И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

11 КЛАСС

2013

Пособие содержит подробные конспекты уроков по геометрии для 11-ых классов общеобразовательных учреждений. Оно соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе среднего общего образования. Помимо теоретического материала в пособие включены математические диктанты, индивидуальные задания по карточкам, устные упражнения, самостоятельные и контрольные работы, материал для проведения занимательных моментов уроков.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержится учебный материал для проведения уроков по геометрии в 11-х классах средней школы. Оно рассчитано на учебник геометрии Смирновой И.М., Смирнова В.А. для 10-11 общеобразовательных классов (М.: Мнемозина). Вместе с тем оно может быть использовано при обучении по любому другому учебнику геометрии, входящему в Федеральный перечень учебной литературы.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) ***в направлении личностного развития*****:**

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) ***в метапредметном направлении*****:**

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) ***в предметном направлении*****:**

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Содержание пособия разбито на отдельные параграфы. В первых трех представлены особенности преподавания геометрии в условиях модернизации школьного образования; даны два варианта программы изучения учебного материала (с учетом дополнительного необязательного материала и без него) и тематическое планирование.

Далее идут подробные конспекты уроков по основным темам курса стереометрии 11 класса (без дополнительного материала). В пособие, помимо вопросов теории, включены математические диктанты, вопросы для учащихся по теории, индивидуальные задания по карточкам, задачи для самостоятельной работы, устные упражнения, контрольные работы, приводятся решения и ответы к задачам. Конспектам посвящены четвертый и пятый параграфы пособия.

В названном учебнике часть пунктов отмечена звездочкой (*). Это необязательный дополнительный учебный материал для воспитания и развития учащихся. В седьмом параграфе пособия даются конспекты уроков по дополнительным пунктам учебника.

В пособии предлагается материал для проведения индивидуальной работы со старшеклассниками, которые живо интересуются современной наукой и научно-популярным материалом, а также для проведения занимательных моментов уроков (это соответственно параграфы шесть и восемь).

Представленные конспекты и учебные материалы могут быть использованы и использовались при работе в старших классах различной профильной направленности. Например, в гуманитарных классах (Смирнова И.М. Геометрия: Учебник для 10-11 классов гуманитарного профиля обучения. – М.: Мнемозина, 2003; Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учебник для 10-11 классов естественно-научного профиля обучения. - М.: Просвещение, 2001).

§ 1. О СОВРЕМЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

При написании учебников по геометрии, а также пособий методического обеспечения к ним авторы исходили из огромной роли, которую играет геометрия в науке и образовании подрастающего поколения.

На протяжении веков геометрия служила источником развития не только математики, но и других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений и, наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов.

Так, задача об измерении длины отрезка привела к открытию Пифагором несоизмеримых отрезков и в дальнейшем к построению действительных чисел.

Задачи об измерении длины окружности, площади круга, объемов шара, пирамиды и др. привели древнегреческих ученых к понятию предела и заложили основы интегрального исчисления.

Геометрические методы изображения пространственных фигур стали фундаментом изобразительного искусства.

Задачи нахождения уравнения касательной к кривой и вычисления площади криволинейной трапеции привели Г. Лейбница и И. Ньютона к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

Задача о нахождении орбит движения космических тел была решена с помощью конических сечений.

Задача Л. Эйлера о кенигсбергских мостах положила начало новому направлению геометрии – теории графов.

Теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника историки математики называют первой теоремой топологии.

Современные представления о Вселенной описываются на языке геометрии с помощью понятия многообразия.

Функциональный анализ, один из современных разделов математического анализа, опирается на понятие бесконечномерного линейного пространства, обобщающего понятие евклидова пространства.

Одно из основных понятий современной алгебры – понятие группы, возникло на основе геометрических понятий симметрии и движения. Группы симметрий играют важную роль не только в математике, но и в физике, химии, биологии, кристаллографии и других науках.

В последние десятилетия активно развивается алгебраическая геометрия – раздел математики, изучающий алгебраические структуры геометрическими методами. В частности, решение проблемы Ферма было недавно получено с использованием глубоких геометрических методов.

Разработка методов решения задач оптимального управления стала возможной благодаря развитию геометрических методов и в том числе теории многогранников.

В связи с развитием компьютерной техники, возникло и бурно развивается новое направление геометрии – компьютерная геометрия – раздел математики, в котором для решения геометрических задач используются компьютерные методы. Этими методами решаются многие прикладные задачи, в частности, задачи оптимального управления.

Современная наука и ее приложения немыслимы без геометрии и таких ее современных разделов, как топология, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, теория графов, компьютерная геометрия и др.

Огромна роль геометрии и в школьном математическом образовании. Известен вклад, который она вносит в развитие логического мышления и пространственного воображения школьников.

Отечественной школой накоплен богатый опыт преподавания геометрии. Создана уникальная учебная литература по геометрии таких авторов, как С. Е. Гурьев, А. Ю. Давидов, А. П. Киселев, Н. А. Глаголев, А. И. Фетисов, Н. М. Бескин и многие другие.

Учебник по геометрии А. П. Киселева на протяжении многих десятилетий оставался образцом строгости, четкости и доступности изложения геометрии. Поэтому одним из основных принципов, на которых должно быть построено изучение геометрии, с точки зрения авторов, является *принцип преемственности.* Сохранение традиций отечественной школы изучения геометрии чрезвычайно важно не только для геометрии, но и всего естественно-научного образования подрастающего поколения.

Конечно, учебники геометрии прошлого века уже не вполне отвечают современной структуре и дидактическим требованиям к обучению. В них не предусмотрена дифференциация обучения, недостаточно материала для воспитания и развития учащихся, отсутствуют исторические сведения, материал современного, научно-популярного и прикладного характера.

Наша задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, сделать курс геометрии 10-11 классов современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, ее месте и роли в современном мире.

Кроме многогранников, изучаются тела вращения, среди которых: цилиндр, конус, шар, сфера, а также тор, параболоид вращения, эллипсоид вращения, гиперболоид вращения и др. Исследуется взаимное расположение многогранников и тел вращения, в том числе изучаются вписанные и описанные многогранники, вписанные и описанные цилиндры и конусы.

Понятие объема изучается на основе принципа Кавальери. Этот принцип позволяет не только получить общие формулы для нахождения объемов призмы и цилиндра, пирамиды и конуса, шара и его частей, но и сформировать необходимые представления учащихся об объеме, заложить основы использования интеграла для вычисления объемов.

В предлагаемом курсе расширены аналитические методы геометрии и их приложения. Помимо уравнений сферы и плоскости, учащиеся знакомятся с уравнениями прямой, аналитическим заданием многогранников и тел вращения, уравнениями кривых и поверхностей в пространстве.

В разработанном курсе больше внимания уделяется историческим аспектам геометрии, ее философским и мировоззренческим вопросам. По образному высказыванию Б. В. Гнеденко, «история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе как памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов, управляющих внутриатомными процессами и процессами космического масштаба. История науки является тем факелом, который освещает новым поколениям путь дальнейшего развития и передает им священный огонь Прометея, толкающий их на новые открытия, на вечный поиск, ведущий к познанию окружающего нас мира, включая нас самих».

Опыт работы школы показывает, что, наряду с интересом к вопросам истории и приложений математики, учащиеся старших классов живо интересуются современными и прикладными аспектами математики. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы и научно-популярных телевизионных и радиопередач. Желание узнать о новых идеях, направлениях развития математики – вполне естественное желание для молодого человека, необходимое выпускнику школы для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в движении общества вперед.

Большое значение придается наглядности, которая является одним из дидактических принципов обучения.

Развитие пространственных представлений учащихся предполагает умения правильно изображать основные геометрические фигуры и исследовать их взаимное расположение. Именно от этого во многом зависит успешность изучения геометрии. Поэтому много внимания уделяется вопросам изображения пространственных фигур.

Включение в курс геометрии разнообразного материала, учитывающего интересы каждого школьника, способствует повышению интереса и желания учащихся заниматься геометрией. Опираясь на этот интерес и желание, можно преодолеть и известные трудности обучения.

§ 2. ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Вариант I (базовый уровень) – 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант II (профильный уровень) 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант III (углублённый уровень) 3 часа в неделю, всего 102 часа за год.

11 класс

Параграф учебника	Содержание	Количество часов		
		I	II	III
31	Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости	2	2	2
32	Многогранники, вписанные в сферу	3	2	2
33	Многогранники, описанные около сферы	3	2	2
	Контрольная работа № 1	1	1	2
34	Цилиндр и конус	2	2	2
35	Поворот. Фигуры вращения	3	2	3
36	Вписанные и описанные цилиндры	2	2	2
37*	Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс	-	2	2
38	Вписанные и описанные конусы	2	2	2
39	Конические сечения	2	2	2
40	Симметрия пространственных фигур	2	2	2
41	Движение	2	2	2
42*	Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса	-	2	2
	Контрольная работа № 2	1	1	2
43	Объём фигур в пространстве. Объём цилиндра	3	2	2
44	Принцип Кавальери	3	2	2
45	Объём пирамиды	3	2	3
46	Объём конуса	2	2	2
47	Объём шара и его частей	3	2	3
	Контрольная работа № 3	1	1	2
48	Площадь поверхности	2	2	2
49	Площадь поверхности шара и его частей	2	2	2
	Контрольная работа № 4	1	1	2
50	Прямоугольная система координат в пространстве	2	2	2

51	Расстояние между точками в пространстве	2	2	2
52	Координаты вектора	2	2	2
53	Скалярное произведение векторов	2	2	2
54	Уравнение плоскости в пространстве	2	2	2
55*	Уравнение прямой в пространстве	-	2	2
56	Аналитическое задание пространственных фигур	2	2	2
57*	Многогранники в задачах оптимизации	-	2	2
58*	Полярные координаты на плоскости	-	2	2
59*	Сферические координаты в пространстве	-	2	2
60*	Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур	-	2	2
	Контрольная работа № 5	1	1	2
61	Многоугольники	-	-	2
62	Сумма углов многоугольника	-	-	2
63	Замечательные точки и линии треугольника	-	-	2
64	Теоремы Чевы и Менелая	-	-	2
65	Решение треугольников	-	-	2
66	Углы и отрезки, связанные с окружностью	-	-	2
67	Вписанные и описанные многоугольники	-	-	2
68	Парабола	-	-	2
69	Эллипс	-	-	2
70	Гипербола	-	-	2
71	Построения циркулем и линейкой	-	-	2
	Контрольная работа № 6	-	-	2
	Итоговое повторение	10	3	5

§ 3. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

11 класс

Вариант I (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
5. Круглые тела (25 ч)	
Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость. Многогранники, вписанные в сферу. Многогранники, описанные около сферы. Цилиндр, конус. Поворот. Фигуры вращения. Вписанные и описанные цилиндры. Вписанные и описанные конусы. Симметрия пространственных фигур (центральная, осевая, зеркальная). Движение пространства, виды движений. Элементы симметрии многогранников и круглых тел. Примеры симметрии в окружающем мире.	Формулировать определения цилиндра, конуса и их элементов. Распознавать цилиндры и конусы на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать цилиндры и конусы. Решать задачи на нахождение элементов цилиндра и конуса. Формулировать определения сферы и шара. Распознавать сферу и шар на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать сферу и шар. Формулировать определение касательной прямой и касательной плоскости к сфере, вписанной и описанной сферы. Решать задачи на нахождение элементов многогранников и радиусов вписанных и описанных сфер. Формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве. Приводить примеры равных пространственных фигур. Формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий. Указывать элементы симметрии многогранников и круглых тел. Приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире.
6. Объём и площадь поверхности (20 ч)	

Объём и его свойства. Принцип Кавальери. Формулы объёма параллелепипеда, призмы, пирамиды. Формулы объёма цилиндра, конуса, шара и его частей. Отношение объёмов подобных тел. Площадь поверхности многогранника. Формулы площади поверхности цилиндра, конуса, шара и его частей.	Понимать понятие объёма, формулировать его свойства. Решать задачи на нахождение объёмов и площадей поверхностей многогранников и круглых тел.
7. Координаты и векторы (13 ч)	
Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы. Координаты вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение плоскости в пространстве.	Изображать декартову систему координат в пространстве. Находить координаты середины отрезка с заданными координатами его концов. Находить расстояние между двумя точками с заданными координатами. Записывать уравнение сферы с заданным центром и радиусом. Использовать координатный метод для решения задач. Формулировать определения вектора, длины (модуля) вектора, равенства векторов. Находить координаты вектора с заданными координатами его начала и конца. Вычислять длину вектора с заданными координатами. Находить скалярное произведение векторов. Находить угол между векторами и устанавливать перпендикулярность векторов.

	Использовать векторный метод для решения задач.
5. Итоговое повторение (10 ч)	

Вариант II (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	**Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)**
5. Круглые тела (26 ч)	
Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость. Многогранники, вписанные в сферу. Многогранники, описанные около сферы. Цилиндр, конус. Поворот. Фигуры вращения. Вписанные и описанные цилиндры. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс. Вписанные и описанные конусы. Конические сечения. Симметрия пространственных фигур (центральная, осевая, зеркальная). Движение пространства, виды движений. Элементы симметрии многогранников и круглых тел. Примеры симметрии в окружающем мире. *Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса.	Формулировать определения цилиндра, конуса и их элементов. Распознавать цилиндры и конусы на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать цилиндры и конусы. Решать задачи на нахождение элементов цилиндра и конуса. Формулировать определения сферы и шара. Распознавать сферу и шар на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать сферу и шар. Формулировать определение касательной прямой и касательной плоскости к сфере, вписанной и описанной сферы. Решать задачи на нахождение элементов многогранников и радиусов вписанных и описанных сфер. Формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве. Приводить примеры равных пространственных фигур. Формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий. Указывать элементы симметрии многогранников и круглых тел.

	Приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире.
6. Объём и площадь поверхности (16 ч)	
Объём и его свойства. Принцип Кавальери. Формулы объёма параллелепипеда, призмы, пирамиды. Формулы объёма цилиндра, конуса, шара и его частей. Отношение объёмов подобных тел. Площадь поверхности многогранника. Формулы площади поверхности цилиндра, конуса, шара и его частей.	Понимать понятие объёма, формулировать его свойства. Выводить формулы объёмов параллелепипеда, призмы, пирамиды. цилиндра, конуса, шара. Решать задачи на нахождение объемов и площадей поверхностей многогранников и круглых тел.
7. Координаты и векторы (23 ч)	
Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы. Координаты вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение плоскости в пространстве. *Уравнение прямой в пространстве. *Аналитическое задание пространственных фигур. *Многогранники в задачах оптимизации. *Полярные координаты на плоскости. *Сферические координаты в пространстве.	Изображать декартову систему координат в пространстве. Находить координаты середины отрезка с заданными координатами его концов. Находить расстояние между двумя точками с заданными координатами. Записывать уравнение сферы с заданным центром и радиусом. Использовать координатный метод для решения задач. Формулировать определения вектора, длины (модуля) вектора, равенства векторов. Находить координаты вектора с заданными координатами его начала и конца. Вычислять длину вектора с заданными координатами. Выполнять операции сложения векторов и умножения вектора на число.

*Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур.	Находить скалярное произведение векторов. Находить угол между векторами и устанавливать перпендикулярность векторов. Использовать векторный метод для решения задач.
Итоговое повторение (3 ч)	

Вариант III (3 ч в неделю, всего 102 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
5. Круглые тела (29 ч)	
Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость. Многогранники, вписанные в сферу. Многогранники, описанные около сферы. Цилиндр, конус. Поворот. Фигуры вращения. Вписанные и описанные цилиндры. *Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс. Вписанные и описанные конусы. *Конические сечения. Симметрия пространственных фигур (центральная, осевая, зеркальная). Движение пространства, виды движений. Элементы симметрии многогранников и круглых тел. Примеры	Формулировать определения цилиндра, конуса и их элементов. Распознавать цилиндры и конусы на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать цилиндры и конусы. Решать задачи на нахождение элементов цилиндра и конуса. Формулировать определения сферы и шара. Распознавать сферу и шар на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать сферу и шар. Формулировать определение касательной прямой и касательной плоскости к сфере, вписанной и описанной сферы. Решать задачи на нахождение элементов многогранников и радиусов вписанных и описанных сфер. Формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве.

симметрии в окружающем мире. *Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса.	Приводить примеры равных пространственных фигур. Формулировать определения параллельного переноса, центральной, осевой и зеркальной симметрий. Указывать элементы симметрии многогранников и круглых тел. Приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире. Приводить примеры подобных пространственных фигур. Иметь представление об ориентации плоскости и листе Мёбиуса. Выполнять проекты, связанные с телами вращения и симметрией пространственных фигур.
6. Объём и площадь поверхности (20 ч)	
Объём и его свойства. Принцип Кавальери. Формулы объёма параллелепипеда, призмы, пирамиды. Формулы объёма цилиндра, конуса, шара и его частей. Отношение объёмов подобных тел. Площадь поверхности многогранника. Формулы площади поверхности цилиндра, конуса, шара и его частей.	Понимать понятие объема, формулировать его свойства. Выводить формулы объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды. цилиндра, конуса, шара. Решать задачи на нахождение объемов и площадей поверхностей многогранников и круглых тел. Выполнять проекты, связанные с нахождением объемов и площадей поверхностей тел.
7. Координаты и векторы (24 ч)	
Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты середины отрезка. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы. Координаты	Изображать декартову систему координат в пространстве. Находить координаты середины отрезка с заданными координатами его концов. Находить расстояние между двумя точками с заданными координатами.

вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов. Уравнение плоскости в пространстве. *Уравнение прямой в пространстве. *Аналитическое задание пространственных фигур. *Многогранники в задачах оптимизации. *Полярные координаты на плоскости. *Сферические координаты в пространстве. *Использование компьютерной программы «Математика» для изображения пространственных фигур.	Записывать уравнение сферы с заданным центром и радиусом. Использовать координатный метод для решения задач. Формулировать определение вектора, длины (модуля) вектора, равенства векторов. Находить координаты вектора с заданными координатами его начала и конца. Вычислять длину вектора с заданными координатами. Выполнять операции сложения векторов и умножения вектора на число. Находить скалярное произведение векторов. Находить угол между векторами и устанавливать перпендикулярность векторов. Использовать векторный метод для решения задач. Выполнять проекты, связанные с аналитическим заданием пространственных фигур.
8. Геометрия на плоскости (24 ч)	
Многоугольники. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Сумма углов многоугольника. Замечательные точки и линии треугольника. Окружность и прямая Эйлера. Теоремы Чевы и Менелая. Решение треугольников. Формула Герона. Углы и отрезки, связанные с окружностью. Вычисление углов с вершиной внутри и вне круга, угла между хордой	Формулировать определение многоугольника. Приводить примеры выпуклых, невыпуклых и звёздчатых многоугольников. Находить сумму углов многоугольника. Приводить примеры замечательных точек и линий треугольника. Изображать окружность и прямую Эйлера. Формулировать и доказывать теоремы Чевы и Менелая, применять их при решении задач.

и касательной. Вписанные и описанные многоугольники. Свойства и признаки вписанных и описанных четырёхугольников. Парабола. Эллипс. Гипербола. Построения циркулем и линейкой. Примеры неразрешимых задач на построение.	Вычислять биссектрисы, медианы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Формулировать и доказывать формулу Герона площади треугольника, применять её при решении задач. Применять формулы, выражающие площадь треугольника через радиус вписанной и описанной окружностей, при решении задач. Изображать различные случаи расположения углов, связанных с окружностью. Формулировать и доказывать теоремы об углах, связанных с окружностью; использовать их при решении задач на вычисление и доказательство. Формулировать и доказывать теоремы о произведении отрезков хорд и об отрезках касательной и секущей; применять их при решении задач. Формулировать определения вписанного и описанного многоугольников. Изображать многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности. Формулировать и доказывать свойства и признаки вписанных и описанных четырёхугольников; использовать их при решении задач на доказательство и вычисление. Формулировать определения параболы, эллипса и гиперболы как геометрических мест точек. Изображать параболу, эллипс и гиперболу. Доказывать их свойства.

	Использовать понятие геометрического места точек для решения задач. Выполнять построения геометрических фигур с помощью циркуля и линейки. Приводить примеры неразрешимых классических задач на построение.
Итоговое повторение (5 ч)	

§ 4. КОНСПЕКТЫ УРОКОВ ДЛЯ 11 КЛАССА

4.1. КРУГЛЫЕ ТЕЛА

п. 31. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости (уроки 69, 70, 71)

Целью данных уроков является знакомство учащихся с одними из основных пространственных фигур – сферой и шаром. Ребята должны знать их определения, уметь изображать; знать классификацию взаимного расположения сферы (шара) и плоскости.

Урок 69

I. Устная работа.

1. Определите, какой многоугольник лежит в основании призмы, у которой: а) 40 диагоналей; б) 14 диагональных сечений.

Ответ. а) 8-угольник; б) 7-угольник.

2. В правильной четырехугольной призме высота равна стороне основания. Что это за призма?

Ответ. Куб.

3. Может ли пирамида иметь 16 плоских углов? Если да, опеределите ее вид.

Ответ. Да, число плоских углов равно 2Р, где Р – число ребер многогранника, т. е. четное число. Таким образом, у данной пирамиды 8 ребер. Это четырехугольная пирамида.

4. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Какая точка является проекцией вершины пирамиды на основание, если основание: а) прямоугольник; б) прямоугольный треугольник?

Ответ. а) Точка пересечения диагоналей прямоугольника; б) середина гипотенузы прямоугольного треугольника.

5. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию через середину высоты. Площадь основания равна Q. Найдите площадь сечения.

Ответ. $\frac{Q}{4}$.

6. Представьте многогранник - бипирамиду, составленную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли она правильным многогранником? Почему?

Ответ. Нет, так как у нее не во всех вершинах сходится одинаковое число граней: в двух вершинах - 3 грани и в трех - 4 грани.

II. Новый материал.

Вспоминаем определения окружности и круга и их элементов. Проводим аналогию с пространством.

Вопрос к классу: "Как можно определить сферу (или шаровую поверхность) и шар?"

Сфера и шар являются пространственными аналогами окружности и круга на плоскости.

Напомним, что сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом.

Шаром называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на расстояние, не превосходящее данное, называемое радиусом.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется поверхностью шара.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении сферы (шара) и плоскости. Пусть в пространстве задана сфера (шар) с центром в точке O радиуса R и плоскость α. Опустим из точки O на плоскость a перпендикуляр $OH = d$, H принадлежит α. Возможны следующие случаи:

1. $d > R$.

В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно будет больше R. Следовательно, сфера (шар) и плоскость не пересекаются.

2. $d = R$.

В этом случае пересечением сферы (шара) и плоскости является единственная точка H. Плоскость α в этом случае называется касательной к сфере (шару).

3. $d < R$.

Сначала возьмем $d = 0$, тогда сечение сферы (шара) плоскостью, проходящей через его центр, будет окружность (круг), центр которой есть центр сферы (шара).

Сечение, проходящее через центр сферы (шара), называется большой окружностью (большим кругом).

Пусть теперь $d > 0$. Сечение сферы плоскостью, не проходящей через его центр, тоже будет окружность. Действительно, для произвольной точки M сечения имеем: $MH=\sqrt{OM^2 - OH^2}=\sqrt{R^2 - d^2}$. Следовательно, MH постоянная величина для всех точек M сечения. Другими словами, точки M образуют окружность с центром в точке H и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 1).

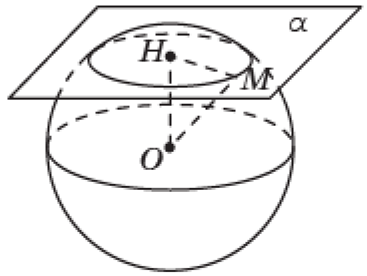


Рис. 1

Итак, любое сечение сферы плоскостью будет окружностью. Аналогично показывается, что любое сечение шара плоскостью будет кругом.

III. Закрепление нового материала.

Классу предлагаются следующие задачи.

1. Шар, радиус которого равен 5 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 4 дм от центра. Найдите длину окружности сечения (C).

Ответ. C = 18,84 дм ($\pi \approx 3{,}14$).

2. Докажите, что плоскость α, проведенная перпендикулярно радиусу (OA) шара в его конце, принадлежащем поверхности шара, будет касательной плоскостью.

Решение. Возьмем произвольную точку $M \in \alpha$. Тогда $OM > OA$, так как OM наклонная, а OA - перпендикуляр к плоскости α. Таким образом, α имеет с шаровой поверхностью одну единственную общую точку A. Следовательно, плоскость α является касательной плоскостью к шару.

3. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению, сформулированному в задаче 2.

Решение. “Касательная плоскость к шару перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания”. Пусть плоскость α касается шара в точке A. Проведем радиус OA и соединим произвольную точку B плоскости α с центром шара точкой O. Поскольку точка B лежит вне шара, то $OB > OA$ и, следовательно, OA является кратчайшим расстоянием от центра O до плоскости α. Это означает, что OA является перпендикуляром к плоскости α.

К доске вызываем двух учеников для решения первых двух задач. Класс последовательно сначала с первым учеником решает первую задачу, затем - вторую. После этого вместе обсуждаем решение задачи 3 и к доске вызываем третьего ученика для оформления ее решения.

Урок 70

I. Математический диктант.

Проводится на специально розданных перед уроком листочках с копиркой.

Вариант 1

1. Сферой с центром в точке O и радиусом R называется …
2. Большим кругом называется …
3. Сфера и плоскость не пересекаются, если …
4. Плоскость называется касательной к сфере, если …
5. Сечением сферы плоскостью является …

Вариант 2

1. Шаром с центром в точке O и радиусом R называется …
2. Большой окружностью называется …
3. Сфера и плоскость пересекаются, если …
4. Плоскость и сфера касаются, если …
5. Сечением шара плоскостью является …

II. Проверека математического диктанта.

III. Новый материал.

Вспоминаем с учащимися, какая прямая называется касательной к окружности, какими свойствами она обладает. После обсуждения ответов на поставленные вопросы, определяем касательную прямую к сфере и доказываем теорему об отрезках касательных, проведенных к сфере из одной точки.

Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной прямой.

Для касательных прямых к сфере справедливы свойства, аналогичные свойствам касательных к окружности. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема. Все отрезки касательных, проведенных из одной точки к данной сфере, равны между собой.

Доказательство. Пусть AB и AC – отрезки касательных к сфере, проведенных из точки A (рис. 2).

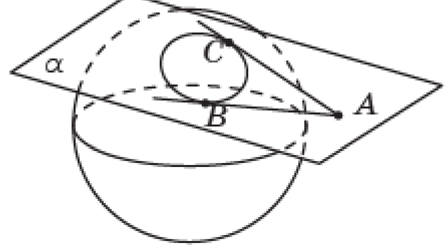


Рис. 2

Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки *A, B* и *C*. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых *AB* и *AC* в точках *B* и *C* соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$.

IV. Закрепление нового материала.

1. Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

Решение. а) Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса, то сфера и прямая не имеют общих точек; б) если расстояние от центра сферы до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы; если расстояние от центра сферы до прямой меньше радиуса, то сфера и прямая пересекаются.

2. Сколько можно провести прямых, касающихся сферы в одной и той же точке?

Ответ. Бесконечно много.

3. Докажите, что касательная прямая к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Решение. Через касательную и центр сферы проведем плоскость. Она пересечет сферу по большой окружности. Касательная к сфере будет касательной и к большой окружности. По свойству касательной к окружности, она будет перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

4*. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса *R*, которые касаются данной прямой?

Решение. Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая.

V. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 71

I.Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения сферы, шара и их элементов.

№ 2. – Классификация взаимного расположения сферы и плоскости.

№ 3. – Определение касательной плоскости к шару; доказательство того, что плоскость, проведенная через конец радиуса перпендикулярно ему, является касательной плоскостью.

№ 4. – Определение касательной прямой к шару; теорема об отрезках касательных, проведенных к шару из одной точки.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.

Ответ. 19π см^2.

2) Сечения шара радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по разные стороны от центра.

Ответ.$\sqrt{R^2-{r_1}^2}+\sqrt{R^2-{r_2}^2}$.

II. Задание для класса.

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь большого круга данного шара к площади получившегося сечения?

Ответ. 4:3.

2. Сечения шара радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по одну сторону от центра.

Ответ. $\sqrt{R^2-{r_1}^2}-\sqrt{R^2-{r_2}^2}$.

III. Новый материал.

Вопрос.

- Почему сфера изображается окружностью?

Вспоминаем определение параллельного проектирования, его частного вида – ортогонального проектирования и доказываем теорему об ортогональной проекции сферы.

Для изображения шара и сферы на плоскости используют ортогональную проекцию.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведем плоскость α_0, проходящую через центр сферы O и параллельную плоскости проектирования α. Поскольку плоскости α и α_0 параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 3).

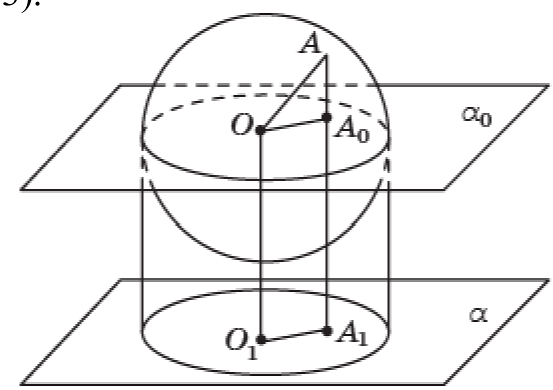


Рис. 3

Сечением сферы плоскостью α_0 является окружность радиуса R, равного радиусу сферы. Если A точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 ее ортогональная проекция на плоскость α_0, то $OA_0 < OA \leq R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α_0 точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса.

Для большей наглядности изображения сферы в нем выделяют большую окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр), плоскость которой образует острый угол с направлением проектирования, и полюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется экватором. Окружности, лежащие в плоскостях параллельных плоскости экватора - параллелями, диаметр, перпендикулярный плоскости экватора - осью, а большие окружности, проходящие через полюсы - меридианами.

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди, и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами PQ и CD (рис. 4). Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

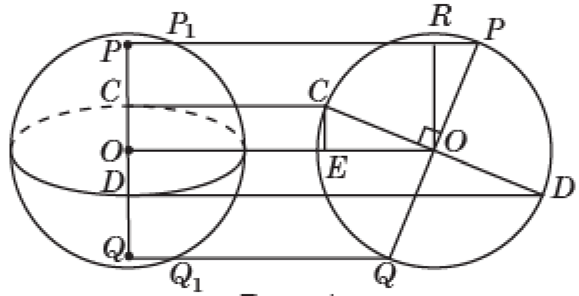


Рис. 4

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Но $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

IV. Закрепление нового материала.

1. Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор, постройте изображения полюсов.

2. Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами, изобразите экватор.

V. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определения сферы, шара, их элементов; касательной плоскости и касательной прямой; классификацию взаимного расположения прямой и плоскости; теорему о касательных к сфере; теорему об ортогональной проекции сферы (п. 31 учебника).

2. Решить задачи.

1). Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60^0 к нему. Найдите площадь сечения S.

Ответ. $S = \frac{\pi R^2}{4}$.

2). Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если OA = 5см.

Ответ. 4 см.

3). Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.

Ответ. 30 см.

4). Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса R, которые касаются данной: а) плоскости; б) сферы?

Ответ. а) Две плоскости, параллельные данной плоскости; б) две сферы или одна сфера, концентрические с данной сферой.

5). Найдите геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через заданную точку, принадлежащую сфере.

Решение. По доказанному, все эти прямые будут перпендикулярны радиусу, проведенному в точку касания и все они будут лежать в плоскости, проходящей через данную точку касания и перпендикулярную радиусу сферы, проведенному в точку касания.

3*. Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величиной φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.

Решение. Из точки O опустим перпендикуляры OA, OB на грани двугранного угла и OC на его ребро. Угол ACB будет линейным углом двугранного угла, OC – биссектриса линейного угла. Из прямоугольного треугольника AOC найдем $OC = R{:}\sin\frac{\varphi}{2}$.

п. 32. Многогранники, вписанные в сферу (уроки 72, 73)

Цель - провести аналогию с соответствующей темой планиметрии. Учащиеся должны представлять себе, в чем состоит эта аналогия, уметь формулировать и доказывать пространственные аналоги известных планиметрических свойств о вписанных и описанных фигурах.

Урок 72

I. Устная работа.

1. Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую ей?

Ответ. а) Бесконечно много; б) одну.

2. Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?

Ответ. а) Бесконечно много; б) бесконечно много; в) ни одной.

3. Верно ли, что через две точки сферы проходит один большой круг?

Ответ. Нет.

4. Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

Ответ. Диаметрально противоположные.

5. Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

Ответ. Иметь общий центр.

6. Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку: а) на сфере; б) вне сферы?

Ответ. а), б) Бесконечно много.

II. Новый материал.

Тема "Вписанные и описанные фигуры в пространстве" является аналогом соответствующей темы курса планиметрии, где, в частности, показывалось, что около каждого треугольника можно описать окружность, в каждый треугольник можно вписать окружность, около каждого правильного многоугольника можно описать окружность и в каждый правильный многоугольник можно вписать окружность.

Здесь мы рассмотрим аналогичные свойства для пространственных фигур. Аналогом окружности в пространстве является сфера - поверхность шара. Аналогом многоугольника в пространстве является многогранник. При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, аналогом правильных многоугольников - правильные многогранники.

Определение. Многогранник называется вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. Сама сфера при этом называется описанной около многогранника.

Теорема. Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу и притом только одну.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего находили геометрическое место точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, например, A и B (рис. 5).

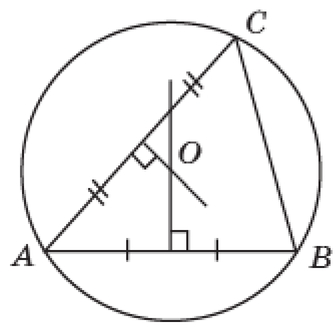


Рис. 5

Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку AB. Затем находили геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и C. Это серединный перпендикуляр к отрезку AC. Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности.

Теперь обратимся к ситуации в пространстве и попробуем сделать аналогичные построения.

Пусть дана треугольная пирамида $SABC$ (рис. 6).

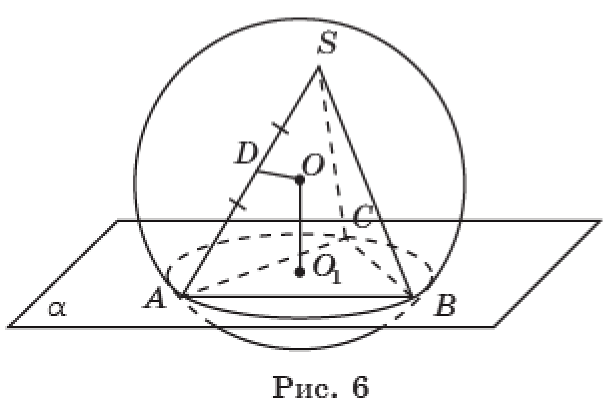


Рис. 6

Точки A, B, C определяют плоскость α. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех точек A, B, C является перпендикуляр, назовем его a, проведенный к плоскости a и проходящий через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности. Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, S является плоскость, назовем ее α, перпендикулярная отрезку AS и проходящая через его середину - точку D.

Плоскость α и прямая a пересекаются в точке O, которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $SABC$ сферы. Действительно, в силу построения, точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $SABC$. Причем такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку.

III. Закрепление нового материала.

Классу предлагаются следующие задачи:

1. (Устно). Какое условие нужно наложить на многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около нее можно было описать сферу?

Ответ. Сферу можно описать около пирамиды, в основании которой лежит многоугольник, около которого можно описать окружность.

2. На рисунке 7 изображена пирамида $SABC$, у которой угол ACB прямой, $AC=CB=SC=SB=SA$ и $AO=OB$. Докажите, что отрезок SO - высота пирамиды и O - центр описанной сферы.

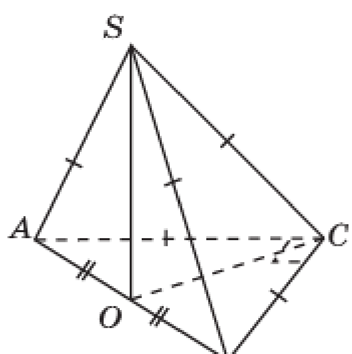


Рис. 7

Решение. В силу того, что боковые ребра данной пирамиды равны, основанием ее высоты, опущенной из вершины S, будет центр окружности, описанной около треугольника ABC. Так как по условию ABC является прямоугольным, центром окружности, описанной около него, будет середина его гипотенузы, точка O. Таким образом, $SO\perp$

(ABC). Точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды. Действительно, AO=BO=CO - радиусы окружности, описанной вокруг ABC. Кроме этого, SO=CO (это следует из равенства прямоугольных треугольников AOS и AOC - по гипотенузе и катету). Итак, точка O - центр сферы, описанной около пирамиды.

3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Обратимся к рисунку 8. ABC - правильный треугольник; $SA\perp(ABC)$; точка O_1 - центр треугольника ABC; AD=DS; $OO_1\perp(ABC)$. AO - искомый радиус описанного шара, $AO=\sqrt{AD^2+DO^2}$; AD = 1 дм; DO =AO_1=$\sqrt{3}$дм. Таким образом, AO =2 дм.

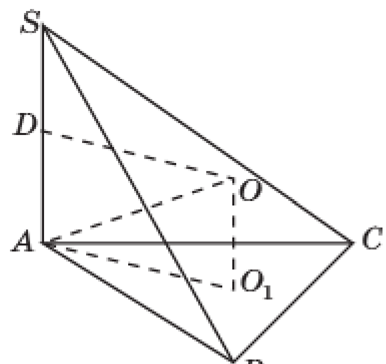


Рис. 8

4*. На рисунке 9, а изображена пирамида $SABC$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен 90°. Укажите на чертеже точку O - центр сферы, описанной около пирамиды.

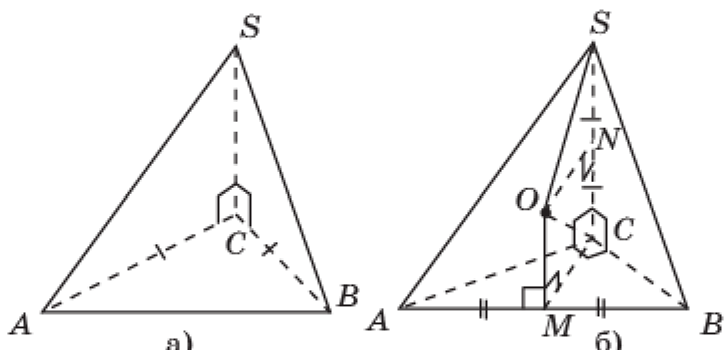


Рис. 9

Решение. Обратимся к рисунку 9, б. Пусть M - середина AB, N - середина отрезка SC. Через точку M проведем прямую, параллельную CS, а через точку N – прямую параллельную CM. Тогда точка O их пересечения будет искомым центром сферы, описанной около пирамиды $SABC$. Действительно, она одинаково удалена от вершин треугольника ABC. Кроме того, $OS=OC$, что следует из равенства прямоугольных треугольников SON и CON (по двум катетам).

Урок 73

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Аналогом круга в пространстве является …
2. Аналогом треугольника в пространстве является …
3. Многогранник называется вписанным в сферу, если …
4. Центром сферы, описанной около треугольной пирамиды, является точка …
5. Центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит одной из его сторон, если …

Вариант 2

1. Аналогом окружности в пространстве является …
2. Аналогом многоугольника в пространстве является …
3. Сфера называется описанной около многогранника, если …
4. Центром окружности, описанной около треугольника, является точка …
5. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне треугольника, если …

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал.

Выясним в каком случае около прямой призмы можно описать сферу.

Теорема. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.

Доказательство. Если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере и, следовательно, окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания (рис. 10).

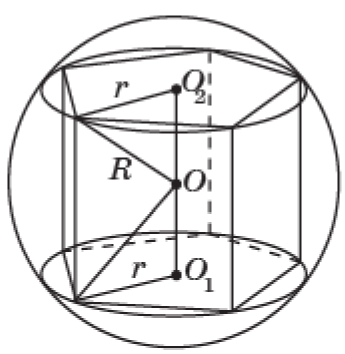


Рис. 10

Обратно, пусть около основания прямой призмы описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r. Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и тем же радиусом. Пусть $O_1O_2 = d$, O – середина отрезка O_1O_2. Тогда сфера с центром O и радиусом $R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой.

IV. Закрепление нового материала.

1. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Вычислите радиус сферы.

Ответ. 1,5 дм.

2. Докажите, что около всякого правильного многогранника можно описать сферу.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь правильный многогранник и проведем перпендикуляры к двум его смежным граням, например, F_1 и F_2 (рис. 11) через их центры O_1 и O_2.

