирования. **15.** Нет. **16.** Нет. **17.** Да. **18.** Нет. **20.** $\frac{na+mb}{n+m}$.

§ 13. **1.** Треугольник или отрезок. **2.** а), б), в) Да. **4.** Параллелограммом или отрезком. **5.** а), б), в) Да; г) нет. **6.** Нет. **7.** Параллелограммов. **8.** Параллелограммом. **9.** Трапецию или отрезок. **11.** а) Да; б), в) нет. **13.** $\frac{a+b+c}{3}$.

§ 14. **4.** Да. **5.** Нет. **7.** Нет. **11.** а), б) 4-я пирамида; в) тетраэдр; г), д) 6-я пирамида; е) параллелепипед. **12.** Нет.

§ 15. **1.** Многоугольником. **2.** а), б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **3.** $2n$; $3n$; $n+2$. **4.** а), б), в) Да; г), д) нет. **5.** а), б), в), г), д) Да; е) нет. **6.** а) Да; б) нет. **7.** а), б) Да; в) нет. **8.** Ромб. **9.** Правильный шестиугольник. **13.** Равнобедренная трапеция с периметром $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}$. **15.** Правильный шестиугольник площадью $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ (a — ребро куба). **17.** Треугольник, четырехугольник, пятиугольник. **18.** Равнобедренный треугольник. **20.** Да. **22.** Нет. **24.** Равнобедренная трапеция. **25.** Да.

§ 16. **1.** Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** Нет. **6.** а) 90°; б) 60°. **7.** 45°. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$. **11.** а), б) 90°. **12.** а) 45°; б) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}$; в) 60°. **13.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$. **14.** $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **15.** 90°. **16.** 60°. **17.** Да. **18.** Все углы равны 60°. **19.** Да. **20.** 60°, 90°. **21.** 90°. **22.** 45°. **23.** 30°. **24.** а) 90°; б) 45°. **25.** Вершины куба, не принадлежащие диагонали.

§ 17. **1.** Нет. **2.** Да. **3.** Плоскость, перпендикулярная данной прямой. **11.** Перпендикулярна. **12.** а) Нет; б) да. **13.** Да. **14.** Прямые перпендикулярны. **15.** Прямоугольный. **16.** Прямые перпендикулярны. **18.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **23.** а), б) Да; в) нет. **24.** а), б), в) Да. **25.** а), б) Да; в) нет. **27.** Правильным шестиугольником. **29.** $\frac{a^2}{2}$. **30.** Наибольшее значение принимается, когда плоскость проектирования параллельна плоскости, проходящей через три вершины параллелепипеда, являющиеся концами ребер, сходящихся в одной точке.

§ 18. **2.** Да. **3.** SD — наименьший; SB — наибольший. **7.** 12 см. **8.** 12 см. **9.** 2 см. **10.** 9 см. **11.** 6 см; 4,8 см. **12.** $3\sqrt{41}$ см. **13.** b и $\sqrt{2a^2+b^2}$. **19.** Плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная этому отрезку. **20.** Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника с вершинами в данных точках, и перпендикулярная плоскости этого треугольника.

§ 19. **1.** а) $45°$; б) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $30°$. **2.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **3.** $\cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$. **4.** Равны. **5.** Не обязательно. **6.** Параллельны или пересекаются. **8.** $60°$. **9.** Нет, $45°$. **10.** $30°$. **11.** Да, верно. **14.** $45°$. **15.** Угол наклона высоты. **16.** $30°$. **17.** Окружность.

§ 20. **1.** а) $45°$; б) $30°$. **2.** а) $a\sqrt{2}$; б) $a\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** Ребру куба. **4.** а) a; б) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6.** $a\cdot\sin\varphi$. **7.** $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, b. **9.** а) a; б) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) a; г) a; д) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $a\frac{\sqrt{6}}{6}$. **11.** Плоскость. **12.** $\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}$. **13.** $\sqrt{\frac{a^2+2h^2}{2}}$. **15.** $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 21. **1.** Они перпендикулярны. **2.** $90°$. **3.** Да. **4.** $\angle MAB$. **5.** $\angle MHB$, где BH — высота параллелограмма, опущенная на сторону AD. **6.** Нет. **7.** $60°$. **8.** $45°$. **9.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **10.** Две биссектральные плоскости. **11.** $\frac{a}{2}$. **12.** $\frac{a}{2}$. **13.** 1,5. **14.** $60°$. **15.** а), в) Да; б), г) нет. **19.** $10\sqrt{2}$ дм^2. **20.** 6 см^2. **21.** а) $\sqrt{6}$ см^2; б) $3\sqrt{6}$ см^2. **22.** а) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a^2}{\cos\varphi}$. **23.** $2\sqrt{\frac{2Q\cdot\cos\varphi}{7}}$.

