«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период... Все вокруг — геометрия»

Ле Корбюзье

Введение

Успех проводимой в нашей стране модернизации образования во многом зависит от правильного определения роли и места каждого школьного предмета в новых, быстро меняющихся условиях. Принято Фундаментальное ядро содержания общего образования, выделены универсальные учебные действия (личностные, регулятивные, познавательные и коммуникативные). При этом определены приоритетные направления развития школы, такие как гуманизация, гуманитаризация, ориентированные на формирование личности школьников, реализацию их задатков, склонностей, способностей, интересов и других индивидуальных особенностей. В этом большую роль играет школьный курс геометрии. Как известно, именно геометрия знакомит учащихся с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения, формирует необходимые представления об окружающем нас мире. Геометрия дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления. Кроме этого, она способствует приобретению нужных практических навыков в изображении, моделировании, конструировании, измерении. Наконец, геометрия сама по себе очень увлекательный предмет, так как имеет богатую историю, яркие приложения (кристаллография, искусство — живопись, архитектура, строительство и др.); изучает красивые фигуры и т. д.

Современному учителю уже недостаточно быть только специалистом-предметником. Он должен активно участвовать в различных проектах, конкурсах, разрабатывать собственные учебные материалы с применением новых педагогических технологий, повышать свою квалификацию. Совершенствование мастерства учителя во многом зависит от того, в какой мере он будет использовать и сочетать лучшие традиции отечественного образования и новые его достижения.

В пособии выделены три основные главы, определяющие предмет педагогики геометрии, т. е. область, которая занимается обучением геометрии в основной школе (5—9 классы) и на старшей ступени общего образования (10—11 классы).

Первая глава «Исторические очерки по методике преподавания геометрии» посвящена историческим аспектам современных тенденций математического образования. Здесь представлен опыт создания отечественного учебника по геометрии. Освещена идея слитного преподавания планиметрии и стереометрии. Рассмотрена история профильного обучения, а также возникновения и развития элективной формы обучения.

Во второй главе «Психолого-педагогические основы обучения геометрии» даются наиболее важные, с практической точки зрения, сведения об индивидуальных особенностях учащихся. Эти особенности внимания, восприятия, памяти, способностей, мышления учащихся необходимо учитывать при организации учебного процесса. На конкретных примерах показывается, как формируется учебная деятельность школьников, как происходит развитие их основных познавательных процессов. Учет индивидуальных психологических особенностей учеников является важным компонентом современного обучения геометрии.

В третьей главе «Теория обучения геометрии» излагаются методические вопросы. Формулируются цели обучения геометрии, рассматриваются критерии отбора содержания учебного материала, отвечающие новым идеям и тенденциям образования, а также методы и формы обучения. Даются полезные методические рекомендации. Представляемый материал иллюстрируется соответствующими упражнениями. Здесь же предлагается пример оценки качества обучения геометрии.

Книга адресована учителям математики, как начинающим, так и уже имеющим опыт работы в школе.

Глава **I**

ИСТОРИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ ПО МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Становление российского учебника по геометрии

Система светского государственного образования стала складываться в России в XVIII в., во времена правления *Петра I*. В начале своей государственной деятельности, направленной на коренную реорганизацию страны, он столкнулся с отсутствием знающих людей, способных претворить в жизнь новые идеи. Первой реформой, с которой начал царь, была реформа образования. Если проследить дальнейшую историю российского государства, то отчетливо станет видно, что реформы социальных революций, значительных перестроек всегда сопровождались у нас, как правило, реформами образования.

Одной из первых школ нового типа была открытая в 1701 г. в Москве знаменитая школа «*математических и навигацких, т. е. мореходно-хитростных наук*». Помещалась она в Сухаревской башне (снесенной в тридцатых годах двадцатого столетия). Среди предметов математического цикла изучались: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия — плоская и сферическая. В качестве учебника по геометрии использовалась историческая книга «Начала» Евклида [52]. Ее перевод был сделан ***Фарварсоном***. Это англичанин, известный профессор Абердинского университета, который был приглашен Петром I в «навигацкую» школу для преподавания математики и морских наук.

Здесь проявилась характерная тенденция, которая определила обучение геометрии в России приблизительно до конца XVIII в. Во-первых, система преподавания этой науки пришла из Западной Европы, а во-вторых, в качестве учебника фигурировали «Начала» Евклида. Эта книга в то время считалась непревзойденным образцом изложения геометрии, а потому по ней велось обучение в различных школах. Ввиду важности этого произведения и того влияния, которое оно оказало на учебную литературу по геометрии, остановимся на нем более подробно.

Напомним, историки математики считают, что «Начала» были написаны Евклидом около 300 г. до н. э. Они состоят из 13 основных книг. Первые шесть (книги I—VI) посвящены планиметрии; VII—IX — арифметике; X — несоизмеримым отрезкам и XI—XIII — стереометрии. По планиметрии изучаются: учение об отрезках, о сторонах и углах треугольника; построение треугольников, перпендикулярных и параллельных прямых на плоскости; параллелограммы; площади треугольников и параллелограммов; теорема Пифагора. Излагается учение об окружности и круге; о секущих и касательных; об углах, образуемых ими; о вписанных и описанных многоугольниках. Строятся правильные многоугольники: четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и 15-угольник. Дается понятие подобных фигур. По стереометрии рассматриваются начала параллельности и перпендикулярности в пространстве, определяется отношение объемов пирамид и других тел, причем используется метод исчерпывания, дается теория правильных многогранников.

Это выдающееся произведение положило начало *дедуктивному способу изложения*, который заключается в том, что прежде всего дается перечень основных понятий и всех аксиом. Затем формулируются теоремы и для каждой из них приводится доказательство, даются определения всех вновь вводимых понятий. Первая книга начинается с 23 определений.

Среди них, например, такие.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности суть линии.
7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.
8. Угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости, но не расположенных на одной прямой.

...

23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются.

Затем идут постулаты. Требуется следующее.

I. Чтобы из каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую неограниченную прямую можно было продолжать неограниченно.

III. И чтобы из каждой точки, как из центра, можно было произвольным радиусом описать окружность.

IV. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Наконец, аксиомы.

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.

V. И если удвоим равные, то получим равные.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. И совмещающиеся (величины, образы) равны между собой.

VIII. И целое больше части.

IX. И две прямые линии не могут заключить пространства.

Заметим, что у Евклида есть аксиомы и постулаты. Первые — утверждения, «достойные признания», т. е. очевидные, не требующие доказательства. В то время как постулаты — это требования, с которыми можно соглашаться или не соглашаться. Например, Н. И. Лобачевский не согласился с V постулатом Евклида («Через точку, не принадлежащую прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной»), и была открыта неевклидова геометрия.

Исходя из этого, Евклид развил и представил геометрическую теорию, все доказывая логическим путем, без ссылок на наглядность и очевидность. Эта книга оказала огромное и длительное (почти 2000 лет) влияние на науку и культуру цивилизованных народов. По ней изучали математику *Н. Коперник*, *Г. Галилей*, *Р. Декарт*, *И. Ньютон*, *Г. Лейбниц*, *Л. Эйлер*, *М. В. Ломоносов*, *Н. И. Лобачевский* и многие другие выдающиеся ученые. О значении этой книги можно судить, например, по следующему высказыванию известного итальянского математика XVI в. *Д. Кардано*: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ними сравнивать. В них отражается такой свет истины, что, по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

Таким образом, «Начала» определили метод изложения геометрической теории и содержание изучаемых вопросов.

В России в XVIII в. было сделано несколько переводов «Начал» на русский язык. Например, в 1739 г. — с латинского; в 1769 г. — с французского; в 1784 и 1789 гг. — с греческого языка.

Опыт преподавания геометрии по «Началам» Евклида постепенно привел к созданию первых отечественных руководств по геометрии. В развитии школьной учебной литературы прошлого выделим два этапа.

Первый этап. Первый этап охватывает вторую половину XVIII и первую половину XIX в.

Наиболее значительные учебники геометрии этого периода были написаны авторами: *С. Назаровым* (1772), *Д. Аничковым* (1780), *М. Е. Головиным* (1782), *С. Е. Гурьевым* (1798), *Н. И. Лобачевским* (1823), *Ф. И. Буссе* (1830).

Одним из первых был издан учебник *Степана Назарова* «Теоретическая и практическая геометрия» [96]. В нем впервые проявилась яркая отличительная черта российской учебной литературы — включение в содержание практических приложений. В силу важности этой книги для обсуждаемого нами вопроса приведем подробное оглавление учебника.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. О ГЕОМЕТРИИ ВООБЩЕ

Книга первая

Глава 1. О лонгиметрии, или разделении линий, и о начерчении разных геометрических фигур. Глава 2. О планиметрии, или об измерении и исчислении плоскостей. Глава 3. О превращении плоскостей. Глава 4. О сложении, вычитании, умножении и делении плоскостей.

Комментарии. Лонгиметрия — это геометрия на прямой, например, задача о делении отрезка пополам. Исчисление плоскостей означает нахождение площадей плоских фигур, среди которых прямоугольник (называемый прямоугольным параллелограммом), параллелограмм, трапеция, треугольник, правильные многоугольники, круг, эллипс. Под превращением плоскости имеются в виду равносоставленные плоские фигуры. В частности, превратить треугольник в прямоугольник (прямоугольный параллелограмм) или трапецию в треугольник. Сложить плоскости означает, например, начертить пятиугольник, площадь которого равна сумме площадей данного квадрата и данного круга. Вычесть плоскости — построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов. Произведение плоскостей — начертить треугольник, площадь которого была бы в два раза больше площади данного треугольника. Деление плоскостей — разделить данную трапецию на три части равной площади.

Книга вторая. О стиле геометрии вообще

Глава 1. О начерчении иррегулярных и регулярных корпусов, как оные из бумаги вырезать и клеить. Глава 2. Об измерении и исчислении иррегулярных и сферических корпусов, корпусного содержания и поверхностей оных. Глава 3. Об исчислении сторон и корпусного содержания пяти регулярных корпусов, описанных в одном глобусе. Глава 4. О превращении, сложении, вычитании, умножении и делении корпусов.

Комментарии. «Корпус» означает «тело». Автор определяет его: «Корпус, или тело, есть пространство, имеющее в три стороны расширение, т. е. в длину, ширину и высоту». Регулярный корпус — это правильный многогранник. Глобус — шар. Превращение означает построение тела, равного с данным телом объема. Например, превратить цилиндр в конус, который имел бы с цилиндром равные высоты, или превратить цилиндр в четырехугольную призму; треугольную пирамиду превратить в треугольную призму таким образом, чтобы у них были равные базы (основания) и т. п.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Книга первая. О тригонометрии вообще

Глава 1. О сочинении таблицы обыкновенных синусов, тангенсов и секансов. Глава 2. О теоретических предложениях, по которым все тригонометрические задачи в выкладках решаются. Глава 3. Об исчислении прямоугольных треугольников по простым таблицам синусов. Глава 4. Об употреблении логарифмов, свойства и исчисления по оным прямоугольных треугольников. Глава 5. Об исчислении по логарифмам остроугольных, тупоугольных треугольников и разных касающихся к фортификации задач. Глава 6. Об изобретении по логарифмам соответствующих чисел и по оным логарифм, который в таблице не имеется. Глава 7. Об изобретении логарифмов, соответствующих градусов, минут, секунд и прочего.

Книга вторая. О практике геометрии вообще

Глава 1. Об употреблении разных мер, также о кольях, сажени, веревке и цепи. Глава 2. О действиях, которые на поле цепью и кольями решаются. Глава 3. Об астролябии, квадранте, употреблении, сложении и о поправке их. Глава 4. О действиях, которые по астролябии и квадранту производятся. Глава 5. О полуденной линии, компасе и об употреблении оных при землемерии. Глава 6. О вычислении линий и углов крепостного строения. Глава 7. О мензуле и о сложении оной. Глава 8. О действиях, которые по мензуле на поле производятся. Глава 9. О нивелировании или об уравнении земной поверхности, сложении, употреблении и о поправке ватерпаса или уровня. Глава 10. О действиях, которые по уровню производятся. Глава 11. О рефракции (преломлении лучей).

Другим практическим руководством была изданная в 1780 г. книга *Д. Аничкова* «Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества» [5]. В теоретической части она в значительной степени подражает «Началам». Отличительной особенностью является то, что материал разбит не на две части (планиметрию и стереометрию), как у Евклида, а на три: лонгиметрию (измерение линий), планиметрию (измерение поверхностей) и стереометрию (измерение тел).

Из таких же разделов состояло «Краткое руководство к геометрии» *М. Е. Головина* [40]. Это первый российский школьный учебник по геометрии, изданный в 1782 г. по распоряжению специальной комиссии для народных училищ екатерининского времени.

В состав комиссии вошли видные деятели того времени: П. В. Завадовский (заметим, это будущий первый министр просвещения России, назначенный на свой пост в 1802 г.), Ф. И. Эпинус, П. И. Пастухов и Янкович де Мириево (сербский педагог, который прибыл в Россию по приглашению Екатерины II для организации народных училищ). Прежде всего комиссия решила обратить внимание на улучшение качества преподавания за счет совершенствования методов обучения. Основная цель этого заключалась в том, чтобы учитель постоянно владел вниманием всех своих учеников и чтобы учащиеся могли легко понимать и усваивать содержание изучаемых предметов.

М. Е. Головин принял самое активное участие в написании и издании этих учебников. В предисловии к руководству по геометрии он объяснил основные требования к «Новой методе обучения» следующим образом: «Учитель, проходя геометрию по сей книжке, должен прочитывать каждый период: потом изъяснить оный, тотчас спрашивать, как они истолкованное поняли, а не подаваться далее до тех пор, пока большая часть учеников не уразумела хорошо прочитанного. При задачах, доказательства требующих, надлежит истолковать самое предложение, потом приступить к доказательству. Причем должно напоминать ученикам, в каком случае задачу сию в общежитии употреблять можно» [40].

Таким образом, начинает складываться и методика преподавания геометрии. При этом важно подчеркнуть, что внимание уделяется развитию учащихся, причем не только их памяти, а прежде всего мышления, разума посредством изучения геометрии.

Во многом этому способствует рассмотрение практических приложений геометрии. «Сколько знание геометрии, — говорит Головин, — полезно и нужно в общежитии, никто спорить не может. Землемерие, архитектура, гражданская и военная, мореплавание, физика, механика и пр., словом, все полезнейшие для людей науки служат явным тому доказательством. Самые художества и рукоделие немалую пользу от ней заимствовать могут. Так, живописцу поможет она в исправном рисованье, инструментальщику в делании верных орудий, столяру и плотнику в проведении прямых и горизонтальных линий; каменщику в складывании стен; самому даже хлебопашцу сделает пользу при означении меж в случае споров при разделении полей во время посева, при строении овинов, закромов и пр.».

Итак, учебник состоял из трех названных частей. Лонгиметрия содержала 41 задачу, среди которых задачи на деление отрезка пополам, строение перпендикуляра к прямой, о смежных и вертикальных углах и т. п.

В планиметрии предлагались доказательства теорем о сумме углов треугольника, об углах при основании равнобедренного треугольника, о равенстве треугольников, о свойствах касательной и секущей окружности и т. д.

В стереометрии основной материал был связан с построением моделей многогранников и фигур вращения и вычислением объемов и площадей поверхности пространственных фигур.

Еще одной характерной особенностью этого учебника является включение в его содержание очень непростых, нестандартных задач.

В качестве примера приведем следующую задачу: «Разделить треугольник из данной на линии точки на равные части». В учебнике дается указание и чертеж для решения задачи в случае деления на три равные части. В современной терминологии эта задача звучит следующим образом: «Разделить треугольник прямыми, проведенными из данной на одной из его сторон точки, на три равновеликие части».

Решение. Пусть дан $\triangle ABC$ и точка D, принадлежащая стороне AC. Требуется из точки D провести прямые, которые разделили бы треугольник ABC на три равновеликие части.

Разделим AC на три равные части: $AE = EF = FC$ и пусть $D \in EF$. Проведем $EG||DB$ и $FH||DB$. DG и DH будут искомыми прямыми, так как площади фигур AGD, $DGBH$ и DHC равны. Действительно, треугольники ABE, EBF и FBC равновелики (у них равны стороны и соответствующие высоты).

Но $S_{AGD} = S_{ABE}$ ($S_{AGD} = S_{AGE} + S_{EGK} + S_{EKD}$, где $K = BE \cap GD$, $S_{ABE} = S_{AGE} + S_{EGK} + S_{GKB}$, но $S_{EKD} = S_{GKB}$, поскольку $S_{EKD} = S_{EGD}$-S_{EGK} и $S_{GKB} = S_{EGB} - S_{EGK}$, но $S_{EGD} = S_{EGB}$, у треугольников EGD и EGB одна сторона EG и высоты, опущенные соответственно из вершин D и B, равны, так как $EG||DB$).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что равновелики четырехугольник *DGBH* и треугольник *EBF*; треугольники *DHC* и *FBC*.

Другими заметными учебниками рассматриваемого периода были работы *С. Е. Гурьева*. В своем большом труде [44], опубликованном в 1798 г., он изложил свой собственный план построения школьного курса геометрии, отойдя от «Начал» Евклида, которые считал несовершенными с педагогической точки зрения. Главными своими задачами он ставил распределение учебного материала по предметам (в частности, четкое выделение геометрического материала) и изменение порядка его изложения. Из двух способов распределения геометрических вопросов, а именно: а) строго логического, подчиняющегося только дедуктивному построению курса геометрии; б) логически обоснованная систематизация понятий и теорем, которая осуществляется на основе методической целесообразности, Гурьев выбрал второй и в соответствии с этим предложил свой курс геометрии. При этом он утверждал, что строгость и точность не затрудняют и не обременяют ум, в математике нецелесообразно ставить вопрос о предпочтении точности и удобства. «Совсем напротив, чем вывод строже, тем он ко разумению удобен, ибо строгость состоит в приведении всей целости к началам наипростейшим».

Идеи, заложенные в первой книге Гурьева по геометрии, нашли воплощение в следующей его работе [43], написанной в 1804 г. Очень содержательно предисловие к этому произведению, в котором автор излагает свои уже сформировавшиеся методические взгляды. Например, интересно следующее его высказывание по поводу преподавания геометрии: «Система элементарной геометрии может быть двоякой: или соображенной с началами, или соображенной с предметами. Откуда рождается вопрос, какая из сих систем есть полезнейшая и превосходнейшая? Для решения оного надлежит, быть может, самих людей разделить на два рода: на способных изобретать новые истины и не более способных токмо понимать уже изобретенные. Первым полезна система, соображенная с началами, а другая — соображенная с предметами». Другими словами, здесь Гурьев говорит о системе преподавания, отвечающей индивидуальным склонностям и запросам самих учеников. К сожалению, он не смог в полной мере осуществить все начатое и задуманное, прожив короткую жизнь (1764—1813). Однако поднятые им вопросы нашли яркое продолжение в работах его учеников. Например, непосредственный его ученик *А. Н. Ильинский*, преподаватель Петербургского горного корпуса, опубликовал в 1825 г. учебник по геометрии [57]. В предисловии автор подчеркивает взгляды Гурьева на четкое и ясное построение курса геометрии, на то, что учащиеся должны получить впечатление, что геометрия это не случайный набор каких-то фактов и теорем, которые нужно заучить, а это стройная система, где теоремы объединены в определенные группы, имеющие свои названия. «Кто же не пленится сими качествами, — говорит Ильинский, — кто не отнесет их к совершенству учебной книги; кто не согласится, что при разборе истин, разбросанных без порядка, учащийся должен почти в одно и то же время заниматься многими и разнообразными предметами, которые, поступая один за другим в память его, или тут же изглаживаются, или смешиваются один с другим так, что сосредоточить понятие о них весьма трудно».

Далее необходимо отметить «Курс математики» *Т. Ф. Осиповского* [100]. Он состоял из трех томов. I. Частная и общая арифметика (вышел в 1802 г.). II. Геометрия (1801). III. Теория аналитических функций (1820).

Как видим, сначала вышла «Геометрия». Она содержит традиционные для этого периода части: лонгиметрию, планиметрию, штереометрию (стереометрию). Но эта книга имела и нетрадиционные дополнительные статьи из «криволинейной геометрии», по теории кривых, среди которых рассматривались эллипс, парабола, гипербола, циссоида Диоклеса, спираль Архимеда. Таким образом, этот учебник предлагает обязательный учебный материал и дополнительный для тех, кто интересуется геометрией, хочет узнать о ней больше.

Следующим значительным учебным руководством по геометрии этого периода была книга *Н. И. Лобачевского* «Геометрия» [80], написанная им в 1823 г., т. е. до величайшего открытия неевклидовой геометрии. Эта книга предназначалась для тех, кто интересуется геометрией. В ней Лобачевский представлял свой способ изложения геометрии — достаточно строгое и систематическое, соответствующее возрасту учащихся. Планиметрия и стереометрия излагались параллельно, совместно. Здесь впервые в истории была предпринята попытка нарушить школьную последовательность изложения геометрии по Евклиду — от планиметрии к стереометрии. Идея слитного изучения нескольких предметов, в частности, планиметрии и стереометрии, позже была названа фузионизмом (см. параграф 2).

Заметными произведениями рассматриваемого исторического периода стали работы *Ф. И. Буссе* [26]. Особенностями этих произведений является то, что автор отошел от излишней теоретизации и при доказательстве многих теорем предлагал учащимся убедиться в их справедливости на наглядных примерах. Он отказался от традиционного по тем временам деления геометрии на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию. В его учебнике только два раздела: планиметрия и стереометрия. Такое деление геометрии очень понравилось и закрепилось в учебниках последующих поколений.

Таким образом, первый этап становления и развития российского учебника геометрии характеризуется тем, что была:

1) признана нецелесообразность использования «Начал» Евклида в качестве школьного учебника по геометрии;

2) обоснована необходимость строго дедуктивного метода ее изложения;

3) определена структура и последовательность предлагаемого учебного геометрического материала;

4) предложен круг вопросов по методике преподавания геометрии, в частности, сделан серьезный вывод о том, что учебник геометрии не может быть простым сборником научных статей по геометрии, изложение должно быть доступным для понимания учеников и соответствовать их индивидуальным и возрастным особенностям, уровню развития и целям преподавания.

Второй этап. Второй этап развития российского учебника геометрии охватывает период со второй половины XIX в. до 1917 г. Этот период особенно богат учебной литературой. Было издано свыше 60 учебников по геометрии, в том числе таких известных авторов, как *М. Е. Ващенко-Захарченко, М. В. Остроградский, А. Ф. Малинин, А. Н. Глаголев, А. Ю. Давидов, А. П. Киселев*. Формировались традиции российского учебника по элементарной геометрии. Например, в ряде учебников начали появляться сведения по истории геометрии. Одним из первых авторов ввел в свои учебники исторический материал *М. Е. Ващенко-Захарченко*. Ему же принадлежит и отдельная книга [27].

> Эта работа очень важна, так как в ней была систематизирована история геометрии по основным периодам, а именно:
>
> I. Греки. Школы: 1) Ионийская. 2) Пифагорейская. 3) Платоновская. 4) Александрийские (первая и вторая школы). 5) Афинская и византийская школы. II. Римляне. III. Средние века. IV. Арабы.

В этой работе автор подчеркивает, что геометрия, как одна из важнейших областей математики, возникла эмпирически из опытов и наблюдений и первоначально имела чисто практический характер. Возводя различные сооружения, человек мог получать представления о различных геометрических фигурах. Таким образом, возникали понятия о различных треугольниках, четырехугольниках, разных телах, например призме, цилиндре, пирамиде и т. д. Автор специально обращает внимание читателя на тесную связь между геометрией и архитектурой, строительством, астрономией и искусством измерения Земли. Постепенно, накапливая сведения о свойствах геометрических фигур, человек научился обобщать полученные знания. Впоследствии, с течением времени, он находил известные свойства, которые принимал за правила.

Сведения из истории начинают появляться и в других учебниках геометрии, например в работе *А. Мерчинского* [87]. В этой книге уже во введение включены вопросы истории. В частности, очень подробно рассказывается о последней XIII книге «Начал», посвященной правильным многогранникам. Характерной особенностью геометрии Мерчинского является то, что он уделил много внимания геометрии пространства, считая, что геометрия на плоскости — это лишь вспомогательный материал для изучения свойств пространственных фигур. Приведем краткий обзор материала по стереометрии из этого учебника.

Глава I. Прямые и плоскости. § 1. Параллельные прямые. § 2. Прямые, взаимно пересекающиеся. § 3. Параллельные плоскости. § 4. Прямые, параллельные плоскости. § 5. Плоскости, параллельные прямой. § 6. Прямые, пересекающие плоскость. § 7. Параллельные прямые, пересеченные плоскостью. § 8. Прямая, пересеченная параллельными между собой плоскостями. § 9. Перпендикуляр и наклонная к плоскости и обратно.

Глава II. Плоскостные углы. § 1. Двугранные углы. § 2. Свойство двугранных углов, происходящих от пересечения двух плоскостей между собой. § 3. Двугранные углы, образуемые параллельными между собой плоскостями с секущей их плоскостью. § 4. Многогранный угол. § 5. Трехгранный угол.

Глава III. Плоскостные геометрические фигуры. § 1. Понятие о многогранниках. § 2. Призма. § 3. Пирамида. § 4. Правильные многогранники.

Глава IV. Геометрические прикладные числа. § 1. Пропорциональность прямых и углов в пространстве. § 2. Подобные многогранники. § 3. Измерение площади поверхности многогранников. § 4. Измерение объема многогранников.

Глава V. Круговые тела. § 1. Цилиндр. § 2. Конус. § 3. Шар.

Этот учебник содержит богатый материал, рассмотрены многие свойства.

Например, во втором параграфе второй главы представлены следующие свойства.

1. Для всякого двугранного угла его угол наклонения имеет величину постоянную. Углы наклонения равных двугранных углов равны между собой.

2. Двугранные углы, каждый отдельно и вместе взятые, имеют углы наклонения соответственно одноименные. Поэтому свойства двугранных углов те же самые, как и их углов наклонения.

3. Сумма двугранных углов, составленных плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую, есть величина постоянная.

4. Сумма смежных двугранных углов равна двум прямым двугранным углам.

5. Вертикальные двугранные углы равны.

6. Плоскость, проведенная через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

7. Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, опущенной из точки, взятой на другой плоскости, лежит весь в этой плоскости.

8. Плоскость, перпендикулярная к прямой пересечения нескольких плоскостей, перпендикулярна к каждой из них.

9. Через данную точку к двум пересекающимся плоскостям можно провести одну перпендикулярную плоскость.

10. Плоскость, перпендикулярная к прямой, лежащей на другой плоскости, перпендикулярна к этой последней.

11. Через перпендикуляр к плоскости можно провести к этой последней множество перпендикулярных плоскостей.

В этом учебнике дается определение многогранного угла: «Пространство, заключающееся между несколькими пересекающимися плоскостями, прямые пересечения которых сходятся в одной и той же точке, называется многогранным углом». Рассматриваются только выпуклые многогранные углы. Это углы, которые все лежат с одной стороны плоскости, проведенной через каждую из его граней. Аналогично рассматриваются только выпуклые многогранники. Это многогранники, которые лежат все с одной стороны от плоскости каждой своей грани.

Заметим, что плоскостными геометрическими фигурами автор называет многогранники, так как в учебнике дается следующее определение многогранника: «Многогранником называется геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскостями». После общего определения идут частные виды: призма (прямая, правильная, усеченная, наклонная), выделяется параллелепипед (прямой, прямоугольный, куб); пирамида (правильная, усеченная); правильные многогранники (все пять типов выпуклых правильных многогранников).

По мнению автора, метод геометрии состоит из трех частей: наблюдения, проверки и обобщения. Исходя из этого, он старался соответствующим образом изложить предлагаемый материал.

Особенностью учебников данного периода стало стремление авторов при соблюдении требования логической строгости сделать изложение школьного курса геометрии более понятным и доступным для учащихся. С этой целью они включали в содержание задачи практического (на построение, конструктивные, на вычисление) и прикладного (из области строительной, землемерной, морской техники) характера.

Например, в 1844 г. *П. С. Гурьев* (сын С. Е. Гурьева, о котором речь шла выше) составил и издал «Практические упражнения в геометрии» [42]. В предисловии к этой книге, объясняя основные цели и задачи своей работы, он писал: «Цель предлежащей книги состоит в том, чтобы без нарушения общепринятого способа преподавания геометрии дать ученикам возможность чаще возбуждать в себе самодеятельность, пытать свои силы в применении общих законов к частным случаям и, наконец, в преодолении затруднений собственным усиленным напряжением ума находить истинное удовольствие». Эта книга ценна тем, что содержит систему планиметрических задач на построение и вычисление. Причем задачи расположены по степени увеличения их трудности (от легких к трудным).

В связи с этим отметим также работу *М. В. Остроградского* [101]. Известно, что его как научные, так и педагогические произведения отличались оригинальностью расположения учебного материала, строгостью изложения, новизной доказательств теорем и выводов формул, практическими приложениями. Например, в своих школьных учебниках он уделил большое внимание тригонометрии. Причем особое место отвел решению прямоугольных треугольников, которое предваряется определением «тригонометрических линий» как отношений сторон рассматриваемых треугольников (длина гипотенузы принимается за единицу). Затем идет решение косоугольных треугольников, теорема синусов (она доказывается из рассмотрения диаметра окружности, описанной около треугольника). Даются приложения геометрии к инженерной геодезии.

