МАТЕМАТИКА: Алгебра и начала математического анализа ▫ Геометрия

И. М. СМИРНОВА

Геометрия

10-11 классы

УЧЕБНИК

для учащихся
общеобразовательных организаций
(базовый уровень)

4-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Москва 2019

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз: научной (Российская академия наук, № 004994 от 19.12.2016), педагогической (Российская академия наук, № 005101 от 19.12.2016) и общественной (РШБА, № ОЭ/16-0422 от 26.12.2016)

Смирнова И. М.

С50 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10—11 классы. Геометрия : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций (базовый уровень) / И. М. Смирнова. — 4-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2019. — 248 с. : ил.

ISBN 978-5-346-04437-6

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. По сравнению с традиционным изложением в нём больше внимания уделяется вопросам исторического, мировоззренческого, научно-популярного и прикладного характера.

Данный учебник согласуется с учебниками по алгебре и началам математического анализа А. Г. Мордковича.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна

МАТЕМАТИКА:
алгебра и начала математического анализа, геометрия
10—11 классы

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных организаций
(базовый уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Редакторы *С. В. Бахтина, В. В. Черноруцкий*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева, Т. С. Богданова*
Технический редактор *О. Б. Резчикова.* Корректоры *С. О. Никулаев, В. И. Антонов*
Компьютерная вёрстка и графика: *А. А. Горкин*

Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,14.

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б. Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин. Тел.: 8 (495) 783 8284. www.shop.mnemozina.ru

ISBN 978-5-346-04437-6

ВВЕДЕНИЕ

Мы начинаем изучать один из самых увлекательных и важных разделов математики — стереометрию. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она формирует необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных фигур, законами их восприятия и изображения, что позволяет правильно ориентироваться в окружающем нас мире.

Во-вторых, стереометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению выдающегося российского математика академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение строгой логики и живого воображения, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга, как «лёд и пламень».

Кроме этого, изучение стереометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Наконец, стереометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и других.

В стереометрии изучаются красивые математические объекты. Многие из них придумал не сам человек, их создала природа. Например, кристаллы — природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии, определяются их геометрическим строением, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке.

Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: «Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Неслучайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остаётся грамматикой архитектора».

Стереометрия является основой многих современных научных разделов, таких, как топология, кристаллография, линейное программирование и др. Глубокие исследования в этих областях проведены российскими учёными: А. Д. Александровым, П. С. Александровым, Б. Н. Делоне, Л. В. Канторовичем, А. В. Погореловым, Е. С. Фёдоровым и другими.

Вот с какой замечательной наукой нам предстоит познакомиться.

В учебнике используются следующие обозначения:

○ — устная задача;

* — дополнительный материал, задачи повышенной трудности;

■ — окончание доказательства.

ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Задачи на доказательство

Теорема 1. (Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 2. (Второй признак равенства треугольников.) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 3. (Признак равнобедренного треугольника.) Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Теорема 4. (Третий признак равенства треугольников.) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 5. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Теорема 6. (Соотношение между сторонами и углами треугольника.) В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Теорема 7. (Неравенство треугольника.) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Упражнения

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

2. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

3. О треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

4. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты CH, C_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
5. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты AH, A_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
6. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ сторона AB равна стороне A_1B_1, угол A равен углу A_1, высота AH равна высоте A_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
7. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
8. Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
9. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
10. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
11. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.
12. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный.
13. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники ABE и CDE подобны.
14. Докажите, что произведение отрезков хорд, проведённых через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведённого через ту же точку.
15. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что треугольники ADE и BCE подобны.
16. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.
17. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C — точка касания). Докажите, что треугольники EAC и ECB подобны.
18. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C — точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.
19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.
20. Докажите, что отрезок EF, соединяющий точки на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку G пересечения диагоналей и параллельный основаниям трапеции, делится в точке G пополам.

21. Докажите, что из двух высот треугольника больше та, которая опущена на меньшую сторону.
22. Докажите, что высота треугольника меньше полусуммы сторон, прилежащих к ней.
23. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.
24. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
25. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.
26. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
27. В треугольнике ABC точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC, CH — высота. Докажите, что угол C равен углу DHE.
28. Докажите, что две вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей медиану, проведённую из третьей вершины данного треугольника.
29. Пусть треугольники ABC и ABC' имеют равные высоты, опущенные на сторону AB и расположенные от неё по одну сторону. Прямая c параллельна AB и пересекает остальные стороны треугольников. Докажите, что отрезки DE и $D'E'$ этой прямой, заключённые в треугольниках, равны.
30. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

§ 2. Углы

Теорема 1. Сумма углов треугольника равна 180°.

Следствие 1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Следствие 2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Теорема 2. Сумма углов выпуклого многоугольника равна $180°(n - 2)$.

Теорема 3. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Упражнения

1. Один острый угол прямоугольного треугольника на 32° больше другого. Найдите больший острый угол.
2. В треугольнике ABC угол A равен 40°, внешний угол при вершине B равен 102°. Найдите угол C.
3. В треугольнике ABC угол A равен 40°. Внешний угол при вершине B равен 68°. Найдите угол C.
4. В треугольнике ABC угол A равен 38°, $AC = BC$. Найдите угол C.

5. В треугольнике ABC угол C равен 118°, $AC = BC$. Найдите угол A.
6. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, угол C равен 52°. Найдите внешний угол CBD.
7. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 122°. Найдите угол C.
8. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 138°. Найдите угол C.
9. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 3. Найдите наибольший из них.
10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите один из других его углов.
11. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 40°. Найдите этот третий угол.
12. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите меньший из них.
13. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол.
14. Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол.
15. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, угол A равен 34°. Найдите угол BCH.
16. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 70°, CH — высота. Найдите разность углов ACH и BCH.
17. В треугольнике ABC угол A равен 30°, CH — высота, угол BCH равен 22°. Найдите угол ACB.
18. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, угол C равен 50°, угол CAD равен 28°. Найдите угол B.
19. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, угол C равен 30°, угол BAD равен 22°. Найдите угол ADB.
20. Пусть AB — основание равнобедренного треугольника ABC, AD — высота, угол BAD равен 24°. Найдите угол C.
21. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?
22. Найдите хорду, на которую опирается угол 90°, вписанный в окружность радиуса 1.
23. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?
24. Найдите хорду, на которую опирается угол 30°, вписанный в окружность радиуса 3.
25. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?
26. Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$.
27. Найдите хорду, на которую опирается угол 45°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.

28. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$.

29. Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$.

30. Найдите хорду, на которую опирается угол $60°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

31. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$.

32. Найдите хорду, на которую опирается угол $120°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

33. Найдите хорду, на которую опирается угол $135°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.

34. Найдите хорду, на которую опирается угол $150°$, вписанный в окружность радиуса 1.

35. Центральный угол на $36°$ больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.

36. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 20 % окружности.

37. Дуги AC и BC окружности составляют соответственно $200°$ и $80°$. Найдите вписанный угол ACB.

38. Пусть CD — медиана треугольника ABC, угол C равен $90°$, угол B равен $58°$. Найдите угол ACD.

39. В треугольнике ABC угол A равен $72°$, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE.

40. Два угла треугольника равны $58°$ и $72°$. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов.

41. В треугольнике ABC угол C равен $58°$, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB.

42. Острый угол прямоугольного треугольника равен $32°$. Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.

43. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.

44. Пусть CH — высота треугольника ABC, AD — биссектриса, O — точка пересечения CH и AD, угол BAD равен $26°$. Найдите угол AOC.

45. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, причём $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC.

46. В треугольнике ABC угол A равен $44°$, угол C равен $62°$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол D треугольника BCD.

47. Острые углы прямоугольного треугольника равны $29°$ и $61°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла.

48. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $21°$. Найдите меньший угол данного треугольника.

49. Острые углы прямоугольного треугольника равны $24°$ и $66°$. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

50. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $40°$. Найдите больший из острых углов этого треугольника.

51. Острые углы прямоугольного треугольника равны $24°$ и $66°$. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

52. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведёнными из вершины прямого угла, равен $14°$. Найдите меньший угол этого треугольника.

53. В треугольнике ABC угол B равен $45°$, угол C равен $85°$, AD — биссектриса, $AE = AC$. Найдите угол BDE.

54. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, угол B равен $86°$, CD — биссектриса внешнего угла, $CE = CB$. Найдите угол BDE.

55. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. Биссектрисы треугольника AD, BE и CF пересекаются в точке O. Найдите угол AOF.

56. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $82°$. Высоты треугольника AD, BE и CF пересекаются в точке O. Найдите угол AOF.

57. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5 : 7$. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?

58. Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят её на три дуги, градусные величины которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника ABC.

59. Пусть AC и BD — диаметры окружности с центром O. Вписанный угол ACB равен $38°$. Найдите центральный угол AOD.

60. Пусть AC и BD — диаметры окружности с центром O. Центральный угол AOD равен $110°$. Найдите вписанный угол ACB.

61. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен $58°$. Найдите угол C этого четырёхугольника.

62. Стороны четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно $95°$, $49°$, $71°$, $145°$. Найдите угол B этого четырёхугольника.

63. Точки A, B, C, D, расположённые на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как $4 : 2 : 3 : 6$. Найдите угол A четырёхугольника $ABCD$.

64. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $105°$, угол CAD равен $35°$. Найдите угол ABD.

65. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $75°$, угол CAD равен $35°$. Найдите угол ABC.

66. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $110°$, угол ABD равен $70°$. Найдите угол CAD.

67. Хорда AB стягивает дугу окружности в $92°$. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B.

68. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен $32°$. Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AB.

69. Через концы A, B дуги окружности в $62°$ проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB.

70. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный $122°$. Найдите градусную величину дуги AB, стягиваемую точками касания.

71. Найдите угол ACO, если его сторона CA в точке A касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B, а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна $64°$.

72. Угол ACO равен $28°$. Его сторона CA в точке A касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B. Найдите градусную величину дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла.

§ 3. Решение треугольников

Синусом острого угла прямоугольного треугольника ABC (AB — гипотенуза) называется отношение противолежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначается $\sin A$. По определению,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначается $\cos A$. По определению,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего к этому углу катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначается $\operatorname{tg} A$. По определению,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначается $\operatorname{ctg} A$. По определению,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Непосредственно из этих определений следуют равенства

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Теорема 1 (Теорема Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема 2 (Теорема косинусов). Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Теорема 3 (Теорема синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB = 4$. Найдите BC.

2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $BC = 3$. Найдите AB.

3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB.

5. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите BC.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $BC = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.

7. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите BC.

8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $AB = 2$. Найдите AC.

9. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите BC.

10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AB = 2\sqrt{2}$. Найдите BC.

11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AC = 2\sqrt{2}$. Найдите AB.

12. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AC = 3$. Найите BC.

13. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 4$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.

14. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \dfrac{2}{3}$, $AC = 8$. Найдите AB.

15. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = 0{,}75$, $BC = 9$. Найдите AC.

16. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 4$. Найдите AB.

17. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}8$, $BC = 3$. Найдите AB.

18. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\operatorname{tg} A = 0{,}75$, $AC = 8$. Найдите AB.

19. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите гипотенузу.

20. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26. Один из его катетов равен 10. Найдите другой катет.

21. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

22. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB = 2$. Найдите AH.

23. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $30°$, $AB = 4$. Найдите BH.

24. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $45°$, $AB = 2$. Найдите высоту CH.

25. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите AH.

26. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите BH.

27. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

28. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $60°$, $AB = 4$. Найдите AH.

29. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, угол A равен $60°$, $AB = 12$. Найдите BH.

30. В треугольнике ABC все стороны равны $2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

31. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите стороны этого треугольника.

32. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 4$, высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол C.

33. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 10, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AB.

34. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 18$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AC.

35. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 10, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AB.

36. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 18$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите AC.

37. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 4$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите высоту CH.

38. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 4, угол C равен $30°$. Найдите высоту AH.

39. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, высота AH равна 4, угол C равен $30°$. Найдите AC.

40. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $3\sqrt{2}$, высота AH равна 3. Найдите угол C.

41. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, высота AH равна $2\sqrt{2}$, угол C равен $45°$. Найдите AC.

42. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 30$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите высоту AH.

43. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, $AB = 30$, $\cos A = 0{,}6$, AH — высота. Найдите BH.

44. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\sin C = 0{,}6$. Найдите высоту CH.

45. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}8$, CH — высота. Найдите AH.

46. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}8$. Найдите высоту CH.

47. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $AC = 5$, $\sin C = 0{,}6$, CH — высота. Найдите AH.

48. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{3}$, угол C равен $120°$. Найдите высоту AH.

49. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, угол C равен $120°$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC.

50. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{3}$, угол C равен $120°$. Найдите AB.

51. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны $2\sqrt{2}$, угол C равен $135°$. Найдите высоту AH.

52. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны 2, угол C равен $150°$. Найдите высоту AH.

53. В треугольнике ABC дано: $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $\cos B = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите сторону AC.

54. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = 3$, $\cos B = -\frac{1}{3}$. Найдите сторону AC.

55. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = 4$, угол B равен $60°$. Найдите сторону AC.

56. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, угол B равен $150°$. Найдите сторону AC.

57. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите косинус угла B.

58. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{13}$. Найдите косинус угла A.

59. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 7$, $AC = 5$. Найдите угол B.

60. В треугольнике ABC дано: $AB = 1$, $AC = \sqrt{8}$, угол B равен $135°$. Найдите синус угла C.

61. В треугольнике ABC дано: $AB = 9$, $AC = 6$, $\sin B = \frac{1}{3}$. Найдите угол C.

62. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, угол B равен $45°$, сторона AC равна $\sqrt{6}$. Найдите BC.

63. В треугольнике ABC дано: $\sin A = \frac{2}{3}$, $\sin B = \frac{1}{3}$, $AC = 4$. Найдите сторону BC.

§ 4. Четырёхугольники

Теорема 1. (Первый признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Теорема 2. (Второй признак параллелограмма.) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Теорема 3. (Признак прямоугольника.) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Теорема 4. (Признак ромба.) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

Теорема 5. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Упражнения

1. Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен $60°$.

2. Сумма двух углов параллелограмма равна $100°$. Найдите один из оставшихся углов.

3. Один угол параллелограмма больше другого на $70°$. Найдите больший угол.

4. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы $26°$ и $34°$. Найдите больший угол параллелограмма.

5. Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

6. Меньшая сторона прямоугольника равна 6, диагонали пересекаются под углом $60°$. Найдите диагонали прямоугольника.

7. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.

8. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Найдите больший из углов, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

9. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении $1 : 2$, меньшая его сторона равна 6. Найдите диагональ данного прямоугольника.

10. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.
11. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 7. Найдите периметр этого квадрата.
12. Найдите меньшую диагональ ромба, стороны которого равны 2, а острый угол равен $60°$.
13. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.
14. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна $50°$?
15. Найдите среднюю линию трапеции, если её основания равны 30 и 16.
16. Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите большее основание трапеции.
17. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.
18. Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.
19. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне.
20. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.
21. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.
22. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3 : 4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.
23. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.
24. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен $60°$.
25. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.
26. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.
27. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.
28. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 больше, чем расстояние от неё до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 28. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

29. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними $60°$. Найдите меньшее основание.

30. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен $60°$. Найдите её периметр.

31. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.

32. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции.

33. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен $45°$. Найдите высоту трапеции.

34. Периметр трапеции равен 50, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.

35. Основания трапеции относятся как $2 : 3$, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.

36. Периметр равнобедренной трапеции равен 80, её средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.

37. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из её оснований больше другого на 4. Найдите большее основание трапеции.

38. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции.

39. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

40. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите её среднюю линию.

41. Диагонали четырёхугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

§ 5. Окружность

Теорема 1. Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема 2 (Теорема синусов). Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема 3. Радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Теорема 4. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 5. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Теорема 6. Суммы противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равны 180°.

Теорема 7. Суммы противоположных сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

Упражнения

1. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
2. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.
3. Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
4. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности.
6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.
7. В треугольнике ABC заданы длины сторон $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности.
8. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, угол C равен 90°. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите AC.
9. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.
10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3 и 4.
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.
12. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $\sqrt{8}$.
13. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.
14. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности.
15. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?

16. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

17. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.

18. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

19. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.

20. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 4.

21. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4.

22. Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанной окружности.

23. Острый угол ромба равен 30°. Радиус вписанной окружности равен 2. Найдите сторону ромба.

24. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1.

25. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.

26. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.

27. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

28. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.

29. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 3, равен 30°. Найдите сторону AB этого треугольника, противолежащую данному углу.

30. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противолежащий ей угол C равен 45°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

31. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Найдите угол C.

32. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противолежащий ей угол C равен 60°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

33. Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C.

34. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противолежащий ей угол C равен 135°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

35. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противолежащий ей угол C равен 120°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

36. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности.

37. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

38. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности.

39. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.

40. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 98°. Найдите угол C.

41. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов.

42. Углы A, B и C четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите угол D, если около данного четырёхугольника можно описать окружность. Нарисуйте этот четырёхугольник.

43. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

44. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведённым в одну из вершин стороны, равен 54°. Найдите n.

45. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу этого треугольника.

46. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

47. В треугольнике ABC заданы стороны $AC = 4$, $BC = 3$, а угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

48. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

49. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

50. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

51. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите её среднюю линию.

52. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

53. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырёхугольника.

54. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.

55. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$ и $CD = 15$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

56. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $1 : 2 : 3$. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 32.

57. Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{8}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

58. Около окружности, радиус которой равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

§ 6. Площадь

Теорема 1. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Теорема 2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема 3. Площадь треугольника выражается формулой (формула Герона) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Теорема 4. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне:

$$S = ah.$$

Теорема 5. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Теорема 6. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема 7. Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса r, выражается формулой $S = pr$, где p — полупериметр многоугольника.

Т е о р е м а 8. Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус (или произведению числа π на квадрат радиуса):

$$S = \pi R^2.$$

Следствие. Площадь кругового сектора равна половине произведения длины дуги этого сектора на радиус круга.

Т е о р е м а 9. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S'}{S} = k^2.$$

Упражнения

1. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

2. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

3. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 9.

4. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 8 и 10, а угол между ними равен 30°.

5. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен 150°.

6. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 5 и 8.

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 16. Один из его катетов равен 4. Найдите другой катет.

8. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.

9. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

10. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°.

11. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.

12. Основания трапеции равны 1 и 3, высота 1. Найдите площадь трапеции.

13. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции.

14. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

15. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

16. Площадь круга равна $\frac{1}{\pi}$. Найдите длину его окружности.

17. Найдите площадь сектора круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, центральный угол которого равен 90°.

18. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.

19. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18 и одна сторона на 3 больше другой.

20. Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.

21. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

22. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

23. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.

24. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

25. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

26. Сторона прямоугольника относится к его диагонали, как 4 : 5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.

27. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.

28. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

29. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

30. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

31. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

32. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°.

33. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.

34. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.

35. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

36. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

37. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.

38. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

39. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $30°$. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.

40. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.

41. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.

42. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

43. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

44. Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.

45. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.

46. Основания трапеции равны 8 и 34, площадь равна 168. Найдите её высоту.

47. Основание трапеции равно 13, высота равна 5, а площадь равна 50. Найдите второе основание трапеции.

48. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.

49. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.

50. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

51. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а её площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.

52. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, а большая боковая сторона составляет с основанием угол $45°$.

53. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Её площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции.

54. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.

55. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а её площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.

56. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол $150°$. Найдите площадь трапеции.

57. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне.

58. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, площадь которого равна 33. Найдите его периметр.

59. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.

60. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равен 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.

61. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

62. Найдите центральный угол сектора круга радиуса $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, площадь которого равна 6.

63. Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.

§ 7. Координаты и векторы

Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, для которого точки A_1, A_2 имеют координаты соответственно (x_1, y_1), (x_2, y_2), выражается формулой

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$ с заданными координатами выражается формулой

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Прямая на плоскости задаётся уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причём a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого вектором нормали.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Упражнения

1. Найдите расстояние от точки A с координатами (6, 8) до оси абсцисс.
2. Найдите расстояние от точки A с координатами (6, 8) до оси ординат.
3. Найдите расстояние от точки A с координатами (6, 8) до начала координат.
4. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Oy.
5. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Ox.
6. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно начала координат.
7. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.
8. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.
9. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-6, 0)$.
10. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.
11. Найдите длину вектора $\vec{a}(6, 8)$.
12. Найдите синус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, с осью абсцисс.
13. Найдите косинус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, с осью абсцисс.
14. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами (−2, 0) и (0, 2).
15. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами (2, 0) и (0, 2).
16. Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, 8) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.
17. Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (−6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, −6) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.
18. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(6, 4)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(6, 8)$.
19. Точки $O(0, 0)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите координаты точки A.
20. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $C(0, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите ординату точки B.
21. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(4, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Сколько решений имеет задача «Найти точку C»?
22. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
23. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $C(2, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OCAB$. Найдите координаты точки B.

24. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

25. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 0)$, $B(8, 6)$, $C(2, 6)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину её средней линии DE.

26. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Ox.

27. Найдите ординату точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Oy.

28. Найдите абсциссу точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = x$.

29. Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = -x$.

30. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $3x + 4y = 6$.

31. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $P(8, 6)$. Найдите её радиус.

32. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс?

33. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси ординат?

34. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.

35. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.

36. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.

37. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.

38. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(4, 2)$, $(8, 4)$, $(6, 8)$, $(2, 6)$.

39. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 0)$, $(10, 4)$, $(8, 8)$, $(0, 4)$.

40. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 4)$, $(10, 8)$, $(2, 6)$.

41. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 2)$, $(8, 8)$.

42. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 2)$, $(8, 8)$, $(4, 8)$.

43. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(8, 4)$, $(10, 10)$, $(4, 8)$.

44. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

45. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

46. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

47. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

48. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

49. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

50. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

51. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

52. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

53. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

54. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.

55. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$.

56. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

57. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

58. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

59. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

60. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(2, 4)$ имеет координаты (6, 2). Найдите координаты точки B.

61. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(3, 6)$ имеет координаты (9, 3). Найдите сумму координат точки B.

62. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5, 3)$ имеет координаты (3, 1). Найдите координаты точки A.

63. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5, 4)$ имеет координаты (3, 1). Найдите сумму координат точки A.

Глава I

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 8. История возникновения и развития геометрии

Стереометрия, или геометрия в пространстве, это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия — греческое слово. Оно произошло от слов «стерео» — тело и «метрео» — измерять, т. е. буквально означает «теломерие».

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. древнегреческий учёный Геродот (V в. до н. э.) писал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

При строительстве сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала потребуется для постройки, уметь вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооружённые за 2, 3 и 4 тысячи лет до н. э., поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующей о том, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчёты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке — астрономии.

Начиная с VII в. до н. э., в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической

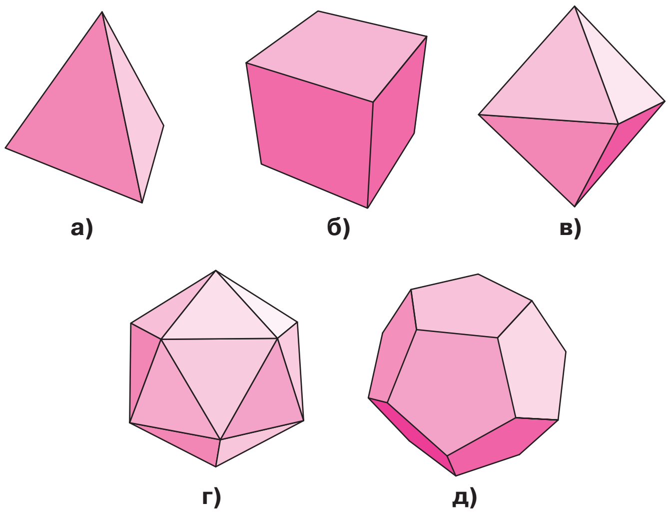


Рис. 1

к теоретической геометрии. Всё большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось выводить новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI—V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Для обоснования своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь — тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 1, а); земля — гексаэдр (куб — многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 1, б); воздух — октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 1, в); вода — икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 1, д).

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: «Тетра» — четыре; «Гекса» — шесть; «Окто» — восемь; «Икоси» — двадцать, «Додека» — двенадцать. «Эдра» — грань.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого учёного — Евклида, который жил около 300 г. до н. э. К сожалению, о его жизни известно мало. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

Славу Евклиду принесла его книга «Начала», в которой впервые было дано научное изложение и стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении более двух тысячелетий этот труд являлся основой изучения систематического курса геометрии.

В одном из рассказов о Евклиде говорится: «Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его “Начала”. Евклид на это ответил: “В геометрии нет царского пути”».

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и т. д. Геометрические методы широко используются в других науках, например теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и др.

§ 9. Основные понятия стереометрии

Основными понятиями стереометрии являются **точка**, **прямая** и **плоскость**, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Евклид в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ... , прямые — строчными латинскими буквами a, b, c, ... , плоскости — греческими буквами α, β, γ, ...

Точки, прямые и плоскости будем изображать, как показано на рисунке 2.

Обратите внимание на то, что прямая является бесконечной, а мы изображаем лишь конечный участок прямой. Плоскость также является бесконечной, мы же изображаем лишь её конечный участок.

Точка может принадлежать (рис. 3, а) или не принадлежать данной прямой (рис. 3, б). Если точка принадлежит прямой, говорят также, что прямая проходит через точку.

Аналогично, точка может принадлежать (рис. 4, а) или не принадлежать данной плоскости (рис. 4, б). Если точка принадлежит плоскости, то говорят также, что плоскость проходит через точку.

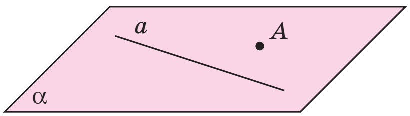
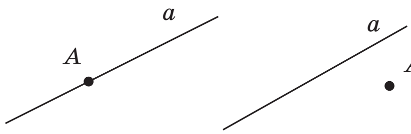
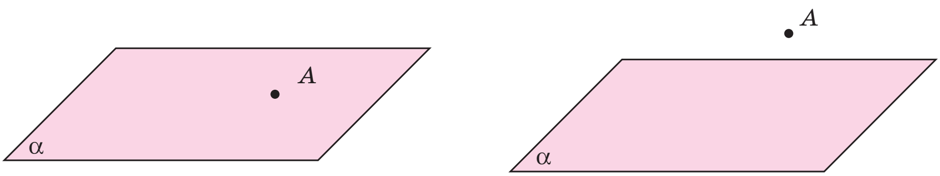


Рис. 2



а) б)

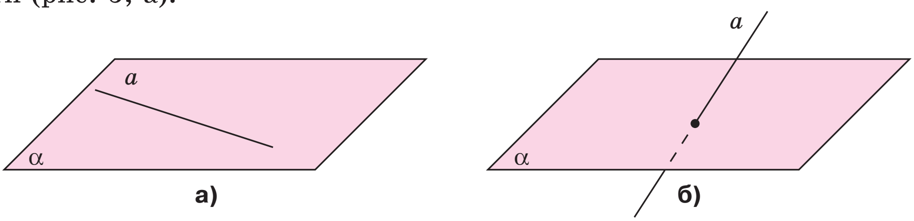
Рис. 3



а) б)

Рис. 4

Будем говорить, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую, если каждая точка этой прямой принадлежит плоскости (рис. 5, а).



а) б)

Рис. 5

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то будем говорить, что прямая пересекает плоскость (рис. 5, б).

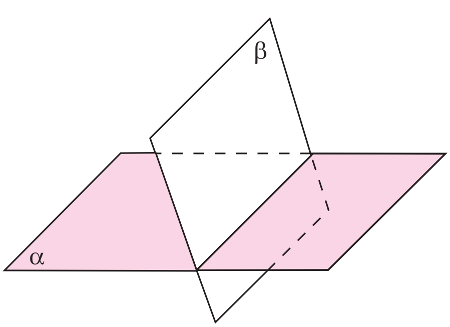


Рис. 6

Будем говорить, что две плоскости пересекаются по прямой, если их общими точками являются точки этой прямой и только они (рис. 6).

Так же как в планиметрии, некоторые свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве принимаются без доказательства и называются **аксиомами**. В переводе с греческого «аксиома» означает утверждение, «достойное признания», т. е. бесспорное, не требующее доказательства, безусловное.

Сформулируем следующие аксиомы стереометрии:

1. Через любые две точки пространства проходит единственная прямая.
2. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.
4. Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.
5. Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

Поскольку две точки определяют прямую, через них проходящую, то для обозначения прямой указывают какие-нибудь две точки, принадлежащие этой прямой. Например, прямая AB, прямая C_1D_1 и т. д.

Аналогично, поскольку три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость, через них проходящую, то для обозначения плоскости указывают какие-нибудь три точки этой плоскости, не принадлежащие одной прямой. Например, плоскость ABC, плоскость $D_1 E_1 F_1$ и т. д.

Используя аксиомы стереометрии, с помощью логических рассуждений устанавливают справедливость других свойств. Рассмотрим некоторые из них, которые называются следствиями из аксиом.

Следствие 1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a имеет с плоскостью α две общие точки A_1 и A_2 (рис. 7). Так как в плоскости α выполняются аксиомы планиметрии, то в этой плоскости через точки A_1, A_2 проходит единственная прямая. Если бы она не совпадала с прямой a, то мы получили бы две прямые, проходящие через две данные точки, а это противоречит аксиоме 1. Следовательно, эти прямые совпадают, и, значит, прямая a лежит в плоскости α. ■

Следствие 2. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a. Так как на прямой a выполняются аксиомы планиметрии, то на ней найдутся точки B, C (рис. 8). В силу аксиомы 2 через точки A, B, C проходит единственная плоскость α. По следствию 1 прямая a лежит в плоскости α. Значит, плоскость α проходит через прямую a и точку A.

Докажем, что эта плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через прямую a и точку A, будет проходить также через точки A, B, C. По аксиоме 2 она должна совпадать с плоскостью α. ■

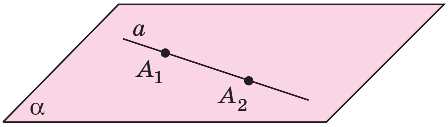


Рис. 7

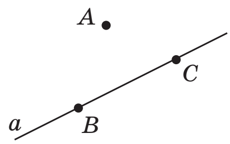


Рис. 8

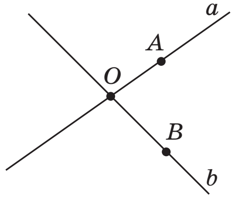


Рис. 9

Следствие 3. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок 9.

Пример 1. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Доказать, что все прямые, пересекающие два из трёх отрезков, соединяющих заданные точки, лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть даны три точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой. Они определяют плоскость α (аксиома 2). Возьмём произвольную прямую a, которая пересекает отрезки AB и BC соответственно в точках E и F. Значит, точки E и F принадлежат плоскости α. Тогда вся прямая a лежит в плоскости α (следствие 1 из аксиом стереометрии).

Пример 2. Найти наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырёх точек.

Решение. Наибольшее число прямых получится в случае, если никакие три из данных точек не принадлежат одной прямой. Каждую данную точку мы можем соединить прямыми с тремя другими точками. Учитывая, что дано четыре точки и каждую прямую мы подсчитываем дважды, окончательно получим $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (прямых).

Упражнения

○ **1.** Представляя себе стены класса как участки плоскостей, укажите:
а) пары пересекающихся прямых;
б) пары пересекающихся плоскостей;
в) три прямые, пересекающиеся в одной точке;
г) три пересекающиеся плоскости;
д) пару непересекающихся прямых.

○ **2.** Сколько прямых проходит через две данные точки?

○ **3.** Сколько плоскостей может проходить через три данные точки? При каком расположении трёх точек через них можно провести бесконечно много плоскостей?

○ **4.** Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

° **5.** Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Могут ли три из них принадлежать одной прямой?

° **6.** Могут ли две плоскости иметь только: а) одну общую точку; б) две общие точки?

° **7.** Могут ли пересекающиеся плоскости иметь общую точку, не принадлежащую линии пересечения этих плоскостей?

° **8.** Могут ли две плоскости иметь две общие прямые?

° **9.** Как расположены две плоскости, если в каждой из них лежит один и тот же треугольник?

° **10.** Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать только: а) одна вершина прямоугольника; б) две его вершины; в) три вершины?

° **11.** Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости, если известно, что этой плоскости принадлежат: а) две точки дуги; б) три точки дуги?

° **12.** Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Всегда ли принадлежит ей третья вершина, если известно, что данной плоскости принадлежит: а) центр вписанной в треугольник окружности; б) центр описанной около него окружности?

13. Изобразите:

а) плоскость и не пересекающую её прямую;

б) плоскость и пересекающую её прямую;

в) три плоскости, пересекающиеся по общей прямой;

г) три плоскости, попарно пересекающиеся по прямым, которые пересекаются в одной точке.

14. Выберите из прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10):

а) пары пересекающихся прямых;

б) тройки прямых, пересекающихся в одной точке;

в) пары пересекающихся плоскостей;

г) тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке.

15. Докажите, что для любой плоскости существуют точки, ей не принадлежащие.

16. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку, лежат в одной плоскости.

17. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат в одной плоскости.

18. Три плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?

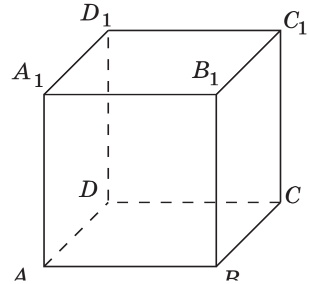


Рис. 10

19. Сколько прямых можно провести через различные пары из: а) трёх точек; б) четырёх точек; в) пяти точек; г)* n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

20. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки из: а) четырёх точек; б) пяти точек; в)* n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

21. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях: а) трёх плоскостей; б) четырёх плоскостей; в)* n плоскостей?

22. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство: а) две плоскости; б) три плоскости; в) четыре плоскости?

***23.** Докажите, что если имеется конечное число прямых, каждые две из которых пересекаются, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.

§ 10. Основные пространственные фигуры

Среди пространственных фигур выделяются **многогранники** — тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников. Они называются **гранями** многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно **рёбрами** и **вершинами** многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Примерами многогранников являются следующие.

Куб — многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 11).

Параллелепипед — многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 12).

Параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 13).

Призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых **основаниями** призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых

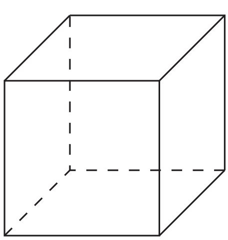


Рис. 11

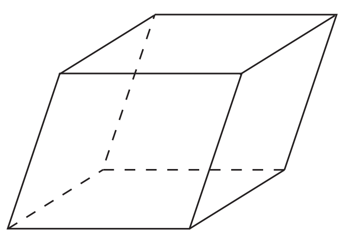


Рис. 12

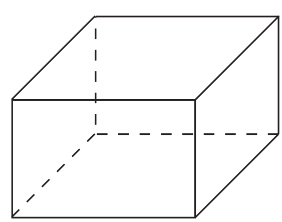


Рис. 13

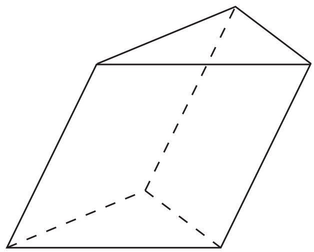


Рис. 14

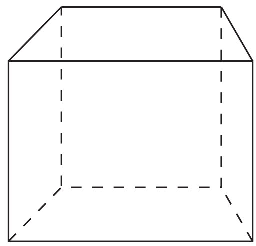


Рис. 15

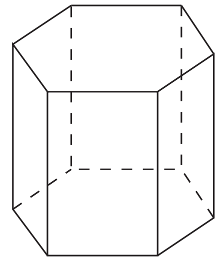


Рис. 16

боковыми гранями призмы (рис. 14). Рёбра, не лежащие в основаниях призмы, называются **боковыми рёбрами**.

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 15), называется **прямой**. В противном случае призма называется **наклонной** (рис. 14).

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 16).

Призмы бывают треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Например, на рисунке 14 изображена наклонная треугольная призма, на рисунке 15 — прямая четырёхугольная призма, на рисунке 16 — правильная шестиугольная призма.

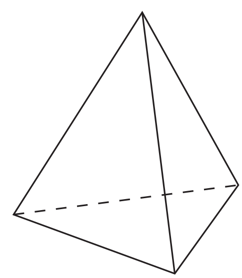


Рис. 17

Пирамида — многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого **основанием** пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых **боковыми гранями** пирамиды. Общая вершина боковых граней называется **вершиной** пирамиды. Рёбра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются **боковыми рёбрами** (рис. 17).

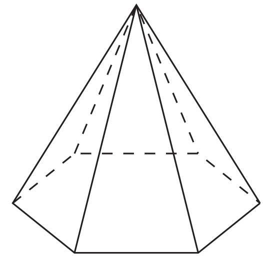


Рис. 18

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник и все боковые рёбра которой равны, называется **правильной** (рис. 18).

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. На рисунке 17 изображена треугольная пирамида, называемая также **тетраэдром**, на рисунке 18 — правильная шестиугольная пирамида.

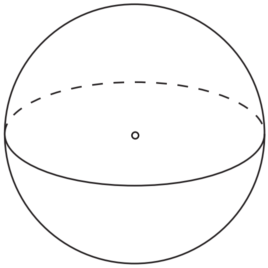


Рис. 19

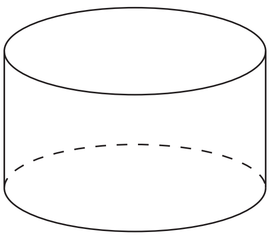


Рис. 20

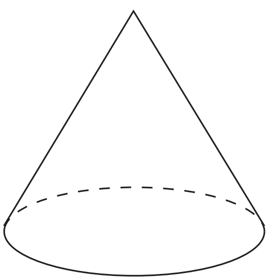


Рис. 21

Среди пространственных фигур, не являющихся многогранниками, отметим сферу и шар.

Сфера — фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой **центром**, на данное расстояние, называемое **радиусом** (рис. 19).

Шар — фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой **центром**, на расстояние, не превосходящее данное, называемое **радиусом**.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется **поверхностью** шара.

Примерами пространственных фигур являются знакомые вам **цилиндр** (рис. 20), **конус** (рис. 21).

В дальнейшем мы рассмотрим и другие пространственные фигуры, в том числе правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники.

Так же как и на плоскости, в пространстве определяются понятия движения, равенства и подобия. А именно, **движением** называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = AB$. Две фигуры F и F' в пространстве называются **равными**, если существует движение, переводящее одну из них в другую.

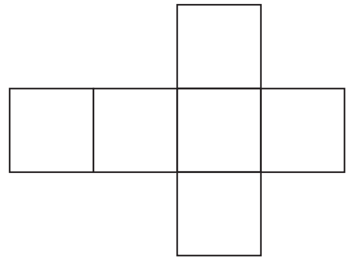
Подобием называется преобразование пространства, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, т. е. переводящее любые две точки A, B в точки A', B' так, что $A'B' = kAB$, где k — некоторое положительное число, называемое **коэффициентом подобия**. Две фигуры F и F' в пространстве называются **подобными**, если существует подобие, переводящее одну из них в другую.

Моделирование многогранников

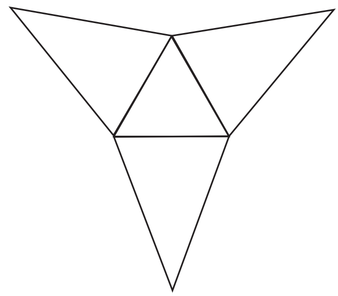
Если поверхность многогранника разрезать по некоторым рёбрам и развернуть её на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то получится фигура, называемая **развёрткой** многогранника. Например, на рисунке 22 изображены развёртки куба и треугольной пирамиды.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развёртку и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства развёртку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склеивание. На рисунке 23 изображены развёртки тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 24) и резиновых колечек — основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 24.



а)



б)

Рис. 22

П р и м е р 1. Нарисовать несколько плоских фигур, состоящих из шести равных квадратов, не являющихся развёртками куба.

Решение показано на рисунке 25.

П р и м е р 2. Может ли многогранник иметь 21 плоский угол?

Р е ш е н и е. Общее число плоских углов многогранника определяется числом углов в его гранях. В каждом многоугольнике число углов равно числу его сторон. Так как каждое ребро многогранника лежит в двух гранях, то общее число плоских углов многогранника в два раза больше числа его рёбер. Таким образом, П = 2 · Р, где П — число плоских углов, Р — число рёбер многогранника.

Видим, что П всегда чётное число, следовательно, многогранник не может иметь 21 плоский угол.

П р и м е р 3. Найти число вершин (В), рёбер (Р), граней (Г):

а) четырёхугольной призмы;
б) пятиугольной пирамиды;
в) n-угольной призмы;
г) n-угольной пирамиды.

О т в е т.
а) В = 8, Р = 12, Г = 6;
б) В = 6, Р = 10, Г = 6;
в) В = $2n$, Р = $3n$, Г = $n + 2$;
г) В = $n + 1$, Р = $2n$, Г = $n + 1$.

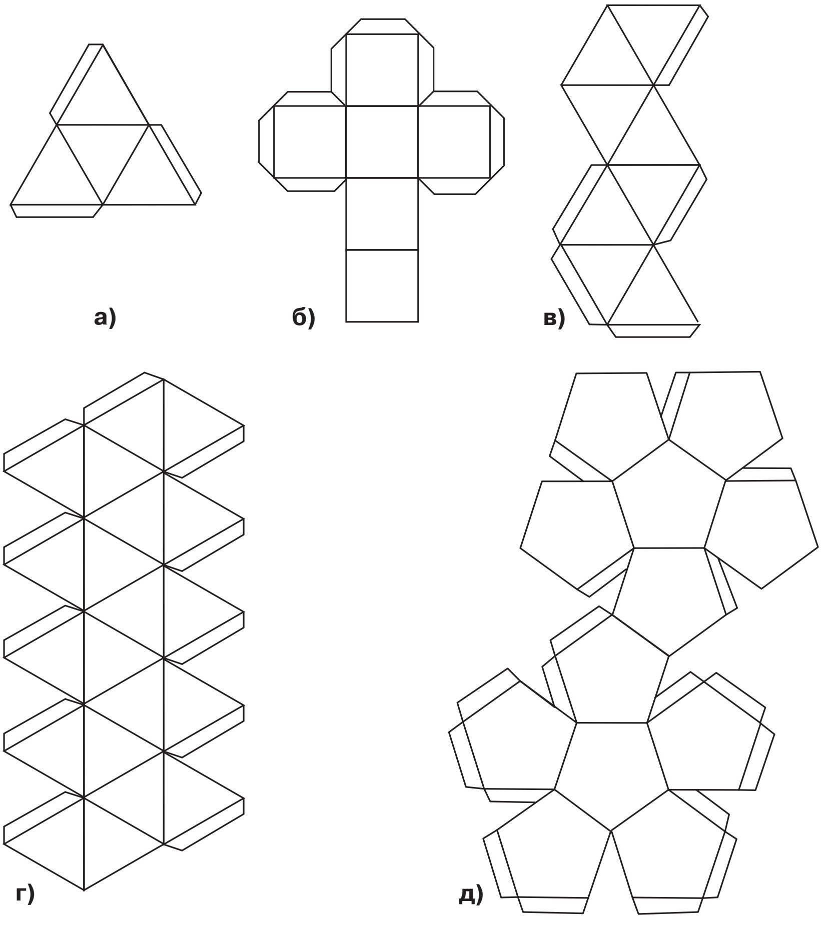


Рис. 23

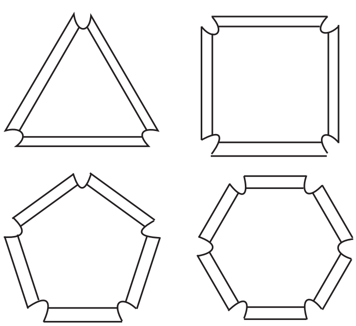


Рис. 24

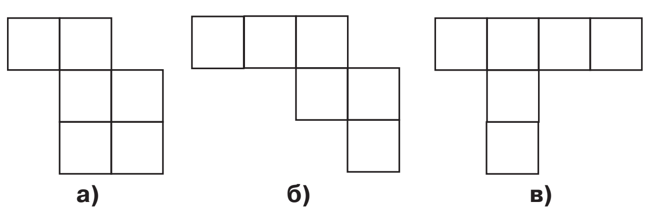


Рис. 25

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что плоскости, проходящие через вершины S, A, B и S, C, D пирамиды $SABCD$, пересекаются в одной точке S?

○ **2.** Может ли призма иметь: а) 9 вершин; б) 16 вершин?

○ **3.** Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет 15 рёбер?

○ **4.** Определите вид призмы, которая имеет: а) 10 вершин; б) 18 рёбер; в) 8 граней.

○ **5.** Может ли пирамида иметь: а) 3 вершины; б) 7 вершин?

○ **6.** Существует ли пирамида, которая имеет: а) 20 рёбер; б) 21 ребро?

○ **7.** Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет 32 ребра?

○ **8.** Определите вид пирамиды, которая имеет: а) 6 вершин; б) 22 ребра; в) 10 граней.

○ **9.** Какие из изображённых на рисунке 26 фигур являются развёртками куба?

○ **10.** На рисунке 27 найдите фигуры, которые являются развёртками призм. Определите вид этих призм.

○ **11.** Среди данных на рисунке 28 развёрток найдите развёртки пирамид. Выясните их вид.

* **12.** Может ли развёрткой пирамиды быть: а) квадрат; б) прямоугольник, отличный от квадрата; в) ромб; г) параллелограмм, отличный от ромба?

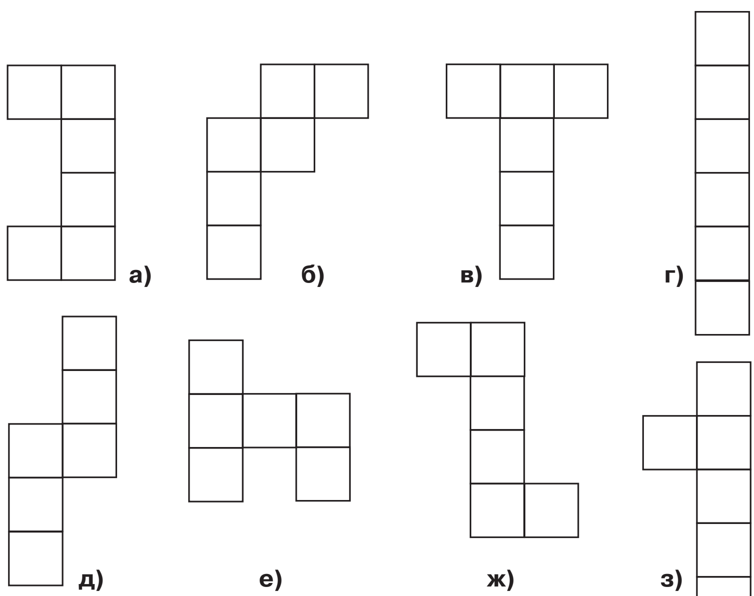


Рис. 26

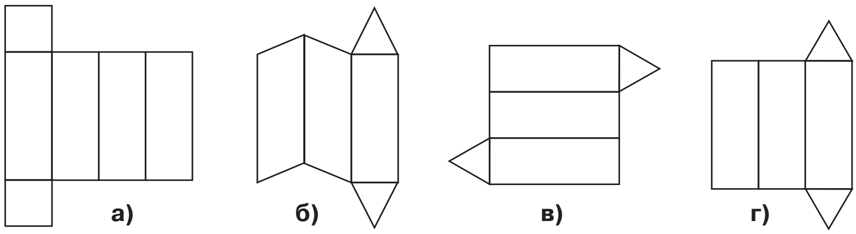


Рис. 27

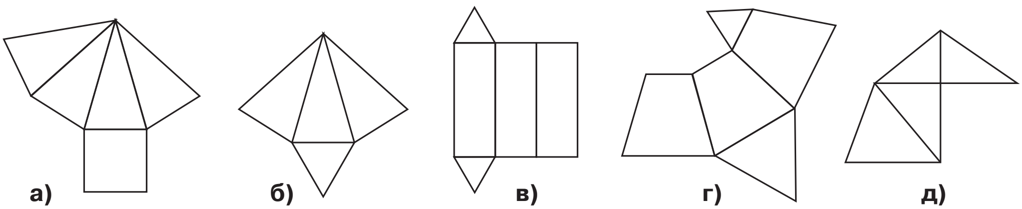


Рис. 28

13. Изобразите:
а) параллелепипед;
б) треугольную призму;
в) треугольную пирамиду;
г) четырёхугольную призму;
д) четырёхугольную пирамиду;
е) шестиугольную призму;
ж) шестиугольную пирамиду.