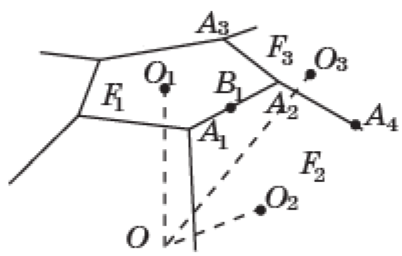


Рис. 11

Эти перпендикуляры лежат в одной плоскости, перпендикулярной ребру A_1A_2 и проходящей через середину B_1. Поэтому они пересекаются в некоторой точке O. Покажем, что точка O является искомым центром описанной сферы. Действительно, она отстоит на одинаковое расстояние от вершин граней F_1 и F_2 данного многогранника. Пусть F_3 - грань, смежная с F_1 и F_2. Тогда у нее имеется, по крайней мере, три вершины, принадлежащие граням F_1 и F_2. На рисунке это вершины A_2, A_3, A_4. Точка O одинаково удалена от этих вершин. Следовательно, она должна принадлежать перпендикуляру к грани F_3, проведенному через ее центр O_3. Но тогда она одинаково удалена от всех вершин грани F_3. Продолжая этот процесс, можно перебрать все грани данного правильного многогранника. В результате получим, что точка O одинаково удалена от всех вершин правильного многогранника, т.е. она является центром описанной сферы.

3. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

Ответ. Радиус этой сферы равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4*. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере так, чтобы расстояние между любыми двумя точками были равны?

Ответ. Четыре точки, которые служат вершинами вписанного в эту сферу правильного тетраэдра.

V. Индивидуальное домашнее задание

(см. ниже в задании на дом 4**).

Задание на дом

1. Выучить: определение многогранника, вписанного в сферу; теорему о треугольной пирамиде, вписанной в сферу; теорему о призме, вписанной в сферу (п. 32 учебника).

2. Решить задачи.

1). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Центром сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* будет точка *O* (рис. 12), принадлежащая SO_1, где SO_1 - высота пирамиды; $OE \perp AS$, $AE=ES$.

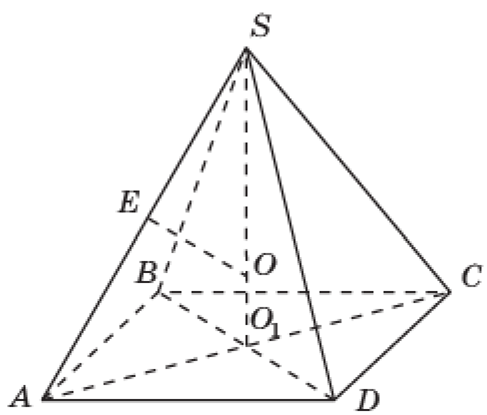


Рис. 12

Радиусом описанной сферы будет $AO=SO$. Прямоугольные треугольники *SOE* и SAO_1 подобны (по углам). Отсюда $SO:AS=SE:SO_1$. $AS=\sqrt{SO_1{}^2+AO_1{}^2}=2\sqrt{6}$ (м), $SE=\sqrt{6}$ м и $SO_1 = 4$ м. Таким образом, $SO=3$ м.

2). На рисунке 13 изображена пирамида *SABC*, у которой углы *SAB, SAC* и *BAC* прямые. Найдите и нарисуйте центр сферы, описанной около данной пирамиды.

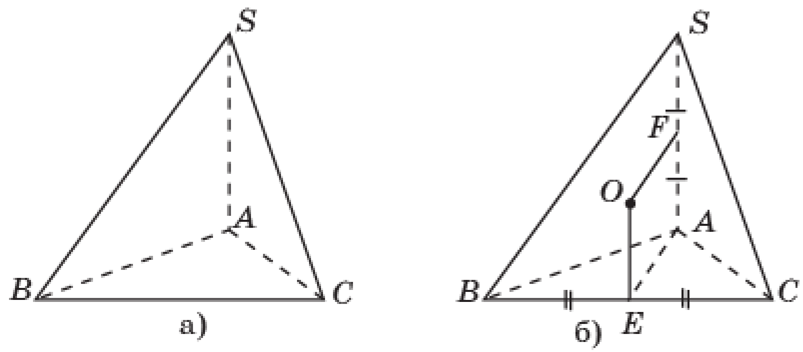


Рис. 13

Решение. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника BAC, является середина гипотенузы BC, назовем ее E. Проведем $EO \parallel AS$, $EO = \frac{1}{2}AS$, точка O – центр искомой сферы. Действительно, EO – перпендикуляр к плоскости треугольника BAC, проходящий через центр окружности, описанной около него. Значит, любая точка прямой EO, в том числе и O, одинаково удалена от точек B, C и A. Далее, $OEAF$, где F – середина AS, прямоугольник, по построению, OF – серединный перпендикуляр к AS. Следовательно, точка O одинаково удалена от точек A и S. Таким образом, O одинаково удалена от всех вершин пирамиды и является центром сферы, описанной около пирамиды.

3). Ребро куба равно a. Найдите радиус сферы, описанной около него.

Ответ. Радиус описанной сферы равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4). Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Заметим, что в основании данной призмы лежит прямоугольный треугольник (рис. 14.

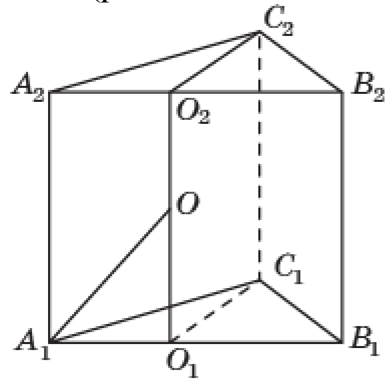


Рис. 14

Значит, центром окружности, описанной около него, будет середина гипотенузы, $A_1O_1=O_1B_1$, $A_2O_2=O_2B_2$.

Таким образом, центр O описанной сферы делит высоту O_1O_2 призмы пополам. Радиус описанной сферы найдем из прямоугольного треугольника A_1OO_1. $A_1O_1=5$ см; $OO_1=12$ см; т.е. $R=A_1O=\sqrt{5^2+12^2}=13$ (см).

3*. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды 7 дм и 1 дм. Боковое ребро наклонено к основанию под углом 45^0. Найдите радиус описанного шара.

Решение. Центр описанного шара, как и в случае правильной четырехугольной пирамиды, будет находиться в точке пересечения высоты усеченной пирамиды O_1O_2 (рис. 15, а) с перпендикуляром к боковому ребру AA_1, где $AE=EA_1$.

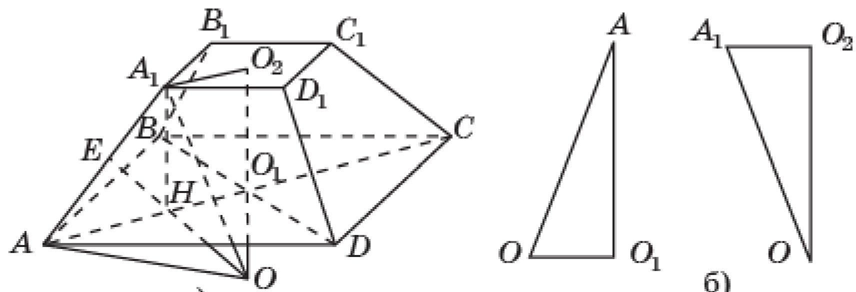


Рис. 15

Радиусами сферы являются отрезки AO и A_1O ($AO=A_1O$, что следует из равенства прямоугольных треугольников A_1EO и AEO). Заметим, что в нашем случае EO проходит через точку H, $AH\perp AO_1$ (где точка H принадлежит AO_1 треугольник AHA_1 - прямоугольный). Рассмотрим прямоугольные треугольники AOO_1 и $A_1O_1O_2$ (рис. 15, б).

$$R^2=AO_1^2+OO_1^2 \text{ и } R^2=A_1O_2^2+O_2O^2,\ AO_1=\frac{7\sqrt{2}}{2};\ OO_1=x;\ A_1O_2=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$O_2O=O_2O_1+OO_1=3\sqrt{2}+x\ (O_2O_1=A_1H=AH=AO_1-A_1O_2=3\sqrt{2});\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, $R=\sqrt{AO_1{}^2+OO_1{}^2}=5$ (дм).

4**. Индивидуальное задание. Сообщение по статье Либерзона М.Р. Стереометрические задачи с шарами //Квант.-1988.-№ 2.-С.63.

Задача из данной статьи: "В пространство, заключенное между сферой и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый шар касается двух других, сферы и указанной плоскости. Найдите радиус сферы".

Решение. Заметим прежде всего, что учащиеся должны представить себе данную пространственную ситуацию. Хорошо если эта конфигурация будет продемонстрирована (можно использовать шарики для настольного тенниса) в классе. Далее предлагается нестандартный способ решения задачи. Рассматриваемая пространственная фигура проектируется на данную плоскость. При этом проекции центров данных шаров являются вершинами правильного треугольника ABC со стороной $2r$ (рис. 16, а).

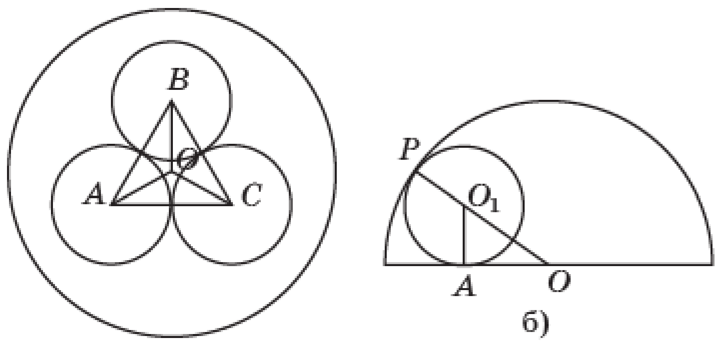


Рис. 16

Центр сферы O лежит в центре этого треугольника; расстояние от этого центра до любой вершины треугольника равно $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Проведем плоскость через центр сферы O и центр O_1 одного из данных шаров перпендикулярно к данной плоскости. В сечении получится фигура, изображенная на рисунке 16, б. На этом рисунке точка A - проекция точки O_1 на данную плоскость, P - точка касания данного шара с центром O_1 и данной сферы. В прямоугольном треугольнике AOO_1 известны длины катетов: $AO_1=r$, $AO=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $OO_1=\frac{r\sqrt{7}}{3}$, и мы можем найти нужный радиус: $OP = OO_1+O_1P = \frac{r\sqrt{7}}{3}+r = r(\frac{\sqrt{7}+1}{3})$.

п. 33. Многогранники, описанные около сферы (уроки 74, 75)

Цель - изучение вписанных и описанных фигур в пространстве, рассматриваются фигуры, описанные около сферы.

Урок 74

I. Опрос учащихся.

Восьми учащимся предлагаются индивидуальные задания на карточках, которые они выполняют на своих местах.

Карточка 1

1. При каком условии около пирамиды можно описать сферу?
2. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу?
3. Где может лежать центр сферы, описанной около прямой призмы? От чего это зависит?

4*. Как найти центр сферы, описанной около усеченной пирамиды? Всегда ли около усеченной пирамиды можно описать сферу?

Карточка 2

1. При каком условии около прямой призмы можно описать сферу?
2. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.
3. Где может лежать центр сферы, описанной около пирамиды? От чего это зависит?

4*. Задача 4* из первого варианта.

Двух учеников вызываем за первую парту для опроса по теории. Одному из них предлагаем доказать теорему о том, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу и притом только одну, другому - утверждение о том, что около любого правильного многогранника можно описать сферу.

II. Задание для класса.

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найдите радиус описанной сферы.

Решение. Пусть *SABCD* – данная пирамида, *SH* – ее высота. Все точки *SH* одинаково удалены от вершин *A, B, C, D*. Центр искомой сферы, точка *O*, будет находиться на пересечении серединного перпендикуляра бокового ребра, например, *SA* (*SM*=*MA*), и высоты *SH*. Тогда *O* будет одинаково удалена от всех вершин данной пирамиды (рис. 17.

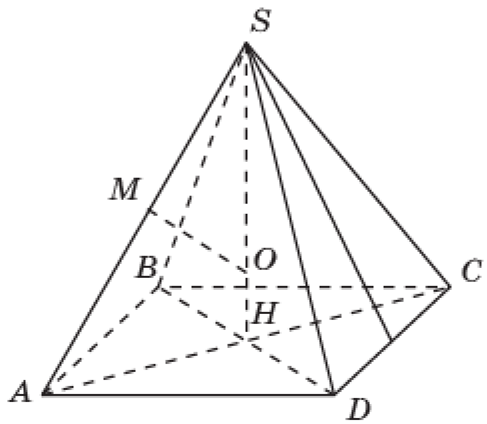


Рис. 17

Найдем радиус описанной сферы. Прямоугольные треугольники SAH и SOM подобны (по углам). Тогда SA:SO=SH:SM, $SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$ (м). $SO=\frac{SA\cdot SM}{SH}=\frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{4}=3$ (м).

Итак, радиус описанной сферы равен 3 м.

2. Нарисуйте сферу и вписанную в нее треугольную пирамиду с вершиной в полюсе сферы.

3*. Приведите пример многогранника, около каждой грани которого можно описать окружность, а около самого многогранника нельзя описать сферу.

Ответ. Пространственный крест (см. рис. 18).

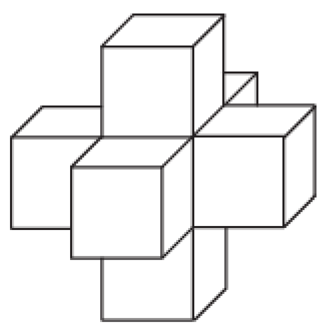


Рис. 18

Для решения задач к доске вызываем двух учеников. Первый вместе с классом решает первую задачу, а второй - самостоятельно вторую. Потом вместе с классом проверяем его решение. Дополнительные вопросы для отвечающих у доски:

1). Дать определение многогранника, вписанного в сферу.

2). Дать определение сферы, описанной около многогранника.

III. Новый материал.

Прежде чем приступить непосредственно к изучению фигур, описанных около сферы, рассмотрим вопрос о том, как располагаются сферы, касающиеся граней двугранного угла.

Пусть двугранный угол образован полуплоскостями α и β с общим ребром c. Найдем геометрическое место центров сфер, касающихся одновременно этих граней. Для этого через прямую c проведем полуплоскость γ, делящую двугранный угол пополам (рис. 19).

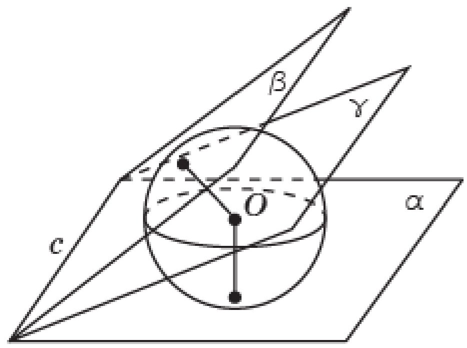


Рис. 19

Такая полуплоскость называется биссектральной (или биссекторной). Точки C на полуплоскости γ, не принадлежащие прямой c обладают тем свойством, что расстояния от них до граней α и β одинаковы (это нетрудно показать, поэтому предлагаем учащимся проверить самостоятельно). Если это расстояние принять за радиус сферы R, то сфера с центром в точке C и радиуса R будет касаться граней α и β. Таким образом, полуплоскость γ без прямой c дает геометрическое место центров сфер, касающихся граней двугранного угла α и β.

Перейдем теперь к вопросу о вписанности сферы в многогранник.

Определение. Многогранник называется описанным около сферы, если все его грани касаются сферы. Сама сфера при этом называется вписанной в многогранник.

Теорема. В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу и притом только одну.

Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка одинаково удаленная от всех граней треугольной пирамиды. Для ее нахождения рассмотрим три биссектральные полуплоскости углов, образованных боковыми гранями пирамиды с основанием. Точка пересечения этих полуплоскостей будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы.

III. Закрепление нового материала.

1. Определите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60^o.

Решение. Пусть дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (рис. 20); O_1 - центр треугольника ABC; $CE=BE$; $\angle AES=60^o$; O – точка пересечения биссектрисы угла AES и прямой SO_1.

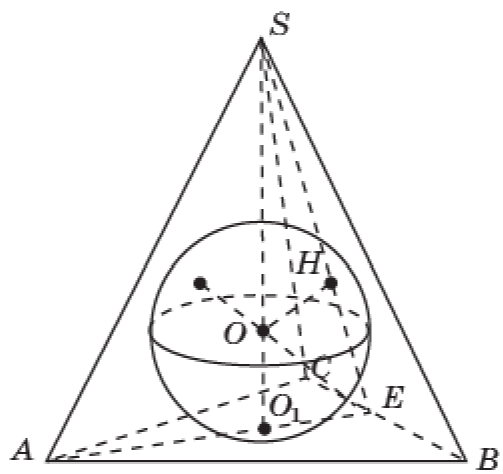


Рис. 20

Точка O будет искомым центром сферы, вписанной в пирамиду $SABC$. Найдем OO_1 - радиус вписанной сферы. Нужно доказать, что O одинаково удалена от всех граней пирамиды, например, от ABC и SBC. Проведем $OH \perp SE$. $OH=OO_1$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников OO_1E и OHE - по гипотенузе и острому углу). Из прямоугольного треугольника SO_1E следует, что $O_1E = \frac{SO_1}{tg60^o} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$. Из прямоугольного треугольника OO_1E: $OO_1 = O_1E \cdot \text{tg } 30^o = \frac{h}{3}$.

2. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом φ. Двугранные углы при основании равны φ. Определите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

Решение. Рассмотрим четырехугольную пирамиду $SABCD$ (рис. 21, а), у которой $ABCD$ – ромб, $AB = a$, $\angle BCD = \varphi$. Из равенства всех двугранных углов следует, что основанием высоты SO_1 пирамиды является точка пересечения диагоналей ромба. Центр O вписанной в пирамиду сферы лежит в точке пересечения SO_1 и биссектрисы линейного угла, образованного высотой боковой грани (на рисунке высота SH грани SCD) и радиусом окружности, вписанной в основание.

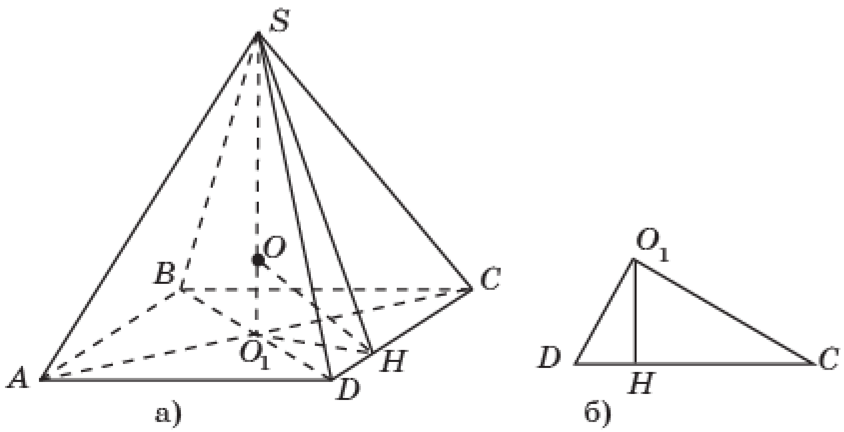


Рис. 21

Для определения радиуса вписанной сферы OO_1, нужно рассмотреть прямоугольный треугольник OO_1H: $OO_1=O_1H\cdot\text{tg}\frac{\varphi}{2}$. Найдем O_1H. Обратимся к рисунку 21, б: $O_1H\cdot DC=O_1D\cdot O_1C$; $DC=a$; $O_1D=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; $O_1C = a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $O_1H=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sin\alpha$. Окончательно получаем: $OO_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sin\alpha\cdot\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$.

3*. Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань SCB перпендикулярна плоскости основания; ребра SC и SB равны a; плоские углы при вершине равны между собой и равны 60^0. Определите радиус вписанной сферы.

Решение. Для нахождения радиуса вписанной сферы найдем точку O, являющуюся ее центром. Она принадлежит пересечению биссектральных плоскостей двугранных углов пирамиды. Рассмотрим двугранный угол при основании пирамиды с ребром BC (рис. 22).

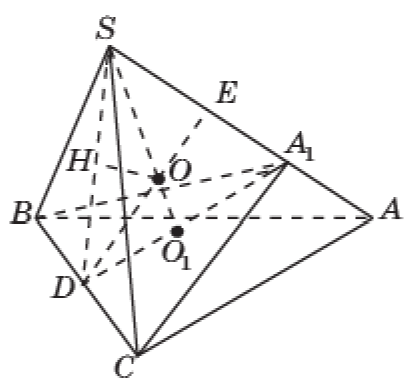


Рис. 22

По условию, он равен 90^o. Опустим из вершины S перпендикуляр SD на BC. Угол SDA будет линейным углом двугранного угла, поэтому центр искомой сферы будет лежать на биссектрисе DE этого угла.

Отложим на отрезке SA отрезок SA_1, равный a. Пирамида SA_1BC будет правильной. Заметим, что биссектральные плоскости, проходящие через одноименные боковые ребра этих пирамид, совпадают. Центр O искомой сферы лежит на линии пересечения SO_1 этих плоскостей, где O_1 - центр правильного треугольника A_1BC. Рассмотрим треугольник SDA_1. У него $SD=DA_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $DO_1=\frac{1}{3}DA_1=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Обозначим угол DSO через φ. Имеем: $\sin \varphi = DO_1:SD = \frac{1}{3}$, $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Угол DOO_1 равен $45^o + \varphi$. $DO = DO_1:\sin(45^o + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}a$. Радиус r искомой сферы равен длине перпендикуляра OH, опущенного из точки O на SD, $OH = DO\cdot\sin 45^o$, т. е. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{2}+1)$.

Урок 75

I. Устная работа.

1). Какая сфера называется вписанной в многогранник?

2). При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?

Ответ. Если в основание призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности.

3). Какая полуплоскость называется биссектральной? Каким геометрическим местом точек она является?

4). Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.

Ответ. Например, пирамида, основанием которой является прямоугольник и боковые ребра которой равны.

5). Около всякого ли правильного многогранника можно описать сферу?

Ответ. Да.

II. Новый материал.

Выясним в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке O и радиусом R (рис. 23).

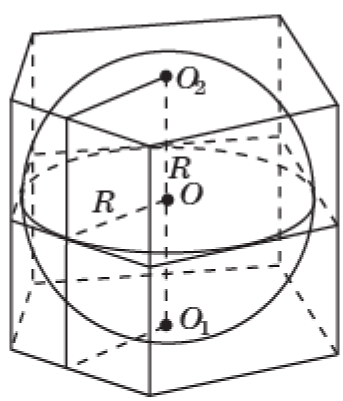


Рис. 23

Тогда высота призмы равна $2R$. Через центр O проведем сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания, описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность. Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиуса R, а высота призмы равна $2R$. Пусть O – середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом R будет искомой сферой, вписанной в призму.

III. Закрепление нового материала.

1. Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c.

Ответ. $\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2}$.

2. Докажите, что во всякий правильный многогранник можно вписать сферу. Причем центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы.

Решение. Действительно, как следует из построения центра описанной сферы, он лежит на перпендикулярах, восстановленных из центров граней O_1, O_2, ... (рис. 11) правильного многогранника, причем отрезки OO_1, OO_2, ... равны между собой. Обозначим их длину через r. Тогда сфера с центром O и радиусом r будет касаться граней многогранника в точках O_1, O_2, ... , т. е. будет искомой вписанной сферой.

3. По ребру a правильного тетраэдра определите радиус описанной и вписанной сфер.

Решение. Пусть $ABCD$ - правильный тетраэдр (рис. 24), точка O_1 - центр основания ABC, DO_1 - высота тетраэдра, E - середина ребра BC, O - центр описанной и вписанной (по доказанной выше теореме) сфер. AO - радиус описанной сферы, OO_1 - радиус вписанной сферы.

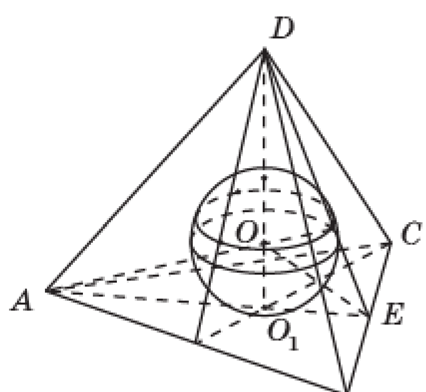


Рис. 24

Рассмотрим прямоугольный треугольник AO_1D: $AO_1=\frac{2}{3}AE =\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $DO_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Пусть $OO_1 = r$. Тогда $DO = AO = \sqrt{\frac{a^2}{3}+r^2}$. Учитывая, что $DO = DO_1 - OO_1$, получаем $\sqrt{\frac{a^2}{3} + r^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} - r$. Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные члены, получим $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Отсюда для радиуса R описанной сферы имеем $R = AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Задание на дом

1. Выучить: определение описанного около сферы многогранника, теорему о том, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, теорему об описанной около сферы призмы (п. 33 учебника).

2. Решить задачи.

1). Ребро куба равно a. Найдите радиус вписанной в него сферы. Ответ. Радиус вписанной сферы равен $\frac{a}{2}$.

2). Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед?

Ответ. В общем случае нельзя, так как в прямоугольник нельзя вписать окружность.

3). Найдите радиус сферы, вписанной в правильный октаэдр с ребром a.

Решение. На рисунке 25 изображен правильный октаэдр $SABCDS'$. Точка O - его центр. Найдем OH - радиус вписанной сферы, $OH \perp (SCD)$.
$OH = \sqrt{OE^2 - HE^2}$; $OE = \frac{a}{2}$; $HE = \frac{1}{3}SE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

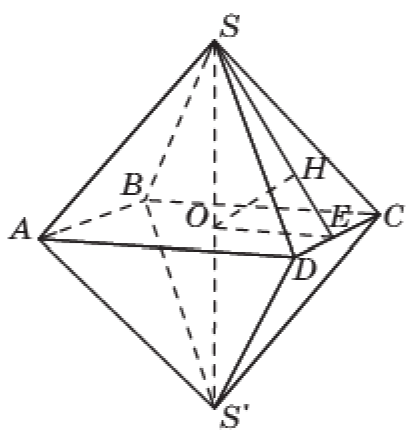


Рис. 25

4). Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а угол между боковой гранью и основанием равен 60°.

Решение. Проведем $SP \perp AB$ (рис. 26).

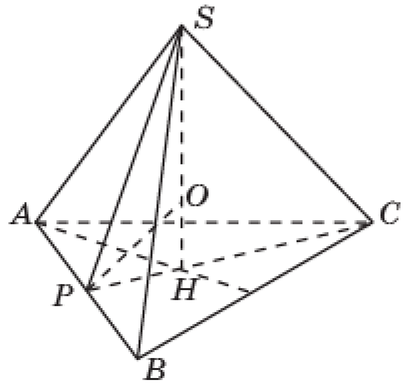


Рис. 26

SH – высота пирамиды, H – центр правильного треугольника ABC. Тогда центр O вписанной сферы является точкой пересечения биссектрисы угла SPH и высоты SH, OH – радиус искомой сферы. $\angle SPH = 60°$, значит, $PH=\frac{\sqrt{3}}{3}h$. Прямоугольные треугольники SPH и POH подобны (по углам). Отсюда следует, что $SH{:}PH = PH{:}OH$, $OH = \frac{h}{3}$.

3*. Что представляет собой линия пересечения двух пересекающихся сфер? Ответ поясните.

Решение. Линия пересечения двух пересекающихся сфер есть окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной прямой, соединяющей центры сфер (рис. 27).

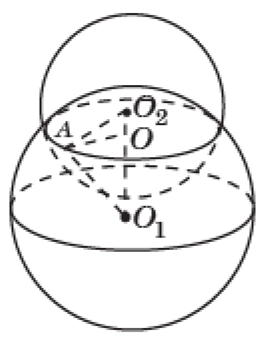


Рис. 27

Действительно, соединим центры O_1 и O_2 двух пересекающихся сфер. Возьмем на линии их пересечения произвольные точки A, B и C. Соединим их с центрами сфер. $\Delta O_1AO_2= \Delta O_1BO_2=\Delta O_1CO_2$ (по трем сторонам). Опустим из точек A, B и C перпендикуляры на O_1O_2. Основаниями этих перпендикуляров будет одна и та же точка O. AO, BO и CO лежат в одной и той же плоскости, перпендикулярной OO_1, и $AO=BO=CO$. Следовательно, точки A, B, C принадлежат одной окружности с центром в точке O.

Урок 76
Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Шар диаметра 20 см пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 6 см. Найдите площадь полученного сечения.

2. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 30^{o} к нему. Найдите радиус полученного сечения, если радиус шара равен 1.

3. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной призмы, все ребра которой равны a.

4. В прямую призму, основанием которой является ромб с диагоналями 6 см и 8 см, вписана сфера. Определите боковое ребро призмы и радиус вписанной в нее сферы.

5*. В сферу вписана четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны. Докажите, что центр основания пирамиды является центром сферы.

Вариант 2

1. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 8 см. Площадь полученного сечения равна 125π см^2. Найдите радиус шара.

2. Диаметр шара равен D. Через его конец под углом 45^{o} к нему проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

3. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите ее радиус.

4. В правильную треугольную призму, площадь основания призмы равна $27\sqrt{3}$ см^2, вписана сфера. Найдите высоту призмы и радиус сферы.

5*. Боковые ребра правильной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45^{o}. Где расположен центр описанной сферы относительно пирамиды?

п. 34. Цилиндр. Конус (уроки 77-80)

Цель – сформировать понятия цилиндра, конуса, усеченного конуса и их элементов. Рассмотреть сечения цилиндра и конуса плоскостью.

Урок 77

I. Анализ контрольной работы № 1.

II. Новый материал – цилиндр.

Пусть в пространстве заданы две параллельные плоскости α и α*’*. *F* – круг в одной из этих плоскостей, например α (рис. 28).

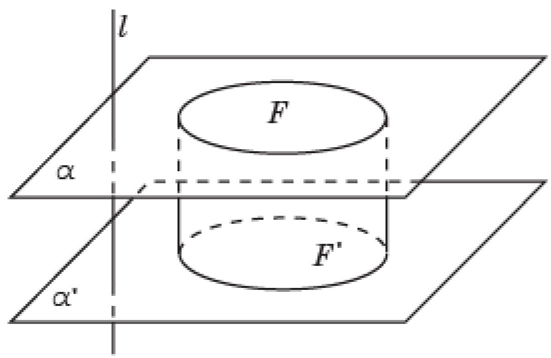


Рис. 28

Рассмотрим ортогональное проектирование на плоскость α*’*. Проекцией круга *F* будет круг *F’*.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга *F* с их ортогональными проекциями, называется цилиндром.

Круги *F* и *F’* называются основаниями цилиндра.

Расстояние между плоскостями оснований называется высотой цилиндра.

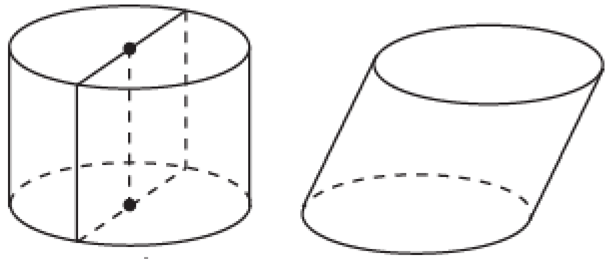
Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки окружности одного основания цилиндра с их ортогональными проекциями, называется боковой поверхностью цилиндра. Сами отрезки называются образующими цилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется осью этого цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением.

В случае, если вместо ортогонального проектирования взять параллельное проектирование в направлении наклонной к плоскости α*’*, то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга *F* с их параллельными проекциями, называется *наклонным цилиндром*.

Обычно цилиндр изображается в ортогональной проекции (рис. 29).



а) Рис. 29 б)

III. Закрепление нового материала.

1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

Ответ. 5 м.

2. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси таким образом, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

Решение. Сечение $ABCD$ – квадрат (рис. 30),

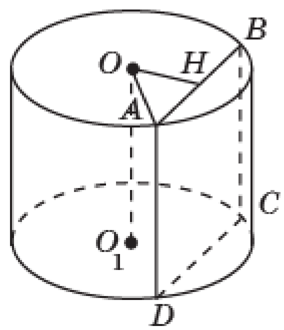


Рис. 30

AD = 8 дм = AB, AO = 5 дм, OO_1 – ось цилиндра, OH, где H – середина хорды AB, является искомым расстоянием. Из прямоугольного треугольника AOH найдем $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

3. Осевое сечение цилиндра - квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Чему равна площадь основания цилиндра?

Ответ. 4π см^2.

Урок 78

I. Математический диактант.

Вариант 1

1. Цилиндром называется …
2. Основаниями цилиндра являются …
3. Образующими цилиндра называются …
4. Осью цилиндра называется …
5. Цилиндр имеет … осевых сечений.

Вариант 2

1. Цилиндр получается следующим образом …
2. Высотой цилиндра называется …
3. Боковой поверхностью цилиндра называется …
4. Осевым сечением цилиндра называется …
5. Цилиндр имеет … образующих.

II. Проверка математического диктанта.

III. Устная работа.

1). Сколько образующих имеет цилиндр?

2). Что можно принять в цилиндре за его высоту?

3). Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?

4). Какой фигурой является осевое сечение цилиндра?

5). Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?

6). Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить: а) прямоугольник; б) равнобедренный треугольник; в) круг?

7). Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?

Ответы. 1). Бесконечно много.

2). Расстояние между основаниями цилиндра.

3). Круг, равный основаниям.

4). Прямоугольник.

5). Прямоугольник.

6). а) Да; б) нет; в) да.

7). а) Одна; б) бесконечно много.

IV. Решение задач.

1. Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудаленных от: а) образующих; б) оснований.

Ответ. а) Ось цилиндра; круг, лежащий в плоскости, параллельной основаниям и проходящей через центр симметрии цилиндра.

2. Найдите геометрическое место точек пространства, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

Ответ. Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая.

3. Два цилиндра имеют две общие образующие. Какая фигура получится при пересечении этих цилиндров плоскостью, перпендикулярной их осям?

Ответ. Два пересекающихся круга.

Задание на дом

1. Выучить: определения цилиндра и его элементов (п. 34 учебника до конуса).

2. Решить задачи.

1). Радиус основания цилиндра равен r, диагональ осевого сечения - d. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ. $2r\sqrt{d^2-4r^2}$.

2). Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна Q. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ. $\frac{\sqrt{Q}}{2}$.

3). Площадь осевого сечения цилиндра равна 16 $см^2$, площадь основания цилиндра равна 4π $см^2$. Чему равна высота цилиндра?

Ответ. 4 см.

4). Радиус основания цилиндра равен 1, высота 20, площадь сечения, параллельного оси, равна 20 кв.ед. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5*. В цилиндре параллельно оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60^0. Высота цилиндра 10 см, расстояние от нее до секущей плоскости 2 см. Найдите площадь сечения.

Ответ. $S_{сечения}=\frac{40\sqrt{3}}{3}$ ($см^2$).

Урок 79

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения цилиндра, его основания, высоты, боковой поверхности, образующей.

№ 2. – Определения оси цилиндра, его осевого сечения, изображение цилиндра.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?

Ответ. а) Одна плоскость, параллельная основаниям цилиндра и проходящая через середину его оси; б) бесконечно много плоскостей, являющихся осевыми сечениями цилиндра.

2). В цилиндре, радиус основания которого равен 4 см и высота 6 см, проведено сечение, параллельное оси. Расстояние между диагональю сечения и осью цилиндра равно 2 см. Найдите площадь сечения.

Ответ. $24\sqrt{6}$см^2.

II. Задание для класса.

1. Цилиндр пересечен плоскостью, проходящей через параллельные, но не равные хорды оснований. Определите вид сечения.

Ответ. Часть эллипса.

2. Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна $3\sqrt{41}$см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.

Ответ. 8 см.

3*. Докажите, что центр описанной и вписанной сфер в правильный тетраэдр является также центром сферы, касающейся всех его ребер в их серединах. Можно ли этот результат обобщить для всех правильных многогранников?

Решение. Это действительно так. Докажем, что точка O, центр вписанной и описанной сфер, одинаково удалена от всех ребер правильного тетраэдра $ABCD$, т. е. во-первых, она одинаково удалена от всех ребер основания, и, во-вторых, от всех боковых ребер (рис. 31). Покажем, что $OE=OF$, где E, F – середины соответственно ребер AD, AC.

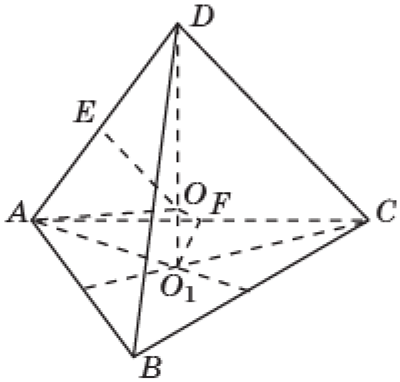


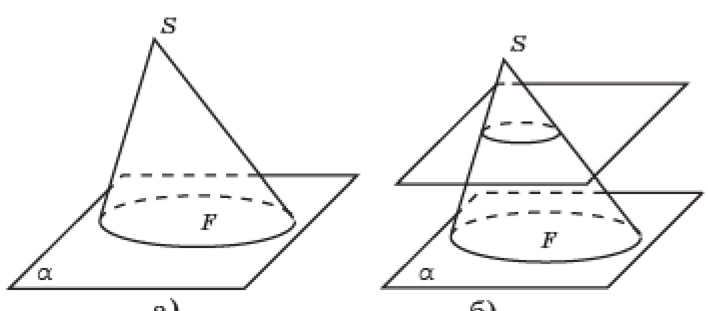
Рис. 31

Действительно, из прямоугольного треугольника AOE имеем: $OE=\sqrt{AO^2-AE^2}=\sqrt{\frac{6}{16}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, где a – ребро тетраэдра. С другой стороны, из прямоугольного треугольника FO_1O, где O_1 основание высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на плоскость ABC, имеем: $OF=\sqrt{FO_1{}^2-OO_1{}^2}=\sqrt{\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{24}a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Таким образом, $OE=OF$.

Этот результат можно обобщить для всех правильных многогранников. Другими словами, в правильном многограннике центр вписанной, описанной сфер и сферы, касающейся середины ребер, совпадают. Эта точка называется центром правильного многогранника.

III. Новый материал.

Учащиеся представляют себе, как выглядит конус. Дадим его определение. Для этого зададим в пространстве плоскость α и точку S, ей не принадлежащую, и F – круг в плоскости α (рис. 32).



а) Рис. 32 б)

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F, называется конусом. Круг F называется основанием конуса, а точка S – вершиной конуса. Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания называется высотой конуса (рис. 32, а).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину конуса с точками окружности его основания, называется боковой поверхностью конуса. Сами отрезки называются образующими конуса.

Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется усеченным конусом (рис. 32, б). Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также основанием усеченного конуса. Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В случае, если отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, то конус называется прямым. В противном случае он называется наклонным.

В дальнейшем прямые конусы мы будем называть просто конусами. Прямая, проходящая через вершину и центр основания конуса, называется осью этого конуса. Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется осевым сечением. Обычно конус и усеченный конус изображаются в ортогональной проекции.

IV. Закрепление нового материала.

1. Высота конуса равна 8 м, радиус основания - 6 м. Найдите образующую конуса.

Ответ. 10 см.

2. Радиус основания конуса равен 1 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ. $\sqrt{3}$ см^2.

3. Высота конуса h. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

Решение. Пусть высота конуса $SO = h$, $SO_1 = x$ (рис. 33).

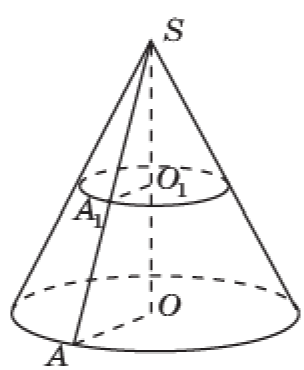


Рис. 33

Треугольник SO_1A_1 подобен треугольнику SOA: $\frac{x}{h} = \frac{r}{R}$, где $r = O_1A_1$ и $R = OA$, но $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как, по условию $\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$. Таким образом, $x = h\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Урок 80

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Конус получается следующим образом …
2. Высотой конуса называется …
3. Боковой поверхностью конуса называется …
4. Усеченным конусом называется …
5. Высотой усеченного конуса называется …

Вариант 2

1. Конусом называется …
2. Вершиной конуса называется …
3. Образующими конуса называются …
4. Наклонным конусом называется …
5. Высотой усеченного конуса называется …

II. Проверка математического диктанта.

III. Устная работа.

1). Может ли высота конуса равняться одной из его образующих?

2). Одинаково ли наклонены к плоскости основания образующие конуса?

3). Какой фигурой является осевое сечение конуса?

4). Может ли осевым сечением конуса быть: а) прямоугольный; б) равносторонний треугольник?

5). Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

6). Может ли в сечении конуса плоскостью получиться равнобедренный треугольник, отличный от осевого сечения?

7). Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольший периметр?

8). Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет наибольшую площадь?

Ответы. 1). Нет.

2). Да.

3). Равнобедренным треугольником.

4). а), б) Да.

5). 16 $см^2$.

6). Да, это любое сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину и пересекающей его поверхность. Боковыми сторонами равнобедренного треугольника являются образующие конуса, а основанием - хорда основания.

7). Осевое сечение.

8). Осевое сечение.

IV. Решение задач (усеченный конус).

1. Какой фигурой является осевое сечение усеченного конуса?