§ 22. **1.** Нет. **2.** Нет. **3.** Бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости, и одну в противном случае. **4.** Нет. **5.** Прямые могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися. **6.** Нет. **7.** Да. **8.** Нет. **15.** $90°$, $60°$. **16.** Да. **17.** Да. **18.** Да. **19.** а), б), в) Да.

§ 23*. **1.** Нет. **2.** Плоскость, параллельная плоскости проектирования и проходящая через центр проектирования. **3.** Да. **4.** Если прямые параллельны плоскости проектирования. **5.** Уменьшенное прямое. **6.** Перевернутое. **7.** Увеличенное прямое. **8.** Она будет подобна исходной. **14.** $\frac{2}{3}$.

§ 24. **1.** а), б) Нет; в) да. **2.** а) Тетраэдр, куб, додекаэдр; б) октаэдр; в) икосаэдр. **3.** $10° < \varphi < 150°$. **6.** $90°$. **7.** $60°$. **8.** $90°$. **9.** $\sqrt{6}$ см. **10.** Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения биссектральных плоскостей. **11.** Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов.

§ 25. **1.** а), г) — выпуклые; б), в) — невыпуклые. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** б), д) — выпуклые; а), в), г) — невыпуклые. **5.** Нет. **7.** Невыпуклый четырехгранный угол. **8.** а) Да; б) нет. **17.** Число плоских углов равно удвоенному числу ребер. **18.** Нет. **21.** а) Да; б) нет. **22.** а) Да; б) нет.

§ 32. **1.** а), б) Да; в), г) нет. **2.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1,5 дм. **4.** Да. **5.** 2 дм. **7.** 3 м. **8.** Пирамида, в основании которой ромб. **9.** Около него можно описать окружность. **10.** Высота — $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, центр — середина AB. **14.** Около основания призмы можно описать окружность. **15.** Призма, в основании которой ромб. **16.** Тупоугольный. **17.** а) В основании лежит остроугольный треугольник; б) в основании лежит прямоугольный треугольник; в) в основании лежит тупоугольный треугольник. **18.** 13 см. **19.** Нет. **22.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **23.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **24.** 4.

§ 33. **1.** Да, центр куба. **2.** Нет. **3.** Высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание. **4.** Пирамида, в основании которой прямоугольник. **6.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **7.** $\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2}$. **8.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **9.** $\frac{h}{3}$. **10.** $\frac{1}{2}a\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **11.** $\frac{a\sqrt{3}}{4+\sqrt{2}}$. **12.** $\sqrt{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **15.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

§ 34. **1.** Бесконечно много. **2.** Расстояние между основаниями цилиндра. **3.** Круг, равный основаниям. **4.** Прямоугольником. **5.** Прямоугольником. **6.** а) Да; б) нет; в) да. **7.** а) Одна; б) бесконечно много. **10.** 5 м. **11.** $2r\sqrt{d^2-4r^2}$. **12.** $\frac{\sqrt{Q}}{2}$. **13.** 4π см^2. **14.** 3 дм. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** $\sqrt{2}Q$. **17.** а) Ось цилиндра; б) круг, лежащий в плоскости, параллельной основаниям и проходящей через центр симметрии цилиндра. **18.** Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая. **19.** Два пересекающихся круга. **20.** Кругом. **21.** Равнобедренным треугольником. **22.** 16 см^2. **23.** $h\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\sqrt{3}$ см^2. **25.** 10 м. **26.** 5 см, $5\sqrt{3}$ см. **27.** 90°. **28.** 9π м^2. **29.** $16\sqrt{3}$ см^2. **30.** Осевое сечение. **31.** Осевое сечение. **32.** Ось конуса.