14. Докажите, что число вершин произвольной призмы чётно.

15. Существует ли призма, которая имеет: а) 14 рёбер; б) 15 рёбер?

16. Докажите, что число рёбер произвольной призмы делится на три.

17. Докажите, что любая пирамида имеет чётное число рёбер.

18. Найдите число диагоналей: а) куба; б) параллелепипеда; в) 5-угольной пирамиды; г)* n-угольной призмы; д)* n-угольной пирамиды.

19. Разделите куб на шесть четырёхугольных пирамид.

20. Нарисуйте развёртки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырёхугольной пирамиды.

21. Изготовьте развёртки и склейте из них модели куба и правильного тетраэдра.

22. Изготовьте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырёхугольников, пятиугольников и шестиугольников с равными сторонами. Сделайте с помощью этого конструктора несколько моделей многогранников.

23. Сделайте из конструктора модели правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр).

24. Составьте модель многогранника из двух квадратных и восьми треугольных граней конструктора.

***25.** Составьте модель многогранника из четырёх шестиугольных и четырёх треугольных граней конструктора.

***26.** Составьте модель многогранника (кубооктаэдр) из восьми треугольных и шести квадратных граней конструктора.

***27.** У многогранника шесть вершин, и в каждой из них сходится четыре ребра. Сколько у него рёбер?

***28.** У многогранника двенадцать граней, и все они пятиугольные. Сколько у него рёбер?

***29.** Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) октаэдра; в) икосаэдра; г) додекаэдра?

***30.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, соединяющего вершины A и C_1.

Глава II

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 11. Параллельность прямых в пространстве

Напомним, что две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Дадим теперь определение параллельности прямых в пространстве.

Определение. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 29).

Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Заметим, что для параллельности прямых в пространстве кроме требования, чтобы прямые не пересекались, нужно, чтобы эти прямые лежали в одной плоскости.

Будем также говорить, что два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и A_1B_1 параллельны.

Теорема. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой b. Проведём через эту прямую и точку A плоскость α (рис. 30). Эта плоскость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовём её a, параллельная прямой b. Она и будет искомой прямой, параллельной данной. ■

Для отношения параллельности прямых в пространстве справедливо следующее свойство, доказательство которого будет дано в следующем параграфе.

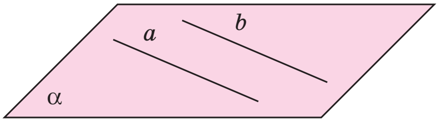


Рис. 29

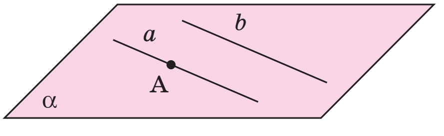


Рис. 30

Свойство. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

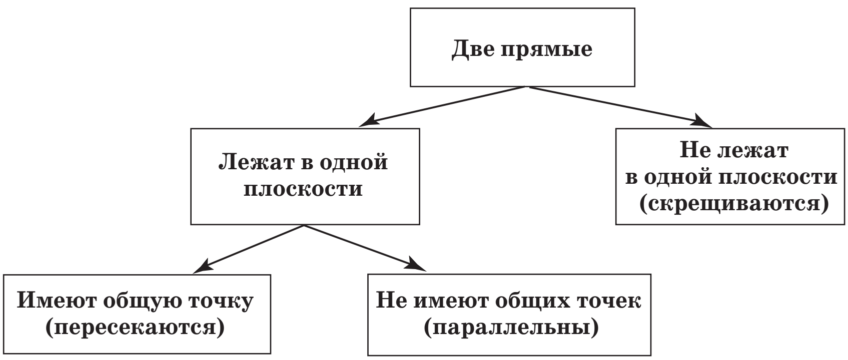
Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AB и C_1D_1 параллельны прямой A_1B_1. Следовательно, прямые AB и C_1D_1 параллельны.

Прямые в пространстве могут не пересекаться, но не быть параллельными.

О п р е д е л е н и е. Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если через них нельзя провести плоскость.

Будем также говорить, что два отрезка скрещиваются, если они лежат на скрещивающихся прямых. Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и A_1D_1 скрещиваются.

Представим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве в виде следующей схемы.



Исторические сведения

Вопрос о количестве прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой, имеет давнюю и интересную историю. Среди аксиом в «Началах» Евклида пятый по счёту постулат по своему содержанию совпадает с аксиомой параллельности, с которой вы познакомились в 7-м классе: «Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной этой прямой».

На протяжении двух тысячелетий после Евклида математики пытались доказать этот постулат, однако все их попытки заканчивались неудачей, рано или поздно в их рассуждениях обнаруживались ошибки. Лишь в 1826 году великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, предположил, что этот постулат нельзя логически вывести из других постулатов (аксиом) Евклида, т. е. нельзя доказать. Поэтому или его можно взять в качестве аксиомы, или в качестве аксиомы может быть взято утверждение о существовании нескольких прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной прямой. Положив в основу геометрии эту новую аксиому параллельности, Лобачевский создал совершенно новую, неевклидову геометрию, которая была названа геометрией Лобачевского.

Идеи Лобачевского были настолько оригинальны и настолько противоречили так называемому здравому смыслу, что их не поняли даже крупные математики того времени. Несмотря на это, Лобачевский не отказался от своей теории. Он не только был убеждён в логической непротиворечивости новой геометрии, но и твёрдо верил в её применимость к исследованию реального физического пространства. С этой целью он проводил сложнейшие астрономические наблюдения и измерения, однако недостаточная точность измерительных приборов не позволила ему подтвердить свою гипотезу.

Признание геометрии Лобачевского пришло только после его смерти. Работы Лобачевского были переведены на многие языки и изучались математиками всего мира. В настоящее время геометрия Лобачевского является неотъемлемой частью современной математики и находит применение во многих областях человеческого знания, способствует более глубокому пониманию окружающего нас мира.

Пример. Доказать, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые AC и A_1C_1 параллельны.

Решение. Прямые AA_1 и CC_1 параллельны прямой BB_1, следовательно, они параллельны. Четырёхугольник ACC_1A_1 — параллелограмм (стороны AA_1 и CC_1 равны и параллельны). Значит, прямые AC и A_1C_1 параллельны.

Теорема. (Признак скрещивающихся прямых.) Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в точке B, не принадлежащей прямой a (рис. 31).

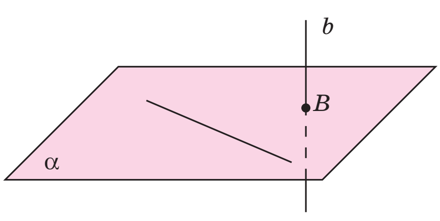


Рис. 31

Если бы прямые a и b лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежали бы прямая a и точка B. Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая b лежала бы в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, a и b не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются. ■

Упражнения

○ **1.** Как могут быть расположены относительно друг друга две прямые в пространстве?

○ **2.** Будут ли противоположные рёбра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельны?

○ **3.** В каких пирамидах имеются параллельные рёбра?

○ **4.** Используя модели правильных многогранников, установите, имеются ли параллельные рёбра (если имеются, то сколько пар) в: а) тетраэдре; б) кубе; в) октаэдре; г) икосаэдре; д) додекаэдре.

○ **5.** Какие две прямые в пространстве являются непараллельными?

○ **6.** Известно, что в плоскости прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и вторую прямую. Будет ли это утверждение верно для пространства?

○ **7.** В пространстве даны прямая и не принадлежащая ей точка. Сколько прямых проходит через эту точку: а) параллельных данной прямой; б) не пересекающих данную прямую?

○ **8.** Пусть a и b — пересекающиеся или параллельные прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 — прямой b. Что можно сказать о взаимном расположении прямых A_1B_1, A_2B_2?

○ **9.** Имеются ли скрещивающиеся рёбра (если имеются, то сколько пар) у: а) октаэдра; б)* икосаэдра; в)* додекаэдра?

○ **10.** Верно ли, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещиваются?

○ **11.** Прямая лежит в плоскости. Сколько прямых, скрещивающихся с этой прямой, проходит через точку, взятую в той же плоскости?

○ **12.** Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли отсюда, что прямые a и c скрещиваются?

13. Запишите пары параллельных рёбер в:
а) параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$; в) правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

14. Запишите пары скрещивающихся рёбер в: а) параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призме $ABCA_1B_1C_1$; в) тетраэдре $ABCD$; г) пирамиде $SABCD$; д) правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

15. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите параллельность прямых: а) AB и D_1E_1; б) AB и C_1F_1; в) AC и A_1C_1; г) AC и D_1F_1; д) AD и A_1D_1; е) AA_1 и CC_1; ж) AA_1 и DD_1; з) AF_1 и CD_1; и) BD_1 и AE_1.

16. Седьмое свойство стереометрии в «Началах» Евклида формулируется так: «Если будут две параллельные прямые и на каждой из них взято по произвольной точке, то соединяющая эти точки прямая будет в одной и той же плоскости с параллельными». Докажите.

17. Даны две пересекающиеся плоскости. В каждой из них лежит прямая, пересекающая линию пересечения плоскостей. Определите расположение этих прямых относительно друг друга.

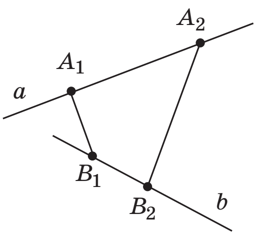


Рис. 32

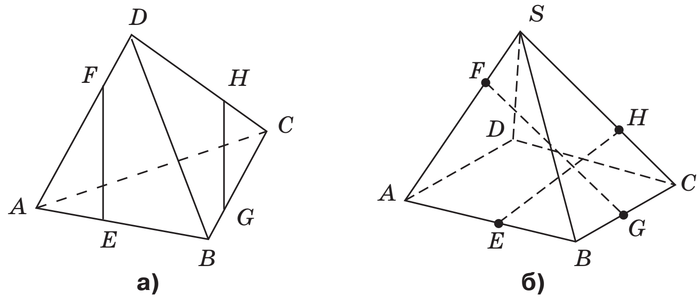


Рис. 33

18. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точка A принадлежит прямой a, B — прямой b. Через прямую a и точку C на прямой AB проведена плоскость α; через прямую b и эту же точку C проведена плоскость β. Какая прямая будет линией пересечения плоскостей α и β?

19. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые. Точки A_1, A_2 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2 принадлежат прямой b. Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными (рис. 32)?

20. Каково взаимное расположение прямых EF и GH (рис. 33, а)?

21. Пересекаются ли отрезки EH и FG (рис. 33, б)?

22. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

23. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Точка C принадлежит прямой a. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает прямую a.

24. Даны две прямые a и b. Через данную точку K, не принадлежащую данным прямым, проведите прямую, скрещивающуюся с каждой из них, если известно, что прямые a и b: а) пересекаются; б) скрещиваются.

25. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. Через точку M, принадлежащую прямой m, проведите прямую, скрещивающуюся с n.

***26.** Докажите, что два отрезка, соединяющих середины скрещивающихся сторон пространственного четырёхугольника $ABCD$ (вершины ломаной $ABCD$ не принадлежат одной плоскости), пересекаются.

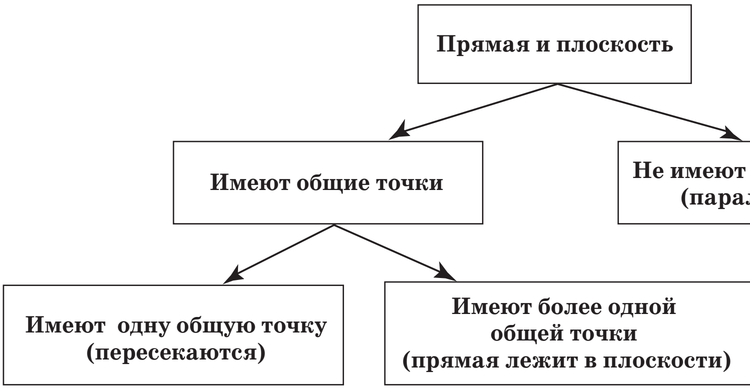
***27.** Сколько пар скрещивающихся прямых определяется различными парами из: а) четырёх точек; б) пяти точек; в)* n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости?

§ 12. Параллельность прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о том, как могут располагаться прямая и плоскость друг относительно друга.

Прямая может лежать в плоскости, в этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Прямая может пересекать плоскость, т. е. иметь с плоскостью только одну общую точку. Наконец, прямая может не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Определение. Прямая называется **параллельной плоскости**, если она не имеет с ней ни одной общей точки.



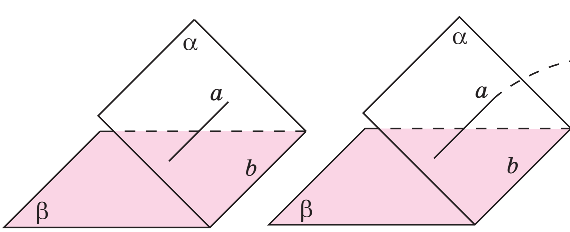
Представим случаи взаимного расположения прямой и плоскости с помощью следующей схемы.

Следующая теорема связывает понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых и даёт достаточное условие параллельности двух прямых в пространстве.

Теорема. (Признак параллельности двух прямых.) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 34, а). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β, а прямая a не пересекается с этой плоскостью.



а) б)

Рис. 34

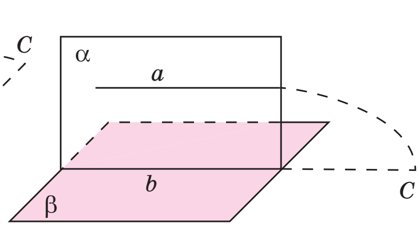


Рис. 35

Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b (рис. 34, б). Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Рассмотрим достаточное условие параллельности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак параллельности прямой и плоскости.) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то эта прямая параллельна самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости (рис. 35).

Докажем, что прямая a параллельна плоскости β. Предположим противное, т. е. что прямая a пересекает плоскость β в некоторой точке C. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$ по условию). Точка C принадлежит как плоскости β, так и плоскости α, т. е. принадлежит линии их пересечения — прямой b. Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \beta$. ■

Будем говорить, что ребро многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости этой грани.

Пример 1. Доказать, что рёбра одного основания призмы параллельны другому основанию этой призмы.

Решение. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому каждое ребро одного основания призмы параллельно ребру другого её основания. Следовательно, каждое ребро одного основания призмы параллельно другому её основанию (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Пример 2. Доказать, что если прямые a и c параллельны третьей прямой b, то они параллельны между собой.

Решение. Случай, когда прямые лежат в одной плоскости, рассматривался в курсе планиметрии. Здесь мы рассмотрим случай, когда прямые не лежат в одной плоскости. Пусть прямые a и b лежат в плоскости α, b и c — в плоскости β (рис. 36). На прямой c возьмём произвольную точку C и проведём через C и прямую a плоскость γ. Если γ пересекает β по прямой c, то a параллельна c (по признаку параллельности двух прямых). Допустим, что это не так, т. е. γ пересекает β по прямой c', отличной от c. Докажем, что c' параллельна b. Действительно, прямая b параллельна плоскости γ (по признаку параллельности прямой и плоскости, так как b параллельна a), тогда линия пересечения плоскостей γ и β,

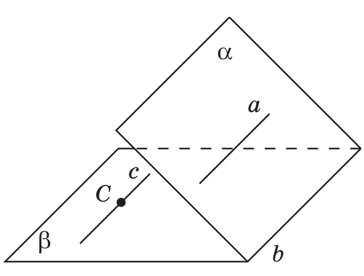


Рис. 36

т. е. c', будет параллельна b. Значит, в плоскости β через точку C проходят две прямые c и c', параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных (через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной). Следовательно, плоскости β и γ пересекаются по прямой c и прямая a параллельна c.

Это свойство называется свойством **транзитивности** параллельных прямых.

Упражнения

○ **1.** Каковы случаи взаимного расположения прямой и плоскости?

○ **2.** Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

○ **3.** Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

○ **4.** Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение о том, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

○ **5.** Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

○ **6.** Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

○ **7.** Верна ли следующая формулировка признака параллельности прямой и плоскости: «Прямая, параллельная какой-нибудь прямой плоскости, параллельна и самой плоскости»?

8. Возможно ли такое расположение карандашей, как изображено на рисунке 37?

9. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что параллельны прямая и плоскость соответственно: а) AB и CDD_1; б) AB и CDA_1; в) AD_1 и BCC_1; г) AD_1 и BDC_1.

10. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что параллельны прямая и плоскость соответственно: а) AB и DEE_1; б) AB и DEF_1; в) AB и DEA_1; г) AB и CFF_1; д) AB и CFE_1; е) AB и CFA_1; ж) AA_1 и BCC_1; з) AA_1 и CDD_1; и) AA_1 и DEE_1; к) AA_1 и BDD_1; л) AA_1 и BEE_1; м) AA_1 и BFF_1; н) AA_1 и CEE_1; о) AA_1 и CFF_1; п) AB_1 и DEE_1; р) AC_1 и DFF_1.

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

12. Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены остальные стороны $ABCDEF$ относительно плоскости α?

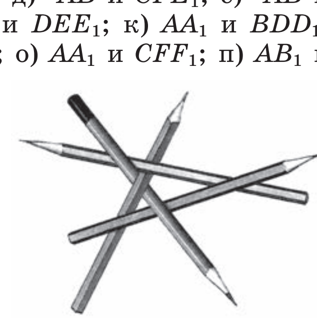


Рис. 37

13. Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника и не совпадает с плоскостью этого треугольника. Докажите, что данная плоскость параллельна третьей стороне треугольника.

14. Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что через любую точку этой плоскости проходит прямая, параллельная данной прямой.

15. Докажите, что если две прямые параллельны, то через одну из них проходит плоскость, параллельная другой. Сколько таких плоскостей?

16. Даны две скрещивающиеся прямые. Через одну из них проведите плоскость, параллельную другой.

17. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней SAB и SCD и плоскости основания $ABCD$?

18. Точки A и B принадлежат смежным боковым граням призмы. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

19. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

20. Докажите, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

21. В пространственном четырёхугольнике $ABCD$ (вершины четырёхугольника не принадлежат одной плоскости) середины сторон соединены последовательно отрезками. Докажите, что полученный четырёхугольник является параллелограммом.

22. Каково взаимное расположение диагоналей пространственного четырёхугольника?

***23.** Докажите, что если прямая параллельна прямой, пересекающей данную плоскость, то она также пересекает эту плоскость.

§ 13. Параллельность двух плоскостей

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух плоскостей. Согласно аксиоме 3, если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Представим различные случаи взаимного расположения двух плоскостей в виде схемы.

Следующая теорема связывает понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Две плоскости

Имеют общие точки (пересекаются по прямой) | **Не имеют общих точек (параллельны)**

Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b соответственно (рис. 38).

Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости — плоскости γ. Кроме этого, они лежат в непересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно не пересекаются. Значит, они параллельны. ■

Следующая теорема даёт достаточное условие параллельности двух плоскостей.

Теорема. (Признак параллельности двух плоскостей.) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 плоскости β. Покажем, что плоскости α и β параллельны. Предположим противное, т. е. что плоскости α и β пересекаются и пусть c — линия их пересечения (рис. 39).

По признаку параллельности прямой и плоскости прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости она параллельна прямой c. Аналогично, прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости α мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие

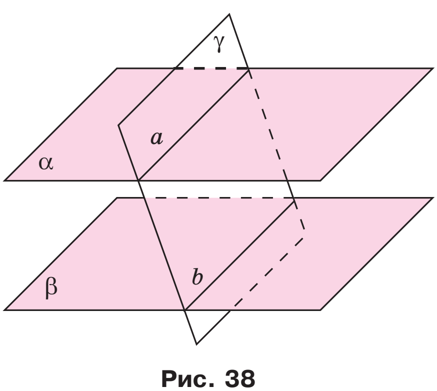


Рис. 38

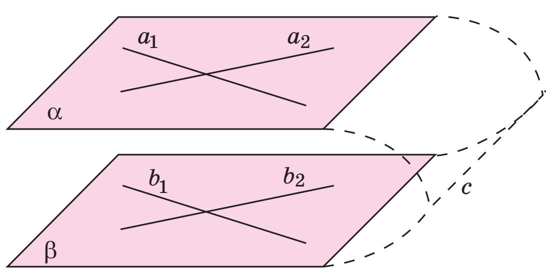


Рис. 39

показывает, что неверным было наше начальное предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, и, следовательно, они параллельны. ■

Будем говорить, что две грани многогранника параллельны, если они лежат в параллельных плоскостях.

Пример 1. Доказать, что основания призмы параллельны.

Решение. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы. Поэтому два смежных ребра одного основания призмы соответственно параллельны двум смежным рёбрам другого её основания. Следовательно, основания призмы параллельны (по признаку параллельности двух плоскостей).

Пример 2. Даны две плоскости α и β. В плоскости α лежат две пересекающиеся прямые a и a_1. В плоскости β лежат две прямые b и b_1, причём a параллельна b, a_1 параллельна b_1. Доказать, что b и b_1 тоже пересекающиеся прямые.

Решение. Будем доказывать методом от противного. Предположим, что b и b_1 параллельны. Тогда, так как a параллельна b и b параллельна b_1, a параллельна b_1 (по свойству транзитивности параллельных прямых, см. пример 3 из § 5). Далее, a параллельна b_1, b_1 параллельна a_1, значит, a параллельна a_1, что противоречит условию; дано, что a и a_1 — пересекающиеся прямые. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно. Следовательно, b и b_1 — пересекающиеся прямые.

Упражнения

1. Каковы возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей?
2. Укажите параллельные грани: а) параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; б) призмы $ABCA_1B_1C_1$.
3. Имеются ли параллельные грани (если имеются, то сколько пар) у: а) правильного тетраэдра; б) гексаэдра; в) октаэдра?
4. Могут ли быть параллельными: а) две боковые грани призмы; б)* три боковые грани призмы?
5. Какие две плоскости считаются не параллельными?
6. Верно ли утверждение: «Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?
7. Верно ли утверждение: «Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны»?
8. Могут ли быть параллельными две плоскости, проходящие через не параллельные прямые?
9. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?
10. Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости?

°**11.** Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?

°**12.** Даны две параллельные плоскости и прямая, параллельная одной из них. Будет ли эта прямая параллельна второй плоскости?

13. Докажите, что плоскость, проведённая через вершины A, D_1 и C куба $A...D_1$, параллельна плоскости, проведённой через вершины A_1, B и C_1.

14. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите, что параллельны плоскости: а) ABC и $A_1B_1C_1$; б) ABB_1 и DEE_1; в) ABB_1 и CFF_1; г) ACC_1 и DFF_1.

15. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная исходной плоскости.

§ 14. Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая её прямая (рис. 40). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведём прямую, параллельную прямой l. Она пересечёт плоскость π в некоторой точке A' (см. задачу 22 из § 11), которая называется **параллельной проекцией** точки A на плоскость π в направлении прямой l. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется её проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется **параллельным проектированием** на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть Φ — некоторая фигура в пространстве. Проекции её точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется **параллельной проекцией** фигуры Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то её проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то её проекцией является прямая.

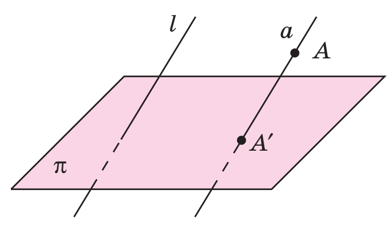


Рис. 40

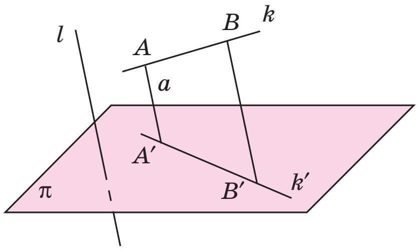


Рис. 41

Доказательство. Пусть прямая k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 41). Возьмём какую-нибудь точку A на прямой k и проведём через неё прямую a, параллельную l. Её пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведём плоскость α. Её пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k. ■

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок в зависимости от того, лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется. В частности, середина отрезка при параллельном проектировании переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Пусть k' является проекцией прямой k на плоскость π в направлении прямой l. A, B, C — точки прямой k; A', B', C' — их проекции; a, b, c — соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 42). Тогда из обобщённой теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка AC, то B' — середина отрезка $A'C'$. ■

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 43).

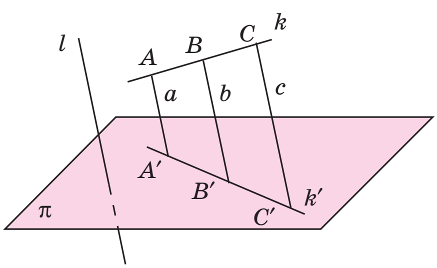


Рис. 42

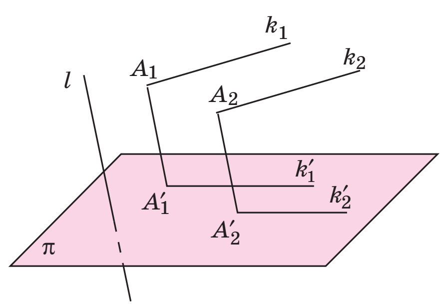


Рис. 43

Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой по признаку параллельности двух плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны. ■

Пример 1. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделать чертёж.

Решение. Рассмотрим все возможные случаи. Если прямые пересекаются и ни одна из них не параллельна направлению проектирования, то они проектируются в пересекающиеся прямые; если же одна из них параллельна направлению проектирования, то плоскость, которая определяется этими прямыми, проектируется в одну прямую (в этом случае плоскость параллельна направлению проектирования).

Если прямые параллельны, то они проектируются или в две параллельные прямые (их плоскость не параллельна направлению проектирования), или в одну прямую (их плоскость параллельна направлению проектирования, но сами они не параллельны направлению проектирования), или в две точки (прямые параллельны направлению проектирования).

Если прямые скрещиваются и одна из них параллельна направлению проектирования, то они проектируются соответственно в прямую и не принадлежащую ей точку.

Пример 2. Отрезок AB, равный a, параллелен плоскости проектирования. Найти длину его параллельной проекции.

Решение. Пусть параллельными проекциями точек A, B будут соответственно точки A', B'. Тогда четырёхугольник $ABB'A'$ будет параллелограммом (AA' параллельна BB', AB параллельна $A'B'$). Следовательно, $AB = A'B' = a$.

Таким образом, длина параллельной проекции отрезка, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования, равна длине отрезка.

Упражнения

○ **1.** В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

○ **2.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

○ **3.** Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

○ **4.** В пространстве задана прямая. Может ли её параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

○ **5.** Можно ли по проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?

○ **6.** В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием её проекции на плоскость?

○ **7.** Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

○ **8.** Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

9. Сколько точек может получиться при проектировании двух различных точек пространства? Сделайте чертёж.

10. Сколько точек может получиться при проектировании трёх различных точек пространства? Сделайте чертёж.

11. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертёж.

12. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертёж.

13. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертёж.

14. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертёж.

15. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертёж.

16. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертёж.

17. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше (меньше) самого отрезка? Ответ обоснуйте.

18. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования? Ответ обоснуйте.

***19.** Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

***20.** Точки A', B' являются параллельными проекциями точек A, B. $AA' = a$, $BB' = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите расстояние между точкой C и её проекцией C'.

§ 15. Параллельные проекции плоских фигур

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в поверхности основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги — основаниями цилиндров и конусов.

Теорема. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то её параллельная проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.

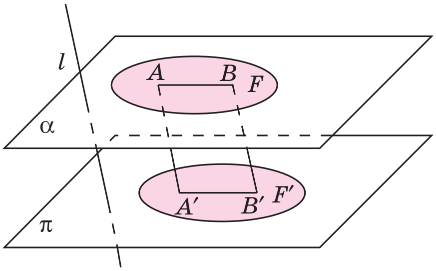


Рис. 44

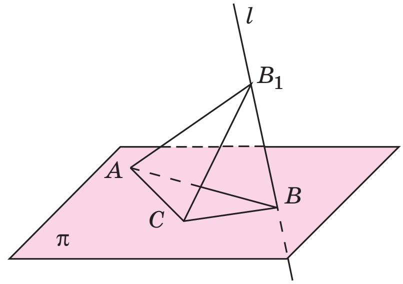


Рис. 45

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их проекции. Тогда если A и B — точки фигуры F и A', B' — их проекции, то $ABB'A'$ — параллелограмм (рис. 44). Следовательно, $A'B' = AB$. Таким образом, это преобразование сохраняет расстояния между точками, т. е. является движением, и, значит, фигуры F и F' равны. ■

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то её проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причём если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 45). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

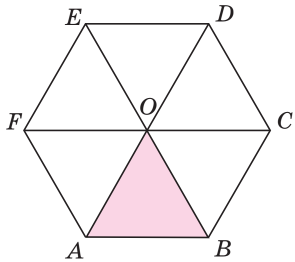


Рис. 46

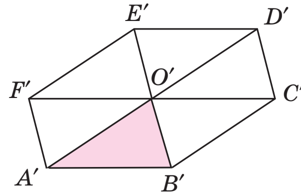


Рис. 47

Пример 1. Построить параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 46).

Решение. Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией может быть произвольный треугольник $A'O'B'$ на плоскости π (рис. 47).

Далее отложим $O'D' = A'O'$ и $O'E' = B'O'$. Теперь из точек A' и D' проведём прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B' и E' проведём прямые, параллельные прямой $A'O'$. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиугольника $ABCDEF$.

Пример 2. Выяснить, какая фигура является параллельной проекцией окружности.

Решение. Пусть F — окружность в пространстве, F' — её проекция на плоскость π в направлении прямой l. Если прямая l параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности. Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость окружности (рис. 48).

Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости π, и $A'B'$ его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмём какой-нибудь другой диаметр CD и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, её проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь её диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется **эллипсом**.

Например, на рисунке 49 изображён эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

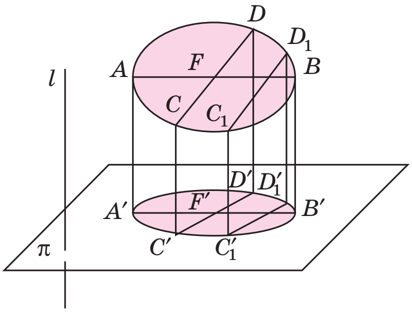


Рис. 48

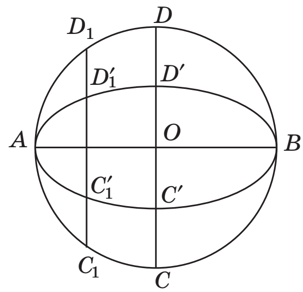


Рис. 49

Упражнения

○ **1.** Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треугольника?

○ **2.** Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника быть: а) прямоугольный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?

○ **3.** Может ли параллельной проекцией квадрата быть отрезок?

○ **4.** Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?

○ **5.** Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?

○ **6.** Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?

○ **7.** Параллельной проекцией каких фигур может быть квадрат?

○ **8.** Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника: а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

9. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется в: а) равносторонний треугольник; б) равнобедренный треугольник?

10. Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция? Сделайте чертёж.

11. В какую фигуру может проектироваться трапеция? Сделайте чертёж.

12. Изобразите параллельную проекцию:
а) прямоугольника;
б) ромба.

13. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

14. Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$, взяв за исходную фигуру прямоугольник $ABDE$.

*__15.__ Изобразите параллельную проекцию правильного восьмиугольника.

16. Нарисуйте эллипсы, полученные из окружности сжатием и растяжением в: а) 1,5 раза; б) 2 раза; в) 3 раза.

***17.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображения двух её перпендикулярных диаметров.

***18.** Используя изображение окружности в параллельной проекции, постройте изображение касательной: а) параллельной данной хорде; б) проходящей через данную точку.

***19.** Изобразите параллельную проекцию квадрата: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

***20.** Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника: а) вписанного в данную окружность; б) описанного около неё.

***21.** Постройте изображение прямоугольного треугольника: а) вписанного в окружность; б) описанного около окружности.

***22.** Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

***23.** Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников.

§ 16. Изображение пространственных фигур

Как говорилось выше, для изображения пространственных фигур используют параллельную проекцию. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется **плоскостью изображений**, а сама проекция фигуры — **изображением**.

Приведём примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Пример 1. Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 12).

Пример 2. При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 11). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 13).

Пример 3. Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 14).

Пример 4. Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить её с вершинами многоугольника (рис. 17). Полученные отрезки будут изображать боковые рёбра пирамиды.

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определённым законам, способно передать впечатление о трёхмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

Рис. 50

В живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (от англ. *impossibility* — невозможность) — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник Мауриц Корнелис Эшер (1898—1972) в гравюрах «Бельведер» (рис. 50), «Водопад» (рис. 51), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 52) изобразил невозможные объекты.

Современный шведский архитектор Оскар Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 53.

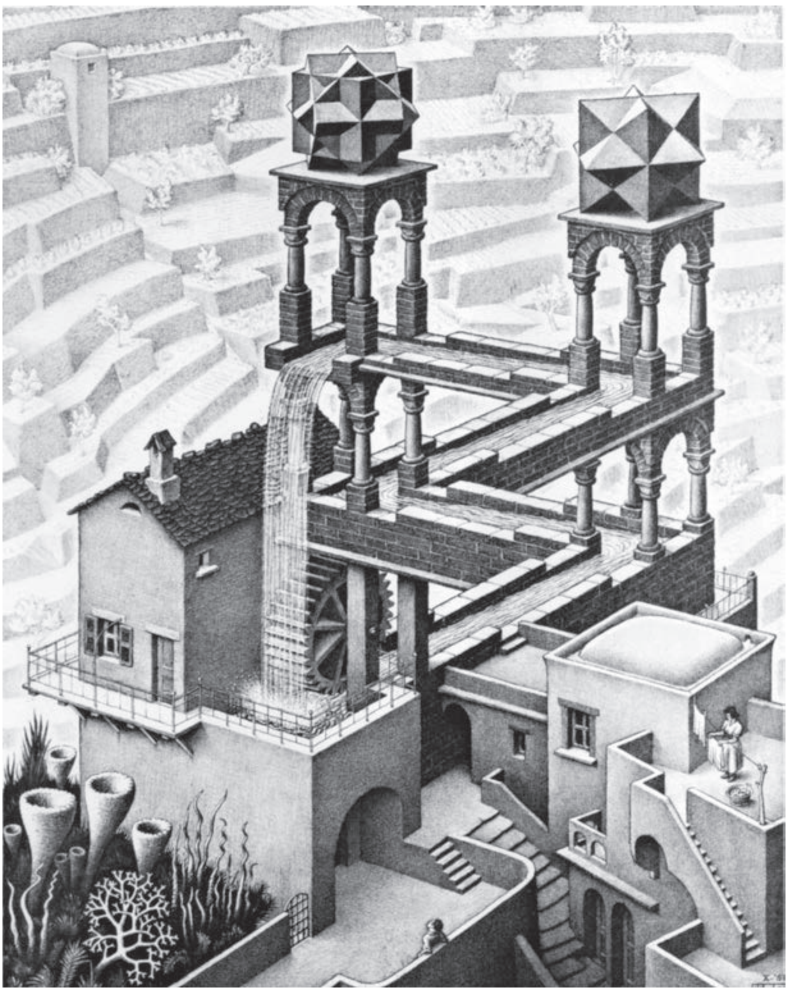


Рис. 51

Упражнения

1. На рисунке 13 изображён прямоугольный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его рёбра параллельны плоскости проектирования?
2. На рисунке 12 изображён наклонный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его рёбра параллельны плоскости проектирования?
3. На рисунке 14 изображена треугольная призма. Верно ли утверждение о том, что какие-то её рёбра параллельны плоскости проектирования?

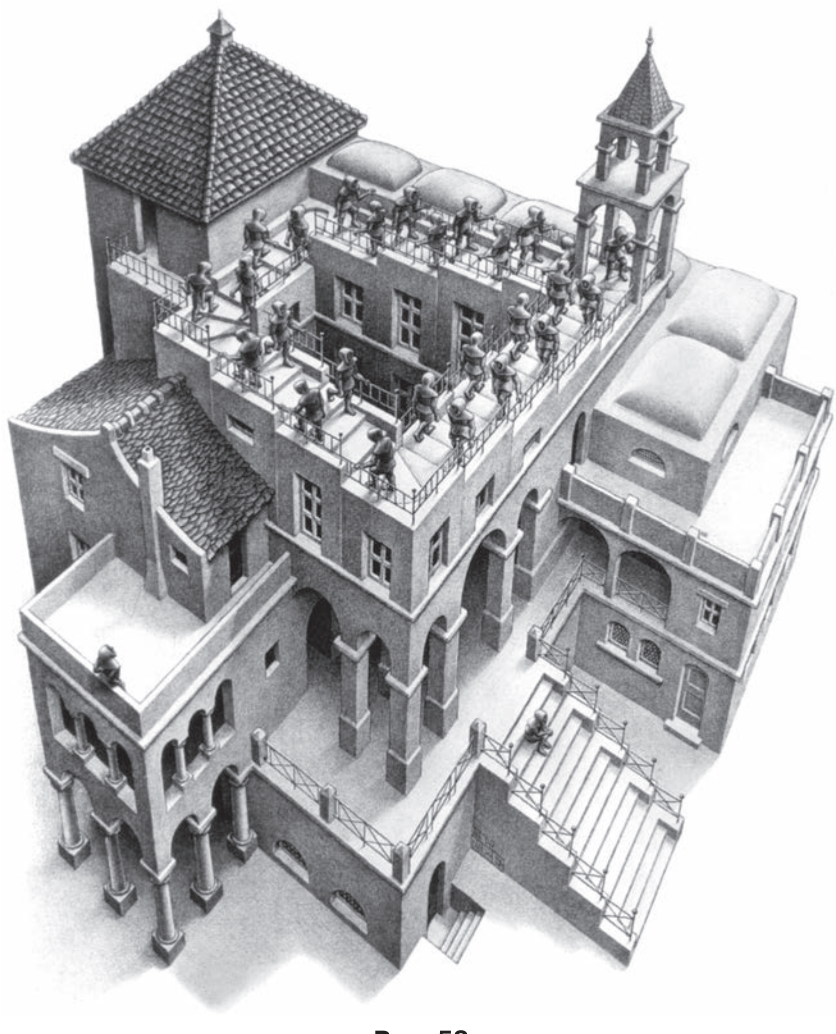


Рис. 52

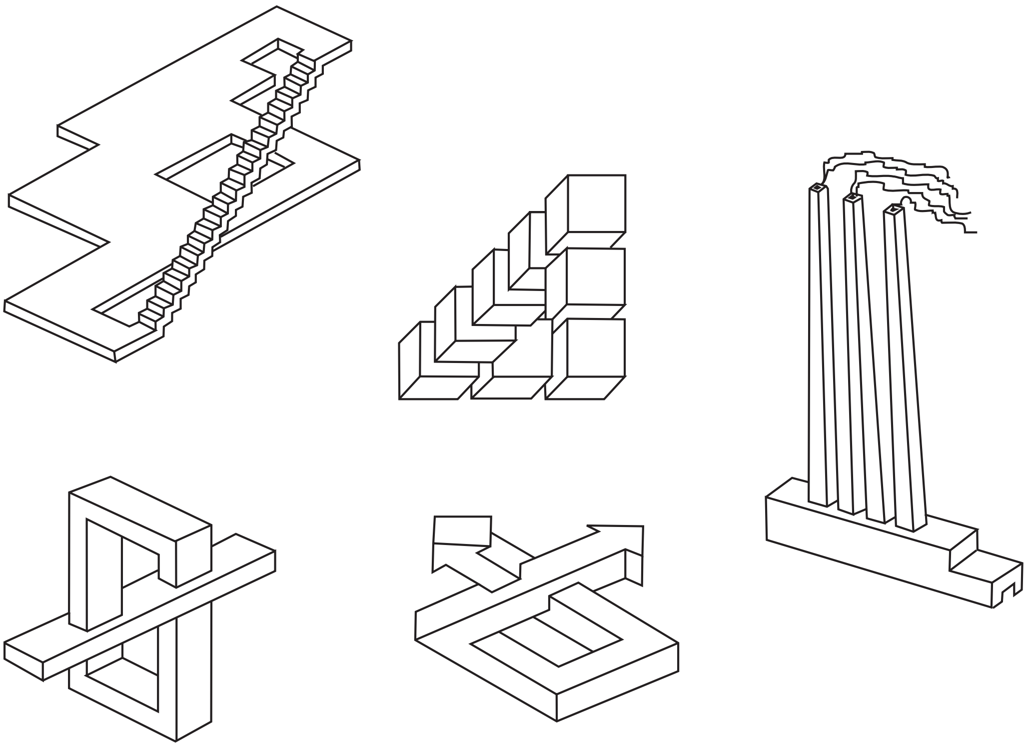


Рис. 53

4. Изображением какого многогранника можно считать четырёхугольник с проведёнными диагоналями? Какая неточность в этом изображении?

5. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображённые на рисунке 54?

* 6. Возможен ли многогранник, изображение которого показано на рисунке 55?

7. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

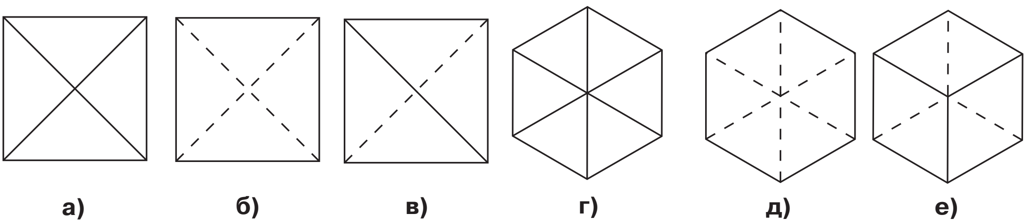


Рис. 54

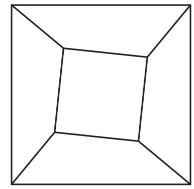


Рис. 55

8. Постройте изображение куба, ребро которого параллельно плоскости проектирования, а грани — нет.

9. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов.

10. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

11. Постройте изображение правильного тетраэдра $ABCD$, грань ABD которого параллельна плоскости проектирования. Каким будет изображение треугольника ABD?

12. Изобразите в параллельной проекции правильную четырёхугольную пирамиду.

13. Изобразите октаэдр $SABCDS'$, две диагонали которого AC и SS' параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырёхугольника $ASCS'$?

14. Дан тетраэдр $ABCD$. Площадь грани ABC равна S. Найдите площадь проекции грани ADB на грань ABC в направлении прямой DC.

§ 17. Сечения многогранников

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 56); б) иметь одну общую точку — вершину многогранника (рис. 57); в) иметь общий отрезок — ребро многогранника (рис. 58); г) иметь общий многоугольник — грань многогранника (рис. 59).

Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общей частью многогранника и плоскости будет многоугольник, называемый **сечением** многогранника плоскостью (рис. 60).

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и прилежащие к ней боковые рёбра, называется **диагональным сечением** (рис. 61).

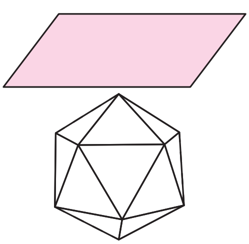


Рис. 56

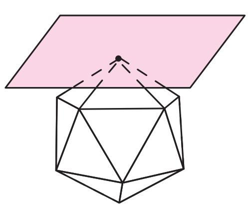


Рис. 57

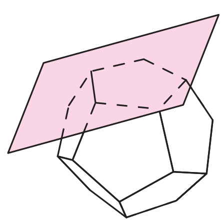


Рис. 58

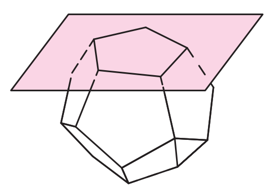


Рис. 59

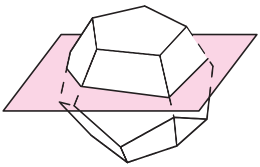


Рис. 60

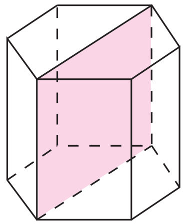


Рис. 61

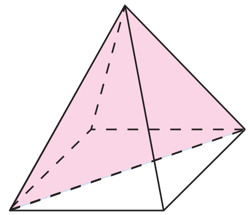


Рис. 62

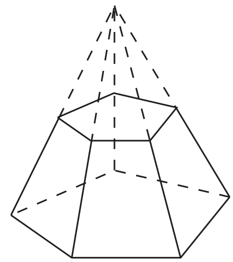


Рис. 63

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется **диагональным сечением** (рис. 62).

Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна её основанию (рис. 63). Часть пирамиды, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённой пирамидой**. Сечение пирамиды также называется **основанием** усечённой пирамиды.

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью.

Пусть дано изображение куба и три точки A, B, C, принадлежащие рёбрам этого куба, выходящим из одной вершины.

Тогда, для того чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через данные точки, достаточно просто соединить эти точки отрезками. Полученный треугольник ABC и будет искомым изображением сечения куба (рис. 64).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 65).

Пример 1. Построить изображение сечения куба, проходящего через три точки A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся рёбрам этого куба (рис. 66).

Решение. Найдём пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (рис. 67). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст ещё одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведём прямую, параллельную BD, и точку её пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведём

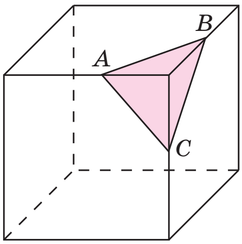


Рис. 64

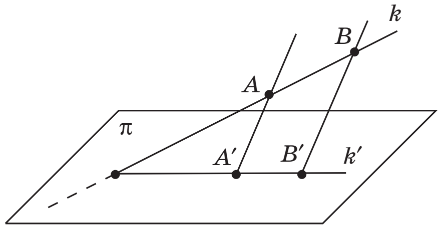


Рис. 65

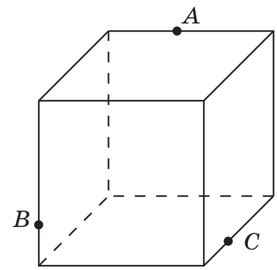


Рис. 66

прямую, параллельную CD, и точку её пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 67).

Пример 2. Построить изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, принадлежащие её рёбрам (рис. 68).

Решение. Проведём прямую AB и её точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведём прямую EC и её точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырёхугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Упражнения

○ **1.** Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью?

○ **2.** Сколько диагональных сечений имеет n-угольная: а) призма; б) пирамида?

○ **3.** Сколько вершин, рёбер и граней имеет n-угольная усечённая пирамида?

○ **4.** Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) треугольник;

б) правильный треугольник;

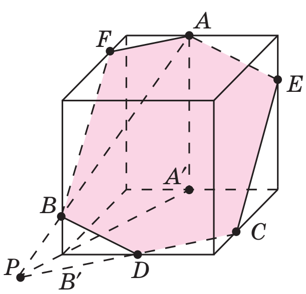


Рис. 67

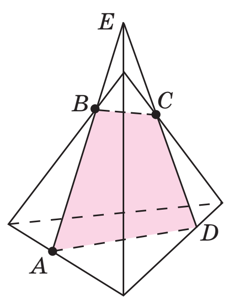


Рис. 68

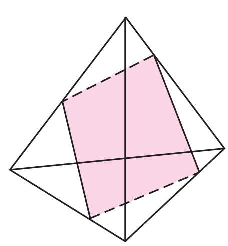


Рис. 69

в) равнобедренный треугольник;
г) прямоугольный треугольник;
д) тупоугольный треугольник?

5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) четырёхугольник;
б) квадрат;
в) прямоугольник;
г) неравнобедренная трапеция;
д) прямоугольная трапеция?

6. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) пятиугольник;
б) правильный пятиугольник?

7. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:
а) шестиугольник;
б) правильный шестиугольник;
в) многоугольник с числом сторон больше шести?

8. Какие многоугольники можно получить в сечении четырёхугольной пирамиды плоскостью?

9. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?

10. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырёхугольник, изображённый на рисунке 69?

11. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку K — середину ребра CC_1. Какой фигурой является полученное сечение?

12. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G — середины соответственно рёбер AD, A_1B_1, B_1C_1. Какой фигурой является полученное сечение?

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

14. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках 70, 71.

15. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

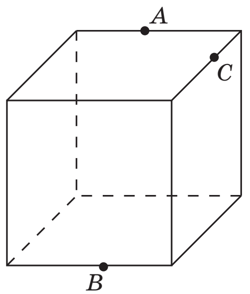


Рис. 70

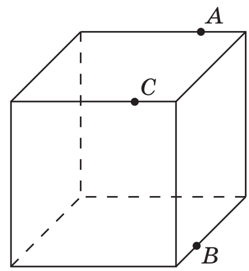


Рис. 71

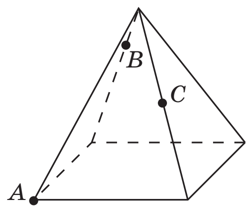


Рис. 72

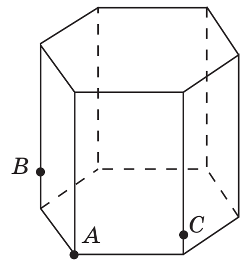


Рис. 73

16. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из рёбер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

17. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 72.

18. Постройте сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N — середины соответственно рёбер AD, CD. Какой фигурой является полученное сечение?

19. Как построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, которая параллельна грани BDC и проходит через точку K — середину ребра AD?

20. Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.

21. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 73.

22. Определите вид сечения правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещивающейся с ней стороны верхнего основания.

23. Верно ли утверждение о том, что в сечении правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух соседних боковых рёбер и вершину верхнего основания, принадлежащей смежной боковой грани, получается равнобедренная трапеция?

24. Как пересечь правильную треугольную призму тремя плоскостями таким образом, чтобы получилась правильная шестиугольная призма? Сделайте соответствующее построение.

***25.** Меньший куб поставлен на больший так, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 74). Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые принадлежат скрещивающимся рёбрам меньшего куба.

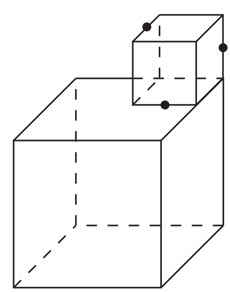
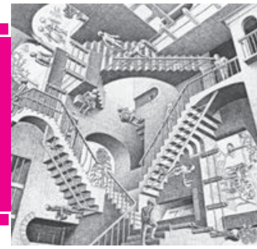


Рис. 74

Глава III

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ



§ 18. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых

Определение угла в пространстве аналогично определению угла на плоскости.

Определение. **Углом** в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости (в которой лежат лучи), ограниченной этими лучами.
Определение. **Углом между двумя пересекающимися прямыми** в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в их точке пересечения.
Определение. Две пересекающиеся прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Будем также говорить, что два пересекающихся отрезка перпендикулярны, если они лежат на перпендикулярных прямых. Углом между двумя пересекающимися отрезками будем называть угол между соответствующими прямыми.

Например, в кубе пересекающиеся рёбра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с рёбрами этой грани углы 45°.

Так же как и для плоскости, два луча в пространстве называются **одинаково направленными (сонаправленными)**, если один из них содержит другой или они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, соединяющей их вершины.

Используя свойства параллельного проектирования, докажем следующую теорему.

Теорема. Углы с сонаправленными сторонами равны. ■

Доказательство. Пусть лучи a_1, b_1 с вершиной в точке C_1 соответственно сонаправлены лучам a_2, b_2 с вершиной в точке C_2. Предположим, что лучи лежат в разных плоскостях γ_1, γ_2 (рис. 75).

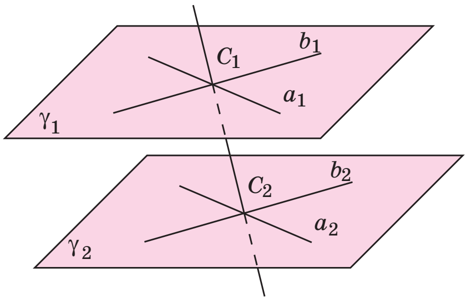


Рис. 75

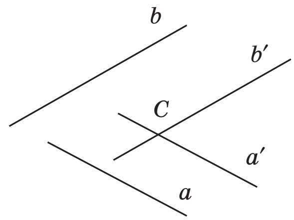


Рис. 76

Случай, когда лучи лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Заметим, что по признаку параллельности двух плоскостей плоскости γ_1 и γ_2 параллельны. Параллельное проектирование в направлении прямой C_1C_2 на плоскость γ_2 переводит лучи a_1, b_1 в лучи a_2, b_2 соответственно. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны. ■

Следствие. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

Определим теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 76). Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведём через неё прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно. **Углом между скрещивающимися прямыми** называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две скрещивающиеся прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

Два отрезка будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

Аналогично определению расстояния на плоскости определим понятие расстояния в пространстве.

Определение. **Расстоянием между двумя точками** называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

Определение. **Расстоянием от точки до прямой** называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Определение. **Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми** называется длина общего перпендикуляра к данным прямым, т. е. длина отрезка, соединяющего точки на данных прямых и перпендикулярного этим прямым.

Исторические сведения

Проблема измерения углов между прямыми в пространстве восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения Солнца и звёзд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила.

На старинной гравюре (рис. 77) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов. Одним из первых угломерных инструментов была **астролябия**, изобретённая ещё Гиппархом (180—125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким учёным Региомонтаном (1436—1476). Она состояла из тяжёлого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $Г_1Г_2$ принимала горизонтальное положение (рис. 78). По краю лимба наносилась шкала, разделённая на градусы.

Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями — диоптрами.

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды в градусах над горизонтом, измеряя фактически градусную величину дуги $Г_1A_1$.

Располагая плоскость лимба горизонтально, можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии алидаду наводят сначала на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими углами и есть искомый угол, под которым видны данные объекты.

Другим инструментом для измерения углов был **квадрант**, представляющий собой одну четвёртую часть астролябии (рис. 79). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским учёным Жаном Пикаром в середине

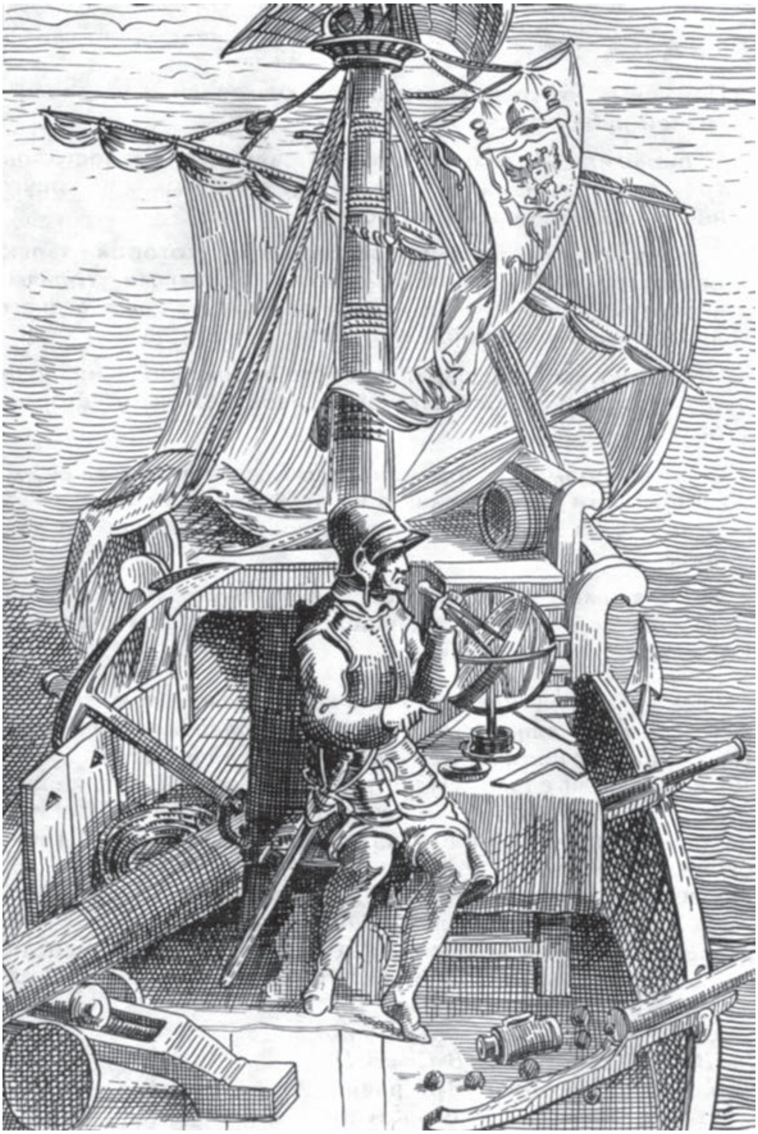


Рис. 77

XVII в. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретённой незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

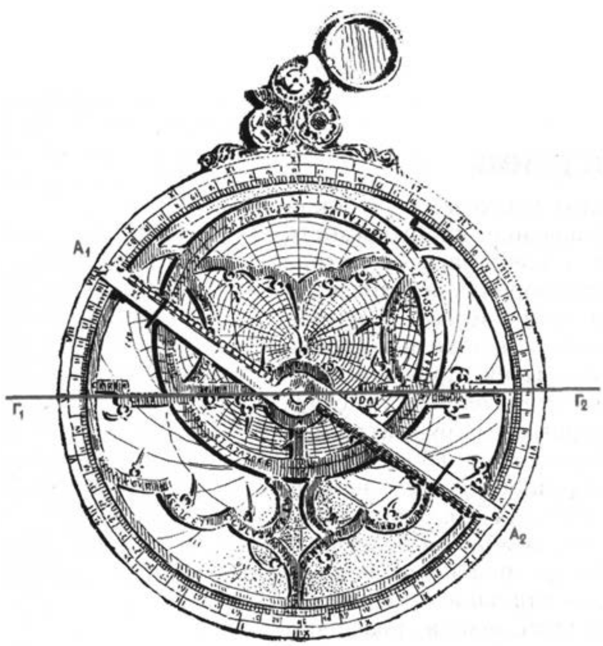


Рис. 78

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является **теодолит** (рис. 80), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения. Точность измерения углов при этом составляет доли минуты.

Существует много способов приближённого измерения углов. Например, измерение с помощью ногтя указательного пальца. Ширина ногтя указательного пальца приближённо равна 1 см, а расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки — 60 см. Поэтому угол, под которым виден ноготь, приближённо равен 1°. Это следует из решения простой геометрической задачи, в которой нужно найти угол φ при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание (ширина ногтя) равно 1 см, а высота (расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки), опущенная на него, равна 60 см.

Пример 1. Найти угол между прямыми AB_1 и BC_1, проходящими через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

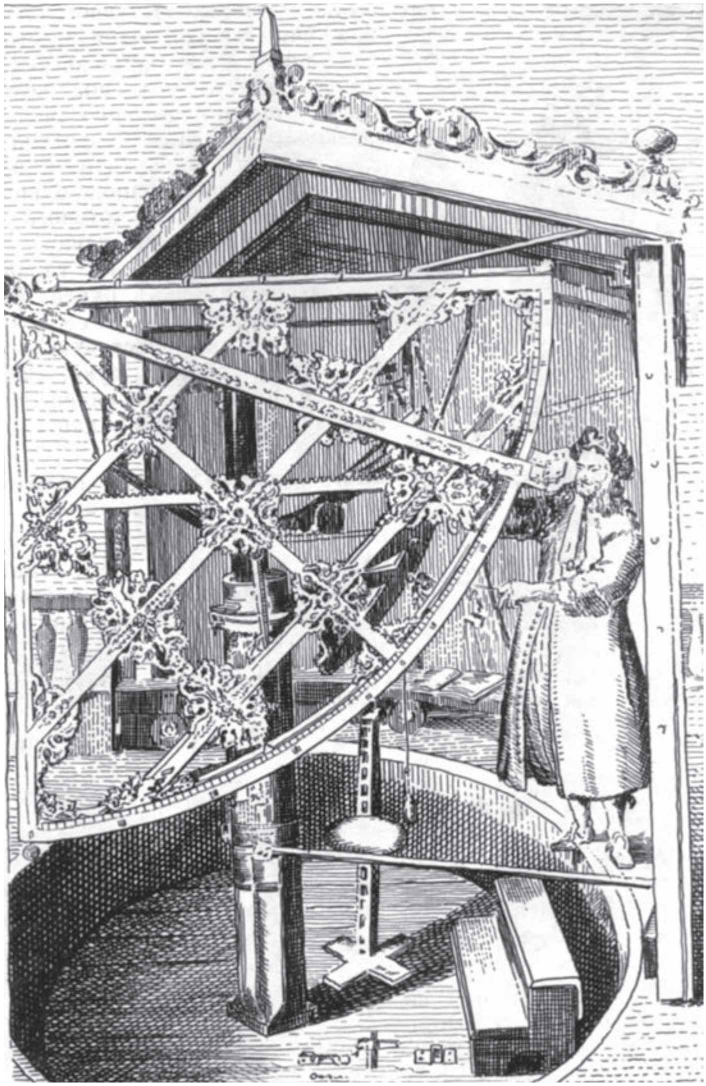


Рис. 79

Р е ш е н и е. Прямая BC_1 параллельна прямой AD_1. Искомый угол равен углу B_1AD_1. В треугольнике B_1AD_1 все стороны равны. Следовательно, угол B_1AD_1 равен 60°. Значит, угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен 60°.

П р и м е р 2. Найти расстояние между прямыми AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$, рёбра которого равны 1.

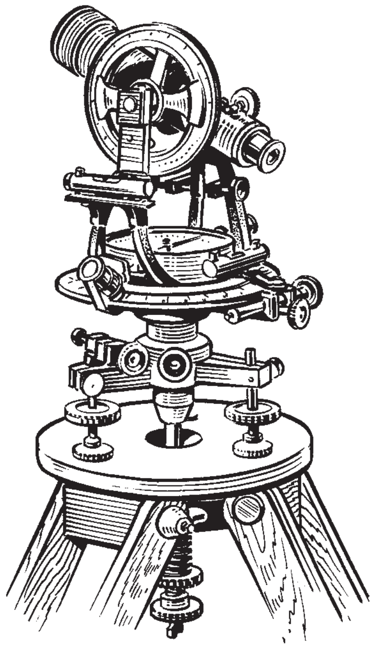


Рис. 80

Решение. Пусть E и F — середины рёбер соответственно AB и CD тетраэдра $ABCD$. Треугольник ABF равнобедренный ($AF = BF$). Следовательно, медиана FE перпендикулярна прямой AB. Аналогично, отрезок EF перпендикулярен прямой CD. Таким образом, отрезок EF является общим перпендикуляром к прямым AB и CD. В прямоугольном треугольнике AEF катет AE равен 0,5, гипотенуза AF равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, отрезок EF равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

○ **1.** Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **2.** Дана прямая и точка вне её. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

○ **3.** Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

○ **4.** Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

5. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BC; б) AB_1 и CD_1; в) AC и BD_1.
6. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ докажите перпендикулярность прямых: а) AA_1 и BC; б) AA_1 и CD; в) AA_1 и BE; г) AB и B_1D_1; д) AB_1 и DE_1.
7. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми: а) AC и BD; б) AB и B_1C_1; в) AB и A_1C_1; г) AB_1 и BC_1; д) BC_1 и DA_1.
8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E_1, F_1 — середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите угол между прямыми AE_1 и BF_1.
9. В правильном тетраэдре найдите угол между высотами двух соседних граней, проведёнными к общему ребру.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) CC_1 и AB; б) CC_1 и AB_1; в) AB и B_1C_1; г) AB и CA_1; д) AB_1 и BC_1.
11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) AB и SC; б) SB и SD.
12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми: а) AA_1 и BC_1; б) AA_1 и DE_1; в) AB_1 и BC_1; г) AB_1 и BF; д) AB_1 и CD_1; е) AB_1 и DC_1.
13. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от вершины B до прямой: а) AD; б) CD; в) AC; г) AB_1; д) A_1C_1.
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от вершины A до прямой: а) BC; б) CD; в) BD; г) BE; д) BF; е) CE; ж) B_1F_1; з) B_1C_1.
15. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BB_1; б) AA_1 и DD_1; в) AA_1 и BC; г) AA_1 и CD; д) AA_1 и B_1C_1; е) AA_1 и C_1D_1.

§ 19. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование

Помимо определения перпендикулярности прямых в пространстве можно определить понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение. Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Отрезок будем называть перпендикулярным плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

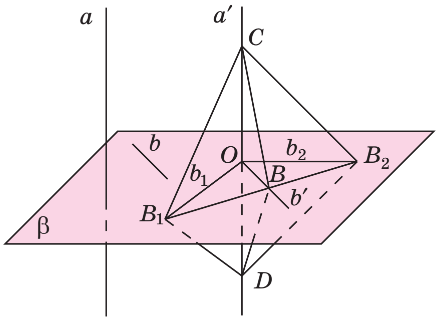


Рис. 81

Заметьте, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость. Действительно, если бы прямая лежала в плоскости или была ей параллельна, то в этой плоскости нашлась бы прямая, ей параллельная, и, значит, исходная прямая не была бы перпендикулярна данной плоскости.

Следующая теорема даёт достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая a перпендикулярна прямым b_1, b_2 плоскости β, пересекающимся в точке O (рис. 81). Рассмотрим произвольную прямую b плоскости β. Проведём через точку O прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b. Для доказательства перпендикулярности прямых a, b достаточно доказать перпендикулярность прямых a', b'. Для этого в плоскости β проведём прямую, пересекающую прямые b_1, b_2, b' в точках B_1, B_2, B соответственно. Отложим на прямой a' от точки O равные отрезки OC, OD и соединим точки C, D с точками B_1, B_2, B. Прямоугольные треугольники OB_1C и OB_1D равны (по катетам). Следовательно, $B_1C = B_1D$. Аналогично, из равенства треугольников OB_2C и OB_2D следует, что $B_2C = B_2D$. Треугольники B_1B_2C и B_1B_2D равны (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$. Треугольники B_1BC и B_1BD равны (по первому признаку равенства треугольников). Таким образом, $BC = BD$. Треугольники OBC и OBD равны (по третьему признаку равенства треугольников), следовательно, $\angle BOC = \angle BOD = 90°$, т. е. прямые a' и b' перпендикулярны. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β. ■

О п р е д е л е н и е. Параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования, называется **ортогональным проектированием**.

Так как ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, то оно обладает всеми его свойствами.

Ортогональное проектирование обычно используется для изображения сферы, шара, цилиндра, конуса и т. п.

* Изображение сферы в ортогональной проекции

Рассмотрим вопрос об изображении сферы в ортогональной проекции.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведём плоскость α_0, проходящую через центр сферы O и параллельную плоскости проектирования α. Поскольку плоскости α и α_0 параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 82).

Сечением сферы плоскостью α_0 является окружность радиуса R, равного радиусу сферы. Если A — точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 — её ортогональная проекция на плоскость α_0, то $OA_0 < OA \leqslant R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α_0 точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса. ■

Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют бóльшую окружность (экватор) — сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр и образующей острый угол с направлением проектирования. Изображением экватора будет эллипс (рис. 83). Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости экватора, называются параллелями. Они также изображаются эллипсами. Диаметр, перпендикулярный плоскости экватора, называется осью, концы этого диаметра называются полюсами. Большие окружности, проходящие через полюсы, называются меридианами. На рисунке 84 изображена сфера с параллелями, меридианами и полюсами.

Для нахождения положения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Экватор и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами PQ и CD (рис. 85). Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

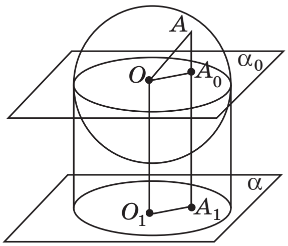


Рис. 82

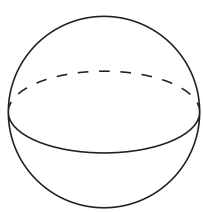


Рис. 83

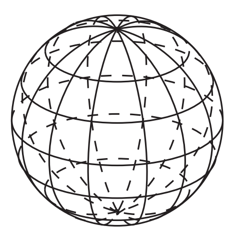


Рис. 84

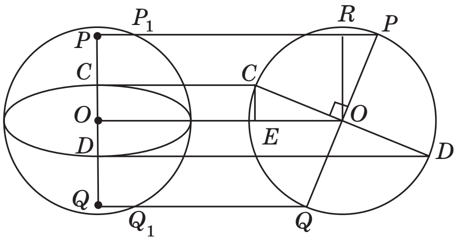


Рис. 85

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Но $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит, $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

Пример 1. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC.

Решение. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD. Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC.

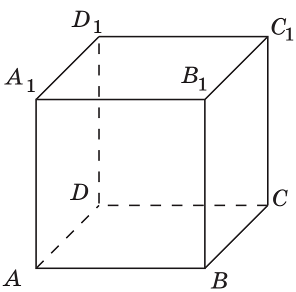


Рис. 86

Пример 2. Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 86) прямая AA_1 перпендикулярна прямой BD.

Решение. Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, прямая AA_1 перпендикулярна прямой BD.

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD.

Решение. Так как прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, то прямая AA_1 перпендикулярна прямой AC. С другой стороны, прямая AC перпендикулярна прямой BD. Следовательно, отрезок AO, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD, является общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BD. Его длина равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

1. Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?
2. Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?
3. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная: а) его диаметру; б) двум его диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

○ **4.** Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная: а) радиусу; б) двум радиусам, перпендикулярна плоскости круга?

○ **5.** Как расположена относительно плоскости круга прямая, перпендикулярная к двум его хордам?

○ **6.** Прямая и плоскость параллельны. Верно ли, что прямая, перпендикулярная данной прямой: а) перпендикулярна данной плоскости; б) параллельна данной плоскости?

○ **7.** Прямая и плоскость параллельны. Верно ли утверждение, что прямая, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна данной прямой?

○ **8.** При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

○ **9.** Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

○ **10.** Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

○ **11.** Может ли ортогональная проекция отрезка быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка?

* **12.** Может ли ортогональная проекция угла быть: а) меньше угла; б) равна углу; в) больше угла?

13. Докажите, что в прямой призме боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

14. Докажите, что в кубе каждое ребро перпендикулярно двум его граням.

15. Боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно диагоналям основания. Докажите, что этот параллелепипед является прямым.

16. В кубе $A...D_1$ докажите перпендикулярность прямых AC и B_1D.

17. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде сторона основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней ребру.

18. Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

19. Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

20. Прямая AB пересекает плоскость α. В плоскости α расположен треугольник CDE; AB перпендикулярна CD, и AB перпендикулярна DE. Каково взаимное расположение прямых AB и CE?

21. Два прямоугольных треугольника ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета AC и CD проведена плоскость α. 1) Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой c плоскости α, проведённой через точку C. 2) Можно ли опустить условие о несовпадении плоскостей данных треугольников? 3) Можно ли опустить условие о том, что c проходит через точку C?

22. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны a, b, c.

23. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

24. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α и плоскость β параллельна α, то прямая a перпендикулярна плоскости β.

25. Проведите через произвольную точку пространства прямую, перпендикулярную данной плоскости.

26. Может ли ортогональная проекция квадрата быть: а) прямоугольником; б) параллелограммом; в) трапецией?

***27.** Нарисуйте ортогональную проекцию сферы с выделенным экватором и полюсами.

***28.** Какой фигурой является ортогональная проекция куба на плоскость, перпендикулярную диагонали куба?

§ 20. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью

Пусть точка A не принадлежит плоскости π. Проведём прямую a, проходящую через эту точку и перпендикулярную плоскости π. Точку пересечения прямой a с плоскостью π обозначим O. Отрезок AO называется **перпендикуляром**, опущенным из точки A на плоскость π (рис. 87).

Длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, называется **расстоянием от этой точки до плоскости**.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания, называется **высотой пирамиды**.

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания призмы на плоскость другого её основания, называется **высотой призмы**.

Если прямая a параллельна плоскости β, то расстоянием между ними называется длина перпендикуляра, опущенного из какой-нибудь точки прямой a на плоскость β.

Если плоскость α параллельна плоскости β, то расстоянием между ними называется длина перпендикуляра, опущенного из какой-нибудь точки плоскости α на плоскость β.

Наклонной к плоскости называется прямая, пересекающая эту плоскость и не перпендикулярная ей. Наклонной также называют отрезок, соединяющий точку, не принадлежащую плоскости, с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром.

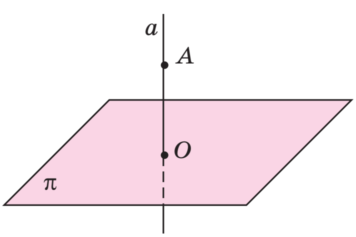


Рис. 87

Теорема. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведённой из той же точки к той же плоскости.

Доказательство. Пусть AB — наклонная к плоскости α, AO — перпендикуляр, опущенный на эту плоскость (рис. 88, а). Соединим отрезком точки O и B. Треугольник AOB прямоугольный, AB — гипотенуза, AO — катет. Следовательно, $AO < AB$. ■

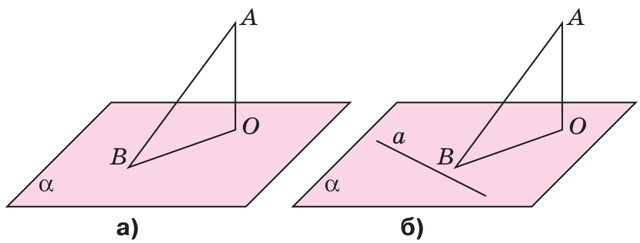


Рис. 88

Из этой теоремы следует, что расстояние от точки до плоскости является наименьшим из расстояний от этой точки до всевозможных точек плоскости.

Теорема. (О трёх перпендикулярах.) Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Доказательство. Пусть прямая a плоскости α перпендикулярна проекции OB наклонной AB (рис. 88, б). Тогда она будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым OB и AO. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая a перпендикулярна плоскости AOB, и, следовательно, она будет перпендикулярна наклонной AB. ■

Аналогичным образом доказывается следующая теорема, обратная теореме о трёх перпендикулярах.

Теорема*. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на данную плоскость.

Пример 1. Доказать, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна прямой BD.

Решение. Действительно, ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость грани $ABCD$ будет прямая AC (рис. 89). Прямые AC и BD перпендикулярны. По теореме о трёх перпендикулярах прямые AC_1 и BD также будут перпендикулярны.

Определим теперь понятие угла между прямой и плоскостью.

Определение. **Углом между наклонной и плоскостью** называется угол между этой наклонной и её ортогональной проекцией на эту плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

Углом между отрезком и плоскостью будем называть угол между прямой, содержащей отрезок, и этой плоскостью.

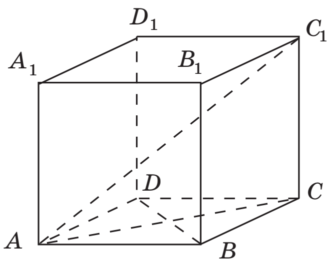


Рис. 89

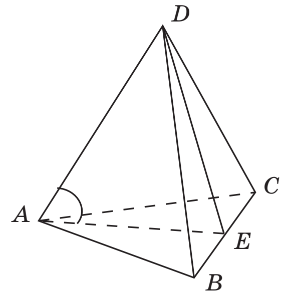


Рис. 90

П р и м е р 2. Найти угол φ между ребром AD правильного тетраэдра и не содержащей его гранью ABC.

Р е ш е н и е. Пусть ребро тетраэдра равно a, E — середина ребра BC (рис. 90). Тогда прямая AE является ортогональной проекцией прямой AD на плоскость ABC. Поэтому искомый угол φ равен углу DAE. Из равностороннего треугольника ABC находим $AE = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из равнобедренного треугольника ADE ($AE = DE$) находим $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

П р и м е р 3. Отрезок BC длиной 12 см является ортогональной проекцией отрезка AC на плоскость α. Точка D принадлежит отрезку AC, и $AD : DC = 2 : 3$. Найти отрезок AD и его ортогональную проекцию на плоскость α, если известно, что $AB = 9$ см.

Р е ш е н и е. Из точки D в прямоугольном треугольнике ACB ($\angle B = 90°$) проведём DH перпендикулярно CB (H принадлежит CB) (рис. 91). $AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (см); $AD = 2x$, $DC = 3x$, $5x = 15$, $x = 3$. Значит, $AD = 6$ см. Теперь найдём отрезок BH, который является ортогональной проекцией отрезка AD на данную плоскость. $BH : HC = AD : DC$, следовательно, $BH = 4{,}8$ см.

П р и м е р 4. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведён отрезок AK, равный 3. Из точки K опущены перпендику-

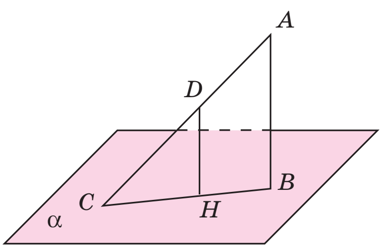


Рис. 91

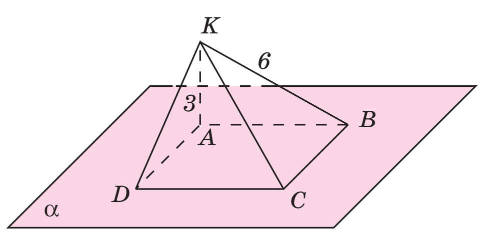


Рис. 92

ляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найти углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

Решение. Обратимся к рисунку 92. AB и AD — ортогональные проекции соответственно отрезков KB и KD на плоскость α. Поскольку $AB \perp BC$ и $AD \perp DC$, $KB \perp BC$ и $KD \perp DC$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Искомые углы — это $\angle KBA$ и $\angle KDA$. Они равны. Это следует из равенства прямоугольных треугольников KAB и KAD (по катетам). Из прямоугольного треугольника KBA $\sin \angle KBA = KA : KB = 0{,}5$, $\angle KBA = 30°$. Таким образом, $\angle KBA = \angle KDA = 30°$.

Упражнения

○ **1.** Можно ли угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость считать углом между наклонной и плоскостью?

○ **2.** С какими прямыми, лежащими в плоскости, наклонная образует углы, равные углу между этой наклонной и плоскостью?

○ **3.** Даны две параллельные наклонные, проведённые к одной и той же плоскости. Что можно сказать о величинах углов, которые они образуют с плоскостью?

○ **4.** Прямые a и b образуют с плоскостью α равные углы. Будут ли эти прямые параллельны?

○ **5.** Как найти угол наклона бокового ребра правильного тетраэдра к плоскости основания?

○ **6.** Будут ли в пирамиде боковые рёбра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

○ **7.** Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены друг относительно друга эти плоскости?

○ **8.** Какую фигуру на плоскости α образуют основания наклонных, проведённых к плоскости α из точки вне плоскости и образующих равные углы с плоскостью α?

* **9.** Существует ли точка, равноудалённая от четырёх данных точек, не принадлежащих одной плоскости?

○ **10.** Прямая пересекает две параллельные плоскости. Что можно сказать об углах, которые она образует с этими плоскостями?

○ **11.** Даны две параллельные прямые, пересекающие одну плоскость. Что можно сказать об углах, которые они образуют с этой плоскостью?

12. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — прямоугольник, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Среди отрезков SA, SB, SC найдите наименьший и наибольший.

13. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α: а) равно ортогональной проекции наклонной; б) в два раза меньше самой наклонной.

14. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60°$.

15. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AB, если $AC = 2\sqrt{10}$ см, $BC = 3AB$.

16. Отрезки двух наклонных, проведённых из одной точки к плоскости, равны 15 см и 20 см. Ортогональная проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите ортогональную проекцию другого отрезка.

17. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 20 см и 15 см. Через вершину A проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Ортогональная проекция одного из катетов на эту плоскость равна 12 см. Найдите ортогональную проекцию гипотенузы.

18. Сторона ромба равна a, острый угол 60°. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Ортогональная проекция другой стороны на эту плоскость равна b. Найдите ортогональные проекции диагоналей.

19. Докажите, что в правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней боковому ребру.

20. Докажите, что равные наклонные, проведённые из одной точки к плоскости, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость. Сформулируйте обратное утверждение. Докажите его справедливость.

21. Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.

22. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

23. Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

24. Дан треугольник DEF и точка K, которая не принадлежит его плоскости. KE, KD, KF — расстояния от точки K до сторон треугольника. Эти отрезки одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что точка K ортогонально проектируется в центр вписанной в треугольник окружности.

25. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

***26.** Докажите, что геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек, является плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

***27.** Докажите, что геометрическим местом точек, равноудалённых от вершин данного треугольника, является прямая, перпендикулярная плоскости этого треугольника и проходящая через центр описанной около него окружности.

§21. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

Полуплоскость можно считать пространственным аналогом луча на плоскости. Тогда пространственным аналогом угла на плоскости будет фигура, называемая **двугранным углом**.

Определение. **Двугранным углом** называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 93). Полуплоскости называются **гранями** двугранного угла, а их общая граничная прямая — **ребром** двугранного угла.

Пусть α и β — полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 94). Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии её пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется **линейным углом** данного двугранного угла.

Докажем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, пусть γ_1, γ_2 — плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости α и β по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно (рис. 95). Лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2 сонаправлены, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол прямой.

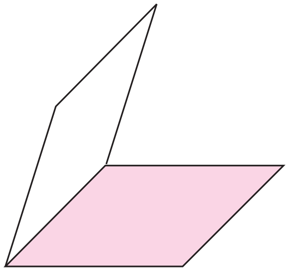


Рис. 93

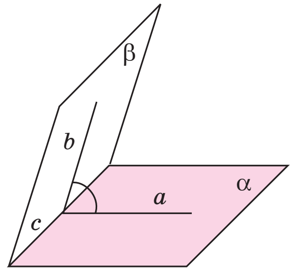


Рис. 94

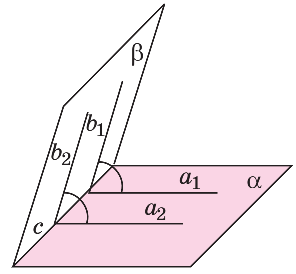


Рис. 95

Определение. **Углом между двумя пересекающимися плоскостями** называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

Определение. Две плоскости называются **перпендикулярными**, если они образуют прямые двугранные углы.

Следующая теорема даёт достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. (Признак перпендикулярности двух плоскостей.) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

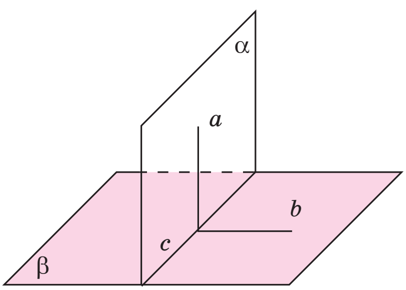


Рис. 96

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β, c — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 96). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведём прямую b, перпендикулярную прямой c. Через прямые a и b проведём плоскость γ. Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b в этой плоскости. Поскольку прямая a перпендикулярна плоскости β, то угол, образованный a и b, прямой. Он является линейным углом соответствующего двугранного угла. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны. ■

Пример 1. Доказать, что боковые грани прямой призмы перпендикулярны её основаниям.

Решение. Действительно, как было доказано ранее, боковые рёбра прямой призмы перпендикулярны основаниям. Боковые грани проходят через боковые рёбра и, следовательно, также перпендикулярны основаниям прямой призмы.

Пример 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол наклона плоскости ABC_1 к плоскости ABC.

Решение. В плоскости ABC лежит квадрат $ABCD$, в плоскости ABC_1 — прямоугольник ABC_1D_1. Искомым углом является $\angle DAD_1$ (или $\angle CBC_1$).

Действительно, $DA \perp AB$ (смежные стороны квадрата) и $D_1A \perp AB$ (AB перпендикулярна плоскости A_1AD по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, так как $AB \perp AA_1$ и $AB \perp AD$). $\angle DAD_1 = 45°$ (угол между диагональю и стороной квадрата).

Пример 3. Провести через произвольную точку пространства плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести?

Решение. Через произвольную точку A (A может принадлежать или не принадлежать данной плоскости) проводим прямую, перпендикулярную данной плоскости. Через эту прямую проводим произвольную плоскость. Она и будет искомой. Таких плоскостей можно провести бесконечно много.

Упражнения

○ **1.** Что можно сказать о взаимном расположении плоскости линейного угла некоторого двугранного угла и ребра этого двугранного угла?

○ **2.** Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

○ **3.** Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведённые к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?

○ **4.** Треугольник MAB и квадрат $ABCD$ заданы таким образом, что MB — перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и ABC?

○ **5.** Треугольник MAB и параллелограмм $ABCD$ с острым углом BAD заданы таким образом, что MB — перпендикуляр к плоскости параллелограмма. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и ABC?

○ **6.** Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

○ **7.** Верно ли, что прямая и плоскость, перпендикулярные другой плоскости, параллельны между собой?

○ **8.** Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

○ **9.** Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

○ **10.** Две плоскости перпендикулярны. Укажите возможные случаи взаимного расположения прямой, лежащей в одной из этих плоскостей, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. Проиллюстрируйте свой ответ на модели.

○ **11.** Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

○**12.** Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная прямой, перпендикулярна и данной плоскости?

○**13.** Верно ли, что плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, не перпендикулярна этой плоскости?

14. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ заданы таким образом, что AD перпендикулярна плоскости параллелограмма, угол BCD тупой. Можно ли считать угол ACD углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$? Постройте линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, так, чтобы одна его сторона проходила через точку A.

15. В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

16. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

17. Дан квадрат $ABCD$, через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α, образующая с диагональю BD угол $60°$. Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α?

18. Основанием высоты четырёхугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) равнобедренная трапеция?

19. Докажите, что если основанием высоты пирамиды является центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны.

20. Основанием прямой призмы является параллелограмм со сторонами 4 дм и 5 дм. Угол между ними $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые рёбра и образует с плоскостью основания угол $45°$.

21. Боковое ребро прямой призмы равно 6 см. Её основание — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 2 см. Найдите площади сечений призмы плоскостями, проходящими через каждый из данных катетов и образующими углы $60°$ с плоскостью основания.

22. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины двух сторон основания и образующей угол $45°$ с его плоскостью, если известно, что плоскость пересекает: а) только одно боковое ребро призмы; б) два её боковых ребра.

23. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону его грани, если угол между этой плоскостью и плоскостью этой грани равен: а) $30°$; б) φ.

24. Через середины двух смежных сторон основания правильной четырёхугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q.

25. Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

26. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна третьей плоскости.

27. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) перегнули по высоте CD таким образом, что плоскости ACD и BCD образовали прямой угол. Найдите углы ADB и ACB.

***28.** Существует ли треугольная пирамида, у которой три грани попарно перпендикулярны?

***29.** Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

***30.** Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны основанию?

***31.** Могут ли боковыми гранями наклонной призмы быть: а) 2 прямоугольника; б) 3 прямоугольника; в) 4 прямоугольника?

§ 22*. Центральное проектирование. Перспектива

Наряду с параллельным и ортогональным проектированиями, применяемыми в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет так называемое центральное проектирование, используемое в живописи, фотографии и т. д. Восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

Пусть π — некоторая плоскость, S — не принадлежащая ей точка, **центр проектирования** (рис. 97). Для точки A пространства проведём прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется **центральной проекцией** точки A на плоскость π. Обозначим её A'. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A', называется **центральным проектированием** или **перспективой**.

Заметим, что не для каждой точки пространства определена её центральная проекция. В случае, если прямая a параллельна плоскости π, точка A не имеет проекции на эту плоскость.

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции её точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется **центральной проекцией фигуры** Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является **перспективой** фигуры Φ.

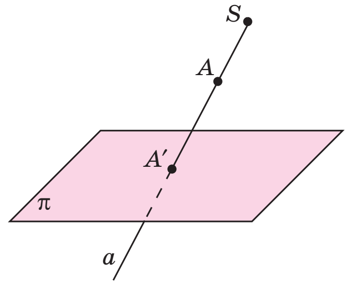


Рис. 97

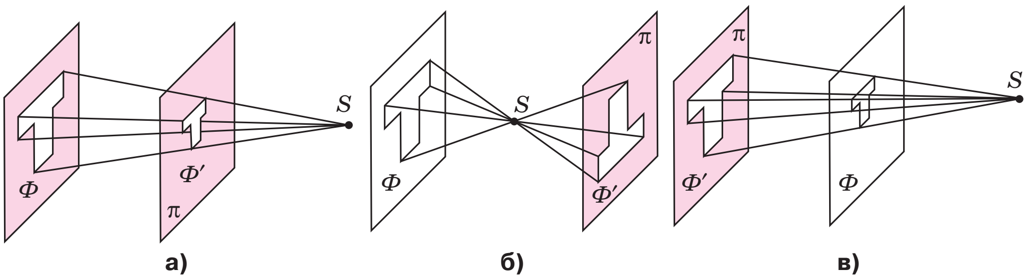


Рис. 98

На рисунке 98, а показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ', будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование даёт наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

На рисунке 98, б показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевёрнутое изображение получается на плёнке фотоаппарата, объектив которого помещён в центр проектирования.

На рисунке 98, в показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Такие проекции дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Они получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

Теорема. Если плоская фигура F расположена на плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то её центральной проекцией будет фигура F', подобная F, причём коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 99).

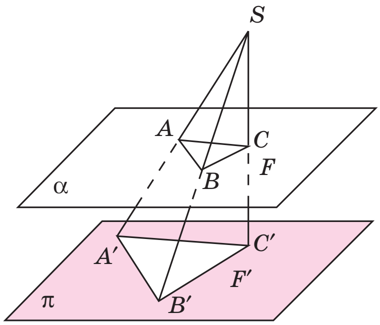


Рис. 99

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их центральные проекции. Через центр S проведём прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно. Для точек A и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$

и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$. Таким образом, определённое преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны. ■

Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и точка S не принадлежит прямой a. Найдём проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведём плоскость α и линию её пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 100).

В плоскости α через точку S проведём прямую, параллельную a, и точку её пересечения с прямой a' обозначим S'. Легко видеть, что точкам прямой a, за исключением точки A_0, для которой прямая A_0S параллельна плоскости π, соответствуют точки прямой a', за исключением точки S'. Таким образом, прямая a' без точки S' и является искомой проекцией прямой a на плоскость π.

Выясним, в какие фигуры при центральном проектировании переходят параллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся прямые.

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 101). Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b', за исключением их общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. п. Приведём примеры изображения простейших пространственных фигур в центральной проекции.

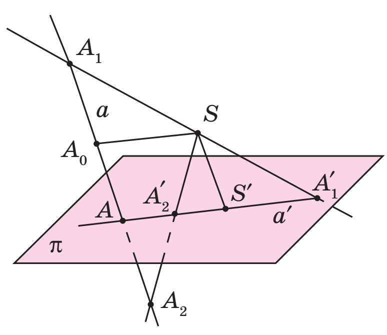


Рис. 100

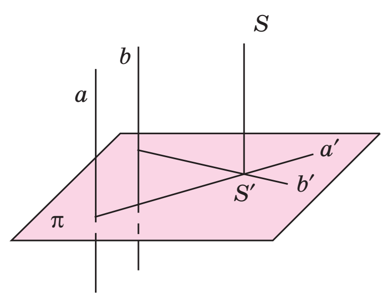
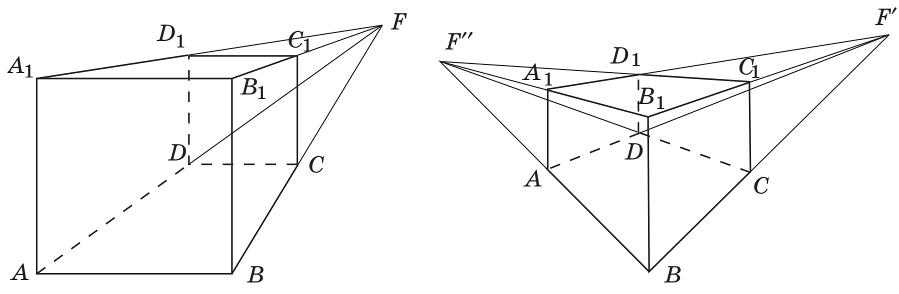


Рис. 101



а) б)

Рис. 102

П р и м е р 1. На рисунке 102, а изображён куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

П р и м е р 2. На рисунке 102, б изображён куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

Исторические сведения

Центральное проектирование, или перспектива, как наука возникла ещё в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах Эсхила (525—456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О геометрии» известного мыслителя и учёного Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых «Начал» он написал много других сочинений. В том числе в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того, как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу. Поэтому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пирамиды, вершина которой находится в глазу, а основанием её служит рассматриваемый нами предмет. Евклид ввёл также постулат о том, что кажущиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, умер около 25 г. до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены учёным в труде «Об архитектуре», состоящем из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. Теоретиком перспективы считают итальянского архитектора Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотившими её достижения в своих полотнах, — великих Леонардо да Винчи

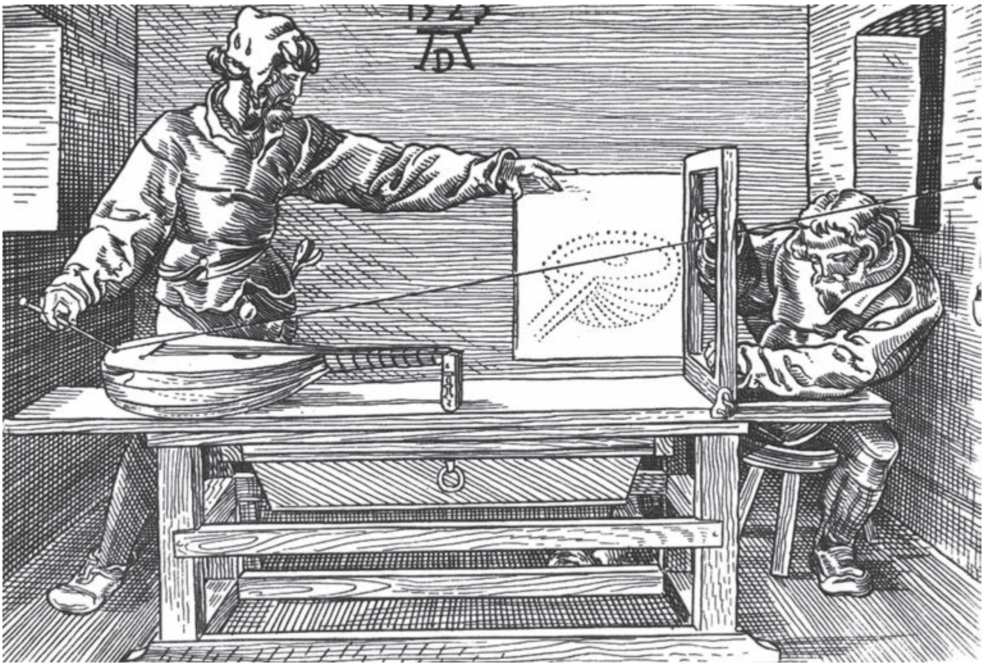


Рис. 103

(1452—1519), Альбрехта Дюрера (1471—1528) и многих других художников, скульпторов, архитекторов Возрождения.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, некоторые из которых он изобразил на своих гравюрах.

Например, на рисунке 103 изображена гравюра, на которой показано, что для получения перспективного изображения предмета между глазом наблюдателя и предметом помещается рамка, разделённая на небольшие квадраты сеткой. С помощью натянутой нити сначала копируются контуры модели, а затем полученное изображение переносится на бумагу.

Леонардо да Винчи в своём произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части:

1. Линейная перспектива, которая изучает законы уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.

2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.

3. Перспектива чёткости очертания формы предмета, в которой анализируется изменение степени отчётливости границ фигур и контраста света

и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают французского учёного, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная геометрия», изданная в 1795 году, явилась первым систематизированным изложением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Русские художники XVII—XIX вв. хорошо владели теорией перспективы и применяли её в своих картинах. Крупнейшим представителем русской академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был А. П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного изучения теории перспективы и применения её законов в академическом рисунке.

Более 20 лет вёл поиск способа овладения видением натуры на основе законов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов (1780—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необходимо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рассматривал как метод изображения реальных предметов в конкретной обстановке.

Большое значение придавал изучению перспективы замечательный русский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим ученикам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите её в работу, в рисование. Никогда не отделяйте её от рисования, как это делают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами перспективы — напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спутником вашей работы и стражем верности».