Ответ. Равнобедренной трапецией.

2. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 9 см, его высота равна 10 см. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ. 120 $см^2$.

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r. Образующая составляет с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите: а) высоту конуса; б) площадь осевого сечения.

Ответ. а) $R - r$; б) $R^2 - r^2$.

4*. Верхнее основание усеченного конуса перемещается в направлении, перпендикулярном нижнему основанию. Как изменяется угол наклона образующей усеченного конуса к плоскости нижнего основания?

Ответ. С увеличением высоты угол наклона образующей увеличивается; с уменьшением – уменьшается.

V. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определение конуса и его элементов (п. 34 учебника).

2. Решить задачи.

1). Осевое сечение конуса - равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.

Ответ. 5 см, $5\sqrt{3}$см.

2). Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

Ответ. 90^0.

3). Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом 60^o. Найдите площадь основания конуса.

Ответ. 9π $м^2$.

4). Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60^o. Найдите площадь осевого сечения.

Ответ. $16\sqrt{3}$$см^2$.

3*. Найдите геометрическое место точек пространства, удаленных от данной прямой на данное расстояние.

Ответ. Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая.

4*. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от всех образующих конуса.

Ответ. Ось конуса.

п. 35. Поворот. Фигуры вращения (уроки 81, 82, 83)

Целью данных уроков является знакомство учащихся с фигурами в пространстве, которые получаются вращением различных плоских фигур, многогранников, а также рассматриваются фигуры, которые получаются комбинацией различных движений.

Урок 81

I. Устная работа.

1). Образующая наклонного цилиндра в два раза больше его высоты. Под каким углом наклонена образующая к плоскости основания?

2). На основаниях цилиндра взяты две непараллельные хорды. Что будет являться кратчайшим расстоянием между этими хордами?

3). Из каких фигур состоит развертка конуса?

4). Полукруг радиуса R свернут в конус. Найдите радиус основания конуса.

5). Высота усеченного конуса равна разности радиусов его оснований. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью нижнего основания.

6). Какая фигура является пересечением двух больших кругов шара?

Ответы. 1). 30^{o}.

2). Эти хорды являются скрещивающимися прямыми, кратчайшим расстоянием между ними будет длина их общего перпендикуляра.

3). Из круга и сектора.

4). $\frac{R}{2}$.

5). 45^{o}.

6). Отрезок, который является диаметром данного шара.

II. Новый материал.

Важным классом фигур в пространстве, помимо многогранников, рассмотренных на предыдущих занятиях, является класс фигур, называемых фигурами вращения. С некоторыми из них вы уже знакомы. Это прямые круговые цилиндр и конус, шар.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве относительно прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости относительно точки.

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом относительно центра O на угол φ, если $OA'=OA$ и $\angle A'OA=\varphi$.

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой. Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения обозначим O (рис. 34).

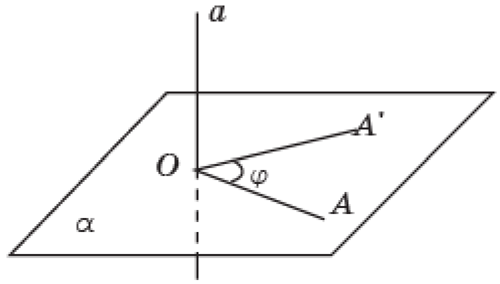


Рис. 34

Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом относительно прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом относительно центра O на угол φ.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются относительно этой прямой на угол φ называется поворотом или вращением. Прямая a при этом называется осью вращения.

Определение. Говорят, что фигура Ф в пространстве получена вращением фигуры F относительно оси a, если точки фигуры Ф получаются всевозможными поворотами точек фигуры F относительно оси a. Фигура Ф при этом называется фигурой вращения.

Например, при вращении точки A относительно прямой a получается окружность с центром в точке O и радиусом OA.

Прямой круговой цилиндр (называем цилиндр) получается вращением прямоугольника относительно прямой, содержащей одну из его сторон.

Прямой круговой конус (называем конус) получается вращением прямоугольного треугольника относительно прямой, содержащей однин из его катетов.

Усеченный конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, относительно прямой, содержащей сторону, прилегающую к этому углу.

Шар получается вращением полукруга относительно прямой, содержащей его диаметр.

III. Закрепление нового материала.

1. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC относительно прямой AB (рис. 35, а, б). Как эту фигуру можно получить из конусов?

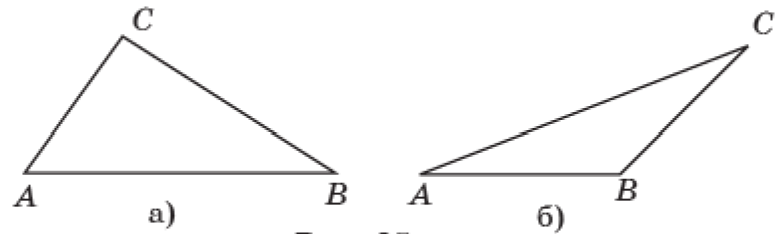


Рис. 35

Решение представлено соответственно на рисунках 36, а, б.

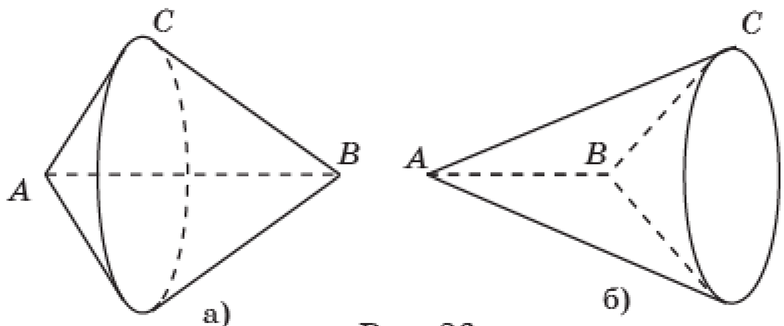


Рис. 36

В первом случае фигура вращения имеет форму двух конусов, соприкасающихся равными основаниями (*биконус*), а во втором - фигурой вращения является конус, из которого удален другой конус с тем же основанием.

2. Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника относительно прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника (рис. 37, а). Как эту фигуру можно получить из конусов?

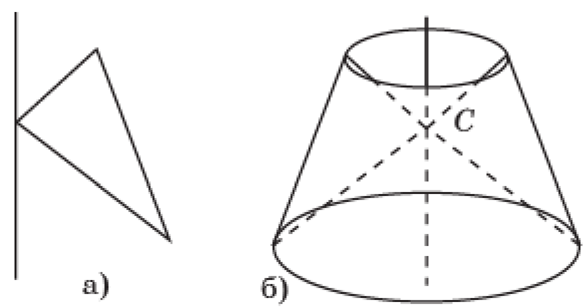


Рис. 37

Решение показано на рисунке 37, б. Эту фигуру вращения можно получить из усеченного конуса удалением двух конусов с общей вершиной *C*, основаниями которых служат основания усеченного конуса.

3*. Нарисуйте фигуру, полученную вращением круга относительно прямой, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его (рис. 38, а)? Что она напоминает?

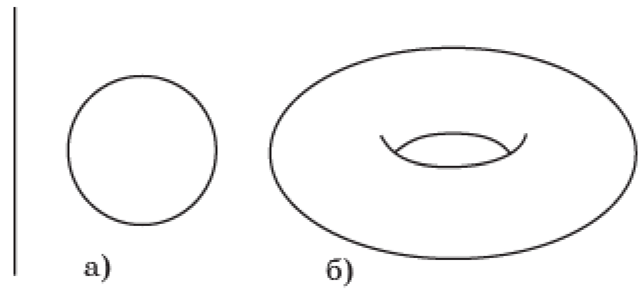


Рис. 38

Решение. Если круг вращать относительно прямой, лежащей в плоскости круга (рис. 38, б) и не пересекающей его, то полученная фигура вращения называется тором и напоминает баранку или бублик.

4*. Нарисуйте фигуры, полученные вращением круга относительно касательной и прямой, содержащей хорду, не являющуюся диаметром круга (рис. 39, а).

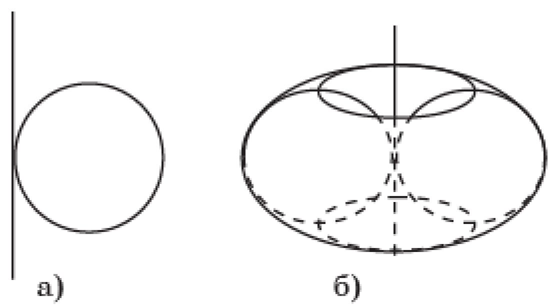


Рис. 39

Решение показано на рисунке 39, б).

Замечание. Для изучения данной темы, конечно, желательно, иметь специальный прибор для демонстрации различных фигур вращения, чтобы учащиеся наглядно видели, как они получаются. Изготовление таких приборов было очень популярно в 60-е годы прошлого века, например, оно описано в статье Рябова Н.И. Универсальный проекционный ящик с прибором для демонстрации тел вращения /В кн. Наглядные пособия по математике. - М.: Учпедгиз, 1962, с.61. Мы же на своих уроках используем обыкновенную электрическую дрель с соответствующими насадками.

Урок 82

I. Устная работа.

1). Что называется поворотом на угол относительно оси *a*? Как по-другому называется поворот?

2). Что называется фигурой вращения?

3). Какая фигура получается при вращении отрезка *OA* относительно прямой, проходящей через точку *O* и перпендикулярной *OA*?

Ответ. Получается круг с центром в точке *O* радиуса *OA*.

4). Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника относительно прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника?

Ответ. Получается конус, образующая которого равна боковой стороне треугольника, а радиус равен половине его основания.

5). Какая фигура получается при вращении круга относительно прямой, содержащей диаметр?

Ответ. Получается шар.

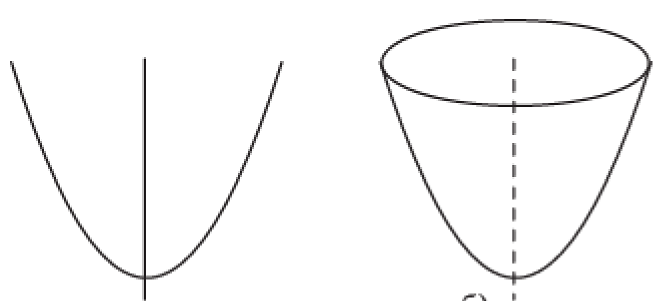
6). Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура описывается при этом его осью?

Ответ. При этом ось описывает плоскость, параллельную данной.

II. Новый материал.

Рассмотрим фигуры, которые можно получить вращением кривых и криволинейных трапеций.

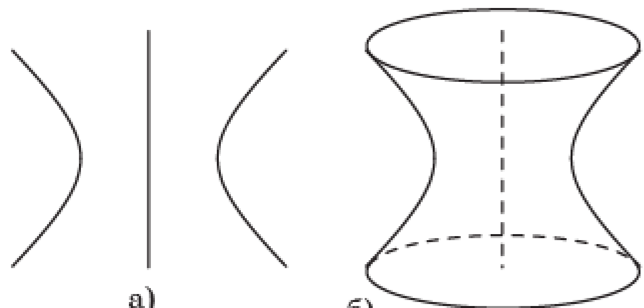
Одной из наиболее важных таких кривых является парабола - кривая, задаваемая уравнением $y=ax^2$ ($a>0$). При вращении параболы относительно оси *Oy* получается фигура, которая называется параболоидом вращения (рис. 40).



а) Рис. 40 б)

Эта фигура обладает любопытными свойствами, в том числе оптическим, в силу которого пучок световых лучей, параллельных оси *Oy*, отражаясь от поверхности параболоида вращения, собирается в одной точке - фокусе. Именно поэтому в форме параболоида вращения изготавливаются отражающие поверхности прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т.д. Параболоид вращения образует поверхность жидкости в цилиндрическом сосуде, если его вращать относительно своей оси.

Рассмотрим еще одну известную кривую – гиперболу. При вращении гиперболы относительно ее оси симметрии получается поверхность, которая называется гиперболоидом вращения (рис. 41).



а) б)

Рис. 41

Она часто используется в архитектурных сооружениях. Например, Шуховская башня в Москве на Шаболовке составлена из частей гиперболоида вращения (по-возможности, показать учащимся ее изображение, использовав, например, книгу Волошинова А.В. Математика и искусство. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 2000, с. 203).

III. Закрепление нового материала.

1. Кривая задана уравнением $y=\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении этой кривой относительно оси Oy.

2. Кривая задана уравнением $y=\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении этой кривой относительно оси Ox.

3. Эллипсом называется кривая на плоскости, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Нарисуйте эту кривую и эллипсоид вращения - фигуру, полученную вращением эллипса вокруг оси Ox.

Урок 83

I. Опрос учащихся.

Двое учащихся приглашаются за первую свободную парту - опрос по теории.

Задание для первого:

- Дайте определение поворота в пространстве.
- Как получается цилиндр? Усеченный конус?
- Какая фигура называется параболоидом вращения? Изобразите его.

Задание для второго:

- Дайте определение фигуры вращения.
- Как получается конус? Шар?
- Как получается гиперболоид вращения? Изобразите его.

Классу предлагаются следующие задачи:

1). Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении равностороннего треугольника относительно прямой, проходящей через его вершину так, как показано на рисунке 42.

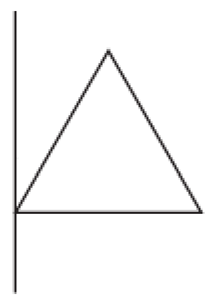


Рис. 42

2. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ относительно оси Ox.

3*. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении гиперболы относительно оси Ox.

Решения первой и второй классных задач разбираем вместе с классом (работа с места) и после получения первых ответов даем их решения для всего класса через кодоскоп. Затем переходим к решению последней классной задачи.

II. Новый материал.

Рассмотрим фигуры в пространстве, которые получаются вращением различных многогранников.

Определим сначала какая фигура получится при вращении правильной n-угольной пирамиды относительно ее высоты.

Нетрудно видеть, что при этом получится конус, высота которого совпадает с высотой пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, описанной около основания правильной n-угольной пирамиды.

Задача немного усложняется. Рассмотрим вращение произвольной пирамиды относительно ее высоты, опущенной на основание. В этом случае фигурой вращения также будет конус, высота которого совпадает с высотой пирамиды. Радиус основания этого конуса равен наибольшему из расстояний от вершин основания пирамиды до основания ее высоты.

Замечание. Хорошо, если ребята сначала проведут мысленный эксперимент и представят себе фигуры вращения. Затем продемонстрировать их с помощью прибора (см. замечание урока 81).

III. Закрепление нового материала.

1. Определите какая фигура получится при вращении правильной n-угольной призмы относительно прямой, проходящей через центры ее оснований.

Задача аналогична задаче, разобранной при объяснении нового материала. Фигурой вращения является цилиндр, высота которого равна высоте призмы, радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, описанной около основания правильной n-угольной призмы.

2. Найдите фигуру, которая получится при вращении правильного октаэдра относительно прямой, соединяющей его противоположные вершины (которая называется осью октаэдра).

Ответ. Фигурой вращения будут два равных конуса с совпадающими основаниями (биконус, с которым мы уже встречались на уроке 81).

IV. Дополнительный материал.

Рассмотрим вопрос о том, какая фигура получается при вращении куба $A...D_1$ относительно диагонали AC_1.

Ребра этого куба, выходящие из вершин A и C_1, при вращении дадут два конуса с этими вершинами. Более сложный вопрос состоит в нахождении части фигуры вращения, заключенной между этими конусами. Как нетрудно видеть, эта часть фигуры вращения получается при вращении ребер куба, скрещивающихся с диагональю AC_1.

Рассмотрим отдельно вопрос о нахождении фигуры, полученной вращением отрезка B_1B_2, который лежит на прямой b, скрещивающейся с осью вращения a.

Пусть OH - общий перпендикуляр к прямым a и b (рис. 43).

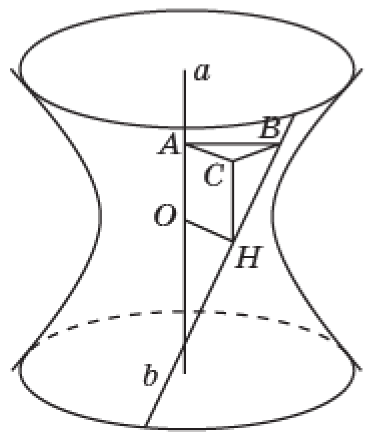


Рис. 43

Напомним, что длина отрезка *OH* называется расстоянием между прямыми *a* и *b*, и она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых *a* и *b*. Поэтому при вращении точек прямой *b* относительно оси *a* окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки *H*. Для нахождения радиусов окружностей для остальных точек прямой *b* рассмотрим произвольную точку *B* на этой прямой и опустим из нее перпендикуляр *AB* на прямую *a*. Через точку *H* проведем прямую, параллельную *a*, и через точку *A* - прямую, параллельную *OH*. Точку пересечения этих прямых обозначим *C*. Пусть расстояние *OH* равно *d*, расстояние *OA* равно *y* и угол *BHC* равен φ. Выразим через эти величины расстояние *x* между точками *A* и *B*. Треугольник *ABC* - прямоугольный, катет *AC* равен *d*, катет *BC* равен $y\cdot\text{tg}\ \varphi$. Поэтому $x^2=d^2+y^2\cdot\text{tg}\ 2\varphi$. Перенеся слагаемое, содержащее *y*, в левую часть равенства, разделив обе части полученного равенства на d^2 и обозначив $d^2 = a^2$, $d^2\cdot\text{tg}\ 2\ \varphi = b^2$, получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}=1$, которое представляет собой уравнение гиперболы.

Таким образом, мы получили, что при вращении отрезка, лежащего на прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается фигура, которая является частью гиперболоида вращения, рассмотренного выше.

Возвращаясь теперь к кубу, мы видим, что искомая фигура вращения, заключенная между двумя конусами, является частью гиперболоида вращения, и вся фигура вращения выглядит так, как показано на рисунке 44.

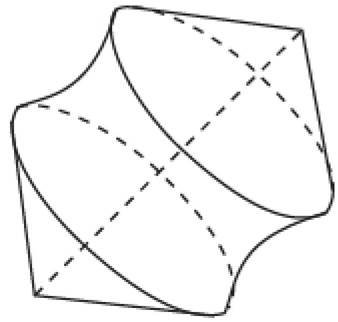


Рис. 44

Заметим, что поскольку поверхность фигуры вращения при вращении многогранника определяется вращением ребер этого многогранника, то она может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса и части поверхности гиперболоида вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

Задание на дом

1. Выучить: определения поворота, фигуры вращения, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара, как фигур вращения; знать, как получаются параболоид, гиперболоид и эллипсоид вращения (п. 35 учебника).

2. Решить задачи.

1) Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении прямоугольника относительно прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости прямоугольника (рис. 45).

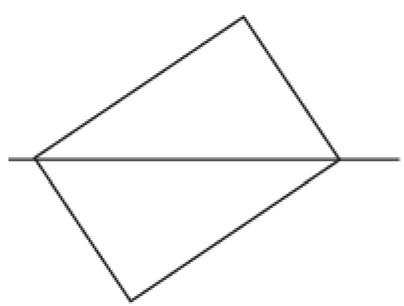


Рис. 45

2) Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, относительно оси Oy.

3) Найдите фигуру, которая получится при вращении квадрата $ABCD$ относительно прямой a (рис. 46, а).

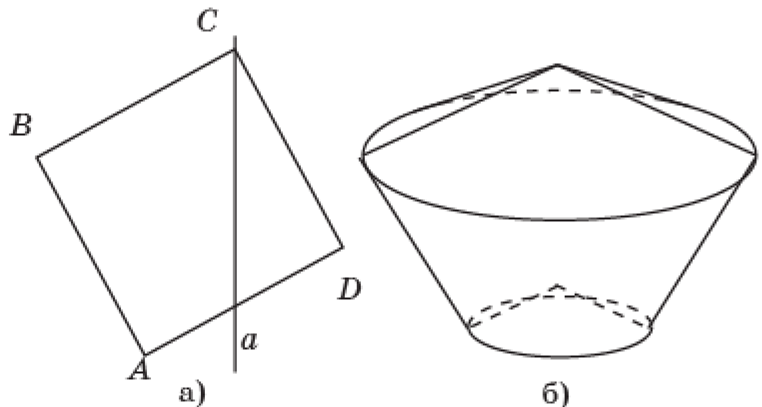


Рис. 46

Решение показано на рисунке 46, б.

4) Найдите фигуры, получающиеся при вращении: а) тетраэдра относительно его высоты; б) октаэдра относительно прямой, соединяющей центры противоположных граней.

Ответ. В случае а) получится конус. В случае б) - гиперболоид вращения.

3*. Фигура получена при вращении: а) икосаэдра; б) додекаэдра вокруг прямой, соединяющей его противоположные вершины. Из каких фигур состоит полученная фигура вращения?

Ответ. а) Из двух конусов и гиперболоида вращения; б) из двух конусов и трех гиперболоидов вращения.

п. 36. Вписанные и описанные цилиндры (уроки 84, 85)

Цель – продолжить знакомить учащихся с вписанными и описанными фигурами; сформировать понятия вписанного и описанного цилиндра (по отношению к сфере и призме).

Урок 84

I. Опрос учащихся.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении квадрата $ABCD$ вокруг прямой a, проходящей через вершину B и перпендикулярной диагонали BD.

2). Нарисуйте фигуру, которая получается вращением круга вокруг касательной.

Задание для класса.

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении ромба $ABCD$ вокруг прямой a, проходящей через вершину C и перпендикулярной диагонали AC.

2. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением круга вокруг хорды, не являющейся диаметром.

3*. Фигура получена при вращении: а) икосаэдра; б) додекаэдра вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней. Из каких фигур состоит полученная фигура вращения?

Ответ. а) Из трех гиперболоидов вращения; б) из двух усеченных конусов и гиперболоида вращения.

II. Новый материал.

Вспоминаем с учащимися, какие сфера и многогранник называются вписанными и описанными относительно друг друга. Затем вместо многогранника рассматриваем цилиндр.

Определение. Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом цилиндр называется описанным около сферы.

Определение. Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около цилиндра.

Затем рассматриваем условие, при котором в цилиндр можно вписать сферу.

Теорема. Если образующая цилиндра равна диаметру его основания, то в него можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевое сечение цилиндра в этом случае является квадратом. Впишем в него окружность. Будем теперь вращать квадрат вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси цилиндра. В результате получим исходный цилиндр вместе с вписанной в него сферой.

III. Закрепление нового материала.

1. В цилиндр вписана сфера радиуса r. Чему равна высота цилиндра?

Ответ. $2r$.

2. В сферу радиуса 10 см вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом 30º. Найдите высоту цилиндра и радиус его основания.

Решение. Пусть осевым сечением цилиндра является прямоугольник $ABCD$, где точки A и B принадлежат нижнему основанию. Тогда в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AC=20 см, катеты равны: $BC=AC\cdot\sin 30^\circ$= 10 см, $AB=AC\cdot\cos 30^\circ=10\sqrt{3}$ см. Итак, высота цилиндра равна 10 см, AB является диаметром основания цилиндра, следовательно, его радиус равен $5\sqrt{3}$ см.

Урок 85

I. Устная работа.

1). Можно ли вписать сферу в цилиндр, осевым сечением которого является: а) прямоугольник; б) квадрат?

2). Можно ли вписать сферу в наклонный цилиндр?

3). Где будет расположен центр сферы, описанной около цилиндра?

4). Радиус основания цилиндра равен r. Высота равна h. Чему равен радиус описанной сферы?

5). Около цилиндра высоты h описана сфера радиуса R. Найдите диаметр основания цилиндра.

6). Можно ли описать сферу около наклонного цилиндра?

Ответы. 1). а) Нет; б) да.

2). Нет, нельзя.

3). В центре отрезка, концами которого являются центры окружностей оснований цилиндра.

4). $\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}$.

5). $\sqrt{4R^2-h^2}$.

6). Нет, нельзя.

II. Новый материал.

Рассмотрим цилиндр и призму.

Определение. Прямая призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания лежат на основаниях цилиндра, а боковыми ребрами являются образующие цилиндра. При этом цилиндр называется описанным около призмы.

Ясно, что около прямой призмы можно описать цилиндр тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Определение. Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющую с цилиндром других общих точек.

Определение. Прямая призма называется описанной около цилиндра, если ее основания содержат основания цилиндра, а плоскости боковых граней касаются цилиндра. При этом цилиндр называется вписанным в призму.

Ясно, что в прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.

III. Закрепление нового материала.

1. Можно ли вписать цилиндр в: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?

Ответ. а), б), г), д) Да; в) нет.

2. Можно ли описать около цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) прямую треугольную призму; д) правильную шестиугольную призму?

Ответ. а) Не всегда; б), г), д) да; в) нет.

3. Через какие точки пространства можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?

Ответ. Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности.

4. Через какие прямые можно провести плоскости, касающиеся цилиндра?

Ответ. Не лежащие внутри соответствующей цилиндрической поверхности и параллельные ее оси.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определения вписанного и описанного цилиндра в сферу и призму: касательной плоскости к цилиндру; теорему о сфере, вписанной в цилиндр (п. 36 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите радиус основания цилиндра, описанного около сферы радиуса R.

Ответ. $2R$.

2). В сферу вписан цилиндр, образующая которого равна 8 см и диагональ осевого сечения наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найдите радиусы сферы и основания цилиндра.

Ответ. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$см, 8 см.

3). В равносторонний цилиндр (высота равна диаметру основания), радиус основания которого равен r, вписана правильная треугольная призма. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через ось цилиндра и боковое ребро призмы.

Ответ. $3r^2$.

4). Около равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен r, описана правильная четырехугольная призма. Найдите площади ее граней.

Ответ. $4r^2$.

5*. Нарисуйте: а) сферу, вписанную в цилиндр; б) цилиндр, вписанный в сферу; в) призму, вписанную в цилиндр; г) цилиндр, вписанный в призму.

п. 37*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс

(См. параграф 7)

п. 38. Вписанные и описанные конусы (уроки 86, 87)

Цель – сформировать понятия вписанного и описанного конуса по отношению к сфере и пирамиде.

Урок 86

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения вписанного и описанного цилиндра по отношению к сфере; вписанной и описанной сферы по отношению к цилиндру.

№ 2. – Теорема о вписанной в цилиндр сфере.

№ 3. – Определения призмы, вписанной и описанной около цилиндра; цилиндра, вписанного и описанного около призмы; касательной плоскости к цилиндру.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Как расположена касательная плоскость к цилиндру по отношению к осевому сечению этого цилиндра, проходящему через образующую, лежащую в касательной плоскости?

Ответ. Перпендикулярна.

2). Каково взаимное расположение оси цилиндра и плоскости, касательной к цилиндру?

Ответ. Параллельны.

3). Приведите примеры призм, в которые: а) можно вписать; б) нельзя вписать цилиндр.

4). Приведите примеры призм, около которых: а) можно описать; б) нельзя описать цилиндр.

II. Задание для класса.

1. Найдите образующую цилиндра, описанного около сферы радиуса R.

Ответ. $2R$.

2. В равносторонний цилиндр (высота равна диаметру основания), радиус основания которого равен r, вписана правильная четырехугольная призма. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через ось цилиндра и боковое ребро призмы.

Ответ. $4r^2$.

3*. Около равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен r, описана правильная треугольная призма. Найдите площади ее граней.

Ответ. $3\sqrt{3}r^2$; $12r^2$.

III. Новый материал.

Рассмотрим следующие комбинации фигур: конус и сфера; конус и пирамида.

Определение. Сфера называется вписанной в конус, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.

Теорема. В конус можно вписать сферу.

Доказательство. Заметим, что осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник. Впишем в него окружность. Будем теперь вращать треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг оси конуса. В результате получим исходный конус вместе с вписанной в него сферой.

Определение. Конус называется вписанным в сферу, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около конуса.

Определение. Пирамида называется вписанной в конус, если ее основание лежит на основании конуса, а боковыми ребрами являются образующие конуса. При этом конус называется описанным около пирамиды.

Ясно, что около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Определение. Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с конусом других общих точек.

Определение. Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание содержит основание конуса, а плоскости боковых граней касаются конуса. При этом конус называется вписанным в пирамиду.

Ясно, что в пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.

IV. Закрепление нового материала.

1. 1. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания и равна d. Найдите радиус вписанной сферы.

Ответ. $d\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. Радиус основания конуса равен r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите радиус вписанной сферы.

Ответ. $r(\sqrt{2}-1)$.

3. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найдите радиус вписанной сферы.

Ответ. 3 м.

4. Докажите, что около конуса можно описать сферу.

Решение аналогично доказательству теоремы из нового материала.

Урок 87
I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Конус называется описанным около сферы, если …
2. Сфера называется описанной около конуса, если …
3. В конус … вписать сферу.
4. Пирамида называется вписанной в конус, если …
5. Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда …

Вариант 2

1. Сфера называется вписанной в конус, если …
2. Конус называется вписанным в сферу, если …
3. Около конуса … описать сферу.
4. Пирамида называется описанной около конуса, если …
5. В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. Радиус основания конуса равен *r*, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

Ответ. $2\frac{r\sqrt{3}}{3}$.

3. Можно ли вписать в конус 4-угольную пирамиду, у которой углы основания последовательно относятся как: а) 1:5:9:7; б) 4:2:5:7?

Ответ. а) Нет; б) да.

4. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 18 см; двугранные углы при основании пирамиды равны. В пирамиду вписан конус. Найдите радиус основания конуса и его высоту, если меньшее боковое ребро пирамиды составляет с меньшей стороной трапеции угол 60°.

Ответ. 6 см, $2\sqrt{3}$см.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определения вписанных и описанных сферы и пирамиды по отношению к конусу; теорему об описанной около конуса сферы; определение касательной плоскости к конусу (п. 38 учебника).

2. Решить задачи.

1). В конусе образующая равна 15 см и составляет с основанием угол 60^0. Найдите радиус описанной сферы.

Ответ. $5\sqrt{3}$см.

2. В конус вписана сфера, радиус которой равен R. Найдите радиус основания конуса, если угол при вершине осевого сечения равен 60^0.

Ответ. $R\sqrt{3}$.

3. Можно ли описать около конуса 4-угольную пирамиду, у которой стороны основания последовательно относятся как: а) 5:6:8:7; б) 3:10:15:7?

Ответ. а) Да; б) нет.

3*. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник; боковые ребра равны между собой, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с основанием углы 30^o и 60^o. Около пирамиды описан конус таким образом, что у них общая высота. Найдите радиус основания конуса, если высота пирамиды равна h.

Ответ. $\frac{h\sqrt{30}}{3}$.

п. 39*. Конические сечения

(См. параграф 7)

п. 40. Симметрия пространственных фигур (уроки 88, 89, 90)

На данных уроках рассматривается одно из важнейших свойств пространственных фигур - свойство симметрии. Учащиеся должны знать определение центральной симметрии, осевой симметрии и симметрии относительно плоскости; уметь устанавливать симметричность простейших пространственных фигур, в том числе многогранников и фигур вращения.

Урок 88

I. Математический диктант.

Проводится на листочках с копиркой.

Вариант 1

Продолжите следующие фразы:

1. Около прямой призмы можно описать сферу, если ...
2. В пирамиду можно вписать сферу, если ...
3. Центр описанной около прямой призмы сферы есть ...

Ответьте на следующие вопросы:

4. В любую ли треугольную пирамиду можно вписать сферу?
5. Где будет находиться центр сферы, вписанной в треугольную пирамиду?

6*. Центр шара лежит на оси цилиндрической поверхности. Какую фигуру образуют общие точки шаровой и цилиндрической поверхности?

Ответ. Две окружности радиуса, равного радиусу r цилиндрической поверхности, если радиус шара R больше r; одну окружность, если R=r; общих точек не будет, если R меньше r.

Вариант 2

Продолжите следующие фразы:

1. Около пирамиды можно описать сферу, если ...
2. В прямую призму можно вписать сферу, если ...
3. Биссектральной плоскостью называется ...

Ответьте на следующие вопросы:

4. Около любого ли тетраэдра можно описать сферу?
5. Где будет находиться центр сферы, описанной около тетраэдра?

6*. Задача 6* из первого варианта.

II. Проверка математического диктанта.

Проводится с помощью кодоскопа по листочкам, написанным под копирку.

III. Новый материал.

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрии. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

Определение. Точки A, A' пространства называются симметричными относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точки A и A' называются при этом центрально-симметричными, а точка O - центром симметрии.

Фигура Ф в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки O, если каждая точка A фигуры Ф центрально-симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Ф.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно пересечения его диагоналей. Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т.д.

Определение. Точки A, A' пространства называются симметричными относительно прямой a, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку. Прямая a при этом называется осью симметрии.

Фигура Ф в пространстве называется симметричной относительно оси a, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Ф.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, прямой круговой цилиндр симметричен относительно оси вращения и т. д.

Определение. Точки A, A' в пространстве называются симметричными относительно плоскости α, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Плоскость α при этом называется плоскостью симметрии.

Симметрия относительно плоскости называется также зеркальной симметрией.

Фигура Ф в пространстве называется зеркально-симметричной относительно плоскости □, если каждая точка A фигуры Ф симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Ф.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней. Прямой круговой цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через ось симметрии.

Помимо осей симметрии, рассмотренных выше, рассматриваются также оси симметрии n-го порядка, $n \geq 2$.

Прямая a называется осью симметрии n-го порядка фигуры Ф, если при повороте фигуры Ф на угол $\frac{360^o}{n}$ относительно прямой a фигура Ф совмещается сама с собой.

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Высота правильной треугольной пирамиды, опущенной на основание, являющееся равносторонним треугольником, является осью симметрии 3-го порядка, поскольку при повороте на 120^o относительно этой оси, пирамида совмещается сама с собой. Вообще, высота правильной n-угольной пирамиды является осью симметрии n-го порядка.

IV. Закрепление нового материала.

Классу предлагаются следующие задачи.

1. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.

2. Может ли фигура иметь два или более центров симметрии?

Ответ. Может, например, прямая или плоскость. Однако, ограниченные фигуры не могут иметь более одного центра симметрии.

3. Сколько осей симметрии имеет шар?

Ответ. Бесконечно много, так как осью симметрии шара является любая прямая, содержащая его диаметр.

4. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед? Укажите их на чертеже.

Ответ. В общем случае три плоскости симметрии, каждая из которых проходит через ось симметрии и параллельна одной из пар противоположных граней. В случае, если одна из граней - квадрат, то имеется еще две плоскости симметрии, проходящие через диагонали этого квадрата.

5. Покажите, что фигуры вращения являются симметричными относительно оси вращения.

Ответ. Фигуры вращения являются симметричными относительно оси вращения по определению, так как при любом повороте, в частности на 180^0, они совмещаются сами с собой.

6. Покажите, что фигуры вращения являются симметричными относительно любой плоскости, проходящей через ось симметрии.

Ответ. Фигуры вращения можно представлять себе составленными из окружностей. Поскольку каждая такая окружность симметрична относительно плоскости, проходящей через ось вращения, то и вся фигура будет симметрична относительно данной плоскости.

7*. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких преобразований он самосовместится?

Ответ. Данный тетраэдр самосовместится при поворотах на 120^{o} вокруг оси, проходящей через вершину, противоположную закрашенной грани.

Замечание. Хотя задачи 1-6 могут рассматриваться как устные упражнения, мы рекомендуем после коллективного их обсуждения с учащимися записать ответы в тетради.

Урок 89

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Точки A и A' пространства называются симметричными относительно точки O, если …

2. Фигура Ф в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки O, если …

3. Прямоугольный параллелепипед является центрально-симметричной фигурой относительно точки …

4. Фигура Ф в пространстве называется симметричной относительно оси a, если …

5. Высота правильной четырехугольной пирамиды является осью симметрии … порядка.

Вариант 2

1. Чтобы найти центр симметрии двух центрально-симметричных точек, нужно …

2. Точки A и A' пространства называются симметричными относительно прямой a, если …

3. Прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей …

4. Фигура Ф в пространстве называется зеркально-симметричной относительно плоскости, если …

5. Высота правильной треугольной пирамиды является осью симметрии … порядка.

II. Проверка математического диктанта.

III. Индивидуальное домашнее задание. - Сообщение на тему "Симметрия в природе, искусстве и науке".

По словам известного немецкого математика Г. Вейля, "симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство".

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства: архитектуры, живописи, скульптуры и т. д. Элементы симметрии можно увидеть в общих планах зданий, архитектуре фасадов, в оформлении внутренних помещений, орнаментах, карнизах, колоннах, потолках и т. п. Широко использовалась симметрии при строительстве церквей. Например, можно продемонстрировать ребятам изображение надвратной церкви Воскресения Христова, что в Кремле г. Ростова Великого. Это постройка XVIII века, симметрия видна как в общей композиции, так и в отдельных строениях - башнях и так называемом четверике основного храма с пятиглавным чином русского православия. Также представляем Церковь Вознесения в Коломенском. Красота этого храма поражала людей древней Руси. "Бе же церковь велми чудна высотою, красотою и светлостью, яко не бывало прежде сего на Руси", - записал летописец в год окончания постройки в 1532 году. Красота этого храма непосредственно связана с симметрией его ярусов: могучего четверика (правильной четырехугольной призмы) - основания, поднимающегося над ним восьмерика (правильной восьмиугольной призмы), завершающегося уникальным по своей форме шатром (правильной усеченной восьмиугольной пирамиды). Еще один пример - памятник деревянного зодчества - знаменитая Преображенская церковь XVIII в. в Кижах. Центральная глава окружена четырьмя ярусами. В первых двух ярусах симметрично расположены по четыре главы, в третьем - восемь, и в последнем четвертом - четыре. В целом, несмотря на сложность композиции, симметрия в каждом ярусе хорошо сохраняет монолитность храма, и он воспринимается как единая пирамида, особенно с далекого расстояния.

Скульптура, как и архитектура, тоже дает множество ярких примеров использования симметрии для решения эстетических задач. Например, гробница Джулиано Медичи, созданная великим Микеланджело. В целом это симметричная композиция. Но здесь для повышения выразительности своего произведения автор сочетает симметрию с асимметрией, которая проявляется следующим образом. Фигуры расположены симметрично, изображены в одинаковых позах, они одного размера. Но это разные фигуры: фигура женщины - Ночь, и фигура мужчины - День. Тоже самое можно сказать и о фигуре самого Медичи. В целом его фигура, поза симметричны, но обратите внимание на легкий разворот туловища, положение ног, поворот головы, что делает фигуру асимметричной и более интересной.

Законы симметрии широко используются в прикладном искусстве, особенно во всевозможных бордюрах, орнаментах и т.д. Фантазии мастеров, кажется, не имеют здесь предела. Широко известны разнообразные бордюры и орнаменты.

К орнаментам непосредственно примыкают композиции знаменитого голландского художника Мариуса Эшера, к творчеству которого мы не раз обращаемся в нашем курсе. Он изучил законы сочетания элементов симметрии и использовал их в своих картинах для достижения художественного эффекта. Фантазия художника создала много причудливых мозаик - орнаментов, основой которых являлись изображения птиц, животных, людей, растений.

В заключение представляем учащимся литературу по теме "Симметрия":

- Вейль Г. Симметрия. - М.: Наука, 1968.

- Гильде В. Зеркальный мир. - М.: Мир, 1982.

- Сонин А.С. Постижение совершенства: Симметрия, асимметрия, дисимметрия, антисимметрия. - М.: Знание, 1987.

- Тарасов Л.В. Этот удивительно симметричный мир. - М.: Просвещение, 1982.

- Узоры симметрии. - М.: Мир, 1980.

- Шафрановский И.И. Симметрия в природе. - Л.: Недра, 1985.

- Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. - М.: Наука, 1972.

IV. Решение задач.

1. Имеет ли куб центр симметрии? Покажите его на изображении куба.

2. Имеет ли куб плоскости симметрии? Покажите их на изображении куба.

Ответ. Куб имеет: три плоскости симметрии, перпендикулярные ребрам в их серединах; шесть плоскостей симметрии, проходящие через противоположные ребра.

3. Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из плоскости и пересекающей ее прямой, не перпендикулярной к этой плоскости.

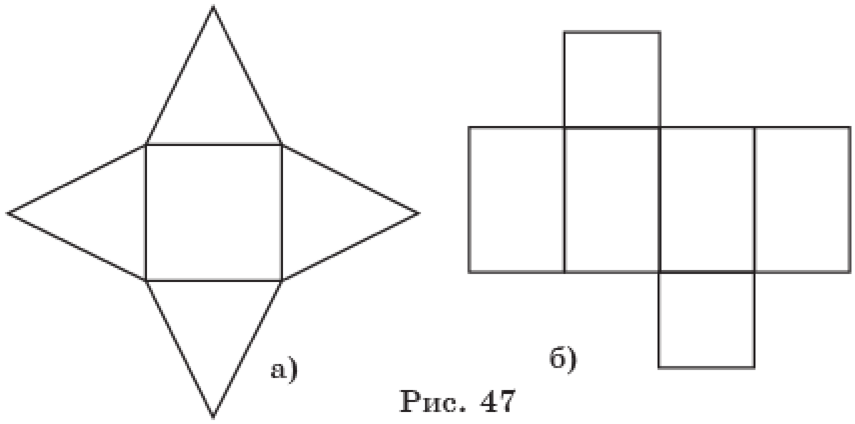
Ответ. Центром симметрии данной фигуры является точка пересечения прямой с плоскостью. Ось симметрии - прямая, лежащая в данной плоскости, проходящая через их точку пересечения и перпендикулярная к данной прямой. Плоскость симметрии - плоскость, перпендикулярная данной и проходящая через данную прямую.

4. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной пирамиды таким образом, чтобы у нее было четыре оси симметрии.

Решение показано на рисунке 47, а.

5*. Нарисуйте развертку прямоугольного параллелепипеда так, чтобы она имела центр симметрии.

Решение показано на рисунке 47, б.



а) б)

Рис. 47

Замечание. Решения задач 1-4 после коллективного обсуждения выносятся на доску. Для задач 4 и 5*, желательно, для демонстрации построить соответствующие развертки.

Урок 90

I. Опрос учащихся.

Раздаются четыре индивидуальных задания для работы на своих местах. Их содержание:

1). Постройте фигуру, симметричную прямоугольному параллелепипеду $A...D_1$ относительно грани DD_1C_1C.

2). Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная пирамида?

Ответ. Правильная четырехугольная пирамида имеет одну ось симметрии 4-го порядка (высота пирамиды) и четыре плоскости симметрии, проходящие через оси симметрии основания, перпендикулярно ему.

3*). Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?

Ответ. Диагональ куба является осью симметрии 3-го порядка.

Двое учащихся приглашаются за первую свободную парту - опрос по теории. Задание для первого:

- Какие точки пространства называются центрально-симметричными?

- Какая фигура в пространстве называется центрально-симметричной? Приведите пример такой фигуры.

- Какие точки пространства называются симметричными относительно плоскости?

- Какая фигура в пространстве называется симметричной относительно плоскости? Приведите пример такой фигуры.

Задание для второго ученика:

- Какие точки пространства называются симметричными относительно прямой?

- Какая фигура в пространстве называется симметричной относительно прямой? Приведите пример такой фигуры.

- Что называется осью симметрии n-го порядка?

- Приведите примеры пространственных фигур, имеющих оси симметрии 2-го, 3-го, n-го порядков.

II. Задание для класса.

1. Постройте фигуру, симметричную правильному тетраэдру $ABCD$ относительно плоскости ABC.

2. Сколько осей и плоскостей симметрии имеет правильная треугольная пирамида, не являющаяся правильным тетраэдром?

Ответ. Такая пирамида имеет одну ось симметрии (высота пирамиды) и три плоскости симметрии, проходящие через оси симметрии основания, перпендикулярно ему.

3*. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный n-угольник?

Ответ. Он имеет (n+1) плоскость симметрии.

К доске приглашаем двоих учащихся. Первый решает одну из домашних задач, второй - классную задачу 1.

Дополнительные вопросы, отвечающим у доски:

1. Какие точки пространства при центральной, осевой симметрии и симметрии относительно плоскости переходят сами в себя?

2. Какие фигуры на плоскости называются центрально-симметричными? Приведите примеры.

Классную задачу 2 проверяем устно с места.

Учащиеся, выполнявшие индивидуальные задания, сдают свою работу.

III. Устная работа.

1). Сколько центров симметрии имеет параллелепипед?

Ответ. Наклонный параллелепипед не имеет центра симметрии.

2). Сколько осей симметрии имеет параллелограмм? Ромб? Квадрат?

Ответ. Параллелограмм имеет одну ось симметрии, проходящую через точку пересечения диагоналей и перпендикулярную его плоскости; у ромба две оси симметрии, лежащие в плоскости ромба, и одна ось симметрии, перпендикулярная его плоскости и проходящая через точку пересечения диагоналей; у квадрата четыре оси симметрии, лежащие в плоскости квадрата (диагонали и прямые, соединяющие середины противоположных сторон), и одна ось симметрии, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через его центр.

3). Сколько плоскостей симметрии имеет шар?

Ответ. Бесконечно много, это любая плоскость, проходящая через его центр (или любой его диаметр).

4). При вращении каких фигур получаются цилиндр, конус, шар, усеченный конус?

5). Какой фигурой являются: осевые сечения цилиндра и конуса; сечение шара плоскостью?

6). Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии.

Ответ. Примером такой фигуры может служить четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм, и вершина которой проектируется в точку пересечения его диагоналей.

7). Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть плоскость симметрии, но нет осей симметрии.

Ответ. Правильный тетраэдр не имеет осей симметрии (имеются в виду оси симметрии 2-го порядка), но имеет 6 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через ребро и середину скрещивающегося с ним ребра.

8). Какие оси n-го порядка имеет правильный тетраэдр?

Ответ. Правильный тетраэдр имеет 4 оси 3-го порядка, каждая из которых проходит через вершину и центр противоположной грани.

IV. Самостоятельная работа (на повторение).

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Решение. $OO_1=\frac{R}{2}$, где O, O_1 - соответственно центры шара и данного сечения, R - радиус шара. Тогда $r=\frac{R}{2}\sqrt{3}$, где r - радиус сечения. Назовем S - площадь большого круга, S_c - площадь сечения. Тогда: S_c:S =3:4.

2. В пирамиде все боковые ребра равны 9 см, а ее высота равна 5 см. Определите радиус (R) описанного шара.

Решение. Из равенства боковых ребер следует равенство их проекций на плоскость основания, другими словами, вершина S пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (рис. 48).

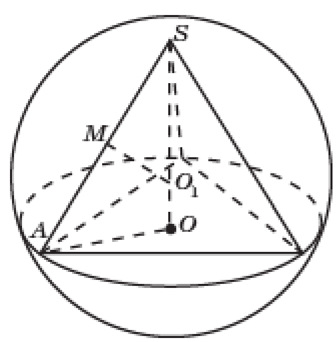


Рис. 48

Высота SO пирамиды является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от вершин основания. Перпендикуляр, проведенный в плоскости ASO к боковому ребру AS через его середину M, является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от вершины S и вершины A основания. Следовательно, точка O_1 пересечения указанного перпендикуляра с высотой пирамиды есть центр описанного шара. O_1S - радиус описанного шара. Имеем: AM=MS;

$O_1M \perp AS$; треугольник AOSподобен треугольнику O_1MS, откуда $AS:OS=O_1S:MS$; $R=O_1S=8{,}1$ (см).

3*. Придумайте другой способ решения задачи 2.

Решение. Центр шара O_1 принадлежит высоте пирамиды (или ее продолжению). Продлим высоту пирамиды до ее пересечения с поверхностью шара в точке S_1. Сечение шара плоскостью, проведенной через боковое ребро и высоту пирамиды, есть большой круг. $\angle SAS_1=90^\circ$ (как вписанный угол, опирающийся на диаметр); $AO \perp SS_1$. Имеем: $AS^2=SS_1 \cdot SO$, откуда $R = \frac{1}{2}SS_1=AS^2:(2SO) = 8{,}1$ (см).

Задание на дом

1. Выучить: определения симметричных точек относительно точки, прямой, плоскости; определения центрально-симметричных фигур, фигур симметричных относительно оси, зеркально-симметричных фигур; определение иси симметрии n-го порядка (п. 40 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Ответ. Центр симметрии - точка пересечения данных прямых. Три оси симметрии: две биссектрисы вертикальных углов, которые образуются при пересечении прямых и прямая, перпендикулярная плоскости этих прямых и проходящая через точку их пересечения. Две плоскости симметрии, перпендикулярные плоскости данных прямых и проходящие через биссектрисы вертикальных углов, которые образуют прямые.

2). Нарисуйте какие-нибудь оси симметрии куба.

Решение. Оси симметрии куба - три оси симметрии 4-го порядка, проходящие через центры противоположных граней; шесть осей симметрии 2-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер; четыре оси симметрии, проходящие через противоположные вершины.

3). Постройте развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы у нее была только одна ось симметрии.

Решение показано на рисунке 49.

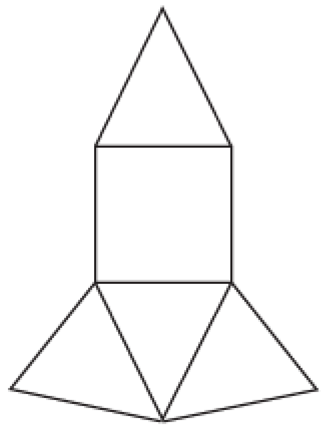


Рис. 49

4). Прямая AB наклонена к некоторой плоскости под углом φ и симметрична относительно этой плоскости прямой A_1B. Сделайте чертеж и найдите угол между прямыми AB и A_1B.

Ответ. Угол ABA_1 равен 2φ.

3*. Разрежьте куб на: а) шесть равных пирамид; б) три равные пирамиды.

Решение. В случае а) вершинами пирамид является центр куба, а их основаниями - грани куба. В случае б) тремя равными пирамидами являются пирамиды $ABCDC_1$; $AA_1B_1BC_1$ и $AA_1D_1DC_1$.

п. 41. Движения (уроки 91, 92)

Цель – вспомнить определение движения и доказать, что рассмотренные симметрии являются движением.

Урок 91

I. Индивидуальное домашнее задание. – Сообщение на тему "Е. С. Федоров - выдающийся российский математик и кристаллограф".

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф - Евграф Степанович Федоров (1853-1919). Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело - в каждую из этих областей внес Федоров немалый вклад. В 1890 году он строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии, в честь ученого, были названы федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. "Гигантский научный подвиг Е.С.Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный "хаос" бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. "Царство кристаллов" является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии", - сказал академик А.В.Шубников.

Федоров установил, что красота внешних форм кристаллов подчиняется простым и строгим законам симметрии. Многие многогранники, прежде всего правильные, полуправильные, правильные звездчатые, по образному выражению Федорова "буквально блещут симметрией".

К понятию симметрии мы привыкли с детства. Мы очень хорошо представляем, что симметричны бабочки, лепестки цветов, ножницы, дома, узоры орнамента, звездочки снежинок. На снежинках, кстати, легче всего убедиться в том, что кристаллы обычно имеют правильную и симметричную форму. Бесконечно разнообразны формы снежинок, среди которых не найти на одной пары одинаковых (показать соответствующие изображения).

II. Определение элементов симметрии представленных кристаллов.

1. Горный хрусталь – кварц напоминает отточенный с двух сторон карандаш (шестиугольная призма с двумя пирамидами) (рис. 50).

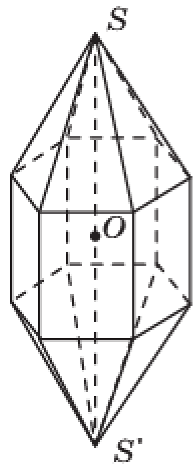


Рис. 50

Центр симметрии: точка O - середина оси SS'.

Оси симметрии: SS' - ось симметрии 6-го порядка.

Плоскости симметрии: семь плоскостей симметрии - одна проходит через через центр O, параллельно основаниям шестиугольной призмы; шесть других, каждая из которых проходит через центр O и ось симметрии правильного шестиугольника в основании призмы (у правильного шестиугольника три оси симметрии проходят через противоположные вершины и его центр и три оси - через середины его параллельных сторон).

2. Исландский шпат (наклонный параллелепипед) имеет только центр симметрии, у него нет ни осей симметрии, ни плоскостей симметрии, даже если все его грани – ромбы (рис. 51).

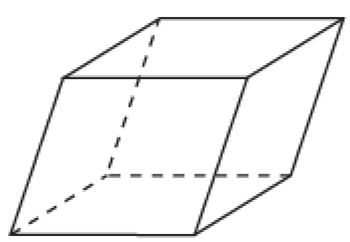


Рис. 51

3. Алмаз. Возьмем форму кристалла алмаза наиболее редко встречающуюся в виде кубооктаэдра.

На рисунке 52 показан куб, из которого получен кубооктаэдр, откуда ясно, что кубооктаэдр имеет те же элементы симметрии, что и куб.

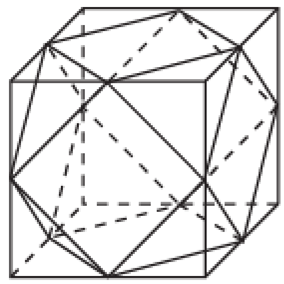


Рис. 52

III. Новый материал.

Вопрос.

- Какое преобразование пространства называется движением?

Ответ. Движением называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками, т.е., если точки A и B переходят соответственно в точки A' и B', то $AB = A'B'$.

- Приведите соответствующие примеры.

- Ответ. По аналогии с плоскостью учащиеся, как правило, называют центральную и осевую симметрии. Напомним также, что ранее (п. 11 учебника) было доказано, что параллельный перенос является движением.

Докажем теперь, что центральная и зеркальная симметрии также являются движениями.

Теорема. Центральная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B соответственно. Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними) и, значит, $AB=A'B'$. Таким образом, центральная симметрия сохраняет расстояния и, следовательно, является движением.

Теорема. Зеркальная симметрия является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно плоскости α точек A, B, A'', B'' – ортогональные проекции точек A, B на плоскость α. Тогда точки A, B, A', B' принадлежат одной плоскости и точки A', B' симметричны в этой плоскости точкам A, B относительно прямой $A''B''$ (рис. 53).

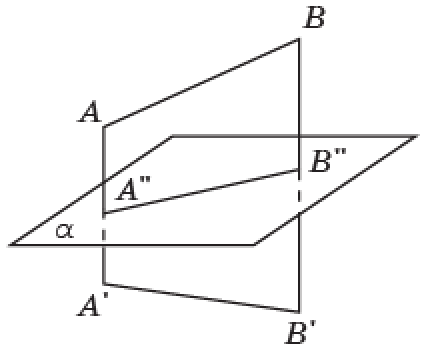


Рис. 53

Из свойств симметрии на плоскости следует, что *AB=A'B'*. Таким образом, зеркальная симметрия сохраняет расстояния и, следовательно, является движением.

IV. Закрепление нового материала.

1. Назовите движение, которое оставляет на месте только: а) одну точку; б) точки одной прямой; в) точки одной плоскости.

Ответ. а) Центральная симметрия; б) осевая симметрия; в) зеркальная симметрия.

2. Существуют ли движения (если существуют, то какие), переводящие данную прямую в другую данную прямую: а) параллельную первой; б) пересекающую первую; в) скрещивающуюся с первой?

Ответ. а) Центральная симметрия, зеркальная симметрия, параллельный перенос; б) осевая симметрия, поворот, зеркальная симметрия; в) осевая симметрия.

3. Докажите, что движение переводит сферу в сферу того же радиуса.

Решение. Пусть центр *O* сферы при движении переходит в точку *O*', а ее произвольная точка *A* – в точку *A*'. Тогда, по свойству движения, *OA*=*O*'*A*'. Следовательно, в результате движения данная сфера перейдет в фигуру, у которой все точки одинаково удалены от одной точки *O*', следовательно, это сфера, причем ее радиус равен радиусу данной сферы.

4*. В кубе закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

Ответ. Поворота на 90^0 вокруг оси, перпендикулярной закрашенной грани; осевой симметрии относительно оси, перпендикулярной закрашенной грани; зеркальной симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных закрашенной грани.

Урок 92

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Движением называется …
2. Поворотом называется …
3. Зеркальной симметрией называется …
4. Примером движения является …, так как …
5. Движение переводит окружность в …

Вариант 2

1. При движении сохраняются …
2. Центральной симметрией называется …
3. Осевой симметрией называется …
4. Примером движения является …, так как …
5. Движение переводит сферу в …

II. Проверка математического движения.

III. Решение задач.

1. Сколько плоскостей симметрии имеет прямая призма, основанием которой является: а) равнобедренная трапеция; б) неравнобедренная трапеция.

Ответ. В случае а) прямая призма имеет одну плоскость симметрии, которая проходит через середины оснований перпендикулярно им и одну плоскость симметрии, параллельную основаниям и делящую боковые ребра пополам; в случае б) имеется только одна плоскость симметрии, параллельная основаниям и делящая боковые ребра пополам.

2. С помощью каких движений можно перевести грань ABC правильного тетраэдра $ABCD$ в грань ABD так, чтобы ребро AB оставалось на месте?

Ответ. Поворот, зеркальная симметрия.

3*. На поверхности правильной пятиугольной призмы найдите точки, одинаково удаленные от двух вершин ее основания. Рассмотрите два случая: а) смежные вершины; б) несмежные вершины.

Решение. $A...E_1$ - правильная пятиугольная призма. Плоскость FF_1D_1 является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от двух смежных вершин основания A_1 и B_1, где F и F_1 середины соответственно отрезков AB и AB_1 (рис. 54).

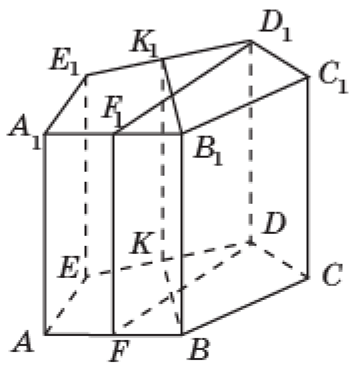


Рис. 54

На поверхности призмы лежат отрезки FF_1; F_1D_1; D_1D и DF. Плоскость BB_1K_1 является геометрическим местом точек, одинаково удаленных от несмежных вершин основания A_1 и C_1, где K и K_1 - середины соответственно ED и E_1D_1. На поверхности призмы лежат отрезки BB_1; B_1K_1; K_1K и KB.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8)

Задание на дом

1. Выучить: определение движения, уметь доказать, что движением является центральная, осевая и зеркальная симметрии (п. 41 учебника).

2. Решить задачи.

1). Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D тетраэдра $ABCD$ соответственно в вершины: а) B, C, A, D; б) B, A, C, D; в) C, B, A, D?

Ответ. а) Поворот; б), в) зеркальная симметрия.

2). Назовите элементы симметрии правильной четырехугольной пирамиды.

Решение. Центра симметрии у правильной четырехугольной пирамиды нет. Оси симметрии: одна четвертого порядка - это высота пирамиды. Плоскости симметрии: четыре плоскости симметрии, проходящие через оси симметрии основания (диагонали квадрата и прямые, соединяющие середины его противоположных сторон) и вершину пирамиды.

3). Существует ли движение (если существует, то какое), переводящее вершины A, B, C, D куба $A\ldots D_1$ соответственно в вершины: а) A_1, B_1, C_1, D_1; б) A_1, D_1, C_1, B_1; в) A_1, B_1, D_1, C_1?

Ответ. а) Да, параллельный перенос, зеркальная симметрия; б) да, осевая симметрия; в) нет.

4). В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких движений, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

Ответ. При повороте на 120° вокруг оси, проходящей через центр закрашенной грани; при симметрии относительно плоскости, перпендикулярной закрашенной грани.

3*. Представьте поворот вокруг оси в виде композиции двух зеркальных симметрий.

Ответ. Композиция двух зеркальных симметрий относительно плоскостей, пересекающихся по прямой, является поворотом вокруг этой прямой на угол, равный удвоенному двугранному углу между этими плоскостями.

4*. Представьте центральную симметрию в виде композиции трех зеркальных симметрий.

Ответ. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся в одной точке. Тогда композиция трех зеркальных симметрий относительно этих плоскостей будет центральной симметрией относительно их точки пересечения.

п. 42*. Ориентация поверхности. Лист Мебиуса

(См. параграф 7)

Урок 93

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением равнобедренного треугольника вокруг его боковой стороны. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан конус, высота которого равна 3 см, радиус основания равен $3\sqrt{3}$ см. Найдите радиус сферы.

3. Найдите радиус основания и образующую цилиндра, описанного около сферы радиуса R.

4. Сколько: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, у которого нет квадратных граней? Назовите их.

5*. Внутри двугранного угла, равного 30^0, взята точка, удаленная от его граней на 2 см и $3\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, перпендикулярной его боковой стороне и проходящей через вершину, лежащую против основания. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан усеченный конус, радиусы оснований которого равны 15 см и 24 см, высота равна 27 см. Найдите радиус сферы.

3. Образующая конуса равна 20 см, радиус основания равен 16 см. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

4. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии? Назовите их.

5*. Прямая, проведенная через вершину прямого угла, образует с его сторонами углы 60^0 и 45^0. Найдите угол между этой прямой и плоскостью прямого угла.

4.2. ОБЪЕМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

п. 43. Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра (уроки 94, 95)

Цель - рассмотреть понятие объема и его свойства, в том числе и объем цилиндра. Учащиеся должны знать определение объема, его основные свойства, формулу объема прямого цилиндра, уметь применять ее для нахождения объемов пространственных фигур.

Урок 94

I. Историческая справка.

Проблема нахождения объемов пространственных фигур с древних времен привлекала к себе внимание ученых. Вычислением объемов простейших пространственных фигур занимались Демокрит (460-380 гг. до н.э.), Евдокс (406-355 гг. до н.э.), Архимед (287-212 гг. до н.э.). В средние века нахождением объемов пространственных фигур занимались И. Кеплер (1571-1630), Б. Кавальери (1598-1647), П. Ферма (1601-1655) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII века в работах И. Ньютона (1643-1727) и Г. Лейбница (1646-1716) дало мощный метод вычисления объемов произвольных пространственных фигур. Знакомство с этим методом происходит в курсе алгебры и начал анализа. Здесь же мы рассмотрим само понятие объема, его свойства и вычисление объемов основных пространственных фигур.

II. Новый материал.

Объем - величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Объем фигуры показывает сколько раз единица измерения объема укладывается в данной фигуре. Объем может выражаться натуральным, рациональным или даже иррациональным числом.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объем фигуры является неотрицательным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объемы.

3. Если фигура Ф составлена из двух фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры Ф равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т.е. $V(Ф)=V(Ф_1)+V(Ф_2)$.

Простейшей фигурой, с точки зрения вычисления объема, является прямой цилиндр.

Пусть Ф - прямой цилиндр, основанием которого служит фигура F, площади S, и высота которого равна h. Это означает, что единица измерения длины укладывается в высоте h раз, а единица измерения площади укладывается в основании S раз. Ясно, что в этом случае единица измерения объема укладывается в цилиндре Sh раз, т.е. формула объема прямого цилиндра имеет вид: $V=Sh$, где S - площадь основания, h - высота цилиндра.

В частности, объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c вычисляется по формуле: $V=abc$.

Объем прямой призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле $V=Sh$.

Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания - R, вычисляется по формуле $V=\pi R^2h$.

III. Закрепление нового материала.

Учащимся предлагаются следующие задачи:

1. Стороны прямоугольного параллелепипеда равны 3,4 м; 4,5 м и 2,1 м. Найдите объем.

Ответ. V=32,13 м^3.

2. Изменится ли объем прямого кругового цилиндра, если диаметр его основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в четыре раза?

Ответ. Объем цилиндра не изменится.

3. Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.

Ответ. $\frac{na^2h}{4tg\frac{180^0}{n}}$.

4. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника со сторонами 5 см и 3 см относительно прямых, содержащих неравные стороны. Как относятся объемы цилиндров?

Ответ. Объемы рассматриваемых цилиндров относятся как 5:3.

5*. 25 м медной проволоки весят 100,7 г. Найдите диаметр проволоки, приняв плотность меди равной 8,9 г/см.

Ответ. Диаметр проволоки $D\approx0,75$ мм.

Урок 95

I. Устная работа.

1). Может ли объем фигуры в пространстве быть отрицательным числом? Быть нулем?

2). Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.

Ответ. 24 м^2.

3). Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1:2; б) 1:3; ...; в) 1:n?

Ответ. Пусть V_1 и V_2 объемы соответственно данного и уменьшенного кубов, тогда: а) V_1:V_2=1:8; б) V_1:V_2=1:27; ... ; в) V_1:V_2=1:n^3.

4). Во сколько раз нужно увеличить каждое из трех измерений прямоугольного бруса, чтобы объем его увеличился в: а) 2 раза; б) 3 раза; ... ; в) n раз?

Ответ: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; ... ; в) $\sqrt{n}$.

5). Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны a.

Ответ. πa^3.

6). Какие сечения прямого кругового цилиндра плоскостью вы знаете?

II. Решение задач.

Четырем учащимся предлагаются индивидуальные задания на местах.

Содержание индивидуальных заданий:

1). Найдите объем прямого параллелепипеда, если его высота равна 10 см, а площадь основания 5 см^2.

Ответ. 50 см^3.

2). Определите объем куба по его диагонали, равной 2 см.

Ответ. Объем куба равен $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

3). Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной a см. Найдите объем цилиндра.

Ответ. Объем цилиндра равен $\frac{1}{4}\pi a^3$.

4*). В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

Ответ. Объем детали равен 243 π см^3.

III. Задание для класса.

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Решение. Пусть ребро куба равно a, тогда $V=a^3$; $V+98=(a+2)^3$; $a^3+98=(a+2)^3$; $a^3+98=a^3+6a^2+12a+8$. После соответствующих преобразований получим квадратное уравнение $a^2+2a-15=0$, решая которое, получим $a=3$ см.

2. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в 60^o. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30^o. Определите объем этого параллелепипеда.

Ответ. Объем этого параллелепипеда равен 140 $см^3$.

3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра.

Ответ. Объем параллелепипеда равен $\frac{1}{4}\pi\, d^3 \cdot\cos 2\alpha \cdot\sin \alpha$.

4*. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?

Ответ. 4 см.

IV. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1). Найдите объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани - квадраты.

Ответ. $d^2=5a^2$, где a - длина ребра призмы. Таким образом, ее объем равен $\frac{3\sqrt{15}}{50}\cdot a^3$

2*). Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 2:3:4. Одна из диагоналей параллелепипеда равна $\sqrt{29}$. Найдите его объем.

Ответ. Объем равен 24.

Вариант 2

1). Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром угол 300. Найдите объем призмы.

Ответ. $2a=d\cdot\sin 30^0$; $h=d\cdot\cos 30^0$, где a - длина стороны основания призмы, а h - ее высота. Таким образом, объем призмы равен $\frac{9}{64}d^3$.

2*). Задача 2* из первого варианта.

Задание на дом

1. Выучить: определение объема фигуры, его основные свойства, вывод формулы объема цилиндра, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, прямого кругового цилиндра (п. 43 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите объем куба, если площадь его грани равна S.

Ответ. Объем куба равен $S \cdot \sqrt{S}$.

2). Найдите объем прямого параллелепипеда, если в основании у него лежит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d, а боковое ребро параллелепипеда в два раза меньше стороны основания.

Ответ. $\frac{d^3 \cos\frac{\alpha}{2}}{8 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

3). Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра отсекаемой плоскостью.

Решение. Объем части цилиндра, отсекаемой данной плоскостью, равен половине объема цилиндра с тем же основанием, что и данный цилиндр, и высотой, равной MB (рис. 55). MB из прямоугольного треугольника ABM равна $2R \cdot \text{tg}\varphi$. Таким образом, объем искомой части равен $\pi R^3 \text{tg}\, \varphi$.

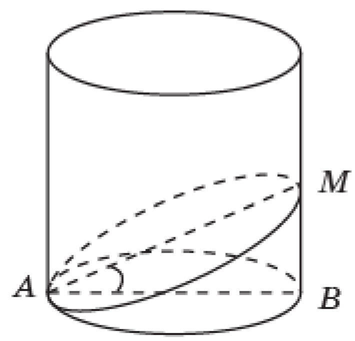


Рис. 55

4). Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон. Как относятся объемы цилиндров?

Ответ. Как смежные стороны прямоугольника.

3*. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

Ответ. В 2 раза.

п. 44. Принцип Кавальери (уроки 96, 97)

Цель данных уроков заключается в рассмотрении одного из способов нахождения объемов пространственных фигур, основанного на известном принципе Кавальери. Учащиеся должны уметь формулировать этот принцип и применять его для нахождения объемов наклонных цилиндров.

Урок 96

I. Математический диктант.

Вариант 1

Продолжите следующие фразы (цилиндры, о которых пойдет речь - прямые круговые):

1. За единицу объема принимается ...
2. В одном кубическом дециметре содержится ... кубических миллиметров.
3. Если фигура Ф составлена из двух фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры Ф ...
4. Объемы двух цилиндров, имеющих равные высоты, относятся ...
5. Чтобы объем цилиндра увеличить в 2 раза, нужно увеличить радиус его основания ...
6. Объем правильной четырехугольной призмы, у которой сторона основания равна a и боковое ребро равно b, равен ...

Вариант 2

Продолжите следующие фразы (цилиндры прямые круговые):

1. Число V, показывающее ... , называется объемом ...
2. В кубическом метре содержится ... кубических миллиметров.
3. Равные фигуры имеют ...
4. Объемы двух цилиндров, имеющих равные диаметры оснований, относятся как ...
5. Чтобы объем цилиндра увеличить в два раза, нужно увеличить высоту цилиндра ...
6. Объем прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 5 см и высотой 10 см равен ...

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал.

Среди различных методов нахождения объемов пространственных фигур, начиная от метода неделимых Демокрита, метода исчерпывания

Архимеда и кончая методами интегрального исчисления, мы выбрали метод, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры одинаковой площади, то объемы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$, составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются в сечениях фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ параллельными плоскостями.

Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объемы соответствующих слоев. Следовательно, равны и объемы фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, составленных из этих слоев.

Применяя этот принцип, найдем объем наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h. Для этого рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра так, чтобы их основания находились на одной плоскости. Тогда сечения этих цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери, отсюда следует равенство объемов цилиндров и, значит, для объема наклонного цилиндра имеет место формула:

$V = Sh$, где S - площадь основания, h - высота цилиндра.

Используя принцип Кавальери, покажем, что если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то они имеют равные объемы. Конусом в пространстве называется фигура, образованная отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры (F), называемой основанием конуса, с точкой (S), лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса.

Пусть конусы $Ф_1$ и $Ф_2$ имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 56). Проведем плоскость, параллельную плоскости α на расстоянии x от нее, $0<x<h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны основаниям и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $\frac{h-x}{h}$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами: $S_1=k^2\cdot S$, $S_2=k^2\cdot S$ и, значит, равны.

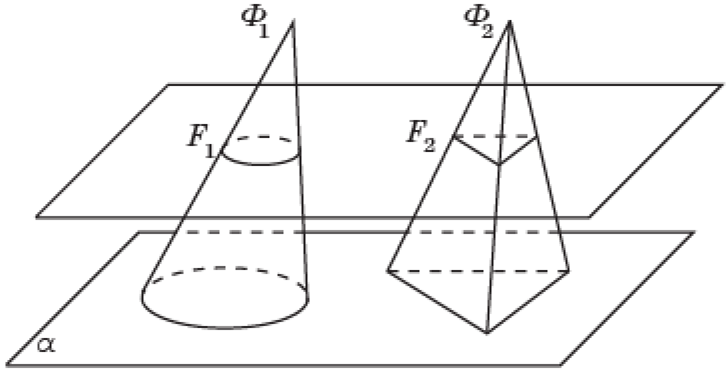


Рис. 56

Из принципа Кавальери отсюда следует, что равны и объемы рассматриваемых конусов.

IV. Закрепление нового материала.

1. Найдите формулу объема наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.

Ответ. $V = S \cdot b \cdot \sin \varphi$.

2. Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними 45°. Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Пусть h - высота данного параллелепипеда, тогда $h = 7 \cdot \sin 45^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ (дм). В основании лежит параллелограмм со сторонами 6 дм и 8 дм и острым углом 45^0, т.е. одна из его высот равна $3\sqrt{2}$ дм и площадь равна $24\sqrt{2}$ дм^2. Таким образом, объем параллелепипеда равен 168 дм^3.

3. Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2, причем площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объемы фигур Φ_1 и Φ_2? Обоснуйте свой вывод.

Решение. Объем фигуры Φ_2 в k раз больше объема фигуры Φ_1. Это можно объяснить следующим образом: фигуры Φ_1 и Φ_2 можно себе представить составленными из тонких слоев одинаковой толщины, получающихся в сечениях фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями. Считая слои цилиндрами с одинаковыми высотами, будем получать их объемы соответственно равными F_1h и $F_2h = kF_1h$, т.е. объем каждого слоя у фигуры Φ_2 в k раз больше, чем у Φ_1. Складывая все слои, получим: $V_2 = kV_1$.

4*. Найдите объем прямого параллелепипеда, сторона основания которого равна a, а радиус вписанного шара r.

Решение. Если в прямой параллелепипед вписан шар, то его высота равна $2r$. В основании параллелепипеда лежит ромб, высота которого тоже равна $2r$. Следовательно, его площадь равна $2ra$. Таким образом, объем данного параллелепипеда равен $8ar$.

Урок 97

I. Устная работа.

1). В чем заключается принцип Кавальери?

2). Как его обосновать?

3). Чему равен объем наклонного цилиндра?

4). Что можно сказать о двух конусах, имеющих равные высоты и основания равной площади? Почему?

5). Найдите объем наклонного параллелепипеда, у которого площадь основания равна Q, а боковое ребро, равное b, наклонено к плоскости основания под углом α?

Ответ. $Qb\cdot\sin\alpha$.

6). Найдите объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а боковое ребро - b.

Ответ. $\frac{3a^2b}{4}$.

7). Объем куба равен V. Найдите объем пирамиды, вершина которой - середина диагонали куба, а основание - его грань.

Ответ. $\frac{1}{6}V$.

8). Диаметр одного круглого бревна в три раза больше диаметра другого круглого бревна. Как относятся объемы этих бревен, если их длины равны.

Ответ. 1:9.

II. Решение задач.

Классу предлагаются следующие задачи:

1. Найдите формулу объема наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

Ответ. $\pi R^2 b\cdot\sin\varphi$.

2. Покажите, что у всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объем имеет прямая призма.

Решение. Пусть S - площадь основания призмы, b ее боковое ребро. Тогда, Sb - объем прямой призмы; $Sb\cdot\sin\varphi$ - объем наклонной призмы, где φ - угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Так как $\sin\varphi<1$, $Sb>Sb\cdot\sin\varphi$. Следовательно, наибольший объем при данных условиях имеет прямая призма.

3. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. На рисунке 57, а изображен наклонный параллелепипед $A...D_1$. $ABCD$ - квадрат со стороной 1 м; $\angle A_1AB=\angle A_1AD=60^o$; $AA_1=2$ м; $A_1K\perp AD$; A_1M - высота параллелепипеда.

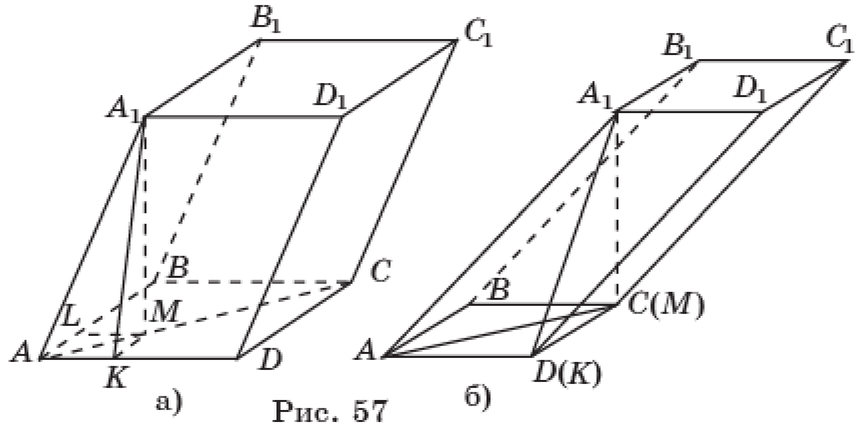


Рис. 57

В силу теоремы о трех перпендикулярах, $MK\perp AD$. Из прямоугольного треугольника AA_1K: $A_1K=AA_1\cdot\sin 60^o=\sqrt{3}$ (м); $AK=AA_1\cdot\cos 60^o=1$ (м), т. е. точка K совпадает с точкой D, $MK=1$ (м) ($ML\perp AB$, $ALMK$ - квадрат, т.е. $MK=AK$), и точка M совпадает с точкой C (рис. 57, б). Таким образом, высота параллелепипеда $A_1C=\sqrt{A_1D^2-DC^2}=\sqrt{2}$ (м). Окончательно получаем: $V=\sqrt{2}$ (м^3).

4*. Основание прямого параллелепипеда - ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Пусть a - сторона основания параллелепипеда, h - его боковое ребро и высота, d_1 и d_2 - диагонали основания. Тогда $\frac{d_1\cdot d_2}{2}=1$; $d_1h=3$; $d_2h=6$. После необходимых преобразований, получим $h=3$ м, $V=3$ м^3.

Задание на дом

1. Выучить: формулировку принципа Кавальери; вывод формул объема наклонногоцилиндра, наклонной призмы; теорему об объемах конусов, имеющих равные высоты и основания равной площади (п. 44 учебника).

2. Решить задачи.

1). По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной шестиугольной призмы.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot a^2b$.

2). Найдите объем наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

Ответ. $\pi R^2 b\sin\varphi$.

3). Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна d. Найдите объем призмы.

Решение. Пусть дана наклонная призма $A...C_1$, у которой грань CC_1B_1B перпендикулярна основанию ABC (рис. 58).

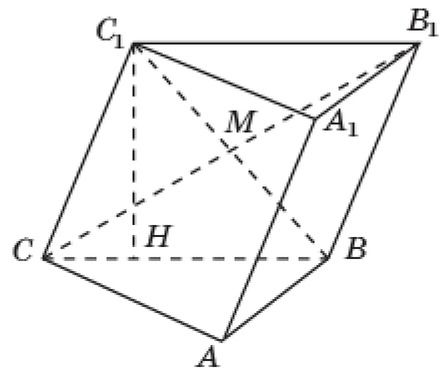


Рис. 58

Высота C_1H призмы, опущенная из вершины C_1 будет совпадать с высотой ромба CC_1B_1B, проведенной из вершины C_1. Рассмотрим треугольник CC_1B: $CM\cdot C_1B=C_1H\cdot CB$; $C_1H=(CM\cdot C_1B):CB$; $CM = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-d^2}$. $C_1H=\frac{ad}{2}\sqrt{4a^2-d^2}$. $S_{ABC}=\frac{3a^2}{4}$; $V=\frac{ad}{8}\sqrt{4a^2-d^2}$.

4). Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной его оси, квадрат, отсекающий от окружности основания радиуса r дугу β. Найдите объем цилиндра.

Решение. Обратимся к рисунку 59.

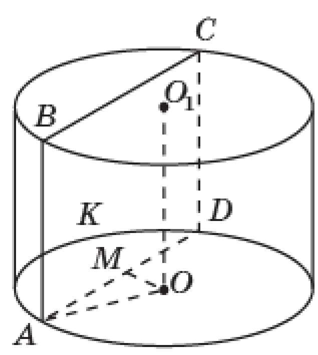


Рис. 59

$V_{цилиндра}= \pi r^2 \cdot AB$. $ABCD$ - сечение цилиндра, параллельное оси OO_1. $ABCD$ - квадрат, т. е. $AB=AD$. $AD=2AM$, где M - середина AD. $AM=r \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ (дуга AKD равна β). Таким образом, $V_{цилиндра}=2\pi \cdot r^3 \cdot \sin\frac{\beta}{2}$.

3*. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Определите объем призмы.

Решение. На рисунке 60 изображена наклонная треугольная призма $A...C_1$.

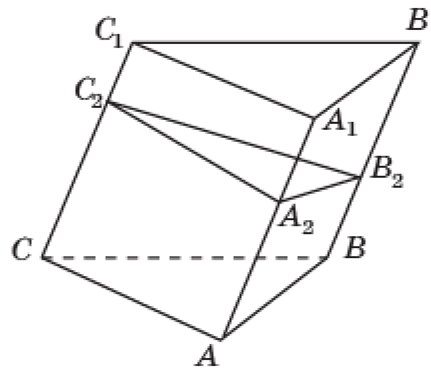


Рис. 60

$V=S \cdot AA_1$, где V – объем данной призмы, S – площадь треугольника $A_2B_2C_2$, плоскость которого перпендикулярна ребрам AA_1, BB_1, CC_1, причем стороны треугольника $A_2B_2C_2$ известны, они равны 26 см, 25 см и 17 см, его площадь можно найти по формуле Герона, а именно: $S=\sqrt{p(p-26)(p-25)(p-17)}$, где p - полупериметр треугольника $A_2B_2C_2$, т. е. p=34 см. Итак, S=204 см^2; V=3060см^3.

п. 45. Объем пирамиды (уроки 98, 99)

Цель – знать вывод формулы объема пирамиды, уметь применять ее для нахождения объемов пространственных фигур.

Урок 98

I. Опрос учащихся.

За первую парту приглашаются двое учащихся - опрос по теории.

Задание для первого:

1. Что называется объемом фигуры?

2. Какой вид имеет формула объема прямого цилиндра? Ответ обоснуйте.

3. В чем заключается принцип Кавальери?

Задание для второго ученика:

1. Перечислите свойства объема пространственных фигур.

2. Какой вид имеет формула объема прямоугольного параллелепипеда? Ответ поясните.

3. Запишите формулу объема наклонного цилиндра. Ответ обоснуйте.