В предисловии («предуведомлении») М. В. Остроградский пишет: «Сочинение это отличается от других руководств по той же науке развитием начал, порядком теорем и способом доказательств. Автор имеет в виду приблизить изложение истин начальной геометрии к способам, употребляемым в других частях математики, а потому разместил предложения в порядке, который ему показался наиболее соответствующим поставленной цели. Однако же он не посмел в первой попытке войти в решительное состязание с изложением, которому Евклид представил образец и которое употребляется более 20 веков. Теперь же только некоторые предложения доказаны способом аналитическим и без подобия фигур, т. е. дан алгебраический характер только некоторым частям геометрического изложения. Что касается до подробностей в объяснении предмета и оснований науки, предложений, на которых она основана и начальных ее истин, то некоторые из этих подробностей, а может быть, и все, могут показаться бесполезными. Автор имел в виду избежать недостатка противного, т. е. неполноты объяснений. Он полагает, что составители курсов начальной геометрии по примеру Евклида сократили этот важный предмет и тем самым могли породить неясность в идеях и неправильные взгляды на начала науки».

Заметим, что современники критиковали Остроградского за то, что он недооценивал, с их точки зрения, роли наглядности при изложении геометрии. Вот как отозвался о его произведении известный российский математик *А. Н. Крылов*: «Учебником для средних школ оно служить не может, но не как учебник, а как обязательное пособие в педагогических техникумах сочинение было бы в высшей степени полезным, ибо это есть «Начальная геометрия» для взрослых, а не для мальчиков и девочек». Остроградский стремился полностью избежать наглядности. Это делалось сознательно, чтобы избежать доказательств, как говорил автор, «заимствованных от показания чувств» [109].

Вместе с тем, наряду с авторами, которые стремились к увеличению строгости изложения, были другие, считавшие геометрию наглядным предметом и в соответствии с этим ее излагавшие. Так, например, построен учебник *А. Ф. Малинина* [82], в котором каждое определение поясняется на реальных предметах. Приведем оглавление этого учебника.

Введение 1. Об углах. 2. О линиях, перпендикулярных и косвенных. 3. О линиях, параллельных. 4. О треугольниках. 5. О многоугольниках. 6. Об окружности. 7. Подобие фигур. 8. О площадях. 9. О линиях и плоскостях в пространстве. 10. О телах. 11. Измерение поверхности тела. 12. Измерение объема тела.

Например, в пункте «О телах» сказано, что тела могут быть ограничены плоскостями, тут же пример — обыкновенная комната, в которой находятся ученики, ящик. В учебнике помещены развертки, которые названы сетями, прямоугольного параллелепипеда, куба.

После такого изложения теории идут вопросы для учащихся. В частности, после указанного пункта даны следующие вопросы: «Что называется телом? Укажите несколько тел. Сколько измерений имеет тело? Укажите измерения комнаты, книги, мячика. Какое тело называется многогранником? Укажите несколько многогранников».

Таким образом, усвоение материала учащимися идет через ответы на вопросы и решение задач. Эти особенности сделали учебник А. Ф. Малинина весьма популярным. Заметим, что помимо геометрии, им были написаны руководства по прямолинейной тригонометрии, арифметике, алгебре. Они имели большой успех, и среди российских преподавателей математики XIX века было немало последователей этого направления. Более подробно курсы наглядной геометрии представлены в третьем параграфе настоящей главы.

Одним из самых известных учебников геометрии рассматриваемого периода является учебник *А. Ю. Давидова* [46], который выдержал 39 изданий, первое — в 1864 г. и последнее — в 1922 г.

Во введении автор представляет важные термины, основные понятия, чего не было в других учебниках. Например, математика толкуется им как учение о величинах, геометрия — отдел математики, содержащий учение о протяжении. «Геометрия рассматривает тела только относительно пространства, ими занимаемого, не обращая внимания на другие их свойства, и вследствие этого геометрическим телом, или просто телом, называют в геометрии пространство, со всех сторон ограниченное, независимо от вещества, его наполняющего. Граница тела называется поверхностью, граница поверхности — линиею, граница линии — точкою. Тела имеют три измерения: длину, ширину и высоту; поверхности — два измерения: длину и ширину; линии — одно измерение: длину, а точка не имеет никакого измерения».

Далее дается представление о линиях прямых и кривых, ломаной, суждении (мысль, в которой мы что-либо утверждаем или отрицаем), доказательстве (оправдание суждения посредством рассуждений), аксиоме (суждение, которое устанавливается без доказательства), теореме (суждение, которое устанавливается посредством доказательства), проблеме или задаче (вопрос, ответ на который основывается на доказанных предложениях), лемме (теорема, которая вводится для доказательства другой более важной теоремы или для решения задачи).

Необходимо отметить, что данный учебник напечатан двумя шрифтами: крупным — обязательный для всех учащихся материал, а мелким — дополнительный, для тех, кто заинтересуется геометрией.

Например, в первой части (планиметрии) к необязательному материалу отнесены некоторые предложения о треугольнике: «Сумма квадратов двух сторон AB и BC треугольника ABC равняется двойному квадрату отрезка BD, соединяющего вершину треугольника с серединой основания, сложенному с двойным квадратом половины основания, т. е.: $AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$».

«Если через какую-нибудь внутреннюю точку O треугольника ABC проведем прямые AA_1, BB_1 и CC_1, разделяющие каждую сторону треугольника на два отрезка, то произведение трех отрезков, не имеющих общей вершины треугольника, равняется произведению трех других отрезков: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$».

«Если вершину B треугольника ABC соединим с произвольною точкой D противоположной стороны, то

$$AB^2 \cdot CD + BC^2 \cdot AD - BD^2 \cdot AC = AC \cdot AD \cdot DC».$$

Далее четыре замечательные точки треугольника (точка пересечения высот, точка пересечения медиан треугольника, центр вписанной и центр описанной около треугольника окружности); квадратура круга; луночки Гиппократа и др.

В стереометрии к такому материалу отнесены следующие вопросы: равенство и симметрия трехгранных углов; теоремы о равенстве двух призм или двух пирамид; симметричные многогранники; подобие многогранников; объемы подобных многогранников; сферические треугольники и др.

Следующим значительным учебником этого времени является работа *А. Н. Глаголева* [35]. К несомненным достоинствам этой книги относится четкость изложения, удачно подобранные иллюстрации, новизна содержания.

В качестве примера приведем содержание одной из центральных тем курса — «Многогранники». В нее включен материал по комбинаторным свойствам многогранников. Доказывается теорема о том, что число плоских углов, образуемых ребрами многогранника на поверхности, вдвое больше числа его ребер, из чего, как следствие, вытекает, что число плоских углов многогранника всегда четно. Далее рассматривается и доказывается теорема Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Здесь впервые эта теорема введена в содержание основного курса геометрии и используется для построения теории правильных многогранников. Вводится несколько новых типов многогранников: призматоид — многогранник, ограниченный с двух сторон двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями, а с боков — пересекающимися плоскостями. Если в основаниях многоугольники с одинаковым числом сторон, а боковые грани — трапеции, призматоид является обелиском. Если в основаниях обелиска лежат прямоугольники, то он называется понтоном. Клин — многогранник, верхнее основание которого есть прямая линия, нижнее ей параллельно, и боковые грани — треугольники и трапеции.

Самым популярным и долголетним учебником этого периода была знаменитая «Элементарная геометрия» *А. П. Киселева* [64]. Уже в первом издании 1892 г. учебник имел большой содержательный материал, высокое педагогическое мастерство изложения. Учебник состоял из двух частей: планиметрии и стереометрии. В первую были включены следующие вопросы: прямая линия, окружность, подобные фигуры, правильные многоугольники и вычисление длины окружности, измерение площадей, определение длины окружности и площади круга на основании аксиомы непрерывности.

Стереометрия состояла из четырех следующих отделов: прямые и плоскости; начала проекционного черчения; многогранники; круглые тела. Вопросы вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных фигур не выделены в отдельную главу, а рассматриваются при изучении конкретных многогранников и круглых тел, причем внесены новые элементы, а именно, аксиоматическое определение понятия объема и принцип Кавальери. Этот учебник отличается оригинальной подборкой задач. Причем они помещены после изучения каждой темы и разделены по рубрикам «Найти геометрические места», «Задачи на доказательство», «Задачи на вычисление» и «Задачи на построение».

Итак, учебники данного исторического периода содержали в основном теоретический материал, но постепенно авторы стали включать в них и систему тренировочных задач и упражнений. К таким учебникам относятся три последних представленных учебника А. Ю. Давидова, А. Н. Глаголева и А. П. Киселева.

В конце XIX в. стали появляться отдельно издававшиеся от учебников сборники задач по геометрии. Например, отметим «Сборник геометрических задач» *В. П. Минина* [93], пятнадцатое издание которого вышло в 1913 г. Автор — учитель одной из московских гимназий, который предложил задачи из собственной практики работы. Таким образом, в пособие вошли разнообразные задачи для практических упражнений учеников в классе и дома, причем задачи как на вычисление, так и на доказательство, а также задачи для «письменных переводных и окончательных испытаний учащихся».

В предисловии автор говорит, что его книга прежде всего адресована ученикам, а потому он старался сделать ее удобной для работы: избегал «больших числовых данных, только затрудняющих ход вычислений, а для геометрии не имеющих значения» и заботился «о выборе таких условий, которые приводили бы к результатам, по возможности, простым, имея в виду знакомить учащихся главным образом с приемами решений».

Сборник состоит из следующих двенадцати отделов и трех прибавлений.

Отделы. 1. Прямая линия. Углы. Треугольники. Параллельные линии. 2. Окружность круга. Измерение углов. 3. Пропорциональность прямых линий. Подобие прямолинейных фигур. Пропорциональные линии в круге. 4. Правильные многоугольники. 5. Площади прямолинейных фигур. 6. Длина окружности. Площадь круга. 7. Прямые линии и плоскости в пространстве. 8. Тела многогранные. 9. Круглые тела. 10. Общий, несистематический. Задачи, относящиеся к различным отделам стереометрии. 11. Примеры задач на наибольшие и наименьшие величины. 12. Приложение алгебры к геометрии.

Прибавления. I. Собрание задач, решаемых совместным применением геометрии и тригонометрии. II. Некоторые теоремы, относящиеся: а) к учению о поверхностях и телах вращения; б) к учению о проекциях. Задачи, решаемые при помощи этих теорем. III. Список задач, служащих геометрическими темами на испытаниях зрелости во всех учебных округах России.

Примеры задач из данного сборника.

Задача № 229 (отдел 5). На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отложены части $AR = \frac{2}{3}AB$ и $AE = \frac{1}{3}AD$, точки R и E соединены прямой RE. Найти отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника ARE. (Ответ. 9.)

Задача № 334 (отдел 8). Радиус круга, описанного около основания правильного тетраэдра, равен ρ. На каком расстоянии от вершины тетраэдра нужно провести плоскость, параллельную основанию тетраэдра, для того чтобы она разделила последний на две равновеликие части? (Ответ. $\rho\sqrt[6]{2}$.)

Автор стремился вызвать интерес у школьников, включая практические вопросы, которые решаются на основании геометрических соображений.

Например, задача № 541 (отдел 10). Из шара, составленного из железного и медного полушарий и весящего P килограммов, выпиливается куб, диагональ которого равна диаметру шара. Определить вес опилок. $\left(\text{Ответ. } P\left(\frac{3\pi - 2\sqrt{3}}{3\pi}\right).\right)$

Приведем также пример экзаменационной геометрической задачи на аттестат зрелости для учащихся Московского учебного округа (испытания 1873 г.).

Задача № 877 (прибавление III). Сторона десятиугольного основания правильной пирамиды равна 0,93 арш., апофема пирамиды равна $25\frac{5}{8}$ арш. Определить поверхность и объем описанного около пирамиды конуса, усеченного параллельно основанию, при этом дано, что сечение сделано на расстоянии $\frac{7}{9}$ высоты от основания. (Напомним, что 1 аршин = 71,1 см.)

Еще отметим сборник геометрических задач *Б. Магалифа* [81].

В предисловии автор следующим образом объясняет причины составления подобного сборника геометрических задач.

1) На уроках геометрии достаточно времени для того, чтобы «на геометрических данных повторить с учащимися задачи на различные соотношения между числами, например нахождение чисел по их сумме и разности, по сумме или разности и отношению и т. п.». Автор считает, что в курсе геометрии подобные задачи могут быть разобраны на наглядных примерах и не решаться механически, как это происходит в курсах арифметики и алгебры.

2) Учебники геометрии содержат «более крупные теоремы, рассматривают более, так сказать, выпуклые свойства фигур и существеннейшие соотношения между их элементами». Задачи в систематическом сборнике подробно знакомят учащихся с более простыми теоремами, следствиями теорем, свойствами различных фигур.

3) Большое значение придается устным упражнениям, которые специально выделены в тексте пособия мелким шрифтом и имеют свою нумерацию. «Неприятно, тяжело видеть, — говорит автор, — как юноша при решении простенькой численной задачи берется за письменные принадлежности и без них чувствует себя беспомощным».

4) При поиске любой предлагаемой задачи на первое место ставятся геометрические соображения. Отчасти поэтому в различные места сборника вставлены задачи на перегибание и разрезание фигур.

5) В сборник включены задачи с несколькими способами решения, способствующие формированию исследовательских навыков учащихся.

Пример названных задач из первого раздела — планиметрии.

Задача № 51 (устная задача). Периметр прямоугольного треугольника равен 7 м, радиус вписанного круга содержит 6 дм. Определить гипотенузу. (Ответ. 29 дм.)

Задача № 52 (устная задача). Стороны треугольника содержат 8 см, 7 см и 5 см. Требуется меньшую сторону переломить на две части так, чтобы получился четырехугольник, в который можно вписать круг. (Ответ. 3 см и 2 см.)

Задача № 206 (письменная задача). Описанный угол содержит 49°. Определить дуги, заключенные между точками касания (двумя способами). (Ответ. 131° и 229°.)

Задача № 710 (письменная задача). Прямоугольник, разрезанный пополам, образует части, подобные целому прямоугольнику. Определить отношение его сторон. (Ответ. $\sqrt{2}$.)

Самыми популярными были задачники *Н. А. Рыбкина* [115, 116]. К учебнику А. Ю. Давидова был издан задачник *Е. М. Пржевальского* [107] (брата знаменитого путешественника Н. М. Пржевальского). В этом произведении задачи представлены в виде взаимосвязанных блоков. Причем упражнения идут от простых к сложным.

Первая названная книга начинается с введения, в котором учащимся представляются некоторые теоремы, формулы и преобразования, которые потребуются для решения задач сборника. Всего дано 23 таких пункта.

Например: пункт V. Для определения высоты треугольника иногда удобно пользоваться двояким выражением его площади; пункт VIII. Если треугольник или многоугольник проектируется на плоскость, то площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла с плоскостью проекции; пункт XIX. Хорда равна диаметру, умноженному на синус половины дуги; пункт XXIII. Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Далее во введении приведены еще двенадцать задач, «решенных сполна — с целью указать некоторые приемы, которые понадобятся далее».

Задача № 1. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проходит плоскость, наклоненная к катетам под углами α и β. Какой угол она составляет с плоскостью треугольника? (Ответ. $\sin\varphi = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.)

Задача № 12. Определить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают. (Ответ. 45°.)

В сборник по планиметрии включены следующие разделы: Прямая линия. Углы. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляры и наклонные. Параллельные линии. Сумма углов треугольника и многоугольника. Параллелограммы и трапеции. Окружность. Измерение углов с помощью дуг. Описанная и вписанная окружности. Относительное положение окружностей. Пропорциональность прямых линий. Свойство биссектрисы угла в треугольнике. Подобие треугольников и многоугольников. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырехугольников. Пропорциональные линии в круге. Правильные многоугольники. Площади прямолинейных фигур. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей. Смешанный отдел. Ответы.

Примеры из последнего смешанного отдела.

Задача № 772. Данного круга касаются два меньших — один изнутри, другой извне, причем дуга между токами касания содержит 60°. Определить расстояние между центрами меньших кругов, если их радиус равен r, а радиус большего круга равен R. $\left(\text{Ответ. } \frac{\sqrt{7R^2 + 9r^2}}{2}.\right)$

Задача № 828*. Определить площадь треугольника по трем его медианам l, m и n. $\left(\text{Ответ. } \frac{4}{3}\ \sqrt{q(q-l)(q-m)(q-n)}\text{, где } q = \frac{l+m+n}{2}.\right)$

Задачи, отмеченные звездочкой, по существу повышенной трудности, они имеют не только ответ, но и указание для решения.

Задача № 839*. Точка, взятая внутри угла в 60°, удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти ее расстояние от вершины угла. $\left(\text{Ответ. } 2\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}.\right)$

В стереометрию вошли такие разделы: Прямые, перпендикулярные и наклонные к плоскости. Параллельные прямые и плоскости. Угол прямой линии с плоскостью. Углы двугранные и многогранные. Параллелепипеды и призмы. Пирамида. Усеченная пирамида. Усеченная призма. Цилиндр, конус и усеченный конус. Шар и его части. Смешанный отдел. Ответы.

Примеры из последнего отдела.

З а д а ч а № 507. В равносторонний цилиндр вписан правильный октаэдр, а в него вписан шар. Как относится полная поверхность цилиндра к поверхности шара? (Ответ. 9:2.)

З а д а ч а № 515. Луночка, ограниченная полуокружностью и дугой в 120°, вращается около линии, соединяющей середины ее дуг. Определить поверхность и объем полученного тела, если хорда луночки равна a. $\left(\text{Ответ. } \frac{5}{6}\pi a^2;\ \frac{\pi a^3}{216}(18 - 5\sqrt{3}).\right)$

З а д а ч а № 563. Дан бесконечный ряд правильных тетраэдров, из которых каждый следующий имеет вершины в центрах граней предыдущего. Как относится предел суммы объемов всех тетраэдров к объему большего из них? (Ответ. 27:26.)

Выводы

В конце XIX — начале XX в. российская учебная литература по геометрии была весьма разнообразна и представляла для учителя возможность богатого выбора. Для выделенного нами исторического периода были характерны следующие ч е р т ы.

1. Выделилось два основных направления изложения курса геометрии: строго дедуктивное и с привлечением большей наглядности.

2. Стал складываться определенный круг вопросов по курсам планиметрии и стереометрии. Вместе с тем, учебники отличаются строгостью и стилем изложения, степенью использования наглядных иллюстраций, объемом содержания и т. п.

3. В учебниках появляются предисловия, в которых авторы подробно объясняют свои позиции, точки зрения на предмет геометрии и обращают внимание на методику ее преподавания.

4. Выделяются методические проблемы преподавания школьного курса геометрии, среди них разработка нового содержания, включение элементов истории геометрии, ее практических и прикладных аспектов, вспомогательного материала для лучшего восприятия и усвоения учащимися предлагаемых тем, дополнительного материала повышенной трудности для школьников, интересующихся геометрией.

5. В учебниках, помимо теоретических вопросов, стал появляться задачный материал. Начинают издаваться отдельные сборники задач.

6. Разрабатываются следующие классификации геометрических задач: устные и письменные; задачи на доказательство, на вычисление и на построение.

7. Авторы стремятся давать доказательства теорем, решения задач, обоснование изучаемых фактов, исходя из геометрических соображений. При этом особо выделяются задачи, которые решаются с помощью применения сведений из тригонометрии.

8. Появляются новые требования к оформлению учебной литературы, например выделение дополнительного материала (различные шрифты, звездочки), предлагаются подробные примеры оформления решения некоторых основных, важных для курса задач, даются ответы, а к задачам повышенной трудности, помимо ответов, предлагаются и указания для поиска решения и т. п. Это направлено на то, чтобы учебник или задачник были удобны для работы как учителя, так и ученика.

Этот исторический период имел огромное значение, так как фактически был создан свой российский учебник геометрии. Поэтому после 1917 г. были переизданы лучшие дореволюционные учебники и задачники, в частности А. Ю. Давидова, А. П. Киселева, Н. А. Рыбкина. Последние две названные книги (после доработки) стали стабильными действующими руководствами по геометрии для средней школы почти до конца 60-х годов XX в.

Представленные учебники и задачники по геометрии оказали огромное влияние на преподавание геометрии в российской школе. Они явились образцом для авторов многих последующих периодов. Лучшие их традиции дошли и до настоящего времени, и наша задача не разрушить их, а сохранить, приумножить и передать следующим за нами поколениям.

§ 2. Идея слитного преподавания планиметрии и стереометрии

Слитное преподавание нескольких разделов какого-нибудь предмета, в частности математики, носит специальное название — фузионизм. Термин *фузионизм* происходит от латинского слова *fusio — слияние*. Именно так в XIX в. назвали совместное преподавание различных школьных предметов, например физики и математики, химии и биологии. Фузионизмом также называли слитное преподавание нескольких разделов математики: алгебры и геометрии; геометрии и арифметики; наконец, планиметрии и стереометрии.

Одно из первых упоминаний о слитном преподавании планиметрии и стереометрии находится в знаменитом плане *Ж. Даламбера* (*Д'Аламбера*) [119]. В середине XVIII в. во Франции назревает революция, а коренные социальные преобразования, как правило, сопровождаются реформами образования. Новая французская идеология получила свое отражение в многотомном труде — «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Реформаторству подверглись все науки, в том числе и разделы математики. План курса геометрии был изложен Даламбером. Автор восстал против традиционного курса, который преподавался по «Началам» Евклида, и изложил новый подход к изучению геометрии. Новый курс носил более практический характер и содержал элементы совместного изложения начал планиметрии и стереометрии.

Рекомендовалось исключить из курса геометрии аксиомы и постулаты, так как, с его точки зрения, они бесполезны в силу своей очевидности. Начинать изложение нужно с рассмотрения тела «как оно есть, а потом показать, что с помощью последовательных отвлечений мы приходим к понятию о теле, обладающем лишь протяженностью и фигурой, и далее — к поверхности, линии, точке. Прямую и кривую линии вовсе не стоит определять, вследствие трудности, а может быть, и невозможности свести понятия о них к более простым идеям».

Даламбер возражал против пренебрежения в «Началах» к задачам измерения величин (площадей, объемов) и использованию различных движений. Основными принципами доказательств должны были быть принцип наложения, метод пределов и теория пропорций (например, теорема о равенстве произведений крайних и средних членов). Требуя от курса геометрии простоты и ясности изложения, Даламбер вместе с тем подчеркивал важность четкости и точности доказательств. Он считал, что чем строже вывод, тем он доступнее, так как подлинная строгость состоит в выводе теорем простым прямым путем из простейших принципов. Любопытно заметить, что он считал целесообразным построение различных курсов геометрии в зависимости от потребностей самих учеников. Одним нужен курс практической геометрии, другим строгие рассуждения и теоретическое руководство.

Статьи Даламбера о преподавании геометрии получили широкую популярность во Франции и за ее пределами. Они были переведены на многие европейские языки, в том числе и на русский.

План Даламбера стал известен в России. Он произвел неизгладимое впечатление на *Н. И. Лобачевского*, которому очень понравилась идея слитного преподавания плоской и пространственной геометрии. В 1823 г. им был написан учебник «Геометрия» [80], который историки математики называют одним из первых фузионистских курсов геометрии.

Фузионизм в Западной Европе

В первой половине XIX в. фузионизм еще не был популярен в России, и работа Н. И. Лобачевского практически осталась незамеченной. В то же время эти идеи были весьма распространены в Западной Европе. Этому в большой степени способствовали исследования французского математика *Г. Монжа* [84], в частности его классическое сочинение «*Geometrie desecriptive*» («Начертательная геометрия»). В нем систематизирован накопленный значительный, но разрозненный материал по решению различных конструктивных задач стереометрии известными планиметрическими построениями.

> Например, рассматривается задача о проведении касательной плоскости к трем данным («по положению и величине») сферам. При ее решении рассматривается связь теоремы о центрах «внешнего подобия трех кругов на плоскости, взятых попарно, с предложением о проведении касательной плоскости к трем шарам, если эти круги рассматривать как большие круги данных шаров, а касательные к ним, как образующие конических поверхностей, имеющих с данными шарами попарное касание». Другим примером является рассмотрение свойств плоских конических сечений, которые получаются как сечения конуса плоскостью.

Последователи Г. Монжа — *Ш. Брианшон*, *Ж. Понселе*, *М. Шаль*, *К. Штаудт* и др. — активно содействовали развитию проективной геометрии, в которой слияние планиметрии и стереометрии имело широкое практическое применение, что способствовало распространению фузионизма в геометрии. Заметим, что при этом фузионизм не проникал в элементарную геометрию, ее преподавание велось по традициям «Начал» Евклида.

В 1825 г. известный французский математик *Ж. Жергонн* (он, кстати, открыл в проективной геометрии принцип двойственности) написал статью о необходимости слитного преподавания планиметрии и стереометрии, в которой поднял вопрос о неестественном, с его точки зрения, делении геометрии на плоскую и пространственную, что плохо влияет на умственное развитие учащихся. Эта статья была опубликована в его собственном математическом журнале «Анналы Жергонна», которым он руководил в период с 1810 по 1831 г. Именно Жергонн первый предложил запись аналогичных утверждений для плоскости и пространства в два столбца, прием, которым стали пользоваться многие авторы последующих работ (табл. 1).

Таблица 1

Плоскость	Пространство
1. Окружностью называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки, принадлежащей этой же плоскости	Сферой называется множество точек пространства, одинаково удаленных от данной точки
2. Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну	Около любого тетраэдра можно описать сферу, и притом только одну. В любой тетраэдр можно вписать сферу, и притом только одну
3. Многоугольник называется правильным, если у него равны все стороны и равны все углы	Многогранник называется правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками и все его двугранные углы равны

Спустя 19 лет после статьи Жергонна в 1844 г. были опубликованы еще две работы: «Аналогии элементарной геометрии, геометрии плоскости и геометрии пространства» *А. Машистрея* и книга *Бретшнейдера* «О преподавании геометрии в гимназиях». Автор второй названной работы четко объяснил свою позицию, почему он считал слитное изучение планиметрии и стереометрии более предпочтительным по сравнению с общепринятым последовательным изучением этих разделов геометрии. В частности, им было высказано следующее.

1) Очень вредно молодой ум ученика долго задерживать на изучении плоской геометрии, так как от этого замедляется развитие пространственных представлений, а от этого и развитие вообще.

2) Метод обучения геометрии, основанный на отделении планиметрии от стереометрии, как показывает опыт, не дает тех результатов, каких можно достигнуть с помощью метода слияния.

Несмотря на то, что современники очень высоко оценили эти произведения, практически они не нашли сторонников, и, как следствие этого, не были внедрены в учебный процесс школы. Правда, справедливости ради, заметим, что идеи Бретшнейдера имели одного верного последователя в лице датского педагога *А. Стена*, который написал соответствующий учебник по геометрии и очень пропагандировал его в Дании. Эта история описана в статье *В. М. Фесенко* «О слиянии планиметрии со стереометрией» [119], которая была опубликована в дореволюционном журнале «Математическое образование». Таким образом, основные достижения фузионизма в преподавании геометрии и этапы развития этой идеи были хорошо известны в России.

Во второй половине XIX в. фузионизмом в геометрии стали увлекаться в Италии. Например, в 1884 г. вышли «Элементы геометрии» туринского профессора *Р. Паоли*. В этом труде четко проведена идея слитного преподавания планиметрии и стереометрии. В предисловии автор говорит о мотивах, побудивших применить этот метод в изложении геометрии. Он говорит о том, что много аналогий существует между некоторыми плоскими и пространственными фигурами и что, изучая их раздельно друг от друга, мы отказываемся видеть то, что дает полная аналогия между ними, и должны возвращаться к излишним повторениям. Кроме того, каким образом мы можем найти свойства линии на поверхности, не пользуясь геометрическими элементами расположения вне этой линии или поверхности? Мы ограничиваем, таким образом, свои силы и добровольно отказываемся от научного материала, с помощью которого можно упрощать построения и доказательства. Как, в самом деле, данный отрезок разделить пополам, не выходя из пределов самого отрезка? Пользуясь геометрическими элементами, расположенными в той же плоскости, мы легко можем выполнить построение, необходимое для решения задачи, и т. д.

Как видим, в представленной книге слитное изложение планиметрии и стереометрии носит вполне определенные дидактические функции, направленные не только на оживление преподавания геометрии, но и на уменьшение числа постулатов и теорем, более простые доказательства некоторых утверждений, выяснение внутрипредметных связей между разделами геометрии. Например, в этой книге совместно изучается материал о линейных и двугранных углах; многоугольниках и многогранниках; круге и шаре; площади и объеме и т. п.

Дело Паоли продолжили его ученики *Г. Лаззери* и *А. Боссани*, которые в 1887 г. выпустили фузионистский курс геометрии, предназначенный для средней школы (второе издание вышло в 1898 г.). В предисловии авторы замечают: «Метод слияния двух геометрий еще не так давно казался утопией, теперь же он подает большие надежды в недалеком будущем стать классическим методом преподавания элементарной геометрии».