Пример 3. Найти геометрическое место точек в пространстве, для которых не существует центральных проекций на плоскость π с центром проектирования S.

Решение. Для точки M не существует центральной проекции на плоскость π с центром S, если прямая SM параллельна π. Все прямые, параллельные плоскости π и проходящие через S, лежат в плоскости, параллельной π и проходящей через S.

Пример 4. Построить центральную проекцию куба, аналогичную изображённой на рисунке 102, а, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

Решение представлено на рисунке 104.

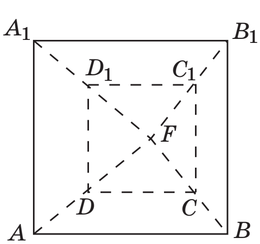


Рис. 104

Упражнения

○ **1.** Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? Для каких точек она не существует?

○ **2.** Приведите примеры из окружающей нас действительности, когда создаётся впечатление, что параллельные прямые пересекаются.

○ **3.** Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые перейти в пересекающиеся?

○ **4.** В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?

○ **5.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования?

○ **6.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если центр проектирования находится между фигурой и плоскостью проектирования? Где используется такое изображение?

○ **7.** Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если она расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования? Где используется такое изображение?

○ **8.** Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, которая расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования?

9. Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 98, а, б, в, для центральных проекций фигуры, изображённой на рисунке 105.

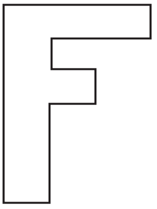


Рис. 105

10. Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования (рис. 100). Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная выше плоскости проектирования. Куда переходит часть этой прямой, расположенная ниже плоскости проектирования?

11. Постройте центральную проекцию цилиндра на плоскость, параллельную его основаниям.

12. Постройте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

13. Постройте центральную проекцию правильной четырёхугольной пирамиды на плоскость, не параллельную её основанию.

14. В пирамиде с высотой 3 м на расстоянии 2 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите коэффициент подобия сечения к основанию пирамиды.

15. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через точки M, N и K, принадлежащие соответственно граням ADB, BDC и ABC.

16. Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и N соответственно граней ABD и BDC параллельно ребру AC.

Глава IV

МНОГОГРАННИКИ

§ 23. Многогранные углы

Пусть в плоскости π дан многоугольник M и точка S вне этой плоскости (рис. 106).

Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке S, пересекающими данный многоугольник, называется **многогранным углом**. Точка S называется **вершиной** многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника, — **рёбрами** многогранного угла. Углы, образованные соседними рёбрами, называются **плоскими углами** многогранного угла, а также **гранями** многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SABC$..., указывающими его вершину S и вершины A, B, C, ... многоугольника.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трёхгранными (рис. 107, а), четырёхгранными (рис. 107, б), пятигранными (рис. 107, в) и т. д. Для плоских углов трёхгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

Теорема*. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство. Пусть в трёхгранном угле $SABC$ наибольший из плоских углов есть угол ASC (рис. 108). Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$. Таким образом, остаётся доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторо-

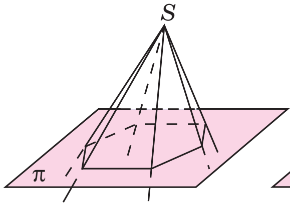
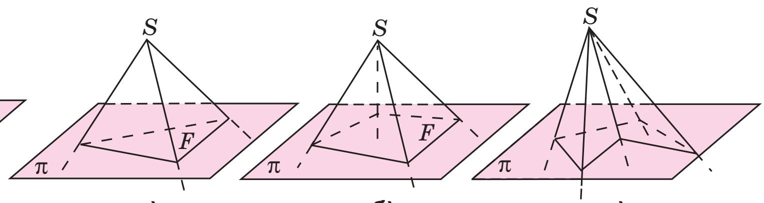


Рис. 106



а) б) в)

Рис. 107

нам и углу между ними), и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол, и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$. ■

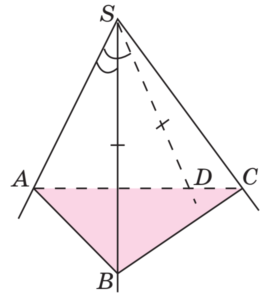


Рис. 108

* Изображение прямоугольного параллелепипеда в ортогональной проекции

Для того чтобы изобразить прямоугольный параллелепипед в ортогональной проекции, в первую очередь выясним, что представляет собой ортогональная проекция трёхгранного угла, все плоские углы которого прямые.

Итак, пусть дан трёхгранный угол с вершиной S. Плоскость π пересекает его рёбра в точках A, B, C, причём $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = 90°$ (рис. 109). Обозначим A_1, B_1, C_1 точки пересечения ортогональных проекций рёбер трёхгранного угла со сторонами треугольника ABC. Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 являются высотами треугольника ABC.

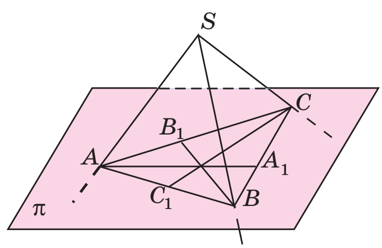
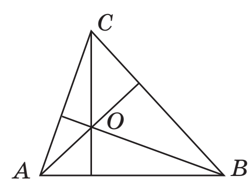
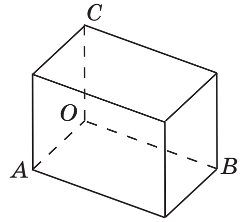


Рис. 109

Действительно, ребро SC перпендикулярно SA и SB. Следовательно, оно перпендикулярно плоскости SAB. Значит, SC перпендикулярно любой прямой этой плоскости и, в частности, оно перпендикулярно AB. По теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, следует, что ортогональная проекция CC_1 ребра SC перпендикулярна AB, т. е. CC_1 — высота треугольника ABC.



а)



б)

Рис. 110

Аналогично доказывается, что высотами треугольника ABC являются AA_1 и BB_1.

Таким образом, для того чтобы изобразить в ортогональной проекции трёхгранный угол с прямыми плоскими углами, нужно изобразить треугольник ABC (рис. 110, а) и провести в нём высоты. Лучи OA, OB, OC будут изображениями рёбер трёхгранного угла.

Имея изображение трёхгранного угла с прямыми плоскими углами, легко построить изображение прямоугольного параллелепипеда. Для этого на изображении рёбер нужно отметить по одной точке и провести через них прямые, параллельные изображениям рёбер (рис. 110, б).

Пример 1. Найти число многогранных углов 20-угольной призмы, определить их вид.

Решение. Число многогранных углов многогранника равно числу его вершин. У 20-угольной призмы 40 вершин, следовательно, 40 многогранных углов. Все они трёхгранные.

Пример 2. В трёхгранном угле все плоские углы прямые. На его рёбрах от вершины S отложены отрезки $SA = 4$ см, $SB = 4$ см и $SC = 2\sqrt{6}$ см. Через их концы проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Решение. В сечении получился треугольник ABC, у которого стороны являются гипотенузами прямоугольных треугольников соответственно ABS, BCS и ACS: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 4\sqrt{2}$ (см); $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$ (см); $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$ (см). Таким образом, треугольник ABC равнобедренный. Его высота CD, опущенная на основание AB, равна $\sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (см). Следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot CD = 16$ (см^2).

Упражнения

○ **1.** Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трёхгранные углы; б) четырёхгранные углы; в) пятигранные углы.

○ **2.** Определите виды многогранных углов у: а) четырёхугольной призмы; б) пятиугольной пирамиды.

○ **3.** По скольким прямым попарно пересекаются плоскости граней: а) трёхгранного; б) четырёхгранного; в) пятигранного угла?

○ **4.** Сколько многогранных углов в: а) 4-угольной пирамиде; б) 7-угольной призме; в) 10-угольной усечённой пирамиде?

* **5.** Может ли быть трёхгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

* **6.** Два плоских угла трёхгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

7. Докажите, что если в трёхгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы прямые.

8. Плоские углы трёхгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

9. В трёхгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

10. Плоские углы трёхгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его рёбрах от вершины O отложены равные отрезки OA, OB, OC. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью ABC.

11. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60°. На одном из его рёбер от вершины отложен отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

***12.** Докажите, что каждый плоский угол трёхгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

***13.** Докажите, что сумма углов пространственного четырёхугольника не превосходит 360°.

***14.** Докажите, что сечением трёхгранного угла с прямыми плоскими углами плоскостью является остроугольный треугольник.

***15.** Изобразите в ортогональной проекции прямоугольный параллелепипед.

§ 24. Выпуклые многогранники

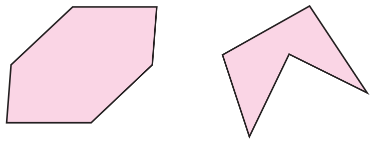
Среди плоских и пространственных фигур выделяют так называемые **выпуклые фигуры**. Это такие фигуры, которые вместе с любыми двумя своими точками целиком содержат и соединяющий их отрезок.

О п р е д е л е н и е. Многогранник называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Все многогранники, которые мы до сих пор изучали, были выпуклыми многогранниками (куб, параллелепипед, призма, пирамида и др.).

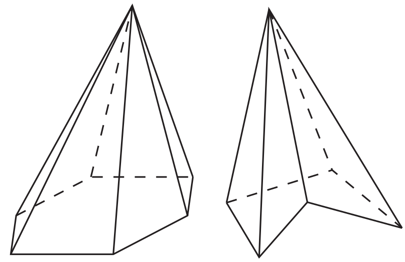
На рисунке 111, а, б показаны выпуклый и невыпуклый многоугольники.

На рисунке 112, а, б показаны выпуклый и невыпуклый многогранники.



а) б)

Рис. 111



а) б)

Рис. 112

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть F — какая-нибудь грань многогранника M, и точки A, B принадлежат грани F (рис. 113).

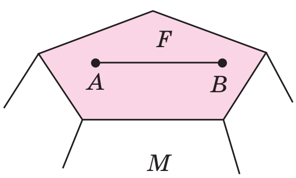


Рис. 113

Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник.

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть M — выпуклый многогранник. Возьмём какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника M все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M и все вместе составляют многогранник M.

Пример 1. Сколько диагоналей имеет: а) 4-угольная; б) 5-угольная; в) 6-угольная; г)* n-угольная призма?

Решение. а) Пусть дана четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из каждой вершины нижнего основания $ABCD$ можно провести всего одну диагональ. Учитывая, что всего вершин 4, окончательно получим 4 диагонали; б) аналогично, из каждой вершины нижнего основания 5-угольной призмы можно провести 2 диагонали, значит, всего получится 10 диагоналей; в) 18 диагоналей; г)* из каждой вершины нижнего основания можно провести $n - 3$ диагоналей. Таким образом, всего диагоналей $n(n - 3)$.

Пример 2. Боковое ребро правильной пирамиды вдвое больше её высоты. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Пусть боковое ребро SA вдвое больше высоты SO пирамиды. Тогда в прямоугольном треугольнике SAO $\sin \angle SAO = 0{,}5$, где $\angle SAO$ — угол между боковым ребром и основанием пирамиды. Таким образом, $\angle SAO = 30°$.

Пример 3. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Можно ли определить число его граней (Г), если он имеет 12 рёбер (Р)?

Решение. $3 \cdot Г = 2 \cdot Р$, $Р = 12$, значит, $Г = 8$. Например, 8 граней, все являющиеся треугольниками, имеет октаэдр.

Упражнения

1. На рисунке 114 укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.

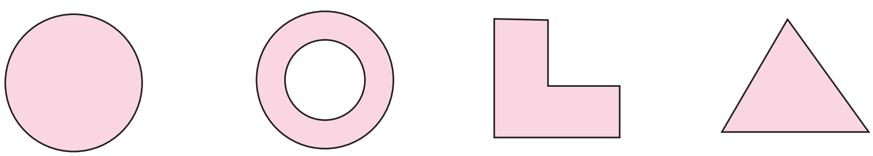
2. Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

3. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

4. На рисунке 115 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.

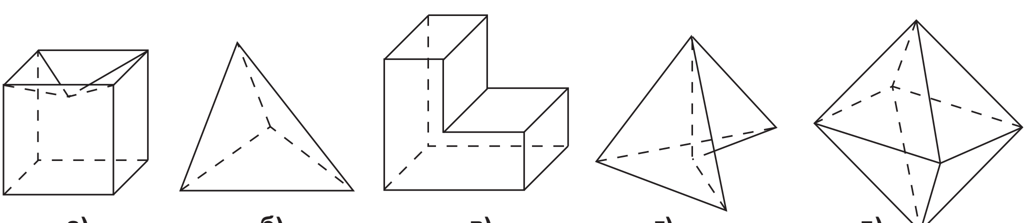
5. Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

6. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.



а) б) в) г)

Рис. 114



а) б) в) г) д)

Рис. 115

* **7.** Как связано число рёбер выпуклого многогранника с числом его плоских углов?

* **8.** Может ли в выпуклом многограннике быть 21 плоский угол?

○ **9.** Назовите выпуклый многогранник с 5 вершинами.

○ **10.** Назовите выпуклый многогранник, у которого 7 вершин.

○ **11.** Приведите пример выпуклого многогранника, у которого вершин столько же, сколько граней.

○ **12.** Назовите выпуклый многогранник с 5 гранями.

13. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 дм, 3 дм и 6 дм. Найдите длины его диагоналей.

14. Сколько диагональных сечений имеет призма: а) четырёхугольная; б) пятиугольная; в) шестиугольная; г) n-угольная?

15. Верно ли, что если высота призмы равна высоте боковой грани, то призма прямая?

16. Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду?

17. Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из многогранных углов?

18. Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой. Верно ли, что пересечением выпуклых многогранников является выпуклый многогранник?

19. Докажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.

20. Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда её основаниями являются выпуклые многоугольники.

21. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда её основание является выпуклым многоугольником.

22. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 см и 24 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.

23. В правильной четырёхугольной призме площадь основания равна 144 см^2, высота равна 14 см. Найдите диагональ призмы.

24. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 7 см и 3 см, одна из его диагоналей равна 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найдите боковые рёбра пирамиды.

***25.** Докажите, что для числа вершин (В), числа рёбер (Р) и числа граней (Г) выпуклого многогранника выполняются неравенства $2Р \geqslant 3В$, $2Р \geqslant 3Г$.

***26.** Докажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

***27.** Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

***28.** Может ли выпуклая наклонная призма иметь среди боковых граней: а) 2 прямоугольника; б) 3 прямоугольника?

***29.** Может ли выпуклая пирамида иметь: а) 2 боковые грани; б) 3 боковые грани, перпендикулярные её основанию?

§ 25*. Теорема Эйлера

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В — число вершин, Р — число рёбер, Г — число граней многогранника.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырёхугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырёхугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2,$$

где В — число вершин, Р — число рёбер и Г — число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку (рис. 116, а), содержащую $\text{Г}' = \text{Г} - 1$ многоугольников (которые, по-прежнему, будем называть гранями), В вершин и Р рёбер.

Если для этой сетки выполняется соотношение

$$В - Р + Г' = 1 \ (1),$$

то для исходного многогранника будет справедливо требуемое равенство.

Покажем, что соотношение (1) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали в сетке будет В вершин, Р + 1 рёбер и Г′ + 1 граней, и, следовательно, В − (Р + + 1) + (Г′ + 1) = В − Р + Г′. Пользуясь этим свойством, проведём в сетке диагонали, разбивающие входящие в неё многоугольники на треугольники (рис. 116, б), и для полученной сетки покажем выполнимость соотношения (1). Для этого будем последовательно убирать внешние рёбра сетки, уменьшая в ней количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем случае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в нашем случае MN.

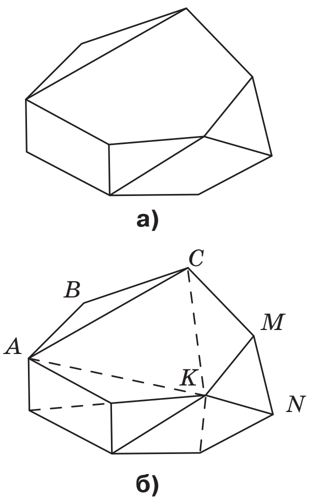


Рис. 116

В обоих случаях соотношение (1) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из В − 1 вершин, Р − 2 рёбер и Г′ − 1 граней, (В − 1) − (Р − 2) + + (Г′ − 1) = В − Р + Г′.

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (1). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придём к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки В = 3, Р = 3, Г′ = 1, и, следовательно, В − Р + Г′ = 1. Значит, соотношение (1) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо требуемое равенство. ■

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой **топологии** — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера В − Р + Г = 2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом рёбра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, разделённый на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение В − Р + Г′ = 1, где В — число вершин, Р — рёбер и Г′ — граней (многоугольников). Рёбра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу о трёх домиках и трёх колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы — точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 117). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять рёбер, которые попарно не пересекаются.

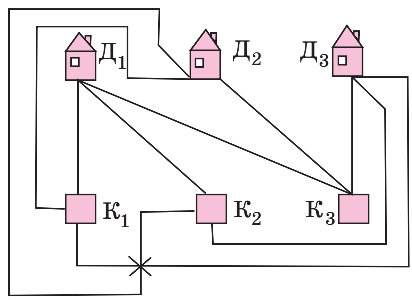


Рис. 117

Эти рёбра образуют на плоскости многоугольник, разделённый на более мелкие многоугольники — грани. Поэтому для числа вершин, рёбер и граней должно выполняться соотношение Эйлера В − Р + Г′ = 1. Добавим к рассматриваемым граням ещё одну — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В − Р + Г = 2, причём В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество рёбер должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Исторические сведения

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707—1783) — одного из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров учёных-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие учёного. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причём последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжёлый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчёты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в научных трудах Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский учёный П. С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас».

Упражнения

○ **1.** Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

2. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 рёбер; б) 15 рёбер?

○ **3.** Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

4. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно: а) 12; б) 15?

5. Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью рёбрами.

○ **6.** Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней и в каждой из них по 13 рёбер?

7. Гранями выпуклого многогранника являются только четырёхугольники. Сколько у него вершин и граней, если число рёбер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

8. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

9. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходится три ребра.

***10.** Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 рёбер и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

***11.** Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость соотношения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

***12.** Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдётся грань, у которой менее шести рёбер.

***13.** Докажите, что для числа вершин (В) и числа граней (Г) выпуклого многогранника выполняются неравенства $В + 4 \leqslant 2Г \leqslant 4В - 8$.

***14.** Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранника равна $360°(n - 2)$, где n — число его вершин.

§ 26. Правильные многогранники

С правильными многогранниками мы познакомились в начале изучения стереометрии. Теперь дадим их определение.

Определение. Выпуклый многогранник называется **правильным**, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Рассмотрим возможные правильные многогранники, и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники.

Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, грани которой правильные треугольники (рис. 118, а). В каждой её вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также **тетраэдром**, что в переводе с греческого языка означает четырёхгранник.

Иногда тетраэдром называют также произвольную треугольную пирамиду. Поэтому в случае, когда речь идёт о правильном многограннике, будем говорить — правильный тетраэдр.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники и в каждой вершине сходится четыре грани, изображён на рисунке 118, б. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется **октаэдром**.

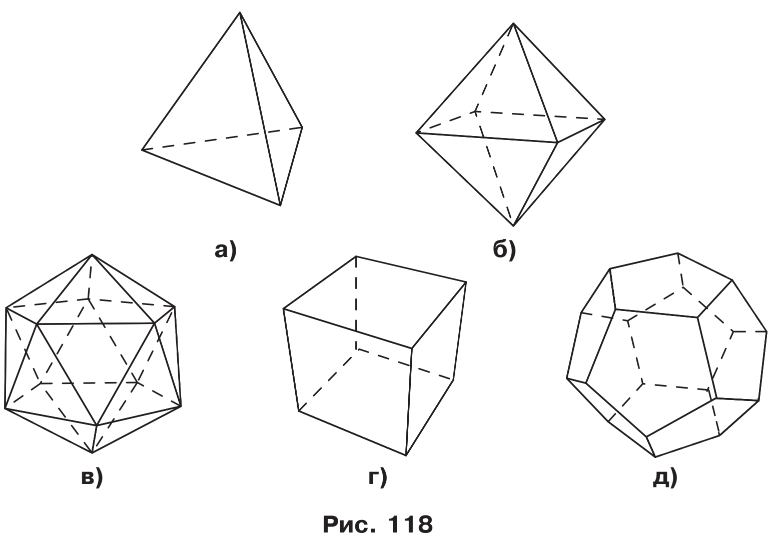


Рис. 118

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображён на рисунке 118, в. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется **икосаэдром**.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 118, г), других правильных многогранников, гранями которых являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней, и поэтому называется также **гексаэдром**.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и в каждой вершине сходится три грани, изображён на рисунке 118, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется **додекаэдром**.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует, и, таким образом, имеется только пять правильных многогранников: правильный тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали их божественными и использовали в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон (429—348 гг. до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также **телами Платона**. Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга знаменитых «Начал» Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи, например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер. В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 119) изображён додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Рис. 119

Иоганн Кеплер (1571—1630) в своей работе «Тайна мироздания» в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг неё опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера

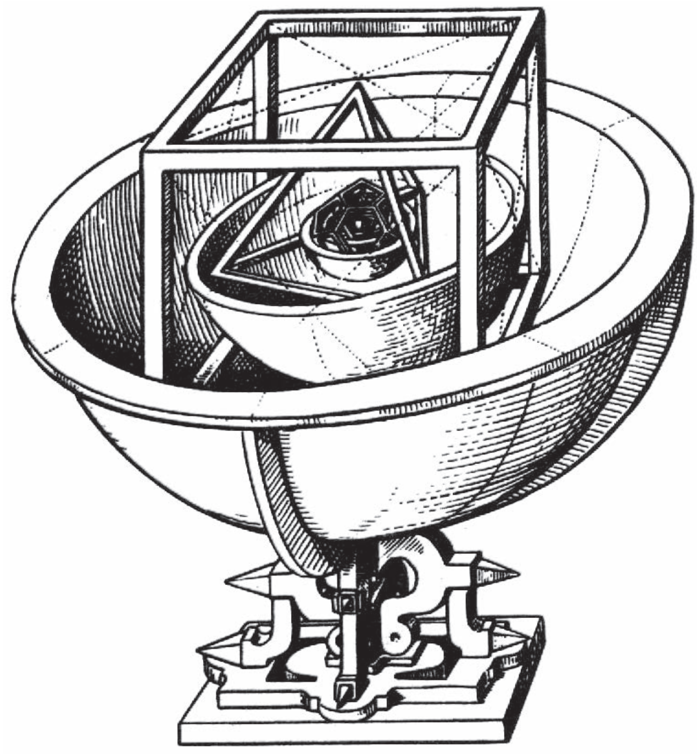


Рис. 120

есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 120).

Пример 1. Построить с помощью куба правильный тетраэдр. Найти его ребро, если ребро куба равно 1.

Решение. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его вершины A, C, B_1 и D_1 являются вершинами тетраэдра (остальные вершины A_1, C_1, B и D образуют вершины также тетраэдра). Все четыре грани тетраэдра ACB_1D_1 являются правильными треугольниками со стороной $\sqrt{2}$ (диагональ единичного квадрата). Таким образом, тетраэдр является правильным и его ребро равно $\sqrt{2}$.

Пример 2. Построить сечение октаэдра плоскостью, проходящей через одну из его вершин и середины двух параллельных рёбер, которым не принадлежит данная вершина. Определить вид сечения.

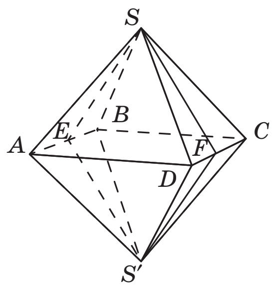


Рис. 121

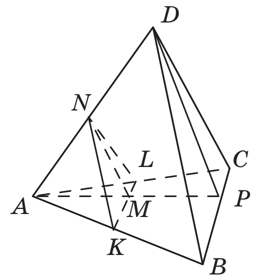


Рис. 122

Решение. Дан октаэдр $SABCDS'$ (рис. 121). Построим сечение, проходящее через его вершину S и точки E, F — середины соответственно параллельных рёбер AB и CD. Сечением является четырёхугольник $ESFS'$: $SF \parallel S'E$ и $SE \parallel S'F$ (линии пересечения параллельных плоскостей соответственно SDC, $S'AB$ и SAB, $S'DC$). Значит, $ESFS'$ — параллелограмм (по определению параллелограмма). Кроме этого, все его стороны равны (высоты в равных равносторонних треугольниках). Таким образом, $ESFS'$ — ромб.

Пример 3. В тетраэдре $ABCD$ провести сечение плоскостью, проходящей через точку M, принадлежащую грани ABC, параллельно грани BCD. Определить вид сечения.

Решение. В плоскости ABC через точку M проведём прямую $KL \parallel BC$ (рис. 122). В плоскости APD, где $P = AM \cap BC$, проведём $MN \parallel DP$. Треугольник KLN — искомое сечение, так как плоскость KLN параллельна плоскости BCD (по признаку параллельности двух плоскостей: по построению $KL \parallel BC$ и $MN \parallel DP$). В сечении получился треугольник, подобный треугольнику BCD.

Упражнения

1. Перечислите правильные многогранники и объясните, почему они так названы.
2. Почему правильные многогранники называются также телами Платона?
3. Из каких фигур состоит развёртка поверхности тетраэдра?
4. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет каждый правильный многогранник?
5. Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?
6. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней. Будет ли он правильным многогранником? Почему?

○ **7.** Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 123) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин и рёбер?

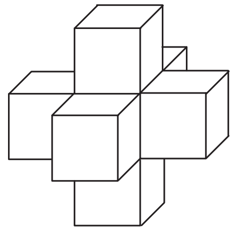
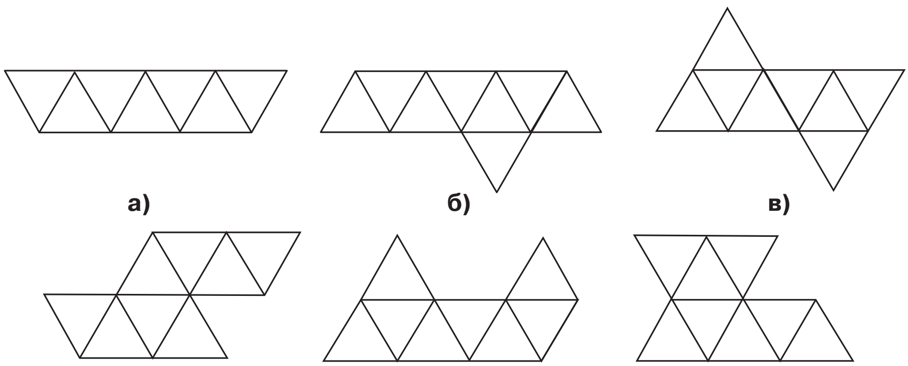


Рис. 123

○ **8.** Какие из представленных на рисунке 124 фигур можно считать развёртками октаэдра?



а) б) в) г) д) е)

Рис. 124

9. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, центры граней октаэдра — вершинами куба. Такие два многогранника называются **взаимно двойственными**.

10. Докажите, что додекаэдр и икосаэдр также являются взаимно двойственными многогранниками.

11. Какой многогранник является двойственным тетраэдру? Изобразите тетраэдр и двойственный к нему многогранник.

12. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами (**ось октаэдра**).

13. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

14. Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?

15. Докажите, что в октаэдре противоположные рёбра параллельны.

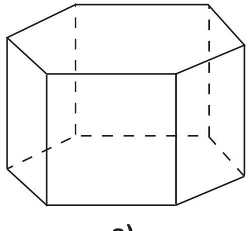
16. Постройте сечение октаэдра плоскостью, проходящей через два его параллельных ребра. Определите вид сечения.
17. В октаэдр вписан куб таким образом, что его вершины находятся на рёбрах октаэдра. Ребро октаэдра равно a. Найдите ребро куба.
18. В тетраэдр $ABCD$ вписана правильная треугольная призма с равными рёбрами таким образом, что вершины одного её основания находятся на рёбрах AD, BD, CD, а другого — в плоскости ABC. Ребро тетраэдра равно a. Найдите ребро призмы.
19. В тетраэдре $ABCD$ проведите сечение плоскостью, проходящей через точку M — середину высоты DO тетраэдра, параллельно плоскости грани ADC. Определите вид сечения.
20. Изготовьте из развёрток модели правильных многогранников.

§ 27*. Полуправильные многогранники

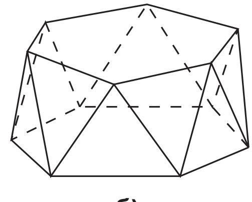
В предыдущем пункте мы рассмотрели правильные многогранники, т. е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон, в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Определение. **Полуправильным** многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники, возможно, и с разным числом сторон, и все многогранные углы равны.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все рёбра которых равны. Например, правильная шестиугольная призма на рисунке 125, а имеет своими гранями два правильных шестиугольника — основания призмы — и шесть квадратов, образующих боко-



а)



б)

Рис. 125

вую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые **антипризмы** с равными рёбрами.

На рисунке 125, б мы видим шестиугольную антипризму, полученную из шестиугольной призмы (рис. 125, а) поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется ещё 13 полуправильных многогранников, называемых **телами Архимеда**, впервые открыл и описал которые Архимед.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией усечения, состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим **усечённый тетраэдр**, имеющий восемь граней (рис. 126, а). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно **усечённый октаэдр** (рис. 126, б) и **усечённый икосаэдр** (рис. 126, в). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усечённого икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить **усечённый куб** (рис. 126, г) и **усечённый додекаэдр** (рис. 126, д).

Для того чтобы получить ещё один полуправильный многогранник, проведём в кубе отсекающие плоскости через середины рёбер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный

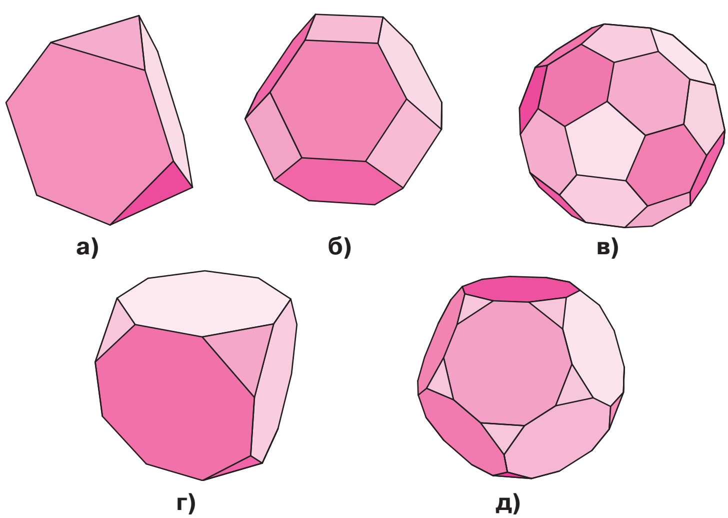
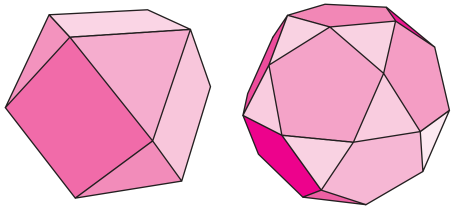
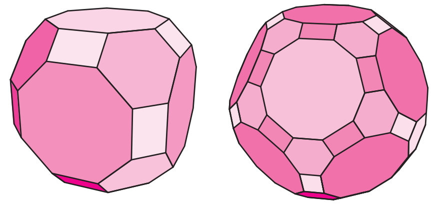


Рис. 126



а) б)

Рис. 127



а) б)

Рис. 128

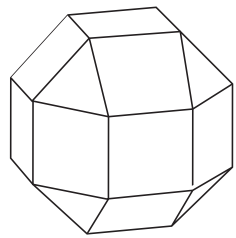
многогранник, который называется **кубооктаэдром** (рис. 127, а). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины рёбер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется **икосододекаэдром** (рис. 127, б). У него двадцать граней — правильные треугольники, и двенадцать граней — правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

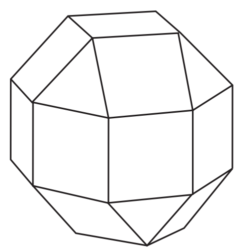
К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим **усечённый кубооктаэдр** (рис. 128, а) и **усечённый икосододекаэдр** (рис. 128, б).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

На рисунке 129, а мы видим **ромбокубооктаэдр**. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены ещё 12 квадратов.



а)



б)

Рис. 129

Если повернуть верхнюю восьмиугольную чашу этого многогранника на 45°, то получится новый многогранник, который называется **псевдоархимедовым** (рис. 129, б). Его открыли более двух тысяч лет спустя со времён Архимеда.

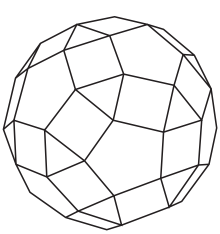


Рис. 130

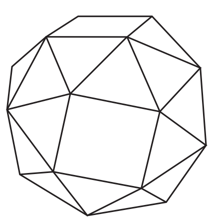


Рис. 131

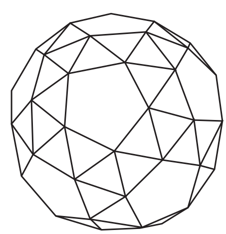


Рис. 132

На рисунке 130 изображён **ромбоикосододекаэдр**, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и ещё 30 квадратов, на рисунках 131 и 132 — соответственно так называемые **плосконосый** (иногда называют **курносый) куб** и **плосконосый (курносый) додекаэдр**, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окружённых правильными треугольниками.

Как видим, каждое тело состоит из двух или трёх типов граней. Модели этих фигур будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287—212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, гранями которых являются правильные, но не одноимённые многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число рёбер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого учёного «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь учёного телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным учёным — механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики и учёных многих других специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Эта теорема сформулирована в трактате «О плавающих телах» и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений учёного известна катапульта, архимедов винт (иногда его называют также кохлея — улитка) для поднятия наверх воды. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле начертить цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение их объёмов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого учёного.

Упражнения

- **1.** Какие многогранники называются телами Архимеда? Почему?
- **2.** Из каких граней состоят усечённый тетраэдр и усечённый куб?
- **3.** Определите число вершин, рёбер и граней усечённого октаэдра.
- **4.** Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, рёбер и граней?
- **5.** Как из икосаэдра получить усечённый икосаэдр?

○ **6.** Какие грани и сколько имеет усечённый додекаэдр?
○ **7.** Как можно получить 5-угольную антипризму?
○ **8.** Из каких граней состоит многогранник, двойственный усечённому тетраэдру?
9. Докажите, что правильная n-угольная призма (n = 3, 4, 5...) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.
10. Найдите высоту шестиугольной антипризмы, если её ребро равно a.
11. Определите, какую часть рёбер правильного тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый тетраэдр был полуправильным многогранником.
12. Решите задачу 11 для куба с ребром, равным a.
13. Какую часть рёбер икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый икосаэдр был полуправильным многогранником?
14. Какую часть рёбер додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усечённый додекаэдр был полуправильным многогранником?
15. Определите число вершин, рёбер и граней усечённого икосаэдра и усечённого додекаэдра.
16. На рисунке 133 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображённые многогранники? Найдите рёбра многогранников на рисунках 133, а, б, если ребро куба равно a.
17. Изготовьте модели каких-нибудь полуправильных многогранников.
18. Нарисуйте многогранники, двойственные: а) правильной шестиугольной призме с равными рёбрами; б) четырёхугольной антипризме с равными рёбрами; в) кубооктаэдру.

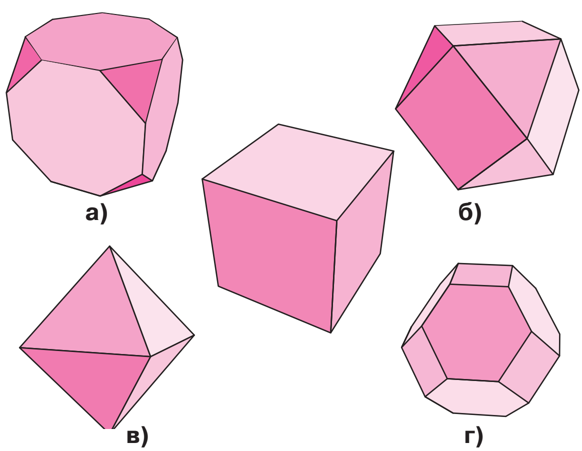


Рис. 133

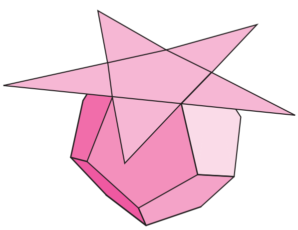
§ 28*. Звёздчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые звёздчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим **правильные звёздчатые многогранники**. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звёздчатые многогранники называются **телами Кеплера — Пуансо**. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или рёбер.

Из тетраэдра, куба и октаэдра звёздчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его рёбер приводит к замене каждой грани звёздчатым правильным пятиугольником (рис. 134, а), и в результате возникает многогранник, который называется **малым звёздчатым додекаэдром** (рис. 134, б).

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый **большой додекаэдр** (рис. 135). Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звёздчатые пятиугольники, то получается **большой звёздчатый додекаэдр** (рис. 136).

Икосаэдр имеет одну звёздчатую форму. При продолжении граней правильного икосаэдра получается **большой икосаэдр** (рис. 137).



а)

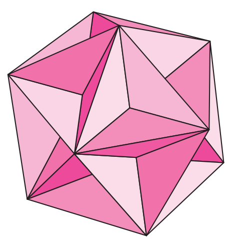


Рис. 135

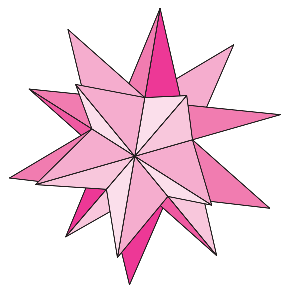
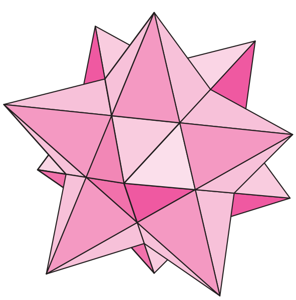


Рис. 136



б)

Рис. 134

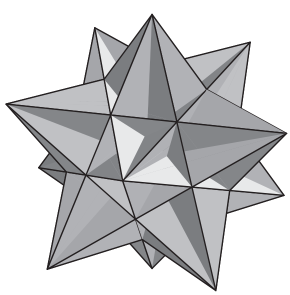


Рис. 137

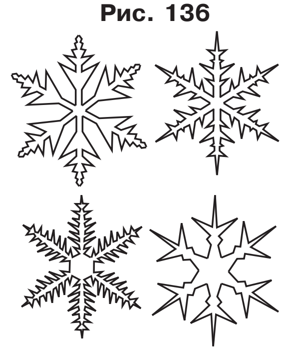


Рис. 138

Таким образом, существуют четыре типа правильных звёздчатых многогранников.

Многие формы звёздчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки — это звёздчатые многогранники (рис. 138). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

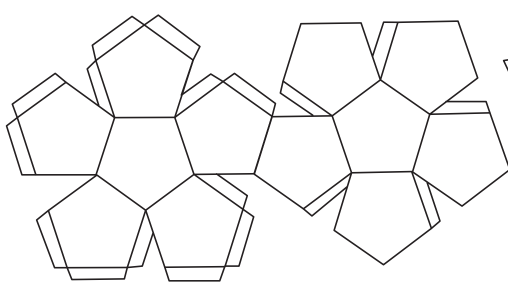
Изготовление моделей звёздчатых многогранников

Изготовлению моделей многогранников был посвящён § 3. Мы познакомились с двумя способами моделирования: из развёрток и с помощью геометрического конструктора.

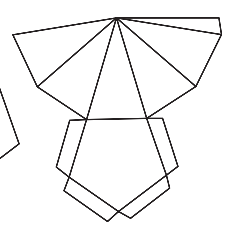
Здесь построим модель правильного звёздчатого многогранника — малого звёздчатого додекаэдра, который, как сказано выше, получается из правильного додекаэдра путём продолжения его рёбер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Модель малого звёздчатого додекаэдра очень просто изготовить из модели додекаэдра. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с основаниями, равными граням додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра.

Таким образом, сначала нужно изготовить модель додекаэдра. Её можно склеить из развёртки. На рисунке 139, а представлена развёртка додекаэдра с нарисованными клапанами для склеивания. Можно воспользоваться другим, очень интересным и необычным способом изготовления додекаэдра, который заключается в следующем. Развёртку додекаэдра (рис. 139, а) необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочерёдно сверху и снизу и прижимая



а)



б)

Рис. 139

модель свободной рукой к столу. Отпустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель додекаэдра.

После того как модель додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды, развёртка которой показана на рисунке 139, б. Необходимо изготовить 12 таких пирамид, по числу граней додекаэдра, и наклеить их на его грани. Модель малого звёздчатого додекаэдра готова.

Упражнения

1. На рисунке 140 изображён многогранник, называемый **звёздчатым октаэдром**, получающийся продолжением граней октаэдра. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им *«Stella octangula»* — звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звёздчатым?

2. Как можно получить звёздчатый октаэдр из куба?

3. Звёздчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.

4. Сколько вершин, рёбер и граней имеет малый звёздчатый додекаэдр?

5. Какие рёбра должны быть у правильных пятиугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням додекаэдра с ребром a получился малый звёздчатый додекаэдр (рис. 134, б)?

6. Какие рёбра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням икосаэдра с ребром a получился большой звёздчатый додекаэдр (рис. 136)?

7. Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при удалении их из граней икосаэдра с ребром a получился большой додекаэдр?

8. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звёздчатых многогранников.

§ 29*. Кристаллы — природные многогранники

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Кристаллы поваренной соли имеют форму куба, **кристаллы льда** и **горного хрусталя (кварца)** напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 141).

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

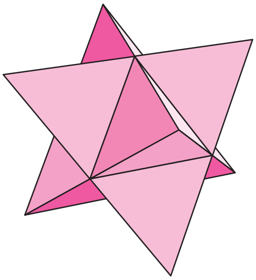


Рис. 140

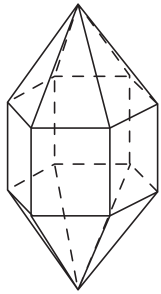


Рис. 141

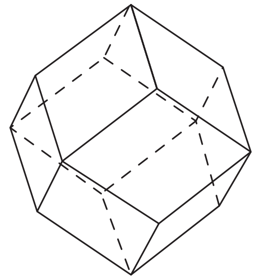


Рис. 142

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде кубооктаэдра.

Кристалл граната имеет форму **ромбододекаэдра** (иногда его называют **ромбоидальный** или **ромбический додекаэдр**) — двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов (рис. 142).

Для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат — один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, именно гранат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в эпоху неолита на территории современных Чехии и Словакии, где и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т. е. многогранник-ромбододекаэдр, был известен с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе с древнегреческого языка означало «красная краска». При этом название связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н. э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в Египте в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н. э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная отделка золотых венков, диадем, сплетённых из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например так называемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения камнями, особые ритуалы и заклинания, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в первом месяце года.

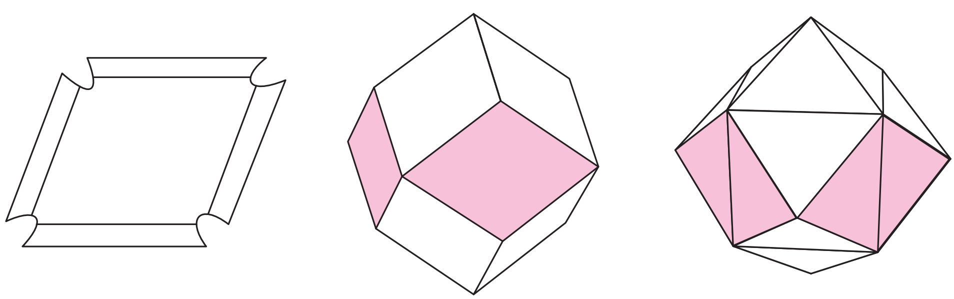
С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжёлые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчёркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчёркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же приём использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П. П. Бажовым в сборнике «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности о месторождениях граната на Урале.

Упражнения

1. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Рёбра ромба возьмите равными 6 см, острый угол приблизительно равен 70°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 143, а). Модель лучше сделать двуцветной, как показано на рисунке 143, б.



а) б) в)

Рис. 143

2. Возьмём два одинаковых куба. Разобьём один из них на шесть одинаковых четырёхугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго равного куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба (рис. 143, в). Покажите, что образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

3. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

4. Найдите меньшую диагональ ромба со стороной 6 см, являющегося гранью ромбододекаэдра.

5. Используя модель ромбододекаэдра:
   1. Подсчитайте количество его граней, рёбер и вершин.
   2. Определите, имеются ли пары параллельных граней. Сколько таких пар?
   3. Подсчитайте, сколько трёхгранных и четырёхгранных углов.
   4. Определите величину двугранного угла ромбододекаэдра.
   5. Найдите углы между несмежными гранями четырёхгранных углов ромбододекаэдра.

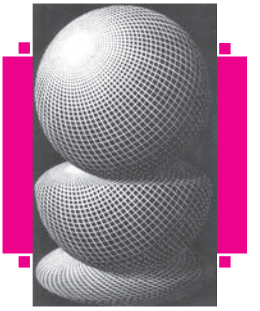
6. Можно ли равными ромбододекаэдрами заполнить всё пространство, т. е. составить пространственный паркет?

7. Из каких одноимённых правильных многогранников можно составить пространственный паркет?

8. Вершинами какого многогранника являются центры граней ромбододекаэдра?

Глава V

КРУГЛЫЕ ТЕЛА



§ 30. Цилиндр, конус

Пусть в пространстве заданы две параллельные плоскости α и α'. F — круг в одной из этих плоскостей, например α (рис. 144).

Рассмотрим ортогональное проектирование на плоскость α'. Проекцией круга F будет круг F'.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их ортогональными проекциями, называется **прямым цилиндром** или просто **цилиндром.**

Круги F и F' называются **основаниями** цилиндра.

Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой цилиндра**.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки окружности одного основания цилиндра с их ортогональными проекциями, называется **боковой поверхностью** цилиндра. Сами отрезки называются **образующими** цилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется **осью** этого цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется **осевым сечением** (рис. 145).

В случае если вместо ортогонального проектирования взять параллельное проектирование в направлении наклонной к плоскости α', то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их параллельными проекциями, называется **наклонным цилиндром** (рис. 146).

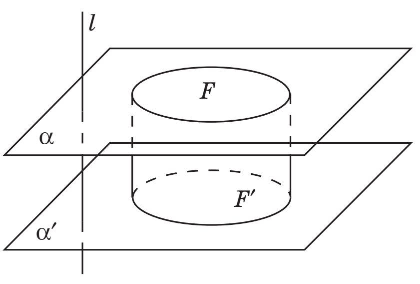


Рис. 144

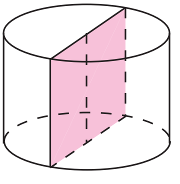


Рис. 145

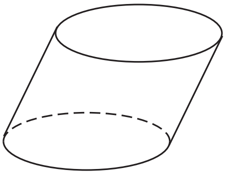


Рис. 146

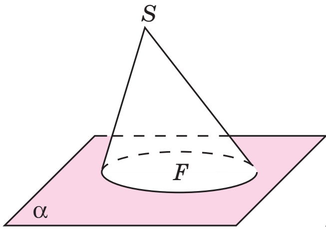


Рис. 147

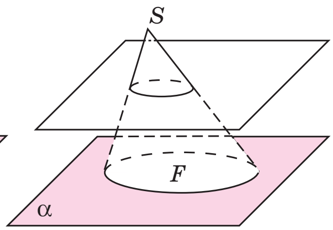


Рис. 148

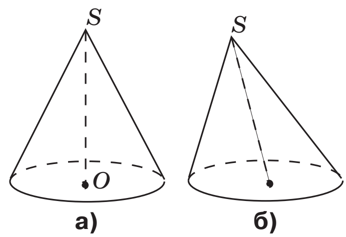


Рис. 149

Обычно цилиндр изображается в ортогональной проекции.

Пусть теперь в пространстве задана плоскость α и точка S, ей не принадлежащая. F — круг в плоскости α (рис. 147).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F, называется **конусом**.