Четверым учащимся даются индивидуальные задания, которые они выполняют на своих местах. Их содержание:

1). Диагональ грани правильной треугольной призмы равна d и наклонена к стороне основания под углом α. Найдите объем призмы.

Решение. $V_{\text{призмы}}=S_{\text{осн.}}h$; $S_{\text{осн.}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, где a - сторона основания призмы; $a=d\cdot\cos\alpha$; $h=d\cdot\sin\alpha$, где h - высота призмы. Окончательно получаем $V_{\text{призмы}}=\frac{\sqrt{3}}{4}d^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

2). В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол в 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. $A...D_1$ - прямой параллелепипед; $ABCD$ - параллелограмм; $AB=2\sqrt{2}$ см; $AD=5$ см; $B_1D=7$ см; угол BAD равен 45°; $BM\perp AD$. Объем параллелепипеда $V=S_{ABCD}\cdot BB_1$. $S_{ABCD}=BM\cdot AD$; $BM=AB\cdot\sin 45^0=2$ (см); $S_{ABCD}=10$ см^2. $AM=BM$ (треугольник ABM прямоугольный и равнобедренный, угол BAD равен 45°). $MD = AD\text{-}AM = 3$ (см); $BD = \sqrt{MD^2+BM^2}=\sqrt{13}$ (см); $BB_1=\sqrt{B_1D^2+BD^2}=6$ (см). $V=60$ (см^3).

II. Задание для класса.

1. Найдите объем цилиндра, вписанного в куб, ребро которого равно a.

Ответ. $V_{\text{цил.}}=\pi r^2 h$; $r=\frac{a}{2}$; $h=a$; $V_{\text{цил.}}=\frac{\pi a^3}{4}$.

2. Основанием призмы служит треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие - по 3 см. Боковое ребро, равное 6 см, наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем призмы.

Ответ. $V=S_{\text{осн.}}h$; $S_{\text{осн.}}=\sqrt{p(p-3)^2(p-2)}$; $p=4$ (см); $S_{\text{осн}}=2\sqrt{2}$ (см^2); $h=6\cdot\sin\alpha$; Vпр.$=12\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$ (см^3).

3*. Как относятся объемы двух призм, полученных при пересечении треугольной призмы плоскостью, проходящей через параллельные средние линии ее оснований?

Решение. $A...C_1$ - треугольная призма; MN и M_1N_1 - параллельные средние линии ее оснований. Найдем отношение объемов получившихся призм $AMNA_1M_1N_1$ (V_1) и $BMNCB_1M_1N_1C_1$ (V_2).

$V_1:V_2=S_{AMN}:S_{BMNC}=1:4$.

III. Новый материал.

Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть $ABCA_1$ треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 61).

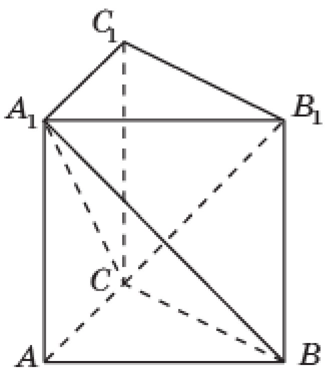


Рис. 61

Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды $ABCA_1$, CBB_1A_1 и $CB_1C_1A_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды CBB_1A_1 и $CB_1C_1A_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, у данных пирамид общая вершина и, следовательно, общая высота. Значит, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды $ABCA_1$ и $CB_1C_1A_1$ и примем во второй пирамиде за вершину точку C. Тогда эти пирамиды имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Значит, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой - многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

IV. Закрепление нового материала.

1. Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

Ответ. $V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 h$.

2. Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.

Ответ. Высота пирамиды равна $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3b^2 - a^2}$; $V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

3*. Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна b, а плоские углы при вершине – 60°, 90° и 90°.

Решение. У данной пирамиды боковые грани - равносторонний треугольник и два равных прямоугольных равнобедренных треугольника. Таким образом, в основании лежит равнобедренный треугольник, у которого основание равно b, а боковые стороны равны $\sqrt{2}b$. Таким образом, $S_{\text{осн.}} = \frac{\sqrt{7}}{4} b^2$. Основанием высоты данной пирамиды является центр описанной около основания пирамиды окружности, так как все боковые ребра пирамиды равны. $h = \sqrt{b^2 - R^2}$, где h - высота пирамиды, R - радиус окружности, описанной около ее основания.

Известно, что $R = \frac{abc}{4S}$, где S - площадь треугольника; $R = \frac{\sqrt{7}}{7} b$; $h = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} b$. Получаем $V_{\text{пир}} = \frac{\sqrt{6}}{6} b^3$.

Урок 99

I. Устная работа.

1). Как относятся объемы правильной треугольной пирамиды и правильной треугольной призмы, если основания и высоты у них равны?

Ответ. 1:3.

2). Как относятся объемы двух правильных пирамид с равными основаниями, но разными высотами h_1 и h_2?

Ответ. h_1:h_2.

3). Как изменится объем правильной пирамиды, если ее высоту увеличить в n раз, а сторону основания уменьшить во столько же раз?

Ответ. Уменьшится в n раз.

4). Найдите объем пирамиды, высота которой h, а в основании - прямоугольник со сторонами a и b.

Ответ. $\frac{1}{3}abh$.

5). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h, а диагональ основания - d.

Ответ. $\frac{1}{6}d^2h$.

II. Решение задач.

1. Найдите объем правильного тетраэдра с ребром, равным 1.

Решение. $V=\frac{1}{3}S_{осн.}h$; $S_{осн.}=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

2. Найдите формулу объема усеченной пирамиды с основаниями площади S_1 и S_2 и высотой h.

Ответ. Пусть S_1 и S_2- площади соответственно нижнего и верхнего оснований пирамиды. Достроим усеченную пирамиду до полной пирамиды, тогда $V_{ус.п.}=V_{п.п.}-V_{д.п.}$, где $V_{п.п.}$- объем полной пирамиды; $V_{д.п.}$- объем дополнительной пирамиды, x ее высота.

$V_{п.п.}=\frac{1}{3}S_1(x+h)$; $V_{д.п.}=\frac{1}{3}S_2x$.

Из подобия полной и дополнительной пирамид, имеем

$$\frac{S_1}{S_2}=(\frac{x+h}{x})^2, \text{ отсюда } \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{x+h}{x}.$$

После соответствующих подстановок и преобразований, получим

$$V_{ус.п.}=\frac{1}{3}h\,(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2).$$

3*. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, в которую вписан еще один цилиндр. Найти отношение объемов обоих цилиндров.

Решение. Назовем V_1 - объем внешнего цилиндра, V_2- внутреннего. $V_1=\pi R^2h$; $V_2=\pi r^2h$, где R и r - радиусы окружностей соответственно описанной и вписанной в основание данной призмы. Таким образом,

$V_1:V_2=R^2:r^2$; $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, где a - сторона основания призмы; $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. Итак, $V_1:V_2 = 4:1$.

III. Историческая справка. – Индивидуальное домашнее задание.

Впервые формулу объема пирамиды в общем виде нашел Архимед и для этого он разработал следующий метод: высота пирамиды разбивается на n равных частей, и через точки деления проводят плоскости, параллельные основанию пирамиды. При этом пирамида разбивается на слои. Для каждого такого слоя строятся две призмы, одна из которых содержится в слое, а другая содержит слой (чертеж к этой задаче получил название "чертовой лестницы" (рис. 142). Зная, что объем призмы есть произведение площади основания на высоту, получают, что сумма объемов призм, содержащихся в слоях, есть $\frac{1}{3}SH(1 - \frac{1}{n})^3$, где S - площадь основания пирамиды и H - высота; сумма объемов призм, содержащих слои есть $\frac{1}{3}SH(1 + \frac{1}{n})^3$. Тогда, если V - объем пирамиды, то

$$\frac{1}{3}SH(1 - \frac{1}{n})^3 < V < \frac{1}{3}SH(1 + \frac{1}{n})^3.$$

При увеличении n левая и правая части сколь угодно мало отличаются от $\frac{1}{3}SH$, и, следовательно, получаем формулу объема пирамиды: $V = \frac{1}{3}SH$.

IV. Повторение.

Заметим, что в обобщающее повторение при изучении стереометрии эффективно включать самостоятельные работы, состоящие всего из одной, но комплексной задачи, решение которой охватывает основные понятия и идеи темы, различные методы. Такая работа имеет ряд преимуществ по сравнению с обычной, в которую входит набор различных задач. Во-первых, одна задача - одно условие, ученик получает меньше информации для начала работы, тем самым увеличивается отрезок учебного времени для ее выполнения. Во-вторых, что более существенно, одна задача является самостоятельным исследованием, что способствует более сознательному повторению и усвоению.

Ниже приведена такая комплексная задача для повторения одной из центральных тем школьного курса стереометрии "Многогранники". Основными вопросами, которые рассматривались в этой теме, были следующие: изображение многогранника, построение сечения многогранника плоскостью, определение угла между его гранями, между плоскостью сечения и одной из его граней и т.п., теперь присоединился вопрос вычисления объема многогранника.

В качестве примера такой комплексной задачи предложим учащимся следующую:

“В правильном тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны a, проведите сечение, проходящее через вершину D параллельно ребру AB и точку M- середину ребра BC. Определите:

а) вид сечения;

б) площадь сечения;

в) угол α между плоскостью сечения и плоскостью ABC тетраэдра;

г) объемы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения".

Ответ. Обратимся к рисунку 62.

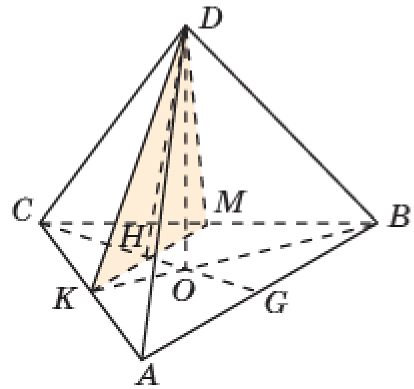


Рис. 62

DMK - искомое сечение:

а) DMK равнобедренный треугольник;

б) $S_{DMK} = \frac{\sqrt{11}}{16}a^2$;

в) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{66}}{33}$;

г) $V_{DBMK} = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3$ и $V_{DAKMC} = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3$.

Задание на дом

1. Выучить: вывод формулы объема пирамиды (п. 45 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите формулу объема правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3h$.

2). Найдите формулу объема правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

Ответ. $V = \frac{1}{12} na^2h \cdot \mathrm{ctg}\frac{180^o}{n}$.

3). Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4). Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

3*. Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Решение. Общая часть есть правильная шестиугольная пирамида. Ее высота равна $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, а сторона основания равна $\frac{a}{3}$. Объем пирамиды равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

4*. Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

Решение. Общая часть тетраэдров есть параллелепипед, все грани которого ромбы с углом 60°. Ребра этого параллелепипеда равны $\frac{a}{3}$. Искомый объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

5**. Индивидуальное задание. – Историческая справка о нахождении объема пирамиды. Литература: Глейзер Г.И. История математики в школе. IX-X классы. – М.: Просвещение, 1983, с. 167.

6**. Индивидуальное задание. Найти объем правильного икосаэдра по его ребру a. (Можно использовать статью Черевичного П.Т. Объем икосаэдра и додекаэдра //Математика в школе.-1975.-№ 1.-С.70).

п. 46. Объем конуса (уроки 100, 101)

Цель – вывести формулы объема конуса и усеченного конуса, уметь применять их при решении задач.

Урок 100

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Объемы пирамид с равными основаниями и высотами …

2. Если площадь основания пирамиды равна S, то площадь сечения, параллельного основанию пирамиды и делящего высоту пирамиды пополам, равна …

3. Многоугольник можно разбить на треугольники следующим образом …

4. Объем треугольной пирамиды выражается следующей формулой …

Вариант 2

1. Куб разбили на шесть равных пирамид, вершина каждой из которых находится …

2. Если площадь основания пирамиды равна Q, то площадь сечения, параллельного основанию и делящего высоту на части, относящиеся как 1:2, считая от вершины пирамиды, равна …

3. Произвольную пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды следующим образом …

4. Объем пирамиды выражается следующей формулой …

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал.

Рассмотрим произвольный конус с площадью основания S и высотой h и покажем, что его объем, как и объем пирамиды, выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Для этого возьмем какую-нибудь пирамиду с основанием S и высотой h. Тогда эта пирамида и конус имеют равные объемы и, значит, имеет место требуемая формула.

В частности, для кругового конуса, в основании которого – круг радиуса R, и высота которого равна h, имеет место формула

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.}$$

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется усеченным конусом.

Полученное при этом сечение конуса также называется основанием усеченного конуса. Расстояние между плоскостями оснований называется высотой усеченного конуса.

Докажем, что объем усеченного конуса выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s),}$$

где S, s - площади оснований, g - высота усеченного конуса.

Представим усеченный конус как разность большего и меньшего конусов. Тогда объем усеченного конуса находится как разность объемов большего и меньшего конусов.

Если площади оснований большего и меньшего конусов равны соответственно S, s, а высоты - H, h, то объем усеченного конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить высоты H и h через высоту g усеченного конуса и площади оснований. Ясно, что $H=g+h$. Выразим h через g, S и s. Заметим, что в сечении конуса плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до плоскости сечения и до плоскости основания. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{g+h}\right)^2 \text{ или } \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h}{g+h},$$

из которого можно найти неизвестную высоту h.

$$h = \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь h в выражение для объема усеченного конуса, получим

$$V = \frac{1}{3}\left(S\left(\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}} + g\right) - s\,\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}\left(g\,\frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s).$$

Формула объема усеченного конуса, в частности, применима к нахождению объемов усеченной пирамиды и усеченного прямого кругового конуса. Так, например, объем усеченного прямого кругового конуса, в основаниях которого – круги радиусов R и r, а высота равна h, выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)}$$

IV. Закрепление нового материала.

1. Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?

Ответ. а) В 3 раза; б) в 4 раза.

2. Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза?

Ответ. Увеличится в 2 раза.

3. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40π см^3.

Ответ. 120π см^3.

4. Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?

Ответ. 1:8.

5. Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.

Ответ. 16π см^3.

6*. Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащий катет, равный 3 см.

Ответ. 97π см^3.

Урок 101

I. Опрос учащихся.

За первую парту приглашаются двое учащихся – опрос по теории.

№ 1. Вывод формулы объема конуса (прямого кругового).

№ 2. Вывод формулы объема усеченного конуса (прямого кругового).

Индивидуальные задания на листах по карточкам.

Карточка

Правильный треугольник ABC со стороной a вращается вокруг оси, проходящей через вершину B перпендикулярно стороне BC. Найдите объем полученного тела.

Ответ. $0{,}25\sqrt{3}$□a^3.

II. Задание классу.

1. Прямоугольный треугольник ABC (□$C = 90^0$) вращается вокруг оси, проходящей через его вершину A перпендикулярно стороне AB. Найдите объем полученного тела, если □$BAC = 30^0$, $BC = a$.

Ответ. $\frac{7}{6}\sqrt{3}$□a^3.

2. Учебник. С. 138 № 18.

III. Подготовка к контрольной работе

1. Напишите формулу объема кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.

Ответ. $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

2. Напишите формулу объема кругового конуса с радиусом основания R и образующей b.

Ответ. Высота конуса равна $\sqrt{b^2 - R^2}$; $V=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{b^2 - R^2}$.

3. Диаметр основания одного цилиндра равен 0,2 м, высота равна 0,6 см. Другой цилиндр имеет высоту 0,3 м и тот же диаметр основания. Сравните между собой объемы обоих цилиндров.

Ответ. Первый цилиндр имеет объем в два раза больше, чем второй.

4. Во сколько раз нужно увеличить высоту цилиндра, не меняя основания, чтобы его объем увеличился в n раз?

Ответ. Нужно увеличить высоту цилиндра в n раз.

5. Во сколько раз нужно увеличить радиус основания цилиндра, не меняя его высоту, чтобы его объем увеличился в n раз?

Ответ. Нужно увеличить радиус основания цилиндра в $\sqrt{n}$ раз.

IV. Занимательный момент урока.

(См. параграф 8).

Задание на дом.

Вывод формулы вычисления объема конуса и усеченного конуса.

1. Выучить: п. 46 учебника.

2. Решить задачи.

1) по учебнику (п. 46) № 7.

2) № 9.

3) № 13.

4) № 18.

3*. № 22.

Ответ. $\frac{7}{27}V$.

Урок 102

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 6 см. Найдите объем цилиндра.

2. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна 8 дм^2. Площади диагональных сечений равны 24 дм^2 и 48 дм^2. Найдите объем параллелепипеда.

3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и $a\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30^o.

4. Высота конуса равна 12 см, периметр осевого сечения 36 см. Найдите объем конуса.

5*. Найдите объем тела, которое образуется при вращении правильного шестиугольника со стороной a вокруг прямой, содержащей апофему (высоту, опущенную из центра правильного многоугольника на его сторону).

Вариант 2

1. В цилиндре через середину радиуса основания перпендикулярно ему проведено сечение. В сечении получился квадрат площадью 16 см^2. Найдите объем цилиндра.

2. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб, диагонали которого относятся как 5:2. Диагонали призмы равны 17 дм и 10 дм. Найдите объем призмы.

3. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона – 10 см. Найдите объем пирамиды, если каждая ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45^o.

4. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна $Q\sqrt{3}$. Найдите объем конуса.

5*. Найдите объем тела, которое образуется при вращении правильного шестиугольника со стороной a вокруг прямой, содержащей его малую диагональ.

п. 49. Объем шара и его частей (уроки 103, 104, 105)

Цель - на данных уроках выводится формула объема шара и формула объема шарового сегмента. Учащиеся должны знать эти формулы, уметь их выводить и применять при нахождении объемов пространственных фигур.

Урок 103

I. Анализ контрольной работы № 3.

II. Новый материал.

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объема шара. Пусть дан полушар радиуса R, основание которого расположено на плоскости α. Возьмем прямой круговой цилиндр, основание которого - круг радиуса R, расположенный в плоскости α и высота которого равна R (рис. 63).

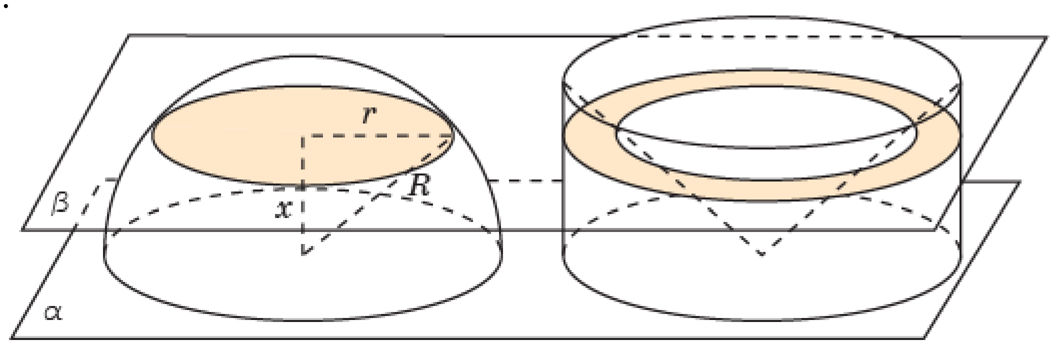


Рис. 63

В цилиндр впишем круговой конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной - центр нижнего основания цилиндра. Рассмотрим фигуру в пространстве, состоящую из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и покажем, что эта фигура и полушар имеют равные объемы.

Проведем плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \le x \le R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi(R^2-x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего - R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2-\pi x^2=\pi(R^2-x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

III. Закрепление нового материала.

1. Найдем объем шара, диаметр которого равен 4 см.

Ответ. V=$10\frac{2}{3}\pi$ см^3.

2. Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным единице.

Ответ. $R_{\text{шара}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $V=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

3. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.

Ответ. $R_{\text{шара}}$=10 см; $V=\frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4000}{3}\pi 10$ (см^3).

4*. Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Определите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь).

Ответ. $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$см.

Урок 104

I. Опрос учащихся.

Четверых учащихся приглашаем за первые парты - опрос по теории.

№ 1. – Вывод формулы объема шара.

№ 2. – Вывод формулы объема конуса.

№ 3. – Вывод формулы объема цилиндра.

№ 4. – Вывод формулы объема наклонного цилиндра.

Шестерым учащимся предлагаем индивидуальные задания на карточках, которые они выполняют на своих местах.

Карточка

1). Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

Ответ. $\pi\sqrt{3}:2$.

2). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна Q.

Решение. $V=\frac{1}{3}a^2\cdot SO$, где a - сторона основания пирамиды, SO - ее высота (рис. 145). Угол SCA равен 45^0, значит, треугольник SOC - прямоугольный и равнобедренный, $SO=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $S_{ASC}=\frac{1}{2}SO\cdot AC=\frac{1}{2}a^2=Q$, $a=\sqrt{2Q}$. Итак, $V=\frac{2}{3}Q\sqrt{Q}$.

II. Задание для класса.

1. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него куба.

Ответ. $\pi:6$.

2. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него октаэдра.

Ответ. $\pi\sqrt{3}:9$.

3*. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная диаметру и делящая его на части, равные 3 см и 9 см. Найдите объемы частей шара.

Ответ. 45π см^3, 243π см^3.

III. Новый материал. - Объем частей шара.

Шаровым кольцом называется фигура, заключенная между поверхностями двух шаров с общим центром. Найдем формулу объема шарового кольца, заключенного между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1>R_2$).

Ответ. $V_{\text{шар.кольца}}=V_1-V_2=\frac{4}{3}\pi(R_1{}^3-R_2{}^3)$.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 63).

Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется основанием шарового сегмента. Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется высотой шарового сегмента.

Найдем объем шарового сегмента высоты h, отсекаемого от шара радиуса R.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рисунке 63, и предположим, что плоскость β отсекает от полушара сегмент высоты h.

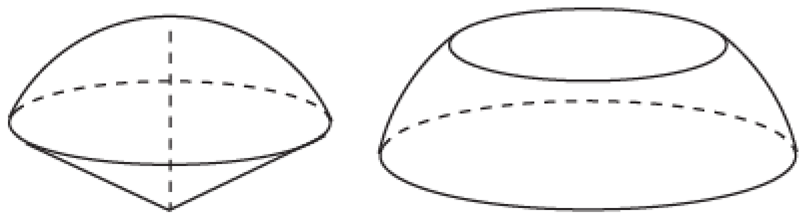
Тогда она отсекает от цилиндра и вписанного в него конуса цилиндр и усеченный конус высоты h. По принципу Кавальери, объем V шарового сегмента будет равен разности объемов этих цилиндра и усеченного конуса. Объем $V_{\text{ц}}$ цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объем $V_{\text{ус.к}}$ усеченного конуса равен разности объемов большого и маленького конусов, т.е.

$$V_{\text{ус.к}} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}(R-h)^3 = \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Следовательно,

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{ус.к}} = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h).$$

Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной - центр шара (рис. 64, а).



а) Рис. 64 б)

Шаровым поясом будем называть часть шара, заключенную между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 64, б). Сечения шара этими плоскостями называются основаниями шарового пояса, а расстояние между ними называется высотой шарового пояса.

IV. Закрепление нового материала.

1. Найдите отношение объемов шара и объема шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара.

Ответ. $V_{\text{шара}} = \frac{1}{6}\pi D^3$, где D – диаметр данного шара; $V_{\text{сегмента}} = \frac{7}{150}\pi D^3$. Таким образом, $V_{\text{шара}}:V_{\text{сегмента}}=25:7$.

2. Найдите формулу объема шарового сектора радиуса R и углом при вершине φ.

Ответ. $V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\frac{\varphi}{2})$.

Решение. $V_{\text{ш.сект.}} = V_{\text{ш.сегм.}} + V_{\text{конуса}}$;

$V\text{ш.сегм.} = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi R^2 x + \frac{1}{3}\pi x^3$, где x - расстояние от центра шара до плоскости шарового сегмента;

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)x.$$

Таким образом, после соответствующих преобразований получим $V_{\text{ш.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2(R-x)$, $x = R\cos\frac{\varphi}{2}$. Окончательно получаем

$$V_{\text{ш.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\frac{\varphi}{2}).$$

Урок 105

I. Устная работа.

1. Найдите объем шара, диаметр которого равен 4 см.

2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?

3. Радиусы трех шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

4. Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?

5. Во сколько раз объем Земли больше объема Луны? (Диаметр Земли 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)

6. Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным единице.

Ответы. 1. $\frac{32\pi}{3}$см^3.

2. а) В 27 раз; б) в 64 раза.

3. 6 см.

4. 27.

5. $\left(3\frac{5}{7}\right)^3$ ·50 раз.

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

II. Решение задач.

1. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара 75 см?

Ответ. 112500π см^3.

2. Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара 5 см. Рассмотрите случай, когда центр шара лежит между параллельными плоскостями.

Ответ. $V_{\text{пояса}}=V_{\text{шара}}-(V_1+V_2)$, где V_1 и V_2 - объемы сегментов с радиусами оснований соответственно 3 см и 4 см.

$$V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi\cdot 125 = \frac{500}{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$V_1=\frac{2}{3}\pi\cdot R^3-\pi\cdot R^2x_1+\frac{1}{3}\pi\cdot x_1^3$, где x_1 - расстояние от центра шара до основания первого сегмента (радиус основания 3 см), x_1=4 см. Значит, $V_1=\frac{14}{27}\pi$ см^3.

Аналогично находим V_2, x_2=3 см.

$V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot 125-\pi\cdot 25\cdot 3+\frac{1}{3}\pi\cdot 27$, см^3. Таким образом, $V_{\text{пояса}}=\frac{434\pi}{3}$см^3.

3*. Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований равны a и b ($a>b$), а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

Ответ. $V=\frac{\sqrt{2}}{6}(a^2+ab+b^2)\cdot(a-b)\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

III. Самостоятельная работа.

Вариант 1

Радиус шарового сектора R, угол в осевом сечении 120^0. Найдите объем шарового сектора.

Ответ. $\frac{1}{3}\pi R^3$.

Вариант 2

Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара 75 см.

Ответ. 112,5π дм^3.

Задание на дом

1. Выучить: вывод форму нахождения объема шара, шарового сегмента, шарового сектора (п. 47 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите объем шара, диаметр которого равен 5 см.

Ответ. $20\frac{5}{6}\pi$ см^3.

2). Найдите объем шара, вписанного в прямой круговой конус с радиусом основания, равным единице, и образующей, наклоненной к плоскости основания под углом 60^o.

Ответ. $R_{ш.}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $V_{ш.}=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.

3). Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара - 5 см. Рассмотрите случай, когда плоскости находятся по одну сторону от центра шара.

Решение. (См. решение задачи 2 из II этапа урока 105). В этом случае $V_{пояса}= V_1-V_2$; $V_{пояса}=\frac{52}{37}\pi-\frac{14}{37}\pi=\frac{38}{37}\pi$ (см^3).

3*. Найдите объем тора.

Решение. Предположим, что тор получен вращением круга с центром в точке O, радиуса r относительно прямой a, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его (рис. 65, а). O'- основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую a, и пусть $|OO'|=R$.

Проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, на расстоянии x от точки O ($0<x<r$). Тогда в сечении тора этой плоскостью получим кольцо, радиус внешнего круга которого равен $R+\sqrt{r^2-x^2}$ (на

рисунке 65, б AD=AC+CD, CD - катет прямоугольного треугольника OCD, CD=$\sqrt{r^2 - x^2}$), а внутреннего равен R-$\sqrt{r^2 - x^2}$ (AB=AC-BC). Поэтому площадь кольца равна $\pi(R+\sqrt{r^2 - x^2})^2$-$\pi(R-\sqrt{r^2 - x^2})^2$= $4\pi R\sqrt{r^2 - x^2}$.

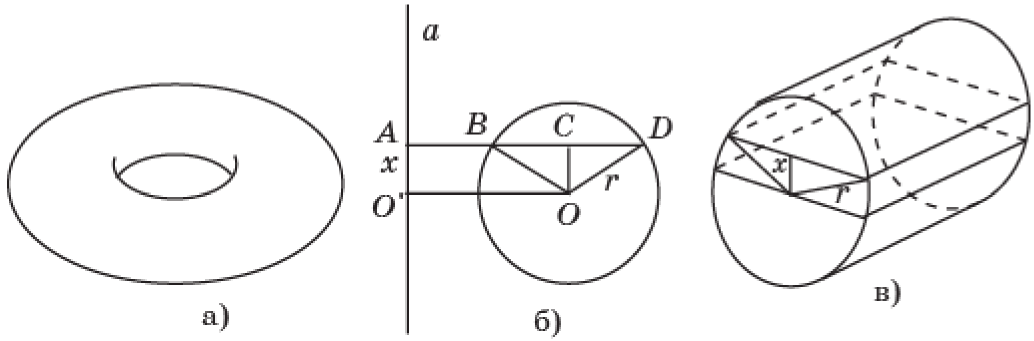


Рис. 65

Рассмотрим цилиндр, осью которого является прямая OO', радиус основания равен r, и высота равна $2\pi R$ (рис. 65, в). Покажем, что тор и цилиндр удовлетворяют условиям Кавальери.

В сечении цилиндра плоскостью α получается прямоугольник со сторонами $2\sqrt{r^2 - x^2}$ и $2\pi R$. Поэтому площадь прямоугольника равна $4\pi R\sqrt{r^2 - x^2}$, т. е. равна площади кольца. В силу принципа Кавальери, объем тора равен объему цилиндра. Таким образом, получаем следующую формулу: $V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 R$.

п. 48. Площадь поверхности (уроки 106, 107)

На данных уроках рассматривается понятие площади поверхности, вычисляются площади поверхностей многогранников, цилиндра, конуса. Учащиеся должны знать соответствующие формулы, уметь применять их для нахождения площадей поверхностей других пространственных фигур.

Урок 106

I. Математический диктант.

Проводится на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Формула объема прямого кругового конуса…
2. Формула объема прямоугольного параллелепипеда…
3. Если ребро b параллелепипеда наклонено к плоскости его основания под углом β, то высота параллелепипеда равна ...
4. Объем шара радиуса R равен …
5. Шаровым кольцом называется ...
6. Шаровым сегментом называется ...

7*. Формула объема усеченного конуса…

Вариант 2

1. Формула объема прямого кругового цилиндра…
2. Формула объема пирамиды…
3. Если образующая b цилиндра наклонена к плоскости его основания под углом φ, то высота цилиндра равна ...
4. Объем шара диаметра D равен …
5. Шаровым поясом называется ...
6. Шаровым сектором называется ...

7*. Формула объема усеченной пирамиды…

II. Проверка математического диктанта.

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал.

Площадь поверхности многогранника определяется как сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности. Разверткой боковой поверхности является прямоугольник с основанием $2\pi R$ и высотой b. Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле $S=2\pi R(R+b)$.

Рассмотрим прямой круговой конус, радиус основания которого равен R и образующая равна b. Его поверхность состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей, а длина дуги - длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна $\frac{1}{2}\cdot 2\pi Rb=\pi Rb$, а полная поверхность S вычисляется по формуле $S=\pi R\cdot(R+b)$.

IV. Закрепление нового материала.

Классу предлагаются следующие задачи.

1. Радиус основания прямого кругового цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ. 37,68 м^2.

2. Радиус основания прямого кругового конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Ответ. Образующая конуса равна 5 м, площадь основания равна 28,26 м^2, площадь боковой поверхности - 47,1 м^2, Sполная=75,36 м^2.

3. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

Ответ. $S_{\text{осн.}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{\text{бок.грани}}=ab$, $S_{\text{полная}}=a\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}a+3b)$.

Урок 107

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Вывод формулы нахождения площади поверхности цилиндра.

№ 2. – Вывод формулы нахождения площади поверхности конуса.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Осевое сечение цилиндра - квадрат. Площадь основания равна S. Найдите площадь поверхности цилиндра.

Ответ. $6S$.

2). Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ. $2\sqrt{2}Q$.

II. Задание для класса.

1. Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

Ответ. $\frac{a}{2}$.

2. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найдите диаметр основания цилиндра.

Ответ. 2.

III. Устная работа.

1). Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?

2). Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1? Правильного икосаэдра с ребром 1?

Ответ. Соответственно$\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$.

3). Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.

Ответ. 24 см^2.

4). Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ. 12π м^2.

5). Что принимается за площадь боковой поверхности конуса?

Ответ. Площадь сектора, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса.

6). Высота конуса равна 6 см, радиус основания 8 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ. 80π см^2.

IV. Лабораторная работа.

На каждую парту раздаются различные листы бумаги прямоугольной формы; модели правильных треугольных призм, прямых круговых конусов; масштабные линейки и микрокалькуляторы.

Учащимся предлагаются следующие задания.

1. Из листа бумаги образуйте боковую поверхность цилиндра. Сколькими способами это можно сделать? Определите во сколько раз площадь одной поверхности больше другой.

2. На данной модели правильной треугольной призмы проведите линии пересечения этой призмы плоскостью, параллельной боковой грани и делящей ее объем в отношении 1:3.

Указание. Сечение следует провести через середины двух соответствующих сторон нижнего и верхнего оснований.

3. По данной модели конуса определите угол в развертке боковой поверхности этого конуса.

Указание. Искомый угол $\alpha = 360^{o}\frac{R}{b}$, где R - радиус основания конуса, b - его образующая.

Задание на дом

1. Выучить: вывод формул нахождения площадей полной поверхности цилиндра и конуса (п. 48 учебника).

2. Повторить рассмотренные формулы объемов пространственных фигур.

3. Решить задачи.

1). Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

Ответ. $\frac{1}{2}na^2ctg\,\frac{180^o}{n} + nab$.

2). Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

Решение. $S_{бок.}= 2S_{осн.}$; $S_{бок.}= 3\cdot\frac{1}{2}h_1a$, h_1 - высота боковой грани пирамиды, опущенная на основание (апофема) $h_1=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$, где h - высота пирамиды; $S_{осн.}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Итак, имеем $h=\frac{a}{2}$.

3). Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ. 4π м^2.

4). Площадь боковой поверхности правильной пирамиды в два раза больше площади основания. Определите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

Ответ. 60^{o}.

5). В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур?

Ответ. π:4.

4*. Найдите площадь поверхности усеченного прямого кругового конуса с основаниями радиусов r, R и образующей b. Нарисуйте развертку боковой поверхности усеченного конуса.

Решение. $S_{\text{полная}} = S_{\text{в.осн.}} + S_{\text{н.осн.}} + S_{\text{бок.}}$; $S_{\text{в.осн.}} = \pi r^2$; $S_{\text{н.осн.}} = \pi R^2$, где r и R - соответственно радиусы верхнего и нижнего оснований. Достроим усеченный конус до полного конуса. Тогда боковая поверхность усеченного конуса будет равна части кольца. На рисунке 66 схематично изображена боковая поверхность полного конуса - сектор AOB; боковая поверхность дополнительного конуса - сектор $A'OB'$.

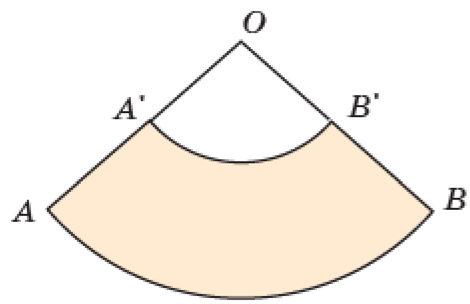


Рис. 66

Заштрихованная часть изображает боковую поверхность усеченного конуса, ее площадь равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AO - \frac{1}{2}\cdot A'B'\cdot A'O$. $AB=2\pi R$; $A'B'=2\pi r$; $AO:A'O = R:r$; $AO = A'O+b$. Таким образом, $A'O=\frac{br}{R-r}$. $S_{\text{бок.}}=\pi b(R+r)$. Окончательно получаем

$$S_{\text{полная}} = \pi r2 + \pi R2 + \pi b(R+r).$$

п. 49. Площадь поверхности шара и его частей (уроки 108, 109)

Цель – вывести формулу нахождения площади поверхности шара, уметь применять ее при решении задач.

Урок 108

I. Проверка домашнего задания.

Двое учащихся приглашаются за первую парту - опрос по теории.

Задание для первого.

1). Напишите формулу объема конуса.

2). Выведите формулу площади поверхности цилиндра.

Задание для второго ученика.

1). Напишите формулу объема цилиндра.

2). Выведите формулу площади поверхности конуса.

Четверым учащимся предлагаются следующие индивидуальные задания по карточкам на местах.

Карточка

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и наклонена к плоскости его основания под углом 30°. Найдите объем цилиндра и площадь его поверхности.

Ответ. V=162π см^3; $S_{\text{полная}}$=18(3+2$\sqrt{3}$)π (см^2).

2. Боковые ребра пирамиды $MABC$ равны. Ее основанием является прямоугольный треугольник, гипотенуза AB которого равна c, угол BAC равен α. Угол между плоскостями основания и грани MAC равен β. Найдите объем пирамиды.

Решение. Из равенства боковых ребер пирамиды следует, что вершина M проектируется в центр O окружности, описанной около основания, в нашем случае точка O является серединой гипотенузы AB. Угол MHO равен β, где H - середина AC; $OH\perp AC$ (теорема о трех перпендикулярах).

Итак, $V_{MABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot MO$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC$; $AC=c\cdot\cos\alpha$; $BC=c\cdot\sin\alpha$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $MO=HO\cdot\operatorname{tg}\beta$; $HO=\frac{1}{2}c\cdot\sin\alpha$, значит, $MO=\frac{1}{2}c\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. Итак, $V_{MABC}=\frac{1}{12}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot c^3$.

II. Задание для класса.

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $8\sqrt{3}$ см, угол между плоскостью боковой грани и основания равен 60^0. Найдите сторону основания, площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

Решение. Назовем сторону основания пирамиды a, тогда $\frac{a}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{tg60^0}=$ 8 (см), a=16 (см). $S_{осн.}$= 256 см^2.

Высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды на сторону основания (апофема), равна $\frac{8\sqrt{3}}{sin\,60^0}$=16 см. Таким образом, $S_{бок.}$= 512 см^2; $V=\frac{2048\sqrt{3}}{3}$ см^3.

2*. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна d, угол между плоскостью боковой грани и основания равен α. Найдите высоту (h), боковое ребро (b), площадь полной поверхности (S), и объем пирамиды (V).

Ответ. $h=\frac{d\sqrt{2}}{4}$tg α; $b=\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}=\frac{d}{4}\sqrt{2tg^2\alpha+4}$; $S=d^2(1+\frac{1}{cos\,\alpha})$; $V=d^3\frac{tg\alpha\sqrt{2}}{24}$.

Замечание. Последние две задачи предлагаются учащимся на таблице (таблица 10 из следующего пособия: Дудницын Ю.П., Сытина Т.Л. Таблицы для решения задач по стереометрии в 11 классе. - М.: Просвещение, 1991). Задача 2*, хотя и помечена звездочкой, является дополнительной, а не задачей повышенной трудности.

К доске приглашаются три ученика. Первые двое воспроизводят решения двух домашних задач, третий - начинает вместе с классом решать классную задачу 1.

III. Новый материал.

Для нахождения площади поверхности шара уже нельзя, как мы это делали для цилиндра и конуса, рассмотреть развертку, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника. Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Отсюда объем многогранника вычисляется по формуле $V_м=\frac{1}{3}S_мR$ (*), где $S_м$ - площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Получающиеся при этом многогранники будут все больше и больше приближаться к шару, а их поверхности будут приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом все время сохраняется формула (*), получаем, что для объема шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула $V=\frac{1}{3}SR$. Подставляя в нее формулу объема шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, окончательно получаем формулу для площади поверхности шара $S=4\pi R^2$.

IV. Закрепление нового материала.

1). Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ. 12 см^2.

2). Как изменится объем шара и его площадь поверхности, если увеличить радиус шара в 2 раза? 3 раза? ... n раз?

Ответ. Объем увеличится соответственно в 8 раз; 27 раз; ... n^3 раз. Площадь поверхности увеличится соответственно в 4 раза; 9 раз; ... n^2 раз.

3). Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ. Радиус шара равен 10 см, $S_{\text{пов.}}=4\pi\cdot 100=400\pi$ (см^2).

4). Шар с центром в точке O касается плоскости α в точке A. Точка B принадлежит плоскости α и $OB=26$ см; $AB=24$ см. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ. 400π см^2.

5*). Найдите площадь поверхности шарового сегмента, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра шара.

Решение. По аналогии с тем, как выводили формулу площади поверхности шара, можно получить формулу для площади поверхности шарового сегмента, а именно: $V_{\text{сектора}}=\frac{1}{3}S_{\text{сегмента}}\cdot R$, где $S_{\text{сегмента}}$ - площадь шарового сегмента, соответствующего шаровому сектору.

$S_{\text{сегмента}}=(3V_{\text{сектора}}):R$ или $S_{\text{сегмента}}=2\pi R\cdot(R-x)$.

Урок 109

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Поверхность шара … развернуть на плоскость.

2. Касательная плоскость к шару – это …

3. Площадь большого круга шара радиуса R выражается формулой …

4. Площадь поверхности шара диаметра D выражается формулой …

Вариант 2

1. Многогранник называется описанным около шара, если …

2. Любой выпуклый многогранник можно разбить на пирамиды следующим образом …

3. Длина окружности большого круга шара диаметра D выражается формулой …

4. Площадь поверхности шара радиуса R выражается формулой …

II. Проверка математического диктанта.

III. Устная работа.

1). Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.