§ 35. **1.** Круг. **2.** Прямые, содержащие или пересекающие прямоугольник и параллельные его стороне. **3.** Например, вращением прямоугольной трапеции вокруг высоты, опущенной из вершины тупого угла на нижнее основание, которое меньше удвоенного верхнего основания. **4.** Конус. **5.** а) Прямоугольный треугольник; б) прямоугольная трапеция. **6.** Шар. **13.** Цилиндр. **14.** а) Цилиндр; б) фигура, ограниченная двумя равными частями гиперболоида вращения. **15.** Конус. **16.** Конус, если основание высоты принадлежит основанию пирамиды. **17.** Фигура, ограниченная гиперболоидом вращения и двумя параллельными плоскостями. **18.** а) Биконус; б) фигура, ограниченная гиперболоидом вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная двумя гиперболоидами вращения и двумя параллельными плоскостями. **19.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и гиперболоидом вращения между ними; б) фигура, ограниченная тремя гиперболоидами вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения и двумя параллельными плоскостями. **20.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и трех гиперболоидов вращения между ними; б) фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух усеченных конусов, гиперболоидом вращения и двумя параллельными плоскостями; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения и двумя параллельными плоскостями.

§ 36. **1.** $2r$. **2.** а) Нет; б) да. **3.** Нет. **5.** $\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{4R^2-h^2}}{2}$. **7.** Нет. **8.** Перпендикулярна. **9.** Параллельны. **10.** Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности. **11.** Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности и параллельные ее оси. **12.** Если оси цилиндров параллельны и один из них не содержится в другом. **13.** а), б), г), д) Да; в) нет. **14.** а) Не всегда; б), г), д) да; в) нет.

§ 37*. **1.** Форму эллипса. **4.** $\cos\varphi$; $60°$. **9.** а) $\frac{x^2}{R^2}+\frac{k^2y^2}{R^2}=1$; б) $2R$, $2R/k$; в) $(-c, 0)$, $(c, 0)$, где $c = \frac{R\sqrt{k^2-1}}{k}$. **11.** а) $\pi R^2\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\pi R^2\sqrt{2}$; в) $2\pi R^2$. **18.** $-\frac{\pi}{2}$. **20.** $6\cdot\sqrt{\pi^2+1}$ см.

§ 38. **1.** $d\frac{\sqrt{3}}{6}$. **2.** $r(\sqrt{2}-1)$. **3.** 3 м. **4.** $\frac{r}{h}(\sqrt{r^2+h^2}-r)$. **5.** $r\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **7.** $d\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** r. **9.** $6\frac{1}{4}$ м. **10.** 8 см; 2 см. **11.** $\frac{r^2+h^2}{2h}$. **12.** $\frac{r}{\sin 2\varphi}$. **13.** $\frac{b^2}{2h}$. **14.** а), в) Да; б) нет. **15.** а), в), г) Да; б) нет. **16.** Сумма радиусов оснований усеченного конуса равна его образующей. **17.** $\sqrt{R\cdot r}$.

§ 39*. **1.** Эллипса, параболы или гиперболы. **2.** Эллипса, параболы или гиперболы. **3.** а) Гипербола; б) парабола. **4.** а), б), в), г) Да. **5.** Фигура, ограниченная параболой. **6.** Фигура, ограниченная: а) гиперболой; б) параболой; в) эллипсом. **7.** а) Больше $60°$; б) $60°$; в) меньше $60°$. **8.** $4c\cdot y = x^2$, где c — расстояние от фокуса до оси абсцисс. **9.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **13.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{16}$.

§ 40. **1.** Центрально-симметричные: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др.; не центрально-симметричные: пирамида, конус и др. **2.** Может. **3.** Центр симметрии — точка пересечения данных прямых. Оси симметрии — две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми, и прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых и перпендикулярная их плоскости. Если данные прямые перпендикулярны, то сами они также являются осями симметрии. Плоскости симметрии: плоскость данных прямых и две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованных данными прямыми, и перпендикулярные их плоскости. **4.** 9 осей симметрии. **5.** Бесконечно много. **6.** Три плоскости симметрии. **7.** Пирамида, в основании которой параллелограмм, может иметь ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии. Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии. **8.** Правильные 3-угольные, 4-угольные пирамиды. **9.** Третьего. **10.** Центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего порядка. **11.** а) Семь осей симметрии; б) семь плоскостей симметрии. **12.** а) $2n-1$ осей симметрии, одна ось симметрии $(2n-1)$-го порядка; б) $2n$ плоскостей симметрии. **13.** Центром симметрии. **14.** а) 3 оси симметрии; б) 3 плоскости симметрии. **15.** Центром симметрии. **16.** Нет. **17.** а) Одна ось симметрии, n плоскостей симметрии; б) нет осей симметрии, n плоскостей симметрии (n — число сторон основания пирамиды). **18.** а) Одна, если n четно, и ни одной, если n нечетно; б) n плоскостей симметрии. **19.** Может: например, пирамида, в основании которой ромб, может иметь ось симметрии и две плоскости симметрии. **20.** Нет. **21.** Да. **22.** Тетраэдр имеет оси симметрии третьего порядка; куб имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии и оси симметрии третьего порядка; октаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и четвертого порядков; икосаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и пятого порядков; додекаэдр имеет центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего и пятого порядков. **23.** Нет.