Круг F называется **основанием** конуса, а точка S — **вершиной** конуса.

Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания называется **высотой** конуса.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину конуса с точками окружности его основания, называется **боковой поверхностью** конуса. Сами отрезки называются **образующими** конуса.

Если конус пересечён плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённым конусом** (рис. 148).

Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также **основанием** усечённого конуса.

Высотой усечённого конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В случае если отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, то конус называется **прямым** (рис. 149, а). В противном случае он называется **наклонным** (рис. 149, б).

Прямые конусы будем называть просто **конусами**.

Прямая, проходящая через вершину и центр основания конуса, называется **осью** этого конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым сечением** (рис. 150).

Обычно конус и усечённый конус изображаются в ортогональной проекции.

Пример 1. Высота цилиндра равна 8 дм, радиус основания — 5 дм. Цилиндр пересечён плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от этого сечения до оси.

Решение. Сечение $ABCD$ — квадрат (рис. 151), $AD = AB = 8$ дм, $AO = 5$ дм, OO_1 — ось цилиндра, OH, где H — середина хорды AB, является

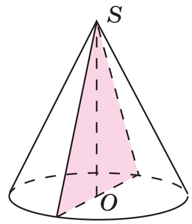


Рис. 150

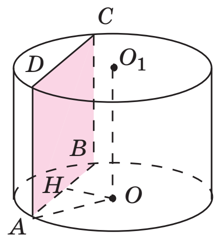


Рис. 151

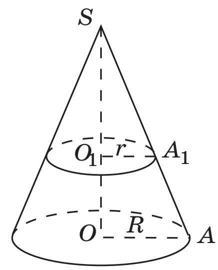


Рис. 152

искомым расстоянием. Из прямоугольного треугольника AOH найдём $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

П р и м е р 2. Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

Р е ш е н и е. Пусть высота конуса $SO = h$ (рис. 152), $SO_1 = x$. Треугольник SO_1A_1 подобен треугольнику SOA: $\frac{x}{h} = \frac{r}{R}$, где $r = O_1A_1$ и $R = OA$, но $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как по условию $\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$. Таким образом, $x = h\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

○ **1.** Сколько образующих имеет цилиндр?

○ **2.** Что можно принять в цилиндре за его высоту?

○ **3.** Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?

○ **4.** Какой фигурой является осевое сечение цилиндра?

○ **5.** Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?

○ **6.** Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить: а) прямоугольник; б) равнобедренный треугольник; в) круг?

○ **7.** Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?

○ **8.** Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

○ **9.** Какой фигурой является осевое сечение конуса?

○ **10.** Сколько образующих имеет конус?

○ **11.** Может ли осевым сечением конуса быть: а) прямоугольник; б) равносторонний треугольник?

○ **12.** Может ли в сечении конуса плоскостью получиться равнобедренный треугольник, отличный от осевого сечения?

13. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
14. Радиус основания цилиндра равен r, диагональ осевого сечения — d. Найдите площадь осевого сечения.
15. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна Q. Найдите радиус основания цилиндра.
16. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Чему равна площадь основания цилиндра?
17. Радиус основания цилиндра равен 1, высота 20, площадь сечения, параллельного оси, равна 20 кв. ед. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?
18. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна Q. Определите площадь осевого сечения.
19. Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудалённых от: а) образующих; б) оснований.
*20. Два цилиндра имеют две общие образующие. Какая фигура получится при пересечении этих цилиндров плоскостью, перпендикулярной их осям?
21. Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
22. Радиус основания конуса равен 1 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.
23. Высота конуса равна 8 м, радиус основания — 6 м. Найдите образующую конуса.
24. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.
25. Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
26. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь основания конуса.
27. Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60°. Найдите площадь осевого сечения.
*28. Радиус основания не превосходит высоты конуса. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет: а) наибольший периметр; б) наибольшую площадь?

§ 31. Фигуры вращения

Важный класс фигур в пространстве помимо многогранников образуют фигуры вращения.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки.

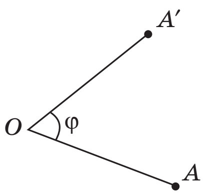


Рис. 153

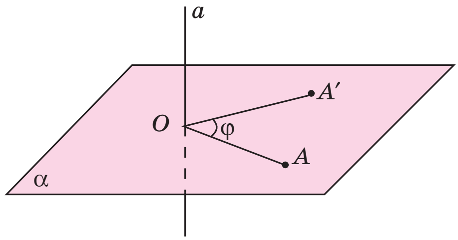


Рис. 154

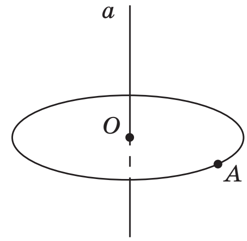


Рис. 155

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 153).

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 154). Через точку A проведём плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения (a и α) обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ, называется **поворотом** или **вращением**. Прямая a при этом называется **осью вращения**.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a. Фигура Φ при этом называется **фигурой вращения**.

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 155) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

Сфера получается вращением окружности вокруг её диаметра. Аналогично, шар получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра (рис. 156).

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 157).

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 158, а).

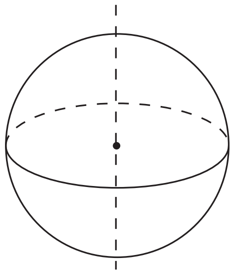


Рис. 156

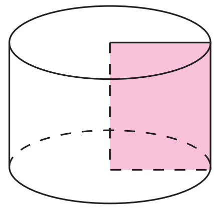
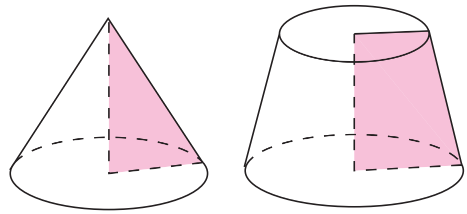


Рис. 157



а) **б)**

Рис. 158

Усёченный конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу (рис. 158, б).

Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек (рис. 159, а), то получится поверхность, называемая **тором**. Она по форме напоминает баранку или бублик (рис. 159, б).

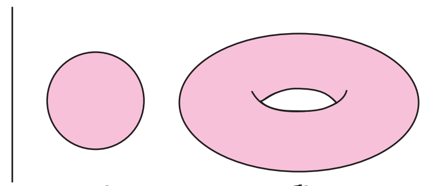
При вращении эллипса вокруг его оси (рис. 160, а) получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения** (рис. 160, б).

При вращении параболы вокруг её оси (рис. 161, а) получается поверхность, называемая **параболоидом вращения** (рис. 161, б).

При вращении гиперболы вокруг её оси (рис. 162, а) получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения** (рис. 162, б).

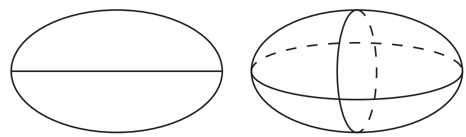
Выясним, какие фигуры могут получаться при вращении прямой.

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая **цилиндрической поверхностью** (рис. 163, а). Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая **конической поверхностью** (рис. 163, б).



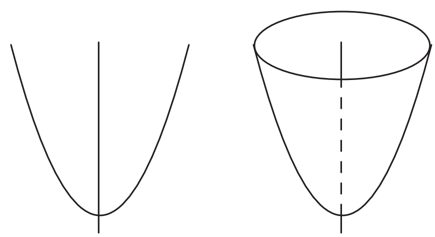
а) **б)**

Рис. 159



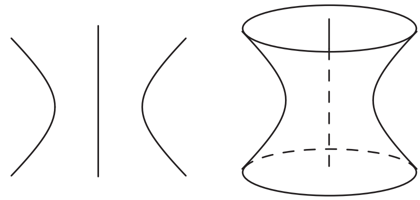
а) **б)**

Рис. 160



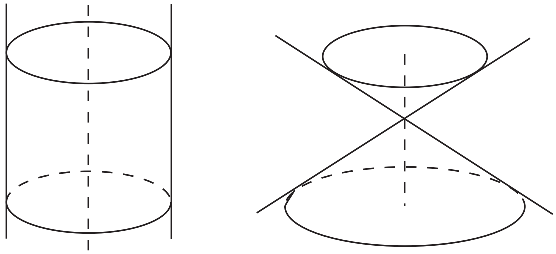
а) **б)**

Рис. 161



а) **б)**

Рис. 162



а) б)

Рис. 163

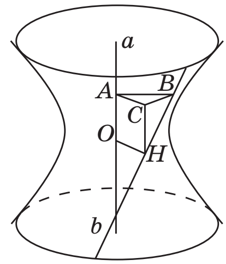


Рис. 164

Теорема*. При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперболоид вращения.

Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, OH — их общий перпендикуляр (рис. 164). Длина d отрезка OH будет расстоянием между прямыми a и b. Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b. Поэтому при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H. Рассмотрим произвольную точку B на прямой b, отличную от H, и опустим из неё перпендикуляр BA на прямую a. При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB. Выразим этот радиус через d. Для этого через точку H проведём прямую, параллельную a, и через точку A — прямую, параллельную OH. Точку пересечения этих прямых обозначим C. Пусть расстояние AB равно x, расстояние OA равно y и угол BHC равен α. Треугольник ABC прямоугольный, катет AC равен d, катет BC равен $y \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому выполняется равенство

$$x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Перенеся слагаемое, содержащее y, в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d_2, получим уравнение

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1,$$

которое представляет собой уравнение гиперболы. Таким образом, искомая поверхность получается вращением гиперболы, т. е. является гиперболоидом вращения. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует интересная особенность гиперболоидов вращения. Несмотря на искривлённость их поверхностей, все они состоят из прямолинейных отрезков. Поэтому форма гиперболоида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская радиобашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почётного академика В. Г. Шухова (1853—1939),

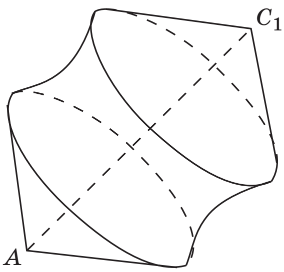
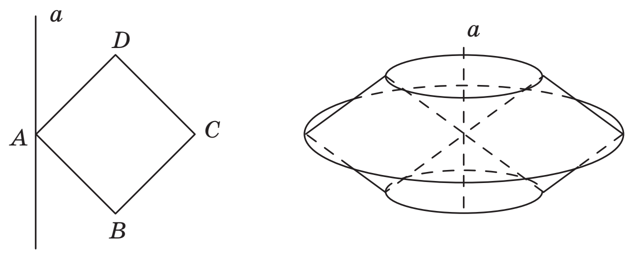


Рис. 165



а) б)

Рис. 166

составлена из частей гиперболоидов вращения. Её особенностью является то, что она в действительности состоит из прямолинейных конструкций — металлических стержней.

Заметим, что поверхность фигуры, получающейся при вращении многогранника, определяется вращением некоторых его рёбер. При этом если ребро параллельно оси, то при вращении оно даёт боковую поверхность цилиндра. Если ребро не параллельно оси, но лежит с ней в одной плоскости, то при вращении оно даёт часть конической поверхности. А именно: а) если ребро не пересекает ось, то получается боковая поверхность усечённого конуса; б) если одна вершина ребра принадлежит оси, то получается боковая поверхность конуса; в) если ребро пересекает ось, то получается поверхность, состоящая из двух боковых поверхностей конусов с общей вершиной. Если же ребро многогранника скрещивается с осью вращения, то получается поверхность, являющаяся частью гиперболоида вращения.

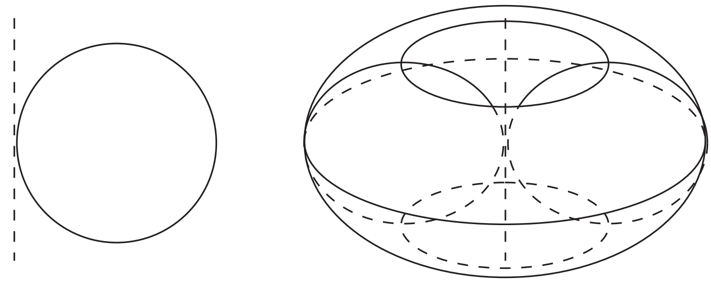
Таким образом, поверхность вращения многогранника может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усечённого конуса и частей поверхностей гиперболоидов вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

Выясним, например, какая фигура получается при вращении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг диагонали AC_1.

Рёбра этого куба, выходящие из вершины A и вершины C_1, при вращении дадут два конуса с этими вершинами. Поверхность вращения, заключённая между этими конусами, получается при вращении рёбер куба, скрещивающихся с диагональю AC_1. Следовательно, она является частью гиперболоида вращения и вся поверхность вращения выглядит так, как показано на рисунке 165.

Пример 1. Нарисовать фигуру, которая получается при вращении квадрата $ABCD$ вокруг прямой a, проходящей через вершину A и перпендикулярной диагонали AC (рис. 166, а).

Решение представлено на рисунке 166, б.



а) б)

Рис. 167

Пример 2. Нарисовать фигуру, которая получается при вращении круга вокруг касательной (рис. 167, а).

Решение представлено на рисунке 167, б.

Упражнения

○ **1.** Какая фигура получается при вращении отрезка OA вокруг прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной OA?

○ **2.** Назовите прямые, вращением вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

○ **3.** Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить цилиндр.

○ **4.** Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг высоты, опущенной на основание этого треугольника?

○ **5.** Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить: а) конус; б) усечённый конус.

○ **6.** Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг диаметра?

○ **7.** Какая фигура получится при вращении правильной n-угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры её оснований?

○ **8.** Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей: а) центры противоположных граней; б) середины противоположных рёбер?

○ **9.** Какая фигура получается при вращении правильной пирамиды вокруг её высоты?

○ **10.** Какая фигура получается при вращении пирамиды вокруг её высоты?

***11.** Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся рёбер?

***12.** Найдите фигуру, которая получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.

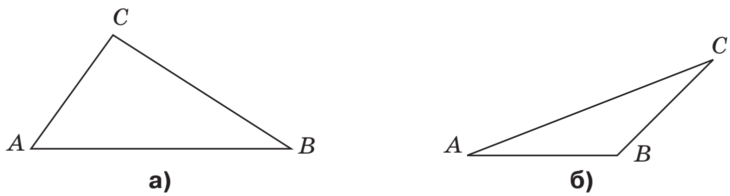


Рис. 168

13. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC вокруг стороны AB (рис. 168, а, б). Как эту фигуру можно получить из конусов?

14. Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника. Как эту фигуру можно получить из конусов?

15. Нарисуйте фигуры, полученные вращением круга вокруг хорды, не являющейся диаметром круга.

16. Кривая задана уравнением $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Нарисуйте поверхность, которая получается при вращении этой кривой вокруг оси Oy.

17. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 4$, вокруг: а) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б) биссектрисы второго и четвёртого координатных углов.

18. Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна $3\sqrt{41}$ см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.

19. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания 5 см.

20. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, вокруг оси Oy.

***21.** Найдите фигуру, которая получится при вращении икосаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью икосаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.

***22.** Найдите фигуру, которая получится при вращении додекаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью додекаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных рёбер.

***23.** Докажите, что если пространственная фигура Φ получается вращением пространственной фигуры F, то её можно получить вращением плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью вращения.

***24.** Точка, находящаяся на боковой поверхности цилиндра, равномерно вращается вокруг оси цилиндра и одновременно равномерно движется в направлении образующей. Нарисуйте траекторию движения точки (винтовая линия).

§ 32. Взаимное расположение сферы и плоскости

По аналогии с понятием касательной прямой к окружности на плоскости определим понятие касательной плоскости к сфере в пространстве.

Определение. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью**.

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Пусть в пространстве заданы сфера с центром в точке O и радиусом R и плоскость α.

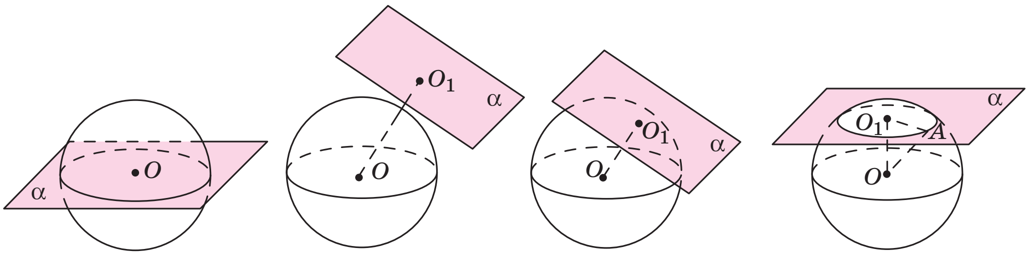
Если эта плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от точки O на расстояние R, т. е. окружность радиуса R (рис. 169, а).

Эта окружность называется **большой окружностью**. Соответствующий круг называется **большим кругом**.

Если плоскость не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1. При этом возможны следующие случаи:

1. Длина этого перпендикуляра больше R. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно больше R. Следовательно, сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 169, б).
2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1, т. е. α является касательной плоскостью (рис. 169, в).
3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. Докажем, что в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 169, г).

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению сферы и плоскости α, из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит сфере.



а) б) в) г)

Рис. 169

Определение. Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной прямой**.

Для касательных прямых к сфере справедливы свойства, аналогичные свойствам касательных к окружности. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема. Все отрезки касательных, проведённых из одной точки к данной сфере, равны между собой.

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведённых из точки A (рис. 170). Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведённых к окружности, имеем $AB = AC$. ■

Пример 1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Найти отношение площади полученного сечения к площади большого круга.

Решение. Пусть O, O_1 — центры соответственно шара и данного сечения (рис. 171), точка A принадлежит окружности сечения, R — радиус

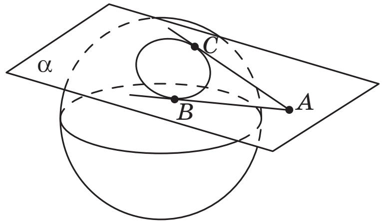


Рис. 170

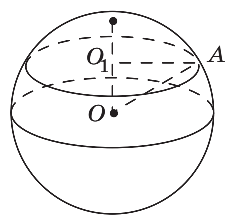


Рис. 171

шара. Тогда по условию $OO_1 = \frac{R}{2}$ и $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Площадь большого круга равна πR^2, сечения — $\frac{3}{4}\pi R^2$. Таким образом, искомое отношение равно $\frac{3}{4}$.

Пример 2. Доказать, что касательная прямая к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Решение. Через касательную и центр сферы проведём плоскость. Она пересечёт сферу по большой окружности. Касательная к сфере будет касательной и к большой окружности. По свойству касательной к окружности она будет перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Пример 3. Найти геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через заданную точку, принадлежащую сфере.

Решение. По доказанному в примере 2 все эти прямые будут перпендикулярны радиусу, проведённому в точку касания, и все они будут лежать в плоскости, проходящей через данную точку касания и перпендикулярную радиусу сферы, проведённому в точку касания.

Упражнения

° **1.** Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую ей?

° **2.** Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?

° **3.** Верно ли, что через две точки сферы проходит один большой круг?

° **4.** При каком условии сечения сферы плоскостью: а) равны; б) одно больше другого?

° **5.** Какое сечение шара плоскостью имеет наибольшую площадь?

° **6.** Какой фигурой является пересечение двух больших кругов шара?

° **7.** Сколько общих точек может иметь сфера и: а) прямая; б) плоскость; в) другая сфера?

° **8.** Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

° **9.** Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

° **10.** Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

° **11.** Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

*__12.__ Что можно сказать о всех общих касательных прямых, проведённых к двум данным сферам: а) разных радиусов; б) одного радиуса?

13. Шар радиуса 5 см пересечён плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Найдите радиус круга, получившегося в сечении.
14. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении?
15. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Найдите площадь сечения.
16. Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.
17. Шар пересечён плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.
18. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, принадлежащую сфере; в) через точку, лежащую вне сферы?
19. Можно ли провести общую касательную плоскость к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?
20. Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух: а) параллельных плоскостей; б) пересекающихся плоскостей.
21. Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?
22. Сколько можно провести прямых, касающихся сферы в одной и той же точке?
23. Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку: а) на сфере; б) вне сферы?
24. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса R, которые касаются данной: а) прямой; б) плоскости; в) сферы.
25. Можно ли к двум сферам провести общую касательную прямую?
26. Докажите, что касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

*27. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величиной φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.

§ 33*. Многогранники, вписанные в сферу

Эта тема аналогична соответствующей теме курса планиметрии, где, в частности, показывалось, что окружности можно описать около каждого треугольника и около каждого правильного многоугольника.

Аналогом окружности в пространстве является сфера. Аналогом многоугольника является многогранник. При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, аналогом правильных многоугольников — правильные многогранники.

Определение. Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины принадлежат этой сфере. Сама сфера при этом называется **описанной около многогранника**.

Теорема. Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу, и притом только одну.

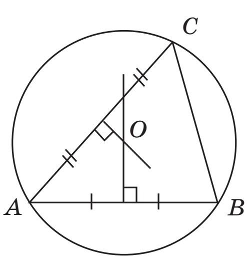
Доказательство. Обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего находили геометрическое место точек, равноудалённых от двух вершин треугольника, например A и B (рис. 172, а).

Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведённый к отрезку AB. Затем находили геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и C. Это серединный перпендикуляр к отрезку AC. Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности.

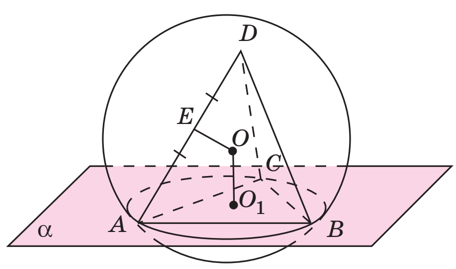
Рассмотрим теперь пространственную ситуацию и попробуем сделать аналогичные построения.

Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 172, б). Точки A, B, C определяют плоскость α. Геометрическим местом точек, равноудалённых от трёх точек A, B, C, является прямая a, перпендикулярная плоскости α и проходящая через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности (см. задачу 27 из § 20). Геометрическим местом точек, равноудалённых от точек A, D, является плоскость, назовём её β, перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину — точку E (см. задачу 26 из § 20).

Плоскость β и прямая a пересекаются в точке O, которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $ABCD$ сферы. Действительно, в силу построения точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $ABCD$. Причём такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку. ■



а)



б)

Рис. 172

Выясним, в каком случае около прямой призмы можно описать сферу.

Теорема. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.

Доказательство. Если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере и, следовательно, окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания (рис. 173). Обратно, пусть около основания прямой призмы описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r. Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и тем же радиусом. Пусть $O_1O_2 = d$, O — середина отрезка O_1O_2. Тогда сфера с центром O и радиусом $R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой. ■

Пример 1. На рисунке 174, а изображена пирамида $ABCD$, у которой углы ADB, ADC и BDC прямые. Найти и нарисовать центр сферы, описанной около данной пирамиды.

Решение. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника BDC, является середина гипотенузы BC, назовём её E. Проведём $EO \parallel AD$, $EO = \frac{1}{2}AD$, точка O — центр искомой сферы (рис. 174, б). Действительно, EO — перпендикуляр к плоскости треугольника BDC, проходящий через центр окружности, описанной около него. Значит, любая точка прямой EO, в том числе и O, одинаково удалена от точек B, C и D. Далее, $OEDF$, где F — середина AD, прямоугольник, по построению OF — серединный перпендикуляр к AD. Следовательно, точка O одинаково удалена от точек D и A. Таким образом, O одинаково удалена от всех вершин пирамиды и является центром сферы, описанной около пирамиды.

Пример 2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 м, высота тоже равна 4 м. Найти радиус описанной сферы.

Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 175), SH — её высота. Все точки SH одинаково удалены от вершин A, B, C, D. Центр

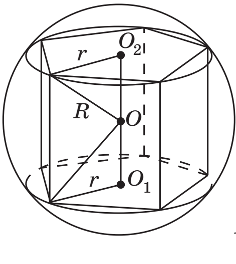


Рис. 173

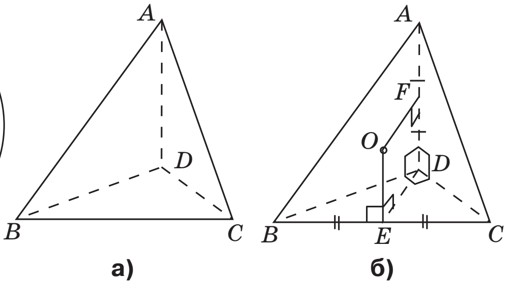


Рис. 174

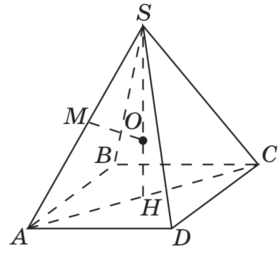


Рис. 175

искомой сферы, точка O, будет находиться на пересечении серединного перпендикуляра бокового ребра, например SA ($SM = MA$), и высоты SH. Тогда O будет одинаково удалена от всех вершин данной пирамиды. Найдём радиус описанной сферы. Прямоугольные треугольники SAH и SOM подобны (по углам). Тогда $SA : SO = SH : SM$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6}$ (м). $SO = \dfrac{SA \cdot SM}{SH} = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4} = 3$ (м). Итак, радиус описанной сферы равен 3 м.

Упражнения

1. Каким условиям должна удовлетворять прямая призма, чтобы около неё можно было описать сферу?

2. При каких условиях можно описать сферу около прямой призмы, в основании которой лежит трапеция?

3. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?

4. Можно ли описать сферу около: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм; г) параллелепипеда, одной из граней которого является ромб?

5. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

6. В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли эту призму вписать в сферу?

7. Может ли центр сферы, описанной около треугольной пирамиды, находиться вне этой пирамиды?

8. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

9. Каким свойством должен обладать многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около неё можно было описать сферу?

10. Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы?

11. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находиться: а) внутри призмы; б) на одной из боковых граней призмы; в) вне призмы?

12. Можно ли описать сферу около пирамиды, в основании которой лежит: а) прямоугольник; б) ромб?

13. Ребро куба равно a. Найдите радиус сферы, описанной около него.

14. Около прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите радиус сферы.

15. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых рёбер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

16. На рисунке 176 изображена пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен $90°$. Укажите на чертеже точку O — центр сферы, описанной около пирамиды.

17. На рисунке 177 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой. $AC = CB = CD = DB = AD = a$. Найдите её высоту и центр сферы, описанной около неё.

18. На рисунке 178 показана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AC = BC$, ребро DC перпендикулярно плоскости ABC и угол ACB равен $120°$. Нарисуйте центр сферы, описанной около пирамиды.

19. На рисунке 179 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDA прямой. Покажите, что точка O — центр сферы, описанной около пирамиды.

20. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найдите радиус описанной сферы.

***21.** Докажите, что около любой правильной усечённой пирамиды можно описать сферу.

***22.** Докажите, что около любого правильного многогранника можно описать сферу.

***23.** Ребро тетраэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

***24.** Ребро октаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

***25.** Нарисуйте октаэдр, вписанный в сферу.
Указание. Сначала изобразите сферу с выделенным экватором и полюсами. Поместите две вершины октаэдра в полюсах сферы, а остальные вершины будут принадлежать экватору.

***26.** Нарисуйте прямоугольный параллелепипед, вписанный в сферу.
Указание. Сначала изобразите сферу с выделенным экватором и полюсами. Затем нарисуйте две параллели, плоскости которых находятся на равном расстоянии от центра сферы. В одну из них впишите параллелограмм. Это будет изображение грани прямоугольного параллелепипеда. Из вершин параллелограмма опустите перпендикуляры на другую параллель и соедините их основания. Получите искомое изображение прямоугольного параллелепипеда, вписанного в сферу.

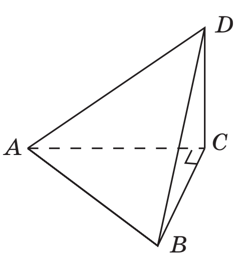


Рис. 176

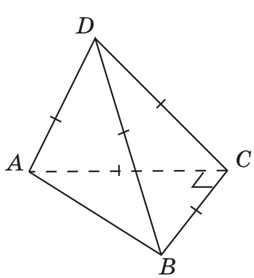


Рис. 177

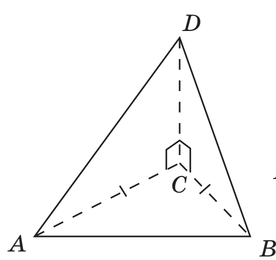


Рис. 178

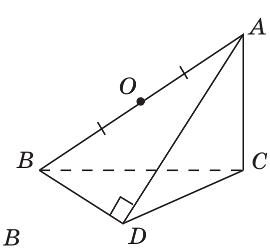


Рис. 179

*27. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду, вписанную в сферу.
Указание. Сначала изобразите сферу с выделенным экватором и полюсами. Затем нарисуйте какую-нибудь параллель. Поместите вершины основания пирамиды на этой параллели, а вершину пирамиды в северном полюсе сферы.

§ 34*. Многогранники, описанные около сферы

Здесь мы рассмотрим многогранники, описанные около сферы, но сначала напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. Сам многоугольник при этом называется описанным около окружности.

В планиметрии доказывалось, что в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Для нахождения центра O вписанной в треугольник ABC окружности нужно провести биссектрисы углов A и B. Их точка пересечения O будет одинаково удалена от всех сторон треугольника и, следовательно, будет искомым центром вписанной окружности (рис. 180). Перейдём теперь к пространственным фигурам.

Определение. Сфера называется **вписанной в многогранник**, если все грани этого многогранника касаются сферы. Сам многогранник при этом называется **описанным около сферы**.

Выясним сначала, какие сферы касаются одновременно двух граней двугранного угла.

Пусть дан двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с общей граничной прямой c. Через прямую c проведём полуплоскость γ, делящую этот двугранный угол пополам (рис. 181). Такая полуплоскость

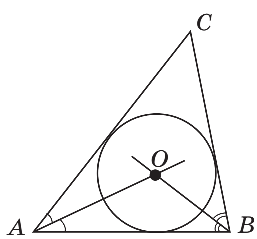


Рис. 180

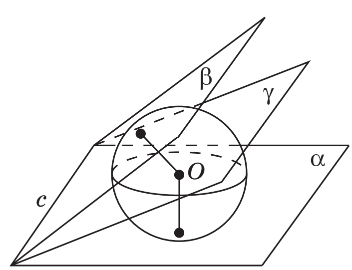


Рис. 181

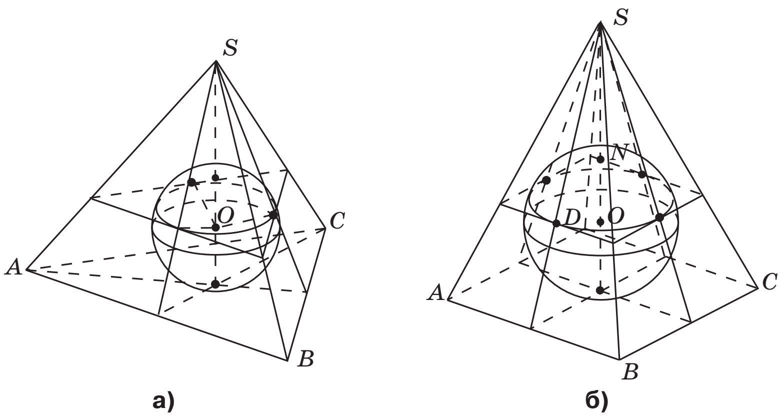


Рис. 182

называется **биссектральной**. Точки полуплоскости γ, не принадлежащие прямой c, обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы. Если это расстояние принять за радиус сферы R, то сфера с центром на биссектральной полуплоскости и радиусом R будет касаться плоскости α и плоскости β. Сама биссектральная полуплоскость без прямой c даёт геометрическое место центров сфер, лежащих внутри двугранного угла и касающихся плоскостей α и β.

Теорема. В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.

Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка, одинаково удалённая от всех граней треугольной пирамиды. Для её нахождения рассмотрим три биссектральные плоскости, образованные боковыми гранями пирамиды с основанием. Они пересекаются в одной точке (докажите это самостоятельно), которая будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы. ■

На рисунке 182, а изображена сфера, вписанная в правильный тетраэдр.

На рисунке 182, б изображена сфера, вписанная в правильную четырёхугольную пирамиду.

Выясним, в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке O и радиусом R (рис. 183, а). Тогда высота призмы равна $2R$. Через центр O проведём сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания,

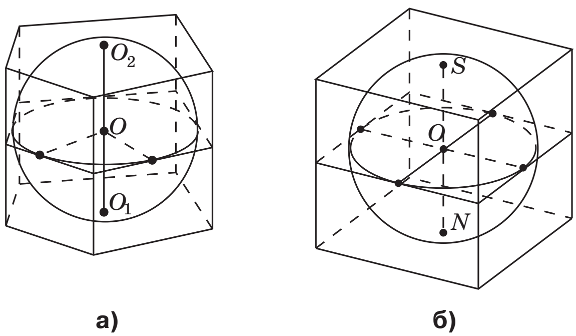


Рис. 183

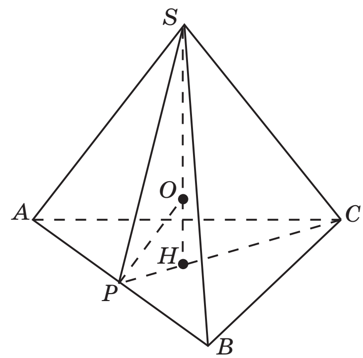


Рис. 184

описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность. Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиуса R, а высота призмы равна $2R$. Пусть O — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом R будет искомой сферой, вписанной в призму. ■

На рисунке 183, б изображена сфера, вписанная в куб.

Пример 1. Найти радиус сферы, вписанной в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c.

Решение. Диаметр данной сферы равен высоте призмы и диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, можно вычислить по формуле $r = \frac{2S}{P}$, где S — площадь треугольника, P — его периметр. В нашем случае стороны прямоугольного треугольника равны c, $c \cdot \sin\alpha$, $c \cdot \cos\alpha$; $P = c\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$; $S = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Таким образом, радиус искомой сферы равен

$$\frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Пример 2. Найти радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а угол между боковой гранью и основанием равен $60°$.

Решение. Проведём $SP \perp AB$ (рис. 184). SH — высота пирамиды, H — центр правильного треугольника ABC. Тогда центр O вписанной сферы является точкой пересечения биссектрисы угла SPH и высоты SH,

OH — радиус искомой сферы. $\angle SPH = 60°$, значит, $PH = \frac{\sqrt{3}}{3}h$. Прямоугольные треугольники SPH и POH подобны (по углам). Отсюда следует, что $SH : PH = PH : OH$, $OH = \frac{h}{3}$.

Упражнения

° **1.** Можно ли вписать сферу в куб? Что будет центром вписанной сферы?

° **2.** Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед?

° **3.** При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?

° **4.** В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли в эту призму вписать сферу?

° **5.** Приведите пример призмы, в которую нельзя вписать сферу.

6. Ребро куба равно 1. Найдите радиус вписанной сферы.

° **7.** В любую ли треугольную пирамиду можно вписать сферу?

° **8.** Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.

9. Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, высота которой равна h.

10. Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, в основании которой лежит ромб со стороной 4 см и углом 60°.

11. Докажите, что в любую правильную пирамиду можно вписать сферу.

12. Докажите, что в пирамиду, у которой двугранные углы при основании равны, всегда можно вписать сферу.

13. Сфера касается боковых рёбер правильной четырёхугольной пирамиды и её основания. Определите радиус сферы, если диагональным сечением пирамиды является равносторонний треугольник, сторона которого равна a.

14. По ребру a правильного тетраэдра найдите радиус вписанной сферы.

15. По ребру a октаэдра найдите радиус вписанной сферы.

16. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб со стороной a и острым углом α. Углы между боковыми гранями и основанием равны φ.

***17.** Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань SCB перпендикулярна плоскости основания; рёбра SC и SB равны a; плоские углы при вершине равны между собой и равны 60°. Определите радиус вписанной сферы.

***18.** При каком условии в правильную четырёхугольную усечённую пирамиду можно вписать сферу?

***19.** Докажите, что в любой правильный многогранник можно вписать сферу. Причём центры вписанной и описанной сфер совпадают.

***20.** Нарисуйте куб с вписанной в него сферой.
Указание. Сначала нарисуйте сферу с выделенными изображениями экватора и полюсов. Затем вокруг эллипса, изображающего экватор, опишите параллелограмм. Он будет изображать квадрат, описанный

около экватора. Переместите этот параллелограмм вверх и вниз на расстояние, равное расстоянию от изображения центра сферы до полюсов. Полученные параллелограммы будут изображать верхнюю и нижнюю грани куба. Соедините отрезками соответствующие вершины этих граней. В результате получите изображение куба. Невидимые рёбра куба изобразите пунктирами.

***21.** Нарисуйте правильную четырёхугольную пирамиду с вписанной в неё сферой.

Указание. Сначала нарисуйте сферу с выделенными изображениями экватора и полюсов. Затем нарисуйте параллель, расположенную выше экватора. Вокруг эллипса, изображающего эту параллель, опишите параллелограмм. Он будет изображать квадрат, описанный около параллели. В качестве вершины пирамиды возьмите какую-нибудь точку на оси сферы. Проведите через эту вершину и вершины параллелограмма лучи. Они будут изображать боковые рёбра пирамиды. Для изображения основания проведите две прямые через южный полюс сферы параллельно диагоналям параллелограмма. Их пересечения с изображением боковых рёбер пирамиды дадут вершины основания. В результате получите изображение пирамиды, описанной около сферы. Невидимые рёбра пирамиды изобразите пунктирами.

§ 35*. Сечения цилиндра плоскостью

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию. Если же плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

Рассмотрим связь сечений цилиндра плоскостью с тригонометрическими функциями. Возьмём прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нём оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам

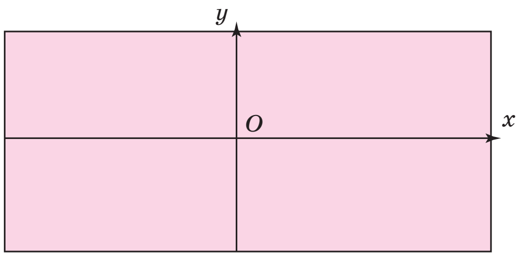


Рис. 185

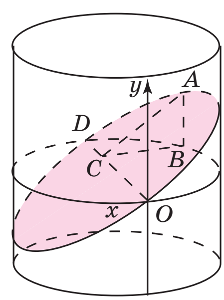


Рис. 186

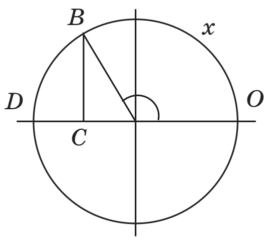


Рис. 187

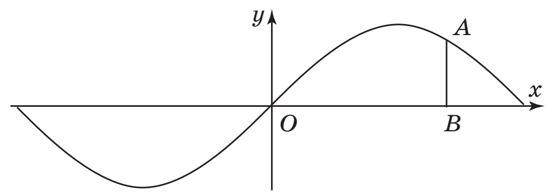


Рис. 188

(рис. 185). Затем свернём этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернётся в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 186). Через диаметр OD полученной окружности проведём сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45°. В этом случае сечением будет эллипс.

Развернём цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернётся в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 45°$. Следовательно, $AB = BC$. Заметим, что $BC = \sin x$, где x — длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку 187 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$ (рис. 188).

Упражнения

○ **1.** Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклонённом стакане?

2. Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

3. В основании цилиндра круг радиуса R. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

4. Докажите, что если сечение цилиндра, свёрнутого из бумаги, проводить не под углом 45°, а под углом φ, то уравнение соответствующей кривой будет иметь вид $y = k \cdot \sin x$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$.

5. Нарисуйте кривые, соответствующие углам: а) $\varphi = 30°$; б) $\varphi = 60°$.

6. Докажите, что если исходный прямоугольник свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произве-

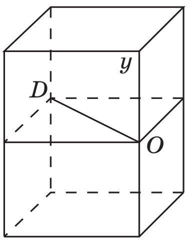


Рис. 189

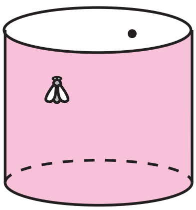


Рис. 190

сти с этим цилиндром аналогичные операции, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = a \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right)$.

7. Нарисуйте график функции:

а) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; б) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

8. Докажите, что если плоскость сечения проходит не через точку O, а через диаметр, образующий с OD (рис. 186) угол φ_0, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = \sin(x - \varphi_0)$.

9. Нарисуйте график функции:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

10. Какой угол φ_0 нужно взять, чтобы получить график функции $y = \cos x$?

***11.** Возьмём прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нём осями координат (рис. 185). Свернём этот лист в боковую поверхность правильной четырёхугольной призмы (рис. 189). Сторону основания призмы примем за 1. Через точки O и D проведём сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45°. Развернём лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая. Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

***12.** На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в 3 см от верхнего края виднеется капля мёда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха (рис. 190). Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли? Диаметр банки 12 см.

§ 36. Симметрия пространственных фигур

По словам известного немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), «симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д.

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрий. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

О п р е д е л е н и е. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно точки** O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O называется **центром симметрии** (рис. 191).

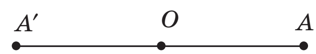


Рис. 191

Фигура Φ в пространстве называется **центрально-симметричной** относительно точки O, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 192). Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.

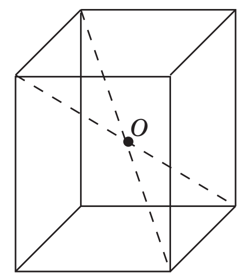


Рис. 192

О п р е д е л е н и е. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно прямой** a, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 193). Прямая a при этом называется **осью симметрии**.

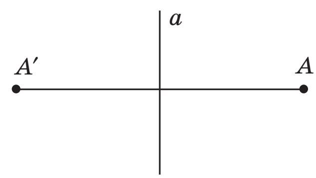


Рис. 193

Фигура Φ в пространстве называется **симметричной относительно оси** a, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней (рис. 194), прямой круговой цилиндр симметричен относительно своей оси и т. д.

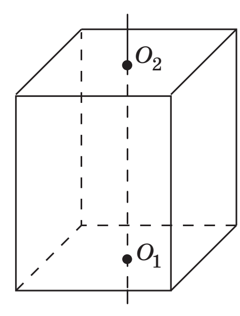


Рис. 194

О п р е д е л е н и е. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно плоскости** α, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна ему. Плоскость α при этом называется **плоскостью симметрии** (рис. 195).

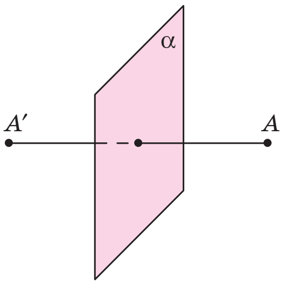


Рис. 195

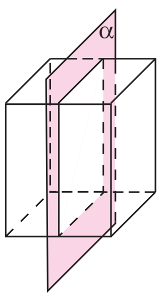


Рис. 196

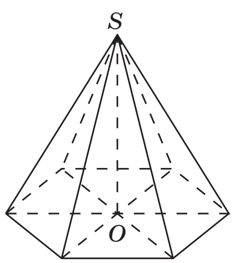


Рис. 197

Симметрия относительно плоскости называется также **зеркальной симметрией**.

Фигура Φ в пространстве называется **зеркально-симметричной** относительно плоскости α, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней (рис. 196). Цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось, и т. д.

Помимо осей симметрии, определённых выше, рассматриваются также оси симметрии n-го порядка, $n \geqslant 2$.

Определение*. Прямая a называется **осью симметрии n-го порядка** фигуры Φ, если при повороте фигуры Φ на угол $\frac{360^\circ}{n}$ вокруг прямой a фигура Φ совмещается сама с собой.

Например, в правильной n-угольной пирамиде прямая, проходящая через вершину и центр основания, является осью симметрии n-го порядка (рис. 197).

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Отметим, что из многогранников наиболее симметричными являются правильные многогранники.

Например, икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.
2. Шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противоположные вершины; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней; пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных рёбер икосаэдра.
3. Пятнадцать плоскостей симметрии, проходящих через пары противоположных рёбер икосаэдра.

Исторические сведения

Как отмечалось ранее, кристаллы являются природными многогранниками. Их свойства определяются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решётке. Внешние формы кристаллов являются следствием их внутренней симметрии.

Первые, ещё смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были чётко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные структуры в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Фёдоров (1853—1919). Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей Е. С. Фёдоров внёс немалый вклад. В 1890 году он математически строго вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Фёдоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь учёного были названы фёдоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью было доказано существование самой кристаллической решётки. Существование 230 фёдоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Фёдорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный “хаос” бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. Это открытие сродни открытию периодической таблицы Д. И. Менделеева. “Царство кристаллов” является незыблемым памятником и конечной вершиной классической фёдоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Пример 1. Для двух данных точек пространства найти прямую, относительно которой они симметричны. Сколько решений имеет задача?

Решение. Пусть даны две точки A и A' пространства. Проведём через них произвольную плоскость α и в ней через точку O — середину отрезка AA', проведём прямую $a \perp AA'$, a — искомая прямая. Задача имеет бесконечно много решений. Все искомые прямые проходят через точку O и лежат в плоскости, перпендикулярной AA'.

Пример 2. Найти элементы симметрии правильной треугольной призмы.

Решение. 1) Три оси симметрии, каждая из которых проходит через середину бокового ребра и центр противоположной грани. 2) Четыре плоскости симметрии, три из которых проходят через оси симметрии и перпендикулярны основаниям и одна проходит через середины боковых рёбер. 3) Одна ось симметрии 3-го порядка, она проходит через центры оснований.

Пример 3. Сколько у правильной n-угольной пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

Решение. а) Одна ось симметрии n-го порядка, проходящая через центр основания и вершину пирамиды; б) n плоскостей симметрии, проходящих через вершину пирамиды и оси симметрии основания.

Упражнения

○ **1.** Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.
○ **2.** Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?
○ **3.** Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.
○ **4.** Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
○ **5.** Сколько осей симметрии имеет шар?
○ **6.** Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
○ **7.** Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии, и наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.
* **8.** Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го порядков и т. д.
* **9.** Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?
10. Какими видами симметрии обладает куб?
11. Сколько у правильной шестиугольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?
***12.** Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии?
13. Для двух точек пространства найдите точку, относительно которой они центрально-симметричны.
14. Постройте прямую, зеркально-симметричную данной прямой относительно данной плоскости. Рассмотрите различные случаи.
15. Постройте плоскость, зеркально-симметричную данной плоскости относительно данной точки. Рассмотрите различные случаи.
16. Найдите элементы симметрии правильной четырёхугольной призмы.
17. Найдите элементы симметрии правильной 7-угольной пирамиды.

18. Сколько у правильной $(2n - 1)$-угольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

19. Каким видом симметрии обладает наклонная призма, в основании которой лежит правильный многоугольник с чётным числом сторон?

20. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

21. Какими видами симметрии обладает наклонный параллелепипед?

22. Имеет ли центр симметрии наклонная призма, основанием которой является правильный девятиугольник?

23. Найдите число осей и плоскостей симметрии правильной пирамиды, в основании которой лежит многоугольник с: а) чётным числом сторон; б) нечётным числом сторон.

24. Сколько у правильной n-угольной усечённой пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

25. Может ли неправильная пирамида иметь: а) ось симметрии; б) плоскости симметрии? Приведите примеры таких пирамид.

26. Существуют ли центрально-симметричные усечённые пирамиды?

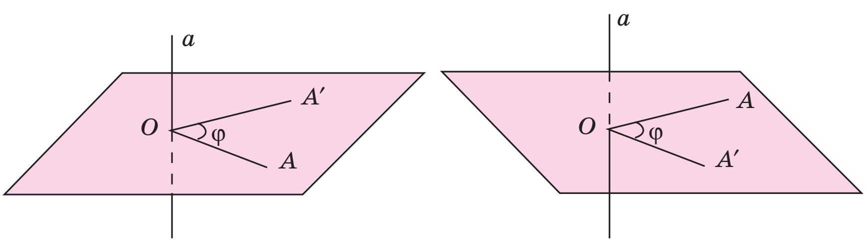
***27.** Докажите, что если две пересекающиеся перпендикулярные прямые в пространстве являются осями симметрии данной фигуры Φ, то и прямая, проходящая через точку пересечения и перпендикулярная этим прямым, также будет осью симметрии фигуры Φ.