Немецкий математик *Ф. Х. Клейн*, автор всемирно известной работы «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (больше известной под названием «Эрлангенской программы», 1872), увлекался вопросами преподавания математики. В течение сорока лет (с 1876 г.) он был главным редактором журнала «Математические анналы». Перед Первой мировой войной организовал Международную комиссию по реорганизации преподавания математики. На русский язык переведена его популярная книга «Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции, читанные в Геттингенском университете» [67]. Второй ее том полностью посвящен геометрии. Завершает его статья Клейна, которая называется «О преподавании геометрии». В ней, в частности, предлагается несколько требований, которые следует предъявлять к «здоровому школьному преподаванию геометрии». Последнее, пятое требование непосредственно относится к фузионизму в геометрии. Автор говорит: «Я желал бы отметить здесь еще одну полезную методическую точку зрения, а именно...тенденцию к слитному преподаванию планиметрии и стереометрии, цель которого — помешать одностороннему усовершенствованию в планиметрии при одновременном пренебрежении к развитию трехмерной пространственной интуиции. В том же смысле надо понимать также и требование слитного преподавания арифметики и геометрии: я не считаю желательным полное слияние этих областей, но они не должны быть столь резко разграничены, как это часто теперь происходит в школе».

Реформа математического образования в России

В конце XIX в. идеи фузионизма стали необычайно популярны в России. В это время у нас началась одна из самых крупных реформ школьного образования. Сложилась такая ситуация, когда, с одной стороны, педагогическая и методическая науки накопили значительный материал в области теории воспитания и обучения, а с другой, имела место устаревшая общеобразовательная система. Она характеризовалась ранней специализацией учащихся (реальные училища и классические гимназии), которая не соответствовала достижениям педагогической психологии.

В этой области у нас были получены глубокие результаты. В качестве примера достаточно обратиться к работе *П. Ф. Каптерева* [7].

> Сложившееся противоречие, естественно, не могло не привести к новой реформе образования. Преобразования касались как всей системы обучения в целом, так и каждого предмета в отдельности.

Наиболее серьезным изменениям подвергся курс математики. Своеобразным итогом движения за реформу были исторические Всероссийские съезды преподавателей математики.

Первый съезд проходил в Петербурге с 27.12.1911 г. по 3.1.1912 г., а второй ровно через два года в Москве. На них впервые учителя и ученые-математики имели возможность обсудить важнейшие проблемы преподавания математики в школе. Поражает высокоавторитетный состав съездов. Достаточно назвать фамилии таких видных педагогов-математиков, как *А. М. Астряб*, *С. А. Богомолов*, *Н. А. Извольский*, *А. Р. Кулишер*, *К. Ф. Лебединцев*, *С. И. Шохор-Троцкий* и многих других. Это позволило на высоком научно-методическом уровне подойти к решению вставших перед школой проблем. По существу, съезды подытожили всю огромную работу в области преподавания математики в школе и выработали далеко идущие перспективные планы на будущее. Результаты съездов удивляют обилием интересных идей, находок, решений проблем, многие из которых актуальны и в наши дни. Это непосредственно касается и обсуждаемой нами проблемы фузионизма в преподавании школьного курса геометрии, причем особый интерес представляет первый съезд [141].

Уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад известного математика, профессора *С. А. Богомолова* «Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания». В нем автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. В частности, он сказал: «Что касается самих учащихся, то для них геометрия является наиболее усвояемым и интересным отделом математики; преподавание геометрии облегчается и оживляется чертежами, призывом к воображению ... геометрия имеет выдающееся значение, как предмет общего и специально-математического образования. Помимо сообщения начальных геометрических сведений, мы видим цель ее преподавания в развитии двух умственных способностей: интуиции пространства и логического мышления». Далее «...конечно, всякий преподаватель оживит урок ссылкой на факты известной ученикам области; но нам кажется, что главная задача выполнения фузионистских чаяний лежит на представителях прикладных наук: они должны ставить свои предметы в теснейшую связь с математикой, памятуя слова Канта, что во всякой отрасли изучения природы мы постольку имеем науку, поскольку встречаем в ней математику. Представители же нашей специальности могут главное свое внимание, помимо обучения технике математического знания, посвятить развитию и дисциплинированию ума учащихся; логически развитой ум есть наиболее могучее орудие человека, важнейший фактор его прогресса».

В соответствии со сказанным С. А. Богомолов предложил разбить весь курс геометрии на две части, а именно: пропедевтическую и систематическую. Причем первая должна иметь целью развить пространственную интуицию и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы геометрической науки. При этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения, ее постоянное упражнение должно служить лучшим средством к ее развитию. Более того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место так называемому лабораторному методу, т. е. экспериментированию всякого рода. Последнее может происходить при помощи построений с простейшими геометрическими приборами, построений на клетчатой бумаге, вырезания и накладывания фигур и т. п.

По мнению С. А. Богомолова, именно начальный курс геометрии должен носить фузионистский характер. Эта идея была поддержана и одобрена съездом и широко на нем обсуждена.

Съезд пришел к единодушному выводу о необходимости слияния планиметрии и стереометрии в курсе начальной геометрии, предшествующей изучению систематического курса, что и нашло отражение в его резолюции. Однако было отмечено, что в основном курсе геометрии, где должна происходить четкая систематизация учебного материала, слияние, смешение курсов планиметрии и стереометрии нецелесообразно, так как это ведет к нарушению основополагающих педагогических принципов систематизации и последовательности обучения. Более того, в систематических курсах не следует смешивать различные разделы математики, например алгебру и геометрию, поскольку в таких фузионистских курсах невозможно обеспечить последовательное и непрерывное прохождение учебного материала каждого из них.

Дальнейшее развитие математического образования в России подтвердило правильность подобного подхода. К 60-м годам XX столетия были созданы прекрасные курсы начальной (пропедевтической, подготовительной) геометрии для младших школьников, в которых сочеталось изучение плоских и пространственных фигур. Одним из первых таких учебников нового поколения был учебник математики для 5—6 классов известных авторов: *Н. Я. Виленкина*, *А. С. Чеснокова*, *С. И. Шварцбурда*, написанный в период реформы математического образования конца 60-х — начала 70-х годов прошлого века [83].

В систематическом же курсе геометрии планиметрия и стереометрия изучались традиционно последовательно. Однако в конце курса планиметрии предусматривалась глава «Начальные сведения из стереометрии», которая знакомила учащихся с основными темами геометрии старших классов, а именно, с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, многогранниками, фигурами вращения [68].

Идеи фузионизма не были популярны в период той реформы математического образования. Было проведено только одно исследование по данной теме. Это кандидатская диссертация *Я. М. Жовнира* [54]. В ней автор выявил «фактическую, внутреннюю и логическую связь между планиметрией и стереометрией», на основании чего разработал экспериментальный фузионистский курс геометрии в 7—9 классах (нумерация классов современная).

Например, в курсе 8 класса рассматривается одновременное доказательство следующих теорем.

«Если из точки вне плоскости (прямой) проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной».

Программа для слитного преподавания планиметрии и стереометрии Я. М. Жовнира.

7 класс. Геометрические тела. Типы линий. Плоскость. Аксиомы плоскости и следствия из них. Понятие движения в геометрии. Углы (двугранные и плоские). Окружность и круг. Сфера и шар. Развертки поверхностей тел. Многогранные углы и многоугольники. Симметрия (в пространстве и на плоскости). Проекции и их виды. Программой также предусмотрены соответствующие работы на местности.

8 класс. Элементы математической логики. Равенство треугольников и тетраэдров. Практические занятия на местности. Параллелизм плоскостей и прямых. Вектор; сложение и вычитание векторов; умножение вектора на число; проекция вектора на ось (плоскость). Четырехугольники, призмы, пирамиды. Окружность и сфера. Простейшие геометрические места точек в пространстве и на плоскости.

9 класс. Тригонометрические функции острого угла. Решение прямоугольных треугольников. Скалярное произведение векторов и его свойства. Углы в окружности. Вписанные и описанные многоугольники и многогранники. Площади фигур и поверхностей. Объем многогранников. Пропорциональность отрезков. Тела вращения и вычисление их поверхностей и объемов (без доказательств). В программу 8 и 9 классов включены практические работы на местности.

В диссертации приводится программа и для 10—11 классов. Она составлена с учетом условий преемственности программы для 7—9 классов, составленной в духе фузионизма, и включает в себя следующие вопросы: (10 класс). Пространственная система координат. Векторы в пространстве. Разложение вектора по направляющим единичным векторам. Расстояние между точками в пространстве. Эллипс. Площадь эллипса. Уравнения плоскости и сферы. (11 класс). Группы преобразований. Аксиоматический метод. Некоторые понятия геометрии Лобачевского и Римана.

Хотя эта работа написана ярко, она не нашла сторонников и последователей, так и оставшись красивым экспериментальным методическим исследованием. Тем самым была убедительно продемонстрирована непрактичность данной идеи в масштабах ее внедрения в работу массовой школы.

Остановимся еще на двух важных для обсуждаемой нами проблемы работах. Первая работа *С. А. Богомолова* [18]. В ней он реализовал те идеи, которые высказал на Первом Всероссийском съезде преподавателей математики (тезисы доклада приведены выше). В книге выделены две части, а именно: 1. Геометрия положения. 2. Геометрия меры.

Курс построен на аксиоматической основе. Так, в первой части даются три основные неопределяемые понятия — точка, прямая, плоскость; даны аксиомы принадлежности, расположения и аксиома Паша; рассмотрены основные фигуры (образы) — угол, треугольник, многоугольник, телесный (многогранный) угол, тетраэдр и многогранник. Во второй части представлены еще 4 аксиомы меры и аксиома непрерывности. Здесь рассмотрены равенство углов, треугольников; свойства плоских и пространственных фигур; вписанные и описанные фигуры; измерение геометрических величин и др. Автором объединены доказательства некоторых теорем из планиметрии и стереометрии, например в параграфе «Круг и шар» приводится следующая теорема: «Прямая, проходящая через центр шаровой поверхности, пересекает ее в двух и только в двух точках. То же самое имеет место для окружности — при условии, что прямая лежит в ее плоскости».

В данной книге практически отсутствуют задачи. Для этой цели, как замечает сам автор, вполне подходят имеющиеся сборники задач. В то время, как мы знаем, было принято разделять учебник, где предлагалась теория, и отдельно к нему прикладывался задачник.

Специально отметим и подчеркнем, что эта книга С. А. Богомолова не была предназначена для учащихся средней школы. Она рекомендована в качестве пособия для самообразования учителям математики и студентам математических факультетов педагогических вузов, т. е. тем, кто уже знаком с основным школьным курсом геометрии. Таким образом, она предназначалась для повышения уровня геометрической подготовки, для тех, кто интересуется геометрией и ее преподаванием.

Вторая книга, на которую обратим внимание, это «Геометрия» американских авторов *Э. Э. Моиза* и *Ф. Л. Даунса* [94]. Книга представляет собой учебник геометрии, который использовался в старших классах американских средних школ. Он содержит разделы, относящиеся как к планиметрии, так и стереометрии. Предлагаемый материал соответствует полной программе школьного курса геометрии. Основными особенностями является следующее.

1. Рано вводятся основные понятия стереометрии (уже в третьей главе, всего их 17), которые с этого момента активно используются. Таким образом, к тому времени, когда авторы обращаются к систематическому изучению стереометрии (глава 8), учащиеся уже имеют большой и разнообразный интуитивный опыт работы с пространственными объектами.

2. Система координат на прямой вводится в главе 2, расстояния и углы измеряются числами, при действиях с которыми применяются алгебраические методы. Это позволяет легко ввести в главе 13 (после подобия и теоремы Пифагора) систему координат на плоскости.

3. Теорию измерений площадей авторы предлагают приблизительно в середине курса. Они считают, что, во-первых, понятие площади является, довольно, легким. Во-вторых, оно оказывается полезным в оставшейся части теории курса, например дает простое доказательство теоремы Пифагора, а также теоремы о пропорциональных отрезках, на которую опирается теория подобия.

4. Почти в каждом случае, прежде чем формально определить какое-либо понятие, авторы объясняют его интуитивным путем неформального обсуждения (чаще всего с помощью рисунка).

5. Рисунки в книге играют существенную роль, их много, они служат для увеличения предлагаемой информации. Многие из них снабжены необходимыми замечаниями, пояснениями и т. п. Имеется даже специальный параграф, который называется «Передача информации с помощью рисунков».

6. Обращает на себя внимание то, что многие аксиомы и теоремы имеют названия, например аксиома измерения углов, аксиома масштабной линейки, или теорема о двух окружностях («Пусть даны две окружности радиусов a и b, расстояние между центрами которых равно c. Если каждое из чисел a, b и c меньше суммы двух других, то эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих по разные стороны от прямой, проходящей через их центры»), теорема о шарнире («Если две стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам другого треугольника и если угол, заключенный между указанными сторонами первого треугольника, больше угла, заключенного между соответствующими сторонами второго, то третья сторона первого треугольника больше третьей стороны второго треугольника») и т. д.

7. Авторы специально подчеркнули, что одна из основных целей книги состоит в том, чтобы научить каждого учащегося пользоваться математическим языком, т. е. самому понимать математическое содержание предлагаемого материала.

Книга прекрасно написана, оформлена, имеет исторические экскурсы, например о том, как Эратосфен измерил Землю, о неразрешимости некоторых классических задач на построение, о жизни и творчестве многих известных математиков, таких как Л. Эйлер, Р. Декарт, Н. И. Лобачевский и др.

Выводы

1. Идея фузионизма в геометрии весьма привлекательна, сама по себе очень красива, нестандартна по отношению к традиционной сложившейся системе последовательного изложения курса геометрии от планиметрии к стереометрии, восходящей еще к «Началам» Евклида.

2. Эта проблема была блестяще разрешена в пропедевтических курсах геометрии младших классов, основной целью которых была подготовка к изучению систематического курса геометрии основной школы.

3. Однако многочисленные попытки решения рассматриваемой проблемы, которые велись на протяжении более чем двух веков, заключающиеся в ее реализации на систематическом курсе геометрии, не увенчались успехом. Фактически в России в XIX в. было создано одно соответствующее пособие Н. И. Лобачевского и одно в XX в. С. А. Богомолова, но и они были предназначены для читателей, имеющих базовую школьную подготовку по геометрии. Другими словами, это были книги, которые предлагали другой способ построения школьного курса геометрии для тех, кто особо интересовался геометрией и ее преподаванием.

4. Почему же в школе не прижилось слитное преподавание планиметрии и стереометрии в систематическом курсе геометрии? Основная причина заключается в том, что фузионизм противоречит основным дидактическим принципам: от простого к сложному; последовательности; систематичности; соответствия возрастным особенностям учащихся.

5. Однако, исходя из рассмотренных и представленных особенностей слитного преподавания планиметрии и стереометрии, можно сделать вывод о том, что метод фузионизма будет весьма полезен и эффективен при проведении заключительного этапа изучения школьного курса геометрии — повторении основного пройденного материала.

В настоящее время школе предстоит сделать выбор концепции преподавания систематического курса геометрии. Каким он будет, покажет время, но ясно, что нельзя игнорировать исторический опыт решения данной проблемы. При этом следует помнить, что фузионистский систематический курс геометрии никогда не был официальным, общепринятым, никогда не имел широкого распространения. Он нравился как интересная, привлекательная идея, альтернативная традиционному курсу. Неслучайно поэтому к идее слитного преподавания планиметрии и стереометрии обращаются в периоды реформ, во времена кризисов и коренных перестроек математического образования.

§ 3. Из истории наглядной геометрии

Методика преподавания наглядной геометрии в России началась в эпоху школьной реформы середины XIX в. Это было время общественного подъема, в котором педагогические вопросы занимали видное место. Достаточно вспомнить, что именно в это время было организовано Петербургское педагогическое общество, издавался целый ряд педагогических журналов, среди которых «Педагогический сборник», «Учитель», «Народная школа», «Семья и школа», «Русский педагогический вестник», «Педагогический листок» и многое другое. В 1864 г. принимается новый Устав школы, в котором были учреждены новые типы учебных заведений. В частности, появились двухклассные училища Министерства народного просвещения (которые с 1872 г. стали называться городскими). Естественно возник вопрос о введении в них начального подготовительного курса геометрии. Заметим, что этот курс на протяжении своего существования получал различные названия в зависимости от своей основной цели. Например, начальный, досистематический, подготовительный, приготовительный, пропедевтический курс. Из этих названий ясно, что курс геометрии младших классов должен был, прежде всего, готовить учащихся к изучению систематического курса геометрии. Авторы, которые хотели подчеркнуть особенности способов изложения начального курса геометрии, отвечающих возрастным особенностям учащихся, называли его интуитивным, наглядным, опытным, эмпирическим.

Первым российским учебником по начальному курсу геометрии стала книга *М. О. Косинского* [71]. Заметим, что он работал в Смольном институте, где трудился *К. Д. Ушинский*, и находился под большим влиянием идей великого русского педагога, в частности его книги для начального обучения «Детский мир». В предисловии к своему курсу Косинский подробно и убедительно поясняет цель и необходимость введения наглядных курсов геометрии. Он пишет: «В высшей степени важно сгладить переход от наглядного к отвлеченному, сделать его постепенным, начать с рассуждений, основанных на внешних чувствах, и только мало-помалу присоединять к ним рассуждения, заставляющие работать способности внутренние». В этой книге проявилась одна из существенных особенностей курсов наглядной геометрии, а именно построение его на принципе фузионизма (см. предыдущий параграф настоящей главы). В данном случае он означает слитное преподавание элементов планиметрии и стереометрии. Книга начинается с рассмотрения простейших пространственных фигур, «с протяжений о трех измерениях», на основе которых изучаются важнейшие понятия геометрии.

Учебник М. О. Косинского оказал большое влияние на становление и развитие курса наглядной геометрии в России. Он открыл целую серию работ, в которую вошли учебники того времени *М. Борышкевича* [23], *Е. Волкова* [29], *З. Б. Вулиха* [30]. Причем в них видное место заняли задачи на построение геометрических фигур, на основе которых изучались их свойства.

В 1872—1873 гг. в Петербургском педагогическом обществе велась жаркая дискуссия по поводу построения, содержания, методов преподавания курса начальной геометрии (подробные отчеты и протоколы этой дискуссии напечатаны в журнале «Семья и школа» за 1873 г.). И хотя полезность этого курса не вызывала никаких сомнений, его цели были понятными и общепризнанными, нашлось немало противников введения курса наглядной геометрии в реальную практику работы школы. Основная причина негативного отношения — перегрузка учебных планов и программ. В защиту пропедевтического курса геометрии выступили видные методисты-математики того времени *В. А. Евтушевский*, *В. А. Латышев*, *А. Н. Страннолюбский* [109].

Например, *В. А. Евтушевский* высказал мнение о необходимости разработки учебников по наглядной геометрии трех типов, а именно:

а) для начальной школы;

б) курсы практического характера, направленные на подготовку к реальной жизни;

в) пропедевтические курсы по наглядной геометрии для подготовки к изучению систематического курса евлидовой геометрии.

В. А. Латышев разработал два вида начального курса геометрии: элементарный и элементарно-теоретический. Первый — это курс, носящий практический характер, в его основу кладутся прикладные аспекты геометрии в различного рода измерениях, вычислениях площадей, объемов, в съемке планов и т. п. Отсюда большое значение в этом курсе отводится геометрическим построениям с помощью циркуля и линейки. Вместе с тем, Латышев говорит о том, что ученика нужно специально и постепенно готовить к овладению дедуктивным курсом геометрии. По его мнению, «рассмотрение форм должно предшествовать занятиям геометрией и составлять содержание приготовительного курса геометрии».

А. Н. Страннолюбский вошел в историю российского просвещения не только как выдающийся педагог-математик, но и как неустанный поборник высшего женского образования. Любопытно, что именно у него брала уроки математики юная Софья Корвин-Круковская (С. В. Ковалевская). Страннолюбский принял активное участие в дискуссии и отстаивал насущную необходимость введения курса наглядной геометрии в женских гимназиях.

Несмотря на все достижения, вопрос о постановке курса наглядной геометрии оставался открытым. Более того, наступил длительный период реакции. Новый министр просвещения *Д. А. Толстой* заменил более-менее либеральный школьный Устав 1864 г. По новому Уставу приблизительно половина учебного времени тратилась на изучение древних языков, и поэтому было резко сокращено число часов, отводимых на преподавание естественных наук, в том числе и на математику. Пропедевтический курс геометрии вообще был исключен из учебного плана.

Такое отношение к наглядному курсу геометрии продолжалось вплоть до конца XIX в. На рубеже XIX—XX столетий, как уже отмечалось выше, началась широкая реформа образования. Преобразования касались как всей системы обучения в целом, так и обучения отдельным предметам. Преподавание математики подверглось особенно сильным изменениям. Ускорению школьной реформы во многом способствовала революция 1905 г. Итогом движения за реформу образования, как мы говорили выше, стали исторические Всероссийские съезды преподавателей математики.

Уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад *С. А. Богомолова* [18] «Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания». В нем автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. В частности, он сказал: «Геометрия имеет выдающееся значение, как предмет общего и специального математического образования. Помимо сообщения начальных геометрических сведений, мы видим цель ее преподавания в развитии двух умственных способностей: интуиции пространства и логического мышления».

Одним из самых значительных выступлений был доклад *А. Р. Кулишера* «Начальный (пропедевтический) курс геометрии в средней школе. Его цели и осуществление». В нем, прежде всего, указаны недостатки систематического курса геометрии, основным из которых, с точки зрения докладчика, является то, что изучение геометрии начинается поздно и не с рассмотрения пространственных фигур, а «ребенок живет главным образом в мире разного рода многогранников с прямыми, по большей части, углами, чаще всего в мире прямоугольных параллелепипедов, кубов и немногих круглых тел (причем ему известны, самое большее, названия куба и шара), мы склонны думать, как это подтверждается многочисленными наблюдениями преподавателей-практиков, что тела для детей «проще», чем прямые и плоскости». А. Р. Кулишер ссылается на пример весьма удачного сороколетнего опыта работы в данном направлении немецкого педагога *П. Трейтлейна*, который предъявил следующие требования к начальному курсу геометрии [141].

1) Обучение в наших средних школах должно быть подразделено на две ступени: низшую и высшую.

2) Метод обучения на низшей ступени — это наглядное обучение геометрии: оно исходит из рассмотрения тел, откуда выводятся различные геометрические образы, их преобразования и создание новых; развитие самостоятельности учеников при помощи выполняемых ими действий — оценки на глаз, путем измерений (в том числе и на открытом воздухе), рисования, лепки и ручного труда; оно развивает способность к тонкому созерцанию и пространственному воображению и ведет от наглядного познания к доказательству и обоснованию познанного.

3) Обучение на высшей ступени имеет своей основой приобретенные раньше представления и воздвигает, постоянно прибегая к рассмотрению тел, научное здание элементарной геометрии, как образец дедуктивной науки.

> На основе этих принципов Трейтлейн разработал один из лучших начальных курсов геометрии. Докладчик подробно представил его содержание, которое начинается с рассмотрения игральных костей. В живой непринужденной беседе, в которой принимает участие весь класс, выясняются основные свойства куба. Вот небольшой фрагмент этой беседы: «Поставьте это тело (куб) на стол; придайте ему какое-нибудь другое положение! Придайте ему еще третье положение! Сколькими способами можно его поставить? Нельзя ли изготовить его из папки? Кто знает или видел кубы или похожие на куб предметы в другом месте?» (Это было общее знакомство.) Далее следует рассмотрение поверхности: «Положите руку на поверхность куба, который будем держать как попало. Вы положите руку на другую грань поверхности. Что означает слово «поверхность»? Для отличия у меня имеется здесь шар». Сопоставляя шар и куб, ребята выясняют различие между их поверхностями. Потом на кубе демонстрируются взаимные расположения прямых и плоскостей в пространстве. Вслед за этим материалом идет изучение прямой призмы (с квадратом или прямоугольником в основании), прямого цилиндра и шара. Правильный тетраэдр рассмотрен

вместе с равносторонним треугольником. Правильная пирамида — вместе с равнобедренным и прямоугольным треугольниками. Затем рассматривается параллелограмм, ромб, прямой конус и произвольный тетраэдр. Далее — сумма углов треугольника, усеченная пирамида и трапеция; четырехугольник; окружность. В конце курса рассматриваются площадь (параллелограмма, треугольника, трапеции, круга) и объем (прямой призмы, цилиндра, конуса, пирамиды). Введено понятие равновеликости (на примере прямоугольника и квадрата), представлена теорема Пифагора.

Заметим, что в рассматриваемом курсе начальной геометрии вопросы планиметрии и стереометрии чередуются, они перемешаны друг с другом.

Далее А. Р. Кулишер в своем докладе остановился на еще одном интересном и значительном, с его точки зрения, начальном курсе геометрии *В. Кемпбеля* [63].

Эта книга начинается с представления простейших многогранников и их изготовления. Первая фигура — куб (о нем разбирается 65 вопросов!). Это неслучайно, так как ребятам хорошо известна эта простейшая фигура, с раннего детства они с удовольствием включаются в различные игры с кубиками. В предисловии к «Наглядной геометрии» В. Кемпбеля говорится, что основная задача курса видится в «приучении детей к наблюдению простых геометрических форм и соотношений между предметами, которые ежедневно попадаются им на глаза, в обучении их употреблению простых инструментов для геометрических построений и ознакомлении их с разнообразными способами определения длины, площади и объема предметов».

После куба рассматриваются параллелепипед, призма, скошенная призма (боковые грани призмы пересечены плоскостью, непараллельной основанию), пирамида, усеченная пирамида, скошенная пирамида (боковые грани пирамиды пересечены плоскостью, непараллельной основанию), цилиндр, конус. Для всех фигур рассмотрено их изготовление — моделирование. Только после этого предлагаются плоские фигуры: углы, треугольники, четырехугольники, многоугольники, круги, правильные многоугольники; простейшие построения (деление пополам отрезка, угла, дуги; проведение перпендикуляров; построение угла, равного данному; описанные и вписанные окружности в треугольники и некоторые четырехугольники). Завершается курс измерением геометрических величин — площадями и объемами.

Обратим внимание на то, что в предлагаемом курсе принята другая, обратная по отношению к традиционному курсу геометрии, последовательность изложения, а именно сначала изучаются вопросы стереометрии, а затем планиметрии.

Охарактеризовав наиболее значимые пропедевтические курсы геометрии, А. Р. Кулишер высказал свою позицию по обсуждаемому вопросу. Он предложил к р и т е р и и, которым должен удовлетворять курс геометрии, чтобы его по праву можно было считать подготовительным.

1. Пропедевтический курс геометрии должен удовлетворять всем строгим требованиям общей дидактики, принимающей во внимание особенности того или иного возраста, и в силу этого основанной на разумной (не утрированной) самодеятельности учащихся.

2. Материал, изучаемый здесь, не должен быть очень велик. Все рассмотренное должно стать прочным достоянием учащихся и перейти при посредстве планомерной классной (отчасти домашней) работы в область твердых навыков.

3. Слово должно сопутствовать всему тому, что выполняет мысль и рука учащегося.

4. Материал должен быть связан с теми пространственными представлениями, которые ребенок вынес или может вынести из повседневного опыта, а также с некоторыми сторонами строительного и инженерного искусства и творений природы.

5. Изучаемые объекты должны быть связаны известной зависимостью; возникновение новых образов из старых весьма важно. Образы трех измерений должно целесообразно сочетать с изображением фигур на плоскости.

6. На материал должны влиять, в известной мере, приемы мышления (текучесть геометрических образов).

7. В нем должны всплывать рассуждения и обобщения доказательного характера.

8. Должен быть тщательно продуман переход от начального курса к следующей части занятий геометрией.

В резолюции съезда было сказано о необходимости введения пропедевтического курса наглядной геометрии. Этот курс должен содействовать более целесообразному изучению систематического курса геометрии, помогать правильному развитию мышления учеников и выработки «пространственной грамотности».

Многие участники дискуссии по данному вопросу не только провозгласили свои тезисы, но и полностью их реализовали. Например, А. Р. Кулишер сделал это в блестящей серии своих последующих работ [73, 74].

Подробно разбирая вопрос о целях и задачах подготовительного курса геометрии, он говорил: «Установленное с давних пор при преподавании геометрии разделение на планиметрию и стереометрию не могло не положить своего отпечатка на многие курсы начальные и подготовительные. Переход к иному распределению материала часто психологически затруднителен для ведущего занятия с учащимися 9—12 лет. Этому переходу мешают и теоретические возражения вроде того, что нельзя детей знакомить с телами в силу сложности трехмерных пространственных образов. Отсюда следует практически тотчас обеднение дидактического материала, низведение числа измерений изучаемых образов до двух, до одного или даже нуля, насколько это возможно. В таких случаях уместно вспомнить, что ребенок лет 9 прожил уже в комнатах, имеющих вид прямоугольного параллелепипеда, брал в руки спичечные или другие коробочки той же формы, пил из стаканов, имеющих форму цилиндрическую, призматическую или близкую к ним, видел большое число банок и пузырьков, играл в мяч и что сознание учащегося не потерпит ущерба, если для целей обобщения виденного, с точки зрения формы или по другой необходимости, на уроке будет показан и рассмотрен (с соблюдением всех требований дидактики) прямоугольный параллелепипед, цилиндр, шар или что-либо другое». Проблема, которую поднимает Кулишер, лежит на рубеже между дидактикой и психологией и состоит в том, чтобы ответить на вопрос: «Что, в конце концов, проще для понимания ребенка — прямая линия или площадь круга, площадь круга или шар?»