§ 41. **1.** а) Центральная симметрия; б) осевая симметрия; в) зеркальная симметрия. **2.** а) Центральная симметрия, зеркальная симметрия, параллельный перенос; б) осевая симметрия, поворот, зеркальная симметрия; в) осевая симметрия. **6.** Поворот, зеркальная симметрия. **7.** а) Поворот; б) зеркальная симметрия; в) зеркальная симметрия. **9.** При повороте на 120° вокруг оси, проходящей через центр закрашенной грани; при симметрии относительно плоскости, перпендикулярной закрашенной грани. **10.** 24. **11.** а) Да, параллельный перенос, зеркальная симметрия; б) да, осевая симметрия; в) нет. **12.** Поворота на 90° вокруг оси, перпендикулярной закрашенной грани; осевой симметрии относительно оси, перпендикулярной закрашенной грани; зеркальной симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных закрашенной грани. **13.** 48. **14.** а) 48; б) 120; в) 120.

§ 42*. **1.** Боковая поверхность цилиндра. **2.** а), б), в) Да. **3.** Две. **4.** а) Да; б) нет. **5.** а), г). **6.** а) Две; б), в) одна. **7.** Две. **8.** Две сцепленные дважды перекрученные ленты. **9.** Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента. **11.** Лист Мёбиуса; дважды перекрученная лента. **13.** Одна. **14.** в) Две; г) одну. **15.** Односторонняя поверхность; граница — треугольник ABC.

§ 43. **1.** а) Нет; б) да. **2.** Куб со стороной, равной 1, и прямоугольный параллелепипед со сторонами 1, 2 и 0,5. **3.** Семь куб. ед. **4.** Три куб. ед. **5.** 20 см^3. **6.** $1:1$. **7.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см^3. **8.** а), б), в) Да; г) нет. **9.** $\frac{\pi\cdot a^3}{4}$ см^3. **10.** Та, которая шире. **11.** 60 см^3. **12.** 200 см^3. **13.** а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) увеличится в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз; в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз. **14.** 12 см. **15.** $1:3$. **16.** $V=\dfrac{n\cdot a^2h}{4\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$. **17.** $\frac{3V}{4}$. **18.** а) $1:8$; б) $1:27$; в) $1:n^3$. **19.** $\pi\cdot a^3$. **20.** 3 см. **21.** 140 см^3. **22.** 3 м^3. **23.** $V=\frac{\pi\cdot d^3}{4}\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$. **24.** $a:b$. **25.** В 2 раза. **26.** 243π см^3. **27.** 4 см. **28.** $\pi R^3\operatorname{tg}\varphi$. **29.** Часть $ABCC_1B_1$. **32.** Верно, если n четно. **33.** $\frac{1}{6}$. **34.** $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$.

§ 44. 1. Нет. 2. Да. 3. Да. 4. Да. 5. 2 : 1. 6. Да. 7. Да. 8. 3 : 1. 9. $V = S \cdot b \cdot \sin\varphi$. 10. 168 дм³. 11. $Q \cdot b \cdot \sin\varphi$. 12. $\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \sin\varphi$. 13. $\sqrt{2}$ м³. 14. $\frac{\sqrt{3}}{8}ad\sqrt{4a^2-d^2}$. 15. 3060 см³. 18. Плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов. 19. Объем фигуры Φ_2 в k раз больше объема фигуры Φ_1.