***28.** Докажите, что фигура в пространстве не может иметь чётное (ненулевое) число осей симметрии.

§ 37*. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса

Пусть в пространстве заданы плоскость и поворот этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 198, а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако если смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 198, б).

Таким образом, направление поворота не является свойством, изначально присущим плоскости, и зависит от выбора стороны, с которой мы



а) б)

Рис. 198

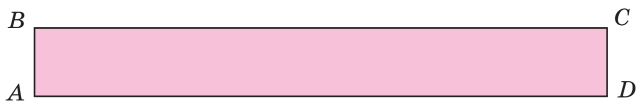
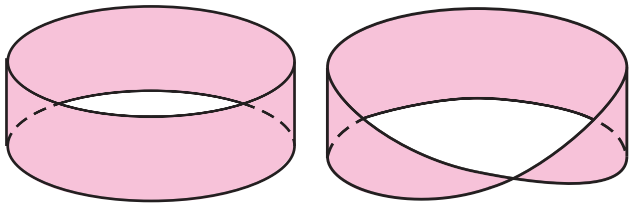


Рис. 199



а) б)

Рис. 200

смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется **ориентацией плоскости**.

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая **листом** или **лентой Мёбиуса**, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мёбиусом (1790—1868).

Изготовить модель листа Мёбиуса очень просто. Возьмём бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 199).

Если склеить противоположные стороны AB и CD, совместив точку A с точкой D, а точку B с точкой C, то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 200, а). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на $180°$ и соединить точку A с точкой C, точку B с точкой D (рис. 200, б), то получим лист Мёбиуса.

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств. Например, попытаемся ответить на вопрос: «Сколько краёв имеет лист Мёбиуса?» В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать её вдоль края. В результате мы придём в то же самое выбранное место.

Кроме этого, лист Мёбиуса имеет только одну сторону. До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера, тор, цилиндрическая и коническая поверхности. Убедиться в односторон-

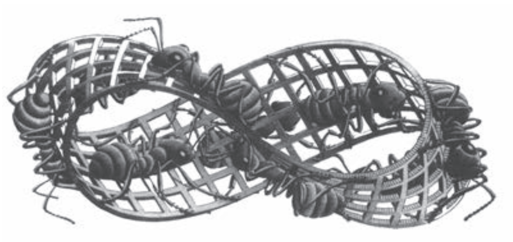


Рис. 201

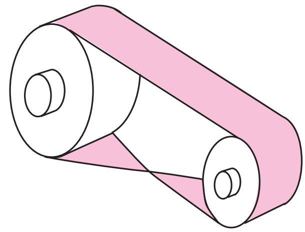


Рис. 202

ности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнём закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы проделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав закрашивание с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М. Эшера (рис. 201).

Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ремённых передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса (рис. 202), то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный. Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя её часть, как у обычной ремённой передачи.

Проделаем ещё один опыт. Проведём на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на бумаге в клеточку) и ответим на вопрос: «Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?» Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так: при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента, в чём легко убедиться опытным путём.

Упражнения

1. Сколько сторон имеет поверхность: а) пирамиды; б) цилиндра?

2. Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?

3. Является ли ориентируемой: а) сфера; б) боковая поверхность цилиндра; в) поверхность конуса?

4. Сколько сторон имеет тор (напомним, это поверхность, полученная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей эту окружность)?

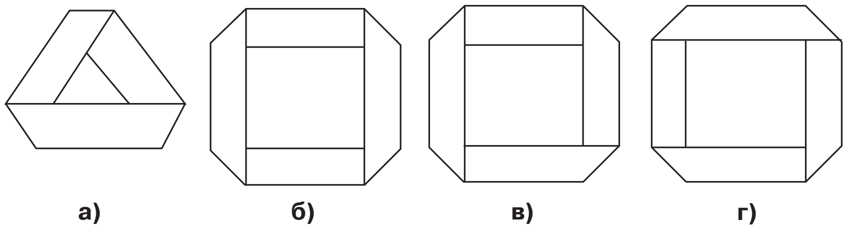


Рис. 203

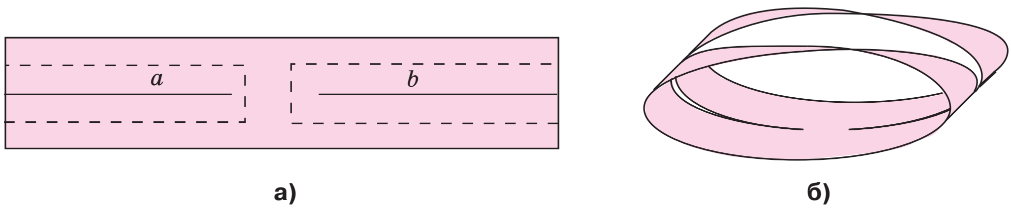
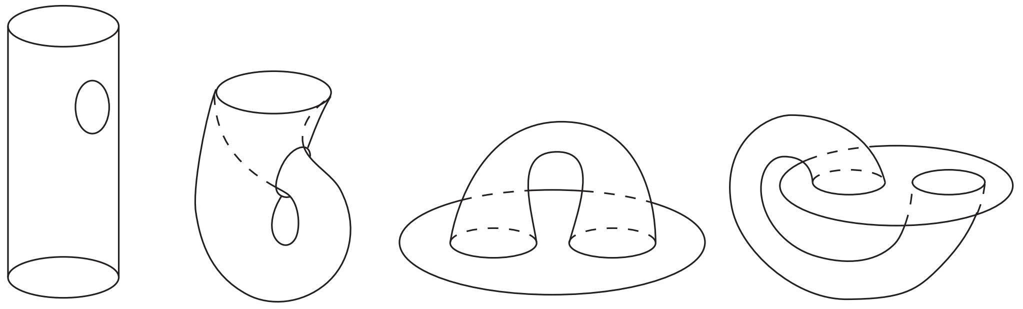


Рис. 204

5. Является ли ориентируемой поверхностью: а) дважды перекрученная лента; б) трижды перекрученная лента?
6. На рисунке 203 укажите изображения листа Мёбиуса.
7. Сколько сторон имеет поверхность, полученная при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?
8. Что получится, если дважды перекрученную ленту Мёбиуса разрезать по средней линии?
9. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?
10. Сделайте модель листа Мёбиуса.
11. Изобразите лист Мёбиуса.
12. Сделайте модель дважды перекрученной ленты Мёбиуса.
13. Лист Мёбиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b. Найдите площадь поверхности листа Мёбиуса.
14. Лист Мёбиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b склеиванием сторон длины a. Найдите длину края листа Мёбиуса.
15. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ склеиваются противоположные стороны AB и EF, CD и GH. Сколько сторон имеет получившаяся поверхность, если: а) оба склеивания производятся без перекручивания; б) одно склеивание производится с перекручиванием, а другое — без него; в) оба склеивания производятся с перекручиванием?
16. Возьмите полоску бумаги и сделайте два разреза a и b (рис. 204, а). Соедините между собой пары концов, как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображённая на рисунке 204, б, называемая **сиамским листом Мёбиуса**. Что получится, если разрезать её вдоль пунктирной линии (рис. 204, а)? Сколько будет частей, краёв и перекручиваний?



а) б) в) г)

Рис. 205

***17.** Отрезок AB, параллельный прямой a, вращается вокруг этой прямой и одновременно вращается вокруг своего центра в плоскости отрезка AB и прямой a. За время полного оборота вокруг прямой a отрезок совершает поворот на $180°$ вокруг своего центра. Какую фигуру в пространстве описывает этот отрезок? Какую фигуру в пространстве будет описывать этот отрезок, если за время полного оборота вокруг прямой a он совершит поворот на $360°$ вокруг своего центра?

***18.** Представим себе боковую поверхность цилиндра, сделанную из эластичного материала. Вырежем в ней круглое отверстие (рис. 205, а), проденем в него один конец цилиндра и склеим окружности оснований. Получившаяся поверхность изображена на рисунке 205, б. Она называется **бутылкой Клейна**. Сколько у неё сторон?

***19.** В круге вырезали два круглых отверстия и к их краям приклеили основания боковой поверхности цилиндра (рис. 205, в, г). Сколько сторон имеет образовавшаяся поверхность?

Глава VI

ОБЪЁМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

§ 38. Объём фигур в пространстве. Объём цилиндра

Проблема нахождения объёмов пространственных фигур с древних времён привлекала к себе внимание учёных. Вычислением объёмов простейших пространственных фигур занимались Демокрит, Евдокс (406—355 гг. до н. э.), Архимед. В средние века нахождением объёмов пространственных фигур занимались И. Кеплер, Б. Кавальери (1598—1647), П. Ферма (1601—1655) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII века в работах И. Ньютона (1643—1727) и Г. Лейбница (1646—1716) дало мощный метод вычисления объёмов произвольных пространственных фигур.

Рассмотрим понятие объёма, его свойства и вычисление объёмов основных пространственных фигур.

Объём — величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объёма принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объёма принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Объём фигуры показывает, сколько раз единица измерения объёма укладывается в данной фигуре. Он может выражаться натуральным, рациональным или даже иррациональным числом.

Ясно, что объём фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому на практике после этого числа указывают единицу измерения объёма. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объёмов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объём фигуры в пространстве является неотрицательным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объёмы.

3. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объём фигуры Φ равен сумме объёмов фигур Φ_1 и Φ_2, т. е.

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

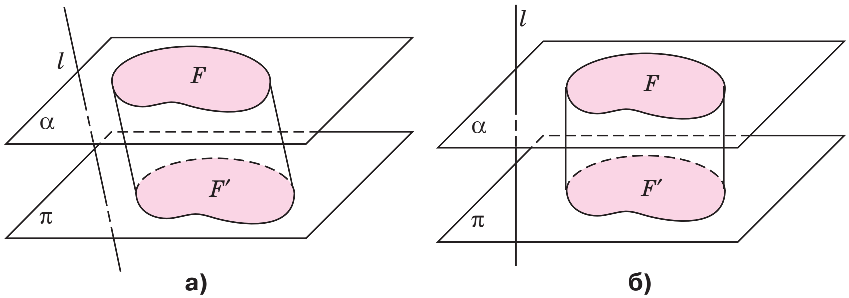


Рис. 206

Две фигуры, имеющие равные объёмы, называются **равновеликими**.

Для нахождения объёмов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью дадим общее определение цилиндра.

Пусть α и π — две параллельные плоскости, l — пересекающая эти плоскости прямая; F — фигура на одной из этих плоскостей, F' — её параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l (рис. 206, а). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **цилиндром**. Фигуры F и F' называются **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют **высотой** цилиндра.

Если вместо параллельной проекции берётся ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям α и π, то цилиндр называется **прямым** (рис. 206, б). В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

Заметим, что частным случаем цилиндра является призма.

Если основание F цилиндра является кругом, то цилиндр называется **круговым**.

Ранее мы рассматривали только круговые цилиндры и называли их просто цилиндрами.

Здесь мы выведем формулу для вычисления объёма прямого цилиндра, основанием которого является произвольная плоская фигура.

Теорема. Объём прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим прямой цилиндр с площадью основания S и высотой h. Выделим в нём слой высоты 1, являющийся прямым цилиндром с тем же основанием, что и данный цилиндр (рис. 207). Каждому единичному квадрату, лежащему в основании цилиндра, будет соответствовать единичный куб, содержащийся в слое. То, что площадь основания цилиндра равна S, означает, что единичный квадрат и его части укладываются в основании цилиндра S раз. Так как разбиению единичного квадрата на равные части соответствует

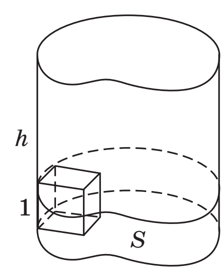


Рис. 207

разбиение единичного куба на равные части, то единичный куб и его части будут укладываться в слое S раз, т. е. объём выделенного слоя будет равен S. То, что высота цилиндра равна h, означает, что единичный отрезок и его части укладываются по высоте h раз. Так как разбиению единичного отрезка на равные части соответствует разбиение слоя на равные части, то выделенный слой и его части будут укладываться в цилиндре h раз.

Таким образом, единичный куб укладывается в слое S раз, и этот слой укладывается в цилиндре h раз. Следовательно, единичный куб будет укладываться в цилиндре $S \cdot h$ раз, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ■

Параллелепипед, призма и круговой цилиндр являются частными случаями цилиндра.

Следствие 1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c,}$$

где a, b, c — рёбра параллелепипеда.

Следствие 2. Объём прямой призмы равен произведению площади её основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота призмы.

Следствие 3. Объём прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h.}$$

Пример 1. Осевое сечение прямого кругового цилиндра — квадрат со стороной a. Найти объём цилиндра.

Решение. Высота данного цилиндра равна a, диаметр основания также равен a. Площадь основания равна $\frac{\pi a^2}{4}$. Таким образом, $V = \frac{\pi a^3}{4}$.

Пример 2. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найти объём параллелепипеда.

Решение. Найдём высоту данного параллелепипеда. Известно, что $h \cdot d_1 = 3$ м^2 и $h \cdot d_2 = 6$ м^2, где d_1 и d_2 — диагонали ромба, лежащего в основании данного параллелепипеда. Значит, $d_1 : d_2 = 1 : 2$ и $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 1$ м^2, т. е. $d_1 = 1$ м и $d_2 = 2$ м. Отсюда $h = 3$ м и $V = 3$ м^3.

П р и м е р 3. Через вершину A и ребро B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провели плоскость. Какая из частей призмы, на которые она разбивается плоскостью, имеет больший объём?

Р е ш е н и е. На рисунке 208 плоскость AB_1C_1 разбивает правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на пирамиду $AA_1B_1C_1$ и многогранник AB_1C_1CB, который, в свою очередь, можно разбить на две треугольные пирамиды B_1ABC и C_1ACB_1. Причём пирамиды $AA_1B_1C_1$ и B_1ABC равны (треугольник AB_1C_1 равен треугольнику B_1AC по сторонам). Значит, равны и их объёмы. Таким образом, объём многогранника AB_1C_1CB больше объёма пирамиды $AA_1B_1C_1$.

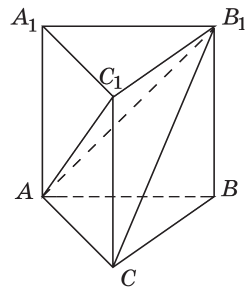


Рис. 208

Упражнения

1. Может ли объём фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулём?

2. Приведите примеры равновеликих, но не равных пространственных фигур.

3. Чему равен объём пространственного креста (рис. 209), если рёбра образующих его кубов равны единице?

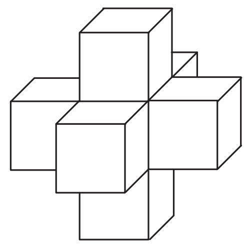


Рис. 209

4. Чему равен объём фигуры, изображённой на рисунке 210?

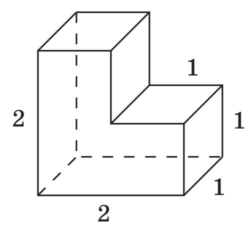


Рис. 210

5. Дан куб с ребром, равным 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см (рис. 211). Найдите объём оставшейся части.

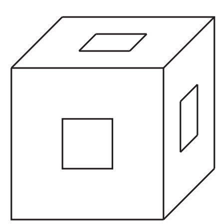


Рис. 211

6. Через два противоположных ребра куба провели плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём куба?

7. Является ли частным случаем цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) пирамида?

8. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

9. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объём данной призмы.

10. Найдите объём правильной четырёхугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота — 8 см.

°**11.** Как изменится объём прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причём каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

°**12.** Как относятся объёмы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : n?

13. Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объём.

14. Найдите высоту правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 20 см, а объём — 4800 см^3.

15. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объём призмы?

16. Найдите формулу объёма правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.

17. Объём правильной шестиугольной призмы равен V. Определите объём призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

18. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника со сторонами, равными 5 см и 3 см, вокруг неравных сторон. Как относятся объёмы цилиндров?

19. Найдите объём фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

20. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объём увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

21. В основании прямой призмы параллелограмм со сторонами 8 см и 5 см, образующими угол 60°. Меньшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол 30°. Определите объём этой призмы.

22. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объём цилиндра.

23. В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объём детали?

24. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?

***25.** Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объём части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

***26.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две равновеликие части.

***27.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину оси прямого кругового цилиндра, делит его на две равновеликие части.

***28.** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной, равной 1, а высота равна 0,5.

§ 39. Принцип Кавальери

Рассмотрим метод вычисления объёмов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 212), то объёмы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2 составленными из тонких слоёв одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 212). Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объёмы соответствующих слоёв. Следовательно, равны и объёмы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоёв.

Теорема. Объём наклонного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра так, чтобы их основания находились на одной плоскости (рис. 213). Тогда сечения данных цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F, и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери отсюда следует равенство объёмов цилиндров, и, значит, для объёма наклонного цилиндра имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ■

Следствие 1. Объём наклонной призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле

$$\boxed{V = S \cdot h.}$$

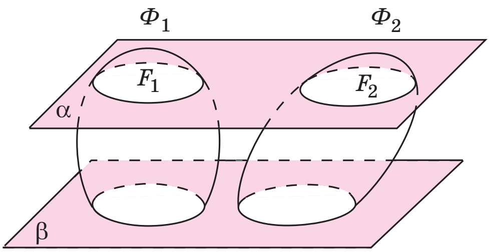


Рис. 212

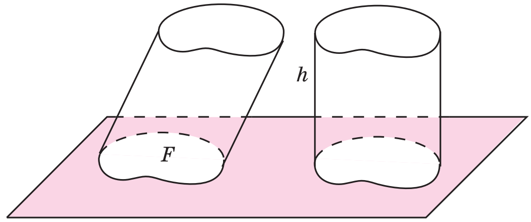


Рис. 213

Следствие 2. Объём наклонного кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h.}$$

Дадим общее определение конуса, позволяющее объединить в один класс рассмотренные ранее конусы и пирамиды.

Пусть F — фигура на плоскости π, S — точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **конусом** (рис. 214).

Фигура F называется **основанием** конуса, точка S — **вершиной** конуса, а отрезки — **образующими** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется **высотой** конуса.

В случае, если F является кругом, конус называется **круговым**. Если высота кругового конуса проходит через центр основания, то такой конус называется **прямым круговым**. Раньше мы рассматривали прямые круговые конусы и называли их просто конусами. Заметим, что в новом понимании частным случаем конуса является также пирамида.

Используя принцип Кавальери, докажем следующую теорему.

Теорема. Если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объёмы равны.

Доказательство. Пусть конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 215). Проведём плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от неё, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям конусов и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ и, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объёмы конусов равны. ■

П р и м е р 1. Найти объём наклонного цилиндра, радиус основания которого равен R, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом 45°.

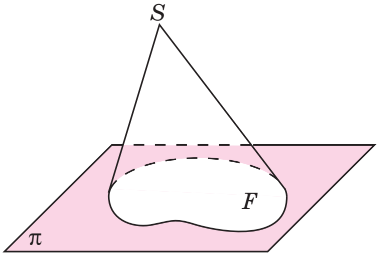


Рис. 214

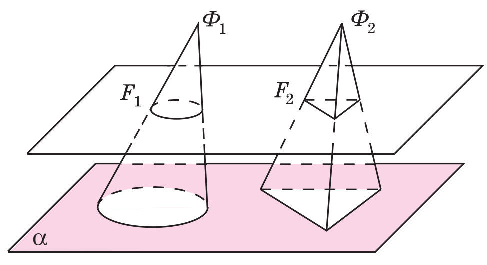


Рис. 215

Решение. Площадь основания цилиндра равна πR^2, а высота $h = b \times \times \sin 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $V = \frac{\pi R^2 b\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2. Основанием призмы является треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 3 см; боковое ребро равно 4 см и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найти ребро равновеликого куба.

Решение. В основании данной призмы лежит равнобедренный треугольник, его высота, опущенная на основание 2 см, равна $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ см, площадь треугольника равна $2\sqrt{2}$ см^2. Высота призмы равна $4 \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2}$ см. Следовательно, $V = 8$ см^3. Таким образом, $x^3 = 8$, где x — сторона искомого куба, $x = 2$ см.

Пример 3. Доказать, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объём имеет прямая призма.

Решение. Пусть у данных призм S — площадь основания, b — боковое ребро. Тогда объём прямой призмы будет равен $S \cdot b$, а наклонной — $S \cdot b \cdot \sin \varphi$, где φ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Поскольку $0 < \sin \varphi < 1$, имеем $S \cdot b > S \cdot b \cdot \sin \varphi$. Таким образом, из данных призм наибольший объём имеет прямая призма.

Упражнения

○ **1.** Верно ли, что две призмы, имеющие общее основание, равновелики?

○ **2.** Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

○ **3.** Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований наклонного кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

○ **4.** Основаниями наклонной призмы являются квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

○ **5.** Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объёмы?

○ **6.** Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания наклонного кругового конуса, делит его на равновеликие части?

○ **7.** Основанием пирамиды является квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

○ **8.** Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объёмы?

9. Найдите объём наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.

10. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними составляет 45°. Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объём параллелепипеда.

11. Найдите объём наклонного параллелепипеда, у которого площадь основания равна Q, а боковое ребро, равное b, наклонено к плоскости основания под углом φ.

12. Найдите объём наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

13. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол 60° и равно 2 м. Найдите объём параллелепипеда.

14. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна d. Найдите объём призмы.

***15.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей наклонного параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

***16.** Даны три параллелепипеда. Проведите плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объёма.

***17.** Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2 соответственно, причём площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объёмы фигур Φ_1 и Φ_2?

***18.** Докажите, что фигура Φ, полученная вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$, вокруг оси Oy, равновелика прямой призме, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными единице, высота которой равна π. Нарисуйте фигуру Φ и найдите её объём.

§40. Объём пирамиды

Первые упоминания о вычислении объёма пирамиды найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Любопытно, что они не вывели общей формулы для нахождения объёма пирамиды, а вычисляли объёмы конкретных пирамид. Так им удалось найти объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной единице измерения, и высотой, равной 0,5. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на 6 равных правильных четырёхугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 216). Все

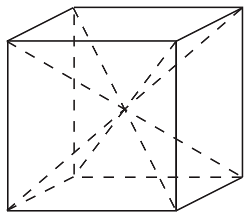


Рис. 216

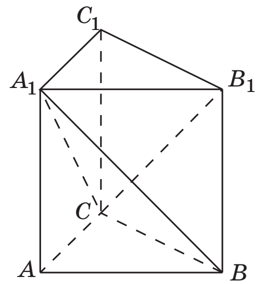


Рис. 217

6 полученных пирамид равны, следовательно, объём каждой из них равен одной шестой объёма куба.

Теорема. Объём пирамиды равен одной третьей произведения площади её основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC — треугольная пирамида. Достроим её до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 217). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1, разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, пирамиды имеют равные объёмы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, имеют равные объёмы. Таким образом, объёмы всех трёх пирамид равны. Учитывая, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объёма треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — её высота.

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой — многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объёмы этих пирамид равны, и, следовательно, имеет место формула

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}S \cdot h,}}$$

где S — площадь основания пирамиды, h — её высота. ■

Исторические сведения

Впервые формулу объёма пирамиды в общем виде вывел Архимед. Для этого он разработал следующий метод: высота пирамиды разбивается на n равных частей и через точки деления проводят плоскости, параллельные основанию пирамиды. При этом пирамида разбивается на слои. Для каждого такого слоя строятся две призмы, одна из которых содержится в слое, а другая содержит слой (чертёж к этой задаче получил название «чёртовой лестницы», рисунок 218).

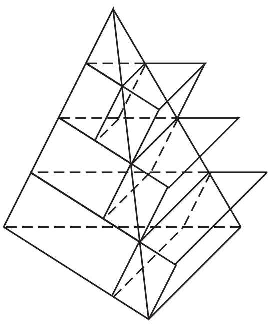


Рис. 218

Зная, что объём призмы есть произведение площади основания на высоту, получают, что сумма объёмов призм, содержащихся в слоях, равна $\frac{1}{3}SH\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$, где S — площадь основания пирамиды и H — высота; сумма объёмов призм, содержащих слои, равна $\frac{1}{3}SH\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}$. Тогда если V — объём пирамиды, то

$$\frac{1}{3}SH\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} < V < \frac{1}{3}SH\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}.$$

При увеличении n левая и правая части сколь угодно мало отличаются от $\frac{1}{3}SH$, и, следовательно, получаем формулу объёма пирамиды: $V = \frac{1}{3}SH$.

Пример 1. Найти объём тетраэдра с ребром, равным 1.

Решение. Высота правильного треугольника со стороной 1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, площадь такого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Высота данного тетраэдра $ABCD$ находится из прямоугольного треугольника DOM, где DO — высота тетраэдра, O — центр треугольника ABC, M — середина ребра AB. $MO = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Таким образом, $DO = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Следовательно, объём равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Пример 2. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, угол между боковой гранью и основанием 45°. Найти объём пирамиды.

Решение. Пусть в основании данной пирамиды лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$, SO — высота пирамиды, O — центр $ABCDEF$; $\angle SMO = 45°$, M — середина какой-нибудь стороны шестиугольника, например AB. Тогда $SO = MO = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равняется $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Итак, объём данной пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^3$.

Пример 3. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найти объём пирамиды.

Решение. Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 219). $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$, $AD = BD = CD = b$. Примем треугольник ABD за основание пирамиды. Тогда CD будет её высотой. Поэтому объём пирамиды будет равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b = \frac{1}{6}b^3$.

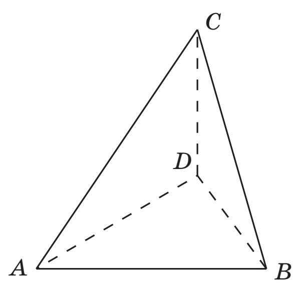


Рис. 219

Упражнения

1. Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объёма призмы составляет объём пирамиды?
2. Найдите объём пирамиды, высота которой h, а в основании — прямоугольник со сторонами a и b.
3. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, высота — h.
4. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой равна h, а диагональ основания — d.
5. Определите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.
6. ○ Как относятся объёмы правильной треугольной пирамиды и правильной треугольной призмы, если основания и высоты у них равны?
7. ○ Как относятся объёмы двух правильных пирамид с равными основаниями, но разными высотами h_1 и h_2?
8. Через середину высоты пирамиды параллельно её основанию проведено сечение. Найдите объём отсечённой пирамиды, если объём данной пирамиды равен 48 см^3.

○ **9.** Как изменится объём правильной пирамиды, если высота её будет увеличена в n раз, а сторона основания уменьшена во столько же раз?

10. Напишите формулу объёма правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

11. Напишите формулу объёма правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.

12. В правильной четырёхугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите её объём.

13. Объём правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найдите боковое ребро.

14. Напишите формулу объёма правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

15. Длина каждого бокового ребра треугольной пирамиды равна b, а плоские углы при вершине равны 60°, 90° и 90°. Найдите объём пирамиды.

16. Пирамида, объём которой равен V, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объём оставшейся части пирамиды.

17. В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объём тетраэдра.

18. Найдите объём октаэдра с ребром, равным 1.

19. Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объём.

20. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны a, проведите сечение, проходящее через вершину D параллельно ребру AC и точку M — середину ребра BC. Определите:
а) вид сечения;
б) площадь сечения;
в) угол φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC тетраэдра;
г) объёмы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения.

***21.** Развёртка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Найдите объём этой пирамиды.

***22.** Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повёрнут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объём их общей части.

***23.** Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общую высоту. Один из них повёрнут на 60° по отношению к другому. Найдите объём их общей части.

***24.** Два правильных тетраэдра с рёбрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объём общей части этих тетраэдров.

§ 41. Объём конуса

Напомним, что конусом в пространстве мы называем фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры, называемой основанием конуса, с точкой, лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса.

Теорема. Объём конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного конуса с основанием площади S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с той же площадью основания и высотой (рис. 215). Тогда эти пирамида и конус имеют равные объёмы. Но для объёма пирамиды имеет место формула

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h.$$

Следовательно, она имеет место и для объёма произвольного конуса. ■

В частности, для кругового конуса, в основании которого круг радиуса R и высота которого равна h, имеет место формула

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h.}$$

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключённая между этой плоскостью и основанием, называется **усечённым конусом** (рис. 220).

Полученное при этом сечение конуса также называется **основанием** усечённого конуса. Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой** усечённого конуса.

Теорема*. Объём усечённого конуса выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s),}$$

где S, s — площади оснований, g — высота усечённого конуса.

Доказательство. Представим усечённый конус как разность большего и меньшего конусов. Тогда объём усечённого конуса находится как разность объёмов большего и меньшего конусов.

Если площади оснований большего и меньшего конусов равны соответственно S, s, а высоты — H, h, то объём усечённого конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

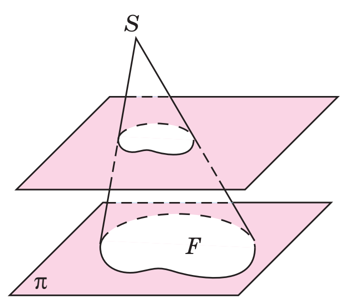


Рис. 220

Наша задача состоит в том, чтобы выразить высоты H и h через высоту g усечённого конуса и площади оснований. Ясно, что $H = g + h$. Выразим h через g, S и s. Заметим, что в сечении конуса плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до плоскости сечения и плоскости основания. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{g+h}\right)^2, \text{ или } \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h}{g+h},$$

из которого можно найти неизвестную высоту h.

$$h = \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь h в выражение для объёма усечённого конуса, получим,

$$V = \frac{1}{3}\left(S\left(\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}} + g\right) - s\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}\left(g\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}g\,(S + \sqrt{Ss} + s). \blacksquare$$

Формула объёма усечённого конуса, в частности, применима к нахождению объёмов усечённой пирамиды и усечённого прямого кругового конуса. Так, например, объём усечённого прямого кругового конуса, в основаниях которого круги радиусов R и r, а высота равна h, выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2).}$$

Пример 1. По высоте h равностороннего конуса найти его объём.

Решение. Равносторонним называется конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник. Таким образом, радиус R основания конуса равен половине стороны равностороннего треугольника, высота которого равна h. Отсюда $R = \frac{\sqrt{3}}{3}h$ и объём конуса равен $\frac{1}{3} \cdot \pi\frac{3}{9} \cdot h^2 \cdot h = \frac{\pi}{9}h^3$.

Пример 2*. Боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 м и 1 м. Найти объём.

Решение. Воспользуемся формулой объёма усечённого конуса. В нашем случае площадь S нижнего основания равна 25 м^2, площадь s верхнего основания равна 1 м^2. Найдём высоту OO_1, которая соединяет центры нижнего и верхнего оснований (рис. 221).

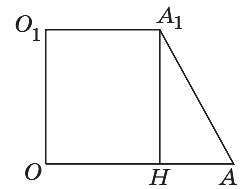


Рис. 221

В прямоугольной трапеции OO_1A_1A находим $OA = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5$ м (половина диагонали нижнего основания), $O_1A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м (половина диагонали верхнего основания). Проведём $A_1H \perp OA$. Тогда $AH = AO - OH = AO - O_1A_1 = 2\sqrt{2}$ (м), $AA_1 = 3$ м, $OO_1 = A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 1$ (м). Итак, объём равен $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (25 + 5 + 1) = 10\frac{1}{3}$ (м^3).

Пример 3*. Усечённый прямой круговой конус, радиусы оснований которого равны 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?

Решение. По условию задачи $\frac{1}{3}\pi h(25 + 15 + 9) = \frac{1}{3}\pi h \cdot R^2$, где R — искомый радиус. Следовательно, $R = 7$ см.

Упражнения

○ **1.** Во сколько раз увеличится объём кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?

○ **2.** Изменится ли объём кругового конуса, если радиус основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза?

○ **3.** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 40π см^3.

○ **4.** Объём конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объёмы полученных частей конуса?

5. Высота конуса $h = 4$, образующая $l = 5$. Найдите объём конуса.

6. Высота прямого кругового конуса равна 3 см, образующая — 5 см. Найдите его объём.

7. Диаметр основания прямого кругового конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения 90°. Вычислите объём конуса.

8. Найдите объём тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.

9. Напишите формулу объёма прямого кругового конуса с радиусом основания R и образующей b.

10. Образующая прямого кругового конуса равна 4 дм, угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите объём конуса.

11. Объём прямого кругового конуса равен V, радиус основания равен R. Найдите площадь осевого сечения.

12. Образующая прямого кругового конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объём конуса.

13. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объём тела вращения.

14. Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объёмы этих конусов?

15. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объём тела вращения.

16. Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объём тела вращения.

***17.** Площади оснований усечённой пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2, а высота исходной пирамиды равна 35 м. Найдите объём.

***18.** Найдите объём правильной шестиугольной усечённой пирамиды, если стороны её оснований a и b, боковое ребро составляет с основанием угол $30°$ ($a > b$).

***19.** Радиусы оснований усечённого прямого кругового конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите его объём.

***20.** Объём усечённого прямого кругового конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усечённого конуса.

§ 42. Объём шара

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объёма шара.

Теорема. Объём шара радиуса R выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Доказательство. Пусть дан полушар радиуса R, основание которого расположено на плоскости α. Рассмотрим цилиндр, основание которого — круг радиуса R, расположенный в той же плоскости α, и высота которого равна R (рис. 222).

В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра.

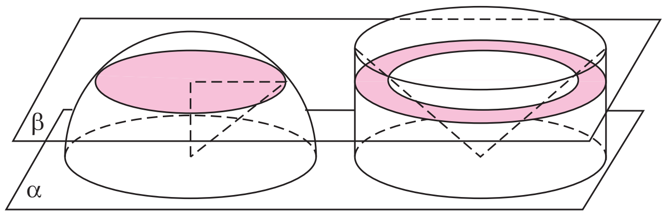


Рис. 222

Докажем, что фигура, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объёмы.

Проведём плоскость β, параллельную плоскости α, на расстоянии x от неё, $0 \leqslant x \leqslant R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего — R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объёмы. Вычислим этот объём. Он равен разности объёмов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объём шара вдвое больше объёма полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

Шаровым кольцом называется фигура, заключённая между поверхностями двух шаров с общим центром.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 223). Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется **основанием** шарового сегмента. Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется **высотой** шарового сегмента.

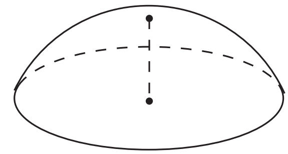


Рис. 223

Теорема*. Объём шарового сегмента высоты h, отсекаемого от шара радиуса R, выражается формулой

$$\boxed{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).}$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, изображённую на рисунке 222, и предположим, что плоскость β отсекает от полушара сегмент высоты h. Тогда она отсекает от цилиндра и вписанного в него конуса цилиндр и усечённый конус высоты h. По принципу Кавальери объём V шарового сегмента будет равен разности объёмов этих цилиндра и усечённого конуса. Объём $V_{\text{ц}}$ цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объём $V_{\text{ус. к}}$ усечённого конуса равен разности объёмов большого и маленького конусов, т. е.

$$V_{\text{ус. к}} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R - h)^3 = \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

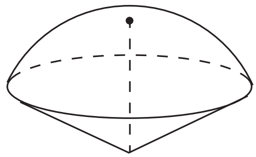


Рис. 224

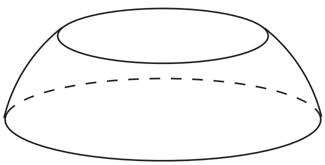


Рис. 225

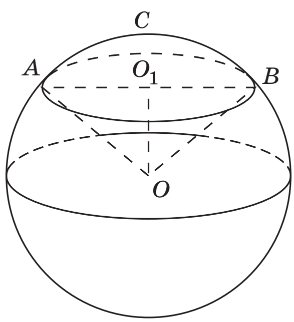


Рис. 226

Следовательно,

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{ус. к}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \blacksquare$$

Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной — центр шара (рис. 224).

Шаровым поясом будем называть часть шара, заключённую между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 225). Сечения шара этими плоскостями называются **основаниями** шарового пояса, а расстояние между ними называется **высотой** шарового пояса.

Пример 1. Найти объём шара, если площадь его сечения, делящего радиус пополам, равна 9π.

Решение. Пусть O и O_1 — соответственно центры данного шара и сечения; R, r — радиусы соответственно шара и сечения (рис. 226).

Тогда $OO_1 = \frac{R}{2}$ и $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$. Площадь сечения $\pi r^2 = 9\pi$, следовательно, $r = 3$. Поэтому $R^2 = 12$, $R = 2\sqrt{3}$, и, таким образом, объём шара равен $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 32\sqrt{3}\pi$.

Пример 2*. Найти объём шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен α.

Решение. Радиус вписанного шара равен $\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (см. пример 2 § 34, на рис. 184 в нашем случае $PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\angle OPH = \frac{\alpha}{2}$). Таким образом, искомый объём равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{54}a^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

Пример 3*. Высота шарового сегмента равна $0{,}1D$, где D — диаметр шара. Найти отношение объёмов этого сегмента и шара.

Решение. Высота данного шарового сегмента $h = \frac{D}{10} = \frac{R}{5}$, где R — радиус шара. Следовательно, объём шарового сегмента равен

$\pi\frac{R^2}{25}\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{5}\right) = \frac{14}{25\cdot 15}\pi R^3$. Таким образом, искомое отношение равно $\left(\frac{14}{25\cdot 15}\pi R^3\right) : \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 7 : 250.$

Упражнения

○ **1.** Радиус шара равен 1 см. Найдите его объём.

○ **2.** Найдите объём шара, диаметр которого равен 4 см.

○ **3.** Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в: а) 3 раза; б) 4 раза?

○ **4.** Радиусы трёх шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.

○ **5.** Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объёмов равнялась объёму шара радиуса 6 см?

6. Во сколько раз объём Земли больше объёма Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

7. Найдите объём шара, описанного около куба с ребром, равным единице.

8. Свинцовый шар, диаметр которого равен 20 см, переплавляется в шарики с диаметром, в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится?

* **9.** Найдите формулу объёма шарового кольца, заключённого между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$).

10. Запишите формулу объёма шара через его диаметр (D).

11. Диаметр одного шара в 6 раз больше диаметра другого шара. Найдите отношение их объёмов.

12. Докажите, что объёмы шаров относятся как кубы их радиусов (диаметров).

13. Найдите диаметр шара, если при погружении в воду он вытесняет 36π см^3 воды.

14. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объём шара.

15. Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)

16. Найдите высоту прямого кругового цилиндра, равновеликого шару радиуса R, если диаметр основания цилиндра равен диаметру шара.

***17.** Найдите объём шара, вписанного в октаэдр с ребром a.

***18.** Найдите объём шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

***19.** Шар радиуса 10 см пересечён плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объём отсечённого шарового сегмента.

***20.** Какую часть объёма шара составляет объём шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

***21.** Найдите формулу объёма шарового сектора радиуса R с углом при вершине φ.

§ 43. Площадь поверхности

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей многоугольников, входящих в эту поверхность.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.

Рассмотрим вопрос о нахождении площади поверхности прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса. Будем, как и раньше, называть их просто цилиндром и конусом.

Теорема. Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой

$$\boxed{\boldsymbol{S = 2\pi R(R + b).}}$$

Доказательство. Поверхность цилиндра состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности (рис. 227). Развёрткой боковой поверхности является прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и b. Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rb = 2\pi R(R + b). \blacksquare$$

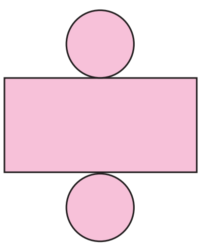


Рис. 227

Теорема. Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой

$$\boxed{\boldsymbol{S = \pi R(R + b).}}$$

Доказательство. Поверхность конуса состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (рис. 228), радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна πRb, а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R + b). \blacksquare$$

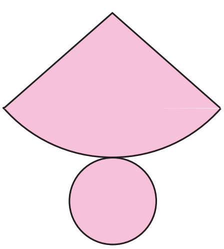


Рис. 228

Пример 1. Площадь боковой поверхности и объём цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найти диаметр основания цилиндра.

Решение. Обозначим данное число m. Тогда $2\pi Rb = m$ и $\pi R^2 b = m$, где R, b — соответственно радиус основания и образующая данного цилиндра. Значит, $R = \frac{m}{2\pi b}$; $\pi \cdot \frac{m^2}{4\pi^2 b^2} \cdot b = m$, откуда $m = 4\pi b$. Таким образом, $R = 2$, а диаметр основания равен 4.

Пример 2. В основании пирамиды, боковые грани которой образуют с основанием равные углы, лежит ромб. Площадь одной из боковых граней равна Q. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Из условия задачи следует, что основанием высоты данной пирамиды является центр окружности, вписанной в ромб, т. е. точка пересечения его диагоналей. Все боковые грани являются равными треугольниками (по трём сторонам). Следовательно, площадь боковой поверхности равна $4Q$.

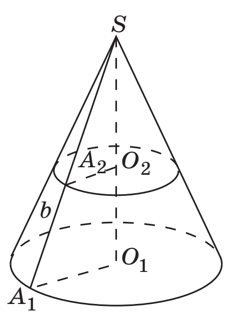
Пример 3*. Найти площадь поверхности усечённого конуса (прямого кругового) с основаниями радиусов R_1, R_2 и образующей b. Нарисуйте развёртку поверхности усечённого конуса.

Решение. Найдём площадь боковой поверхности усечённого конуса ($S_{бок}$). Она равна разности $S_1 - S_2$ боковых поверхностей двух конусов: одного с образующей b_1, другого b_2, радиусы их оснований соответственно равны R_1 и R_2 (рис. 229, а). Образующая b усечённого конуса равна $b_1 - b_2$. Тогда $S_{бок} = S_1 - S_2 = \pi R_1 b_1 - \pi R_2 b_2$. Из подобных треугольников SO_1A_1 и SO_2A_2 имеем $b_1 : b_2 = R_1 : R_2$. Учитывая, что $b_1 = b_2 + b$, получим $R_2 b_2 = R_1 b_2 - R_2 b$. Подставляя это выражение в формулу для площади боковой поверхности, будем иметь $S_{бок} = \pi R_1(b_2 + b) - \pi(R_1 b_2 - R_2 b) = \pi(R_1 + R_2)b$.

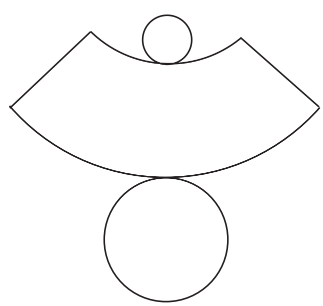
Таким образом, площадь S полной поверхности усечённого конуса выражается формулой

$$\boxed{S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi(R_1 + R_2)b.}$$

На рисунке 229, б показана развёртка поверхности усечённого конуса.



а)



б)

Рис. 229

Упражнения

1. Что принимается за площадь боковой поверхности: а) цилиндра; б) конуса?
2. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?
3. Чему равна площадь поверхности: а) правильного тетраэдра с ребром 1; б) икосаэдра с ребром 1?
4. Объём куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.
5. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
6. Из прямоугольного листа бумаги образуйте боковую поверхность цилиндра. Сколькими способами это можно сделать? Сравните их площади.
7. Высота конуса $h = 6$, радиус основания $R = 8$. Найдите площадь боковой поверхности.
8. Как изменится площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания уменьшить в: а) 2 раза; б) 4 раза; в) 6 раз?
9. По высоте h равностороннего конуса найдите площадь его полной поверхности.
10. Как относятся между собой площади основания, боковой поверхности и полной поверхности в равностороннем конусе?
11. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
12. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Площадь основания равна S. Найдите площадь поверхности цилиндра.
13. Радиус основания конуса равен 3 м, высота — 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.
14. Образующая конуса равна 4 см, угол при вершине осевого сечения равен $90°$. Найдите площадь боковой поверхности.
15. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.
16. Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.
17. В каком отношении делится боковая поверхность правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии её оснований?
18. Площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
19. Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.
20. Развёртка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см^2. Найдите площадь грани пирамиды.
21. Площади боковых поверхностей правильной пирамиды в два раза больше площади основания. Определите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

22. Площади боковых поверхностей двух конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг каждого из его катетов, равны. Определите вид треугольника.

***23.** В правильную четырёхугольную пирамиду вписан конус таким образом, что его основание вписано в основание пирамиды, а вершина совпадает с вершиной пирамиды. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур?

***24.** Радиусы оснований усечённого конуса R и r. Образующая наклонена к плоскости основания под углом: а) 60°; б) 45°. Найдите площадь полной поверхности.

§ 44. Площадь поверхности шара

Для нахождения площади поверхности шара уже нельзя, как мы это делали для цилиндра и конуса, воспользоваться развёрткой, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника (рис. 230).

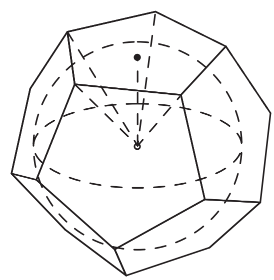


Рис. 230

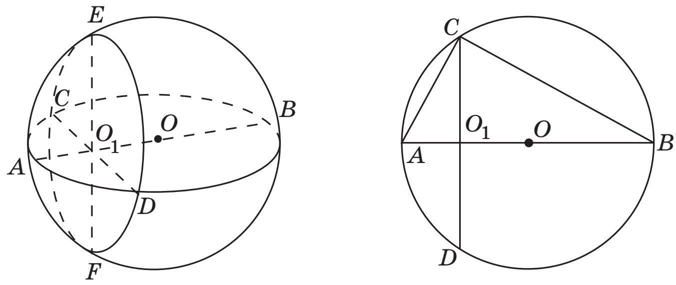
Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Отсюда объём многогранника вычисляется по формуле

$$V_м = \frac{1}{3} S_м R,$$

где $S_м$ — площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Получающиеся при этом многогранники будут всё больше и больше приближаться к шару, а их поверхности будут приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом всё время сохраняется приведённая выше формула объёма, получаем, что для объёма шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула $V = \frac{1}{3} SR$. С другой стороны, объём шара выражается формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{1}{3} SR = \frac{4}{3}\pi R^3$, из которого получаем формулу площади поверхности шара

$$\boxed{S = 4\pi R^2.}$$



а) б)

Рис. 231

П р и м е р 1. Через середину радиуса шара перпендикулярно ему проведена плоскость. Площадь сечения равна 48 см^2. Найти площадь поверхности шара.

Р е ш е н и е. Площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$, где R — радиус шара. По условию задачи $R^2 = \frac{4}{3}r^2$, где r — радиус сечения; $4\pi \frac{4}{3}r^2 = \frac{16}{3}\pi r^2$, но $\pi r^2 = 48$. Итак, искомая площадь равна $16^2 = 256$ (см^2).

П р и м е р 2. Шар пересечён двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, одна из которых проходит через центр шара, а другая — через точку, делящую диаметр шара в отношении 4 : 9. Найти площадь поверхности шара, если диаметр меньшей окружности равен 60 см.

Р е ш е н и е. На рисунке 231, а изображены сечения, одним из которых является большой круг (O — центр шара, O_1 — центр второго сечения). По условию $AO_1 : O_1B = 4 : 9$, $CD = 60$ см. Обратимся к рисунку 231, б, где изображена окружность большого круга. Если $AB = d$, то $AO_1 = \frac{4}{13}d$ и $O_1B = \frac{9}{13}d$. Из прямоугольного треугольника ACB ($\angle C$ прямой, так как опирается на диаметр окружности) следует, что $AO_1 : CO_1 = CO_1 : O_1B$, $\frac{4}{13} \cdot \frac{9}{13}d^2 = 30^2$; $d^2 = \frac{13^2 \cdot 30^2}{4 \cdot 9}$. Итак, площадь поверхности шара равна $\pi d^2 = \pi \cdot 65^2 = 4225\pi$ (см^2).

Упражнения

1. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

2. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?

3. Что произойдёт с радиусом шара, если площадь его поверхности: а) уменьшится в 25 раз; б) увеличится в 2 раза?

4. Во сколько раз площадь поверхности Земли больше площади поверхности Луны (диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км)?

○ **5.** Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.

○ **6.** Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.

○ **7.** Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объёмы?

○ **8.** Объёмы двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их площади поверхностей?

9. Длина окружности большого круга шара равна 28π см. Найдите площадь поверхности шара.