В предисловии к учебнику [74] автор говорит о том, что учащимся должны стать близки следующие идеи: «равенство и неравенство (отрезков, углов, площадей, объемов), равновеликость, симметрия (а также равенство — в силу симметрии), связь между различными пространственными и плоскостными образами, возможность возникновения новых форм, идеи соответствия порядка и расположения, текучесть геометрических фигур, доказуемость тех заключений относительно свойств пространства, которые раньше были добыты другим путем, преобразования по подобию и симметрии и т. п. (идея движения приобретает, таким образом, должное истолкование), наконец, приложимость всех добытых сведений к большому кругу явлений повседневной жизни, к задачам строительного и инженерного дела, к измерениям на местности и вопросам изучения природы».

Примеры упражнений из раздела «Знакомство с телами»

- Проведите рукой по крышке стола, перед которым вы сидите. Какова сверху форма (на ощупь) крышки стола? Таков ли будет по форме (на ощупь или на глаз) шар, если проведем по нему (поверх него со всех его сторон) рукой? Какова поверхность гор, которые мы видим на снимке (прилагается снимок)? Похожа ли поверхность этих гор на поверхность стола?
- На какой предмет (или, иначе говоря, на какое тело) больше всего похожа комната? Какова поверхность комнаты? Чем отличается поверхность комнаты от поверхности шара и поверхности цилиндра?
- Возьмем куб (каждому из учеников надо дать в руки деревянный куб, ребро которого равнялось бы примерно 2 см — 2,5 см) ла-

донью руки так, чтобы его можно было зажать в руке, затем несколько раз повернем этот куб, поворачивая его концами пальцев так, чтобы он прикасался различными частями своей поверхности к ладони. Какова поверхность куба? Из скольких отдельных частей она состоит? Какую форму имеют эти отдельные части или грани?

• Какова по форме поверхность воды в озере в тихую погоду? Какова по характеру поверхность гор? Можно ли считать всю поверхность этих гор плоской? Каков характер поверхности воды, налитой в стакан?

• Проведите рукой по столу; какую форму имеют его края? Все ли края стола, перед которым вы сидите, имеют один и тот же характер? Каков характер краев куба? Каков характер края доски? Не знаете ли вы предметов, в которых как раз зубчатый край имеет весьма важное значение? Чем отличается по форме край стола от края стакана?

Таким образом, А. Р. Кулишер не уделяет первоначально много внимания изучению отдельно взятых куба, шара, цилиндра и т. п. Основной разговор идет о сравнении этих тел между собой и с окружающими предметами, нахождению одинаковых признаков и различий между предметами по их форме.

Далее рассматриваются прямые линии, измерение отрезков, проведение прямых линий, отвесные и наклонные линии. Интересно, что к понятию прямой линии Кулишер подходит, исходя из рассмотрения трехмерных объектов. Прямая — край плоскости стола. В то же время для показа отвесных и наклонных линий используется натянутая нить. Прямые углы начинаются с рассмотрения двугранных углов — угол в классе, угол между потолком и стеной, угол, образованный раскрытой книгой. Только после этого рассматриваются плоские углы.

Квадрат определяется как одна из сторон (граней) куба, рассматриваются углы квадрата и прямоугольника. Затем дается понятие пересечения плоскостей и устанавливается на различных примерах, что они пересекаются по прямой.

Затем рассматриваются различные шары из глины, воска, пластилина и их разрезы по плоскости. Круг определяется как сечение шара плоскостью.

Вопросы для учащихся

1. Как провести прямую между двумя точками на плоскости? Как провести прямую между двумя точками в пространстве? Покажите, как это можно сделать при помощи тесьмы. Много ли прямых можно провести через одну точку в пространстве? Покажите это при помощи тесемок.

2. Нет ли среди положений, какие мы можем придать прямым в пространстве, таких положений, которые почему-либо являются для нас важными?

3. Покажите при помощи тесемок такие положения, если они действительно имеются.

4. Какое положение придают обычно стенам зданий? Как располагаются кирпичи при кладке? Каким путем можно удостовериться в том, что кладка кирпичей выполняется правильно? Какое направление имеет шнур, на котором подвешена электрическая лампочка?

5. Какое положение придают обыкновенно полам и потолкам в комнатах? Какое положение имеет вода в стакане или миске? Каково направление струи воды в бьющем фонтане (прилагается снимок)?

6. Какое положение наиболее удобно для стоящего человека?

7. Какое положение кубиков, лежащих один на другом, наиболее устойчиво? То ли положение, где они образуют как бы одну колонку, или другое положение, при котором они смещены относительно друг друга?

8. Как изобразить на бумаге отвесную плоскость? Как изобразить наклонную плоскость? Как изобразить горизонтальную плоскость?

9. Изготовьте отвес из нити и небольшого груза. Какое положение надо придать зеркалу, для того чтобы изображение отвеса совпало с продолжением нити отвеса? Начертите в тетради отвес, зеркало и изображение отвеса.

10. Как будет расположено изображение отвеса в зеркале в том случае, если зеркалу придать наклонное положение? Начертите в тетради отвес, зеркало и его изображение. Выполните тот же чертеж при наклоне зеркала в другую сторону.

Далее рассматриваются параллельные плоскости и только затем параллельные прямые. Причем параллельные прямые возникают из рассмотрения полос и определяются как прямые, лежащие в одной плоскости и во всех своих точках равно друг от друга отстоящие.

В конце рассматривается вопрос о параллельных прямых в пространстве и о плоскостях, проходящих через них.

Приведенные выдержки дают убедительное подтверждение полезности одновременного преподавания начального курса геометрии на плоскости и в пространстве. Однако эта книга не дает ответа на вопрос о преподавании систематического курса геометрии.

Всероссийские съезды преподавателей математики сыграли исключительно важную роль в решении рассматриваемой проблемы. К сожалению, не все стало возможным осуществить, так как вскоре началась Первая мировая война, потом революция, наступили тяжелые годы восстановления разрушенного хозяйства. Тем не менее, в первые годы советской власти переиздавались лучшие дореволюционные учебники, задачники, методические пособия и т. п., в частности, и курсы наглядной геометрии. Например, был опубликован курс *А. М. Астряба* [11]. В предисловии автор говорит о том, что наиболее сложным и трудным является развитие у детей геометрических представлений и изучение пространственных фигур, поэтому курс начинается с изготовления простейших тел: куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра, пирамиды, конуса. Затем рассматриваются свойства каждой представленной фигуры. Этому посвящена вся первая часть книги. Во второй части изучаются плоские фигуры: прямая, угол, окружность и круг, треугольник, прямоугольник и квадрат. В заключительную, третью, часть включены вопросы измерения геометрических величин — вычисление площадей и объемов. В основу разработки данного курса автором были положены следующие соображения.

Первой стадией познания геометрических форм является непосредственное их восприятие, поэтому необходимо, чтобы в нем принимали участие не только глаза, дети должны лепить и рисовать, измерять и клеить, накладывать и разрезать.

Второй стадией психологического процесса познания геометрической формы является возникновение в детском сознании геометрических образов.

Наконец, в третьих, внимание и интерес у детей могут поддерживаться только в случае, когда курс будет согласован с особенностями детской природы — деятельной и творческой.

Для того чтобы иметь представление о стиле книги и о лабораторном методе ее изложения, приведем несколько выдержек из нее.

Глава I. § 1. Куб

Все предметы будем называть телами. Назовите несколько тел, находящихся в комнате, вне ее.

1. Вылепите из глины или воска по указанному образцу куб (посмотрите на соответствующий рисунок).

2. Назовите несколько предметов, имеющих форму куба.

3. Вырежьте куб из картофеля или из мыла.

4. Сделайте из спичек куб, скрепив концы их воском. Сколько всего спичек потратили вы на приготовление одного куба?

5. Нарисуйте на бумаге ваш куб, сделанный из спичек.

6. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке (рис. 1) по линии *ab* и, согнув каждую часть по пунктирным линиям, составьте куб.

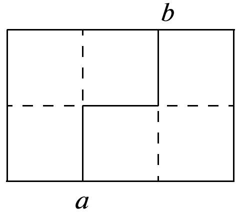
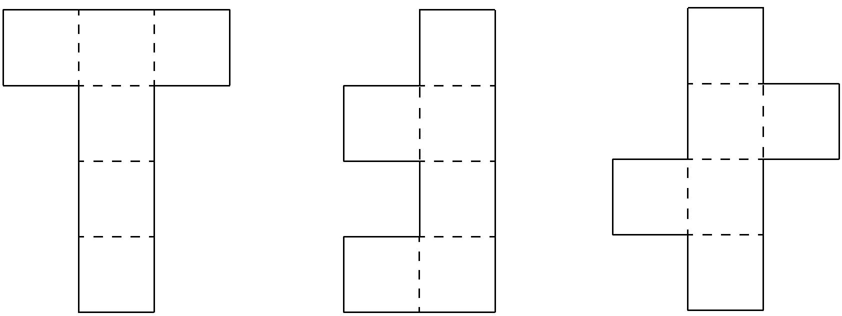


Рис. 1

7. Попробуйте составить куб, сгибая по пунктирным линиям полоски бумаги, изображенные на рисунке (рис. 2).



а) *б*) *в*)

Рис. 2

8. Не можете ли вы догадаться, как должны быть расположены в предыдущей задаче два боковых квадрата, чтобы можно было склеить куб?

9. Приготовьте тело из выкройки, изображенной на рисунке (рис. 3).

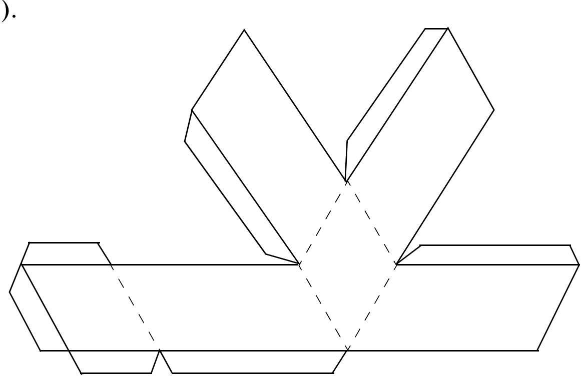


Рис. 3

Глава V. § 16. Круг и окружность

1. Сделайте из глины или воска шар и разрежьте его аккуратно на две равные половины. Как назвать эти части шара?

2. Плоская поверхность, по которой вы разрезали шар на две равные части, называется кругом. Обведите ладонью круги на ваших полушариях.

3. Сделайте еще несколько одинаковых шаров из воска и разрежьте каждый из них по какой-нибудь произвольной плоскости. Какого вида получились сечения? Какой из этих кругов самый большой? Как назвать его?

4. Привяжите к одному концу нитки карандаш, а другой конец укрепите при помощи булавки на середине чистого листа бумаги. Обведите карандаш вокруг булавки, держа нить все время натянутой до тех пор, пока он не вернется на прежнее место. Та замкнутая линия, которую нарисовал карандаш, называется окружностью.

5. Покажите на вашем полушарии окружность большого круга.

К данному курсу автором был написан специальный задачник [9]. Вот примеры нескольких наиболее типичных заданий из него.

- Назовите несколько предметов, имеющих форму прямоугольной призмы.
- Приходилось ли вам когда-нибудь сидеть внутри прямоугольной призмы?
- Вырежьте из картофеля или мыла прямоугольную призму.
- Я дам каждому из вас 12 палочек. Склейте воском концы их так, чтобы получилась прямоугольная призма.
- Нарисуйте на бумаге вашу призму, сделанную из палочек.

Дальше ребятам предлагается склеить из данных разверток различные многогранники, в частности, среди которых все пять правильных многогранников, и догадаться, почему они получили такие названия: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Идеи о преподавании фузионистского курса наглядной геометрии А. М. Астряб развил и изложил в своей работе [10]. В ней определены цели изучения данного уровня. Наиболее важной из них является то, что этот курс, во-первых, является подготовительным к изучению систематического курса. Ученики в младших классах должны конкретизировать и накапливать сведения о геометрических фигурах, как плоских, так и пространственных. Во-вторых, этот курс является практическим. Он призван вооружить учащихся практическими знаниями геометрии. Например, дать им представления о различных углах и способах их измерения, вычислении площадей и объемов, нахождения расстояний, в том числе до недоступных предметов и т. п.

А. М. Астрябом были выделены особенности преподавания курса наглядной геометрии, который должен быть:

а) конкретным, «созерцательным»;

б) активным, т. е. ученики должны не только внешне смотреть на геометрическую фигуру, но уметь нарисовать ее, склеить из развертки (если это возможно), уметь сознательно анализировать ее свойства;

в) небольшим по объему, но строго последовательным и содержательным, т. е. не надо увлекаться стремлением дать ученикам как можно больше сведений из геометрии в этом начальном курсе, это приведет к накоплению учениками легко забываемых, не связанных логически между собой фактов;

г) практическим, в том смысле, чтобы реализовать вторую цель изучения наглядной геометрии, о которой мы говорили выше;

д) развивающим логическое мышление учащихся, в курсе наглядной геометрии нельзя ограничиваться только интуитивным восприятием, ученики должны не только созерцать, но и мыслить;

е) развивающим пространственные представления учащихся.

Многие авторы курсов наглядной геометрии поэтому начинают их с рассмотрения пространственных фигур. Но такое построение на практике по прошествии многих лет опытной экспериментальной проверки выявило ряд существенных недостатков, а именно: «одновременное изучение свойств плоских фигур и более сложных для восприятия пространственных объектов рассеивало внимание детей, лишало их возможности сосредоточивать все свое внимание на изучении какого-либо геометрического объекта. Оказалось более целесообразным начинать изучение наглядной геометрии с простейших плоских фигур (прямой линии, прямого угла, прямоугольника), постепенно переходя к изучению более сложных пространственных тел: куба, прямоугольной призмы и т. д.».

Заметим, что с плоских фигур начинается много известных курсов наглядной геометрии, например *С. И. Шохор-Троцкого* [154].

Данная книга имеет две части. Первая обращена к ученику, а вторая — к учителю.

Как известно, С. И. Шохор-Троцкий является автором *метода целесообразно подобранных задач*. Он говорил: «Дети должны решать задачи. Подбор этих задач должен прежде всего удовлетворять требованиям простоты, целесообразности и занимательности». Вся теория разворачивается на задачах. В качестве примера приведем следующую задачу.

> Задача № 602. Нарисовать в малом масштабе ящик, длина которого 12 вершков, ширина 8 вершков, а высота 6 вершков. Вычислить всю (полную) поверхность его. Сколько граней у этого ящика?
>
> «Тело», ограниченное прямолинейными фигурами (т. е. многоугольниками), называется многогранником. — Многогранник, ограниченный шестью прямоугольными параллелограммами, называется прямоугольным параллелепипедом. — Указать в комнате прямоугольные параллелепипеды. Сама комната? Пенал для перьев? Линейка? Какой-нибудь ящик? Стекло окошка? Чем форма книжного шкафа отличается от формы прямоугольного параллелепипеда?»

С. И. Шохор-Троцкий придавал огромное значение наглядности в преподавании математики. Для обоснования принципа наглядности им было сформулировано шесть основных тезисов.

> 1) Обучая математике, должно иметь в виду не только способность человека к умозрению, но и органы ощущений учащихся и волевой элемент в душевной их жизни.
>
> 2) Без чувственных восприятий и соответствующих им ощущений и представлений не может получиться ни точных понятий, ни плодотворных математических идей, ни основательных знаний, ни твердых навыков.
>
> 3) Одно только знание ряда слов без полной власти над их смыслом — знание призрачное, ложное и безрезультатное.
>
> 4) Истинное знание возможно только при следующих условиях: а) при наличии ясных и верных представлений; б) при должной подготовке к надлежащему ассоциированию представлений и идей, составляющих материал этого знания.
>
> 5) Эти условия достижимы только при полной наглядности обучения, при интересе детей к делу и при посильной активной работе органов ощущений, с одной стороны, и ума, творческой фантазии и воли — с другой.
>
> 6) Готовые наглядные пособия, конечно, полезны, но важнее всего самодеятельность учеников, а потому изготовленные ими самими наглядные пособия и затраченный при этом планомерный физический труд еще полезнее, чем готовые наглядные пособия.

Все наглядные пособия автор делил на четыре группы: а) готовые наглядные пособия; б) изготовленные учителем при содействии учащихся; в) изготовленные учащимися при помощи учителя; г) изготовленные учащимися на дому или в школе самостоятельно.

В курсах начальной геометрии, естественно, большое внимание уделяется наглядности: всевозможным рисункам, схемам, таблицам, чертежам, моделям, иллюстрациям и т. п.

В 20-е годы XX столетия у нас в стране очень увлеклись идеей «комплексов». Например, в математике, наряду с традиционными курсами, в комплексах стали изучаться элементы высшей математики — аналитической геометрии, начал математического анализа, начертательной геометрии, теории вероятностей. Позже это было признано ошибочным. В 1934 г. было принято решение о создании трех ступеней школы: начальной, неполной средней и средней. Школа стала единой, все учащиеся должны были получить одинаковый объем знаний, что выразилось в создании единых программ и учебников. С одной стороны, это сыграло свою положительную роль, так как привело к созданию стабильных учебников, в частности, по геометрии *А. П. Киселева* [64] и задачника *Н. А. Рыбкина* [115]. С другой стороны, было отброшено и много полезного, например элементы высшей математики и фузионистский подготовительный курс геометрии.

В итоге передовой дореволюционный опыт долгое время не использовался, только сейчас начинается возрождение таких курсов наглядной геометрии. А связующим звеном между прошлым и настоящим являются две значительные работы: *П. А. Карасева* [62] и *А. М. Пышкало* [112]. Автор первой названной работы считал, что, в отличие от геометрического материала в младших классах, «наглядная геометрия» (которую он называл также интуитивной) не должна быть придатком к арифметике, вырождаясь в изучение мер длины, площади и объема. Им был разработан «наглядный метод» изучения геометрии в младших классах, в основу которого были положены «живое» созерцание, конструирование, моделирование, построения и измерения. Книга содержит оригинальные упражнения, например с нитью, листом бумаги, палочками и т. п.

Большой заслугой А. М. Пышкало является выделение так называемых у р о в н е й г е о м е т р и ч е с к о г о р а з в и т и я.

I. Исходный уровень — характеризуется тем, что геометрические фигуры воспринимаются как целое. Учащиеся не видят частей (элементов) фигуры, не воспринимают отношений между элементами фигуры и фигурами.

II. Учащиеся начинают различать элементы фигур, устанавливать отношения между этими элементами и отдельными фигурами, т. е. на этом уровне производится анализ воспринимаемых фигур. Это происходит в процессе (и с помощью) наблюдений, измерения, вычерчивания, моделирования. Свойства фигур устанавливаются экспериментально.

III. Учащиеся устанавливают связи между свойствами фигуры и самими фигурами. На этом уровне происходит логическое упорядочивание свойств фигуры и самих фигур. Выясняется возможность следования одного свойства из другого; уясняется роль определения.

IV. Учащиеся постигают значение дедукции в целом как способа построения и развития всей геометрической теории. Переходу на этот уровень способствует усвоение учащимися (понимание ими) роли и сущности аксиом, определений, теорем; логической структуры доказательства; анализа логических связей понятий и предложений.

V. Этот уровень мышления в области геометрии соответствует современному (гильбертовскому) этапу строгости. На этом уровне достигается отвлечение от конкретной природы объектов и конкретного смысла отношений, связывающих эти объекты. Человек, мыслящий на таком уровне, развивает теорию вне всякой конкретной интерпретации. Геометрия здесь приобретает общий характер и более широкое применение.

Переход от одного уровня к другому не может происходить произвольным образом и зависеть только от возрастных особенностей школьников. Геометрическое развитие, идущее к более высокому своему уровню, протекает в основном под влиянием обучения, т. е. прямо зависит от его содержания и методов. Конечно, никакая, даже совершенная, методика не дает возможности перескакивать через уровни, но все же переход от одного уровня к другому, время этого перехода во многом зависят от методики. Учащиеся младших классов должны достичь второго уровня геометрического развития. Ученым была разработана и представлена соответствующая система изучения геометрии в I—IV классах, причем он полагал, что процесс геометрического развития должен быть:

а) непрерывным (не допускать пропусков — периодов бездействия);

б) равномерным (не допускать перегрузки на каких-то этапах);

в) разнообразным (касаться многих сторон в изучении пространственных отношений).

Разнообразие, по мнению автора, нужно понимать в смысле одновременного ознакомления учащихся с двумерной и трехмерной геометрией.

К сожалению, эти работы по созданию самостоятельного подготовительного пропедевтического курса геометрии младших классов не нашли тогда должного понимания.

В настоящее время, в период модернизации школьного образования, возрождается интерес к курсу наглядной геометрии, и очень хотелось бы, чтобы его авторы помнили и не забывали славные традиции истории российской методики преподавания этого важного раздела школьной математики.

§ 4. Исторические аспекты дифференциации обучения

В последние годы в связи с профильным обучением, появлением школ и классов различной профильной направленности, в том числе гуманитарных, социально-экономических, технологических, естественно-математических и других, по-новому встают вопросы о целях, содержании, формах и методах преподавания математики в школе, о месте и роли каждого школьного предмета.

Идея дифференциации обучения является отнюдь не новой для отечественной школы. Его истоком можно считать *фуркацию* обучения — разделение учебных планов и программ с целью такой специализации учащихся, которая совместима с сохранением общеобразовательного характера школы.

Для того чтобы лучше понять, осознать то, что происходит с современной школой, правильно и разумно наметить пути ее преобразования, в частности, в решении вопросов дифференциации обучения, необходимо обратиться к его истокам.

Организация различных школ в XVIII в.

Система образования в России стала складываться при *Петре I*. Он наметил основной путь — путь создания широкой сети общеобразовательных школ, специальных школ и училищ. Общеобразовательные школы назывались цифирными, так как в них особое внимание обучаемых обращалось на изучение арифметики и геометрии. Были созданы также военные гарнизонные школы, где преподавали офицеры. В этих школах, помимо грамоты и математики, учащиеся знакомились с основами артиллерии и «инженерства».

По приведенным примерам хорошо видно, что в России этого периода стали образовываться школы различной практической направленности, готовящие учащихся к различным профессиям. Однако закладывались не только основы практического, или, как позже его назвали, реального образования, но и общего — классического. Петр прекрасно понимал, что для закрепления и развития реформы, обновления России нужна наука, нужны свои ученые. В 1724 г. последовал высочайший указ об организации *Академии наук*, а при ней университета и гимназии. Эту последнюю можно считать прообразом современных лицеев.

Создавались школы не только для дворянских детей, но и для детей рабочего люда. Например, в 1721 г., по инициативе *В. Н. Татищева*, русского историка, государственного деятеля, активно осуществлявшего петровские реформы, создаются школы для рабочих при Уктусском заводе на Урале, в 1737 г. — горнозаводские школы в Екатеринбурге, Соликамске, Каменске. Эти школы выполняли функции профессионально-технических училищ [6].

Большой вклад в развитие академических гимназий внес *М. В. Ломоносов*. Он уделял много внимания развитию отечественной науки и просветительству. Именно по его инициативе были основаны в 1754 г. *Московский университет* и гимназия при нем. Ее преподаватели в 1771 г. выпустили коллективный труд «Способ учения», который по праву можно считать одной из первых работ по методике преподавания. В ней, в частности при обучении математике, рассматривается использование принципов активности и сознательности, «чтобы все предлагаемые доказательства разуметь могли». Интересно отметить, что преподаватели считали, что сначала необходимо преподавать чистую математику для совершенства человека, а уже затем смешанную, т. е. прикладную.

Следующей важной и заметной вехой в дифференциации обучения было создание гимназий (их также называли государственными училищами) разного типа, «чтобы каждый своему приличному состоянию, склонности и определению обучаться мог». Таким образом, в основе дифференциации лежали не только сословные различия, но индивидуальные особенности и интересы учащихся. Были открыты школы следующих т и п о в.

1) Училища для ученых людей. Они готовили выпускников для поступления в университеты, в них очень серьезно был поставлен курс математики, в частности геометрии.

2) Военные училища. Любопытно, что в них геометрия использовалась при изучении таких предметов, как фортификация, архитектура, география (она даже называлась математическая география).

3) Гражданские училища. Здесь изучались арифметика, геометрия и логика. Выпускники этих училищ работали в коллегиях и канцеляриях.

4) Купеческие училища. Геометрия также была здесь обязательным предметом, но большее значение уделялось коммерческой арифметике, составлению и ведению счетов, различных расчетов и т. д.

Вдохновителем создания гимназий такого типа и составителем генерального плана их развития, который появился в 1764 г., был *Г. Н. Теплов*.

В последней трети XVIII в. в России стало бурно развиваться крупное промышленное производство. При этом сильно отставала техника, нужны были соответствующие инициативы. Большое значение стало придаваться обучению профессии. В 1786 г. появился Устав об организации обучения в народных училищах. Согласно ему, были созданы малые и главные училища, предусматривающие изучение общеобразовательных и реальных дисциплин. Серьезное внимание уделялось естественным и прикладным предметам.

Особо отметим, что в конце XVIII в. в работах передовых просветителей и педагогов появилась мысль о том, что одной из главных целей обучения в школе является выявление у ребят индивидуальных задатков, склонностей, интересов и их активное использование в обучении. Например, в работе «О воспитании» *А. А. Прокопович-Антонский* [6] говорил, что «первым правилом воспитатель должен поставить себе то, чтобы заблаговременно исследовать способности воспитанника, смотрению его вверенного, и сообразно силам и дарованиям молодого человека размерять труды об нем и старания. Никто не родится в свете, не получив к чему-нибудь способности...Внутренняя наклонность всегда готова раскрыться в нас, надобно токмо удачно тронуть ее. Узнавши способности ума, надлежит употреблять средства, способствующие развертыванию их направлению к доброй и спасительной цели».

В работе «О воспитании и наставлении детей» другой известный просветитель и писатель *Н. И. Новиков* прямо говорит о том, что, чтобы сделать человека счастливым и полезным гражданином, нужно «возбудить в нем охоту и склонность к изучению для него нужного, если учитель точно знает собственные ему силы и способности и отношения, в каком они одна к другой находятся. В сем случае нужно только часто и долго придержать в душе его те предметы, которые для склонностей его более прочих имеют прелести и которыми охотнее всего занимается он по натуральному побуждению».

Итак, XVIII в. — время значительных достижений и преобразований в сфере просвещения, создания государственной системы образования, сети государственных общеобразовательных и профессиональных школ разного типа, обучение в которых носило элементы дифференцированного характера. Причем основанием для дифференциации были не только потребности общества в различных профессиях, но и индивидуальные особенности, интересы школьников. В лексикон прочно вошли и стали широко употребляться термины: «академия», «университет», «гимназия», «школа», «училище».

Школа первой половины XIX в.

Начало XIX в. ознаменовалось реформой образования. В 1802 г. были учреждены министерства, в том числе Министерство народного образования, что способствовало централизации государственного аппарата. Первым его действием было создание новой системы образования. В ней предусматривались следующие четыре ступени.

1) Высшая — университеты.
2) Средняя — гимназии.
3) Промежуточная — уездные училища.
4) Низшая — приходские училища.

Именно гимназии соответствовали современным старшим классам. В них не было дифференциации обучения, точнее почти не было, потому что в некоторых гимназиях разрешалось увеличивать число учебных предметов, когда находились способные к тому или иному предмету ребята, что было специально занесено в устав гимназии. Можно считать, что это было первым прообразом такой формы дифференцированного обучения, как факультативные занятия или занятия по выбору. В остальном же гимназии подчинялись одной программе, ориентированной на практическое, реальное образование. Эта цель определяла и набор изучаемых предметов, и конкретные программы по ним. Назовем обязательные предметы: чистая и прикладная математика; опытная физика; история; география; статистика; философия; изящные науки; политическая экономика; естественная история; начальные основания наук, относящиеся к торговле и технологии: языки — латинский, немецкий, французский; рисование. Гимназия состояла из четырех классов, и математика распределялась по ним следующим образом:

1 класс — чистая математика: алгебра, геометрия и плоская тригонометрия. Причем учителю предписывалось вести алгебру и геометрию вместе, чтобы использовать алгебру в решении геометрических задач.

2—4 классы — прикладная математика. В это время придавали первостепенное значение приложениям наук, о чем свидетельствует и перечень гимназических учебных предметов.

Еще одним проявлением дифференциации обучения в это время было создание для особо одаренных ребят лицеев, в которых, естественно, обучались в основном дети дворян. Самым знаменитым среди них был открытый в 1811 г. Царскосельский лицей. Говоря современным языком, он имел ярко выраженный гуманитарный профиль. Математика, хотя и занимала второстепенное место, была обязательным предметом для изучения, причем ее значение и удельный вес возрастали к старшим классам.

На начальном этапе обучения предпочтение отдавалось словесным наукам — грамматике, истории, словесности, языкам, так как эти науки с большим успехом изучаются в более младшем возрасте.

У старшеклассников первое место занимали нравственные, физические и математические науки. Здесь предлагалось закончить курс алгебры, пройти курс сферической тригонометрии и курс геометрии пространства, в котором наибольшее значение и место занимала тема конических сечений. На этой основе изучался мощный курс прикладной математики: статика, гидравлика, артиллерия и фортификация.

Представленное распределение предметов, акцентов в их изучении объяснялось тем, что в младших классах нужно изучать то, что развивает память, а в старших — то, что развивает разум. Поэтому даже для гуманитариев математика оставалась актуальным, нужным и важным предметом.

В первой половине XIX в. складывалось практическое, или реальное, образование. В частности, учитель математики обучал своих учеников практической геометрии, показывал, как работают гидравлические машины, мельницы и другие механические устройства.