Ответ. 8π дм^2. Радиус шара равен половине оси октаэдра, т. е. $\sqrt{2}$ дм.

2). Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?

Ответ. Пусть a ребро куба, тогда радиус описанного около него шара равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а вписанного $\frac{a}{2}$. Таким образом, площадь поверхности описанного шара в 3 раза больше площади поверхности вписанного в тот же куб шара.

3). Во сколько площадь поверхности шара, описанного около равностороннего цилиндра, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же цилиндр?

Ответ. Радиус описанного около данного цилиндра шара равен $R\sqrt{2}$, где R - радиус основания цилиндра, радиус вписанного шара равен R. Таким образом, площадь поверхности описанного шара в 2 раза больше площади вписанного шара.

4). Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около равностороннего конуса, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же конус?

Ответ. Радиус шара, описанного около данного конуса, равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a - образующая конуса (сторона равностороннего треугольника, который является осевым сечением конуса), радиус вписанного шара равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Таким образом, площадь поверхности описанного шара в четыре раза больше площади поверхности вписанного шара.

IV. Подготовка к контрольной работе.

Классу предлагаются следующие задачи.

1. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен 120°. Образующая равна 16 см. Найдите объем конуса и площадь его поверхности.

Ответ. V=512π см^3; $S_{\text{полная}}$=64π·(3+2$\sqrt{3}$) см^2.

2. Отношение диаметров двух шаров равно 5:3. Найдите отношение площадей поверхностей этих шаров.

Ответ. 25:9.

3. Основанием пирамиды является ромб, большая диагональ которого равна $2d$, а острый угол равен α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания равные углы β. Найдите объем пирамиды и угол между большим боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

Решение. Из равенства двугранных углов при сторонах основания пирамиды следует, что ее вершина M проектируется в точку O - центр окружности, вписанной в основание - ромб $ABCD$. $AC=2d$, $MH\perp DC$, $OH\perp DC$ (теорема о трех перпендикулярах), угол MHO равен β.

$V_{MABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot MO$; $S_{ABCD}=2d^2\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Найдем MO из прямоугольного треугольника MOH: $MO = OH\cdot\mathrm{tg}\ \beta$; $OH\cdot DC=DO\cdot CO$, $OH=d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; и $MO=d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\ \beta$.

Окончательно получаем $V_{MABCD} = \frac{2}{3}d^3\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\ \beta\cdot\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Обозначим угол MCO через γ. Тогда $\mathrm{tg}\ \gamma = \frac{MO}{CO} = \sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\ \beta$.

4*. Найдите площадь поверхности шарового пояса, заключенного между плоскостями, проходящими на расстоянии 3 см и 4 см от центра шара радиуса 5 см. Рассмотрите случай, когда оскости лежат по разные стороны от большого круга, параллельного им.

Решение. $S_{\text{пояса}}=S_{\text{шара}}-(S_1+S_2)$, где S_1 и S_2 - площади поверхностей сегментов, отстоящих от центра шара соответственно на 3 см и 4 см. В нашем случае $S_{\text{шара}}$=100π см^2, S_1=20π см^2, S_2=10π см^2. Таким образом, $S_{\text{пояса}}$=70π см^2.

Задание на дом

1, Выучить: вывод формулы для нахождения площади поверхности шара, уметь использовать ее при решении задач (п. 49 учебника).

2, Решить задачи.

1). Найдите площадь поверхности шара, вписанного в равносторонний цилиндр (осевое сечение – квадрат), диагональ осевого сечения которого равна a.

Ответ. $\frac{\pi a^2}{2}$.

2). Радиусы оснований шарового пояса равны 10 см и 12 см, а его высота равна 11 см. Найдите площадь поверхности шарового пояса.

Ответ. 275□ см^2.

3). Докажите, что площадь полной поверхности равностороннего конуса (осевое сечение - равносторонний треугольник) равна площади поверхности шара, построенного на высоте конуса как на диаметре.

Ответ. У данного конуса образующая равна $2R$ (R - радиус основания конуса), следовательно, площадь полной поверхности равна $3\pi R^2$. Его высота равна $\sqrt{3}R$. Площадь поверхности шара равна πD^2 (D - диаметр шара), в нашем случае $D=\sqrt{3}R$, следовательно, площадь поверхности шара равна $3\pi R^2$. Таким образом, площади равны.

4). Пространственная фигура ограничена двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиусов R и r ($R>r$). Обе шаровые поверхности пересечены произвольной плоскостью. Найдите площадь полученного сечения.

Решение. Данной пространственной фигурой является (в нашем определении) шаровое кольцо. В сечении этой фигуры плоскостью получится кольцо. Его площадь равна разности площадей сечений этой плоскостью шаров, образующих шаровое кольцо. Если плоскость проходит через центр шаров, то $S_{сеч.}=\pi(R^2-r^2)$. Если плоскость пересекает оба шара и отстоит от центра на расстоянии x, то

$S_{сеч.}= \pi(R^2-x^2)-\pi(r^2-x^2) = \pi(R^2-r^2)$. Таким образом, $S_{сеч.}= \pi(R^2-r^2)$ для любой плоскости сечения.

4*. Найдите площадь поверхности шарового пояса, заключенного между плоскостями, проходящими на расстоянии 3 см и 4 см от центра шара радиуса 5 см. Рассмотрите случай, когда оскости лежат по одну сторону от большого круга, параллельного им.

Решение. (См. решение задачи 4* из IV этапа урока 109). Если плоскости лежат по одну сторону от параллельного им большого круга, то $S_{пояса}=S_1-S_2=107\pi$ (см^2).

5*. Объем параболического сегмента. Пусть параболоид вращения образован вращением параболы $y=ax^2$ вокруг оси Oy. Рассмотрим фигуру в пространстве, отсекаемую от параболоида вращения плоскостью, перпендикулярной оси Oy и проходящей на расстоянии h от точки O. Такая фигура в пространстве называется параболическим сегментом.

Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ высоты $\frac{\pi}{a}$, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами, равными h.

Покажем, что параболический сегмент и призма удовлетворяют условиям принципа Кавальери и найдем объем параболического сегмента.

Решение. Проведем плоскость α, перпендикулярную оси Oy, на расстоянии $y=ax^2$ от точки O. В сечении параболоида вращения получим круг радиуса x и площади πx^2. В сечении призмы получим прямоугольник со сторонами y и $\frac{\pi}{a}y=\pi x^2$. В силу принципа Кавальери, объем параболического сегмента равен объему призмы, т.е. имеем формулу $V_{\text{пар.сегм.}}=\frac{\pi}{a}\cdot h^2$.

Урок 110

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Найдите отношение площадей поверхностей двух шаров, если диаметр одного из них в два раза больше диаметра другого.

2. Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом □. Найдите площадь поверхности пирамиды, если сторона ромба равна a, а его острый угол равен □.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна половине площади его полной поверхности. Найдите площадь поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна 5 см.

4. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее основание по хорде, равной 4 дм и отсекающей дугу 90^0. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если угол при вершине осевого сечения равен 60^0.

5*. Образующая усеченного конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 60^o. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиус его большего основания равен 5 см.

Вариант 2

1. Объем одного шара равен 2 см^3, другого – 3 см^3. Найдите отношение площадей их поверхностей.

2. В основании пирамиды лежит квадрат, две ее боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие составляют с ним равные углы □. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна h.

3. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20 дм^2. Найдите площадь его поверхности.

4. Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая от основания дугу в 120^0 и образующая с плоскостью основания угол 45^0. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен 4 см.

5*. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 7 см, диагональ осевого сечения равна 15 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

4.3. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 50. Прямоугольная система координат в пространстве (уроки 111, 112)

В курсе планиметрии учащиеся знакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Цель данных уроков - познакомить школьников с прямоугольной системой координат в пространстве. Учащиеся должны знать определение прямоугольной системы координат в пространстве, название осей координат и коррдинатных плоскостей, координат точки.

Урок 111

I. Анализ контрольной работы № 4. (Проводилась на уроке 110).

II. Новый материал.

Напомним, что координатной прямой называется такая прямая, на которой выбраны точка *O*, называемая началом координат, и единичный отрезок *OE*, указывающий положительное направление координатной прямой.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Оно обозначается буквой *O*, а координатные прямые обозначаются *Ox*, *Oy* и называются соответственно осью абсцисс и осью ординат.

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемой координатой этой точки, а каждой точке на плоскости соответствует пара чисел (x,y), называемых координатами точки на плоскости относительно данной системы координат.

Теперь рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596-1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат, а сами координаты - декартовыми координатами. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи - к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется методом координат.

Определение. *Прямоугольной системой координат в пространстве* называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой *O*, а координатные прямые обозначаются *Ox*, *Oy*, *Oz* и называются соответственно осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.

Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что такое координаты точки в пространстве с заданной прямоугольной системой координат.

Пусть A - произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox называется *абсциссой* точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно *ординатой* и *аппликатой* точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел (x,y,z) называется *координатами точки A* в пространстве.

III. Закрепление нового материала.

1. Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве (дано соответствующее изображение) нарисуйте точки с координатами (1,2,3), (2,-1,1), (-1,3,2).

2. Для точек A, B, C пространства, для которых указаны их проекции A', B', C' на плоскость Oxy (дано изображение), постройте соответствующие точки A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z; C_x, C_y, C_z на осях координат.

3. Дан куб $A...D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B. Положительные лучи осей координат соответственно BA, BC и BB_1 (рис. 149). Назовите координаты всех вершин куба.

Ответ. A (1,0,0); B (0,0,0); C (0,1,0); D (1,1,0); A_1(1,0,1); B_1(0,0,1); C_1(0,1,1); D_1(1,1,1).

Урок 112

I. Устная работа.

1. Найдите координаты ортогональных проекций точек A (1,3,4) и B (5,-6,2) на: а) плоскость Oxy; б) плоскость Oyz; в) ось Ox; г) ось Oz.

Ответ. а) (1,3,0), (5,-6,0); б) (0,3,4), (0,-6,2); в) (1,0,0), (5,0,0); г) (0,0,4), (0,0,2).

2. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны ную; ж) все координаты равны нулю?

Ответ. а) Плоскость Oyz; б) плоскость Oxz; в) плоскость Oxy; г) ось Oz; д) ось Oy; е) ось Ox; ж) начало координат.

3. На каком расстоянии находится точка $A(1,-2,3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

Ответ. а) 3; б) 2; в) 1.

4. На каком расстоянии находится точка $A(1,-2,3)$ от координатных прямых: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

Ответ. а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$.

5. Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?

Ответ. а) Плоскость, параллельная плоскости Oyz и отстоящая от нее на расстояние 1; б) прямая, параллельная оси Oz и отстоящая от нее на расстояние 1.

II. Решение задач.

1. Для данной системы координат в пространстве нарисуйте точки A (1,1,-1) и B (1,-1,1). Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? Плоскость координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли OH через начало координат?

Ответ. Отрезок AB пересекает ось Oy в точке с координатами (0,1,0).

2. Найдите условие, которому должны удовлетворять координаты точек пространства, одинаково удаленные от: а) двух координатных плоскостей Oxy, Oyz; б) всех трех координатных плоскостей?

Ответ. а) $z=x$; б) $x=y=z$.

3. Пусть в пространстве заданы точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$. Найдите координаты середины отрезка A_1A_2.

Ответ. $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

4*. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Вершины A и B имеют соответственно координаты (1,0,0) и (-1,0,0). Основание тетраэдра (ABC) лежит в плоскости Oxy. Найдите координаты других вершин тетраэдра. Сколько случаев возможно? Рассмотрите какой-нибудь один из них.

Ответ. Возможны четыре случая:

а) $C\,(0,\sqrt{3},0)$, $D\,(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3\sqrt{6}}{3})$;

б) $C\,(0,\sqrt{3},0)$, $D\,(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{3\sqrt{6}}{3})$;

в) $C\,(0,-\sqrt{3},0)$, $D\,(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3\sqrt{6}}{3})$;

г) $C\,(0,-\sqrt{3},0)$, $D\,(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{3\sqrt{6}}{3})$.

К доске вызываем трех учащихся. С первым начинаем решать классную задачу 1. Второй самостоятельно решает классную задачу 2, а третий – одну из домашних задач.

III. Индивидуальное домашнее задание "Рене Декарт".

Р. Декарт - один из выдающихся ученых XVII века. Поражает широта его интересов. Ученым получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицине. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основовположником известного философского учения - картезианства (Картезий - латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени она имела довольно длинное название: "Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода". В этом сочинении Декарт сформулировал "главные правила метода", а именно:

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т.е. старательно избегать поспешности и рпедупреждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

"Геометрия" Декарта, являющаяся приложением к "Рассуждению о методе..." произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время "Геометрия" выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII и XIX веках на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определения прямоугольной системы координат, координатных осей и плоскостей, координат точек (п. 50 учебника).

2. Решить задачи.

1). Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве нарисуйте точки *E* (1,0,-2), *F* (0,-3,1), *G* (-1,-2,-3).

2). Среди данных точек *K*(-6,0,0), *L*(10,-5,0), *M*(0,6,0), *N*(7,-8,0), *P*(0,0,-20), *Q*(0,11,-2) найдите те, которые принадлежат: а) оси *Oy*; б) оси *Oz*; в) плоскости *Oxy*; г) плоскости *Oyz*.

Ответ. а) *M*; б) *P*; в) *L, N, K*; г) *Q, M, N, P*.

3). Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из данных точек *E*(6,-2,8) и *F*(-3,2,-5) на: а) ось *Ox*; б) плоскость *Oxz*.

Ответ. а) (6,0,0), (-3,0,0); б) (6,0,8), (-3,0,-5).

4). Найдите координаты середины отрезка *CD*, если *C*(3,4,0) и *D*(3,-1,2).

Ответ. $(3, \frac{3}{2}, 1)$.

5). Точка *A* имеет координаты (x,y,z). Найдите координаты симметричной точки относительно координатных плоскостей.

Ответ. $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(x,y,-z)$.

3*. Дан тетраэдр *ABCD*. Вершины *A* и *B* имеют соответственно координаты (1,0,0) и (-1,0,0). Основание тетраэдра (*ABC*) лежит в плоскости *Oxy*. Найдите координаты других вершин тетраэдра. Сколько случаев возможно?

(См. решение задачи 4* из II этапа урока 112).

п. 51. Расстояние между точками в пространстве (уроки 113, 114, 115)

Цель – знать вывод формулы расстояния между двумя точками, уметь находить координаты точек и расстояния между точками в пространстве с заданными координатами.

Урок 113

I. Опрос учащихся.

Даем 4 индивидуальных задания (которые выполняются учащимися на своих местах). Они имеют одинаковое содержание, а именно.

Карточка

1). Куб $A...D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 67). $A(2,-2,0)$. Найдите координаты всех остальных вершин куба. Определите диагональ куба AC_1.

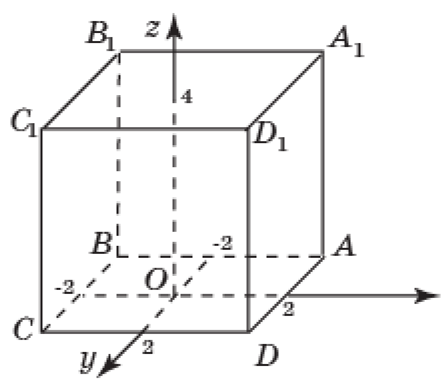


Рис. 67

Ответ. $B(-2,-2,0)$, $C(-2,2,0)$, $D(2,2,0)$, $A_1(2,-2,2)$, $B_1(-2,-2,2)$, $C_1(-2,2,2)$, $D_1(2,2,2)$.

2). Точка $A(0,\sqrt{2},\sqrt{5})$ принадлежит сфере с центром $O(3,0,0)$. Напишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли этой сфере точки $M(5,0,2\sqrt{3})$ и K $(4,-1,0)$?

Ответ. $(x-3)^2+y^2+z^2=16$, точка M принадлежит, а точка K не принадлежит данной сфере.

II. Задание для класса.

1. Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты (1,0,0) и (0,1,0). Найдите координаты остальных верших октаэдра.

Ответ. (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1).

2. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами (1,2,3) относительно координатных плоскостей?

Ответ. Не имеет общих точек с координатной плоскостью *Oxy*; касается координатной плоскости *Oxz*; пересекает координатную плоскость *Oyz*.

3. Найдите координаты середины отрезка *AB*, если *A*(1,2,3) и *B*(-1,1,1).

Ответ. $(0, \frac{3}{2}, 2)$.

4*. Точка *A* имеет координаты (*x*,*y*,*z*). Найдите координаты симметричной точки относительно: а) координатных прямых; б) начала координат.

Ответ. а) (-*x*,-*y*,*z*), (-*x*,*y*,-*z*), (*x*,-*y*,-*z*); б) (-*x*,-*y*,-*z*).

III. Новый материал.

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Показывалось также, что окружность с центром в точке $A_o(x_o,y_o)$ и радиусом *R* задается уравнением $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = R^2$, а прямая – уравнением $ax+by+c=0$.

Пусть $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$ - точки в пространстве с заданными координатами. Выразим расстояние между ними через их координаты. Для этого рассмотрим прямую A_1A_2 (рис. 68).

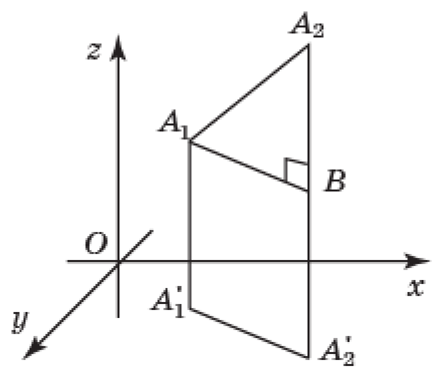


Рис. 68

Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси *Oz*, и пусть A_1',A_2' - ортогональные проекции точек A_1, A_2 на плоскость *Oxy*. Ясно, что эти проекции имеют координаты (x_1,y_1), (x_2,y_2) соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B - прямоугольный, $A_1B=A_1'A_2'$, $A_2B=|z_1-z_2|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем $A_1A_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Непосредственно из определения шара и сферы следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_o(x_o,y_o,z_o)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\leq R^2,$$

а координаты точек соответствующей сферы - равенству

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2.$$

Последнее равенство называется *уравнением сферы* с центром в точке $A_0(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом R.

IV. Закрепление нового материала.

1.Найдите расстояние между точками $A_1(1,2,3)$ и $A_2(-1,1,1)$; $B_1(3,4,0)$ и $B_2(3,-1,2)$.

Ответ. $A_1A_2=3$; $B_1B_2=\sqrt{29}$.

2. Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке O (0,0,0) и радиусом 1; б) с центром в точке C (1,-2,3) и радиусом 4.

Ответ: а) $x^2+y^2+z^2=1$; $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

3. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: A (0,0,2), B (0,2,0); C (2, 0,0).

Ответ. Треугольниик ABC - равносторонний, так как $AB=AC=BC=2\sqrt{2}$.

Урок 114

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Расстояние от точки $M(-1,2,3)$ до координатной плоскости Oxz равно … .

2. Координата проекции точки $E(5,-2,4)$ на ось абсцисс равна …

3. Расстояние между точками $A(x_A,y_A,z_A)$ и $B(x_B,y_B,z_B)$ в пространстве выражается формулой …

4. Уравнение сферы с центром в точке $O(0,-5,7)$ и радиусом 9 имеет вид …

Вариант 2

1. Точка $K(4,-3,1)$ находится на расстоянии … от координатной плоскости Oyz.

2. Координата проекции точки $F(-2,6,-3)$ на ось аппликат равна …

3. Расстояние между точками $C(x_C,y_C)$ и $D(x_D,y_D)$ на плоскости выражается формулой …

4. Точки шара с центром в точке $M(-8,0,3)$ и радиусом 4 удовлетворяют …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: а) A (-1,2,3), B (3,-1,2), C (2,3,-1); б) K (1,0,0), L (0,1,0), M (0,0,1).

Ответ. а) Треугольник ABC равносторонний, так как $AB=AC=BC=\sqrt{26}$; б) треугольник KLM также равносторонний, так как $KL=KM=LM=\sqrt{2}$.

2. Найдите координаты центра (C) и радиус (R) сферы, заданной уравнением: а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$; б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=11$.

Ответ: а) $C(2,-5,0)$, $R=3$; б) C (0,6,-1), $R=\sqrt{11}$.

4. Покажите, что уранение $x^2-4x+y^2+z^2=0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

Ответ. Данное уравнение можно привести к виду $(x-2)^2+y^2+z^2=4$. Таким образом, C (2,0,0) и $R=2$.

IV. Занимательный момент.

(см. параграф 8)

Урок 115

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения прямоугольной системы координат в пространстве, координатных осей и плоскостей, координат точки.

№ 2. – Вывод формулы нахождения расстояния между двумя точками в пространстве.

№ 3. – Вывод уравнения сферы.

№ 4. – Вывод неравенства шара.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Найдите длину отрезка MN, если $M(4,-3,1)$, $N(7,-5,-8)$.

Ответ. $MN=\sqrt{94}$.

2) Напишите уравнение сферы с центром в точке $C(0,2,-6)$ и радиусом 5.

Ответ. $x^2+(y-2)^2+(z+6)^2=25$.

3) Найдите радиус (R) и координаты центра (C) сферы, заданной уравнением: $x^2+4y-2z+y^2+z^2-9=0$.

Ответ. $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=14$, $C(0,-2,1)$, $R=\sqrt{14}$.

II. Задание для класса.

1. Для данной прямоугольной системы координат нарисуйте точки: A (1,0,3), C (0,0,2), E (-1,2,-3).

2. Напишите уравнение сферы с центром в точке C (2,-6,0) и радиусом 4.

Ответ. $(x-2)^2+(y+6)^2+z^2=16$.

3. Найдите радиус (R) и координаты центра (C) сферы, заданной уравнением: $x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$.

Ответ. $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=10$, C (1,0,-3), $R=\sqrt{10}$.

II. Устная работа.

1). Найдите расстояние между точками:

а) $A_1(1;2;3)$ и $A_2(-;1;1)$; б) $B_1(3;4;0)$ и $B_2(3;-1;2)$.

2). Определите вид треугольника, если его вершины имеют координаты: $A(0;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$.

3). Какая из точек $C(2;1;3)$ или $D(-2;1;-4)$ лежит ближе к началу координат?

4). Являются ли точки $A(1;2;3;)$, $B(2;3;4)$ и $C(3;4;5)$ вершинами треугольника?

5). Укажите какие-нибудь точки в пространстве, одинаково удаленные от всех трех координатных плоскостей.

6). Найдите координаты проекции точек $A(1;3;4)$ и $B(5;-6;2)$ на: а) плоскость Oxy; б) плоскость Oyz; в) ось Ox; г) ось Oz.

Ответы. 1). а) 3; б) $\sqrt{29}$.

2). Равносторонний, так как $AB=AC=BC=2\sqrt{2}$.

3). Точка C, так как $CO=\sqrt{14}$, $DO=\sqrt{21}$.

4). Нет. $AB=BC=\sqrt{3}$, $AC=2\sqrt{3}$, т.е. не выполняется неравенство треугольника.

5). Например, точки с координатами (1;1;1), (1;-1;1).

6). Для точки A: а) (1;3;0); б) (0;3;4); в) (1;0;0); г) (0;0;4). Для точки B: а) (5;-6;0); б) (0;-6;2); в) (5;0;0); г) (0;0;2).

III. Повторение. – Решение нестандартных задач.

1. Шар касается всех двенадцати ребер куба с ребром a. Найдите объем части шара, заключенной внутри этого куба.

Решение. Центром шара является центр куба. Радиус шара равен $R = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Грани куба высекают из шара круги радиуса $r=\frac{a}{2}$. Высоты отсеченных сегментов равны $h=a\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Объемы сегментов равны

$$V_c = \pi r^2\frac{h}{2} + \pi\frac{h^3}{6} = \pi a^3\frac{4\sqrt{2}-5}{24}.$$

Следовательно, объем части шара, содержащейся в кубе равен

$V = \pi a^3\frac{15-8\sqrt{2}}{12}$.

2. Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Найдите объем этой пирамиды.

Ответ. Развертка пирамиды показана на рисунке 69. Сама Основанием пирамиды служит треугольник AEF и высотой $BC = a$. Поэтому объем пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{8}\cdot a = \frac{a^3}{24}$.

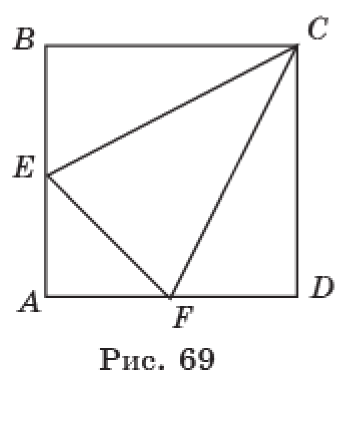


Рис. 69

Задание на дом

1. Выучить: вывод формулы нахождения расстояния между двумя точками в пространстве, уравнения сферы, неравенства шара (п. 51 учебника).

2. Решить задачи.

1). Для данной прямоугольной системы координат нарисуйте точки B (0,1,3), D (0,2,0), F (1,-2,-3).

2). Найдите длину отрезка KL, если K(-5,6,-2), L(-10,-3,-7).

Ответ. $KL=\sqrt{59}$.

3). Даны точки M (1,-2,-3), N (-2,3,1) и K (3,1,-2). Найдите периметр треугольника MNK.

Ответ. $MN=5\sqrt{2}$, $MK=\sqrt{14}$, $NK=\sqrt{38}$. Таким образом, периметр треугольника MNK равен $\sqrt{2}\,(5+\sqrt{7}+\sqrt{19})$.

4). Покажите, что уравнение $x^2-2x+y^2+z^2=3$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус (R) и координаты центра (C).

Ответ. Уравнение сферы имеет вид $(x-1)^2+y^2+z^2=4$, $R=2$, $C(1,0,0)$.

3*. В пирамиду $ABCD$ с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар радиуса R. Докажите, что имеет место равенство $\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.

Решение. Пусть O – центр вписанного шара. Объемы V_i , $1\le i\le 4$, пирамид, основаниями которых являются грани данной пирамиды, а вершиной – точка O, вычисляются по формуле $V_i=\frac{1}{3}S_iR$, где S_i – площади граней. Объем всей пирамиды вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S_ih_i$, где h_i – высота, опущенная на грань площади S_i. Откуда $S_i=\frac{3V}{h_i}$ и, следовательно, $V_i=\frac{VR}{h_i}$. Учитывая, что объем V равен сумме объемов V_i, будем иметь равенство

$$V=\frac{VR}{h_1}+\frac{VR}{h_2}+\frac{VR}{h_3}+\frac{VR}{h_4}.$$

Разделив обе его части на VR, получим требуемое равенство.

п. 52. Координаты вектора (уроки 116, 117)

Цель данных уроков - познакомить учащихся с понятием координат вектора. Школьники должны знать, как определяются координаты вектора, уметь находить координаты векторов и задавать векторы с помощью координат.

Урок 116

I. Повторение (п. 9 учебника "Векторы в пространстве").

Устная работа.

- Определение вектора.
- Какие два вектора называются равными?
- Что называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Докажите, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Что называется длиной вектора?
- Какой вектор называется нулевым?
- Что называется разностью векторов?
- Докажите, что $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Письменная работа.

1). $A...D_1$ - параллелепипед. Нарисуйте векторы, равные:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1B_1}$

2). $A...D_1$ - параллелепипед. Докажите, что равны векторы $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}-\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB_1}$

Ответ. Оба данных вектора равны $\overrightarrow{DB_1}$.

3). $A...D_1$ - призма. Нарисуйте точку X, если $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{CA_1}$

Ответ. Точка X совпадает с точкой B.

II. Новый материал.

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются *координатами* самого *вектора*.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их *координатными векторами* (рис. 70).

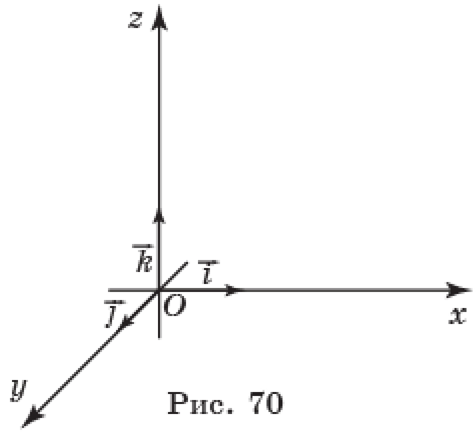


Рис. 70

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x,y,z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат, и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$. Точка A имеет координаты (x,y,z) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$ и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Теорема. Сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1$ (x_1,y_1,z_1) и $\vec{a}_2$ (x_2,y_2,z_2) имеет координаты (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1+x_2)\,\vec{i} + (y_1+y_2)\,\vec{j} + (z_1+z_2)\,\vec{k},$$

и, следовательно, тройка чисел (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1$ - $\vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1$ (x_1,y_1,z_1), $\vec{a}_2$ (x_2,y_2,z_2) имеет координаты (x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку A_1(x_1,y_1,z_1) и концом - точку A_2(x_2,y_2,z_2) (рис. 71). Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ и, следовательно, он имеет координаты (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).

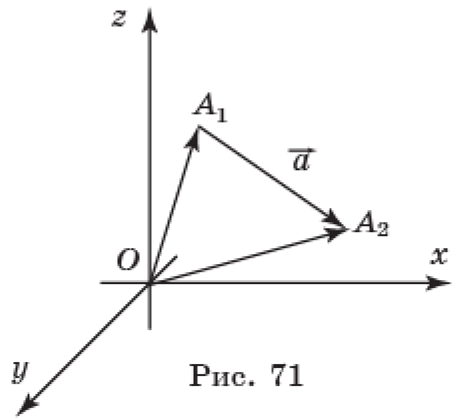


Рис. 71

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ выражается через координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

III. Закрепление нового материала.

1. На рисунке 72 изображен прямоугольный параллелепипед, у которого OA=2, OB=3, OO_1=4. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC}$.

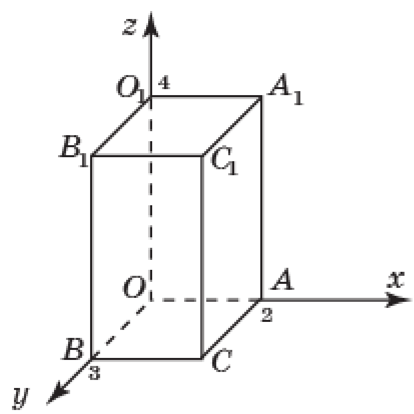


Рис. 72

Ответ. Векторы имеют соответственно следующие координаты: (2,0,4), (0,3,4), (2,3,4), (2,3,0).

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (-3,5,4), (2,3,-1).

Ответ. (5,-2,-5).

3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y, z).

Ответ. $|\vec{a}|=\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Урок 117

I. Устная работа.

1). На каком расстоянии от плоскости *Oxy* находится точка с координатами (1,-2,3)?

Ответ. 3.

2). Укажите какие-нибудь точки в пространстве одинаково удаленные от всех трех координатных плоскостей.

Ответ. Точки с координатами (m,m,m).

3). $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$. Покажите, что $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FD}$.

4). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) *A* (2,-6,9), *B* (-5,3,-7);

б) *A* (1,3,-8), *B* (6,-5,-10);

в) *A* (-3,1,-20), *B* (5,1,-1).

Ответ: а) (-7,9,-16); б) (5,-8,2); в) (8,0,19).

5). Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}$ (1,0,2), $\vec{b}$ (0,3,-4).

Ответ. Соответственно (1,3,-2) и (1,-3,6).

6). Найдите координаты точки *N*, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4,-3,0) и точка *M* - (1,-3,-7).

Ответ. *N* (5,-6,-7).

7). Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (*a*,*b*,*c*). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

Ответ. $\overrightarrow{BA}$ (-*a*,-*b*,-*c*).

II. Самостоятельная работа.

Проводится на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Найдите координаты проекции точек *A* (1,3,4) и *B* (5,-6,2) на:

а) плоскость *Oxy*;

б) плоскость *Oyz*;

в) ось *Ox*;

г) ось *Oz*.

Ответ. Соответственно для точек *A* и *B*: а) (1,3,0), (5,-6,0);

б) (0,3,4), (0,-6,2);

в) (1,0,0), (5,0,0);

г) (0,0,4), (0,0,2).

2. Найдите координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}$ (2,-1,-2), $\vec{b}$ (3,-2,5).

Ответ. (5,-3,3).

3. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{CD}$ (1,-3,7), если *C* (2,5,-1).

Ответ. (3,2,6).

4*. Докажите, что треугольник с вершинами *A* (3,-2,1), *B* (-2,1,3), *C* (1,3,-2) равносторонний.

Ответ. Треугольник *ABC* - равносторонний, так как $AB=BC=AC=\sqrt{38}$.

Вариант 2

1. Найдите координаты проекций точек *C* (2,-1,3) и *D* (-2,4,-7) на:

а) плоскость *Oyz*;

б) плоскость *Oxy*;

в) ось *Oy*;

г) ось *Ox*.

Ответ. Соответственно для точек *C* и *D*: а) (0,-1,3), (0,4,-7);

б) (2,1-,0), (-2,4,0);

в) (0,-1,0), (0,4,0);

г) (2,0,0), (-2,0,0).

2. Найдите координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}$ (6,-7,-1), $\vec{b}$ (0,-2,5).

Ответ. (6,-5,-6).

3. Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}$ (5,-6,-10), если *B* (2,0,5).

Ответ. *A* (-3,6,15).

4*. Задача 4* из первого варианта.

III. Проверка самостоятельной работы.

Проводится с помощью кодоскопа по листочкам, написанным под копирку.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определение координат вектора в пространстве; теорему о представлении вектора по координатным векторам; теорему о координатах суммы векторов с заданными координатами; выражение длины вектора через его координаты (п. 52 учебника)..

2. Решить задачи.

1). Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}$ (4,1,2), $\vec{b}$ (-4,2,-3).

Ответ. Соответственно (0,3,-1), (8,-1,5).

2). Даны векторы $\vec{a}$ (-1,2,8) и $\vec{b}$ (2,-4,3). Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a}+5\vec{b}$.

Ответ: а) (1,-2,30); б) (-1,2,$7\frac{3}{4}$); в) (11,-22,7).

3). Выразите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$.

Ответ. $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

4). $A...D_1$ - параллелепипед. Нарисуйте следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}$;

б) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD_1}$;

в) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{A_1C_1}$.

5). $A...C_1$ - треугольная призма. Нарисуйте точку X, если $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{B_1C_1}$.

Ответ. Точка X совпадает с точкой B_1.

3*. Проиллюстрируйте на параллелепипеде векторное равенство $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}$.

п. 53. Скалярное произведение (уроки 118, 119)

Скалярное произведение является одной из важнейших операций над векторами. Он позволяет определить углы между векторами, устанавливать перпендикулярность векторов, решать многие другие задачи. Цель данных уроков - познакомить учащихся со скалярным произведением векторов в пространстве и его свойствами. Они должны знать определение скалярного произведения, формулу, выражающую скалярное произведение через координаты векторов, уметь находить скалярное произведение векторов в пространстве, углы между векторами.

Урок 118

I. Математический диктант.

Проводится на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Найдите координаты вектора $2\vec{i}+3\vec{j}$.

Ответ. (2,3,0).

2. Найдите длину вектора $\vec{a}$ (4,-2,1).

Ответ. $|\vec{a}|=\sqrt{7}$.

3. Даны две координаты вектора $\vec{a}$ (a_x,a_y,a_z); $a_x=4$, $a_y=-12$. Найдите его третью координату a_z, зная, что $|\vec{a}|=13$.

Ответ. $a_z=3$ или $a_z=-3$.

Вариант 2

1. Найдите координаты вектора $3\vec{i}-\vec{k}$.

Ответ. (3,0,-1).

2. Найдите длину вектора $\vec{b}$ (-3,5,-1).

Ответ. $|\vec{b}|=\sqrt{35}$.

3. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$ (1,-3,7), если A(2,5,-1).

Ответ. B (3,2,6).

II. Проверка математического диктанта.

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал.

Скалярное произведение векторов в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости, а именно.

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению,

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1$ $(x_1,y_1,z_1,)$, $\vec{a}_2$ (x_2,y_2,z_2). Отложим их от начала координат, и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно. По теореме косинусов, имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos \varphi,$$

следовательно, равенство $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1{}^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2;$$

$$\vec{a}_2{}^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\left(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула:

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

IV. Закрепление нового материала.

1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ (-1,2,3) и $\vec{a}_2$ (2,-1,0).

Ответ. $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$=-4.

2. Используя формулу cos φ=($\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$):($|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|$) из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами $\vec{a}_1$ (2,3,-1), $\vec{a}_2$ (1,-2,4).

Ответ. cos φ=$\frac{4}{21}\sqrt{6}$.

3. Используя формулу скалярного произведения, покажите, что для вектора $\vec{a}$ (x,y,z) имеют место равенства: $x=\vec{a} \cdot \vec{i}$, $y=\vec{a} \cdot \vec{j}$, $z=\vec{a} \cdot \vec{k}$.

Ответ. $\vec{i}$ (1,0,0), $\vec{j}$ (0,1,0), $\vec{k}$ (0,0,1). Отсюда $x=\vec{a} \cdot \vec{i}$, $y=\vec{a} \cdot \vec{j}$, $z=\vec{a} \cdot \vec{k}$.

4. Докажите, что каковы бы ни были векторы $\vec{a}$ (a_1,a_2,a_3), $\vec{b}$ (b_1,b_2,b_3) и $\vec{c}$ (c_1,c_2,c_3) справедливы следующие равенства:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Указание. При доказательстве нужно использовать выражение скалярного произведения через координаты векторов, входящих в него.

5*. Докажите, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $(\vec{a}+\vec{b})$ и $(\vec{a}-\vec{b})$ перпендикулярны.

Указание. Пусть $\vec{a}$ (a,a,a), $\vec{b}$ (b,b,b), тогда легко показать, что $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})$=0.

Урок 119

I. Устная работа.

1). Что называется скалярным произведением двух ненулевых векторов?

2). Что называется скалярным квадратом?

3). Какой физический смысл имеет скалярное произведение?

4). Как выражается скалярное произведение двух ненулевых векторов через их координаты?

5). Найдите угол между векторами $\vec{a}_1$ (1,2,-2) и $\vec{a}_2$ (1,0,-1).

Ответ. 45^0.

6). Назовите координаты векторов:

а) $\vec{a}=-2\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k}$;

б) $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}$;

в) $\vec{c}=-3\vec{j}+2\vec{k}$;

г) $\vec{d}=-5\vec{i}+5\vec{k}$.

7). При каком значении m векторы $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+m\vec{k}$ и $\vec{b}=-4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ перпендикулярны?

Ответ. $m=-3$.

II. Решение задач.

1. Какой угол (φ) образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\varphi=60^0$.

2. При каком значении n вектор $2\vec{a}+n\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}-\vec{a}$, если $\vec{a}$ (2,-1,0), $\vec{b}$ (4,3,1).

Ответ. $n=0$.

3. Докажите, что в треугольнике ABC угол B прямой, где A (2,1,3), B (1,1,4) и C (0,1,3).

Ответ. $|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=0$.

4. Точка K - середина ребра AA_1 куба $A...D_1$. L - середина ребра AD, M - центр грани CC_1D_1D. Докажите, что $KM\perp B_1L$.

Указание. Введите прямоугольную систему координат таким образом, чтобы начало координат совпало с вершиной A и ребра, выходящиее из нее, лежали на координатных осях.

5*. Вычислите, какую работу (A) производит сила $\vec{F}$ (-3,4,7), когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (5,-1,2) в положение B (2,1,3).

Ответ. $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ (-3,2,1), A=24.

III. Решение нестандартных задач.

1. В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами скрещивающихся ребер AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Решение. Имеем:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

2. Докажите, что для произвольного тетраэдра $ABCD$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, где O – центроид (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней).

Решение. Пусть O_1 – центроид (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Точка O, принадлежит отрезку OO_1 и делит его в отношении 3:1, считая от вершины. Тогда

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1D} =$$
$$3\,\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1D} = \vec{0}.$$

Задание на дом

1. Выучить: определение скалярного произведения двух векторов; вывод формулы скалярного произведения через координаты векторов (п. 53 учебника).

2. Решить задачи.

1). Покажите, что формула скалярного произведения двух векторов (через их координаты) имеет место в случае, когда векторы параллельны.

2). Дан куб $A...D_1$. Вычислите косинус угла (φ) между векторами $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

Ответ. $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3). M - точка пересечения медиан треугольника ABC, точка O - произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Решение. а). $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, где A_1 - середина стороны BC; б). $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$;

в). $\overrightarrow{OM}$=$\overrightarrow{OC}$+$\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CM}$=$\overrightarrow{CA_1}$+$\overrightarrow{A_1M}$=-$\overrightarrow{BA_1}$-$\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$;

г). Таким образом, имеем

$3\overrightarrow{OM}$=($\overrightarrow{OA}$+$\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$)+($\overrightarrow{OB}$+$\overrightarrow{BA_1}$-$\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$)+($\overrightarrow{OC}$-$\overrightarrow{BA_1}$-$\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$).