10. Площадь поверхности шара равна 625π см^2. Найдите диаметр шара.

11. Шар с центром в точке O касается плоскости α в точке A. Точка B принадлежит плоскости α, и $OB = 26$ см, $AB = 24$ см. Найдите площадь поверхности шара.

12. Площадь поверхности шара равна 225π м^2. Найдите его объём.

13. Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.

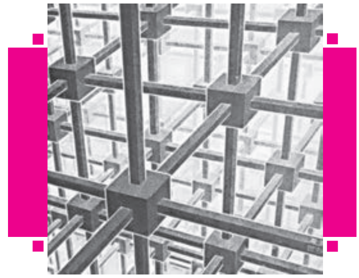
***14.** В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм^2 и 4π м^2, а расстояние между ними 9 дм. Найдите площадь поверхности шара.

15. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?

***16.** Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.

Глава VII

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ



§ 45. Прямоугольная система координат в пространстве

В курсе планиметрии мы познакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Напомним, что **координатной прямой** называется такая прямая, на которой выбраны точка O, называемая **началом координат**, и единичный вектор $\overrightarrow{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой. **Прямоугольной системой координат на плоскости** называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Оно обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно **осью абсцисс** и **осью ординат** (рис. 232).

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое **координатой** этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел $(x; y)$, называемых **координатами точки на плоскости** относительно данной системы координат.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также **декартовой системой координат**, а сами координаты — **декартовыми координатами**. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот — алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом сведении, называется **методом координат.**

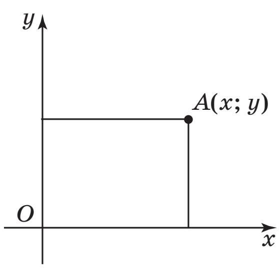


Рис. 232

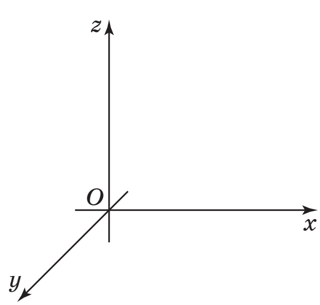


Рис. 233

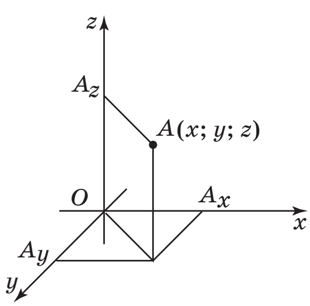


Рис. 234

Определение. **Прямоугольной системой координат в пространстве** называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются соответственно **осью абсцисс**, **осью ординат** и **осью аппликат** (рис. 233). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведём плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку её пересечения с осью Ox обозначим A_x (рис. 234).

Координата этой точки на оси Ox называется **абсциссой** точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно **ординатой** и **аппликатой** точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел $(x;\ y;\ z)$ называется **координатами точки** A в пространстве.

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

Теорема. Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в пространстве выражается формулой

$$\boxed{A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Доказательство. Для точек $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ пространства рассмотрим прямую A_1A_2. Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz, и пусть A_1', A_2' — ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 235).

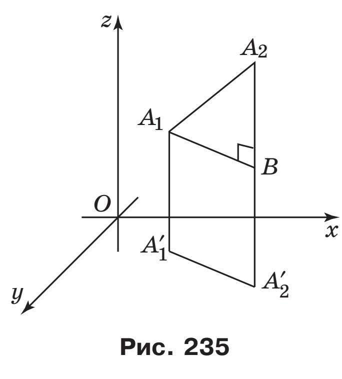


Рис. 235

Ясно, что эти проекции имеют координаты $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

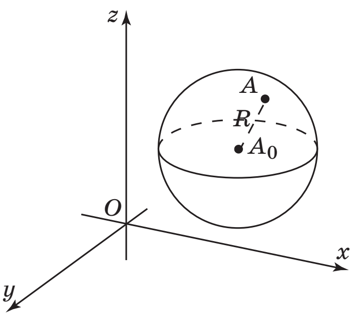


Рис. 236

Через точку A_1 проведём прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку её пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Следовательно, по теореме Пифагора имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \blacksquare$$

Непосредственно из определения шара и сферы следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2,}$$

а координаты точек соответствующей сферы — равенству

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.}$$

Последнее равенство называется **уравнением сферы** с центром в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R (рис. 236).

Исторические сведения

Р. Декарт — один из выдающихся учёных XVII века. Поражает широта его интересов. Учёным получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определённым естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал «главные правила метода», а именно:

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчётливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчёркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчёты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...», произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII—XIX вв. на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрии. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B.

Положительные лучи осей координат соответственно BA, BC и BB_1. Назвать координаты всех вершин куба.

Решение. Обратимся к рисунку 237. Вершины данного куба имеют следующие координаты: $A(1; 0; 0)$; $B(0; 0; 0)$; $C(0; 1; 0)$; $D(1; 1; 0)$; $A_1(1; 0; 1)$; $B_1(0; 0; 1)$; $C_1(0; 1; 1)$; $D_1(1; 1; 1)$.

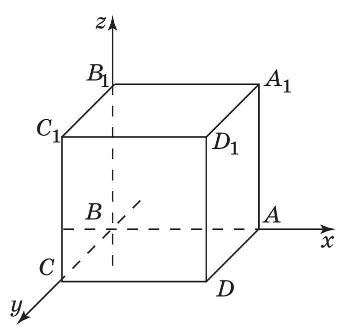


Рис. 237

Пример 2. Пусть в пространстве заданы точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Найти координаты середины отрезка A_1A_2.

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — середина отрезка A_1A_2. Спроектируем его на плоскость Oxy (т. е. проведём из точек A_1, A_2 прямые, перпендикулярные плоскости Oxy). В плоскости Oxy получим соответственно точки $A_1'(x_1; y_1; 0)$, $M'(x; y; 0)$, $A_2'(x_2; y_2; 0)$. Причём по теореме Фалеса M' — середина отрезка $A_1'A_2'$ имеет координаты $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для того чтобы найти выражение для z, нужно спроектировать отрезок на плоскость Oxz (или Oyz), получим $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Итак, $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Пример 3. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами (1; 2; 3) относительно координатных плоскостей?

Решение. Точка с координатами (1; 2; 3) удалена от: плоскости Oxy на расстояние 3; от плоскости Oxz на расстояние 2; от плоскости Oyz на расстояние 1. Учитывая, что радиус сферы равен 2, получаем, что сфера: не имеет общих точек с плоскостью Oxy; касается плоскости Oxz; пересекается с плоскостью Oyz.

Упражнения

1. Как определяются координаты точки в пространстве?

2. Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1; 3; 4)$ и $B(5; -6; 2)$ на: а) плоскость Oxy; б) плоскость Oyz; в) ось Ox; г) ось Oz.

3. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

4. На каком расстоянии находится точка $A(1; -2; 3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

5. На каком расстоянии находится точка $A(1; -2; 3)$ от координатных прямых: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

6. Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?

7. Какому условию удовлетворяют координаты точек пространства, одинаково удалённые от: а) двух координатных плоскостей Oxy, Oyz; б) всех трёх координатных плоскостей?

8. Найдите расстояние между точками $A_1(1; 2; 3)$ и $A_2(-1; 1; 1)$, $B_1(3; 4; 0)$ и $B_2(3; -1; 2)$.

9. Какая из точек $A(2; 1; 5)$ или $B(-2; 1; 6)$ лежит ближе к началу координат?

10. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:
а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$;
б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=11$.

11. Для данной прямоугольной системы координат в пространстве изобразите точки с координатами: $E(1;\ 2;\ 3)$, $F(2;\ -1;\ 1)$, $G(-1;\ 3;\ 2)$.

12. Куб $A...D_1$ помещён в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр грани $ABCD$ куба, рёбра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты $(-2;\ 2;\ 0)$. Найдите координаты всех остальных вершин куба.

13. Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты $(1;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ 1;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин октаэдра.

14. Для данной системы координат в пространстве изобразите точки $A(1;\ 1;\ -1)$ и $B(1;\ -1;\ 1)$. Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Плоскость координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли отрезок AB через начало координат?

15. Точка A имеет координаты $(x;\ y;\ z)$. Найдите координаты симметричной точки относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

16. Напишите уравнение сферы:
а) с центром в точке $O(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом 1;
б) с центром в точке $C(1;\ -2;\ 3)$ и радиусом 4.

17. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1;\ 2;\ -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

18. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(3;\ -2;\ 1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

19. Найдите уравнения сфер радиуса R, касающихся трёх координатных плоскостей.

20. Докажите, что уравнение $x^2-4x+y^2+z^2=0$ задаёт сферу в пространстве. Найдите её радиус и координаты центра.

21. Точка $A\left(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5}\right)$ принадлежит сфере с центром $O(3;\ 0;\ 0)$. Напишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли данной сфере точки $M\left(5;\ 0;\ 2\sqrt{3}\right)$ и $K(4;\ -1;\ 0)$?

22. Как расположена точка $A(5;\ 1;\ 2)$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2-8x+$ $+\ 4y+2z-4=0$?

***23.** Как расположены друг относительно друга сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+$ $+\ (z+1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$?

***24.** Напишите уравнение окружности, лежащей в плоскости Oxy и являющейся пересечением сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$ с этой плоскостью.

***25.** Что представляет собой геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$?

§ 46. Векторы в пространстве

В планиметрии изучались векторы на плоскости, здесь же мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Определение. **Вектором** в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также **нулевой вектор**, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$ и изображается стрелкой. Будем также обозначать векторы строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной или модулем вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора в пространстве называются **одинаково (противоположно) направленными**, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковые длины и направления.

Так же как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора умножается на $|t|$, а направление остаётся прежним, если $t > 0$, и изменяется на противоположное, если $t < 0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости. Среди них:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.
4. $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$.
5. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой аналогично тому, как это делалось для плоскости.

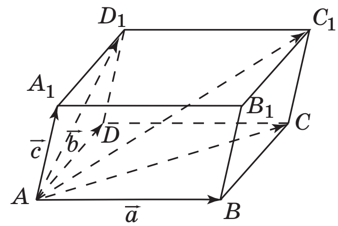


Рис. 238

Докажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда (рис. 238), $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD_1}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Пример 1. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}$.

Решение. Заметим, что $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$ и $-\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FG}$. Теперь воспользуемся свойством 1 $(\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a})$ и перепишем выражение в следующем виде $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$.

Пример 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Упростить выражение $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA}$.

Решение. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$; $-\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{C_1C}$; $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{B_1A}$; $-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1D}$. Итак, $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1D}$.

Упражнения

○ **1.** Как определяются сложение векторов и умножение вектора на число?

○ **2.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

○ **3.** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

○ **4.** Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ быть равными между собой?

○ **5.** Всегда ли верно равенство $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$?

○ **6.** В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

7. Для данного вектора $\vec{a}$ постройте векторы $-\vec{a}$; $2\vec{a}$; $\frac{5}{2}\vec{a}$.

8. Точка B — середина отрезка AC, а точка C — середина отрезка BD. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

9. Для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;

г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$.

10. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$.

11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, равные $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение

$$\overrightarrow{B_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$

13. Докажите выполнимость свойств 3, 4, 5.

14. Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

15. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

16. Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

***17.** Точка O — центр описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

***18.** Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

§ 47. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами** (рис. 239, а).

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y; z)$ тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

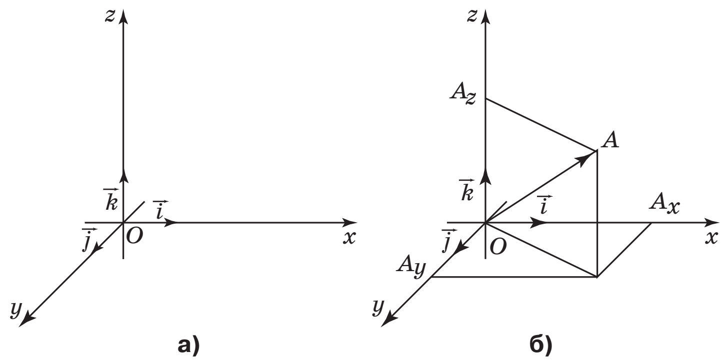


Рис. 239

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ (рис. 239, б). Точка A имеет координаты $(x; y; z)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$, и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ■

Теорема. Сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

и, следовательно, тройка чисел $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. ■

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты

$$(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом — точку $A_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 240).

Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$, и, следовательно, он имеет координаты

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

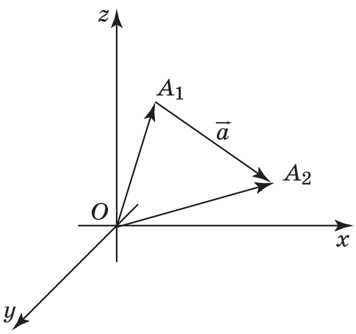


Рис. 240

Длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$ выражается через координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 1. Найти координаты точки G, если $\overrightarrow{GH}(5; -4; -3)$ и $H(0; -1; 2)$.

Решение. Пусть $G(x; y; z)$. Тогда $0 - x = 5$, $-1 - y = -4$ и $2 - z = -3$, откуда $x = -5$, $y = 3$ и $z = 5$.

Пример 2. Найти длину вектора $\vec{a} = -\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение. Из условия следует, что $\vec{a}(-1; -8; 2)$. Значит, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{69}$.

Пример 3. Найти условие, при котором вектор $\vec{m}(x; y; z)$ будет перпендикулярен координатной плоскости Oxz.

Решение. У вектора, перпендикулярного координатной плоскости Oxz, координаты x, z равны нулю, т. е. $\vec{m}(0; y; 0)$.

Упражнения

○ **1.** Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$; г) $d = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

○ **2.** Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2; -6; 9)$, $B(-5; 3; -7)$; б) $A(1; 3; -8)$, $B(6; -5; -10)$; в) $A(-3; 1; -20)$, $B(5; 1; -1)$.

○ **3.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(a; b; c)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

○ **4.** Найдите длину вектора $\vec{a}(1; 1; 1)$.

○ **5.** Найдите длину вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(0; 0; 2)$, $D(2; 2; 0)$.

○ **6.** Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1; 0; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -4)$.

○ **7.** Найдите координаты векторов $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{a}$, если $\vec{a}(-2; 0; 3)$.

○ **8.** Найдите координаты точки F, если вектор $\overrightarrow{EF}(1; 0; 1)$, $E(0; 2; 0)$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина O — начало координат, рёбра OA, OC, OO_1 лежат на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно и $OA = 2$, $OC = 3$, $OO_1 = 4$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$.

10. Даны векторы $\vec{a}(-1; 2; 8)$ и $\vec{b}(2; -4; 3)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

11. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4; -3; 0)$ и точка $M(1; -3; -7)$.

12. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy; б) параллелен координатной прямой Ox?

13. Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A(1; 2; 3)$ и: а) перпендикулярного плоскости Oxy; б) параллельного прямой Ox.

14. Найдите длину векторов: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $8\vec{i} + \vec{k}$; в) $-\vec{i} + 2\vec{k}$.

15. Длина вектора равна трём. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.

16. Найдите длины векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1; 0; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -4)$.

§ 48. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами и скалярное произведение векторов в пространстве определяются аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. А именно, угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю. В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

Определение. **Скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 241).

По теореме косинусов имеем равенство

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos \varphi$$

и, следовательно, равенство $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \ \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^2 = |\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

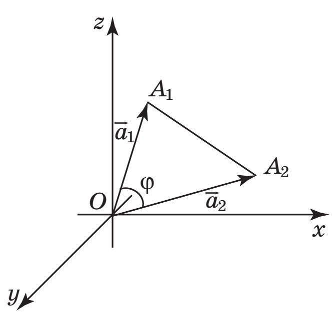


Рис. 241

Таким образом, имеет место формула

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

Пример 1. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, найти скалярное произведение: а) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD}$, где M, N — середины соответственно рёбер CD и AB.

Решение. а) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ($\angle ADB = 60^\circ$, как угол равностороннего треугольника ABD); б) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$, так как $MN \perp DC$ ($DC \perp AM$ и $DC \perp BM$, т. е. DC перпендикулярна плоскости ABM по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, значит, DC перпендикулярна любой прямой этой плоскости).

Пример 2. Доказать, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

Решение. $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, так как по условию $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ равно нулю, и, значит, эти векторы перпендикулярны.

Упражнения

○ **1.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

○ **2.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 3)$ и $\vec{a}_2(2;\ -1;\ 0)$.

○ **3.** Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

○ **4.** Найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a}$ и $-\vec{b}$, если $\vec{a}(1;\ 0;\ 5)$, $\vec{b}(2;\ -3;\ 4)$.

○ **5.** Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Почему?

○ **6.** Как расположены относительно друг друга векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$?

○ **7.** Найдите угол между векторами $\vec{a}(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}(-2;\ -2;\ -2)$.

○ **8.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $-\vec{a}$.

9. Используя формулу $\cos \varphi = \dfrac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$ из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами: а) $\vec{a}_1(2;\ 3;\ -1)$ и $\vec{a}_2(1;\ -2;\ 4)$; б) $\vec{a}_1(1;\ 2;\ -2)$ и $\vec{a}_2(1;\ 0;\ -1)$.

10. При каком значении z векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны?

11. Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ имеют место равенства $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k}$.

12. Докажите, что каковы бы ни были векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ и $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

13. Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

14. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2; -1; 0)$, $\vec{b}(4; 3; 1)$?

15. Докажите, что в треугольнике ABC, где $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; 4)$ и $C(0; 1; 3)$, угол B прямой.

16. Докажите, что единичный вектор, образующий с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ углы α, β, γ соответственно, имеет координаты (cos α; cos β; cos γ).

17. Найдите углы, которые образует с координатными векторами вектор: а) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; б) $-3\vec{j} - \vec{k}$; в) $-5\vec{i}$; г) $\vec{a}(0; 3; 4)$.

18. Найдите координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам с координатами (1; 1; 0), (0; 1; 1).

***19.** Докажите, что точки $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-1; 3; 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

***20.** Точки M, N, P — середины рёбер AB, AD, DC правильного тетраэдра с ребром a. Найдите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC}$.

§ 49. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задаётся уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причём a, b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. Плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c, d — действительные числа, причём a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}(a; b; c)$ — перпендикулярный этой плоскости вектор (рис. 242). Тогда произвольная точка $A(x; y; z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю.

Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$\boxed{\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,}}$$

которое задаёт плоскость, проходящую через точку $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с вектором нормали $\vec{n}(a;\ b;\ c)$.

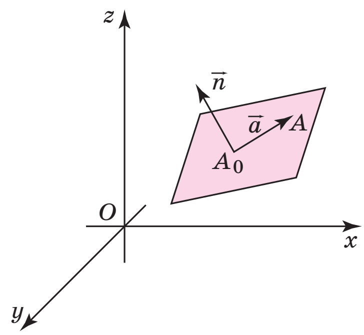


Рис. 242

Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно $ax + by + cz + d = 0$. ■

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены и, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\ (*),$$

векторы нормалей имеют координаты $(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $(a_2;\ b_2;\ c_2)$. Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$. При этом если $d_2 = td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой и угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $\vec{n}_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ -2;\ 4)$ и имеющую вектор нормали $\vec{n}(-3;\ -1;\ 0)$.

Решение. Уравнение данной плоскости имеет вид

$$-3(x - 1) - (y + 2) = 0 \text{ или } 3x + y - 1 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку $K(4;\ -5;\ -1)$ и параллельна координатной плоскости Oyz.

Решение. Плоскость Oyz имеет вектор нормали (1; 0; 0). Искомая плоскость параллельна плоскости Oyz и, следовательно, имеет тот же вектор нормали. Уравнение этой плоскости имеет вид $x + d = 0$. Для нахождения d подставим координаты точки K, получим $4 + d = 0$, $d = -4$. Итак, окончательно получаем уравнение $x - 4 = 0$.

Упражнения

1. Как на плоскости задаётся прямая?

2. Как в пространстве задаётся плоскость?

3. Каковы уравнения координатных прямых на плоскости?

4. Каковы уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz?

5. Даны точки $A(3;\ 2;\ 5)$, $B(-1;\ -2;\ 2)$, $C(7;\ 0;\ -9)$, $D\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{6};\ 6\right)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

6. Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите её точки пересечения с осями координат.

7. Найдите координаты точек пересечения плоскости $ax + by + cz + d = 0$ с осями координат.

8. Приведите примеры уравнений: а) параллельных плоскостей; б) перпендикулярных плоскостей.

9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1;\ 2;\ 0)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1;\ 1;\ 1)$.

10. Точка $H(-2;\ 4;\ -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

11. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$; б) $M(3;\ -1;\ 2)$, $N(4;\ 1;\ -1)$ и $K(2;\ 0;\ 1)$.

12. Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку $M(1;\ -2;\ 4)$ и параллельна координатной плоскости Oxz; б) проходит через точку $M(0;\ 2;\ 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$ и параллельна оси аппликат.

13. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:
а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 3;\ -1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.

15. Приведите примеры уравнений взаимно перпендикулярных плоскостей.

16. Перпендикулярны ли плоскости:
а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$; б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

17. Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями:
а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

18. Докажите, что плоскости $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$ не имеют ни одной общей точки.

***19.** Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

***20.** Вычислите расстояние от начала координат до плоскости:
а) $2x - 2y + z - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

§ 50*. Уравнения прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. При этом заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}(a; b; c)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

Найдём условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x; y; z)$, чтобы она принадлежала прямой a, проходящей через точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a; b; c)$ (рис. 243).

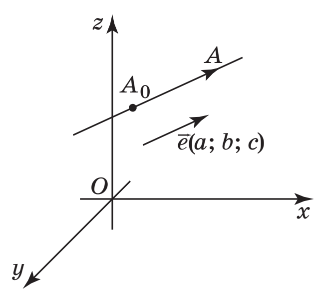


Рис. 243

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ должен быть одинаково или противоположно направлен с вектором $(a; b; c)$, и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Они называются **параметрическими уравнениями прямой в пространстве.**

Если прямая в пространстве задана двумя точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}(a;\ b;\ c)$ в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}(ka;\ kb;\ kc)$, $k \neq 0$, то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = kat + x_0, \\ y = kbt + y_0, \\ z = kct + z_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением, и найдём его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2, $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты $(aT;\ bT;\ cT)$. Разделив вектор перемещения на время T, получим, что вектор скорости имеет координаты $(a;\ b;\ c)$. Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{e}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

П р и м е р 1. Какими параметрическими уравнениями задаётся ось абсцисс?

Р е ш е н и е. Ось абсцисс — координатная прямая Ox. Её параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

П р и м е р 2. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t_1 = 0$ точка находилась в положении $A_1(1; -2; 3)$, а в момент времени $t_2 = 3$ — в положении $A_2(-4; 3; -1)$. Найти скорость движения точки.

Р е ш е н и е. Направляющий вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ имеет координаты $(-5; 5; -4)$. Поэтому движение точки задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -5t + 1, \\ y = 5t - 2, \\ z = -4t + 3. \end{cases}$$

Длина направляющего вектора определяет искомую скорость

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{25 + 25 + 16} = \sqrt{66}.$$

Упражнения

○ **1.** Какими уравнениями задаются координатные прямые?

2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; -2; 3)$ с направляющим вектором $\vec{e}(2; 3; -1)$.

3. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2; 1; -3)$, $A_2(5; 4; 6)$.

4. Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных оси: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

5. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 2; -3)$ и перпендикулярную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

6. В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1t + x_1, \\ y = b_1t + y_1, \\ z = c_1t + z_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_2t + x_2, \\ y = b_2t + y_2, \\ z = c_2t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

7. Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 5t, \\ y - 1 = 4t, \\ z - 1 = 7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

8. Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 0;\ 2)$ и $B(3;\ 1;\ 2)$.

9. Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 2t, \\ y - 1 = -t, \\ z - 1 = 3t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3 = t, \\ y = 8t, \\ z - 4 = 2t. \end{cases}$$

10. Точка движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{e}(1;\ 2;\ 3)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты $(-1;\ 1;\ -2)$. Какие координаты она будет иметь в момент времени $t = 4$?

11. Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

12. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 2$ она имела координаты $(3;\ 4;\ 0)$, а в момент времени $t = 6$ — координаты $(2;\ 1;\ 3)$. Какова скорость движения точки?

§ 51*. Аналитическое задание пространственных фигур

Ранее было показано, что сфера с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера, задаётся неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2.$$

Плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнём с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением (*), то неравенства $ax + by + cz + d \geqslant 0$ и $ax + by + cz + d \leqslant 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x;\ y;\ z)$, достаточно подставить её координаты в левую часть уравнения плоскости. Если получившееся значение больше или равно нулю, то точка принадлежит первому полупространству. Если меньше или равно нулю — то второму полупространству.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств, и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ z \leqslant 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 244).

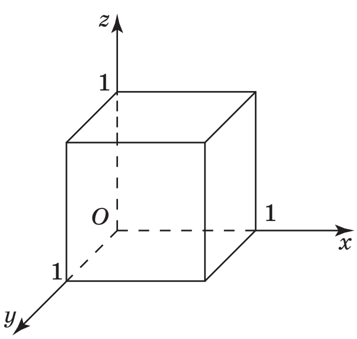


Рис. 244

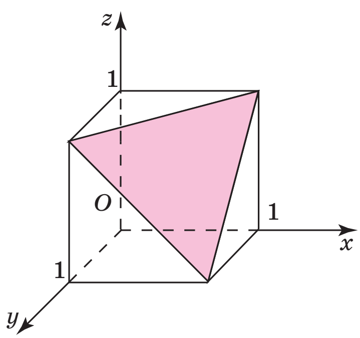


Рис. 245

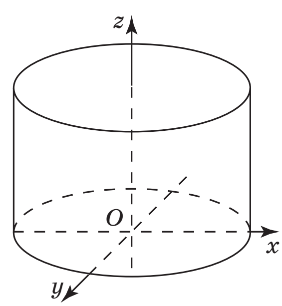


Рис. 246

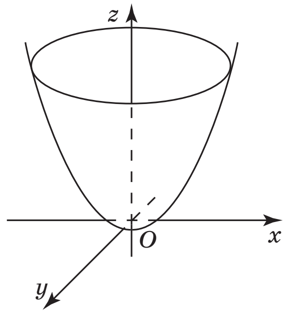


Рис. 247

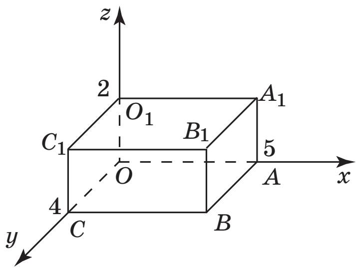


Рис. 248

Если к этим неравенствам добавить ещё одно неравенство

$$x + y + z \leqslant 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 245).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, цилиндр с радиусом основания R и высотой h можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$$

(рис. 246).

Параболоид вращения можно задать уравнением

$$z = a(x^2 + y^2)$$

(рис. 247). В сечении этого параболоида плоскостью $y = c$ получается парабола $z = a(x^2 + c^2)$, а в сечениях плоскостями $z = c$ получаются окружности $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$.

Пример 1. Определить, какому полупространству $x + 3y - 4z - 1 \geqslant 0$ или $x + 3y - 4z - 1 \leqslant 0$ принадлежат точки $A(0; -1; 2)$ и $B(-1; 5; 3)$.

Решение. Подставим координаты точек в левую часть данных неравенств. Для точки A будем иметь: $-3 - 8 - 1 = -12 < 0$, следовательно, точка A принадлежит второму полупространству. Для точки B: $-1 + 15 - 12 - 1 = 1 > 0$, следовательно, точка B принадлежит первому полупространству.

Пример 2. Изобразить многогранник, который определяется следующей системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$$

Найдите координаты его вершин.

Р е ш е н и е. Данная система неравенств определяет прямоугольный параллелепипед $ABCOA_1B_1C_1O_1$ с измерениями 5, 4, 2 (рис. 248). Вершины параллелепипеда имеют следующие координаты: $A(5;\ 0;\ 0)$, $B(5;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 4;\ 0)$, $O(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(5;\ 0;\ 2)$, $B_1(5;\ 4;\ 2)$, $C_1(0;\ 4;\ 2)$, $O_1(0;\ 0;\ 2)$.

Упражнения

○ **1.** Два полупространства задаются неравенствами

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

○ **2.** Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leqslant 0$ принадлежит точка: а) $A(1;\ 0;\ 0)$; б) $B(0;\ 1;\ 0)$; в) $C(0;\ 0;\ 1)$.

○ **3.** Какую фигуру в пространстве задаёт следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4? \end{cases}$$

○ **4.** Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant y \leqslant h? \end{cases}$$

Изобразите её.

5. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 8, \\ 0 \leqslant z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ x + y + z - 6 \geqslant 0. \end{cases}$

6. Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты $(1;\ 1;\ -1)$, $(1;\ -1;\ 1)$, $(-1;\ 1;\ 1)$, $(-1;\ -1;\ -1)$.

* **7.** Изобразите поверхность, задаваемую уравнением: а) $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид); б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (коническая поверхность).

* **8.** Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0;0;h)$ и основание которого круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.

§ 52*. Многогранники в задачах оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые **задачи оптимизации**. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определённым медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;
задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации этих задач, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощённый вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырьё одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья на складе (т)		Потребность в сырье на заводе (т)			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние от склада до завода (км)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем её условие и переведём его на язык математики, т. е. составим **математическую модель.** Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвёртый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья, перевезённое на заводы (т)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20 - x - y - z$
$С_2$	$8 - x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0,\ 10 - y \geqslant 0,\ 12 - z \geqslant 0, \\ 20 - x - y - z \geqslant 0, \\ x + y + z - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строками данной системы. На рисунке 249 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20 - x - y - z = 0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нём треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8;\ 10;\ 2)$, $M_2(0;\ 10;\ 10)$, $M_3(0;\ 8;\ 12)$, $C_1(8;\ 0;\ 12)$, $C(8;\ 0;\ 0)$, $B(8;\ 10;\ 0)$, $A(0;\ 10;\ 0)$, $E_1(5;\ 0;\ 0)$, $E_2(0;\ 5;\ 0)$, $E_3(0;\ 0;\ 5)$, $O_1(0;\ 0;\ 12)$, выполняются все условия данной системы. Назовём его многогранником ограничений.

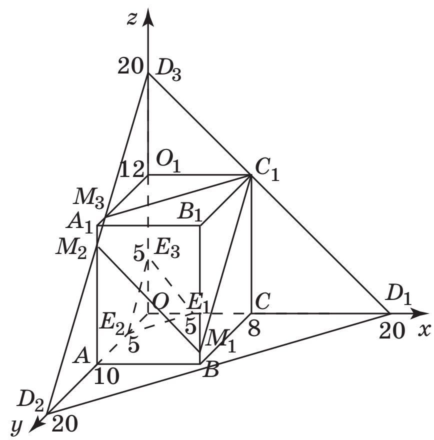


Рис. 249

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + \\ + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

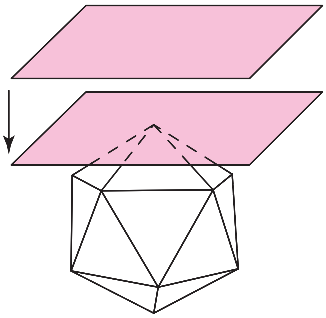


Рис. 250

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ ($c > 0$) принимает своё наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задаёт плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех её точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости, — значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника.

Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснётся с многогранником. Такое касание произойдёт при некотором d_0 в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 250), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и, поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений:

$$f(M_1) = 52,\ f(M_2) = 60,\ f(M_3) = 56,\ f(C_1) = 32,\ f(C) = 8,\ f(B) = 48,$$
$$f(A) = 40,\ f(E_1) = 5,\ f(E_2) = 20,\ f(E_3) = 10,\ f(O_1) = 24.$$

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0;\ 10;\ 10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задаётся таблицей 4.

Таблица 4

Склады	Кол-во сырья, перевезённое на заводы (т)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	0	10	10	0
$С_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трём, и поэтому в процессе её решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трёх, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются компьютеры.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трёхмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики — **многомерной геометрии**.

Упражнения

1. Найдите фигуру, определяемую следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ x \leqslant 8,\ y \leqslant 8,\ z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12. \end{cases}$$

○ **2.** Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

○ **3.** Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

○ **4.** Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

○ **5.** Что произойдёт с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если c: а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

6. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 2 - 2x + y \geqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

7. На трёх складах хранится сырьё одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

8. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

§ 53*. Полярные координаты на плоскости

Наряду с декартовыми координатами на плоскости и в пространстве, во многих случаях более удобными оказываются так называемые полярные координаты на плоскости и сферические координаты в пространстве.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдёте по этой улице около 100 м, свернёте направо, пройдёте ещё 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных или сферических координат. Последние будут рассмотрены в следующем параграфе.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат O и направляющим вектором $\overrightarrow{OE}$ (рис. 251). Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. **Полярными координатами** точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара $(r; \varphi)$, где r — расстояние от точки A до точки O, φ — угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая φ — **полярным углом**. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox. В данном случае каждую точку плоскости с декартовыми координатами $(x; y)$ можно сопоставить с полярными координатами $(r; \varphi)$ (рис. 252). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

И наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

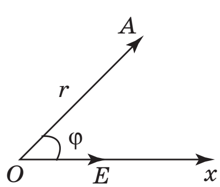


Рис. 251

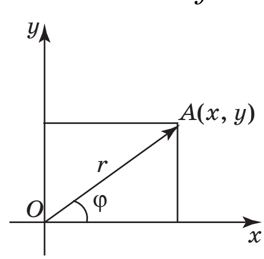


Рис. 252

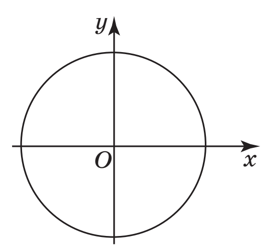


Рис. 253

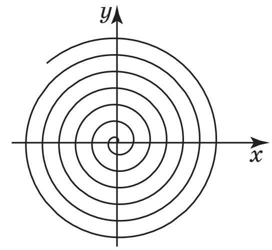


Рис. 254

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. Окружность радиуса R с центром в точке O задаётся уравнением $r = R$ (рис. 253).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом если угол φ изменяется от 0 до $+\infty$, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ изменяется от нуля до $-\infty$, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. Спираль Архимеда — кривая, задаваемая уравнением $r = a\varphi$, где a — некоторое фиксированное число (рис. 254).

Предположим, что $a > 0$, и построим эту кривую. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при изменении φ от 0 до $+\infty$. В этом случае радиус r будет возрастать и изменяться от 0 до $+\infty$. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной линией полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь учёного, открывшего и изучившего её.

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идёт звуковая дорожка на грампластинке. Туго свёрнутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

3. Логарифмическая спираль задаётся уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где a — некоторое фиксированное положительное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 255).

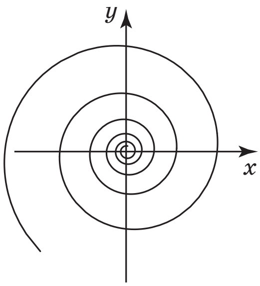


Рис. 255

В отличие от спирали Архимеда логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если $a > 1$, то при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, то при увеличении угла радиус уменьшается.

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий её виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток логарифмической спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полёта и лучом света. Однако если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полёта и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

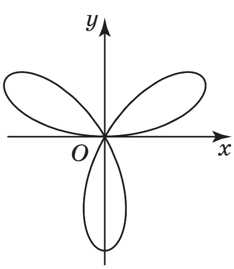


Рис. 256

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горных козлов) закручены по логарифмической спирали. Один из наиболее распространённых пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает её нити также по логарифмической спирали. По этой спирали закручены и многие галактики, в частности Галактика нашей Солнечной системы.

4. **Трилистник** — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$ (рис. 256).

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geqslant 0$, решая которое находим допустимые значения углов φ:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}.$$

В силу периодичности функции $\sin 3\varphi$ (её период равен $\frac{2\pi}{3}$) достаточно построить искомый график для углов φ в промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$, а в остальных двух промежутках использовать периодичность.

Итак, пусть $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$. Если угол φ изменяется от нуля до $\frac{\pi}{6}$, $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы, и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от нуля до $\frac{\pi}{3}$ точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется от $\frac{2\pi}{3}$ до π и от $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Упражнения

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1; 0)$, $\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: $A\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: $A\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $B(-10; 0)$, $C\left(1; -\sqrt{3}\right)$, $D\left(-\sqrt{3}; 1\right)$.

4. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

5. Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых:
а) полярный радиус r постоянен и равен r_0;
б) полярный угол φ постоянен и равен φ_0.

6. Центром правильного шестиугольника является начало координат. Одна из его вершин имеет полярные координаты $(1; 0)$. Найдите полярные координаты остальных вершин.

7. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$.

8. Нарисуйте золотую спираль, заданную уравнением $r = a^{\varphi}$, выбрав a так, что $a^{\varphi} = 1{,}1$. Предварительно вычислите значения радиуса-вектора для углов $\varphi = k\frac{\pi}{6}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

9. Нарисуйте пятилепестковую розу — кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 5\varphi$.

10. Нарисуйте кардиоиду — кривую, задаваемую уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

***11.** Человек идёт с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно Земли?

§ 54*. Сферические координаты в пространстве

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолёта, корабля и т. д., в астрономии для определения положения звёзд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

Для определения сферических координат рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку A (рис. 257). Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A', а длину вектора OA — через r. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости Oxy обозначим ψ, причём будем считать его изменяющимся от $-90°$ до $+90°$. Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью Ox обозначим φ. Тройка $(r;\ \psi;\ \varphi)$ называется **сферическими координатами точки** A в пространстве.

Декартовы координаты $(x;\ y;\ z)$ точки в пространстве выражаются через её сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

и наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz выбирается проходящей через Северный полюс, а ось Ox так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат O, то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами $(\psi;\ \varphi)$. При указании этих координат на поверхности Земли для положительных ψ от нуля до $90°$ добавляют слова «северной широты», а для отрицательных ψ от нуля до $-90°$ берут абсолютную величину ψ

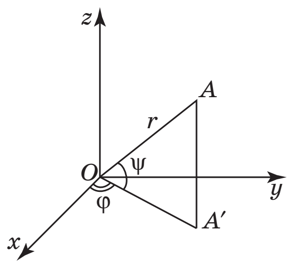


Рис. 257

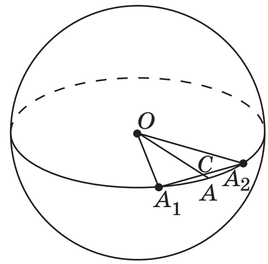


Рис. 258

и добавляют слова «южной широты». Аналогично для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова «восточной долготы», а для отрицательных φ от нуля до −180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова «западной долготы». Например, город Москва (Московский Кремль) имеет следующие координаты: 55°45′ северной широты и 37°37′ восточной долготы.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется **параллелью**. Точки, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую **меридианом**.

Выясним, какой путь, соединяющий две точки на сфере, является кратчайшим. Если бы такой путь мы искали в пространстве, то им, очевидно, был бы отрезок, соединяющий эти точки. Однако отрезок не лежит на сфере. Поэтому его требуется заменить таким путём на сфере, который по возможности меньше отличается от прямолинейного отрезка. Пусть точка C — какая-нибудь точка на отрезке A_1A_2 (рис. 258). Наименее удалённой от неё точкой на сфере является точка A пересечения прямой OC со сферой. Все такие прямые лежат в плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и O. Пересечением этой плоскости со сферой является окружность с центром в точке O. Такие окружности на сфере называются большими окружностями. Оказывается, что искомым кратчайшим путём, соединяющим точки A_1 и A_2 на сфере, является дуга большой окружности, соединяющая эти точки. Такой путь называют **ортодромией**, что в переводе с греческого означает «прямой бег».

В частности, если точки A_1, A_2 расположены на противоположных меридианах, то кратчайшим путём на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через Северный или Южный полюс в зависимости от того, в каких полушариях, Северном или Южном, лежат эти точки. Например, для точек $A_1(R;\ 45°;\ 0°)$, $A_2(R;\ 45°;\ 180°)$ угол ψ равен 45°. Кратчайший путь, соединяющий эти точки, проходит через Северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиуса $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\pi R\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути.

Хотя ортодромия и является кратчайшим путём на поверхности Земли, тем не менее самолёты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом движения является кривая, образующая равные углы с разными меридианами. Эта кривая называется **локсодромия**, что в переводе с греческого означает «косой бег». Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоянный курс, используется компас, указывающий направления меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием ЭВМ.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении начала и конца пути друг от друга. В этом случае весь путь разбивается на меньшие участки, движение по которым осуществляется с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс меняется.

Исторические сведения

Представления людей о форме и размерах Земли складывались постепенно на протяжении многих веков. Первые мысли о шарообразности Земли возникли в VI—V вв. до н. э. Они появились в результате астрономических наблюдений. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень Земли на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, находясь между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну, следовательно, Земля круглая или шарообразная. Мысль о шарообразности Земли подтверждали мореплаватели своими наблюдениями за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем, по мере приближения корабля, постепенно появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль двигается по дуге шаровой поверхности Земли и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблём и наблюдателем.

Заметим, что когда говорят о шарообразности Земли, не имеют в виду реальную земную поверхность. Поверхность Земли неровная, на ней имеются высокие горы и глубокие ущелья, океанские впадины. Речь идёт о некоторой идеальной поверхности, часть которой составляет поверхность Мирового океана. Там же, где нет океанов или морей, такую поверхность представляют мысленно и относительно неё вычисляют высоту рельефа местности. Именно эта высота и указывается на географических картах.

После того как была высказана гипотеза о шарообразности Земли, возник вопрос о нахождении её размеров. Первый дошедший до нас способ нахождения размеров Земли был предложен и осуществлён учёным из Александрии Эратосфеном в III в. до н. э. Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в городе Сиене (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается Солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение солнца от зенита в Александрии составляет одну пятидесятую часть большой окружности, и, следовательно, длина окружности Земли в 50 раз больше расстояния от Александрии до Сиены. Измерив это расстояние с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. Она оказалась равной 250 тысячам стадий. Стадия не была точно определённой мерой длины. За стадию принималось расстояние, которое проходит человек за время, нужное для подъёма Солнца над горизонтом. Учитывая среднюю скорость человека и то, что подъём Солнца над горизонтом происходит за 2 минуты, можно заключить, что стадия составляет примерно 160—185 м. Если за стадию принять 160 м, то получится точный результат 40 000 км. Однако ясно, что измерения Эратосфена не могли быть такими точными хотя бы потому, что Сиена расположена не строго на юг от Александрии, и точность измерения расстояния шагами не очень велика.

Более точные измерения Земли, использующие астрономические наблюдения, были проведены только в XVII в. Для этого на поверхности Земли выбирались два пункта, расположенные на одном меридиане. Наблюдая из них за Солнцем или звёздами, например, за Полярной звездой, определяли величину φ дуги этого меридиана. Измерив затем расстояние d между этими пунктами, находили длину всей окружности Земли по формуле $l = \frac{360^\circ}{\varphi} \cdot d$.

Измерение больших расстояний на поверхности Земли оказывается не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Как уже отмечалось, земная поверхность неровная. Одни её точки расположены выше, другие ниже. На пути могут встретиться препятствия: горы, болота, реки и т. д. Преодолеть эти трудности измерения расстояний позволяет способ Фалеса Милетского (VI в. до н. э.). В начале XVII в. его усовершенствовал голландский математик В. Снеллиус (1580—1626). Для нахождения расстояния между значительно удалёнными друг от друга пунктами Снеллиус строил сеть треугольников с началом в одном и концом в другом, которую он назвал **триангуляцией**. Сеть строилась таким образом, чтобы из каждой вершины были видны соседние с ней вершины. Измерив расстояние между какими-нибудь соседними вершинами и углы, образованные сторонами треугольников, с помощью тригонометрических формул, можно найти расстояние между исходными пунктами.

Похожая задача возникает при нахождении расстояния между вершинами многогранника. А именно: по известным плоским углам многогранника и одному из рёбер найти расстояние между заданными вершинами.

Для вычисления земного меридиана Снеллиус с помощью метода триангуляции измерил расстояние между городками Алькмааром и Берген-оп-Зоомом в Голландии и по нему вычислил длину земного меридиана. В пересчёте на километры она оказалась равна 38 605 км. Довольно большая ошибка объясняется тем, что для измерения углов Снеллиус использовал недостаточно точные приборы. Через несколько лет французский учёный Пикар, используя метод Снеллиуса и гораздо более точные приборы, снова измерил длину меридиана. В пересчёте на километры она оказалась равна 40 036 км.

После этого многие учёные в разных странах мира стали заниматься вычислением длин дуг меридианов. Оказалось, что длина дуг меридианов в 1° различна в зависимости от места расположения этих дуг. Разница могла быть за счёт погрешности вычислений, а также в случае, если поверхность Земли не является в точности шаровой поверхностью.

Используя физические соображения, основанные на учёте вращения Земли, И. Ньютон высказал предположение, что Земля сжата у полюсов, как мандарин, и имеет форму эллипсоида вращения. С другой стороны, немецкий учёный И. Эйзеншмидт, основываясь на таблицах измерений дуг меридианов, утверждал, что Земля не только не сплюснута у полюсов, но наоборот, вытянута, как лимон. Между учёными разгорелись споры по поводу этих двух точек зрения. Каждая из сторон приводила аргументы в пользу своей правоты.

Для того чтобы разобраться с этим вопросом, в 1735 году Парижская академия решила послать две экспедиции: одну на экватор в Перу, другую на север в Лапландию. Преодолев значительные трудности, жару и холод, экспедиции произвели измерения, убедительно доказавшие правоту Ньютона. Длина дуги меридиана в 1° в Лапландии составила 111,95 км, во Франции — 111,21 км, в Перу — 110,61 км. Сжатие поверхности Земли у полюсов составило около 20 км с каждой стороны.

Мы привели данные в километрах, однако в то время ни метра, ни километра ещё не существовало. Все измерения проводились в других единицах, большое число которых и неточная определённость вносили значительную путаницу в вычисления. Для того чтобы унифицировать измерения, Национальное собрание Франции в 1791 году решило ввести единую меру длины, в качестве которой была принята одна десятимиллионная часть дуги парижского меридиана от Северного полюса до экватора. Её назвали **метром**, от греческого слова «метрос», что значит мера. Тогда же учредили две экспедиции для точного измерения этого меридиана. Экспедициями была построена сеть треугольников от Барселоны до Дюнкерка на северном берегу Франции. Шесть лет заняли измерения и вычисления, пришедшиеся на годы французской революции. В результате работ был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве и называется архивным метром.

Анализ проведённых измерений длины дуги парижского меридиана позволил П. Лапласу (1749—1827) в начале XIX века сделать ещё один важный вывод о форме Земли. Оказалось, что форма Земли не совпадает точно с эллипсоидом. Поверхность Земли имеет неровности. Конечно, речь идёт не о неровностях рельефа, а о неровностях мыслимой поверхности Мирового океана. В одних местах эта поверхность имеет большую выпуклость — бугры, в других — она более плоская. Высота этих бугров, по сравнению с размерами Земли, очень небольшая и не превосходит 150 м. Их расположение на поверхности Земли хаотично и зависит от плотности Земли на соответствующих участках.

После открытия Лапласа стало ясно, что измерение только очень длинных дуг даёт правильное значение длин меридианов. Россия обладала достаточными просторами для проведения таких измерений, и в начале XIX века они начались под руководством В. Я. Струве (1793—1864). Работа продолжалась в течение сорока лет. В результате была измерена дуга меридиана длиной в $25°20'$ (около 2820 км). Погрешность на всём протяжении дуги не превысила 13 м, т. е. одной двухсоттысячной всей дуги.

В XX веке использование ЭВМ и искусственных спутников Земли дало возможность ещё более точных измерений. Определяя с помощью радаров расстояния от станции наблюдения до спутников и обрабатывая их на компьютерах, находят траекторию движения спутника, а по ней уточняют и форму Земли.