§ 45. 1. Одну треть. 2. $\frac{1}{3}abh$. 3. $\frac{\sqrt{3}a^2h}{12}$. 4. $\frac{d^2h}{6}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 6. $V = \frac{1}{3}a^2h$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. 8. $V = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$. 9. 32 м³. 10. 7 см. 11. $\frac{b^3}{6}$. 12. $V = \frac{1}{12}n \cdot a \cdot h \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. 13. Уменьшится в n раз. 14. $\frac{\sqrt{3}}{12}b^3$. 15. $\frac{1}{2}V$. 16. $\frac{1}{3}$. 17. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 18. $\frac{1}{6}$. 19. $\frac{3a^3}{4}$. 20. 1 : 7. 21. а) Равнобедренный треугольник; б) $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$; в) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}}{33}$; г) $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ и $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$. 22. $\frac{3a^3}{4}$. 23. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. 24. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. 25. $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. 26. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. 27. $\frac{a^3}{24}$. 29. $m : n$. 30. $\frac{V}{4}$.

§ 46. 1. а) В 3 раза; б) в 4 раза. 2. Увеличится в 2 раза. 3. 120π см³. 4. 1 : 7. 5. $V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{b^2-R^2}$. 6. 16π см³. 7. 72π см³. 8. 9π см³. 9. $\frac{\pi a^3}{4}$. 10. Нет. 11. 19π см³. 12. $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. 13. $\frac{\pi a^2h}{36}$. 14. $\frac{\pi a^2h}{6}$. 15. $10\frac{1}{3}$ м³. 16. 2325 м³. 17. $\frac{a^3-b^3}{2}$. 18. $\frac{\pi(R^3-r^3)}{3}$. 19. 8 см. 20. 7 см. 21. $R = 4r$. 22. $\frac{7}{27}V$. 23. 63π.

§ 47. 1. $\frac{32\pi}{3}$ см³. 2. а) В 27 раз; б) в 64 раза. 3. 6 см. 4. 27. 5. $\left(3\frac{5}{7}\right)^3 \approx 50$ раз. 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 7. $\frac{4000}{3}\pi$ см³. 8. $5\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ см. 9. $\frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)$. 10. 288π см³. 11. $\frac{7}{250}$. 12. $V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\frac{\varphi}{2})$. 13. $112\,500\pi$ см³. 14. Если центр шара лежит между параллельными плоскостями, то $V = \frac{434\pi}{3}$ см³. В противном случае $V = \frac{38\pi}{3}$ см³. 15. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. 16. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. 17. $\frac{\pi a^3(15-8\sqrt{2})}{12}$. 18. $2\pi^2r^2h$.

§ 48. 1. 6. 2. а) $\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$. 3. 24 м^2. 4. 12π м^2. 5. Двумя способами, в обоих площади равны. 6. 4π м^2. 7. $6S$. 8. 24π м^2. 9. $a\left(3b+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 10. $\frac{1}{2}n\cdot a^2\cdot \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n}+n\cdot a\cdot b$. 11. 2 : 1. 12. $2\sqrt{2}Q$. 13. $\frac{a}{2}$. 14. πQ. 15. 20 см^2. 16. $4Q$. 17. 60°. 18. $\pi : 4$. 19. $\pi r^2+\pi R^2+$ $+\pi b(R+r)$. 20. 169π см^2. 21. 4. 22. Равнобедренный.

§ 49. 1. 12 см^2. 2. Увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) n^2 раз. 3. $\approx$ 13,8 раза. 4. 400π см^2. 5. 400π см^2. 6. $\frac{1125\pi}{2}$ м^3. 7. 2 : 3. 8. $m\sqrt{m}:n\sqrt{n}$. 9. $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}$. 10. В три раза. 11. 8π дм^2. 12. 2 : 3, 2 : 3. 15. 2500π дм^2. 16. $2\pi R(R-x)$. 17. Если центр шара лежит между секущими плоскостями, то площадь равна $2\pi R(R_1+R_2)$. В противном случае площадь равна $2\pi R\cdot(R_1-R_2)\,(R_1>R_2)$. 18. $\frac{4}{3}\pi R^2$. 19. $\frac{2}{3}\pi R^2$.