Окончательно получаем $\overrightarrow{OM}$=$\frac{1}{3}$ $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

4). Найдите координаты точки *E*, если: а) $\overrightarrow{EF}$ (0,-3,11), *F*(5,-1,0); б) *F*(5,0,-9), $\overrightarrow{FE}$ (-2,4,-6).

Ответ. а) (5,2,-11); б) (3,4 ,-15).

5). Найдите числа *u, v, w*, чтобы выполнялось равенство $\vec{n}$=$u\vec{k} + v\vec{l} + w\vec{m}$, если $\vec{n}$ (-30,6,-12), $\vec{k}$ (5,-6,0), $\vec{l}$ (10,-3,2), $\vec{m}$ (0,1,2).

Ответ. *u* = 3; *v* = -4,5; *w* = 1,5.

3*. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке, совпадающей с центроидом (центроид - точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней).

Решение. Пусть *M* и *N* – середины ребер *AB* и *CD* тетраэдра *ABCD*, *O* – середина *MN*. Тогда так как $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = -\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$, то

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$=$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$ и, следовательно, середина отрезка *MN* является центроидом.

п. 54. Уравнение плоскости в пространстве (уроки 120, 121, 122)

Цель настоящих уроков - вывести уравнение плоскости в пространстве и исследовать случаи взаимного расположения плоскостей. Учащиеся должны знать как задается плоскость в пространстве, уметь определять взаимное расположение плоскостей по их уравнениям.

Урок 120

I. Опрос учащихся.

На первую парту приглашаются двое учащихся - опрос по теории.

Задание для первого:

- Что называется скалярным произведением двух ненулевых векторов?

- Какой физический смысл имеет скалярное произведение двух векторов?

- Назовите свойства скалярного произведения.

Задание для второго ученика:

- Что называется скалярным квадратом?

- Может ли скалярное произведение равняться нулю? В каком случае?

- Выразите скалярное произведение двух векторов через их координаты.

II. Задание для класса.

1. Найдите координаты начала вектора $\vec{a}$ (-2,3,-1), если его конец совпадает с точкой B (4,2,0).

Ответ. (6,-1,1).

2. Дан куб $A...D_1$. Вычислите косинус угла (φ) между векторами $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}DB1$.

Ответ. cos φ=$-\frac{1}{3}$.

3. Даны вершины треугольника ABC: A (1,3,0), B (1,0,4) и C(-2,1,6). Найдите его внешний угол (φ) при вершине A.

Решение. $\cos\varphi = \cos(180^0-\alpha) = \cos\alpha$, где $\alpha = \angle BAC$; $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ $= \frac{30}{5\cdot 7} = \frac{6}{7}$.

4*. Какой угол составляет с плоскостью α каждая из наклонных MA, MB, MC, если все они равны между собой, и любые две из них взаимно перпендикулярны.

Ответ. 45°.

К доске приглашаются трое учащихся: первый решает задачу из домашней работы, второй и третий - решения классных задач 2 и 3.

III. Новый материал.

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c - действительные числа, причем a, b одновременно не равны нулю. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. Плоскость в пространстве задается уравнением

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c, d - действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого *вектором нормали*.

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит плоскости и $\vec{n}\,(a,b,c)$ - перпендикулярный этой плоскости вектор. Тогда произвольная точка $A\,(x,y,z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}\,(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т.е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A}\cdot\vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0,$$

которое задает искомую плоскость. Обозначая $-ax_0-by_0-cz_0=d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$коллинеарны и, следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_1=t\vec{n}_2$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\ (*),$$

Векторы нормалей имеют координаты (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2). Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$. При этом, если $d_2=td_1$, то уравнения (*) определяют одну и ту же плоскость. Если же $d_2\neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1$ (a_1,b_1,c_1), $\vec{n}_2$ (a_2,b_2,c_2). Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.}$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т.е. выполняется равенство

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

IV. Закрепление нового материала.

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку A_0(1,2,0) с вектором нормали $\vec{n}$ (-1,1,1).

Ответ. $-x+y+z-1=0$ или $x-y-z+1=0$.

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A(1,0,0), B(0,1,0) и C(0,0,1).

Ответ. $x+y+z-1=0$.

3. Дана плоскость $x+2y-3z-1=0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

Ответ. Точки $A(1,0,0)$, $B(0,\frac{1}{2},0)$ и $C(0,0,-\frac{1}{3})$ - точки пересечения данной плоскости соответственно с осями координат Ox, Oy и Oz.

Урок 121

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения скалярного произведения векторов; скалярного квадрата.

№ 2. – Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

№ 3. – Вывод уравнения плоскости.

№ 4. – Взаимное расположение плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Определите знак скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол φ между ними удовлетворяет неравенствам: а) $0^o<\varphi<90^o$; б) $90^o<\varphi<180^o$.

Ответ. а) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

2). Угол между векторами $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен 90°. Чему равен угол между векторами: а) $-\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $-\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$?

Ответ. а), б) 90°.

II. Задание для класса.

1. Найдите угол (φ) между плоскостями, заданными уравнениями $x+y+z+1=0$, $x+y-z-1=0$.

Ответ. $\cos\varphi=\frac{1}{3}$.

2. Точка $H(-2,4,-1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

Ответ. $2x-4y+z+21=0$.

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3,-1,2)$, $N(4,1,-1)$ и $K(2,0,1)$. Найдите координаты вектора нормали этой плоскости.

Решение. Уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$. Вектор нормали $\vec{n}$ (a,b,c). $\vec{n}\perp\overrightarrow{MN}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MN}$ (1,2,-3), $\overrightarrow{MK}$ (-1,1,-1). Таким образом, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN} = a+2b-3c=0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MK}=-a+b-c=0$. Итак, $3b = 4c$.

Подставим координаты точек в уравнение плоскости, получим:

$3a-b+2c+d = 0$;

$4a+b-c+d = 0$;

$2a+c+d=0$, $d = -2a-c$.

После соответствующих преобразований имеем $c = 3a$. Таким образом, $c = 3a$, $b = 4a$, $d = -5a$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $x+4y+3z-5 = 0$ и $\vec{n}$ (1,4,3).

4*. Докажите, что плоскости $x+y+z=1$, $2x+y+3z+1=0$, $x+2z+1=0$ не имеют ни одной общей точки.

Решение. Сложим первое и третье уравнения, получим $2x+y+3z=0$. Тогда система из уравнений $2x+y+3z=0$ и $2x+y+3z+1=0$ не имеет решений.

III. Решение нестандартных задач.

1. Докажите, что для любой системы точек $A_1,\ldots, A_n$ в пространстве существует единственная точка O (центроид) такая, для произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XA_1}+\ldots+\overrightarrow{XA_n} = n\,\overrightarrow{XO}$.

Решение. Зафиксируем какую-нибудь точку X_0. Тогда точка O определяется равенством $\overrightarrow{X_0O} = (\overrightarrow{X_0A_1}+\ldots+\overrightarrow{X_0A_n}): n.$ Для произвольной точки X имеем

$$\overrightarrow{XA_1}+\ldots+\overrightarrow{XA_n} = \overrightarrow{XX_0}+\overrightarrow{X_0A_1}+\ldots+\overrightarrow{XX_0}+\overrightarrow{X_0A_n} =$$
$$n(\overrightarrow{XX_0}+\overrightarrow{X_0O}) = n\,\overrightarrow{XO}.$$

В частности, если $X=O$, то имеет место равенство $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

Покажем, что такая точка O единственна. Действительно, если для точки P выполняется равенство $\overrightarrow{PA_1}+\ldots+\overrightarrow{PA_n} = \vec{0}$, то

$$n\,\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{PA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{PA_n} = \vec{0},$$

следовательно, $O=P$.

8. Докажите, что для произвольной плоскости, проходящей через центроид системы точек $A_1,\ldots, A_n$ пространства, сумма расстояний от этих точек до данной плоскости, взятых со знаком + или -, в зависимости от того, какому полупространству принадлежит соответствующая точка, равна нулю.

Решение. Пусть плоскость □α проходит через центроид O системы точек $A_1,\ldots, A_n$. Через точку O проведем прямую b, перпендикулярную плоскости α и рассмотрим проекции $B_1,\ldots, B_n$ на эту прямую точек $A_1,\ldots, A_n$ соответственно. Так как $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, то $\overrightarrow{OB_1}+\ldots+\overrightarrow{OB_n} = \vec{0}$. Следовательно, сумма расстояний от точек $A_1,\ldots, A_n$ до плоскости α, взятых со знаком + или -, в зависимости от того, какому полупространству принадлежит соответствующая точка, равна нулю.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 122

I. Устная работа.

1). Каким уравнением задается прямая на плоскости? В пространстве?

2). Что означают коэффициенты a, b, c в уравнении прямой в пространстве?

3). Как определить, принадлежит ли данная точка данной плоскости?

4). Можно ли определить взаимное расположение плоскостей в пространстве по их уравнениям?

5). Какие уравнения имеют координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz?

Ответ. Соответственно z=0, y=0, x=0.

6). Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x+y+z-1=0$, $x+y+z+1=0$;

б) $x+y+z-1=0$, $x+y-z-1=0$;

в) $-7x+y+2z=0$, $7x-y-2z-5=0$;

г) $2x+4y+6z-8=0$, $-x-2y-3z+4=0$.

Ответ. В случаях а), в), г) - совпадают.

II. Решение задач.

1. Напишите уравнение плоскости, если она проходит через точку $B(3,-2,2)$ и параллельна плоскости Oyz.

Ответ. $x – 3 = 0$.

2. Найдите координаты точки пересечения плоскости $x+4y-6z–7=0$ с осью ординат.

Ответ. $(0,\frac{7}{4},0)$.

3*. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно координатных плоскостей.

Ответ. $ax+by-cz+d=0$, $ax-by+cz+d=0$, $-ax+by+cz+d=0$.

III. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку H(-3,0,7) и перпендикулярную вектору с координатами (1,-1,3).

2. Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x–y+3z–1=0$ с осью ординат.

3. Напишите уравнение плоскости, если она проходит через точку B(3,-2,2) и перпендикулярна оси Ox.

4. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку M(5,-1,3) и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{MN}$, если N(0,-2,1).

Вариант 2

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку P(5,-1,0) и перпендикулярную вектору с координатами (0,-6,10).

2. Найдите координаты точки пересечения плоскости $x+4y-6z-7=0$ с осью аппликат.

3. Напишите уравнение плоскости, если она проходит через точку C(2,-4,-3) и параллельна плоскости Oxz.

4. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку E и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{EF}$ (4,-5,0), если F(3,-1,6).

Ответы.

Вариант 1. 1. $x-y+3z-18=0$. 2. $(\frac{1}{2},0,0)$. 3. $x-3=0$. 4. $5x+y+2z-30=0$.

Вариант 2. 1. $6y-z+6=0$. 2. $(0,0,-\frac{7}{6})$. 3. $y+4=0$. 4. $3x-y+6z-29=0$.

Задание на дом

1. Выучить: вывод уравнения плоскости в пространстве; знать классификацию взаимного расположения плоскостей с точки зрения их уравнений (п. 54 учебника).

2. Решить задачи.

1). Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат, с вектором нормали $\vec{n}$ (1,2,3).

Ответ. $x+2y+3z=0$.

2). Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку M (1,-2,4) и параллельна координатной плоскости Oxz.

Ответ. $y+2=0$.

3). Приведите примеры перпендикулярных плоскостей.

Ответ. Например, $x+3y-2z+15=0$ и $2x+2y+7z-8=0$.

4). Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями: а) $x+y+z+1=0$, $x+y-z-1=0$; б) $2x+3y+6z-5=0$, $4x+4y+2z-7=0$.

Ответ. а) $\cos\varphi=\frac{1}{3}$; б) $\cos\varphi=\frac{16}{21}$.

5). Докажите, что плоскости $x+y+z=1$, $2x+y+3z+1=0$, $x+2z+1=0$ не имеют ни одной общей точки.

3*. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных прямых; б) начала координат.

Ответ. а) $ax-by-cz+d=0$, $-ax+by-cz+d=0$, $-ax-by+cz+d=0$; б) $–ax-by-cz+d=0$.

Урок 123
Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (-3,-1,2) и $\vec{b}$ (5,-2,7) и угол между ними.

2. При каком значении m векторы $3m\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{c}+2\vec{d}$ перпендикулярны, если $\vec{c}$ (3,0,-6), $\vec{d}$ (1,-2,5)?

3. Запишите уравнение плоскости, если она:

а) перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $A(0,0,-2)$;

б) параллельна плоскости Oxz и проходит через точку $B(1,-3,2)$.

4. Найдите угол между плоскостями $2x+3y+6z+5=0$ и $4x+4y+2z-7=0$.

5*. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}$ (-1,3,-2). В момент времени $t=0$ она имела координаты (4,0,-5). Найдите ее координаты в момент времени $t=3$.

Вариант 2

1. Найдите их скалярное произведение и угол между векторами $\vec{m}$ (2,4,-4) и $\vec{n}$ (-1,3,4).

2. При каком значении t векторы $5\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{a}-3t\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}$ (2,-5,1), $\vec{b}$ (0,3,-2).

3.Запишите уравнение плоскости, если она:

а) перпендикулярна оси Oy и проходит через точку $C(0,4,0)$;

б) параллельна плоскости Oyz и проходит через точку $D(2,1,-3)$.

4. Найдите угол между плоскостями $2x-y+2z-7=0$ и $4x-3y+5=0$.

5*. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t=1$ она имела координаты (2,-3,4), а в момент времени $t=3$ – координаты (-1,4,-2). С какой скоростью движется точка?

п. 55*. Уравнение прямой в пространстве

(См. параграф 7)

п. 56. Аналитическое задание пространственных фигур (уроки 124, 125, 126)

На этих уроках показывается, как с помощью уравнений и неравенств можно задавать фигуры в пространстве. Учащиеся должны знать, как задаются простейшие пространственные фигуры, в том числе многогранники и некоторые фигуры вращения, уметь изображать пространственные фигуры, заданные аналитически.

Урок 124

I. Анализ контрольной работы № 5.

II. Устная работа.

1). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если A (-10,3,12), B (5,7,-11).

Ответ. (15,4,-23).

2. Найдите длину вектора $\vec{q}$ (2,-1,3).

Ответ. $\sqrt{14}$.

3. Найдите координаты суммы векторов из двух предыдущих вопросов.

Ответ. (17,3,-20).

4. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку A(1,-2,-4), с вектором нормали $\vec{n}$ (0,6,-3).

Ответ. $6y$-$3z$=0.

5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку B(2,-1,3), с вектором нормали $\vec{n}$ (4,0,-2).

Ответ. $2x$-z-1=0.

III. Новый материал.

Ранее было показано, что сфера с центром в точке $A_0(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера задается неравенством

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq R^2.$$

Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнем с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением (*), то неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + cz + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того, чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка A (x,y,z), достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве.

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y + z \leq 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 73).

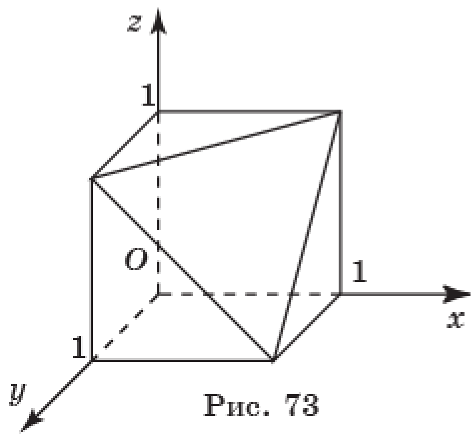


Рис. 73

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, цилиндр с радиусом основания R и высотой h можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 \leq z \leq h \end{cases} \text{(рис. 74).}$$

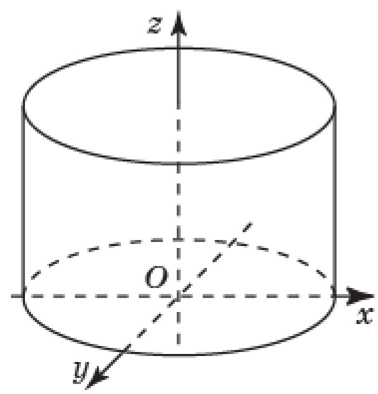


Рис. 74

Параболоид вращения можно задать уравнением

$$z = a(x^2 + y^2).$$

В сечении этого параболоида плоскостью $y=c$ получается парабола $z=a(x^2+c^2)$, а в сечениях плоскостями $z=c$ получаются окружности $x^2+y^2=c/a$.

IV. Закрепление нового материала.

Учащимся предлагается следующая задача:

"Нарисуйте многогранник, задаваемый неравенствами: $0<x<8$, $0<y<8$, $0<z<8$, $x+y+z\leq12$".

Урок 125

I. Устная работа.

1). При каком условии вектор $\vec{n}$ (a,b,c) параллелен оси Ox?

Ответ. $b=c=0$, $a\neq0$.

2). При каком условии плоскость, задаваемая уравнением $ax+by+cz+d=0$, параллельна плоскости Oxy?

Ответ. $a=b=0$, $c\neq0$, $d\neq0$.

3). Два полупространства задаются неравенствами $a_1x+b_1y+c_1z+d_1\geq0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2\geq0$. Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

Ответ. Системой из этих неравенств.

4). Определите, какому полупространству $5x+3y-z-2\geq0$ или $5x+3y-z-2\leq0$ принадлежат точки $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.

Ответ. Точки A и B принадлежат первому полупространству, C - второму.

5). Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 3, \\ 0\leq y\leq 5, \\ 0\leq z\leq 4? \end{cases}$$

Ответ. Прямоугольный параллелепипед.

II. Решение задач.

1. Какая фигура в пространстве задается неравенствами

$$\begin{cases} x^2+z^2\leq R^2, \\ 0\leq y\leq h? \end{cases}$$

Нарисуйте ее.

Ответ. Прямой круговой цилиндр.

2. Нарисуйте многогранник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 3, \\ 0\leq y\leq 5, \\ 0\leq z\leq 4 \\ x+y+z-6\geq 0. \end{cases}$$

Урок 126

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Шар радиуса R с центром в точке $C(x_0,y_0,z_0)$ задается …

2. Неравенство $ax + by + cz + d \le 0$ задает …

3. Неравенства $\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2; \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$ задают в пространстве …

4. Цилиндр, основание которого лежит в плоскости Oyz, с радиусом основания R и высотой h, можно задать …

Вариант 2

1. Сфера радиуса R с центром в точке $C(x_0,y_0,z_0)$ задается …

2. Неравенство $ax + by + cz + d \le 0$ задает …

3. Система неравенств $\begin{cases} 0 \le x \le 9, \\ 0 \le y \le 9, \\ 0 \le z \le 9 \end{cases}$ задает в пространстве …

4. Цилиндр, основание которого лежит в плоскости Oxz, с радиусом основания R и высотой h, можно задать …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. Выясните, какую геометрическую фигуру задает уравнение: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $x^2 = 1$; в) $xyz = 0$.

Ответ. а) Сфера с центром в точке $O(0,0,0)$ и радиусом 1; б) две параллельные плоскости; в) три координатные плоскости.

2. Выясните, какую геометрическую фигуру задает система:

а) $\begin{cases} 3 \le x \le 6, \\ 1 \le y \le 5, \\ 0 \le z \le 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$

Ответ. а) Прямоугольный параллелепипед; б) окружность.

3. Даны точки $A(2,5,12)$, $B(1,0,0)$, $C(-1,-5,4)$ и плоскости α и β, заданные соответственно уравнениями $2x - y + z + 1 = 0$ и $x - 5y - 13z + 1 = 0$. Для каждой из этих плоскостей найдите среди данных точек те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

Ответ. Для α: точки A, B, C; для β: точка B.

4. Дана плоскость $3x - y + 4z + 1 = 0$. Лежат ли по одну и ту же сторону от нее точки: а) $O(0,0,0)$ и $D(2,1,0)$; б) $E(1,2,1)$ и $F(5,15,-1)$?

Ответ. а) Да; б) нет.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Разобрать представленную теорию (п. 56 учебника).

2. Решить задачи.

1). Выясните, какую геометрическую фигуру задает уравнение: а) $x^2+y^2+(z+1)^2=1$; б) $x^2-y^2=0$; в) $x^2=0$.

Ответ. а) Сфера с центром в точке (0,0,-1) и радиусом 1; б) две пересекающиеся плоскости; в) плоскость *Oyz*.

2). Выясните, какую геометрическую фигуру задает система:

$$\text{а)}\begin{cases}0 \le x \le 10,\\ 2 \le y \le 15,\\ -1 \le z \le 4;\end{cases} \text{б)}\begin{cases}3x^2 - y^2 + 5xz = 0,\\ z = 0.\end{cases}$$

Ответ. а) Прямоугольный параллелепипед; б) две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости *Oxy*.

3). Даны точки $E(-14,22,0)$, $F(1,-5,12)$, $G(0,0,5)$ и плоскости α и β, заданные соответственно уравнениями $x-2z+12=0$ и $x+5y+z+25=0$. Для каждой из этих плоскостей найдите среди данных точек те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

Ответ. Для α: точка *F*; для β: точки *E, F, G*.

4). Дана плоскость $3x-y+4z+1=0$. Лежат ли по одну и ту же сторону от нее точки: а) $A(-1,2,-5)$ и $B(-15,1,0)$; б) $K(1,\sqrt{2},5)$ и $L(1,15,-15)$?

Ответ. а) Да; б) нет.

3*. Нарисуйте поверхность, задаваемую уравнением: а) $z=x^2+y^2$ (параболоид вращения); б) $z=x^2-y^2$ (гиперболический параболоид); $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (коническая поверхность).

Уроки 127-136. - Обобщающее повторение

§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО И НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА

Опыт работы школы показывает, что наряду с интересом к вопросам истории и приложений математики, учащиеся старших классов живо интересуются современными проблемами в различных областях знания, в том числе, и математики. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы и научно-популярных телевизионных и радио передач, интернета и т.п. Желание узнать о новых идеях, направлениях развития математики вполне естественно для молодого человека - выпускника школы, необходимо для ориентации в современном мире, правильного представления о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в движении общества вперед.

Возникает важная методическая проблема: как, в каком объеме и на каком уровне знакомить учащихся старших классов с современными проблемами математики. Термин "современная математика" не имеет четкого определения. В своей работе мы отнесли его к современному периоду развития математики. В развитии математики условно выделяют пять основных периодов:

1. Древний - Египет, Вавилон, Греция.
2. Средневековье.
3. Эпоха возрождения - XV-XVI вв.
4. Период классической математики - XVII-XIX вв.
5. Период современной математики – XX - XXI вв.

Вопрос о том, в какой степени школьная математика должна отражать современные достижения науки является одним из трудных вопросов преподавания. Причем они практически не затрагивались и не обсуждались в курсах методики преподавания математики, однако дискутируются в кругах ученых-математиков. Особенно широко эти вопросы обсуждались в середине 60-х годов, когда началась реформа математического образования в Западной Европе, а чуть позже, в начале 70-х годов, и в нашей стране. В 1966 г. в Москве проходил Международный конгресс математиков, на котором выступил известный бельгийский математик Жорж Папи. В своем докладе "Геометрия в современном преподавании математики" он обосновал необходимость введения элементов современной математики в школьный курс ([7], из списка литературы в конце настоящего параграфа).

По исследуемой проблеме заслуживают внимания статьи двух крупных математиков Р. Тома и Ж. А. Дьедонне ([9], [3]). В них авторы обосновывают необходимость введения элементов современной математики в соответствующие школьные курсы.

В начале 70-х годов прошлого века в нашей стране началась реформа математического образования. Ее вдохновителем был академик А. Н. Колмогоров. В одной из своих статей, посвященных школьному образованию ([6]), он заметил, что введение общих понятий множества, отображения, группы, упрощает изложение школьной математики. Новое содержание курса математики должно "убедительно показать, что "современная математика" позволяет строить математические модели реальных ситуаций и процессов, изучаемых в применениях, не только не хуже, но логически последовательнее и проще, чем традиционная". Свои идеи Колмогоров воплотил в школьных учебниках: Геометрия 6-8.- М.;1982; Алгебра и начала анализа" /10-11 кл.: Под ред. А. Н. Колмогорова.

В работе Б. В. Гнеденко "Математика и математическое образование в современном мире" ([2]), освещены различные аспекты математического образования, в частности то, как современная математика должна быть отражена в ее преподавании в школе. Прежде всего, современность, по мнению автора, выражается в умении установить связи между традиционным содержанием школьной математики - достаточно формальным и абстрактным, и современными проблемами техники и открытиями науки. При этом знание современных направлений математики должно обогащать курс и при этом помогать ребятам решать традиционные классические задачи, которые, по-прежнему, должны составлять обязательное ядро математического образования.

Еще одна работа, на которой мы остановимся, статья В. Г. Болтянского "Теория познания и проблемы школьного математического образования"([1]). В ней автор четко говорит о своем отношении к структуре школьных программ по математике, а именно: основное содержание школьного курса должны составлять понятия и факты прошлых исторических периодов, они "откристаллизованы в процессе исторического развития науки и очищены от второстепенных деталей". Именно поэтому фактам, относящимся к современному историческому периоду, сырым и не устоявшимся, не место в школьном учебнике. Но, с другой стороны, некоторые понятия современной математики, современная символика, изложение, новые методы решения задач обязательно должны быть включены в школьный курс математики.

Следует сказать, что внедрение "современной математики" в массовую школу во многом не дало ожидаемых результатов. В последние годы наметился даже некоторый отход к прежнему традиционному содержанию математического образования. Нам представляется, что во многом это связано с тем, что школа в то время не была дифференцированной, а введение элементов современной математики, безусловно, требует дифференцированного подхода. В наибольшей степени это можно осуществить в математических классах. Однако и в гуманитарных классах учащихся можно познакомить с некоторыми современными направлениями развития геометрии и крупными учеными геометрами, с основными современными понятиями и их трактовкой, с некоторыми идеями решения математических проблем на научно-популярном уровне. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Изучение поверхностей.

При изучении поверхностей, площадей поверхностей появляется прекрасная возможность, не тратя много лишнего времени, представить учащимся такой современный раздел математики, как топология. По мнению академика А. Д. Александрова, "топология вызывает часто у людей, с ней не знакомых, представление о чем-то чрезвычайно трудном и абстрактном. Однако в ее обосновании лежит, по-существу, описание математическим языком наглядных пространственных представлений. В этом смысле топология есть часть общей геометрии и потому основанные на ней методы должны рассматриваться как геометрические, хотя и абстрактные" (Выпуклые многогранники. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950, с. 9).

В топологии рассматриваются поверхности и их свойства, с простейшими из которых можно познакомить учащихся. Например, со свойством поверхности выпуклых (и некоторых невыпуклых) многогранников, которое известно как теорема Эйлера: В - Р + Г = 2 , где В - число вершин, Р - ребер, Г - граней данного многогранника.

Это сам по себе необычный, неожиданный, красивый математический факт, кроме того, имеющий несколько изящных топологических доказательств, вполне доступных учащимся (и не только математических классов). Например, в одном доказательстве прибегают к такому характерному для топологии приему: поверхность многогранника представляют сделанной из тонкого эластичного материала, вырезают одну грань и оставшуюся поверхность "растягивают" на плоскости. При этом грани и ребра, конечно, деформируются, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера, не изменяется. При другом доказательстве поверхность многогранника "натягивают" на сферу. Тогда на сфере образуется некоторый граф, имеющий одинаковое число вершин и ребер с поверхностью многогранника.

Соотношение Эйлера - пример топологического свойства поверхности выпуклого многогранника, так как топологическими свойствами фигур называются свойства, которые не изменяются при различных деформациях, исключающих склеивания и разрывы. Именно поэтому историки математики назвали теорему Эйлера, доказанную ученым в 1752 году, первой теоремой топологии. Заметим, что термин "топология" появился позже, в 1847 году, в произведении "Предварительные исследования по топологии" геттингенского математика и физика Иоганна Бенедикта Листинга (1808-1882). Этот термин, ныне общепринятый, применялся до 20-х годов нашего века, довольно, редко.

Помимо поверхностей выпуклых многогранников, цилиндра, конуса, шара, мы знакомим учащихся с новыми поверхностями, которые можно изготовить из листа бумаги. У бумаги, конечно, есть нетопологическое свойство, ее нельзя растягивать. Зато в отличие, например, от сферы, у которой нет краев, лист бумаги (как и всякий многоугольник) ограничен своими краями. Какие же поверхности можно изготовить из листа бумаги? Очевидно, что мы не сможем склеить из бумаги сферу, однако можем сделать цилиндр. Для этого следует просто соединить края куска бумаги прямоугольной формы. Если бы цилиндр был более длинным и гибким, то, соединив его концы, мы получили бы тор (бублик, автомобильную камеру, рисунок 75.

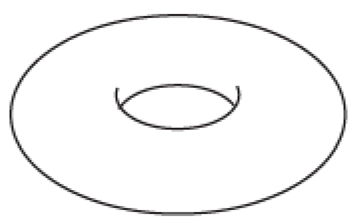


Рис. 75

В действительности, из-за ограниченной гибкости бумаги, нам удастся получить только слегка деформированный тор. Очень важный момент для восприятия учащихся - мысленное конструирование топологического объекта.

Теперь обратимся к самой, пожалуй, необычной и интересной поверхности - листу Мебиуса (см. параграф 7). Сначала предложим учащимся мысленно воспроизвести ее из листа бумаги, что будет хорошим упражнением для развития воображения и пространственных представлений, а потом изготовить ее из листа бумаги. Что получится, если в прямоугольнике склеить, не как в случае цилиндра противоположные края, а противоположные вершины, предварительно перевернув один конец на 180°? Размеры прямоугольного листа лучше взять приблизительно 30х3 (см). В результате получается перекрученный цилиндр, названный листом (иногда называют лентой или даже поясом) Мебиуса (рис. 76), в честь одного из первооткрывателей этой удивительной поверхности немецкого математика Августа Фердинанда Мебиуса (1790-1869).

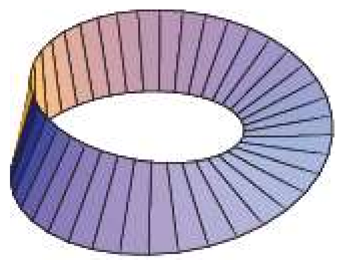


Рис. 76

Эта поверхность обладает замечательным свойством - она односторонняя. В этом легко убедиться, если начать закрашивать лист с любого места, постепенно вся поверхность окажется закрашенной. С листом Мебиуса занятно проделывать различные опыты, которые являются прекрасным упражнением для развития пространственных представлений учащихся. Например, предложить учащимся представить себе, что получится, если разрезать лист Мебиуса по его средней линии. После разрезания лист не разваливается на два куска, как в случае цилиндра, а разворачивается в длинную перекрученную ленту. Интересно продолжить эксперимент, и предложить учащимся разрезать лист Мебиуса на три равные части (получится два перекрученных кольца).

Итак, с помощью листа бумаги учащиеся знакомятся с четырьмя поверхностями. Перечислим их еще раз и укажем число сторон, краев и характер соединения при конструировании:

плоскость - соединения отсутствуют, две стороны, 4 края;

цилиндр - соединена одна пара краев, две стороны, два края;

тор - соединены обе пары краев, две стороны;

лист Мебиуса - одна пара краев, соединена с перекручиванием, одна сторона, один край.

Далее предлагаем учащимся такую комбинацию соединений: обе пары краев соединены, причем одна из них предварительно перекручена. Конечно, фактически реализовать такую комбинацию не удастся, но тополога это не остановит. В топологии как раз изучаются логические возможности таких комбинаций, дается их классификация. В данном случае представленная комбинация известна как "бутылка Клейна" (рис. 77), названная так по имени выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849-1925).

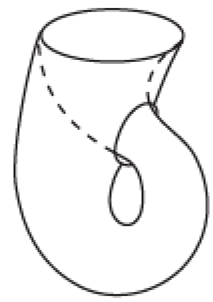


Рис. 77

Отметим, что с некоторыми поверхностями и их свойствами можно познакомить и учащихся гуманитарных классов. Так, например, нами при изучении стереометрии в гуманитарных классах рассматривались такие поверхности как тор, лист Мебиуса, демонстрировались и изготавливались их модели. Учащиеся знакомились с жизнью и творчеством Л. Эйлера, рассматривалось и соотношение Эйлера для числа вершин, ребер и граней многогранника. Проведенные занятия показали доступность этого материала для учащихся гуманитарных классов, их интерес к данным вопросам.

Пример 3. Проблема 4-х красок.

Этот пример касается проблем математики, которые решаются в настоящее время и вполне доступны в своих формулировках для учащихся старших классов. С проблемой 4-х красок можно познакомить учащихся в конце 11-го класса при обобщающем повторении курса, а также при изучении темы "Многогранники" после рассмотрения призм и пирамид, когда начинаются правильные многогранники. Она заключается в следующем: необходимо раскрасить карту (одна из карт изображена на рисунке 78) так, чтобы страны на ней окрашивались в разные цвета.

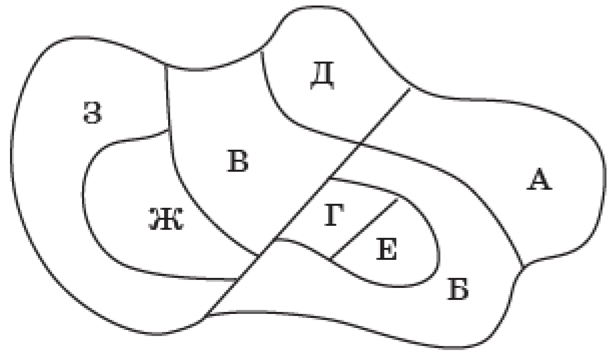


Рис. 78

Однако в целях экономии количества красок разрешается непограничные страны (например, на рисунке 78 это страны А и В, Б и Д, Г и Ж, Е и З) окрашивать одним цветом, а пограничные страны обязательно окрашиваются в разные цвета. Спрашивается, какое минимальное количество красок нужно взять, чтобы можно было раскрасить любую карту на плоскости? Гипотеза состояла в том, что достаточно четырех красок, чтобы раскрасить любую карту на плоскости.

Впервые эта проблема была сформулирована в 1852 году лондонским студентом Гутри, который обнаружил, что для различия графств на карте Англии достаточно четырех красок, и выдвинул гипотезу о том, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты. Спустя сорок лет, английский математик Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Постепенно проблема 4-х красок приобретала все больший интерес. В 1968 году Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время решение этой проблемы базируется на применении компьютеров и связано с выполнением огромного количества вычислений. Первое машинное решение было получено в 1976 году американскими учеными К.Аннелем и В.Хакеном. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждой из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: "НЕТ". Это позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок. Однако, так как нельзя гарантировать, что все типы карт определены и просмотрены, нельзя считать полученное решение окончательным. Так что проблема четырех красок, которая более 100 лет будоражит умы математиков, остается пока открытой.

После рассмотрения истории проблемы учащимся предлагается несколько задач, в которых раскрывается поиск ее решения.

1). Какое минимальное количество красок нужно взять, чтобы раскрасить карты, представленные на рисунке 79?

Решение. Можно представить, что на рисунке 79, а изображен остров. Для окраски нужно только три цвета (они названы a, b, c) - две страны на острове и море вокруг него.

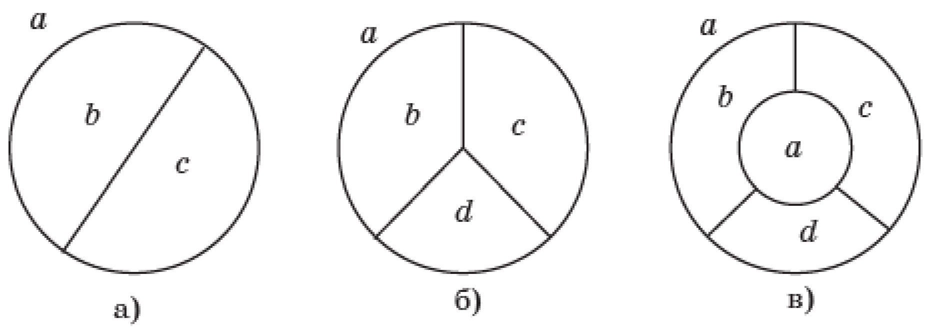


Рис. 79

На рисунке 79, б показана карта, которая требует четырех красок (a,b,c,d), ибо все три страны примыкают к морю, а потому ни одна из них не может быть окрашена в тот же цвет, что и море. Кроме этого, каждая из них соприкасается с двумя другими, т.е. они должны все получить разные цвета.

Карта на рисунке 79, в тоже требует четырех цветов, поскольку центральная страна может быть окрашена в тот же цвет, что и море вокруг острова.

2). На рисунке 80 изображены две карты. Попробуйте раскрасить их. Какое минимальное число цветов для этого потребуется?

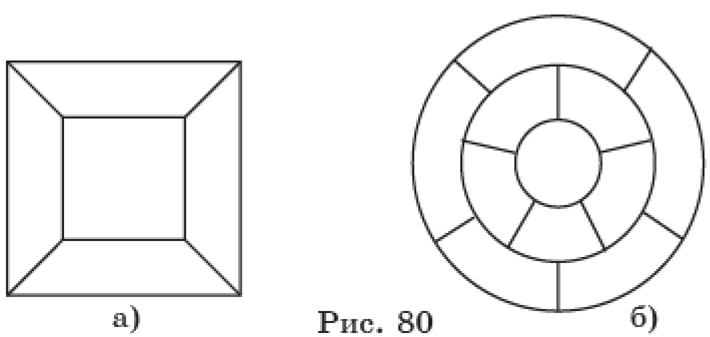


Рис. 80

Ответ: а) 3; б) 4.

3). Сколько цветов нужно взять, чтобы раскрасить всевозможные карты на плоскости, образованные прямыми?

Для решения поставленной задачи мы применяем математическую индукцию (для учащихся это хороший пример использования метода математической индукции в геометрии), а именно:

Рассматриваем карту, образованную одной прямой, которая делит плоскость на две области (рис. 81, а).

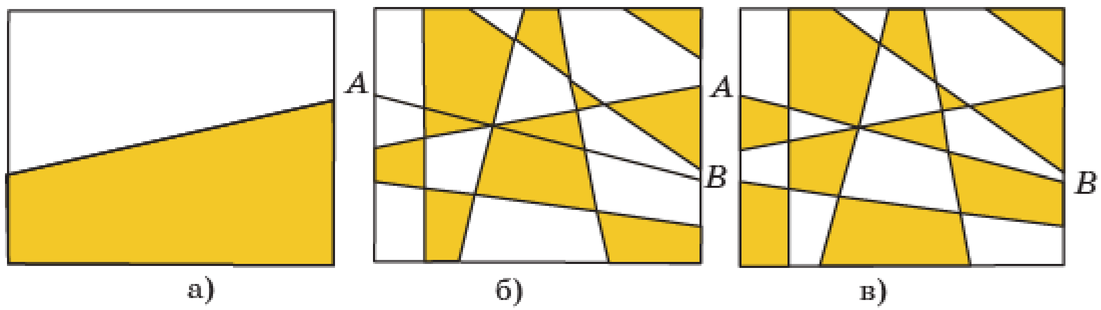


Рис. 81

Ясно, что такую карту можно раскрасить в два цвета.

Пусть теперь карту, которая образована n прямыми, можно раскрасить в два цвета. Проведем еще одну (n+1) прямую на рисунке 181, б она обозначена AB).

Новая прямая разделила плоскость на две карты. Каждая из них в отдельности раскрашена правильно - в два цвета, но к новой прямой

- границе - примыкают пары областей, раскрашенных в один и тот же цвет (рис. 81, б). Для того, чтобы восстановить раскраску всей карты в целом, нужно перекрасить одну из карт (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный (рис. 81, в). Получим, очевидно, всю карту, раскрашенную правильно в два цвета.

4). Сколько красок должен взять художник, чтобы раскрасить абстрактную карту, представленную на рисунке 82, а?

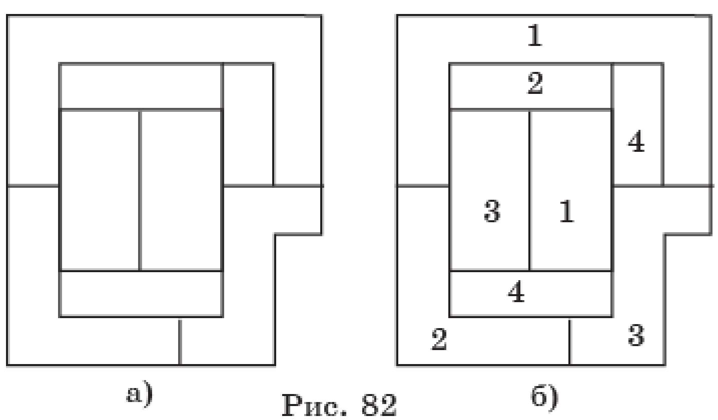


Рис. 82

Ответ. 4 (на рисунке 82, б они обозначены числами 1,2,3,4).

5)* Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок?