Естественно, не все были довольны перевесом реальных учебных предметов. Появились сторонники другого, так называемого классического, или гуманитарного, образования. Практическое воплощение дискуссия о разнице и преимуществах того и другого образования нашла уже в следующей реформе образования во второй половине XIX в., и выразилось это в учреждении классических и реальных гимназий.

По сути, те же проблемы обсуждаются и в настоящее время. Например, чему учить юношество, только ли тем предметам, которые им интересны, к которым они способны? Нужна ли гуманитариям математика? Если да, то какая, в каком объеме? При этом поражает современность и острота рассматриваемых вопросов, глубина их обсуждения.

Обратим внимание на несколько характерных черт, идей, высказанных в это время и непосредственно касающихся обсуждаемой нами проблемы. Во-первых, предмет «математика» признавался всеми и включался как обязательный в учебные заведения всех типов, хотя в то время наука «математика» еще не имела такого значения, как в современном мире сейчас. Высказывалось мнение о том, что математика развивает ум, необходимый человеку для работы в любой научной области, в любой профессии. Например, об этом говорил *Н. И. Лобачевский*: «Успехи математических наук, затмивши всякое другое учение, справедливо удивляют нас; заставляют признаться, что уму человеческому предоставлено исключительно познавать сего рода истины, что он, может быть, напрасно гоняется за другими; надобно согласиться и с тем, что математики открыли прямые средства к приобретению познаний...в ней юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения». Важно отметить, что Лобачевский заботился о том, чтобы выяснять и развивать способности учеников. «Что же надобно сказать о дарованиях умственных, врожденных побуждениях, свойственных человеку желаниях? Все должно оставаться при нем: иначе исказим природу, будем ее насиловать и повредим его благополучию» [84].

Кроме того, передовые педагоги говорили о специфических особенностях обучения в различном возрасте, т. е. о дифференциации обучения по основным возрастным группам. Так, в работах известного просветителя *И. Ф. Богдановича* содержится руководство по образованию и воспитанию детей от 6 до 10 лет; от 10 до 13 и от 13 до 16 лет. У него много замечательных практических советов родителям и учителям, в частности по выявлению и развитию склонностей ребенка. Причем для выявления способностей у детей 10—13 лет предлагается давать разнообразные задания на практическое применение математики. В старшем школьном возрасте он считал необходимым особо развивать эти склонности. «В сем возрасте юноша ... обнаруживает более свои склонности и открывает, так сказать, круг тех способностей, коими природа его одарила. А потому внимательно примечая, к чему имеет охоту, не только прибавить должно время для усовершенствования его в любимом им предмете, но и той науке, выбрав лучших авторов, позволить заниматься чтением таким образом, чтобы он прочтенное им подробно пересказывал с прибавлением своих собственных размышлений» [8].

Другой известный педагог, доктор медицины, философ *И. М. Ястребцов* в одной из своих многочисленных книг по дидактике «Об умственном воспитании детского возраста» дал советы о том, как приняться за науки, чтобы лучше и легче преуспеть в них. Он одним из первых высказал идею об индивидуализации обучения, в основе которого должны лежать психологические особенности человека» [Там же].

При этом автор считал, что у каждого человека есть три главные обязанности, три долга: к самому себе, к Отечеству и к человечеству. Долг к себе требует, прежде всего, раскрытия умственных и нравственных способностей. Нераскрытие этих способностей в младшем возрасте автор рассматривает как преступление против человека и как залог его несчатья в жизни. А если человек в зрелом возрасте не совершенствует свои способности, то это уже преступление самого человека, так как он не сможет выполнять два других своих долга. Таким образом, в данном случае высказаны вполне современные взгляды на основные цели обучения, на становление и развитие личности каждого человека.

Необходимо отметить и специально подчеркнуть, что именно в XIX в. были заложены основы педагогической психологии и провозглашены тезисы о воспитывающем и развивающем обучении. Мы находим подтверждение этому в работах многих выдающихся педагогов и просветителей того времени. Например, *Е. О. Гугель* — известный педагог, автор многих учебных книг, один из издателей «Педагогического журнала», — отметил у себя метод взаимного обучения, т. е. обучения всех одному и тому же материалу. Он делил класс на параллельные отделения в зависимости от успехов ученика в изучении предмета, в частности математики. По-существу, он использовал уровневую дифференциацию.

Школа второй половины XIX в.

В середине XIX в. началась новая реформа среднего образования. Ее политическим фоном была обострившаяся борьба против крепостного права. После его отмены традиционная система подготовки учащихся к определенной профессии, т. е. прикладное реальное среднее образование, была подвергнута резкой критике, что нашло отражение в новом Уставе школы 1864 г. В нем учреждались классические и реальные гимназии, причем фуркация начиналась с первого класса. В классических гимназиях преподавали латинский и греческий языки, естественную историю, этого не было в реальной гимназии, где большими были курсы естествознания, математики и физики. Другие предметы — закон божий, русский язык, история, география — преподавались в обоих типах гимназий в одинаковом объеме.

Необходимо особо отметить, что в этом уставе учителям гимназии предоставлялась достаточно широкая свобода в преподавании. Если прежде не разрешалось отступать от программы, принятого учебника, то теперь педагогический совет каждой гимназии был вправе сам решать, по какой программе и по какому учебнику следует обучать учащихся.

Позже такое деление на классические гимназии и реальные училища (так с 1871 г. назывались реальные гимназии) было признано ошибочным в силу очень ранней возрастной специализации, когда дети еще не определили свои склонности, способности, интересы. Классическая гимназия соответствовала одностороннему гуманитарному образованию филолого-грамматического направления. В реальных училищах общее образование давалось в первых четырех классах, а начиная с пятого, вводилась специализация по двум отделениям — основному и коммерческому с разными курсами: с 7 класса учащиеся могли выбрать одно из отделений — общее, механическое или химическое. В этих училищах большое значение придавалось курсам математики: чистой и прикладной. Фактически механическое отделение соответствовало современному углубленному изучению математики и физики.

Именно в конце XIX в. из отдельных элементов стала складываться система дифференцированного обучения, его теоретическое обоснование. Большой вклад в это внесли, в частности, работы видного педагога-просветителя *В. Я. Стоюнина* [137]. Например, в его произведении «Мысли о наших гимназиях» говорится о том, что старших школьников нужно учить немногим предметам, но как следует, «обременяя и развлекая юношей множеством разнообразных предметов, можем ли мы требовать от них какого-либо направления, когда им не приходилось преследовать никакой мысли, не приходилось ни над чем долго и серьезно задумываться за неимением времени».

В другой своей работе «По поводу преобразования реальных гимназий» Стоюнин говорит об односторонности гимназического образования, которое в основном носит специально-филологическое направление. По мнению автора, для учащихся старших классов, наряду с гимназиями, необходимо открывать различные технические школы. Причем математика называлась обязательным предметом для изучения в юношеском возрасте, так как служит «ценным приобретением для общего развития, обращая ум на многообразность творений и ограждая его от односторонности, легко проистекающей от непрерывных занятий отвлеченными понятиями».

Среди значительных работ, посвященных исследуемой проблеме, необходимо отметить произведения выдающегося педагога и психолога *П. Ф. Каптерева*. В работе «О разнообразии и единстве общеобразовательных курсов» поражают звучащие абсолютно современно мысли о необходимости дифференциации обучения в старших классах. Основой дифференциации называются различные индивидуальные особенности учащихся. Причем Каптерев рассматривал психологический аспект индивидуальных особенностей. Его перу принадлежит монография «Педагогическая психология», изданная в 1876 г. и предназначенная для учителей и воспитателей. По глубине идей, которые в ней заложены, П. Ф. Каптерева по праву можно считать основателем этого направления в отечественной психологии. Говоря о содержании предлагаемого учебного материала, автор говорит об общей, обязательной части каждого курса, в частности математики. Причем он подчеркивает, что до старшего школьного возраста, «когда умственные склонности учащихся еще не определились, нельзя вводить такие предметы или такие отделы предметов, которые для своего усвоения требуют особенных способностей, особых умственных расположений; сначала нужно давать то, что равно необходимо всем желающим считаться образованными людьми. Пусть сначала определенно выяснятся особые умственные расположения на общепригодных упражнениях». Далее подчеркивается важность и одновременно трудность составления обязательной части общеобразовательного курса, в котором определяются и раскрываются индивидуальные способности учеников. Постепенно обязательные курсы по каждому предмету сокращаются и уступают место *факультативным*. Специально подчеркнем, что это термин самого автора. Причем факультативными являются общеобразовательные предметы, а не другие, которые не изучались в школе. Автор поясняет свою мысль на примере математики, которая, «по крайней мере, в небольшом объеме должна войти в число общеобразовательных предметов; но она же в большем объеме в высших отделах и с более серьезной постановкой может быть и факультативным предметом» [7].

Проблемами дифференциации обучения интересовался и другой видный ученый и педагог *К. П. Яновский*. Ему принадлежат работы, в которых обсуждаются вопросы, актуальные и по сей день. Вот названия нескольких его работ: «Самодеятельность учащихся», «Отношение обучения к воспитанию», «Врожденные качества и способности и развитие последних посредством воспитания». В последней названной работе автор говорит о том, что способности ребенка к чему-то могут и не быть заметными в младшем школьном возрасте, более того, они могут даже не проявиться, если не попадут в среду, благоприятствующую их развитию. Таким образом, важный момент в обучении — это выявление способностей учащихся и создание необходимой для их дальнейшего развития среды. При этом автор предостерегает учителей от односторонности развития, так как «при развитии какой-либо одной из врожденных особенностей в ущерб другим, ей противоположным, нарушается равновесие душевных сил воспитанника в ущерб всей духовной его стороне» [Там же].

Далее автор говорит о всестороннем и гармоничном развитии каждого отдельного индивидуума. Ввиду различных способностей в учениках к разным предметам, «нельзя не признать крайне неблагоразумными требования школы от разных учеников одинакового объема научных знаний и умений». Такие требования Яновский считал антипедагогическими и, таким образом, уже в XIX в. проповедовал уровневую дифференциацию как наиболее естественную и соответствующую всестороннему развитию своих воспитанников.

Таким образом, к концу XIX столетия идея фуркации обучения стала одним из центральных вопросов начавшейся реформы образования. Фуркация в преподавании математики широко обсуждалась на исторических Всероссийских съездах преподавателей математики, о которых уже говорилось выше. Проанализируем их материалы с точки зрения рассматриваемой проблемы.

I и II Всероссийские съезды преподавателей математики

Проблема фуркации обучения специально дискутировалась на I съезде, который открылся докладом *А. В. Васильева* «Математическое и философское преподавание в средней школе» [141], в котором, наряду с другими вопросами, ставился вопрос о необходимости индивидуализации преподавания в старших классах. Эту мысль развил *А. В. Полторацкий*, выступивший в прениях по докладу. Он указал на решающее значение для успеха математического образования принципа индивидуализации. «Пока у нас будет стремление нивелировать всех по одной указке, заставлять работать по одной программе, при самой лучшей программе можно не достигнуть больших результатов, но когда выпадает больше свободы в выборе у преподавателей и у воспитанников, тем лучше будут результаты».

В докладе *В. В. Лермантова* «Содержание курса школьной математики с точки зрения современных запросов жизни и приемы для посильного выполнения школою этих требований» указывается на то, что в современной школе не принято обращать внимание на природные способности, склонности учеников, в школе наметилось стремление, «научая всех всему, довести всех их до одного уровня познания по всем предметам обучения». В действительности, как продолжает докладчик, способности учеников весьма разнообразны и неучет этого обстоятельства приводит к тому, «что более способные недоучиваются, а наибольшим успехом в школе пользуются заурядные ученики с отличной памятью и отсутствием интереса к какой-либо из предъявляемых наук, ... многие из них показывают большой интерес к самому процессу учения, оставаясь в то же время вполне свободными от науки». Затем автор предлагает конкретные пути реализации принципа индивидуализации, которые сводятся, с одной стороны, к понижению общих требований до уровня, доступного почти всем ученикам, с другой стороны, к повышению этих требований для ребят, способных к математике, за счет внеклассного ее изучения. Таким образом, появилось предложение о факультативном изучении математики.

Вопрос о развитии способностей учащихся тесно связывался с проблемой фуркации обучения, которая была затронута в трех докладах *К. А. Поссе*, *В. Б. Струве* и *Д. М. Синцова*, посвященных согласованию программ по математике средней и высшей школ [141].

Так К. А. Поссе в своем докладе обратил внимание на то, что многие молодые люди, поступившие на физико-математический факультет университета или в технические школы, оказываются совершенно не подготовленными к изучению высшей математики и переходят поэтому на другие факультеты. В связи с создавшимся положением докладчик предложил следующее: «Наиболее рациональным способом удовлетворить требованиям высшей школы, не вступая в конфликт с общеобразовательными целями средней школы, является разделение курса математики на общий, обязательный для всех, и специальный, обязательный для тех, кто желает поступить на математическое отделение физико-математического факультета или высшую техническую школу». Для будущих математиков, физиков, инженеров, по мнению докладчика, в школе должны быть введены систематические курсы, включающие в себя аналитическую геометрию и математический анализ. Разумеется, такие курсы не должны быть обязательными для всех, «действительного, а не формального согласования программ в средней и высшей школах лучше всего можно достигнуть при такой организации школы, которая допускает специализацию преподавания в старших классах средней школы, приуроченную к индивидуальным способностям учащихся».

Эти же идеи отстаивал в своем докладе В. Б. Струве. Он отметил, что преподаватели часто говорят о переутомлении учащихся, о вреде многопредметности, о необходимости концентрировать обучение на основательном изучении немногого (классическое *non multa*, *sed multa*), о важности индивидуализации. Автор особо подчеркнул, что ни усовершенствование методов преподавания, ни приспособление программ к современному уровню науки не может решить этих проблем. Залог успеха в перестройке самой системы образования, по крайней мере, на высшей ступени средней школы. «До тех пор, пока мы не дадим возможности учащемуся на известной ступени его развития сосредоточиться на небольшом цикле дисциплин, соответствующем его индивидуальному духовному складу, мы не достигнем у него той умственной зрелости и силы, которая необходима для успешного прохождения высшей школы». В. Б. Струве считал, что фуркация должна быть проведена не только по отношению к будущим физикам, математикам и инженерам, но и к будущим натуралистам, медикам, юристам, филологам и т. д. Сразу возникает много вопросов по перестройке обучения. Например, с какого класса начинать специализацию, каков объем и содержание курса математики должен быть в общеобразовательных, математических и других классах. По мнению докладчика, который ссылался на уже имеющийся солидный опыт французской школы, специализация должна начинаться с 14 лет, именно к этому возрасту определяются склонности и интересы учащихся. В математические классы должна перейти «значительная и существенная часть элементов высшей математики в их вполне научной форме и в том приблизительно объеме, в котором они ныне читаются на обязательных лекциях двух первых годов учебного плана высших школ и отчасти математического факультета университета».

В третьем докладе «О согласовании программ средней и высшей школы» Д. М. Синцова обращалось внимание на соблюдение двух основных требований, предъявляемых к преподаванию в старших классах, а именно: средняя школа должна давать законченное образование; средняя школа должна «подготовлять» к высшей.

При этом постановка преподавания в средней школе должна быть такова, «чтобы начинающему учиться была обеспечена возможность пойти так далеко, как этого требуют его способности и насколько позволяют его жизненные условия». Далее докладчик отметил, что из 100 поступивших на первый курс физико-математического факультета университета только 60 переходят на второй. Вину за это нельзя возлагать только на высшую школу.

Конкретные предложения докладчика сводились к следующему: дать возможность для лучших учеников низшей школы продолжать образование в средней; разделить среднюю школу на два цикла, дающие каждый законченное образование; сократить курс классической гимназии на один год и образовать последний дополнительный класс; в реальных училищах возможна прибавка одного класса для уравнивания тех и других в общем образовании. «Только тогда, когда каждому Ломоносову будет обеспечена возможность дойти до Академии наук, и каждому, вынужденному оставлять образование на том или другом этапе пройденного пути, будет даваться достаточно общего образования для последующей его деятельности, будет школьное обучение доставлять наибольшую возможную пользу всем его получающим».

Приведенные материалы позволяют говорить о широком и серьезном обсуждении проблемы фуркации на I Всероссийском съезде преподавателей математики. Это нашло отражение в его заключительных резолюциях, две из которых посвящены фуркации.

1. Съезд признает желательной подробную разработку вопроса о такой организации преподавания в средней школе, которая, сохраняя общеобразовательный ее характер, допускала бы специализацию в старших классах, приноровленную к индивидуальным способностям учашихся и удовлетворяющую требованиям высшей школы.

2. Съезд признает желательным, чтобы наиболее одаренные в математическом отношении учащиеся могли найти в учебном заведении удовлетворение своим запросам, а также организованное руководительство со стороны учебного персонала.

После съездов Министерство народного просвещения не могло не прислушаться к мнению столь авторитетного коллектива, и уже в 1915 г. были решены важнейшие проблемы реформы школьного образования, в том числе проблема фуркации. В старших классах предусматривалось четыре отделения: ново-гуманитарное, гуманитарно-классическое, естественное и математическое. Комиссия по математике во главе с К. А. Поссе разработала учебные планы и программы по математике для каждого отделения. Но этим красивым проектам не суждено было сбыться из-за начавшейся вскоре революции. Хотя идея фуркации привлекала передовых педагогов и после революции, однако перестройка всей системы народного образования, ликвидация неграмотности, тяжелые годы войны приостановили реформу математического образования.

Школа с 1917 по 1988 г.

В первые же годы советской власти был провозглашен тезис о единой, трудовой и политехнической школе, что было связано с новыми социально-экономическими преобразованиями в нашей стране. Была взята четкая ориентация на профессиональное, или в терминах XIX в. реальное, образование. Важным шагом в построении новой системы образования был проведенный в 1918 г. I Всероссийский съезд по просвещению, на котором принимались основные документы, а именно: «Положение о единой трудовой школе» и «Основные принципы единой трудовой школы». В период подготовки съезда вопрос о фуркации в старших классах обсуждался и вошел в первоначальный проект документов. Предполагалась фуркация по трем главным направлениям образования: гуманитарному, естественно-математическому и техническому, для того чтобы удовлетворить склонности молодежи и облегчить ей выбор профессии. Однако на съезде принцип фуркации подвергся резкой критике. Основные возражения сводились к тому, что фуркация является анахронизмом, пережитком старой царской школы, приводит к неравным возможностям для разных социальных слоев населения и противоречит принципу единства школы.

Любопытно заметить, что в защиту фуркации выступил первый нарком просвещения *А. В. Луначарский*. В своем выступлении на съезде он подчеркнул, что единство школы вовсе не означает ее однообразия или унификации, наоборот, фуркация помогает раскрыться детским возможностям. «Под единой школой мы не подразумеваем школу однообразную. Единая школа — это школа, одинаковая для всех в смысле права на поступление в нее и прав, которые она дает по окончании. Но вместе с тем мы предполагали, что школа, особенно второй ступени, будет разнообразна. Мы считали возможным и даже рекомендовали, чтобы старшие классы второй ступени имели разделение на 2—3 факультета, чтобы подростки, сообразно своим наклонностям, могли избирать ту или иную специальность» [120].

Однако разделение обучения в старших классах пошло по другому пути. Школа стала единообразной, одинаковой для всех учащихся. Ведущим принципом обучения стало *политехническое обучение*.

По мнению специалистов, а в данном случае сошлемся на авторитет *А. Г. Калашникова*, политехническое обучение должно включать в себя следующие три главные части [59].

1. Усвоение учащимися основ наук в связи с применением их на практике. 2. Знакомство с общими принципами индустрии и сельского хозяйства. 3. Практическое участие в учебном и производительном труде.

Отсюда видно, что в школе вводилась профессионализация, причем по двум направлениям: индустриальному и сельскохозяйственному. Выбор зависел только от места расположения школы. Такую специализацию нельзя считать бифуркацией в том понимании, какое ей придавалось в дореволюционной школе. В XIX в. и начале XX в. фуркация проводилась, как мы видели выше, по направлениям знаний, которые выбирались учащимися в соответствии с их интересами и способностями. И все же полифуркация в настоящем смысле была осуществлена после революции, но не в средних школах, а на рабфаках. Они были созданы в 1921 г. и имели три отделения: техническое, биологическое и общественно-экономическое. Фуркация по этим отделениям в дальнейшем явилась основой для создания рабфаков по отраслям высшего образования: втузы, педвузы, сельхозвузы и др.

В 1934 г. было принято решение о трех типах школ: начальной, неполной средней и средней. Школа была единой, все учащиеся должны были получить одинаковый объем знаний. Выразилось это в создании единых программ и учебников.

Про фуркацию обучения учащихся в зависимости от их интересов, природных способностей и склонностей забыли почти до середины 50-х годов прошлого века. Именно в это время, время социальных преобразований, в нашей стране началось движение за новую реформу школьного образования.

В 1958 г. на одном из заседаний президиума Академии педагогических наук с докладом «О введении фуркации в старших классах средней школы» выступил профессор *Н. К. Гончаров*. Он, в частности, заметил, что программы по математике очень перегружены, содержат много второстепенных фактов, что вызывает не только переутомление учеников, но нарушает систему знаний, преемственность и взаимосвязь в обучении. Это приводит, в свою очередь, к тому, что знания нередко становятся формальными и недостаточно жизненно значимыми. Кроме этого, полная унификация учебных планов в старших классах противоречит, во-первых, возрастным особенностям старшеклассников, во-вторых, требованию всестороннего развития каждого молодого человека. Эти проблемы, по мнению Н. К. Гончарова, с успехом могут быть разрешены путем введения фуркации, т. е. «создания в старших классах такой системы дифференцированного обучения, которая позволяет учащемуся, наряду с получением среднего образования, более углубленно и основательно изучить предметы избранной им области».

На смену дореволюционному термину «фуркация» пришел новый термин — «дифференциация», или «дифференцированное обучение». Началась новая история фуркации обучения.

Дифференциация представляется довольно удачным термином, так как в переводе с латинского слово *differentia* означает «разница, различие, разделение». Он был включен в педагогическую энциклопедию (том 1) в 1964 г. и трактовался применительно к общеобразовательной школе как разделение учебных планов и программ в старших классах средней школы.

Одним из первых стал употреблять новый термин «дифференциация обучения» *Н. К. Гончаров* [41]. В это время дифференциация рассматривалась как разделение содержания образования, на основе чего разрабатывались дифференцированные учебные планы, «отвечающие как индивидуальным склонностям, способностям и интересам учащихся, так и задаче воспитания в школе будущих новаторов производства, талантливых математиков, техников и физиков, механиков и историков и т. д.».

Выделяются две основные цели дифференциации.

1. Дать выпускникам хорошую специальную подготовку к практической деятельности.

2. Обеспечить подготовку к дальнейшему продолжению образования в высших учебных заведениях.

Таким образом, дифференциация служит для профессиональной подготовки учащихся. Такое образование — нечто среднее между дореволюционным классическим и реальным образованием. По наблюдениям Н. К. Гончарова, способности учащихся в массовом виде начинают проявляться к 8 классу. Именно в этом классе необходимо особенно тщательно изучать и выявлять индивидуальные способности учащихся с тем, чтобы с 9 класса перейти к дифференцированному обучению. Установить одиннадцатилетний срок среднего образования, при этом подняв уровень всеобщего обязательного обучения с семилетки до восьмилетки. Следовательно, основной обязательной школой становится восьмилетняя школа, после окончания которой учащиеся могут переходить в среднюю общеобразовательную политехническую школу с трехлетним сроком обучения. Заметим, что позже, с 1966 г., школа опять перешла на двухлетнюю старшую ступень, т. е. стала десятилеткой. Н. К. Гончаров предполагал создание в старших классах следующих четырех отделений.

1) Физико-технического. 2) Химико-технического. 3) Естественно-агрономического. 4) Гуманитарного.

Эта система была подробно разработана для каждого отделения и внедрена в практику школы № 710 г. Москвы в 1958/1959 учебном году. Математика, бесспорно, была названа общим предметом для всех отделений. На каждом отделении предусматривались часы на общеобразовательные предметы, по которым идет специализация.

К началу 60-х годов прошлого века в нашей стране стала складываться сеть специализированных математических школ и классов, что было связано с потребностью большого количества специалистов по прикладной математике, прежде всего программистов, инженеров, конструкторов и т. д. Возникло два типа математических школ и классов. Во-первых, при ведущих университетах и вузах были открыты математические школы-интернаты для особо одаренных ребят и, во-вторых, в некоторых общеобразовательных школах были созданы специализированные математические классы, позже названные классами с углубленным изучением математики. В этих классах было увеличено количество часов для изучения математики, расширена программа по сравнению с общеобразовательным курсом, в основном за счет введения тем из курса математического анализа, например теории пределов, дифференциальных уравнений и т. д. Программа по геометрии нового материала практически не содержала.

Существовал и другой проект построения системы дифференцированного обучения, когда разделение проводилось не по научно-теоретическим отделениям (физико-математическому, гуманитарному, химическому, биологическому и т. п.), а по научно-техническим направлениям. В основу такой дифференциации старших классов были положены особенности изучаемых технологических процессов (прикладная машинная математика, механическая технология, химическая технология, электрорадиотехника и т. п.).

Сторонники дифференциации выдвигали два основных тезиса [121].

1. Полная унификация учебных планов старших классов находится в противоречии с общественными потребностями, с требованиями психологии юности и задачей всестороннего развития способностей, дарований, талантов молодого поколения, дифференциация же является целесообразной формой индивидуализации занятий.

2. Дифференциация обеспечивает безболезненный переход из средней школы в высшую, она формирует индивидуальные интересы учащихся и способствует сознательному выбору высшей шко-

лы. Дифференциация помогает всестороннему развитию личности. Наконец, она является известной базой и для подготовки учащихся к практической деятельности.

У дифференциации в то время было немало противников. Основные возражения против нее сводились к следующему:

1) Дифференцированная система обучения не дает учащимся равные права. Это проявляется в том, что создаются неполноправные средние учебные заведения, одни из которых открывают дорогу к высшей школе, а другие делают уделом своих воспитанников только узкую практическую деятельность.

2) Дифференциация противоречит демократическому принципу единства школы.

3) Дифференциация мешает всестороннему развитию личности.

4) Она снижает уровень общего среднего образования.

5) Дифференциация заставляет подростка рано выбирать будущую профессию.

6) Учащиеся, получившие разную общеобразовательную подготовку, например гуманитарную и техническую, усваивают разный подход к рассмотрению и оценке одних и тех же процессов и явлений, что неизбежно вызывает у них затруднения во взаимопонимании.

Критикам можно противопоставить положение о том, что единство школы вовсе не означает ее однообразия, унификации, а означает лишь предоставление всем равных прав в получении среднего, а затем высшего образования. Единство школы также не означает единого содержания учебного материала по каждому предмету, а также единых методов и форм работы. Учащиеся имеют разные индивидуальные задатки, способности и интересы. Одни имеют склонность к предметам гуманитарного цикла, другие — к физико-техническому, третьи — к математическому и т. д. Причем к 15—16 годам, т. е. к старшей ступени средней школы, как свидетельствуют соответствующие научные исследования (эта проблема будет обсуждаться во второй главе настоящей работы) уже отчетливо проявляются: а) способности учащихся; б) избирательное отношение учащихся к отдельным предметам; в) устойчивый интерес учащихся к определенной области научного знания или к какой-либо отрасли трудовой деятельности.

Отсюда следует, что одной из главных целей школы является своевременное выявление способностей учащихся, их интересов и предоставление соответствующих условий для их максимально возможного развития. Таким условием, прежде всего, является дифференциация обучения. Она не нарушает системы общего образования, а, наоборот, содействует его расширению и углублению, так как на каждом профильном отделении в учебных планах предусматриваются все основные общеобразовательные предметы: языки, литература, география, математика, физика, химия, биология. Но при этом, по словам Н. К. Гончарова, «удовлетворяя интерес учащихся к определенному циклу предметов, дифференциация позволит значительно повысить уровень и эффективность учебно-воспитательной работы в школе, обеспечит реальные условия для действительно сознательного выбора учащимися будущей профессии и для лучшей подготовки их к различным видам практической деятельности. Вместе с тем, она позволит более полноценно подготовить их к продолжению образования в высшей школе» [41].

Итак, в этот период дифференциация обучения вводилась только на старшей ступени средней школы, когда у основной части учащихся уже отчетливо проявились индивидуальные способности и интересы. Важно подчеркнуть, что дифференциация рассматривалась не как способ выявления индивидуальности учащегося, а как способ ее максимального развития.

Опытная проверка показала, что дифференциация учащихся по профилям, соответствующим их интересам, повышает качество знаний не только по предметам углубленного изучения, но и по всем другим учебным предметам.

Начиная с 60-х годов прошлого века, термин «дифференциация» прочно вошел в употребление. Предлагались различные формы дифференциации учебного процесса. Так, в младших классах важно проверять дифференцированную работу каждого ученика. В средних классах оправдали себя мелкогрупповые занятия, взаимопомощь учащихся при выполнении заданий. В старших классах дифференциация осуществляется путем выбора учащимися факультативов. При этом важно было дифференцировать работу по степени самостоятельности и творческой активности учащихся по всем учебным предметам. Такое понимание дифференциации близко к понятию, которое появилось позже, а именно к внутренней дифференциации или современной уровневой дифференциации обучения.