Упражнения

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: (1; 45°; 120°), (2; –30°; –90°), (1; 90°; 60°).
2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 0; 2)$.
3. Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

4. Точка A имеет сферические координаты $(r; \psi; \varphi)$. Найдите сферические координаты точки, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

5. Укажите на глобусе точки, имеющие координаты: а) 30° южной широты и 45° восточной долготы; б) 90° северной широты и 25° западной долготы.
6. Укажите приближённые координаты городов: а) Санкт-Петербург; б) Вашингтон; в) Токио.
7. Найдите по глобусу длину кратчайшего пути между Москвой и Вашингтоном.
8. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли примите равным 6000 км.
9. Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при её продолжении в обе стороны?
10. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.
11. Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами: а) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi$; б) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; в) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$?
12. Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A\left(\sqrt{2};\ 0^\circ;\ 45^\circ\right)$, $B(2;\ 60^\circ;\ 0^\circ)$.
13. Докажите, что для дуг AB, BC, AC больших окружностей на сфере справедливо неравенство, аналогичное неравенству треугольника: $AC \leqslant AB + BC$. (Воспользуйтесь соотношением между плоскими углами трёхгранного угла.)

ОТВЕТЫ

§ 2

1. 61°. **2.** 62°. **3.** 28°. **4.** 104°. **5.** 31°. **6.** 116°. **7.** 64°. **8.** 69°. **9.** 51°. **10.** 41°. **11.** 160°. **12.** 40°. **13.** 72°. **14.** 30°. **15.** 34°. **16.** 10°. **17.** 38°. **18.** 74°. **19.** 52°. **20.** 48°. **21.** 90°. **22.** 2. **23.** 30°. **24.** 3. **25.** 150°. **26.** 45°. **27.** 2. **28.** 135°. **29.** 60°. **30.** 3. **31.** 120°. **32.** 3. **33.** 2. **34.** 1. **35.** 36°. **36.** 36°. **37.** 40°. **38.** 32°. **39.** 108°. **40.** 130°. **41.** 119°. **42.** 61°. **43.** 45°. **44.** 116°. **45.** 36°. **46.** 37°. **47.** 16°. **48.** 24°. **49.** 42°. **50.** 65°. **51.** 21°. **52.** 31°. **53.** 40°. **54.** 56°. **55.** 49°. **56.** 82°. **57.** 105°. **58.** 100°. **59.** 104°. **60.** 35°. **61.** 122°. **62.** 108°. **63.** 60°. **64.** 70°. **65.** 110°. **66.** 40°. **67.** 46°. **68.** 64°. **69.** 118°. **70.** 58°. **71.** 26°. **72.** 62°.

§ 3

1. 2. **2.** 6. **3.** 3. **4.** 4. **5.** 2. **6.** 6. **7.** 3. **8.** 1. **9.** 6. **10.** 2. **11.** 4. **12.** 3. **13.** 5. **14.** 12. **15.** 12. **16.** 5. **17.** 5. **18.** 10. **19.** 10. **20.** 24. **21.** 1,5. **22.** 1,5. **23.** 1. **24.** 1. **25.** 16. **26.** 9. **27.** 1,5. **28.** 1. **29.** 9. **30.** 3. **31.** 4. **32.** 60°. **33.** 12. **34.** 15. **35.** 12. **36.** 15. **37.** 1,5. **38.** 2. **39.** 8. **40.** 45°. **41.** 4. **42.** 24. **43.** 18. **44.** 6. **45.** 8. **46.** 6. **47.** 4. **48.** 3. **49.** 2. **50.** 6. **51.** 2. **52.** 1. **53.** 1. **54.** 3. **55.** $\sqrt{13}$. **56.** $\sqrt{7}$. **57.** $-0{,}6$. **58.** $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **59.** 45°. **60.** 0,25. **61.** 30°. **62.** 3. **63.** 8.

§ 4

1. 120°. **2.** 130°. **3.** 125°. **4.** 120°. **5.** 10. **6.** 12. **7.** 10. **8.** 60°. **9.** 12. **10.** 2. **11.** 56. **12.** 2. **13.** 1,5. **14.** 115°. **15.** 23. **16.** 38. **17.** 5. **18.** 126°. **19.** 90°. **20.** 20. **21.** 20. **22.** 28. **23.** 10. **24.** 3. **25.** 48. **26.** 10. **27.** 10. **28.** 5. **29.** 15. **30.** 69. **31.** 23. **32.** 10. **33.** 3. **34.** 15. **35.** 4. **36.** 20. **37.** 9. **38.** 14. **39.** 0,5. **40.** 12. **41.** 9.

§ 5

1. 1. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 4,5. **5.** 6. **6.** 8. **7.** 2,5. **8.** 8. **9.** 2. **10.** 2,5. **11.** 10. **12.** 2. **13.** 4. **14.** 6. **15.** 6. **16.** 2. **17.** 18. **18.** 0,5. **19.** 1. **20.** 2. **21.** 8. **22.** 0,25. **23.** 8. **24.** 2. **25.** 2. **26.** 1,5. **27.** 1. **28.** 30. **29.** 3. **30.** 1. **31.** 45°. **32.** 1. **33.** 150°. **34.** 1. **35.** 1. **36.** 25. **37.** 6. **38.** 6. **39.** 7. **40.** 82°. **41.** 122°. **42.** 90°. **43.** 24. **44.** 5. **45.** $4(\sqrt{2}+1)$. **46.** 1. **47.** 1. **48.** 1,5. **49.** 22. **50.** 4. **51.** 10. **52.** 2. **53.** 52. **54.** 7. **55.** 14. **56.** 12. **57.** 4. **58.** 1.

§ 6

1. 0,5. **2.** 2. **3.** 6. **4.** 40. **5.** 0,5. **6.** 20. **7.** 8. **8.** 25. **9.** 100. **10.** 24. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 6. **14.** 50. **15.** 0,25. **16.** 2. **17.** 0,25. **18.** 1. **19.** 18. **20.** 6. **21.** 18. **22.** 18.

23. 14. **24.** 48. **25.** 13. **26.** 48. **27.** 8. **28.** В 2 раза. **29.** 30°. **30.** 6. **31.** 8. **32.** 8. **33.** 24. **34.** 3. **35.** 2. **36.** 24. **37.** 6. **38.** 12. **39.** 10. **40.** 20. **41.** 30°. **42.** 6. **43.** 6. **44.** 24. **45.** 3. **46.** 8. **47.** 7. **48.** 15. **49.** 8. **50.** 160. **51.** 30. **52.** 16. **53.** 45. **54.** 160. **55.** 5. **56.** 42. **57.** 30°. **58.** 22. **59.** 30. **60.** 1. **61.** 12. **62.** 135°. **63.** 4.

§ 7

1. 8. **2.** 6. **3.** 10. **4.** −6. **5.** −8. **6.** (−6, −8). **7.** (3, 4). **8.** (2, 5). **9.** 4. **10.** 10. **11.** 10. **12.** 0,8. **13.** 0,6. **14.** 1. **15.** −1. **16.** 12. **17.** 9. **18.** −4. **19.** (6, 8). **20.** (6, 2). **21.** 3. **22.** (3, 4). **23.** (8, 2). **24.** (5, 4). **25.** 8. **26.** 2. **27.** 3. **28.** 1,2. **29.** −6. **30.** −0,75. **31.** 10. **32.** 6. **33.** 8. **34.** 5. **35.** 2. **36.** 5. **37.** (4, 3). **38.** 20. **39.** 40. **40.** 32. **41.** 24. **42.** 36. **43.** 32. **44.** 10. **45.** 10. **46.** 10. **47.** 0. **48.** 6. **49.** 8. **50.** 10. **51.** 16. **52.** 12. **53.** 10. **54.** 10. **55.** 10. **56.** 0. **57.** 6. **58.** 3. **59.** 4,5. **60.** (8, 6). **61.** 21. **62.** (2, 2). **63.** 5.

§ 9

2. Одна. **3.** Одна, если точки не принадлежат одной прямой. Бесконечно много, если точки принадлежат одной прямой. **4.** Бесконечно много. **5.** Нет. **6.** а), б) Нет. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Совпадают. **10.** а), б) Да; в) нет. **11.** а) Нет; б) да. **12.** а) Да; б) нет. **18.** Нет. Одна или три. **19.** а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$. **20.** а) 4; б) 10; в) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **21.** а) 3; б) 6; в) $\frac{n(n-1)}{2}$. **22.** а) 4; б) 8; в) 15.

§ 10

1. Нет. **2.** а) Нет; б) да. **3.** Пятиугольник. **4.** а) 5-угольная; б), в) 6-угольная. **5.** а) Нет; б) да. **6.** а) Да; б) нет. **7.** 16-угольник. **8.** а) 5-угольная; б) 11-угольная; в) 9-угольная. **9.** в), д), ж). **10.** а) Прямоугольный параллелепипед; б) треугольная; в), г) прямая треугольная. **11.** а) Четырёхугольная; б), д) треугольная. **12.** а), б), в), г) Да. **15.** а) Нет; б) да. **18.** а), б) 4; в) 0; г) $n(n-3)$; д) 0. **27.** 12. **28.** 30. **29.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 4. **30.** $\sqrt{5}$.

§ 11

1. Пересекаться, быть параллельными или скрещиваться. **2.** Нет. **3.** У которых основание имеет параллельные стороны. **4.** а) Нет; б) да, 18 пар; в) да, 6 пар; г) да, 15 пар; д) да, 15 пар. **6.** Нет. **7.** а) Одна; б) бесконечно много. **8.** Лежат в одной плоскости. **9.** а) Да, 24 пары; б) да, 300 пар; в) да, 300 пар. **10.** Нет. **11.** Бесконечно много, если точка не принадлежит данной прямой. **12.** Нет. **18.** Проходящая через точку *C*. **19.** Нет. **20.** Скрещиваются. **21.** Нет. **27.** а) 3; б) 15; в) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 12

1. Прямая лежит в плоскости, прямая пересекает плоскость, прямая параллельна плоскости. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Параллельна данным прямым. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** Нет. **12.** Прямые AB, BC, DE, EF пересекают плоскость; CD параллельна плоскости. **17.** Параллельны. **22.** Скрещиваются.

§ 13

1. Пересекаются или параллельны. **3.** а) Нет; б) да, 3 пары; в) да, 4 пары. **4.** а), б) Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Нет.

§ 14

1. Если прямая параллельна направлению проектирования. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** Если прямая параллельна направлению проектирования. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Одна или две. **10.** Три, две или одна. **11.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **12.** Если они лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования, но не параллельно ему. **13.** Если они параллельны направлению проектирования. **14.** Пересекающиеся прямые, параллельные прямые, прямая и точка. **15.** Прямая не параллельна направлению проектирования, и через эту прямую и данную точку проходит плоскость, параллельная направлению проектирования. **16.** Прямые должны пересекаться, и одна из них должна быть параллельна направлению проектирования. **17.** Да. **18.** Нет. **20.** $\frac{na + mb}{n + m}$.

§ 15

1. Треугольник или отрезок. **2.** а), б), в) Да. **3.** Да. **4.** Параллелограммом или отрезком. **5.** а), б), в) Да; г) нет. **6.** Нет. **7.** Параллелограммов. **8.** а) Да; б), в) нет. **10.** Параллелограммом. **11.** В трапецию или отрезок. **23.** $\frac{a + b + c}{3}$.

§ 16

1. Да. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** Треугольной или четырёхугольной пирамиды. **5.** а), б) Четырёхугольные пирамиды; в) тетраэдр; г), д) шестиугольные пирамиды; е) куб. **6.** Нет. **14.** S.

§ 17

1. Многоугольником. **2.** а), б) $\frac{n(n-3)}{2}$. **3.** $2n$; $3n$; $n + 2$. **4.** а), б), в) Да; г), д) нет. **5.** а), б), в), г) Да; д) нет. **6.** а) Да; б) нет. **7.** а), б) Да; в) нет. **8.** Треугольники, четырёхугольники, пятиугольники. **9.** Да. **10.** Нет. **16.** Равнобедренная трапеция периметра $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$. **22.** Равнобедренная трапеция. **23.** Да.

§ 18

1. Бесконечно много. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** Нет. **7.** а) 90°; б) 90°; в) 45°; г) 60°; д) 90°. **8.** $\cos\varphi = 0{,}8$. **9.** $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. **10.** а) 90°; б) 45°; в) 60°; г) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$; д) $\cos\varphi = \frac{1}{4}$. **11.** а) 60°; б) 90°. **12.** а) 90°; б) 45°; в) $\cos\varphi = \frac{3}{4}$; г) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$; д) $\cos\varphi = \frac{1}{4}$; е) $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **13.** а) 1; б) 1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **14.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 0,5; е) 1,5; ж) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **15.** а) — е) 1.

§ 19

1. Нет. **2.** Да. **3.** а) Нет; б) да. **4.** а), б) Нет. **6.** а), б) Нет. **7.** Да. **8.** Перпендикулярны. **9.** Плоскость, перпендикулярная данной прямой. **10.** Перпендикулярна. **11.** а), б) Да; в) нет. **12.** а), б), в) Да. **18.** Да. **19.** Прямоугольный. **20.** Прямые перпендикулярны. **22.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **26.** а), б) Да; в) нет. **28.** Правильным шестиугольником.

§ 20

1. Да. **2.** Параллельными ортогональной проекции наклонной. **3.** Равны. **4.** Нет. **6.** Да. **7.** Параллельны или пересекаются. **8.** Окружность. **9.** Да. **10.** Равны. **11.** Равны. **12.** SC — наименьший; SB — наибольший. **13.** а) 45°; б) 30°. **14.** 12 см. **15.** 2 см. **16.** 9 см. **17.** $3\sqrt{41}$ см. **18.** b и $\sqrt{2a^2 + b^2}$. **22.** $\cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$. **23.** 60°. **25.** 45°.

§ 21

1. Они перпендикулярны. **2.** 90°. **3.** Да. **4.** $\angle MAB$. **5.** $\angle MHB$, где BH — высота параллелограмма, опущенная на сторону AD. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Одну, если прямая не перпендикулярна плоскости; бесконечно много, если прямая перпендикулярна плоскости. **9.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Нет. **15.** 60°. **16.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **17.** 60°. **18.** а), в) Да; б), г) нет. **20.** $10\sqrt{2}$ дм^2. **21.** 6 см^2.

22. а) $\sqrt{6}$ см; б) $3\sqrt{6}$ см. **23.** а) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a^2}{\cos\varphi}$. **24.** $2\sqrt{\frac{2Q\cdot\cos\varphi}{7}}$. **27.** 90°, 60°. **28.** Да. **29.** Да. **30.** Да. **31.** а), б), в) Да.

§ 22

1. Нет. **3.** Да. **4.** Если прямые параллельны плоскости проектирования. **5.** Уменьшенное прямое. **6.** Перевёрнутое. **7.** Увеличенное прямое. **8.** Она будет подобна исходной. **14.** $\frac{2}{3}$.

§ 23

1. а) Тетраэдр, куб; б) октаэдр; в) икосаэдр. **2.** а) Трёхгранные; б) трёхгранные и пятигранный. **4.** а) 5; б) 14; в) 20. **5.** а), б) Нет; в) да. **6.** $10° < \varphi < 150°$. **8.** 90°. **9.** 60°. **10.** 90°. **11.** $\sqrt{6}$ см.

§ 24

1. а), г) Выпуклые; б), в) невыпуклые. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** б), д) Выпуклые; а), в), г) невыпуклые. **5.** Нет. **6.** Пространственный крест. **7.** Число плоских углов равно удвоенному числу рёбер. **8.** Нет. **9.** Четырёхугольная пирамида. **10.** Шестиугольная пирамида. **11.** Тетраэдр. **12.** Четырёхугольная пирамида. **13.** 7 дм. **14.** а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{n(n-3)}{2}$. **15.** Нет. **22.** 200 см^2. **23.** 22 см. **24.** 5 см, 6 см. **28.** а) Да; б) нет. **29.** а) Да; б) нет.

§ 25

1. Четырёхугольные пирамиды, треугольные бипирамиды. **2.** а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10. **4.** а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7. **6.** Нет. **7.** В = 8, Г = 6. **8.** В = 6, Г = 8.

§ 26

3. Из треугольников. **6.** Нет. **7.** Нет, 30 квадратов, 32 вершины, 60 рёбер. **8.** в). **11.** Тетраэдр. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** Октаэдр. **14.** $\sqrt{2}$ дм. **17.** $\frac{a}{2}$. **18.** $a(\sqrt{6}-2)$.

§ 27

2. 4 треугольника и 4 шестиугольника; 8 треугольников и 6 восьмиугольников. **3.** 24 вершины, 36 рёбер, 14 граней. **4.** Усечённый икосаэдр. **6.** 12 десятиугольных и 20 треугольных граней. **8.** Треугольных. **10.** $a\sqrt{\sqrt{3}-1}$. **11.** $\frac{1}{3}$. **12.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$. **13.** $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ или $\frac{1}{2}$. **15.** В = 60, Р = 90, Г = 32; В = 60, Р = 90, Г = 32. **16.** Операция усечения; а) усечённый куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усечённый октаэдр; а) $(\sqrt{2}-1)a$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 28

1. Нет. **2.** Вершины звёздчатого октаэдра являются вершинами куба. **3.** Октаэдром. **4.** 12 вершин выпуклых пятигранных углов; 30 рёбер; 12 звёздчатых пятиугольных граней. **5.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **6.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. **7.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

§ 29

3. $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. **4.** $4\sqrt{3}$. **5.** а) Г = 12, Р = 24, В = 14; б) да, 6; в) 8 трёхгранных и 6 четырёхгранных углов; г) 120°; д) 90°. **6.** Да. **7.** Только из кубов. **8.** Кубооктаэдра.

§ 30

1. Бесконечно много. **3.** Кругом. **4.** Прямоугольником. **5.** Прямоугольником. **6.** а), в) Да; б) нет. **7.** а) Одна; б) бесконечно много. **8.** Кругом. **9.** Равнобедренным треугольником. **10.** Бесконечно много. **11.** а) Нет; б) да. **12.** Да. **13.** 5 м. **14.** $2r\sqrt{d^2-4r^2}$. **15.** $\frac{\sqrt{Q}}{2}$. **16.** 4π см^2. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** а) Точки цилиндра, принадлежащие оси; б) круг. **20.** Фигура, состоящая из двух кругов. **21.** 16 см^2. **22.** $\sqrt{3}$ см^2. **23.** 10 м. **24.** 5 см и $5\sqrt{3}$ см. **25.** 90°. **26.** 9π м^2. **27.** $16\sqrt{3}$ см^2. **28.** а), б) Осевое сечение.

§ 31

1. Круг. **2.** Прямые, содержащие или параллельные одной из сторон прямоугольника и пересекающие прямоугольник. **4.** Конус. **6.** Шар. **7.** Цилиндр. **8.** а) Цилиндр; б) фигура, ограниченная двумя частями гиперболоида вращения. **9.** Конус. **11.** Фигура, ограниченная гиперболоидом вращения. **12.** а) Фигура, составленная из двух конусов с общим основанием; б) фигура, ограниченная гиперболоидом вращения; в) фигура, ограниченная двумя частями гиперболоида вращения. **18.** 8 см. **19.** 24 см^2. **21.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и гиперболоидом вращения между ними; б) фигура, ограниченная тремя гиперболоидами вращения; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения. **22.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и трёх гиперболоидов вращения между ними; б) фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух усечённых конусов и гиперболоидом вращения; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения.

§ 32

1. а) Бесконечно много; б) одну. **2.** а), б) Бесконечно много; в) ни одной. **3.** Нет. **4.** а) Находятся на одинаковом расстоянии от центра; б) меньшее находится на большем расстоянии от центра. **5.** Проходящее через центр шара. **6.** Общим диаметром. **7.** а) Ни одной, одну или две; б), в) ни одной, одну, бесконечно много. **8.** Диаметрально противоположные. **9.** Окружности должны иметь общий центр. **10.** а) Если расстояние между центрами сфер больше суммы или меньше разностей их радиусов, то сферы не имеют общих точек; б) если расстояние между центрами сфер равно сумме или разности их радиусов, то сферы касаются; в) если расстояние между центрами сфер меньше суммы и больше разностей их радиусов, то сферы пересекаются. **11.** Окружностью. **12.** а) Пересекаются в одной точке; б) параллельны. **13.** 4 см. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **16.** 4 см. **17.** 30 см. **18.** а) Две; б) одну; в) бесконечно много. **19.** Да. **20.** а) Плоскость, параллельная данным; б) две биссектральные плоскости без линии их пересечения. **21.** а) Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса, то сфера и прямая не имеют общих точек; б) если расстояние от центра сферы до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы; в) если расстояние от центра сферы до прямой меньше радиуса, то сфера и прямая пересекаются. **22.** Бесконечно много. **23.** а), б) Бесконечно много. **24.** а) Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая; б) две плоскости, параллельные данной плоскости; в) две сферы или одна сфера, концентрические с данной сферой. **25.** Да, если одна из сфер не содержится в другой. **27.** $R : \sin \frac{\varphi}{2}$.

§ 33

1. Около основания призмы можно описать окружность. **2.** Трапеция равнобедренная. **3.** Нет. **4.** а), б) Да; в), г) нет. **5.** Призма, в основании которой ромб. **6.** Нет. **7.** Да. **8.** Пирамида, в основании которой ромб. **9.** Около него можно описать окружность. **10.** Тупоугольный. **11.** В основании призмы: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник. **12.** а) Да; б) нет. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **14.** 1,5 дм. **15.** 2 дм. **17.** Высота — $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, центр — середина AB. **20.** 13 см. **23.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **24.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 34

1. Да, центр куба. **2.** Нет. **3.** Высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание. **4.** Да, если высота призмы равна высоте ромба. **5.** Прямая призма, в основании которой прямоугольник. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** Да. **8.** Пирамида, в основании которой прямоугольник. **9.** $\frac{h}{2}$. **10.** $\sqrt{3}$ см. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **14.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **15.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **16.** $\frac{1}{2}a \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **17.** $\frac{a\sqrt{3}}{4+\sqrt{2}}$. **18.** Если в сечении усечённой пирамиды плоскостью, проходящей через центры оснований и параллельной ребру основания, получается трапеция, в которую можно вписать окружность.

§ 35

1. Эллипс. **3.** а) $2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^2$; б) $\sqrt{2}\pi R^2$; в) $2\pi R^2$. **10.** $-\frac{\pi}{2}$. **12.** $6\sqrt{\pi^2+1}$ см.

§ 36

1. Центрально-симметричные: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др.; не центрально-симметричные: пирамида, конус и др. **2.** Может. **3.** Центр симметрии — точка пересечения данных прямых. Оси симметрии — две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованные данными прямыми, и прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых и перпендикулярная их плоскости. Если данные прямые перпендикулярны, то сами они также являются осями симметрии. Плоскости симметрии: плоскость данных прямых и две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованные данными прямыми, и перпендикулярные их плоскости. **4.** 9 осей симметрии. **5.** Бесконечно много. **6.** Три плоскости симметрии. **7.** Пирамида, в основании которой параллелограмм, имеет ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии. Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии. **8.** Правильные 3-угольные, 4-угольные пирамиды. **9.** Третьего. **10.** Центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего порядка. **11.** а) Семь осей симметрии; б) семь плоскостей симметрии. **12.** Нет. **13.** Середина отрезка, соединяющего данные точки.

16. Центр симметрии, ось симметрии 4-го порядка и 4 оси симметрии 2-го порядка, 5 плоскостей симметрии. **17.** Ось симметрии 7-го порядка, 7 плоскостей симметрии. **18.** а) $2n - 1$ осей симметрии, одна ось симметрии $(2n - 1)$-го порядка; б) $2n$ плоскостей симметрии. **19.** Центром симметрии. **20.** а) 3 оси симметрии; б) 3 плоскости симметрии. **21.** Центром симметрии. **22.** Нет. **23.** а) Одна ось симметрии, n плоскостей симметрии; б) нет осей симметрии, n плоскостей симметрии (n — число сторон основания пирамиды). **24.** а) Одна, если n чётно, и ни одной, если n нечётно; б) n плоскостей симметрии. **25.** Может, например, пирамида, в основании которой ромб, имеет ось симметрии и две плоскости симметрии. **26.** Нет.

§ 37

1. а), б) Две. **2.** Боковая поверхность цилиндра. **3.** а), б), в) Да. **4.** Две. **5.** а) Да; б) нет. **6.** а). **7.** Две. **8.** Две сцепленные дважды перекрученные ленты. **9.** Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента. **13.** $2ab$. **14.** $2b$. **15.** а) Две; б), в) одна. **17.** Лист Мёбиуса; дважды перекрученная лента. **18.** Одна. **19.** в) Две; г) одну.

§ 38

1. а) Нет; б) да. **2.** Куб со стороной, равной 1, и прямоугольный параллелепипед со сторонами 1, 2 и 0,5. **3.** Семь куб. ед. **4.** Три куб. ед. **5.** 20 см^3. **6.** 1 : 1. **7.** а), б), в) Да; г) нет. **8.** Та, которая шире. **9.** 60 см^3. **10.** 200 см^3. **11.** а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) увеличится в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз; в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз. **12.** а) 1 : 8; б) 1 : 27; в) $1 : n^3$. **13.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см^3. **14.** 12 см. **15.** 1 : 3. **16.** $V = \dfrac{n \cdot a^2 h}{4\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}$. **17.** $\frac{3V}{4}$. **18.** 5 : 3. **19.** πa^3. **20.** 3 см. **21.** 140 см^3. **22.** $V = \frac{\pi \cdot d^3}{4} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$. **23.** 243π см^3. **24.** 4 см. **25.** $\pi R^3 \mathrm{tg}\,\varphi$. **28.** $\frac{1}{6}$.

§ 39

1. Нет. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Да. **5.** 2 : 1. **6.** Да. **7.** Да. **8.** 3 : 1. **9.** $V = S \cdot b \cdot \sin\varphi$. **10.** 168 дм^3. **11.** $Q \cdot b \cdot \sin\varphi$. **12.** $\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \sin\varphi$. **13.** $\sqrt{2}$ м^3. **14.** $\frac{\sqrt{3}}{8} ad\sqrt{4a^2 - d^2}$. **17.** Объём фигуры Φ_2 в k раз больше объёма фигуры Φ_1.

§ 40

1. Одну треть. **2.** $\frac{1}{3}abh$. **3.** $\frac{\sqrt{3}a^2h}{12}$. **4.** $\frac{d^2h}{6}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **6.** 1 : 3. **7.** $h_1 : h_2$. **8.** 6 см^3. **9.** Уменьшится в n раз. **10.** $V = \frac{1}{3}a^2h$. **11.** $\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$. **12.** 32 м^3. **13.** 7 см. **14.** $V = \frac{1}{12}na^2h \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{12}b^3$. **16.** $\frac{1}{2}V$. **17.** $\frac{1}{3}$. **18.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **19.** $\frac{1}{6}$. **20.** а) Равнобедренный треугольник; б) $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$; в) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}}{33}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$ и $\frac{\sqrt{2}}{16}a^3$. **21.** $\frac{a^3}{24}$. **22.** $\frac{3a^3}{4}$. **23.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **24.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

§ 41

1. а) В 3 раза; б) в 4 раза. **2.** Увеличится в 2 раза. **3.** 120π см^3. **4.** 1 : 7. **5.** 12π см^3. **6.** 16π см^3. **7.** 72π см^3. **8.** 9π см^3. **9.** $V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{b^2 - R^2}$. **10.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ дм^3. **11.** $\frac{3V}{\pi R}$. **12.** $\frac{\pi l^3}{8}$. **13.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **14.** Нет. **15.** 19π см^3. **16.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$. **17.** 2325 м^3. **18.** $\frac{a^3 - b^3}{2}$. **19.** $\frac{\pi(R^3 - r^3)}{3}$. **20.** 8 см.

§ 42

1. $\frac{4}{3}\pi$ см^3. **2.** $\frac{32\pi}{3}$ см^3. **3.** а) В 27 раз; б) в 64 раза. **4.** 6 см. **5.** 27. **6.** $\left(3\frac{5}{7}\right)^3 \approx$ ≈ 50 раз. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **8.** 1000. **9.** $\frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)$. **10.** $V = \frac{1}{6}\pi D^3$. **11.** 216 : 1. **13.** 6 см. **14.** $\frac{4000}{3}\pi$ см^3. **15.** $5\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ см. **16.** $\frac{4}{3}R$. **17.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. **18.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **19.** 288π см^3. **20.** $\frac{7}{250}$. **21.** $V = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$.

§ 43

1. Площадь: а) прямоугольника; б) кругового сектора. **2.** 6. **3.** а) $\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$. **4.** 24 м^2. **5.** 12π м^2. **6.** Двумя способами, в обоих площади равны.

7. 80π. **8.** Уменьшится в: а) 2 раза; б) 4 раза; в) 6 раз. **9.** πh^2. **10.** 1 : 2 : 3. **11.** 4π м^2. **12.** $6S$. **13.** 24π м^2. **14.** $8\sqrt{2}\pi$ см^2. **15.** $a\left(3b + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. **16.** $\frac{1}{2}na^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{180^\circ}{n} + nab$. **17.** 2 : 1. **18.** $2\sqrt{2}\,Q$. **19.** $\frac{a}{2}$. **20.** 20 см^2. **21.** 60°. **22.** Равнобедренный. **23.** $\pi : 4$. **24.** а) $3\pi R^2 - \pi r^2$; б) $(\sqrt{2}+1)\pi R^2 + (1-\sqrt{2})\pi r^2$.

§ 44

1. 12 см^2. **2.** Увеличится в: а) 4 раза; б) 9 раз; в) n^2 раз. **3.** а) Уменьшится в 5 раз; б) увеличится в $\sqrt{2}$ раз. **4.** $\approx$ 13,8 раза. **5.** 400π см^2. **6.** 2 : 3. **7.** $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$. **8.** $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$. **9.** 784π см^2. **10.** 25 см. **11.** 400π см^2. **12.** $\frac{1125\pi}{2}$ м^3. **14.** 2500π дм^2. **15.** В три раза. **16.** 8π дм^2.

§ 45

2. а) (1; 3; 0), (5; −6; 0); б) (0; 3; 4), (0; −6; 2); в) (1; 0; 0), (5; 0; 0); г) (0; 0; 4), (0; 0; 2). **3.** а) Плоскость Oyz; б) плоскость Oxz; в) плоскость Oxy; г) ось Oz; д) ось Oy; е) ось Ox; ж) начало координат. **4.** а) 3; б) 2; в) 1. **5.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **6.** а) Плоскость, параллельная плоскости Oyz и проходящая через точку (1; 0; 0); б) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1; 1; 0). **7.** а) $z = x$; б) $x = y = z$. **8.** 3, $\sqrt{29}$. **9.** Точка A. **10.** а) (2; −5; 0), 3; б) (0; 6; −1), $\sqrt{11}$. **12.** $B(-2; -2; 0)$, $C(2; -2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $A_1(-2; 2; 4)$, $B_1(-2; -2; 4)$, $C_1(2; -2; 4)$, $D_1(2; 2; 4)$. **13.** (−1; 0; 0), (0; −1; 0), (0; 0; 1), (0; 0; −1). **14.** Пересекает ось Ox в точке с координатами (1; 0; 0); не проходит через начало координат. **15.** а) $(-x; y; z)$, $(x; -y; z)$, $(x; y; -z)$; б) $(-x; -y; z)$, $(-x; y; -z)$, $(x; -y; -z)$; в) $(-x; -y; -z)$. **16.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. **17.** а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$; в) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. **18.** а) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$; б) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 10$; в) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 13$. **19.** 8 сфер, $(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 + (z \pm R)^2 = R^2$. **20.** Уравнение сферы $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$, радиус равен 2, центр — (2; 0; 0). **21.** $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$, точка M принадлежит сфере, а точка K — нет. **22.** Лежит внутри сферы. **23.** Не имеют общих точек. **24.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$. **25.** Цилиндрическая поверхность.

§ 46

4. Да, если A совпадает с B. **5.** Да. **6.** Если векторы одинаково направлены. **8.** а) Да; б) нет. **9.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **12.** $\overrightarrow{B_1D}$.

§ 47

1. а) $(-2;\ 6;\ 1)$; б) $(1;\ 3;\ 0)$; в) $(0;\ -3;\ 2)$; г) $(-5;\ 0;\ 5)$. **2.** а) $(-7;\ 9;\ -16)$; б) $(5;\ -8;\ -2)$; в) $(8;\ 0;\ 19)$. **3.** $(-a;\ -b;\ -c)$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** $2\sqrt{3}$. **6.** $(1;\ 3;\ -2)$; $(1;\ -3,\ 6)$. **7.** $(-4;\ 0;\ 6)$ и $\left(-1;\ 0;\ \frac{3}{2}\right)$. **8.** $(1;\ 2;\ 1)$. **9.** $(2;\ 0;\ 4)$; $(2;\ 3;\ 4)$; $(0;\ 0;\ 4)$; $(0;\ 3;\ 0)$. **10.** а) $(1;\ -2;\ 30)$; б) $\left(-1;\ 2;\ 3\frac{1}{4}\right)$; в) $(11;\ -22;\ 7)$. **11.** $(5;\ -6;\ -7)$. **12.** а) Первая и вторая координаты равны нулю; б) вторая и третья координаты равны нулю. **13.** а) $(1;\ 2;\ 4)$, $(1;\ 2;\ 2)$; б) $(2;\ 2;\ 3)$, $(0;\ 2;\ 3)$. **14.** а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$. **15.** $\left(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ -\sqrt{3}\right)$. **16.** $\sqrt{14}$, $\sqrt{46}$.

§ 48

1. а) $90°$; б) $135°$; в) $90°$; г) $120°$; д) $135°$. **2.** -4. **3.** а) Плюс; б) минус. **4.** -66. **5.** Нулю. **6.** Перпендикулярны. **7.** $180°$. **8.** $-|\vec{a}|^2$. **9.** а) $\cos\varphi = -\frac{4\sqrt{6}}{21}$; б) $\varphi = 45°$. **10.** $z = 2$. **13.** $60°$. **14.** $t = 0$. **17.** а) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $90°$, $\cos\varphi = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; в) $180°$, $90°$, $90°$; г) $90°$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. **18.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

§ 49

4. $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. **5.** A, C, D. **6.** $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{3}$. **7.** $\left(-\frac{d}{a};\ 0;\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{d}{b};\ 0\right)$, $\left(0;\ 0;\ -\frac{d}{c}\right)$. **9.** $-x + y + z - 1 = 0$. **10.** $2x - 4y + z + 21 = 0$. **11.** а) $x + y + z - 1 = 0$; б) $x + 4y + 3z - 5 = 0$. **12.** а) $y = -2$; б) $y = 2$; в) $x + y = 3$. **13.** а), в). **14.** а) $3x + y - z - 7 = 0$; б) $x - y + 5z + 7 = 0$. **16.** а) Да; б) нет. **17.** а) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; б) $\cos\varphi = \frac{16}{21}$. **19.** а) $ax + by - cz + d = 0$, $ax - by + cz + d = 0$, $-ax + by + cz + d = 0$; б) $ax - by - cz + d = 0$, $-ax + by - cz + d = 0$, $-ax - by + cz + d = 0$; в) $-ax - by - cz + d = 0$. **20.** а) 2; б) 2.

§ 50

1. Ось Ox $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ Ось Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0. \end{cases}$ Ось Oz $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0, \\ z = z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$

6. $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. **7.** Перпендикулярны. **8.** $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{7}; 2\right)$. **9.** Перпендикулярны. **10.** (3; 9; 10). **11.** $\sqrt{14}$. **12.** $\frac{\sqrt{19}}{4}$.

§ 51

1. Системой этих неравенств. **2.** а), б) Первому; в) второму. **3.** Прямоугольный параллелепипед. **4.** Цилиндр. **6.** $|x + y| + z \leqslant 1$, $|x - y| - z \leqslant 1$. **8.** $x^2 + y^2 \leqslant \left(R\frac{h - z}{h}\right)^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

§ 52

2. Плоскость. **3.** Параллелен. **4.** Проходит через начало координат. **5.** а) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. **6.** –2. **7.** С 1-го склада — 10 т, со 2-го — 20 т, с 3-го — 5 т. **8.** С 1-го склада — 0 т, со 2-го и 3-го — 17,5 т.

§ 53

2. $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. **3.** $A(2; 45°)$, $B(10; 180°)$, $C(2; -60°)$, $D(2; 150°)$. **4.** Да. **5.** а) Окружность; б) луч. **6.** (1; 60°), (1; 120°), (1; 180°), (1; 240°), (1; 300°). **11.** Спираль Архимеда.

§ 54

1. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0; -\sqrt{3}; -1\right)$, (0; 0; 1). **2.** A: $r = \sqrt{3}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $B\left(\sqrt{2}; 45°; 180°\right)$; $C(2; 90°; 0°)$. **3.** (0; 0°; 0°); (1; 0°; 0°); $\left(\sqrt{2}; 0°; 45°\right)$; (1; 0°; 90°); (1; 90°; 0°); $\left(\sqrt{2}; 45°; 0°\right)$; $\left(\sqrt{3}; \psi; \varphi\right)$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left(\sqrt{2}; 45°; 90°\right)$. **4.** а) $(r; -\psi; \varphi)$, $(r, \psi; 180° - \varphi)$, $(r; \psi; -\varphi)$; б) $(r; -\psi; -\varphi)$, $(r; -\psi; 180° - \varphi)$, $(r; \psi; 180° + \varphi)$; в) $(r; -\psi; 180° + \varphi)$. **9.** На полюсах. **10.** а) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость. **11.** а) Полушар; б) полушар; в) четверть шара. **12.** 2.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса точки в пространстве 189
Аксиомы стереометрии 32
Алмаз 124
Аналитическое задание пространственных фигур 208
Антипризма 118
Аппликата точки в пространстве 189
Астролябия 74

Бипирамида 115
Боковые рёбра 37
Большая окружность 138
Большой додекаэдр 122
— звёздчатый додекаэдр 122
— икосаэдр 122
Бутылка Клейна 161

Вектор 194
— нормали 202
— нулевой 194
Векторы 194
— одинаково направленные 194
— противоположно направленные 194
— равные 194
Вершина конуса 129
— многогранника 36
— многогранного угла 100
Вращение 132
Выпуклые многогранники 103
Высота конуса 129
— пирамиды 84
— призмы 84
— цилиндра 128
Вычитание векторов 194

Гексаэдр 112
Гипербола 134
Гиперболоид вращения 134
Гранат 125
Грань многогранника 36

Движение 38
Диагональное сечение 68
Диагональ многогранника 36
Длина вектора 194
Додекаэдр 112

Задача о трёх домиках и трёх колодцах 109
Задачи оптимизации 211
Звёздчатые многогранники 122
Звёздчатый октаэдр 124
Зеркальная симметрия 154
Зеркально-симметричные фигуры 154

Изображение плоских фигур 58
— пространственных фигур 62
Икосаэдр 112
Икосододекаэдр 119
Исландский шпат 124

Касательная плоскость к сфере 138
— прямая к сфере 139
Квадрант 74
Коническая поверхность 133
Конструктор 39
Конус 38, 129
— круговой 129
— наклонный 129
— прямой 129
Координатные векторы 196
— плоскости 189
— прямые 188
Координаты вектора 196
— полярные 216

— сферические 220
— точки 189
Космический кубок Кеплера 114
Коэффициент подобия 38
Кристаллы 124
Куб 36
— плосконосый 120
Кубооктаэдр 119

Линейный угол 89
Лист Мёбиуса 158
Лобачевский 45
Логарифмическая спираль 217
Локсодромия 221

Малый звёздчатый додекаэдр 122
Меридиан 121
Многогранники 36
— вписанные в сферу 142
— выпуклые (невыпуклые) 103
— двойственные 116
— звёздчатые 122
— описанные около сферы 146
— полуправильные 117
— правильные 111
Многогранный угол 100
Многомерная геометрия 215
Моделирование многогранников 38
Модуль вектора 194

Наклонная к плоскости 84
Начало координат 188

Образующая конуса 129
— цилиндра 128
Объём конуса 175
— параллелепипеда 164
— пирамиды 170
— призмы 164
— усечённого конуса 175
— фигур в пространстве 162
— цилиндра 164
— шара 178
— шарового кольца 179
— — пояса 180
— — сегмента 179
— — сектора 180
Октаэдр 111
Ордината точки в пространстве 189
Ориентация поверхности 158
Ортогональная проекция фигуры 80
Ортогональное проектирование 79
Ортодромия 221
Осевая симметрия 153
Оси координат 189
Основание конуса 129
— пирамиды 37
— призмы 36
— цилиндра 128
Ось вращения 132
— абсцисс 188
— аппликат 189
— ординат 188
— полярная 216
— симметрии 154
— — n-го порядка 154

Параболоид вращения 133
Параллелепипед 36
— прямоугольный 36
Параллель 221
Параллельная проекция точки 55
— — фигуры 55
Параллельное проектирование 55
Параллельность плоскостей 52
— прямой и плоскости 48
— прямых 44
Параметрические уравнения 206
— прямой 206
Перпендикуляр 84
Перпендикулярность двух плоскостей 89
— прямой и плоскости 79
— — прямых 72
Перспектива 93
Пирамида 37
— правильная 37
Пирит 125
Плосконосый додекаэдр 120
— куб 123
Плоскость 31
— биссектральная 147
— симметрии 153

Площадь поверхности 182
— конуса 182
— многогранника 182
— цилиндра 182
— шара и его частей 185
Поворот 132
Подобие 38
Подобные фигуры 38
Полуправильные многогранники 117
Полярные координаты 215
Полярный радиус 215
— угол 215
Правильные многогранники 111
Призма 36
— наклонная 37
— правильная 37
— прямая 37
Признак параллельности двух плоскостей 53
— — двух прямых 49
— — прямой и плоскости 50
— перпендикулярности двух плоскостей 90
— — прямой и плоскости 80
— скрещивающихся прямых 46
Принцип Кавальери 167
Проектирование 55
— ортогональное 80
— параллельное 55
— центральное 93
Пространственные фигуры 36
Прямая 31
Прямоугольная система координат 188

Равенство фигур 38
— векторов 194
Равновеликие фигуры 163
Радиус сферы 38
— шара 38
Развёртка конуса 182
— многогранника 39
— цилиндра 182
Разность векторов 194
Расстояние 73
— между двумя точками 73
— от точки до прямой 73
— между двумя прямыми 74
— от точки до плоскости 84
Ребро многогранника 36
— многогранного угла 100
Ромбододекаэдр 125
Ромбоикосододекаэдр 120
Ромбокубооктаэдр 119

Сечения многогранника 67
— сферы 138
— цилиндра 150
— шара 138
Симметричные фигуры 153
Симметрия 152
Скалярное произведение векторов 199
Скалярный квадрат 200
Скрещивающиеся прямые 45
Сложение векторов 194
Спираль Архимеда 217
Стереометрия 29
Сумма векторов 194
Сфера 38
— вписанная в многогранник 146
— описанная около многогранника 142
Сферические координаты 220

Тела Архимеда 118
— Кеплера — Пуансо 122
— Платона 112
Теодолит 76
Теорема Эйлера 107
Тетраэдр 111
Тор 133
Точка 31
Транспортная задача 211
Триангуляция 223
Тригонометрические функции 150
Трилистник 218

Угол 72
— двугранный 89

— между векторами 199
— многогранный 100
— между плоскостями 90
— — пересекающимися прямыми 72
— — прямой и плоскостью 85
— — скрещивающимися прямыми 73
— полярный 216
Умножение вектора на число 194
Уравнение плоскости 202
— прямой в пространстве 205
— сферы 190
Усечённая пирамида 68
Усечённый додекаэдр 118
— икосаэдр 118
— конус 175
— куб 118
— октаэдр 118
— тетраэдр 118

Фигуры вращения 131

Центр проектирования 93
— симметрии 153
— сферы 38
— шара 38
Центральная проекция точки 93
— — фигуры 93
Центральная симметрия 153
Центрально-симметричные фигуры 153
Центральное проектирование 93
Цилиндр 38, 128
— круговой 128
— наклонный 128
— прямой 128
Цилиндрическая поверхность 133

Шар 38
Шаровое кольцо 179
Шаровой пояс 180
— сегмент 179
— сектор 180

Эллипс 60
Эллипсоид вращения 133

Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
A a	*A a*	а	**N n**	*N n*	эн
B b	*B b*	бэ	**O o**	*O o*	о
C c	*C c*	цэ	**P p**	*P p*	пэ
D d	*D d*	дэ	**Q q**	*Q q*	ку
E e	*E e*	э	**R r**	*R r*	эр
F f	*F f*	эф	**S s**	*S s*	эс
G g	*G g*	жэ	**T t**	*T t*	тэ
H h	*H h*	аш (ха)	**U u**	*U u*	у
I i	*I i*	и	**V v**	*V v*	вэ
J j	*J j*	йот (жи)	**W w**	*W w*	дубль-вэ
K k	*K k*	ка	**X x**	*X x*	икс
L l	*L l*	эль	**Y y**	*Y y*	игрек
M m	*M m*	эм	**Z z**	*Z z*	зэт

Греческий алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
Α α	*Α α*	альфа	**Ν ν**	*Ν ν*	ню
Β β	*Β β*	бета	**Ξ ξ**	*Ξ ξ*	кси
Γ γ	*Γ γ*	гамма	**Ο ο**	*Ο ο*	омикрон
Δ δ	*Δ δ*	дельта	**Π π**	*Π π*	пи
Ε ε	*Ε ε*	эпсилон	**Ρ ρ**	*Ρ ρ*	ро
Ζ ζ	*Ζ ζ*	дзета	**Σ σ ς**	*Σ σ ς*	сигма
Η η	*Η η*	эта	**Τ τ**	*Τ τ*	тау
Θ θ	*Θ ϑ*	тета	**Υ υ**	*Υ υ*	ипсилон
Ι ι	*Ι ι*	йота	**Φ φ**	*Φ φ*	фи
Κ ϰ	*Κ ϰ*	каппа	**Χ χ**	*Χ χ*	хи
Λ λ	*Λ λ*	лямбда	**Ψ ψ**	*Ψ ψ*	пси
Μ μ	*Μ μ*	мю	**Ω ω**	*Ω ω*	омега

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Повторение 5

§ 1. Задачи на доказательство 5
§ 2. Углы 7
§ 3. Решение треугольников 11
§ 4. Четырёхугольники 15
§ 5. Окружность 17
§ 6. Площадь 21
§ 7. Координаты и векторы 25

Глава I
НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 8. История возникновения и развития геометрии 29
§ 9. Основные понятия стереометрии 31
§ 10. Основные пространственные фигуры 36

Глава II
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 11. Параллельность прямых в пространстве 44
§ 12. Параллельность прямой и плоскости 48
§ 13. Параллельность двух плоскостей 52
§ 14. Параллельное проектирование 55
§ 15. Параллельные проекции плоских фигур 58
§ 16. Изображение пространственных фигур 62
§ 17. Сечения многогранников 67

Глава III
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 18. Угол между прямыми в пространстве.
Перпендикулярность прямых 72

§ 19. Перпендикулярность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование 79
§ 20. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью 84
§ 21. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей 89
§ 22*. Центральное проектирование. Перспектива 93

Глава IV
МНОГОГРАННИКИ

§ 23. Многогранные углы 100
§ 24. Выпуклые многогранники 103
§ 25*. Теорема Эйлера 107
§ 26. Правильные многогранники 111
§ 27*. Полуправильные многогранники 117
§ 28*. Звёздчатые многогранники 122
§ 29*. Кристаллы — природные многогранники 124

Глава V
КРУГЛЫЕ ТЕЛА

§ 30. Цилиндр, конус 128
§ 31. Фигуры вращения 131
§ 32. Взаимное расположение сферы и плоскости 138
§ 33*. Многогранники, вписанные в сферу 141
§ 34*. Многогранники, описанные около сферы 146
§ 35*. Сечения цилиндра плоскостью 150
§ 36. Симметрия пространственных фигур 152
§ 37*. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса 157

Глава VI
ОБЪЁМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

§ 38. Объём фигур в пространстве. Объём цилиндра 162
§ 39. Принцип Кавальери 167
§ 40. Объём пирамиды 170
§ 41. Объём конуса 175
§ 42. Объём шара 178

§ 43. Площадь поверхности 182
§ 44. Площадь поверхности шара 185

Глава VII
КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

§ 45. Прямоугольная система координат в пространстве 188
§ 46. Векторы в пространстве 194
§ 47. Координаты вектора 196
§ 48. Скалярное произведение векторов 199
§ 49. Уравнение плоскости в пространстве 202
§ 50*. Уравнения прямой в пространстве 205
§ 51*. Аналитическое задание пространственных фигур 208
§ 52*. Многогранники в задачах оптимизации 211
§ 53*. Полярные координаты на плоскости 216
§ 54*. Сферические координаты в пространстве 220

Ответы 227

Предметный указатель 240

Приложение 244