Решение. Если у нас всего одна перегородка, т.е. n=1, то для окраски такой карты нужно две краски. Если n=2, то для окраски нужны три краски. Если n=3, для окраски нужно взять четыре краски. При n=4 потребуется опять только три краски и т. д. Таким образом, при n>1, если n=2k (k=1,2...), нужно три краски, так как, имея четное число перегородок, в кольце получится четное число областей, которые окрашиваются в два цвета (через одну в одинаковый цвет), а в третий цвет окрашивается внутренний круг. Если же n=2k+1 (k=1,2...), то для окраски нужно взять четыре краски. Три для окрашивания нечетного числа областей в кольце и четвертую - для окрашивания внутреннего круга.

Для учащихся, заинтересовавшихся этими проблемами, можно предложить доказательство теоремы: "Любую карту на плоскости можно окрасить пятью цветами".

В заключение приведем систему индивидуальных заданий для учащихся по журналу "Квант" при изучении всего курса стереометрии. Информацию представим в виде следующей таблицы:

Таблица 5.

Тема	Тема урока	Индивидуальное задание	Год	№	*С.*
Декартовы координаты, и векторы в пространстве	Введение декартовых координат.	Дорофеева А.В. Рене Декарт и его "Геометрия."	1987	9	15
		Котова А. Жизнь Декарта	1996	3	2
	Преобразования фигур в пространстве.	Шувалов Э. Координатный метод.	1977	11	82
		Повороты и пересечения многогранников.	1977	11	44
	Векторы в пространстве.	Чехлов В. Эти "коварные" векторы.	1980	12	40
		Ивлев Б.М. Векторы в геометрических задачах.	1985	10	21
		Соловьев Ю.П., Сосинский А.Б. Геометрия скользящих векторов.	1985	8	9

Уравне- ние пло- скости	Уравнение плоскости. Повторение.	Назаретов А. Плоскость в пространстве. Беве Л. Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета.	1982 1977	6 1	38 60
Тела вращения	Цилиндр. Конус. Сфера и шар. О понятии тела и его поверхности.	Бронштейн И.Н. Эллипс. Бронштейн И.Н. Гипербола. Бронштейн И.Н. Парабола. Сфера и шар (калейдоскоп Кванта). Штернберг Л.Ф. Многофигурная стереометрическая задача. Либерзон М.Р. Стереометрические задачи с шарами. Стюарт Я. Топология. Таллер А. Сюрпризы листа Мебиуса. Фукс Д. Лента Мебиуса (Вариации на старую тему). Лист Мебиуса (калейдоскоп Кванта). Савин А. Тор.	1975 1975 1975 1991 1983 1988 1992 1978 1990 1991 1992	3 4 9 2 2 7 6 1 11	6 0 9 3 4 8 1 0 0

Объемы Тел	Понятие объема. Объемы призм и пирамид. Объем шара.	Болтянский В.Г. О понятиях площади и объема. Третья проблема Гильберта. Лурье С. Математический эпос Кавальери. Терешин Д. Обращение принципа Кавальери. Савин А. Объем Гольцева Р. Заполнение пространства. Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников. Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов. Мамикон М. Объем шара.	1977 1977 1994 1994 1993 1976 1986 1979 1977	1 /2	1 3 0 5 0
Площади поверхностей	Понятие площади поверхности.	Понарин Я. Вычисление площадей. Суконник Я., Горнштейн П. Задачи на площади и двугранные углы.	1976 1977	7 12	25 48

Кроме журнала "Квант" при работе с учащимися, при подготовке индивидуальных заданий использовалась научно-популярная литература из следующих известных серий: 1). Библиотечка математического кружка. 2). Библиотечка физико-математической школы. 3). Популярные лекции по математике. 4). Мир знаний. 5). Библиотечка "Квант".

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

п. 37*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс (два урока)

Целью данных уроков является знакомство учащихся с простейшими сечениями цилиндра. Дается способ получения синусоиды, используя сечения цилиндра.

Урок 1

I. Устная работа.

1). Как образуются цилиндр, конус, усеченный конус, шар?

2). Что представляют из себя боковые поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса?

3). Какая фигура называется параболоидом вращения? Гиперболоидом вращения? Эллипсоидом вращения?

4). Верно ли утверждение, что прямая содержит образующую цилиндра, если она имеет с его боковой поверхностью: а) 1 общую точку; б) 2 общие точки; в) 3 общие точки?

Ответ. а), б) Нет; в) да.

5). Верно ли утверждение, что прямая содержит образующую конуса, если она имеет с его боковой поверхностью: а) 1 общую точку; б) 2 общие точки; в) 3 общие точки?

Ответ. а) Нет; б) да, если одна из данных точек является вершиной конуса, нет в противном случае; в) да.

6). При каком условии в сечении прямой призмы получается многоугольник, равный ее основаниям?

Ответ. Секущая плоскость перпендикулярна ребру призмы или параллельна ее основаниям.

7). При каком условии в сечении пирамиды получается многоугольник, подобный ее основанию?

Ответ. Секущая плоскость параллельна основанию пирамиды.

8). Как вы думаете, какая фигура получится в сечении цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям? Тот же вопрос для конуса.

Ответ. И и в том, и в другом случае получится круг. В случае цилиндра сечение будет равно основаниям цилиндра.

II. Новый материал. - Сечения цилиндра плоскостью.

Вопрос.

- Какой фигурой может являться сечение цилиндра плоскостью?

- Ответ. 1. В сечении цилиндра плоскостями, параллельными его основаниям, получаются равные круги.

2. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (осевое сечение) дает прямоугольник, две стороны которого служат образующими цилиндра, а две другие - диаметрами его оснований.

3. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, дает прямоугольник, две стороны которого служат образующими цилиндра, а две другие - равными между собой хордами окружностей основания.

4. Если плоскость сечения не параллельна основаниям цилиндра, то в сечении получится эллипс.

Одним из основных свойств эллипса является следующее *фокальное свойство* (фокальное свойство эллипса): "Внутри эллипса существуют такие точки F_1 и F_2, называемые фокусами эллипса, что сумма расстояний от любой точки A эллипса до этих точек есть величина постоянная".

Доказательство. Пусть эллипс получен в результате сечения цилиндрической поверхности плоскостью α. Впишем в эту поверхность две сферы, касающиеся плоскости α в некоторых точках F_1, F_2 и цилиндрической поверхности по окружностям C_1, C_2 (рис. 83).

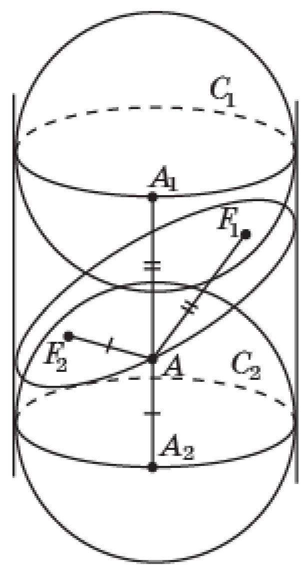


Рис. 83

Пусть A – произвольная точка эллипса. Проведем через нее образующую и обозначим через A_1, A_2 точки пересечения этой образующей с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая A_1A_2 является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 есть расстояние между плоскостями окружностей C_1, C_2.

Поэтому оно не зависит от выбора точки A эллипса, т.е. является постоянной величиной.

Фокальное свойство эллипса позволяет рисовать эллипс на бумаге. Для этого к двум точкам F_1, F_2 листа бумаги прикрепляют кнопками или булавками концы нити. Затем, натягивая нить карандашом, проводят им линию, которая и будет представлять собой эллипс.

Отрезок, соединяющий точки эллипса и проходящий через фокусы эллипса, называется *большой осью* эллипса. Половина этого отрезка называется *большой полуосью*.

Отрезок, соединяющий точки эллипса, проходящий через середину отрезка F_1F_2 и перпендикулярный ему, называется *малой осью* эллипса. Половина этого отрезка называется *малой полуосью*.

Рассмотрим последний случай более подробно, а именно, связь этого сечения с тригонометрическими функциями.

В известной книге Штейнгауза Г. "Математический калейдоскоп" (М.: Наука, 1981 /Библиотечка Квант, выпуск 8) читателю предлагают следующий способ образования синусоиды: если обернуть свечу несколько раз листом бумаги, перерезать свечу наклонно острым ножом или бритвой, затем разнять обе половинки свечи и, наконец, развернуть бумагу, то получится кривая, которая называется синусоидой. Возникает вопрос: "Почему же получившаяся по краю бумаги кривая действительно синусоида?" Этот вопрос - прекрасная проблемная задача, для решения которой потребуются знания как из курса алгебры, так и из курса геометрии.

Решение. Прежде всего представленную практическую ситуацию переводим на язык математики, т.е. строим математическую модель. Для этого возьмем лист бумаги, имеющего форму прямоугольника, и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 84).

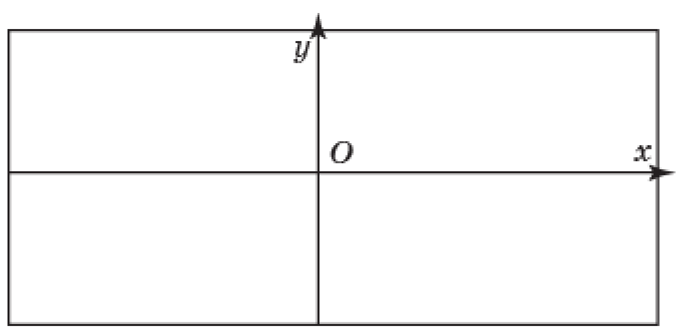


Рис. 84

Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 85).

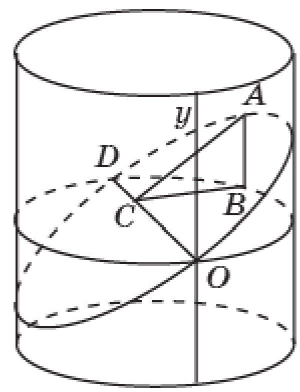


Рис. 85

Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 45°. В этом случае сечением будет эллипс.

Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернется в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого, из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC=90^\circ$, $\angle ACB=45^\circ$. Следовательно, $AB=BC$. Заметим, что $BC=\sin x$, где x - длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку 86 и вспомнить определение синуса.

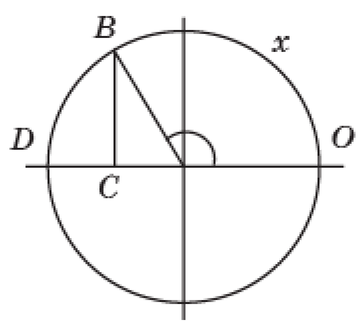


Рис. 86

Таким образом, $AB=\sin x$, где $x=OB$, т.е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$ (рис. 87).

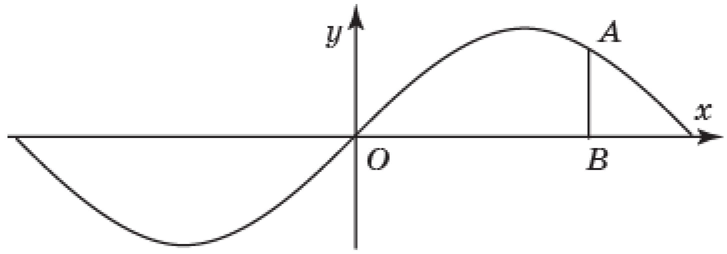


Рис. 87

III. Закрепление нового материала.

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

Ответ. 5 м.

2. Высота цилиндра 6 см; радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

Ответ. Площадь сечения равна 36 см^2.

3. Выясните, какие кривые получатся, если сечение цилиндра плоскостью проводить не под углом 45^o, а под другими углами φ?

Решение. При этом будут получаться кривые, для которых $AB=k\cdot\mathrm{tg}\ x$, где $k=\mathrm{tg}\ \varphi$. Это следует из прямоугольного треугольника ABC (рис. 222), в котором теперь угол ABC равен φ и $AB = \mathrm{tg}\ \varphi \cdot BC$. Причем, если $0^0 < \varphi < 45^o$, то $0<\mathrm{tg}\ \varphi <1$ и имеем сжатие $\sin x$ по оси Oy. Например, при $\varphi = 30^o$, $\mathrm{tg}\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $AB=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x \approx 0{,}587\sin x$. Если $45^o < \varphi < 90^o$, то $\mathrm{tg}\ \varphi > 1$ и имеем растяжение $\sin x$ по оси Oy. Например, если $\varphi = 60^o$, $\mathrm{tg}\ \varphi = \sqrt{3}$ и $AB = \sqrt{3}\sin x \approx 1{,}77\sin x$.

3). Определите, какой формулой задается синусоида, если исходный прямоугольник свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произвести с этим цилиндром аналогичные операции.

Решение. В результате также получится синусоида, но задаваемая формулой $y=a\cdot\sin\frac{x}{a}$. График этой кривой подобен графику $y=\sin x$ и получается из него сжатием или растяжением в a раз в направлении осей Ox и Oy.

Урок 2

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Цилиндрической поверхностью называется …
2. Фокусами эллипса называются …
3. Малой осью эллипса называется …
4. Эллипс можно получить следующим образом …
5. Большой полуосью эллипса называется …

Вариант 2

1. Параллельной проекцией окружности является …
2. Эллипс имеет … фокусов.
3. Большой осью эллипса называется …
4. Фокальное свойство эллипса заключается в том, что …
5. Малой полуосью эллипса называется …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. Изобразите цилиндр и эллипс, являющийся пересечением боковой поверхности цилиндра плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 45^o.

2. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью, образующей с осью цилиндра угол 30^o. Найдите большую ось эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен R.

3. Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра и образует с плоскостью основания угол 30^o. Найдите расстояние между фокусами эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен 3 см.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Знать различные сечения цилиндра плоскостью; решение задачи о связи сечений цилиндра и тригонометрических функций; выучить теорему о фокальном свойстве эллипса (п. 37* учебника).

2. Решить задачи.

1). Изобразите цилиндр и эллипс, являющийся пересечением боковой поверхности цилиндра плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 60^o.

2). Под каким углом к плоскости основания цилиндра нужно провести плоскость, чтобы в сечении боковой поверхности получить эллипс, у которого большая ось в два раза больше малой?

Ответ. 60^{o}.

3). Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра и образует с плоскостью основания угол 45^{0}. Найдите расстояние между фокусами эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен 2 см.

Ответ. 4 см.

3*. Индивидуальное задание – Цилиндр и синусоида (Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. - М.: Наука, 1981 /Библиотечка Квант, выпуск 8).

п. 39*. Конические сечения (два урока)

Цель – рассмотреть известные учащимся кривые – параболу, эллипс и гиперболу, как возможные случаи сечения конической поверхности плоскостью.

Урок 1

I. Устная работа.

1). Определите параболу через геометрическое место точек (ГМТ).

Ответ. Пусть на плоскости заданы прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от прямой d и точки F.

2). Что называется директрисой и фокусом параболы?

Ответ. Соответственно прямая d и точка F из предыдущего вопроса.

3). Какое ГМТ является эллипсом?

Ответ. Эллипс - геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная.

4). Что называется фокусами эллипса?

Ответ. Точки F_1 и F_2 из предыдущего вопроса.

5). Чему равна сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов?

Ответ. Длине большой оси эллипса.

6). Чему равно расстояние от каждого конца малой оси эллипса до каждого фокуса?

Ответ. Половине длины большой оси.

7). Какое ГМТ называется гиперболой?

Ответ. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 равен фиксированному положительному числу.

8). Как называются точки F_1 и F_2 из предыдущей задачи?

Ответ. Фокусами.

II. Новый материал.

Для данного конуса рассмотрим коническую поверхность, образованную прямыми, проходящими через вершину конуса и точки окружности основания конуса.

Сечения конической поверхности плоскостью можно рассматривать как центральную проекцию окружности основания конуса на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания и не проходит через вершину конуса, то в сечении конической поверхности получается окружность.

Вопрос.

- Какие возможны еще случаи сечения конической поверхности плоскостью, не проходящей через ее вершину?

После обсуждения ответа на этот вопрос (лучше на моделях) приступаем к исследованию различных случаев сечения конической поверхности плоскостью, которая не проходит через ее вершину.

1. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.

Доказательство. Докажем, что сечение удовлетворяет фокальному свойству эллипса: сумма расстояний от произвольной точки сечения до двух данных точек есть величина постоянная.

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1, F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно (рис. 88).

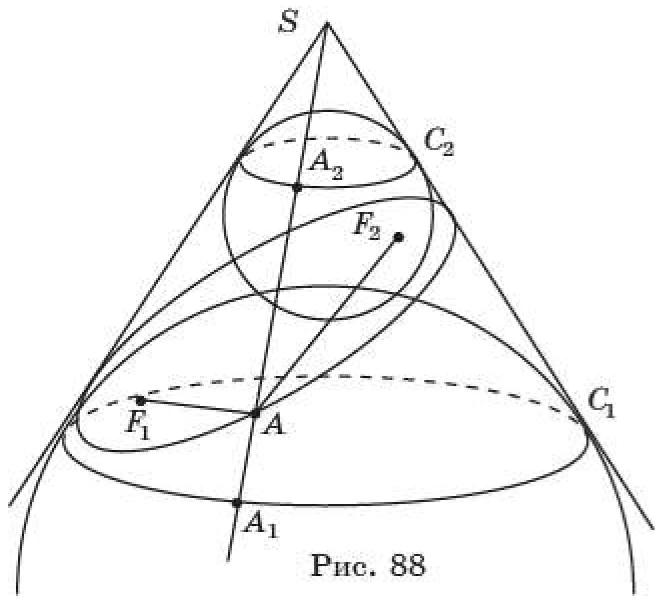


Рис. 88

Пусть A – произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая AS является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна образующей соответствующего усеченного конуса. Поэтому сумма расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной.

2. Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.

Доказательство. Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F и конической поверхности по окружности C, лежащей в плоскости β, перпендикулярной оси. Плоскости α и β образуют между собой угол 90°-φ и пересекаются по некоторой прямой d (рис. 89).

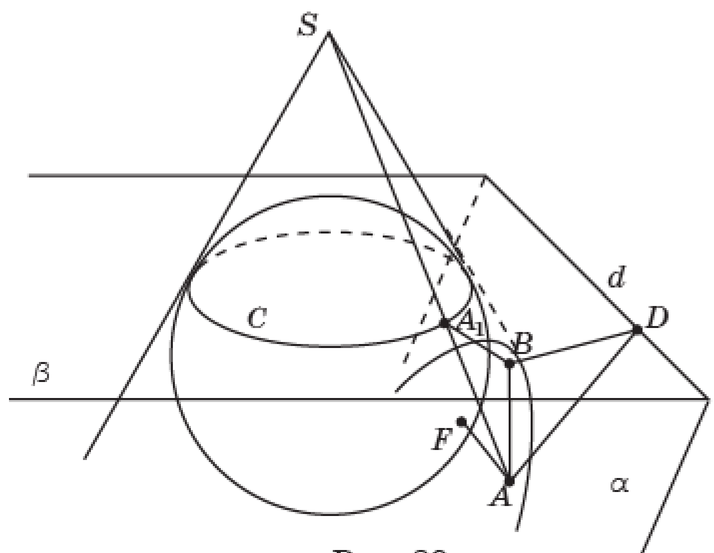


Рис. 89

Пусть A - произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и бозначим через A_1 точку ее пересечения с окружностью C. Заметим, что прямая AS является касательной к сфере. Прямая AF также является касательной. Отрезки AF и AA_1 равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость β и перпендикуляр AD на прямую d. Угол A_1AB равен φ. Угол ADB является углом между плоскостями α и β и поэтому равен 90°-φ. Следовательно, угол BAD равен φ.

Прямоугольные треугольники ABA_1 и ABD равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому $AA_1 = AD$. Окончательно получаем равенство $AF = AD$, которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки F равно расстоянию от этой точки до прямой d, т.е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола.

3. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.

Доказательство. Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 и F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.

Пусть A - точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка F_1 (рис. 90).

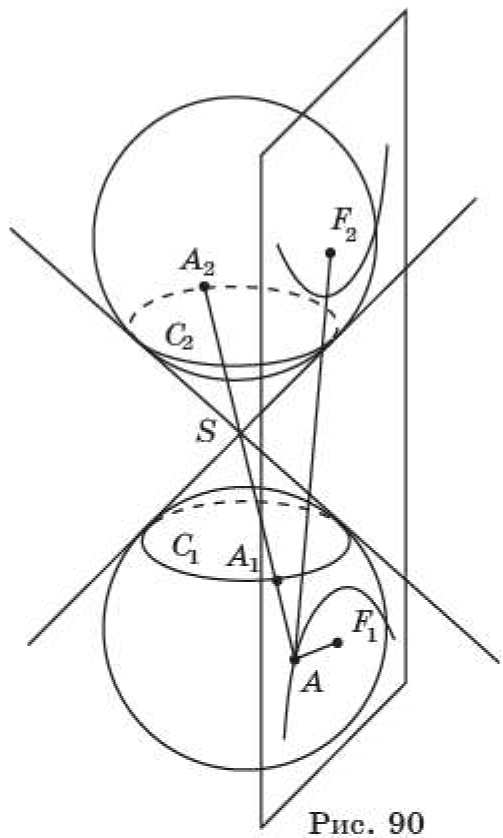


Рис. 90

Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность $AF_2 - AF_1$ расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. Аналогичным образом показывается, что если точка A расположена в той же части конической поверхности, что и точка F_2, то разность $AF_1 - AF_2$ будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола.

III. Закрепеление нового материала.

1). Какую форму принимает поверхность воды в наклоненной конусообразной колбе?

2). Пучок света карманного фонарика имеет форму конуса. Какую форму имеет освещенный фонариком участок ровной поверхности в зависимости от угла наклона фонарика?

3). Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное а) оси; б) образующей?

4). Может ли центральная проекция сферы быть фигурой, ограниченной: а) окружностью; б) эллипсом; в) параболой; г) гиперболой?

5). Через центр основания конуса и середину образующей проведена плоскость. Что представляет собой сечение конуса этой плоскостью?

6). Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, образующей с осью угол: а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0?

Ответы. 1). Эллипса, параболы или гиперболы.

2). Эллипса, параболы или гиперболы.

3). а) гипербола; б) парабола.

4). а), б) в) г) Да.

5). Фигура, ограниченная параболой.

6). Фигура, ограниченная: а) гиперболой; б) параболой; в) эллипсом.

Урок 2

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Коническая поверхность образуется …
2. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший чем угол между образующей и этой осью, то …
3. Фокальное свойство эллипса заключается в том, что …
4. Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости …

Вариант 2

1. Сечения конуса плоскостью можно рассматривать как …
2. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший чем угол между образующей и этой осью, то …
3. Параболой называется геометрическое место точек на плоскости …
4. Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то …

II. Проверка математического диктанта.

III. Индивидуальное домашнее задание – «Историческая справка».

Конические сечения с древних времен привлекали к себе внимание ученых. Так древнегреческий ученый Менехм (IV в. до н. э.) пользовался параболой и гиперболой для решения знаменитой задачи удвоения куба. Исследовали свойства конических сечений Евклид (IV в. до н.э.) и Архимед (III в. до н.э.). Полное и систематическое учение об этих кривых было изложено Аполлонием Пергским (III - II вв. до н.э.) в восьмитомном труде "Конические сечения". Там он впервые показал, как можно получить эти кривые, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Он же ввел термины "эллипс", "парабола" и "гипербола", означающие в переводе с греческого соответственно "недостаток", "приложение" и "избыток". Происхождение этих названий связано с задачей построения прямоугольника с заданным основанием, равновеликого данному квадрату. Переводя с геометрического языка, которым пользовался Аполлоний, на современный алгебраический язык, получаем уравнения

$$y^2 = 2px + lx^2,$$

где эллипсу соответствует отрицательное, гиперболе – положительное, а параболе – равное нулю значение второго члена в правой части. Таким образом, для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y, равна площади прямоугольника со сторонами $2p$ и x. Для эллипса площадь прямоугольника меньше, а для гиперболы - больше площади соответствующего квадрата.

Интерес к коническим сечениям особенно возрос после того, как Г. Галилей (1564-1642) установил, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается по параболе, а И. Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым они описывают эллипсы. Позднее было установлено, что кометы и другие небесные тела движутся по эллипсам, параболам или гиперболам в зависимости от их начальной скорости.

Так, если скорость космического корабля при выходе на орбиту Земли составляет 7,9-11,1 км/с (первая космическая скорость), то он будет двигаться вокруг Земли по эллиптической орбите. Если его скорость составляет 11,2-16,7 км/с (вторая космическая скорость), то он будет двигаться по параболической орбите и покинет зону земного притяжения. Однако он не сможет выйти за пределы Солнечной системы. Если же его скорость больше 16,7 км/с (третья космическая скорость), то он будет двигаться по гиперболической орбите и уйдет за пределы Солнечной системы.

IV. Решение задач.

1. Изобразите конус и плоскость, пересекающую коническую поверхность по эллипсу.

2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90^o. Под каким углом к плоскости основания конуса нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

Ответ. а) $\varphi<45^o$; б) $\varphi = 45^o$; в) $\varphi > 45^o$.

3*. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 60^o. Радиус основания конуса равен R. Через центр основания проведена плоскость под углом 60^o к плоскости основания. Найдите радиус сферы, вписанной в коническую поверхность и касающуюся этой плоскости.

Ответ. $R\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Задание на дом

1. Знать различные случаи сечения конической поверхности плоскостью, в каком случае получаются эллипс, парабола, гипербола; разобрать соответствующие доказательства (п. 39* учебника).

2. Решить задачи.

1). Изобразите конус и плоскость, пересекающую коническую поверхность по параболе.

2). Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90^0. Через точку образующей, отстоящей от вершины конуса на расстояние a, проведена плоскость, перпендикулярная этой образующей. Найдите радиус сферы, вписанной в коническую поверхность, касающуюся этой плоскости.

Ответ. $\frac{a}{2}$.

3) Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 60^o. Под каким углом к плоскости основания нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

Ответ. а) $\varphi < 60^o$; б) $\varphi = 60^o$; в) $\varphi > 60^o$.

3*. Угол между осью конуса и его образующей равен 45^o. Через точку образующей, отстоящую от вершины конуса на расстояние a, проведена плоскость, перпендикулярная этой образующей. Найдите расстояние между фокусом и директрисой параболы, получающейся в сечении конической поверхности этой плоскостью.

Ответ. $2a$.

4**. Индивидуальное задание - Сообщение на тему "Конические сечения". (Глейзер Г.И. История математики в школе. IX-X классы. - М.: Просвещение, 1983, с. 154; Энциклопедический словарь юного математика. - 2-е изд. - М.: Педагогика, 1989, с. 147).

п. 42*. Ориентация поверхности. Лист Мебиуса (1 урок)

Цель – познакомить учащихся с понятием ориентации поверхности и привести пример неориентируемой поверхности – листа (или ленты) Мебиуса; провести лабораторную работу по изготовлению листа Мебиуса.

Урок 1

I. Новый материал.

Пусть в пространстве задана плоскость и поворот этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 91, а мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако, если мы будем смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 91, б).

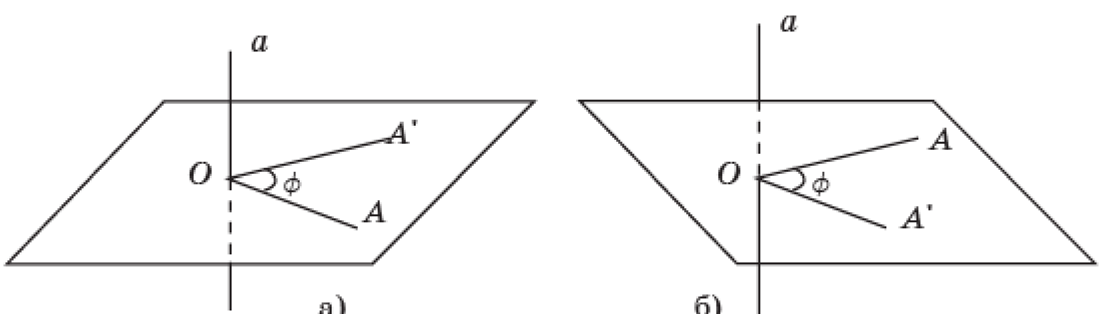


Рис. 91

Таким образом, направление поворота не является свойством, изначально присущим плоскости и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется *ориентацией плоскости*.

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая *листом* или *лентой* Мебиуса, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мебиусом (1790-1868).

II. Лабораторная работа. – Изготовление листа Мебиуса.

Возьмем бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 92).

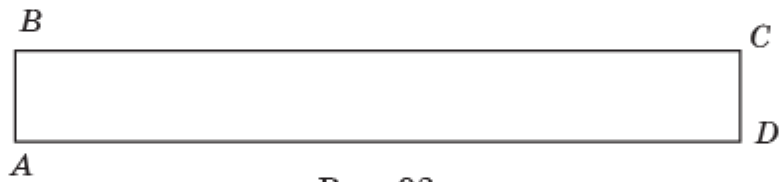


Рис. 92

Если склеить противоположные стороны *AB* и *CD*, совместив точку *A* с точкой *D*, а точку *B* с точкой *C*, то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 93, а). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180° и соединить точку *A* с точкой *C*, точку *B* с точкой *D* (рис. 93, б), то получим лист Мебиуса.

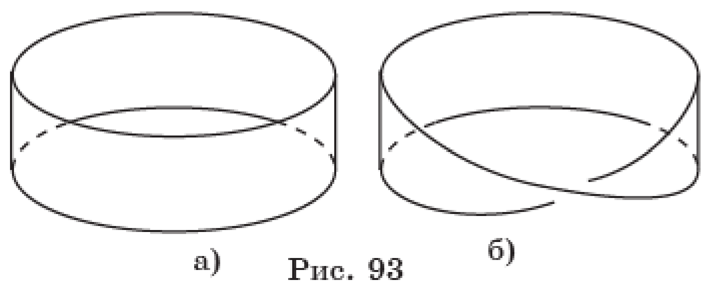


Рис. 93

Выясним несколько любопытных свойств листа Мебиуса опытным путем. (Для этого на каждой парте должны быть клетчатые листы из обычной школьной тетради, ножницы, скрепки).

Вырезаем бумажную полоску - прямоугольник *ABCD*, *AB*=*CD*=4 см, *BC*=*AD*=34 см (длина развернутого листа тетради). Соединяем точку *A* с точкой *D*, точку *B* с точкой *C*, концы соединяем скрепками (можно, конечно, склеивать, но в классе проделывать это долго и неудобно). Получаем боковую поверхность цилиндра.

Вырезаем еще одну такую же бумажную полоску, но теперь соединяем точку *A* с точкой *C*, точку *B* с точкой *D*, перекрутив при этом полоску один раз (учитель проделывает это все вместе с учениками) и закрепив концы скрепками. Получим лист Мебиуса.

Вопрос к учащимся: "Сколько краев имеет первая и вторая поверхности?" Ответ: "Первая имеет два края. Вторая - один. Чтобы убедиться в этом, нужно взять в любом месте края точку и перемещать ее по нему. В результате мы придем в то же самое выбранное место. Таким образом можно убедиться в том, что лист Мебиуса имеет один край.

Кроме этого, он обладает еще одним замечательным и неожиданным свойством, он является примером односторонней поверхности. Действительно, начав закрашивать лист с любого места, ребята убедятся, что постепенно вся поверхность будет закрашена.

"Если на внутреннюю сторону обычного кольца посадить паука, а на наружную - муху и разрешить им ползать как угодно, запретив лишь перелезать через края кольца, то паук не сможет добраться до мухи, не так ли? А если их обоих посадить на лист Мебиуса, то бедная муха будет съедена, если, конечно, паук ползает быстрее!" "Клоп, который будет ползти по этой поверхности, держась все время середины "ленты", вернувшись в исходную точку, окажется в перевернутом положении. Если кто-нибудь вздумает раскрасить "только одну" сторону поверхности мебиусовой ленты, пусть лучше сразу погрузит ее всю в ведро с краской". (Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? - 2-е изд. - М.: Просвещение, 1967, с. 290).

Эти свойства листа Мебиуса не могли оставить равнодушным знаменитого М. Эшера. Художник посвятил ему целую серию своих картин. Для демонстрации репродукций советуем обратиться к книге К. Левитина "Геометрическая рапсодия", первое издание которой снабжено небольшим альбомом работ художника (М.: Знание, 1976, с.5, 10, 18).

Проделаем еще один опыт. Проведем в листе Мебиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: "Что получится, если лист Мебиуса разрезать по средней линии?" Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, получается дважды перекрученная лента, в чем легко убедиться, разрезав лист Мебиуса по средней линии. Пойдем дальше: "Что будет, если полученную ленту опять разрезать по средней линии?" В результате получим две соединенные дважды перекрученные ленты.

Представленные упражнения являются хорошими полезными задачами для развития пространственного воображения учащихся. Кроме того, следует обратить внимание ребят на то обстоятельство, что лист Мебиуса изучается в важном разделе математики – топологии.

Учащимся, которые заинтересуются листом Мебиуса, можно рекомендовать следующие статьи: Таллер А. Сюрпризы листа Мебиуса //Квант.-1978.-№ 6.-С.28; Лист Мебиуса (калейдоскоп Кванта) //Квант.-1991.-№ 11.-С.40.

III. Решение задач.

1. Сколько сторон имеет поверхность: а) пирамиды; б) призмы; в) дважды перекрученной ленты Мебиуса?

2. Изобразите лист Мебиуса.

3. Лист Мебиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b ($a<b$) склеиванием сторон длины a. Какова площадь поверхности листа Мебиуса?

4. Можно ли одностороннюю поверхность склеить из шестиугольника?

Ответы. 1. а), б), в) Две.

3. $2ab$.

4. Да.

IV. Задание на дом.

1. Разобрать теорию п. 42* учебника.

2. Решить задачи.

1). Сколько сторон имеет поверхность: а) конуса; б) цилиндра; в) листа Мебиуса?

2). Изобразите дважды перекрученную ленту Мебиуса.

3). Лист Мебиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b ($a<b$) склеиванием сторон длины a. Какова длина края листа Мебиуса?

4). Можно ли одностороннюю поверхность склеить из восьмиугольника?

Ответы. 1). а), б) Две; в) одну.

3). $2b$.

4). Да.

п. 55*. Уравнение прямой в пространстве (два урока)

Цель – познакомить учащихся с параметрическими уравнениями прямой в пространстве, уметь использовать их при решении задач.

Урок 1

I. Устная работа.

1). Найдите уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

2). Даны точки $A(3,2,5)$, $B(-1,-2,2)$, $C(7,0,-9)$, $D(\frac{3}{4},\frac{5}{6},6)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

3). Дана плоскость $x+2y-3z-1=0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

4). Найдите координаты точек пересечения плоскости $ax+by+cz+d=0$ с осями координат.

Ответы. 1). $z=0$, $y=0$, $x=0$.

2). A, C, D.

3). $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$.

4). $(-\frac{d}{a},0,0)$, $(0,-\frac{d}{b},0)$, $(0,0,-\frac{d}{c})$.

II. Новый материал.

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}$ (a,b,c), параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x,y,z)$, чтобы она принадлежала прямой a, проходящей через точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$, с направляющим вектором $\vec{e}$ (a,b,c).

В этом случае вектор $\overrightarrow{A_0A}$ (x-x_0,y-y_0,z-z_0) должен быть коллинеарен вектору $\vec{e}$ (a,b,c) и, следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т.е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t - действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками A_1(x_1,y_1,z_1), A_2(x_2,y_2,z_2), то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}$ (a,b,c) в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}$ (ka,kb,kc), то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = kat + x_0, \\ y = kbt + y_0, \\ z = kct + z_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка A_0(x_0,y_0,z_0) на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами (x,y,z), удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением и найдем его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2, $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (aT,bT,cT). Разделив вектор перемещения на время T, получим, что вектор скорости имеет координаты (a,b,c). Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости $|\vec{e}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ представляет собой скорость движения точки по прямой.

III. Закрепление нового материала.

1. Какими уравнениями задаются координатные прямые?

Ответ. Ось Ox $\begin{cases} x = t; \\ y = 0; \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oy $\begin{cases} x = 0; \\ y = t; \\ z = 0; \end{cases}$ Ось Oz $\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ z = t. \end{cases}$

2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A(1,-2,3) с направляющим вектором $\vec{e}$ (2,3,-1).

Ответ. $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 2 + 3t; \\ z = 3 - t. \end{cases}$

3. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A_1(-2,1,-3), A_2(5,4,6).

Ответ. $\begin{cases} x = -2 + 7t; \\ y = 1 + 3t; \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$

4. Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных: а) оси Оx; б) оси Oy; в) оси Oz?

Ответ. а) $\begin{cases} x = x_0 + t; \\ y = y_0; \\ z = z_0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = x_0; \\ y = y_0 + t; \\ z = z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x_0; \\ y = y_0; \\ z = z_0 + t. \end{cases}$

Урок 2

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Плоскость в пространстве задается уравнением …

2. Прямая в пространстве может быть задана …

3. Система уравнений $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ задает в пространстве …

4. Параметрические уравнения прямых, параллельных оси *Ox*, имеют вид …

Вариант 2

1. Прямая на плоскости задается уравнением …

2. Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид …

3. Система уравнений $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ задает в пространстве …

4. Параметрические уравнения прямых, параллельных оси *Oz*, имеют вид …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. Найдите значение d, при котором прямая

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + d = 0 \end{cases}$$

пересекает ось *Oz*.

Ответ. $d = 3$.

2. Найдите условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая: а) была параллельна оси *Ox*; б) лежала в плоскости *Oxz*; в) пересекала ось *Oy*.

Ответ. а) $a_1 = a_2 = 0$; б) $a_1:a_2 = c_1:c_2 = d_1:d_2$; в) $b_1:b_2 = d_1:d_2$.

3. Найдите координаты точек пересечения прямой

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

Ответ. $(-1{,}7\frac{1}{2}{,}0)$; (2,0,3); (0,5,1).

4. Запишите параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = -t, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить теорию п. 55* учебника.

2. Решить задачи.

1). Найдите значения b и d, при которых прямая

$$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + by + z + d = 0 \end{cases}$$

пересекает плоскость Oxy.

Ответ. $b = -6$, $d = -27$.

2). Найдите условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая: а) совпадала с осью Oz; б) была параллельна плоскости Oyz; в) проходила через начало координат.

Ответ. а) $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$; б) $b_1{:}b_2 = c_1{:}c_2$; в) $d_1 = d_2 = 0$.

3). Найдите координаты точек пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

с координатными плоскостями.

Ответ. (6,-5,0); ($3\frac{1}{2}$,0,$7\frac{1}{2}$); (0,7,18).

4). Запишите параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = 0, \\ y = -t, \\ z = t. \end{cases}$

3*. Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$\begin{cases} x - 1 = 2t, \\ y - 1 = -t, \\ z - 1 = 3t, \end{cases}$ $\begin{cases} x - 3 = t, \\ y = 8t, \\ z - 4 = 2t. \end{cases}$

Ответ. Пересекаются в точке с координатами (3,0,4) и перпендикулярны.

ОТВЕТЫ
Контрольные работы

11 класс

1

В1. 1. 64π см^2. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{21}}{6}a$. 4. Боковое ребро такой призмы равно 4,8 см; радиус равен 2,4 см.

В2. 1. 17 см. 2. $\frac{\pi D^2}{8}$. 3. 1,5 дм. 4. Высота такой призмы равна 6 см; радиус равен 3 см. 5*. В центре основания пирамиды.

2

В1. 2. 6 см. 3. R, $2R$. 4. а) 3; б) 3. 5*. 14 см.

В2. 2. 25 см. 3. $5\frac{1}{3}$ см. 4. а) 3; б) 3. 5*. 30°.

3

В1. 1. $13\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$ см^3. 2. $48\sqrt{2}$ дм^3. 3. $\frac{a^3}{6}$. 4. 100π см^3. 5*. $\frac{7\pi}{12}a^3\sqrt{3}$.

В2. 1. $21\frac{1}{3}\pi$ см^3. 2. 360 дм^3. 3. 48 см^3. 4. $\frac{Q\sqrt{3Q}}{3}\pi$. 5*. $\frac{19}{12}\pi a^3\sqrt{3}$.

4

В1. 1. 1:4. 2. $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. 3. 20π см^2. 4. $8\pi\sqrt{2}$ дм^2. 5*. 32π см^2.

В2. 1. $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{9}$. 2. $\frac{h^2(1+\sin\varphi)}{\sin\varphi\cdot tg\varphi}$. 3. $\frac{20(\pi+1)}{\pi}$ дм^2. 4. $8\pi\sqrt{5}$ см^2. 5*. 117π см^2.

5

В1. 1. а) 1; б) $\sqrt{14}$; в) $\sqrt{13}$. 2. а) (5,-6,2); б) $(-2\frac{1}{2},3,-1)$; в) (25,-30,10). 3. $\frac{\sqrt{30}}{2}$. 4. $2x-y-z-13=0$. 5*. (1,9,-11).

В2. 1. а) $\sqrt{29}$; б) 3; в) $2\sqrt{5}$. 2. а) (6,2,-1); б) (-3,-1,- $\frac{1}{2}$); в) (12,-4,2). 3. $\cos\varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 4. $10x - 13y + 4z + 60 = 0$. 5*. $\frac{\sqrt{94}}{2}$.

С О Д Е Р Ж А Н И Е