§ 50. 2. а) (1, 3, 0), (5, –6, 0); б) (0, 3, 4), (0, –6, 2); в) (1, 0, 0), (5, 0, 0); г) (0, 0, 4), (0, 0, 2). 3. а) Плоскость Oyz; б) плоскость Oxz; в) плоскость Oxy; г) ось Oz; д) ось Oy; е) ось Ox; ж) начало координат. 4. а) 3; б) 2; в) 1. 5. а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. 6. а) Плоскость, параллельная плоскости Oyz и проходящая через точку (1, 0, 0); б) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1, 1, 0). 7. а) $z=x$; б) $x=y=z$. 8. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $B_1(0, 0, 1)$, $C_1(0, 1, 1)$, $D_1(1, 1, 1)$. 9. $B(-2, -2, 0)$, $C(2, -2, 0)$, $D(2, 2, 0)$, $A_1(-2, 2, 4)$, $B_1(-2, -2, 4)$, $C_1(2, -2, 4)$, $D_1(2, 2, 4)$. 10. (–1, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, –1). 11. Не имеет общих точек с координатной плоскостью Oxy; касается координатной плоскости Oxz; пересекает координатную плоскость Oyz. 12. Пересекает ось Ox в точке с координатами (1, 0, 0); не проходит через начало координат. 13. а) Да; б), в) нет. 14. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. 15. а) $(0, \frac{3}{2}, 2)$; б) $(3, \frac{3}{2}, 1)$. 16. а) $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$; б) $(-x, -y, z)$, $(-x, y, -z)$, $(x, -y, -z)$; в) $(-x, -y, -z)$. 17. 4 случая: 1) $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 2) $C(0, -\sqrt{3}, 0)$, $D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 3) $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 4) $C(0, -\sqrt{3}, 0)$, $D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

§ 51. 1. 3, $\sqrt{29}$. 2. Точка A. 3. $\sqrt{2}(5+\sqrt{7}+\sqrt{19})$. 4. Равносторонний. 5. а) $C(2, -5, 0)$, $R=3$; б) $C(0, 6, -1)$, $R=\sqrt{11}$. 6. а) $x^2+y^2+z^2=1$; б) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

7. а) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$; б) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$; в) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. 8. а) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=10$; в) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=13$. 9. 8 сфер, $(x\pm R)^2+(y\pm R)^2+(z\pm R)^2=R^2$. 10. $O(2, 0, 0)$, $R=2$. 11. $(x-3)^2+y^2+z^2=16$. Точка M принадлежит, а точка K не принадлежит этой сфере. 12. Лежит внутри сферы. 13. Не имеют общих точек. 14. $(x-1)^2+(y-2)^2=3$. 15. Цилиндрическая поверхность.

§ 52. 1. а) $(-2, 6, 1)$; б) $(1, 3, 0)$; в) $(0, -3, 2)$; г) $(-5, 0, 5)$. 2. а) $(-7, 9, -16)$; б) $(5, -8, -2)$; в) $(8, 0, 19)$. 3. $(-a, -b, -c)$. 4. $x_2=t\cdot x_1$, $y_2=t\cdot y_1$, $z_2=t\cdot z_1$. 5. $(2, 0, 4)$; $(2, 3, 4)$; $(0, 0, 4)$; $(0, 3, 0)$. 6. $(1, 3, -2)$; $(1, -3, 6)$. 7. а) $(1, -2, 30)$; б) $\left(-1, 2, 3\frac{1}{4}\right)$; в) $(11, -22, 7)$. 8. $(5, -6, -7)$. 9. а) Первая и вторая координаты равны нулю; б) вторая и третья координаты равны нулю. 10. а) $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 2)$; б) $(2, 2, 3)$, $(0, 2, 3)$. 11. а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$. 12. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. 13. $\sqrt{14}$, $\sqrt{46}$.

§ 53. 1. а) $90°$; б) $135°$; в) $90°$; г) $120°$; д) $135°$. 2. -4. 3. а) Плюс; б) минус. 4. а) $\cos\varphi=-\frac{4\sqrt{6}}{21}$; б) $\varphi=45°$. 5. $z=2$. 9. $60°$. 10. $t=0$. 14. а) $\frac{1}{2}a^2$; б) $-\frac{1}{2}a^2$; в) $-\frac{1}{2}a^2$; г) $\frac{1}{4}a^2$; д) $-\frac{1}{4}a^2$; е) 0. 17. а) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $90°$, $\cos\varphi=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{10}}{10}$; в) $180°$, $90°$, $90°$; г) $90°$, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$. 18. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 19. 24.