В середине 60-х гг. XX в. к известным дидактическим принципам был добавлен новый: принцип индивидуализации обучения, или принцип индивидуального подхода. *Е. С. Рабунский* следующим образом определил принцип индивидуального подхода [121]:

а) индивидуальный подход к школьникам означает частичное, временное изменение ближайших целей, отдельных сторон содержания, методов и организационных форм учебно-воспитательной работы с учетом индивидуальных особенностей личности ученика для реализации наиболее успешного развития ее социальной типичности и индивидуального своеобразия;

б) индивидуальный подход в учебном процессе представляет собой действенное внимание к каждому ученику, его индивидуальным особенностям в условиях коллективного обучения, предлагает разумное сочетание общеклассных, групповых и индивидуальных занятий для повышения качества обучения и развития каждого ученика.

Автор выделил ряд важных вопросов, требующих серьезного изучения: о противоречиях между активным характером воспитывающего обучения и частичным приспособлением к индивидуальным особенностям ученика; об очередности в применении мер индивидуального подхода к различным учащимся класса; об изменении форм индивидуальной работы с учениками при переходе из класса в класс; о недопустимости запаздывания и опрометчивости в воздействиях на ученика; о двустороннем характере индивидуального подхода в обучении, о «перспективных линиях» в учении и самоконтроле учащегося; о диалектике непосредственного и опосредственного воздействия на школьника; о критериях эффективности индивидуальной работы с учащимися; о преемственности и перспективности работы педагогического коллектива с каждым отдельным учеником и т. д.

Школьники в процессе их учебной деятельности подразделяются по таким показателям дифференциации: а) уровню успеваемости; б) уровню познавательной самостоятельности; в) степени интереса к учению.

Вместе с тем автор выделяет два основных направления индивидуального подхода к школьникам.

1. Предупреждение и устранение пробелов в успеваемости учащихся, «выравнивание» их знаний и познавательной самостоятельности до уровня высокоуспевающих, воспитание устойчивого действенного интереса к учению.

2. Углубление и расширение знаний учащихся, формирование индивидуально своеобразных способностей, удовлетворение разносторонних познавательных запросов школьников.

Практическая неразделимость этих направлений не означает их тождества и абсолютной синхронности реализации. Их осуществление предполагает сочетание двух планов учебной работы: с каждым отдельным учеником и со всем классом. Учебный процесс в общеобразовательной школе обладает широкими возможностями сочетания общеклассных, групповых и индивидуальных форм работы с учащимися.

Позже, в середине 70-х годов прошлого века, появились понятия внутренней и внешней дифференциации. Они представлены, например, в учебном пособии «Дидактика средней школы» (под редакцией *М. Н. Скаткина*), в котором выделена специальная глава «Дифференциация обучения в средней общеобразовательной школе» [48].

Под *внутренней дифференциацией* понимается такая организация учебного процесса, при которой учет индивидуальных особенностей учащихся производится в условиях работы учителей в обычных классах.

Внешняя дифференциация означает такую организацию учебного процесса, при которой для учета индивидуальных особенностей учащихся объединяют в специальные дифференцированные группы. При этом выделяются следующие признаки распределения по группам: а) по способностям; б) по неспособностям; в) по проектируемой будущей профессии; г) по интересам.

При дифференциации по способностям учащиеся распределяются по общим и частным способностям. В первом случае они делятся на несколько групп, как правило, на три, на основе учета успеваемости: хорошо, средне и плохоуспевающие. Во втором случае учащиеся группируются по способностям к той или иной группе предметов. Способности учащихся к отдельным предметам часто определяют и интерес к ним. При дифференциации обучения по интересам учащиеся, начиная с определенного возраста, группируются в классы или даже школы с углубленным изучением нескольких предметов, таких как математика, физика, химия, биология, гуманитарные предметы. Наконец, дифференциация по проектируемой профессии выражается в создании средних специальных школ: музыкальных, художественных, хореографических, спортивных и т. п.

Заметим, что понятие внутренней дифференциации близко в данном случае к понятию индивидуализация обучения. Различие состоит в том, что в первом случае речь идет об определенном виде организации учебного процесса, во втором же — это психолого-педагогическая проблема, которая включает в себя изучение и использование разносторонних индивидуальных особенностей школьников.

В работах по методике преподавания математики проблема дифференциации практически не обсуждалась. Отчасти это связано с начавшейся реформой математического образования, которая, прежде всего, была направлена на обновление, модернизацию содержания школьного курса математики. Эти серьезные проблемы широко дискутировались, например, на страницах журнала «Математика в школе», где появились даже новые рубрики: «Научно-популярный отдел», «Научные основы школьного курса математики». В них публиковались статьи многих известных ученых-математиков, педагогов, методистов, что составило золотой фонд отечественной методической культуры. Вдохновителем и организатором этой реформы был *А. Н. Колмогоров*. В основе реформы лежала перестройка содержания школьного математического образования, опирающаяся на теоретико-множественный подход. С его позиций было пересмотрено все содержание школьных математических курсов. В результате многие традиционные темы получили новое изложение, появились новые темы, такие, например, как «Множества и операции над ними», «Геометрические преобразования», «Производная и интеграл» и т. д. В связи с этим нужна была новая методика преподавания данных тем и конкретные разработки по их изучению.

Отражением дифференциации обучения в реформе содержания математического образования было создание факультативной формы обучения математике и разработка содержания различных факультативных курсов (о них пойдет речь в следующем параграфе).

Наряду с терминами «дифференциация» и «дифференцированное обучение» появился термин «*дифференцированный подход*». Например, в работе [91] он определяется следующим образом: «дифференцированный подход к учащимся в процессе обучения представляет собой определенную характеристику отношения обучающей деятельности учителя к учебной деятельности учащихся».

Точкой отсчета новой реформы образования в нашей стране можно считать съезд работников народного образования, который проходил в декабре 1988 г. в Москве. К этому времени стало ясно, что школа сильно отстает от потребностей современной жизни. Съезд принял важный документ «Концепция общего среднего образования», где была намечена система мер по ликвидации этого отставания. Среди предложенных мер особо выделилась проблема дифференциации обучения. Основной целью дифференциации ставилась необходимость создания школы, которая бы в максимальной степени удовлетворяла потребности развивающейся личности, потребности различных социальных групп общества. Начался период комплексного изучения этой проблемы и создание теории дифференцированного обучения.

Одними из первых с концепцией дифференцированного обучения математике в средней школе на страницах журнала «Математика в школе» выступили *В. Г. Болтянский* и

Г. Д. Глейзер [22]. Авторы предложили разделить учащихся по отношению к курсу математики на три группы.

1. Первую группу составляют школьники, для которых математика является лишь элементом общего развития и в их дальнейшей производственной деятельности будет использоваться лишь в незначительном объеме.

2. Во вторую группу могут входить учащиеся, для которых математика будет важным инструментом в их профессиональной деятельности.

3. К третьей группе относятся те учащиеся, которые выберут математику (или близкие к ней области знания) в качестве основы своей будущей деятельности.

Эти идеи были развиты в последующих работах. Дифференциация обучения называется принципиальным положением организации школьного математического образования, и называются пути ее осуществления. Один из них связан с уровневой дифференциацией требований. Это означает, что, осваивая общий курс, одни школьники в своих результатах ограничиваются уровнем обязательной подготовки, другие, в соответствии со своими склонностями и способностями, достигают более высоких рубежей. В старших классах дифференциация осуществляется за счет обучения по разным программам.

Связь индивидуализации и дифференциации обучения исследуется в монографии *И. Э. Унт* [142], где даются следующие определения: «Индивидуализация — это учет в процессе обучения индивидуальных особенностей учащихся во всех его формах и методах, независимо от того, какие особенности и в какой мере учитываются». «Дифференциация — это учет индивидуальных особенностей учащихся в той форме, когда учащиеся группируются на основании каких-либо особенностей для отдельного обучения».

Во многих работах, посвященных организационным вопросам преподавания в средних школах, рассматриваются оба понятия: дифференцированное обучение и дифференцированный подход. Первый термин употребляется, когда речь идет о комплексе организационно-управленческих, социально-экономических, правовых аспектов обучения, которые создают статус определенного среднего учебного заведения. Например, содержание и организация учебно-воспитательного процесса определили различия профильного и углубленного изучения предметов, условия набора учащихся, наполняемость групп, сроки обучения, нагрузку и оплату преподавателей и т. д. Второй термин «дифференцированный подход» употребляется в том случае, когда речь идет о технологии индивидуального подхода к учащимся с целью определения уровня их способностей и возможностей, их профильной ориентации, максимального развития каждой личности на всех этапах обучения.

Отметим, что современное понятие дифференциации относится не только к старшему звену школы. Это новое достижение школы. Ориентация на развитие личности учащихся требует того, чтобы дифференциация вводилась на всех ступенях школы. Этим и вызвано появление двух видов дифференциации: *уровневой* и *профильной*, которые являются ведущими соответственно в основной школе и в старших классах средней школы. Специфика названных видов дифференциации определяется различными целями, стоящими перед ними.

Так, в работе *Г. В. Дорофеева*, *Л. В. Кузнецовой*, *С. Б. Суворовой*, *В. В. Фирсова* [50] под дифференциацией понимают такую систему обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, являющейся общезначимой и обеспечивающей возможность адаптации в постоянно изменяющихся жизненных условиях, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям. При этом уровневая дифференциация выражается в том, что, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники могут усваивать материал на различных уровнях. Определяющим при этом является уровень обязательной подготовки. Профильная дифференциация предполагает обучение разных групп школьников по программам, отличающимся глубиной изложения материала, объемом сведений и даже номенклатурой включенных вопросов.

Одной из целей уровневой дифференциации называется планирование результатов обучения. Это определение имеет принципиальное отличие от индивидуализации обучения или внутренней дифференциации. Это отличие состоит в определении конечных учебных целей обучения, а именно: внутренняя дифференциация предполагает разделение школьников по их психолого-педагогическим способностям для овладения общей, одинаковой для всех программой, в частности по математике. При этом цели, конечные результаты обучения для всех учащихся тоже одинаковы. Суть нового подхода заключается в том, что не фиксируются единые результаты обучения, они определяются, по возможности, индивидуально для каждого учащегося.

Анализ опыта работы учителей показывает, что в классе, как правило, выделяются три уровня изучения математики: обязательный; продвинутый; выравнивания. Иногда выделяется и четвертый уровень — творческий.

Итак, основной целью уровневой дифференциации, как видим, является обеспечение достижения основных учебных и образовательных целей обучения.

Разработке концепции профильной дифференциации посвящена статья [70]. Авторы высказывают следующие принципы построения своей системы профильной дифференциации, а именно: а) профильная дифференциация должна вводиться лишь после того, как школьники получат достаточное единое базовое образование и утвердятся в своих склонностях; б) на старшей ступени обучения следует обеспечить возможно большее количество направлений обучения или продолжения образования через широкую систему учебных заведений различных типов; в) по каждому учебному предмету целесообразно объединять различные направления обучения в блоки по принципу сходства целей и задач обучения в этих направлениях для создания единых программ для каждого блока; г) при составлении программ и учебников, выборе форм и методов обучения следует учитывать возрастные особенности подростков, склонных к данному виду деятельности, и в то же время не исключать возможности изменить профиль обучения подростку при ошибке в его выборе; д) математика должна входить в набор обязательных учебных предметов любого из профилей.

В статье [14] предлагается двумерная модель типов обучения математике, которая имеет две оси отсчета (профиль и уровень) и по три позиции на каждой из осей (соответственно гуманитарный, основной или специализированный профили; базисный, основной или углубленный уровни). Это формально приводит к девяти вариантам программ по математике для старших классов средней школы. Два крайних случая — М (специализированный профиль на базисном уровне) и Н (гуманитарный профиль на углубленном уровне) — нужно из рассмотрения исключить, тогда получится схема из семи возможных программ. Она представлена в таблице 2.

Таблица 2

	М2	М3
С1	С2	С3
Н1	Н2	

Программа С2 примерно соответствует действующей стандартной программе, программа М3 — программе для математических школ.

В работе [123] при разработке профильной модели обучения за основу были взяты основные направления специализации профильных классов, а именно:

— гуманитарное направление, включающее в себя специализированные учебные заведения, школы и классы с углубленным изучением иностранных языков, истории, филологии, философии и т. д.;

— прикладное направление, ориентированное на использование математики в науке, технике, производстве, экономике и т. д.;

— естественно-математическое направление, включающее в себя физико-математические классы.

В содержании обучения математике были выделены три соответствующие составляющие: гуманитарная, прикладная и естественно-математическая. При этом по какому бы профилю ни шло обучение, оно не должно сводиться только к соответствующей составляющей. В каждом профиле должны присутствовать все три составляющие, но с разным процентным содержанием. Например, гуманитарные составляющие в классах естественно-математического и прикладного профилей примерно одинаковы. Естественно-научная составляющая в гуманитарных классах меньше, чем в классах прикладной направленности, а прикладная составляющая меньше, чем в классах естественно-математического направления (подробнее разработанная профильная модель представлена в одиннадцатом параграфе настоящей работы).

Основные ц е л и профильной дифференциации не сильно отличаются от того, что было сказано выше о фуркации и дифференциации до 1988 г., которая, по существу, была профильной, или внешней, дифференциацией.

I. Образовательные цели: способствовать достижению образовательных целей обучения; повысить успеваемость учащихся; подготовить их к поступлению в высшую школу, к обучению в высшей школе, к выбору будущей профессии.

II. Воспитательная цель: формирование личности учащихся.

III. Развивающие цели: развитие индивидуальности учащегося; развитие общих и специальных способностей; развитие мышления, в том числе творческого; развитие познавательных интересов учащихся.

Обратим внимание на еще один аспект дифференциации. Во многих исследованиях дифференциация называется фактором, способствующим снижению учебных перегрузок школьников. Действительно, объем знаний по каждому предмету, которым должен овладеть ученик за период обучения в средней школе, непрерывно растет. Понятно, что из-за недостатка времени на его изучение постоянно растет перегрузка учащихся. Причем, как правило, страдают ребята не только с низкими способностями, но и добросовестные ученики со средними способностями. А таких учащихся большинство, они работают с большим перенапряжением, что отражается на здоровье молодого поколения. Возможности ребят с хорошими способностями в целом не реализуются, более того, развитие их способностей даже затормаживается.

Отличие профильной дифференциации от фуркации (табл. 3) заключается в том, что в первой деление по отраслям знаний происходит со всеми учащимися, причем в старших классах, когда они уже, как правило, определили свои склонности, способности, интересы. При фуркации существовало два направления: гуманитарное — классическое, и практическое — реальное, причем такому делению подвергались младшие школьники, когда их задатки еще не определились и интересы не сформировались.

Таблица 3

Фуркация	**Дифференциация**
• Классическое образование • Реальное образование	Направления: • гуманитарное • прикладное • естественно-научное

В связи с новым пониманием школой дифференциации обучения возникли проблемы, связанные с изменением процесса обучения и, в первую очередь, его содержания и методов работы. Остро встала проблема коренной перестройки курса математики, в частности курса геометрии.

> В исследовании [36] предложена система геометрического образования, состоящая из четырех органически связанных друг с другом курсов. 1. «Наглядная геометрия» изучается в начальной школе. 2. «Практическая геометрия» изучается в 5—6 классах. 3. «Систематический курс геометрии» изучается в основной школе, продолжается в старшей школе и либо должен состоять из двух частей (планиметрии и стереометрии), либо быть единым курсом геометрии. 4. Небольшой по объему курс, построенный на аксиоматической основе, по мнению автора, может быть введен только в математических классах в старшей школе либо факультативно для учащихся, проявляющих интерес к математике.

В связи с распространением идей дифференциации возникла проблема создания новых учебников и для основной средней школы, и для старшего звена средней школы. По этому поводу тоже высказаны различные точки зрения. Например, в уже упоминавшейся работе В. Г. Болтянского и Г. Д. Глейзера [22] в рамках высказанной авторами концепции дифференциации школьного математического образования говорится о необходимости создания трех учебников математики, соответствующих общекультурному, прикладному и творческому уровням. Причем такую триаду учебников целесообразно использовать не только в специальных школах и классах, но и в одном классе, где разные ученики будут изучать предмет по учебникам разного уровня и при желании переходить с одного из них на другой.

Другая точка зрения состоит в том, что ученик должен иметь в руках учебник, в котором были бы предусмотрены (и явно выделены) все уровни усвоения материала (в том числе и минимально обязательный), т. е. должен быть один разноуровневый учебник.

Выводы

1. В истории появления и развития понятия дифференциации обучения выделяются два периода: а) 1958—1988 гг.; б) 1988 — по настоящее время.

2. В первый названный период дифференциация обучения понималась как фуркация обучения, т. е. разделение учебных планов и программ для специализации учащихся с сохранением общеобразовательного характера школы. В этот период накоплен большой опыт работы при различных формах дифференцированного обучения: в спецшколах, в классах с углубленным изучением ряда предметов, на факультативных занятиях.

3. Реформа математического образования конца 60-х — начала 70-х годов прошлого века — реформа содержания математического образования. В результате появились новые методы и формы обучения: программированное обучение; индивидуальные, групповые и коллективные формы работы на уроке. Начинается комплексное исследование индивидуализации обучения. Появляется принцип индивидуализации обучения или индивидуального подхода к учащимся, который отождествляется с принципом дифференцированного подхода.

4. Началом современного периода развития образования можно считать 1988 г., съезд работников народного образования, принявший ряд основополагающих документов, среди которых «Концепция общего среднего образования», где, в частности, была провозглашена широкая дифференциация обучения, которая рассматривалась залогом развития детей с самыми разными способностями и интересами.

5. Современное определение дифференциации стало шире, чем просто разделение учебных программ. Начался период комплексного изучения проблемы дифференциации обучения.

6. В употребление вошли два вида дифференциации: уровневая дифференциация и профильная дифференциация. Первая выражается в том, что, обучаясь в одном классе, школьники усваивают материал на различных уровнях. Профильная дифференциация — это фактически дифференциация по содержанию учебного материала.

Дидактические функции дифференциации

1. Дифференциация рассматривается как учет индивидуальных особенностей учащихся, которые группируются на основании каких-либо особенностей для раздельного обучения.

2. Дифференциация обучения является такой системой обучения, которая в наибольшей степени отвечает склонностям учащихся.

3. Дифференциация предполагает создание таких условий, при которых будет возможен свободный выбор уровня изучения курса (например, математики) в соответствии со склонностями, способностями и личными планами учащихся.

4. Дифференциация обеспечивается созданием относительно стабильных или временных учебных групп, отличающихся по тем или иным признакам.

5. Дифференциация рассматривается как разделение учебного материала по глубине изложения, по включению различных тем, по ориентации на будущую профессию и т. д.

Появление и развитие понятия дифференциации и связанных с этим вопросов показаны в таблице 4.

Таблица 4

Дифференциация обучения	
Период	1958—1988
Определение	Это разделение учебных планов с целью такой специализации учащихся, которая совместима с сохранением общеобразовательного характера школы (совпадает с фуркацией)
Виды	Внутренняя, внешняя
Формы	Спецшколы, спецклассы, факультативные занятия

Окончание табл.

Дифференциация обучения	
Период	Современный
Психологический подход	Это учет всевозможных индивидуальных интересов учащихся и создание соответствующих групп
Педагогический подход	Это система обучения, отвечающая наклонностям учащихся
Методический подход	Это дифференциация учебного материала
Виды	Уровневая, профильная
Формы	Лицеи, гимназии, школы при вузах и университетах, школы и классы с профильным изучением предметов, факультативы, элективные курсы

§ 5. Возникновение и развитие факультативной формы обучения

Факультативные занятия являются одной из форм дифференцированного обучения. Выделим несколько этапов в истории их развития. 10 ноября 1966 г. было опубликовано правительственное постановление «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы». В нем отмечалось отставание уровня учебно-воспитательной работы школы от потребностей практики, и в связи с этим была намечена система мер по ликвидации этого отставания, среди которых нашли отражение новые, принципиально важные для школы формы обучения. Одной из них явились факультативы. В постановлении было сказано, что они создаются «*для углубления знаний по физико-математическим, естественным и гуманитарным наукам, а также для развития разносторонних интересов и способностей учащихся*». Таким образом, факультативные занятия явились формой дифференциации обучения, учитывающей индивидуальные склонности и способности учащихся.

Термин «факультативные предметы» был известен, как отмечалось выше, еще в XIX в. *П. Ф. Каптерев* в своей книге «О разнообразии и единстве общеобразовательных курсов» в 1893 г. употребил его для названия углубленных курсов в старших классах.

К 1966 г., к моменту появления факультативных курсов, отечественной школой уже был накоплен значительный опыт по организации и проведению таких форм дифференцированного обучения, как классы с углубленным изучением ряда предметов и специализированные школы. Факультативные занятия не только не противоречили названным формам, но и прекрасно дополняли их, так как, являясь самой подвижной, доступной и массовой формой обучения, могли вводиться практически в каждой школе. Учитель со своими учениками, пожелавшими посещать факультатив, опираясь на примерные программы факультативных курсов, мог создать свой собственный курс, отвечающий интересам конкретных учеников.

Первый этап

В практику работы школы факультативные занятия вошли, начиная с 1967/1968 учебного года. Начался ***первый этап*** введения факультативов по математике в школу.

Первые курсы назывались «Дополнительные главы и вопросы математики» и «Специальные курсы». В это время факультативные курсы были ориентированы на новую программу (с конца 60-х годов прошлого века в нашей стране началось движение за реформу математического образования) по математике и являлись местом апробации новых тем. После широкой экспериментальной проверки на факультативных занятиях некоторые темы были включены в основной курс по математике. Например, «Метод координат», «Множества и операции с ними», «Бесконечные множества», «Геометрические преобразования», «Производная» и др.

Уже в конце учебного года (10—12 июня 1968 г.) в Москве состоялось совещание по опыту углубленного изучения отдельных школьных предметов по выбору учащихся. Делегаты обсудили итоги первого года внедрения факультативных занятий в школу, рассмотрели широкий круг вопросов, связанных с их организацией, содержанием, методами и формами проведения, оценкой знаний учащихся, местом факультативных занятий в учебно-воспитательном процессе, связи с другими занятиями по математике, в том числе внеклассных и т. п.

По мере внедрения в жизнь новых программ обязательного курса математики, программа факультативного курса «Дополнительные главы и вопросы математики» претерпела ряд изменений. Так, в 1973/1974 учебном году, в связи с переходом 7 класса (современный 8 класс) на новые программы, а 9 класса (современный 10 класс) — на переходные программы по математике, была принята усовершенствованная программа факультативных курсов, которая, как было отмечено выше, не включила ряд тем, переведенных в основной курс.

Например, дополнительные главы по курсу математики для 7—8 классов включили следующие темы. 1. Делимость чисел и простые числа. 2. Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин. 3. Элементы теории множеств. 4. Метод координат. 5. Функции и графики. 6. Номограммы.

Заметим, что практически нет геометрических тем, из шести — только одна, связанная с координатами, которая на самом деле не является чисто геометрической темой.

Второй этап

К 1980 г. был завершен переход средней школы на новую программу по математике. Факультативный курс «Дополнительные главы и вопросы математики» с успехом выполнил свои функции и был заменен на новый факультативный курс. Начался ***второй этап*** введения факультативных занятий в школе.

Новый факультативный курс включил в себя три следующие раздела:

1. Избранные вопросы математики 7—10 (8—11) классы.
2. Математика в приложениях 9, 10 (10, 11) классы.
3. Алгоритмы и программирование 8—10 (9—11) классы.

Последний раздел заменил специальные курсы по математике. Для проведения занятий по первому разделу «Избранные вопросы математики» была издана специальная литература [56]. Основные темы курса.

7—8 (в настоящее время 8—9) классы:

1. Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин.
2. Симметрия.
3. Элементы математической логики.
4. Множества на координатной плоскости.
5. Бесконечные множества.

В теме «Симметрия» представлен содержательный материал. Рассмотрены перемещения (движения) плоскости: осевая симметрия, параллельный перенос, поворот, переносная, или скользящая, симметрия (последовательное выполнение осевой симметрии и параллельного переноса); симметрии различных фигур, в том числе правильных многоугольников, звездчатых правильных многоугольников; красивые розетки, линейные орнаменты (бордюры), симметрии решеток.

9 (*сейчас 10*) *класс*:
1. Метод математической индукции.
2. Элементы комбинаторики.
3. Элементы теории вероятностей.
4. Языки программирования.
5. Бинарные отношения и соответствия.

10 (*сейчас 11*) *класс*:
1. Дифференциальные уравнения.
2. Комплексные числа и многочлены.
3. Элементы сферической геометрии.

Как видим, геометрических тем в девятом (десятом) классе вообще не предусмотрено. В десятом (одиннадцатом) классе в числе элементов сферической геометрии рассмотрены следующие: начальные понятия сферической геометрии; соответствие между сферической геометрией и планиметрией; сферическая тригонометрия; перемещение сферы; площади сферических многоугольников; применение сферической геометрии в навигации; картографические проекции.

В помощь учителю, ведущему факультативные занятия по этому курсу, были изданы методические пособия [92].

Третий этап

Как мы уже отмечали, началом новой реформы можно считать съезд работников народного образования, который проходил в Москве в декабре 1988 г. На нем была принята Концепция общего среднего образования, основным направлением которой была провозглашена широкая дифференциация обучения. Реформой предусматривалось дальнейшее развитие всех форм дифференциации, в том числе и факультативной, основной целью которой является возможность углубленного изучения отдельных предметов, в том числе и математики. Таким образом, начался ***третий этап*** введения факультативных занятий по математике.

В 1990 г. была опубликована новая программа факультативных курсов [108]. В ней сказано, что на факультативных занятиях учащиеся углубляют знания по основному курсу, получаемые на уроках, приобретают умения решать более трудные и разнообразные задачи. Факультативные занятия предусматриваются с 7 класса. В старших (10—11) классах углубление основного курса носит систематический характер и выполняет функции подготовки к продолжению образования и к сдаче вступительных экзаменов в вузы.

Наряду с углублением основного курса, на факультативе целесообразно и определенное расширение содержания учебного материала, в основном за счет линии современных приложений математики. Характер прикладных факультативов на разных ступенях обучения также должен быть различным. Если в 7—9 классах это преимущественно «чистый» практикум, то в старших классах учащиеся должны познакомиться и с теоретическими основами приложений. В выпускных старших классах необходимы также факультативные курсы обзорного характера, освещающие роль и место математики в современном мире.

В предложенном факультативе предусмотрены такие факультативные курсы:

1. За страницами учебников математики (не следует путать с известной серией книг по математике с одноименным названием).

2. Математическая мозаика.

3. Подготовительный факультатив.

Первые два предназначены для учащихся основной школы, а последний — для старшеклассников. Для проведения первого факультатива было выпущено пособие [143].

В него вошли темы: *7 класс* — Системы счисления. Простые и составные числа. Геометрические построения. Замечательные точки в треугольнике. *8 класс* — Числовые множества. Метод координат. Элементы математической логики. Геометрические преобразования плоскости. *9 класс* — Функции и графики. Уравнения, неравенства, их системы. Замечательные теоремы и факты геометрии. Логическое строение геометрии.

Факультативный курс «Математическая мозаика» включает в себя такие вопросы: *7 класс* — Магические квадраты. Великаны и карлики в мире чисел. Математические ребусы и шифровки. Лист Мебиуса. Математические игры. *8 класс* — Принцип Дирихле. Комбинаторные задачи. Математические парадоксы и софизмы. Логические задачи. Разрезание фигур. *9 класс* — Контрпримеры в математике. Эвристики, аналогия, поиск закономерностей, выдвижение гипотез и обоснование гипотез, математическая индукция. Занимательные задачи вероятностного характера.

Подготовительный факультатив для 10—11 классов имеет более узкую и конкретную направленность. Его целью является подготовка учащихся к продолжению образования, повышение уровня их математической подготовки. Преподавание на факультативе строится как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса математики. В программу факультатива вошли следующие вопросы: Алгебраические уравнения, неравенства, системы. Текстовые задачи.

Функции и графики. Начала анализа. Квадратный трехчлен. Доказательства неравенств. Тригонометрические функции. Показательная и логарифмическая функции. Числа и числовые последовательности. Нестандартные уравнения и неравенства. Задачи с параметрами. Методы решения планиметрических задач. Стереометрические задачи и методы их решения.

Для проведения данного факультатива была выпущена соответствующая литература [12, 152, 153].

Современный этап

Отличительной чертой этого этапа развития факультативной формы обучения является то, что учителям предоставляется право работать по любой из опубликованных программ, в том числе и по авторским. Это решение было принято из-за того, что обучение на факультативных занятиях по единой программе, обязательной для всех, оказалось несостоятельным. Учителя вели, как правило, факультативные занятия или спецкурсы по собственной программе, учитывая специфику своего конкретного класса, интересы и запросы ребят. Кроме этого, в современных условиях необходимо учитывать также особенности уровневой дифференциации обучения в основной школе и профильную направленность в старших классах.

В 2002 г. была принята новая Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования (приказ Министерства образования № 2783 от 18 июля 2002 г.), в которой, наряду с базовыми и профильными курсами, выделяются специальные *курсы по выбору* (9 класс) и *элективные курсы* (10—11 классы). Их с полным правом можно считать преемником факультативных курсов. Действительно, и те, и другие, прежде всего, направлены на удовлетворение индивидуальных склонностей, потребностей учащихся, развитие их способностей. Но есть и большая разница. Например, факультативные курсы не были обязательными для всех учащихся. Существовала специальная программа факультативов по математике, которой должен был руководствоваться каждый учитель, ведущий факультативные занятия. В новых курсах темы могут предлагать сами ученики. Кроме этого, факультативы были только предметные, в то время как курсы по выбору предполагаются нескольких типов.