§ 54. 1. $z=0$, $y=0$, $x=0$. 2. A, C, D. 3. $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{3}$. 4. $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, $\left(0, -\frac{d}{b}, 0\right)$, $\left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$. 5. $-x+y+z-1=0$. 6. $2x-4y+z+21=0$. 7. а) $x+y+z-1=0$; б) $x+4y+3z-5=0$. 8. а) $y=-2$; б) $y=2$; в) $x+y=3$. 9. а), в). 10. а) $3x+y-z-7=0$; б) $x-y+5z+7=0$. 12. а) Да; б) нет. 13. а) $\cos\varphi=\frac{1}{3}$; б) $\cos\varphi=\frac{16}{21}$. 15. а) $ax+by-cz+d=0$, $ax-by+cz+d=0$, $-ax+by+cz+d=0$; б) $ax-by-cz+d=0$, $-ax+by-cz+d=0$, $-ax-by+cz+d=0$; в) $-ax-by-cz+d=0$. 16. а) 2; б) 2. 17. Да. 18. а) $O(0, 0, 0)$, $R=2$; б) $O(0, 1, 0)$, $R=\sqrt{3}$; в) $O\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $R=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 19. а) $y=3$; б) $2x-2y+z-9=0$.

§ 55*. 1. Ось $Ox \begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases}$ ось $Oy \begin{cases} x=0, \\ y=t, \\ z=0; \end{cases}$ ось $Oz \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2+3t, \\ z=3-t. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=-2+7t, \\ y=1+3t, \\ z=-3+9t. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x=x_0+t, \\ y=y_0, \\ z=z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0+t, \\ z=z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \\ z=z_0+t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2+t, \\ z=-3+t. \end{cases}$ 6. $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

7. Перпендикулярны. 8. $\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 2\right)$. 9. Перпендикулярны. 10. (3, 9, 10).

11. $\sqrt{14}$. 12. $\frac{\sqrt{19}}{4}$. 13. а) $\begin{cases} x=at+x_0, \\ y=bt+y_0, \\ z=-ct-z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=at+x_0, \\ y=-bt-y_0, \\ z=ct+z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-at-x_0, \\ y=bt+y_0, \\ z=ct+z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=at+x_0, \\ y=-bt-y_0, \\ z=-ct-z_0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-at-x_0, \\ y=bt+y_0, \\ z=-ct-z_0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-at-x_0, \\ y=-bt-y_0, \\ z=ct+z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=-at-x_0, \\ y=-bt-y_0, \\ z=-ct-z_0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x=10+3t, \\ y=16+5t, \\ z=1+t. \end{cases}$ 17. $\frac{5}{13}$. 18. $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

§ 56. 1. Системой этих неравенств. 2. а), б) Первому; в) второму. 3. Прямоугольный параллелепипед. 4. Цилиндр. 6. $|x + y| + z \leqslant 1$, $|x - y| - z \leqslant 1$. 8. $x^2 + y^2 \leqslant \left(R\frac{h-z}{h}\right)^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$. 9. а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. 10. а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. 12. Октаэдр. 17. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

§ 57*. 2. Плоскость. 3. Параллелен. 4. Проходит через начало координат. 5. а) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. 6. -2. 8. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$. 9. С 1-го склада — 10 т, со 2-го — 20 т, с 3-го — 5 т. 10. С 1-го склада — 0 т, со 2-го и 3-го — 17,5 т. 11. Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.

§ 58*. 2. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 3. $A(2, 45°)$, $B(10, 180°)$, $C(2, -60°)$, $D(2, 150°)$. 4. Да. 5. а) Окружность; б) луч. 6. (1, 60°), (1, 120°), (1, 180°), (1, 240°), (1, 300°). 13. Спираль Архимеда.

§ 59*. **1.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0, -\sqrt{3}, -1)$, $(0, 0, 1)$. **2.** A: $r = \sqrt{3}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $B(\sqrt{2}, 45°, 180°)$; $C(2, 90°, 0°)$. **3.** $(0, 0°, 0°)$; $(1, 0°, 0°)$; $(\sqrt{2}, 0°, 45°)$; $(1, 0°, 90°)$; $(1, 90°, 0°)$; $(\sqrt{2}, 45°, 0°)$; $(\sqrt{3}, \psi, \varphi)$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(\sqrt{2}, 45°, 90°)$. **4.** а) $(r, -\psi, \varphi)$, $(r, \psi, 180° - \varphi)$, $(r, \psi, -\varphi)$; б) $(r, -\psi, -\varphi)$, $(r, -\psi, 180° - \varphi)$, $(r, \psi, 180° + \varphi)$; в) $(r, -\psi, 180° + \varphi)$. **9.** На полюсах. **10.** а) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость. **11.** а) Полушар; б) полушар; в) четверть шара. **12.** 2.

§ 61. **1.** 9. **2.** 20. **3.** 1, 2, 3, 5, 7. **6.** Внутри лежат точки B, D и F, снаружи — A, C и E. **9.** Многоугольники изображены на рисунках б) и г). **10.** Число вершин равно числу сторон. **11.** а) 2; б) 3; в) 4; г) $n - 2$. **12.** а) 9; б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **13.** а), в) Нет; б) да. **14.** а) Да, пятиугольник; б) да, четырехугольник; в) да, многоугольник с числом сторон, большим пяти. **15.** а) Одна; б) пять; в) $\frac{n(n-3)}{2}$. **17.** Да. **18.** Нет.

§ 62. **1.** $\frac{\psi-\varphi}{2}$. **2.** $\psi - \varphi$. **4.** 70°. **5.** 36°, 72°, 108°, 144°. **6.** Семь. **7.** а) 10; б) 15. **9.** Три. **11.** а), б) 180°. **12.** а) −5; б) −7.

§ 63. **1.** Нет. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** а) В середине гипотенузы; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. **5.** К вершине большего угла. **6.** К меньшей. **7.** К большей. **8.** Нет. **10.** 140° и 20°.

§ 64. **1.** 2 : 1. **2.** 3 : 1. **3.** Да. **4.** 1 : 3. **6.** 1 : 2. **7.** $\frac{2}{7}$.

§ 65. **1.** а) 10 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; г) 5 см; д) 10 см. **2.** а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см; д) 3 см. **3.** а) 84; б) 12. **7.** $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

8. $h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$. **12.** $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 - 2dc\cos\varphi}$, $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2dc\cos\varphi}$.

13. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$; $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$.

§ 66. **1.** 120°. **3.** 22°. **7.** 20°. **8.** 80°, 60°, 40°. **9.** Дуги двух окружностей одинакового радиуса, опирающихся на отрезок AB, без точек A и B. **10.** Точка пересечения прямой c и серединного перпендикуляра к отрезку AB. **11.** 8 см. **12.** $\sqrt{127\,500} \approx 357$ (км).

§ 67. **1.** а), в) Нет; б) да. **2.** Нет **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** 140° и 130°. **7.** $AC^2 = \dfrac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{ab+cd}$, $BC^2 = \dfrac{(a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad}{bc+ad}$. **9.** а), б) Нет; в), г), д) да. **10.** Да. **11.** Нет. **12.** Да, 34 см. **13.** Нет. **14.** 7 см; 30 см.

§ 68. **2.** 2 см. **3.** а) Точки, расположенные внутри параболы; б) точки, расположенные вне параболы. **4.** а) Ветви параболы расширяются; б) ветви параболы сжимаются. **8.** Директриса. **15.** Построим две перпендикулярные касательные. Точка их пересечения будет принадлежать директрисе. Аналогично строим вторую точку, принадлежащую директрисе, и проводим через них прямую. Она и будет директрисой параболы. С центрами в каких-нибудь двух точках параболы и радиусами, равными расстояниям от этих точек до директрисы, проводим окружности. Фокус параболы будет точкой пересечения этих окружностей.

§ 69. **2.** c; точки пересечения эллипса с прямой, проходящей через фокусы. **3.** 1 см. **4.** Эллипс. **6.** а) Эллипс приближается к окружности; б) эллипс растягивается вдоль прямой, проходящей через фокусы, и сжимается вдоль перпендикулярной ей прямой. **7.** Две точки. **8.** а) Точки внутри эллипса; б) точки вне эллипса. **9.** Эллипс с фокусами A и B, за исключением двух точек, принадлежащих прямой AB. **10.** Эллипс.

§ 70. **2.** Гипербола. **4.** а) Точки, расположенные между ветвями гиперболы; б) точки, расположенные внутри ветвей гиперболы. **5.** 1 см. **6.** а) Ветви гиперболы сжимаются; б) ветви гиперболы расширяются. **7.** Гипербола. **8.** Гипербола. **10.** Точки пересечения прямой F_1F_2 с гиперболой.

§ 71. **17.** Да. **18.** а), г), д) Нет; б), в) да. **19.** Нет.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