Курсы по выбору начинаются в 9 классе основной школы в рамках предпрофильной подготовки, поэтому должны оказывать существенное влияние на выбор основного профильного направления обучения в старшей школе. Среди них выделяются предметные, ориентационные и информационные (информационная работа).

В элективных курсах для старших 10—11 классов предлагаются такие виды: предметные, межпредметные, по подготовке к ЕГЭ, ориентационные и внепредметные (надпредметные).

Курсы по выбору, элективы обязательны для всех учащихся, но какими им быть в конкретной школе — во многом зависит от самих учащихся, от их интересов, склонностей, запросов. В идеале для каждого ученика нужно построить индивидуальную образовательную программу, или траекторию. Для этого выпускается специальная литература [106, 124—131, 134, 155].

Глава **II**

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 6. Индивидуальные особенности учащихся

Одним из основополагающих принципов современного обучения является его ориентация на всестороннее формирование личности каждого обучаемого, реализацию всех его задатков, склонностей, способностей, интересов и т. п. В основе такого обучения должны лежать индивидуально-психологические особенности учащихся. Обучение ориентируется и учитывает эти особенности. Каковы же они? Откуда берутся? Один из ответов на данные вопросы дает известная психолог *А. Анастази* [4]: «Индивидуальные различия порождаются многочисленными и сложными воздействиями между наследственностью индивида и его средой ... Наследственность допускает очень широкие границы поведения. Внутри же этих границ результат процесса развития зависит от его внешней среды». Таким образом, необходимо прояснить два основных момента: во-первых, какую роль играют индивидуально-психологические особенности в определении успешности разных видов деятельности, и, во-вторых, каково происхождение этих особенностей.

Дифференциальная психология

Исследованием индивидуальных различий занимается специальный раздел психологии, который называется «*Дифференциальная психология*». Она накопила значительный материал, в том числе экспериментальный и описательный, о вариативности как отдельных психических свойств человека (памяти, восприятия, внимания, воображения, мышления и т. д.), так и о сложных комплексных образованиях (характере, темпераменте, интересах, склонностях, мотивации и т. д.).

Одними из первых и наиболее значительными российскими работами в этой области, не утратившими актуальности и в настоящее время, являются исследования *А. Ф. Лазурского*. В его фундаментальном труде «Классификация личностей» [77] дана теория и полное описание деления на группы и типы. В качестве основного критерия классификации рассматривается уровень проявления активности. Согласно взглядам Лазурского, понятие активности — одно из исходных понятий общей психологии. С его точки зрения, принципиальным является различие воли и активности. Активность выступает как внутренний источник, определяющий уровень психической деятельности. Автор подчеркивает, что активность — это не волевые усилия, а нечто гораздо более широкое, лежащее в основе всех наших душевных процессов и проявлений. Степень активности рассматривалась как основание для классификации уровней приспособления личности во внешней среде. В результате им были выделены следующие три типа личности.

1) Низший психический — индивид недостаточно приспособлен к внешней среде, которая подчиняет себе слабую психику малоодаренного человека. В результате личность не дает и того немногого, что могла бы дать.

2) Средний — индивид хорошо приспосабливается, приноравливается к внешней среде и находит в ней место, соответствующее внутреннему психическому складу.

3) Высший — индивид отличается стремлением переделать внешнюю среду согласно своим влечениям и потребностям, здесь ярко выражен процесс творчества. К высшему уровню относятся таланты и гении.

Помимо этого, ученый полагал, что классификация личностей должна быть не только психологической, но и психо-социальной. Другими словами, разделение личностей должно производиться не только на основании преобладания у них той или иной группы взаимосвязанных основных психических функций, но и на основании социального положения (т. е. профессии, направления интересов). «Наиболее яркие «чистые» типы получаются в тех случаях, когда интересы и профессиональная деятельность человека, развитие его знаний и навыков, его взглядов и миросозерцания происходит именно в том направлении, какое диктуется прирожденными особенностями его нервно-психической организации».

Опираясь на эти положения, А. Ф. Лазурским были разработаны конкретные программы исследования личности. Одна из таких программ помещена в приложении к названной книге. Она основана на исследовании отношения человека к определенным явлениям. При этом различают следующие четыре аспекта:

1. Наличие или отсутствие опеределенного отношения к данной категории явлений и степень его интенсивности. Имеется в виду не только положительное отношение (интерес, склонность), но и отрицательное (отвращение, ненависть, отталкивание). Наряду с прямым, непосредственным интересом к известным явлениям, здесь исследовалась возможность утилитарного отношения, т. е. оценка какой-либо области, с точки зрения ее полезности для чего-либо.

2. Специфические формы, качественные особенности интереса. Эти формы могут обусловливаться, во-первых, многообразием самих объектов, принадлежащих к данной категории, а во-вторых, формы интереса определяются многообразием отношений к объектам.

3. Уровень развития или дифференцированности интереса. Здесь рассматриваются: степень утонченности интереса; эволюция интереса или отношения, которая определяется интеллектуальным или общекультурным развитием человека; степень сознательности (в противоположность инстинктивности, бессознательности) отношения; степень культурности формы интереса или его осуществления.

4. Объем интереса — широта области, на которую он распространяется. Здесь прежде всего определяется количество объектов, привлекающих интерес данного человека. С другой стороны, важно отметить количество сторон объекта, на которые распространяется отношение в каждом данном случае. Каждый сложный объект или явление имеет целый ряд сторон, и интерес человека может охватывать их все или же сосредоточиваться только на некоторые из них. Так, например, по отношению к знанию и науке человек может быть узким специалистом, всецело погруженным в свою специальность, или, наоборот, энциклопедистом, интересующимся самыми различными отраслями знаний.

В программу вошло всего 15 рубрик об отношении человека: 1) к вещам; 2) к природе и животным; 3) к отдельным людям; 4) к любви; 5) к социальной группе (общественное сознание, корпоративное сознание); 6) к семье; 7) к государству; 8) к труду; 9) к материальному обеспечению и собственности; 10) к внешним нормам жизни; 11) к нравственности; 12) к миросозерцанию и религии; 13) к науке и знанию; 14) к искусству; 15) к себе самому. Каждая из них содержит детальное описание выделенных сторон отношений.

На основании рассмотрения таких вопросов составлялись индивидуальные характеристики школьников и давались конкретные рекомендации по их обучению.

Значительный вклад в разработку исследуемой проблемы внесли работы *Б. М. Теплова* [139] и его учеников. В их исследованиях изучался вопрос об основных свойствах нервной системы и их значении для психологии индивидуальных различий.

К числу таких свойств нервной системы были отнесены следующие.

I. Сила нервной системы по отношению к *возбуждению*, т. е. способность выдерживать длительное возбуждение, не обнаруживая запредельного торможения.

II. Сила нервной системы по отношению к *торможению*, т. е. способность выдерживать длительные и часто повторяющиеся тормозные влияния.

III. *Уравновешенность* нервной системы по отношению к возбуждению и торможению, которая проявляется в одинаковости реагирования нервной системы на возбудительные и тормозные процессы.

IV. *Лабильность* нервной системы, оцениваемая по скорости возникновения и прекращения нервного процесса возбуждения или торможения.

Опираясь на эти свойства, *В. Д. Небылицын* [97] разработал классификацию свойств нервной системы человека. По его мнению, «эта концепция является наиболее продуктивной из всех предложенных до сих пор биологических теорий развития психологической индивидуальности. Ее очевидные преимущества вытекают из того, что она берет в качестве отправного момента не побочные или вторичные признаки биологической организации ... а признаки определяющей, ведущей системы человеческого организма — центральной нервной системы».

Автор выделяет такую ведущую, с его точки зрения, категорию для индивидуально-психологических различий, как *темперамент*, который рассматривается как «важный домен личностной организации, характеризующий индивидуальное поведение с его динамической стороны». В структуре темперамента выделяются два главных компонента: а) активность; б) эмоциональность. Эти характеристики темперамента и их измерение важны при определении особенностей поведения учащихся.

Способности

Поскольку основные свойства нервной системы человека довольно устойчивы, то они образуют хорошую почву для формирования определенной формы поведения. Б. М. Теплов считал, что практическая задача обучения состоит не в том, чтобы изменять индивидуальные свойства, а в том, чтобы для каждого типа нервной деятельности определить наилучшие пути обучения. В связи с этим одно из ведущих мест в его работах заняло исследование понятия «*способность*». Ученым в основополагающем труде «Проблемы индивидуальных различий» [139] было выделено три главных признака, определяющих способности.

1. Под способностями разумеются индивидуально-психологические особенности, отличающие одного человека от другого.

2. Способностями называют не всякие вообще индивидуальные особенности, а лишь такие, которые имеют отношение к успешности выполнения какой-либо деятельности или многих деятельностей.

3. Понятие способности не сводится к тем знаниям, навыкам и умениям, которые уже выработаны у данного человека.

Важно подчеркнуть, что одной из существенных особенностей психики человека является возможность чрезвычайно широкой компенсации одних свойств другими, вследствие чего относительная слабость какой-нибудь одной способности вовсе не исключает возможности успешного выполнения даже такой деятельности, которая наиболее тесно с нею связана. Недостающая способность может быть в очень широких пределах компенсирована другими, развитыми у данного человека.

Другим выдающимся результатом Б. М. Теплова были исследования, посвященные анализу конкретных видов деятельности [139]. Полученные выводы имеют принципиальное значение, а именно по отношению к способностям в любой области применимы следующие положения: способности могут быть выявлены только на основе анализа особенностей деятельности; успешность деятельности зависит от комплекса способностей; возможна в широких пределах компенсация одних способностей другими.

Эти положения стали отправными для многих исследовательских работ по психологии способностей. Важное место в этих работах занял вопрос об общих и специальных способностях.

Общие способности — это общие умственные, интеллектуальные способности, которые проявляются везде, во многих видах и областях знаний, деятельности, в том числе и в учении.

Специальные способности — это способности, которые обнаруживаются в какой-то одной области, в отдельном виде деятельности, например способности к определенным видам искусства, к языкам, математике, технике и т. д.

В работах, где рассматриваются способности к конкретным видам деятельности, выделяются компоненты этих способностей, в качестве которых выступают, прежде всего, индивидуальные особенности психических процессов ощущения, восприятия, мышления, памяти, воображения. Например, среди компонентов музыкальных способностей выделяют способность к слуховому представлению; среди компонентов способностей к изобразительному искусству — целостность восприятия, зрительную память, оценки светлотных отношений; среди компонентов литературных способностей — образное мышление, творческое воображение; среди компонентов конструктивно-технических способностей — способность к пространственным представлениям, техническое мышление. Заметим, что все компоненты способностей нельзя, конечно, сводить только к индивидуальным особенностям психических процессов, они формируются на базе этих особенностей и включают эмоционально-волевые моменты, элементы отношений, имеют личностную окраску.

В результате многочисленных специальных экспериментов выяснилось, что все способности имеют некую общую основу, важную для развития и проявления практически любой способности. Общие способности определяют уровень и своеобразие любой умственной деятельности, именно поэтому их часто и называют умственными способностями.

Можно привести много впечатляющих примеров известных людей, у которых достаточно высокий уровень способностей к различным видам деятельности. Неслучайны выдающиеся рисунки А. С. Пушкина, который, по мнению современников, был одним из умнейших людей своего времени. А. С. Грибоедов — выдающийся музыкант и дипломат, — успешно учился на математическом факультете университета. Серьезно интересовался математикой Н. В. Гоголь, М. Ю. Лермонтов очень любил решать математические задачи. Известный драматург А. В. Сухово-Кобылин получил математическое образование в Московском университете. Серьезно занимался методикой математики, особенно в области преподавания арифметики, Л. Н. Толстой. Такие примеры можно найти и в среде математиков. Крупнейший ученый древности — Архимед был уникален в своем творчестве, он был математиком, механиком, физиком, инженером. Великие художники эпохи Возрождения Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер не просто увлекались математикой, они добились значительных результатов в теории многогранников и теории перспективы. С. В. Ковалевская была талантливой писательницей, ее литературные произведения оценивались весьма высоко. Известный математик XIX в. В. Я. Буняковский был замечательным поэтом. Английский профессор математики Ч. Л. Доджсон был талантливым детским писателем. Под псевдонимом Льюис Кэрролл он написал знаменитые книги «Приключения Алисы в стране чудес» и «Алиса в зазеркалье». Известны блестящие способности крупнейшего физика-теоретика Л. Д. Ландау к истории и т. д.

Этот ряд примеров может быть продолжен. Важно еще раз подчеркнуть, что для того чтобы способности проявились, развились, нужна соответствующая среда, соответствующее обучение, отсутствие которых часто не дает проявиться всем возможностям человека. *Задача школы* — задатки — природные возможности превратить в способности. К сожалению, довольно часто так не происходит, и человек даже не подозревает о своих способностях. История знает много ярких примеров, когда только случайность помогала человеку найти свой путь. Например, Н. Н. Лузин.

> «Ему наша математическая школа больше всего обязана: подавляющее большинство московских математиков — это ученики Лузина, ученики его учеников или его научные внуки и правнуки. Но именно он был отстающим в гимназии по математике, и нанятый репетитор сумел приоткрыть перед ним ее красоту» [140].

Приведенные примеры указывают на недопустимость ранней специализации, наоборот, на предоставление необходимых условий, создание соответствующей атмосферы для наилучшего проявления всех возможных способностей индивида. В связи с этим необходимо упомянуть о так называемых *сензитивных периодах* развития способностей. Так психологи называют определенные возрастные сроки, наиболее благоприятные для развития специальных способностей. Для различных способностей такие периоды неодинаковы. Наиболее ранний имеют музыкальные способности и способности к языкам. Они ярко проявляются уже в начальных классах. Математические же способности обнаруживаются позже, в среднем школьном возрасте (приблизительно к 14—15 годам), могут проявиться немного раньше, но могут и позже. Вот почему профильное обучение должно начинаться в старших классах.

Обратимся теперь к исследованиям *математических способностей*, проведенных *В. А. Крутецким*. В его известной книге «Психология математических способностей школьников» [72] способности к изучению математики определяются следующим образом: «индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обусловливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности, относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики». При этом выделяются следующие возрастные особенности развития математических способностей:

1) Формализованное восприятие математического материала.

2) Обобщение математического материала.

3) Свернутость математического мышления — тенденция мыслить в процессе математической деятельности сокращенными структурами.

4) Гибкость мыслительного процесса.

5) Стремление к своеобразной экономии умственных усилий — к изяществу решений.

6) Математическая память.

Специально проведенные исследования показали, что все перечисленные компоненты начинают развиваться неодновременно. Причем многие, а именно 3—6, формируются только в старших классах школы, что еще раз подчеркивает недопустимость ранней специализации учащихся.

Очень часто о способностях ученика судят по его успехам к определенной деятельности, что, в свою очередь, в немалой степени зависит от организации этой деятельности. Самые разные школьные предметы имеют много общего, предъявляют ряд сходных требований к особенностям мышления, памяти ученика, к таким психологическим качествам, как умственная активность, любознательность, творческое воображение. Поэтому в школе, в классах, как правило, выделяются группы ребят, которые хорошо или, наоборот, плохо успевают по всем предметам. Часто ученикам «приклеивают» ярлыки: «способные», «бестолковые». Между тем, специально проведенные исследования показывают, что при оптимально подобранных условиях обучения подавляющее большинство здоровых ребят имеют средние общие способности. Малоспособные ученики составляют только около 5%, одаренные-талантливые — тоже около 5%, а большинство, т. е. около 90%, составляют обычные учащиеся с хорошими средними способностями. Графически эту зависимость можно представить кривой нормального распределения учащихся по уровню способностей (рис. 4, *а*).

При этом если условия обучения одинаковы для всех учащихся, то их распределение по достигаемым результатам тоже описывается кривой нормального распределения (рис. 4, *б*).

Если же для каждого ученика зафиксировать его результат обучения и начальные условия подобрать таким образом, чтобы каждый достиг своего результата, полного усвоения намеченно-

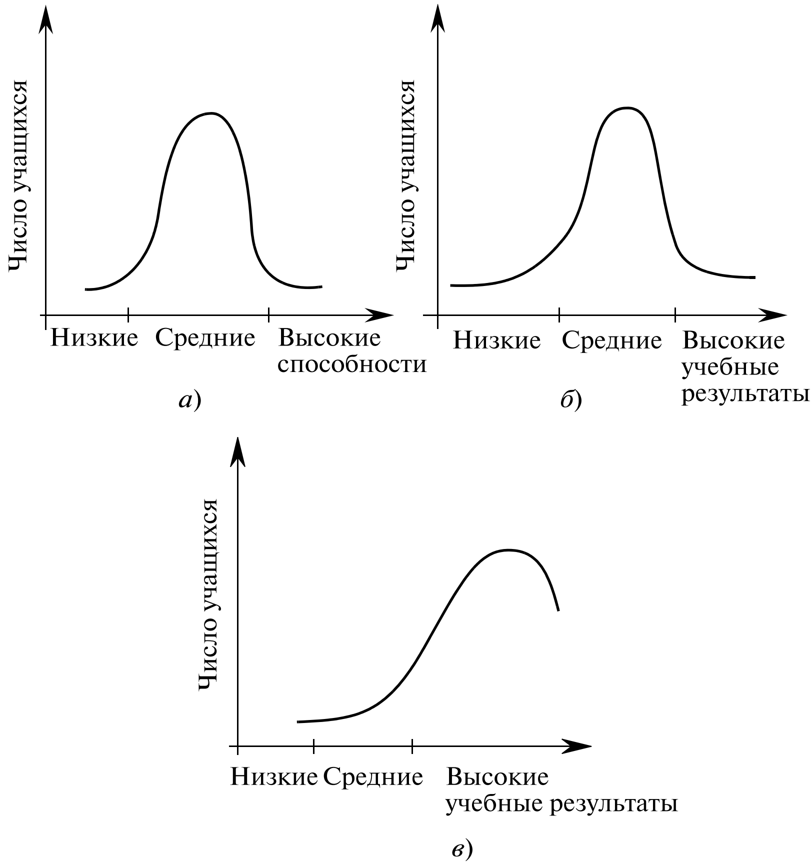


Рис. 4

го материала, то в этом случае высоких результатов обучения достигают ученики не только с высокими, но многие со средними способностями. Соответствующий график изображен на рисунке 4, *в*.

Обучаемость

Проблема усвоения учебного материала непосредственно связана с исследованием соответствующих индивидуальных различий учащихся, особенностей, которые проявляются в процессе обучения. Во многих работах психологов фигурирует понятие *обучаемости*. Например, *Н. А. Менчинская* [85] в своих исследованиях, связанных с проблемами индивидуальных особенностей учащихся, использует понятие обучаемости, как способности достигать в более короткий срок более высокого уровня усвоения. Это свойство, играющее важную роль в жизни человека, отражает *динамическую* сторону его личности. В обучаемости проявляются потенциальные возможности мышления человека, его умение организовать свою познавательную деятельность, направить ее на решение определенных задач. При этом учащиеся различаются по таким параметрам: время усвоения знаний; способность переходить от фрагментарных знаний к овладению системой знаний; протекание процесса дифференцирования учебного материала; установление соответствия между аналитическими и синтетическими операциями.

Одним из критериев обучаемости называется *быстрота усвоения*. Эту способность называют также *скоростью усвоения* [142] или *темпом продвижения* [60]. Данный критерий характеризуется количеством заданий, необходимых для возникновения обобщений; экономностью мышления; самостоятельностью учащихся. Различают понятия «темп продвижения» и «индивидуальный темп работы» ученика. Эти понятия, как правило, не совпадают. Школьник, быстро продвигающийся в усвоении, может не обладать быстрым темпом работы, и, наоборот, ученику, медленно продвигающемуся в усвоении, может быть свойствен достаточно быстрый темп работы.

Темп продвижения сильно проявляется на этапе урока, где происходит введение нового материала, когда от учащихся требуется выполнить анализ и синтез нового и произвести соответствующие обобщения и абстрагирования. Темп продвижения сказывается и в такой характеристике, как *сокращенность* и *освоенность действий*, которая исследована в трудах *Н. Ф. Талызиной* [138] на примере решения геометрических задач.

Изучение процесса решения геометрических задач на доказательство школьниками основной школы и старших классов показало, что учащиеся с высокой успеваемостью в три раза реже (по сравнению со слабоуспевающими) выполняют полные дедуктивные умозаключения в процессе доказательства и соответственно в три раза чаще осуществляют свернутые умозаключения, опуская те общие положения (аксиомы, определения, теоремы и т. п.), в соответствии с которыми они фактически действуют. Сокращение, свертывание мыслительных операций совершалось у школьников с высокой успеваемостью быстрее, чем у слабоуспевающих. Кроме этого, умение обосновывать решение вырабатывается у школьников с высокой успеваемостью значительно быстрее, чем у слабоуспевающих, и является более полным.

Следующим свойством, которое определяет успех в процессе учения, является *гибкость мышления*. Н. А. Менчинская выделяет три его показателя, а именно: подход к задаче, как к проблеме, целесообразное варьирование способов действий; легкость перестройки знаний и навыков и их систем в соответствии с измененными условиями; способность к переключению или легкость перехода от одного действия к другому.

Различие между вторым и третьим показателями заключается в том, что в одном случае имеется в виду перестройка, осуществляемая самостоятельно, сложившейся системы знаний или навыков в ответ на новые требования, а в другом — речь идет о переходе от данного, хорошо известного, способа действия к другому, также хорошо известному способу.

Выделенные показатели гибкости мышления исследовались при изучении различных предметов учащимися разных возрастных групп. В частности, эти вопросы рассматривались при решении геометрических задач учащимися основной школы.

Например, рассмотрим такую простую задачу (начало изучения геометрии в 7 классе):

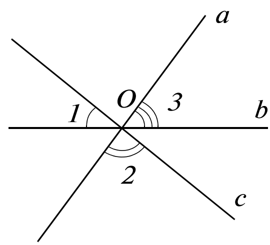


Рис. 5

«Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 5). Определите, какой угол получится при сложении углов 1, 2 и 3». В условии задачи дается определенное понятие — «пересекающиеся прямые», причем задача дается с готовым рисунком. Для ее успешного решения нужно переосмыслить данный рисунок под углом зрения другого понятия «вертикальные углы». Задача решается всеми учениками с высокой успеваемостью и частью — со средней успеваемостью. Остальные ребята затрудняются, они не могут переосмыслить фигуру, выйти за пределы той геометрической ситуации, которая словесно описана в условии задачи, и рассмотреть с новой точки зрения предъявленную фигуру.

В приведенном примере проявилась гибкость словесно-отвлеченного мышления (оперирование понятиями, суждениями). Однако гибкость мышления учащихся не меньше проявляет себя и в процессе оперирования образами.

Обнаружено, что при изучении геометрии, как планиметрии, так и стереометрии, подвижность образов, проявляющаяся в мысленном перемещении предметов и в образовании (воссоздании) объемной формы по плоскому изображению, наблюдается в разной степени у школьников с различной успеваемостью. У плохоуспевающих отмечается преимущественно недостаточная подвижность образов. Автор отмечает, что одна особенность выражается в «инертности образа» и характеризуется «связанностью» исходным положением заданной фигуры, а другая — в большой неустойчивости образа.

Индивидуальные различия в развитии пространственного и образного мышления исследовались в работах *И. С. Якиманской* [159]. Особенности обнаруживаются довольно ярко в процессе создания пространственных образов уже на стадии непосредственного восприятия исходной информации.

Например, при предъявлении наглядной информации — чертежа одни учащиеся подвергают ее активной мыслительной обработке, быстро выделяют основные для решения задачи элементы чертежа, устанавливают связи с другими элементами, переосмысливают их. Другие делают это медленно, развернуто во времени, без четких критериев анализа изображений. Различия сказываются в манере восприятия (дробном или более целостном), в особенностях оформления решения, найденного на основе восприятия, в выборе опорных элементов, в использовании своеобразных способов, мыслительной обработке данных восприятия (т. е. более наглядно-чувственных или понятийных).

В дифференциальной психологии рассматриваются индивидуальные особенности учения. Выделяются две основополагающие особенности [66].

Во-первых, *межиндивидуальные*, т. е. различия между людьми. Их замечает каждый человек. Один ученик все усваивает быстро, легко, другой — тратит на то же самое очень много времени. Один хорошо запоминает все, что слышит и читает, другой — должен приложить специальные усилия, повторив материал несколько раз.

Во-вторых, выделяются *внутрииндивидуальные* особенности, т. е. различия в учебной деятельности одного и того же человека. Например, один ученик с удовольствием изучает геометрию и с неохотой — русский язык и литературу. Эти особенности имеют как устойчивый характер, так и зависят от различных требований и ситуаций. Внутрииндивидуальные различия являются основой для построения типологии обучающихся и индивидуальной работы с ними.

Целенаправленное изучение индивидуальных особенностей учения позволяет выявлять и учитывать интересы школьников. Часто хорошие результаты, успехи ученика в определенной области знания переходят и на другие сферы его деятельности.

Разработана специальная ориентировочная типология индивидуальных различий в учении. В качестве основных параметров сравнения рассматриваются следующие: скорость, тщательность, мотивация, регуляция действия, когнитивная организация (т. е. познавательная, *cognition* — познание). В представленной таблице 5 рассмотрены индивидуальные различия в учебной деятельности.

Таблица 5

Параметр сравнения	**Позитивный тип**	**Негативный тип**
Скорость	Быстро Легко, без труда Прочно, устойчиво во времени Легко переучивается Обладает гибкостью	Медленно С трудом, напряженно, тяжело Поверхностно, мимолетно, быстро забывает С трудом переучивается Характеризуется застылостью
Тщательность	Добросовестно Аккуратно Основательно	Халатно Небрежно, неряшливо Поверхностно
Мотивация	Охотно Добровольно По собственному побуждению Активно, включенно, увлеченно Старательно, усердно, изо всех сил	Неохотно По обязанности Под давлением Пассивно, вяло, безучастно Нерадиво, лениво
Регуляция действия	Самостоятельно Автономно, независимо Планомерно Целенаправленно Настойчиво, постоянно	Несамостоятельно Подражая Бесцельно Бессистемно, без плана Периодически, неустойчиво
Когнитивная организация	Осознанно, с пониманием Направленно, предвидя последствия Рационально, экономно	Механически, не понимая, методом проб и ошибок Случайно, непреднамеренно Нерационально, неэффективно
Общая оценка	Хорошо	Плохо

Мотивационная предпосылка понимается как установка на учение, т. е. это готовность школьника стремиться к достижению поставленных учебных целей. Поэтому у разных людей при различной мотивации учебная деятельность протекает по-разному. Рассматриваются такие параметры деятельности: характеристика целей; побудительность целей; тенденция к уклонению; «барьеры» (ограничители свободы действий); темп; длительность; отвлекаемость; разнообразие фантазии; интеллектуальная гибкость; когнитивная организация; наблюдательность; эмоциональная окраска и настроение; потребность в усилиях; тип педагогической ситуации [66].

Сравнение деятельности учения при различной мотивации приведено в таблице 6.

Таблица 6

Параметры деятельности	**Мотивация**	
	Позитивная	**Негативная**
Характеристика целей	Хочу	Должен или необходимо
Побудительность целей	Привлекающие, позитивные	Отталкивающие, негативные
Тенденция к уклонению	Отсутствует или слабо выражена, непродолжительна	Сильная, частая и устойчивая
«Барьеры»	Не нужны	Необходимы
Темп	Оживленный, быстрый	Медленный, вялый
Длительность	Значительная	Незначительная
Отвлекаемость	Слабая	Сильная
Разнообразие фантазии	Значительное	Незначительное
Интеллектуальная гибкость	Доступность и легкость перехода от одних мыслительных действий к другим	Неподвижность, регидность мышления
Когнитивная организация	Продуманная, осмысленная	Механическая

Окончание табл.

Параметры деятельности	Мотивация	
	Позитивная	Негативная
Наблюдательность	Высокая	Низкая
Эмоциональная окраска и настроение	Удовлетворение, позитивный настрой	Неудовлетворенность, удрученность
Потребность в усилиях	Небольшая, учение воспринимается как не требующее особых усилий	Большая, учение требует больших усилий и быстро утомляет
Тип педагогической ситуации	Влечение к цели	Оказание «давления» и «барьеры»

«Давление» означает в данном тексте авторитарное воздействие, вынуждающее ученика стремиться к цели учения.

Таким образом, различия в установках на учение (в частности, по геометрии) приводят к серьезным различиям в учебной деятельности и сказываются на результатах учения, в связи с этим рассматривает понятие *индивидуального стиля деятельности* [86]. Именно благодаря ему возникают новые отношения между различными индивидуальными свойствами, что очень важно для становления и новообразований личности.

Основными методами диагностики психологических индивидуальных особенностей учащихся являются *тестирование* и более комплексное исследование — *эксперимент*.

Рассмотренные индивидуальные особенности учащихся нашли отражение при построении модели обучения геометрии в школе, представленной в третьей главе настоящей работы.

§ 7. Личностная ориентация процесса обучения

Исследование и использование индивидуальных особенностей каждого ученика играют решающую роль в *личностно-ориентированном обучении*, которое называется одним из приоритетных направлений модернизации образования. В исследовании [158] следующим образом определяется *личностно-*

ориентированное обучение, его проектирование и реализация в практике работы школы:

> — личностно-ориентированное обучение должно обеспечивать развитие и саморазвитие личности ученика, исходя из выявления его индивидуальных особенностей как субъекта познания и предметной деятельности;
>
> — образовательный процесс личностно-ориентированного обучения предоставляет каждому ученику, опираясь на его способности, склонности, интересы, ценностные ориентиры и субъектный опыт, возможность реализовать себя в познании, учебной деятельности, поведении;
>
> — содержание образования, его средства и методы подбираются и организуются так, чтобы ученик мог проявить избирательность к предметному материалу, его виду и форме;
>
> — критериальная база личностно-ориентированного обучения учитывает не только уровень достигнутых знаний, умений, навыков, но и сформированность определенного интеллекта (его свойства, качества, характер проявлений);
>
> — образованность как совокупность знаний, умений, индивидуальных способностей является важнейшим средством становления духовных и интеллектуальных качеств ученика, что выступает основной целью современного образования;
>
> — значимыми в обучении становятся те составляющие, которые развивают индивидуальность ученика, создают все необходимые условия для его саморазвития, самовыражения;
>
> — личностно-ориентированное обучение строится на принципе вариативности, т. е. признании разнообразия содержания и форм учебного процесса, выбор которых осуществляется учителем-предметником, воспитателем с учетом цели развития каждого ребенка, его педагогической поддержки в познавательном процессе.

Заметим, что термин «*личность*» (англ. *personality*) происходит от латинского *persona*. Наука о личности — персонализация — занимается изучением человеческой индивидуальности. Какую же личность мы хотим воспитать на современном этапе общественного развития в средней школе?

В настоящее время существует по меньшей мере 48 вариантов *теории личности*. Их классификация дана, например, в работе [98]. Выделяется пять о с н о в а н и й для классификации, а именно:

1. Способ объяснения поведения.
2. Способ получения данных о личности.
3. Угол зрения на личность.
4. Возрастной диапазон.
5. Понятия, в которых описывается личность.

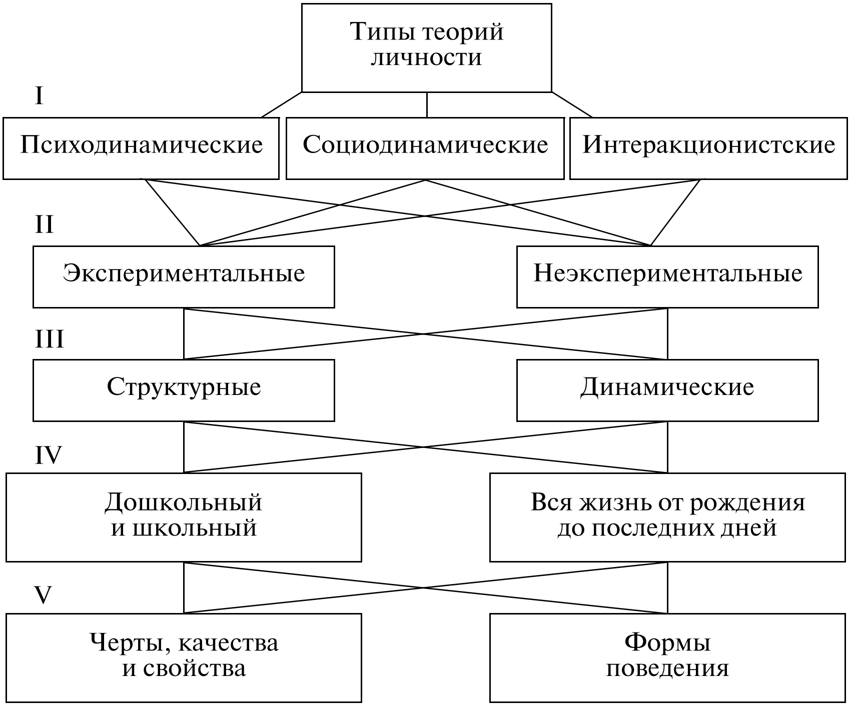


Рис. 6

В классификации определяется пять соответствующих уровней. Они представлены на рисунке 6.

Все теории личности делятся ***на первом уровне*** **(I)** на три принципиально отличающихся друг от друга типа. К *психодинамическим* относятся теории, которые описывают личность и объясняют ее поведение, исходя из ее внутренних психологических характеристик. *Социодинамическими* называются теории, в которых главная роль отводится социальным и общественным отношениям личности, т. е. главную роль играет внешняя ситуация. Наконец, когда учитывается и то, и другое, т. е. теории, основанные на взаимодействии внутренних и внешних факторов, называются *интеракционистскими*.

Если обозначить через $Л$ — личность человека, $И$ — его индивидуальные внутренние психологические характеристики и $С$ — социальные, общественные отношения, то символически рассмотренные теории можно представить следующим образом:

а) психодинамические: $Л = F(И)$;

б) социодинамические: $Л = F(С)$;

в) интеракционистские: $Л = F(И, С)$.

***На втором уровне* (II)** расположены *экспериментальные* и *неэкспериментальные* теории личности. Первые связаны с исследованиями экспериментального характера, которые используют математико-статистическую обработку данных с целью получения достоверных данных о личности. Здесь очень важна задача разработки надежных и валидных тестовых методов оценивания личности.

***На третьем уровне* (III)** к *структурным* причисляются теории, для которых главной проблемой является выяснение структурных компонентов личности, с помощью которых она описывается. Одной из самых популярных структурных теорий является концепция *черт личности*. Черта рассматривается как устойчивое качество или склонность человека вести себя определенным образом в разнообразных ситуациях. Например, среди черт личности можно назвать такие, как импульсивность, честность, чувствительность, робость. Авторитетом в этой области считается, например, английский психолог *Г. Ю. Айзенк* [2]. Он полагал, что структуру личности лучше всего схематически представлять в терминах гипотетических качеств, лежащих в основе поведения. Широко известны его работы по измерению интеллектуальных способностей и влиянию результатов на успех (или неуспех) обучения.

Другим видом структурных теорий является концепция *типа личности*. В ней тип личности описывается в виде совокупности множества различных черт. По сравнению с концепциями черт личности данные подразумевают более постоянные и обобщенные поведенческие характеристики. Поскольку люди наделены многими чертами, выраженными в разной степени, их обычно описывают как принадлежащих к тому или иному типу. Одним из ярких представителей этого направления теорий личности является швейцарский психолог *К. Г. Юнг* [157]. Он придерживался мнения, что все люди разделяются на два типа: *интроверты*; *экстраверты*.

Первые в процессе индивидуализации, прежде всего, обращают внимание на себя, на свои внутренние особенности, строят свое поведение, исходя из собственных представлений, идей, норм, убеждений. Вторые, наоборот, больше ориентируются на внешний мир и в своей деятельности исходят главным образом из его норм и правил поведения. Ученый считал, что структура личности состоит из трех частей:

1) коллективного бессознательного;
2) индивидуального бессознательного;
3) сознания.

Первая означает своего рода «память поколений», это психологическое наследство, с которым ребенок появляется на свет. Вторая и третья части являются чисто личностными, приобретенными. При этом основными психическими функциями считаются мышление, эмоции, ощущения и интуиция. Поэтому Юнг в каждом основном типе различал еще соответствующие подтипы: мыслительный; эмоциональный; сенсорный; интуитивный.

В результате им подробно исследовано и описано восемь типов личности, например экстравертированный мыслительный тип или интровертированный эмоциональный тип.

В *динамических* теориях основное — это преобразование, развитие, формирование личности.

Можно рассмотреть развитие личности в ограниченных возрастных рамках. Рассматриваемый возраст определяет ***четвертый уровень***. Наконец, на ***пятом уровне*** обращают основное внимание или на внутренние индивидуальные качества личности, или на ее внешние проявления, которые выражены в поведении и поступках.

В качестве примера рассмотрим модель личности, удовлетворяющую набору: I—3; II—2; III—2; IV—1; V—1 (рис. 6), где первое число каждого компонента означает уровень, а второе — названную характеристику. Например, III—2 означает, что на третьем уровне выбирается динамическая теория личности, в IV—1 для определенности возьмем старший школьный возраст.

Покажем, что такая модель личности в наибольшей степени соответствует современным целям и задачам средней школы.

В психологии наряду с понятием *личность* используются понятия *индивид* и *индивидуальность*. Индивид, или индивидуальность (не будем различать эти понятия, данные термины будем считать синонимами), — это конкретный человек во всем своеобразии своих физических, физиологических и психических качеств и свойств. Индивидуальностью, как следует из этого определения, обладают не только люди, но и собаки, кошки, например у них своя внешность, свой норов. Но мы не говорим о личности собаки или кошки. *Личность* чаще всего обозначает индивидуальность в ее социальных связях и отношениях.

В отечественной психологии наиболее распространен подход, когда личность рассматривается как функция $F(И, С)$, определенная выше. Еще в работах *С. Л. Рубинштейна* [114] подчеркивалось, что понятие личности есть общественная, а не только психологическая категория. При этом, конечно, не исключается, что сама «личность как реальность, как кусок действительности, обладая многообразными свойствами — и природными, а не только общественными, — является предметом изучения разных наук, каждая из которых изучает ее в своих специфических для нее связях и отношениях».

Во многих современных психологических исследованиях, например в работах [110, 148], личность трактуется как системное качество, приобретаемое индивидом в предметной деятельности и общении и характеризующее его включенность в социальные отношения. Личность понимается как социализированный индивид, рассматриваемый со стороны его наиболее существенных социально значимых свойств.

В некоторых работах специально подчеркивается, что личностью следует считать человека, достигшего определенного уровня психического развития. Этот уровень характеризуется тем, что в процессе самопознания человек начинает воспринимать и переживать самого себя как единое целое, отличное от других людей и выражающееся в понятии «я» [20]. Такой уровень психического развития характеризуется также наличием у человека собственных взглядов и отношений, собственных моральных требований и оценок, делающих его относительно устойчивым и независимым от чуждых его собственным убеждениям воздействий среды. Необходимая характеристика личности — ее активность. Человек на этом уровне развития способен сознательно воздействовать на окружающую действительность, изменять ее в своих целях, а также изменять в своих целях самого себя. Иначе говоря, человек, являющийся личностью, обладает таким уровнем психического развития, который делает его способным управлять своим поведением и деятельностью, а также в известной мере и своим психическим развитием. Очень важное положение для модели личности, которую мы рассматриваем.

Понятие личности должно употребляться по отношению к человеку, только начиная с некоторого этапа его развития. Например, мы не говорим о личности новорожденного или даже двухлетнего ребенка, хотя они проявляют не только свои генотипические особенности, но и множество особенностей, приобретенных под воздействием социального окружения. «Личность не есть целостность, обусловленная генотипически: личностью не родятся, а становятся» [79]. Это очень важное положение в теории личности, которое может быть интерпретировано по-разному. Личность может рассматриваться как результат развития генотипических черт под влиянием воздействия социальной среды. Другими словами, формирование личности прямо совпадает с процессом развития природных качеств индивида в ходе его приспособления к внешней среде.

Более глубокое, комплексное понимание формирования личности состоит в том, что не только изменение врожденных свойств человека определяет его личность. Особенности индивида не становятся особенностями его личности и не определяют ее. Хотя они создают необходимые предпосылки развития личности. Сила или слабость нервных процессов, уравновешенность их проявляют себя лишь на уровне механизмов, посредством которых реализуется система отношений индивида с миром, что и определяет неоднозначность их роли в формировании личности. Это важный вывод для построения модели формирования личности учащегося.

Теперь уточним само понятие *формирования личности*. В психолого-педагогической литературе наиболее часто встречаются два понятия: развитие и формирование, которые иногда не различают между собой и используют в качестве синонимов. Между тем, каждое из них имеет свою особенность.

Развитие — процесс движения от низшего, простого к высшему, сложному. Это количественные и качественные изменения различных сторон психики человеческого индивида.

Формирование — процесс развития под влиянием внешних воздействий воспитания, обучения, социальной среды.

Таким образом, грубо говоря, словосочетание «развитие личности» употребляется там, где речь идет о психологических проблемах, а «формирование личности» — применительно к проблемам учебно-воспитательного процесса.

Следующим важным тезисом теории личности является утверждение о том, что *личность и формируется, и проявляется в деятельности*.

Причем каждый возраст имеет свои особенности, что позволяет ученым строить различные периодизации. Принятая в нашей стране возрастная периодизация основывается на двух факторах: 1) социальная ситуация развития; 2) ведущая деятельность.

Эти понятия были введены и развиты в работах *Л. С. Выготского* [31] и *А. Н. Леонтьева* [79].

Социальная ситуация развития — это особое сочетание внутренних процессов развития и внешних условий, которые являются типичными для каждого возрастного этапа и обусловливают динамику психического развития на протяжении соответствующего возрастного периода, и новые качественно своеобразные психологические образования, возникающие к его концу. А. Н. Леонтьев дает следующее определение: «*Ведущей деятельностью* мы называем не просто деятельность, наиболее часто встречающуюся на данной ступени развития ребенка ... Ведущей мы называем такую деятельность, в связи с развитием которой происходят главнейшие изменения в психике ребенка и внутри которой развиваются психические процессы, подготовляющие переход ребенка к новой высшей ступени его развития».

Исходя из такого понимания ведущей деятельности, исследователи установили, что для каждого возраста характерен определенный вид деятельности, а именно: для дошкольников — это игра, для школьников — учение, после окончания школы ведущим видом деятельности становится труд.

Выводы

1. Личность определяется своей индивидуальностью, природными задатками и системой социальных отношений, в которые она вступает.

2. О личности человека можно говорить лишь на определенном уровне его развития: личностью не рождаются, а становятся.

3. На формирование личности оказывают влияние следующие факторы:

— система общественных отношений, в которые вступает человек;

— деятельность, которую человек при этом выполняет.

4. Особое значение в формировании личности придается возрасту. Каждый возрастной период характеризуется двумя понятиями: социальной ситуацией развития и ведущей деятельностью.

5. В старшем школьном возрасте складываются все необходимые предпосылки для успешного формирования личности, для осуществления личностно-ориентированного обучения.

6. Эти предпосылки не только подкрепляют цели и задачи по формированию личности учащихся, но и создают условия, благоприятные для личностно-ориентированного обучения.

7. Для решения задачи формирования личности необходима дифференциация обучения, способствующая максимальной реализации всех индивидуальных возможностей каждого школьника.

8. Необходимо совершенствовать содержание, формы и методы обучения школьников, ориентированные на формирование их личности.

§ 8. Формирование учебной деятельности школьников

Теория деятельности, деятельностного подхода разработана в трудах известных отечественных психологов: *Л. С. Выготского*, *П. Я. Гальперина*, *В. В. Давыдова*, *А. Н. Леонтьева*, *С. Л. Рубинштейна* и др. Российской школой накоплен достаточно богатый опыт организации и формирования различных аспектов учебной деятельности учащихся.

Понятие *деятельности* рассматривается как сознательный, активный и целенаправленный процесс. В исследовании [79] говорится, что «если иметь в виду деятельность человека, то можно сказать, что деятельность есть как бы молярная единица его индивидуального бытия, осуществляющая то или иное жизненное его отношение ... Всякая предметная деятельность отвечает потребности, не всегда опредмеченной в мотиве; ее главными образующими являются цели и соответственно отвечающие им действия, средства и способы выполнения и, наконец, те психофизиологические функции, реализующие деятельность, которые часто составляют ее естественные предпосылки и накладывают на ее протекание известные ограничения, часто перестраиваются в ней и даже ею порождаются». Общая структура деятельности представлена на рисунке 7.

Кратко охарактеризуем основные компоненты, входящие в структуру понятия деятельности. *Цель* определяет результаты,

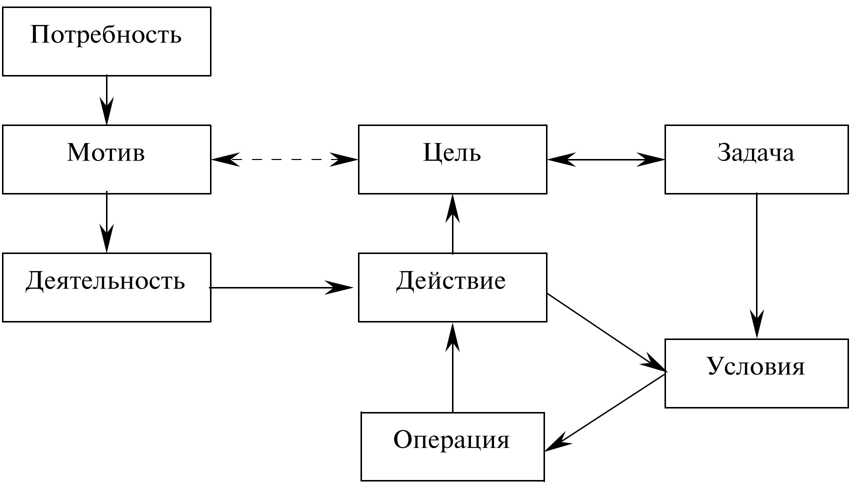


Рис. 7

на достижение которых деятельность направлена. *Мотив* побуждает ученика к деятельности, которая осуществляется как совокупность неких действий. Способы осуществления этих действий называются *операциями*. Их совокупность образует так называемый, *прием* деятельности. Сознательное овладение каким-либо приемом деятельности называется *умением*. Умение, доведенное до автоматизма, называется *навыком*.

Учебная деятельность

Учебная деятельность соответственно определяется как частный специфический вид деятельности. Например, *Б. Д. Эльконин* [156] определяет ее так: «Учебная деятельность — это деятельность направленная, имеющая своим содержанием овладение обобщенными способами действий в сфере научных понятий...такая деятельность должна побуждаться адекватными мотивами, ими могут быть...мотивы приобретения обобщенных способов действий или, проще говоря, мотивы собственного роста, собственного совершенствования». Таким образом, учебная деятельность направлена на самого школьника, она развивает его и формирует его личность. По мнению *Т. В. Габай* [32], «учебная деятельность — это деятельность, направленная на приобретение опыта одним из ее участников. Обеспечивая познание, она дает его в качестве прямого или главного продукта. Этим учебная деятельность отличается, в частности, от трудовой, где также происходит приобретение человеком новых или совершенствование старых знаний и умений, но лишь как дополнительный побочный продукт». Следовательно, учебная деятельность означает совместную деятельность, в которой один из ее участников приобретает опыт, а другой или другие создают соответствующие благоприятные условия для нее. Учебная деятельность включает в себя: *деятельность учения* (школьника) и *деятельность преподавания* (учителя). Учебная деятельность может осуществляться в следующих вариантах.

1. Работа основывается на том, что учащийся обладает умением учиться.

2. Умение учиться у школьника отсутствует, работа основывается на усвоении при пошаговом руководстве деятельностью учителем.

Л. М. Фридман [145] определяет *целенаправленную учебную деятельность*. Это деятельность, которую нужно сформировать у каждого школьника и которая рассматривается как «особая деятельность ученика, сознательно направляемая им на осуществление целей обучения и воспитания, принимаемых учеником в качестве своих личных целей». Особенности целенаправленной учебной деятельности при обучении математике.

- Направленность не на получение каких-либо материальных или иных результатов, а на изменение самого ученика, на овладение им определенными действиями, умениями, на усвоение каких-то знаний, на выработку у себя каких-то психических качеств.

- Направленность на освоение общих способов действий. В каждом действии, выполняемом учеником, следует различать результат этого действия и тот общий способ, с помощью которого выполняется данное действие и все другие того же типа.

- Необходимость выявления происхождения новых вводимых понятий, показ их необходимости с точки зрения теоретического познания основ математики.

- Направленность изучения учебного материала на содержательное обобщение.

- Направленность на формирование научно-теоретической деятельности.

Формирование учебной деятельности предполагает знакомство учащихся с основными компонентами ее структуры. Другими словами, школьники знают цели обучения, соотносят их с мотивами, могут самостоятельно выполнять некоторые действия, решать предлагаемые задачи и т. п.

В. В. Давыдов [47] выявил следующие закономерности формирования учебной деятельности.

1. Существуют процессы возникновения, формирования, развития и распада любого конкретного вида деятельности (в том числе и учебной).

2. Структурные компоненты деятельности постоянно меняют свои функции, превращаясь друг в друга (например, потребности конкретизируются в мотивах, действие может стать операцией, и наоборот).

3. Различные частные виды деятельности взаимосвязаны друг с другом в едином потоке человеческой жизни (поэтому, например, подлинное понимание учебной деятельности предполагает раскрытие ее взаимосвязей с игрой и трудом, спортом и т. п.).

4. Каждый тип деятельности первоначально возникает и складывается в своей внешней форме как сеть развернутых взаимоотношений между людьми, использующими различные

средства организации своего общения и обмена действиями; лишь на этой основе формируются и развиваются внутренние формы деятельности отдельного человека, свернутые в своей структуре и опирающиеся на образы и понятия.

Организация учебной деятельности осуществляется через методы преподавания. Таким образом, при их выборе необходимо учитывать особенности учебной деятельности. Следует знать специфику ее структуры, т. е. своеобразие учебных потребностей, мотивов, задач, действий, операций и т. д. Кроме этого, нужно выделить общие этапы формирования учебной деятельности, для каждого из которых характерны свои методы преподавания, и учесть также индивидуальные формы работы с учащимися.

В работе [72] выделены следующие общие этапы формирования учебной деятельности.

1. Постановка цели, ясное осознание конкретной задачи.

2. Планирование работы, выбор наиболее рационального способа действия.

3. Выполнение, осуществление деятельности, сопровождаемое текущим контролем и перестройкой деятельности в случае необходимости.

4. Проверка результатов, исправление ошибок, если они были.

5. Сопоставление полученных результатов с запланированными.

6. Подведение итогов работы и ее оценка.

Все эти этапы легко проследить, анализируя конкретную деятельность ученика. При правильно организованном формировании учебной деятельности развиваются основные психические познавательные функции учащихся, такие как восприятие, внимание, память, воображение, мышление.

В исследованиях рассматриваются приемы учебной деятельности. *Прием деятельности* определяется как система действий, выполняемых в определенном порядке и служащих для решения учебных задач [53].

Типы приемов (умений, навыков) учебной деятельности.

1. Общеучебные.

2. Специальные.

Общеучебные приемы относятся ко всем школьным предметам, они носят универсальный характер. Например, приемы по работе с учебником, другой учебной, справочной, научно-популярной литературой; выделение из предлагаемого учебного материала главного и второстепенного; конспектирование учебного материала; организация домашней работы и т. п.

Специальные приемы относятся к определенному предмету или циклу предметов. В частности, по геометрии это могут быть приемы по формированию геометрических понятий, способов доказательств теорем, поиску решения задач различных типов и т. д.

Кроме учебной деятельности, в специальной литературе встречаются также такие термины, как *учебно-познавательная деятельность* и *познавательная деятельность*. Они, безусловно, имеют много общего, но имеют и отличия. Самое «широкое» понятие — познавательная деятельность (*ПД*), затем учебная деятельность (*УД*) и, наконец, учебно-познавательная деятельность (*УПД*), т. е. схематично это выглядит следующим образом:

$$УПД \subset УД \subset ПД.$$

Познание может осуществляться не только в учебных целях, но и для настоящих научных открытий, изобретений и т. п. Для школьника познавательная деятельность протекает в учебно-познавательной форме. В то же время не всякий учебный процесс связан с познанием, например выполнение всякого рода тренировочных упражнений на отработку и закрепление знаний и умений учащихся, решение однотипных задач и т. п.

В учебно-познавательной деятельности выделяются три взаимосвязанных компонента:

а) общие логические приемы мышления;

б) специфические для определенной области знаний приемы мышления;

в) система знаний.

Как подчеркивалось в работе [136], «система знаний играет двоякую роль в процессе обучения, являясь результатом и важным компонентом познавательной деятельности. Это объясняется тем, что формирование и развитие системы знаний протекает постепенно в процессе учебной (познавательной) деятельности с помощью общелогических и специфических приемов мышления на базе уже сформированной (до этого) части системы знаний. На «голом месте», т. е. без наличия каких-нибудь знаний, никакая познавательная деятельность в данной области знаний невозможна».

Автор специально выделил учебно-познавательную деятельность при обучении математике и назвал ее *математической деятельностью*: «Обучение математике есть дидактически целесообразное (обоснованное) сочетание обучения математическим знаниям и познавательной деятельности по приобретению этих знаний, т. е. специфической для математики познавательной деятельности, которую для краткости, хотя и несколько условно, назовем математической».

Три выделенных компонента учебно-познавательной деятельности при обучении математике он представил тройкой (L, M, S), где L — набор общелогических приемов мышления (индукция, дедукция, анализ, синтез, сравнение, сопоставление, классификация, обобщение, абстрагирование, конкретизация); M — набор приемов математической деятельности (табл. 7); S — система уже имеющихся у школьников математических знаний.

Таблица 7

Приемы математической деятельности
Математическое описание конкретных ситуаций или деятельность по математизации эмпирического материала
Логическая организация математического материала
Применение математической теории

Тогда схематично процесс обучения математике будет выглядеть следующим образом:

$$(L, M, S) \to (L, M, S_1) \to (L, M, S_2)\ ...,$$

где $S \subset S_1 \subset S_2$ ..., т. е. на основании познавательной деятельности происходит постепенное расширение системы знаний. Но обучение не может происходить только по данной схеме, потому что может иметь место передача готовых знаний, т. е., условно говоря, действует схема:

$$S \to S_1 \to S_2 \to \dots .$$

Успешность осуществления математической деятельности школьника складывается из определенного сочетания следующих качеств.

1. Активное положительное отношение к математике, интерес к ней, склонность ею заниматься.

2. Ряд характерологических черт, прежде всего трудолюбие, организованность, самостоятельность, целеустремленность, настойчивость, а также устойчивые интеллектуальные чувства

(удовлетворение от напряженной умственной работы, радость творчества, открытия и т. д.).

3. Наличие во время осуществления деятельности благоприятных для ее выполнения психических состояний, например состояния заинтересованности, сосредоточенности, хорошего «психического самочувствия» и т. д.

4. Определенный фонд знаний, умений и навыков в соответствующей области. Если ученик не имеет минимума знаний, умений и навыков в области математики, то он не может быть пригоден даже к заурядной математической деятельности, хотя бы он и обладал большими математическими способностями.

5. Определенные индивидуально-психологические особенности в сенсорной (от лат. *sensus* — ощущение, чувство) и умственной сферах, отвечающих требованиям данной деятельности.

Было определено понятие «*готовность*» («*пригодность*») школьника к такого рода деятельности [72](табл. 8).

Таблица 8

Готовность (пригодность) к деятельности	
Способности	Общие психологические условия, необходимые для успешного осуществления деятельности • Положительное отношение к деятельности (интересы, склонности) • Характерологические черты • Психологические состояния • Знания, умения, навыки

В теории учебной деятельности принято выделять такие ее характеристики, как активность, даже познавательная активность, самостоятельность учащихся.

Активность понимается как особое состояние школьника и его отношение к деятельности (внимание, желание выполнять предложенные задания, т. е. живое участие в учебном процессе, быстрое реагирование на изменение деятельности и т. п.).

Познавательная активность присуща учебно-познавательной деятельности. Она характеризует индивидуальность школьника, влияет на продуктивность обучения, и ее можно считать подготовительным этапом самостоятельности.

Самостоятельность учащихся связана с поиском различных путей решения учебно-познавательных задач без участия взрослых и помощи с их стороны.

Проявления познавательной активности и самостоятельности многообразны. Например, выделены такие [113]:

а) целенаправленность познавательных действий, их целесообразность, которая характеризуется смыслообразующей мотивацией;

б) характер знаний, умений, способов деятельности, выражающийся в мобильности их использования, в содержательности вопросов, обращенных к учителю;

в) желание расширить, углубить познавательную деятельность за счет широкого круга чтения, телевидения, радио, компьютера.

Активность в математической деятельности означает обучение не готовым знаниям, а стремление, по возможности, к открытиям математических истин (которые, несомненно, уже открыты и хорошо известны в науке).

Таким образом, речь может идти об ученическом творчестве. Деятельность является *творческой*, если она дает новые, впервые создаваемые, оригинальные продукты.

Центральное место в структуре этой деятельности занимает *эвристическая* деятельность. Эвристика — наука о творческом мышлении. Эвристическая деятельность скрыта от глаз наблюдателя, это умственная деятельность. Структура эвристической деятельности включает в себя следующие компоненты.

1. Ознакомление с проблемой.
2. Бессознательная работа мозга до появления идеи.
3. Оформление возникшей идеи.
4. Подтверждение истинности возникшей идеи.

О формировании эвристической деятельности школьников можно судить по тому, как и в какой степени представлены в обучении элементы ее структуры, насколько самостоятельно и сознательно они используются.

Часто эвристическая деятельность отождествляется с *исследовательской* деятельностью. Для этого есть основания. Действительно, ученическая исследовательская деятельность, имитирующая процесс научного исследования, включает в себя такие основные этапы.

I. Выполнение ряда проб с целью выдвижения гипотезы.

II. Выдвижение гипотезы.

III. Проверка гипотезы с помощью новых проб для ее подтверждения (или опровержения наличием противоречащего примера).

IV. Доказательство справедливости гипотезы (при отсутствии противоречащего примера).

Однако учебные эвристическая и исследовательская деятельности различаются степенью самостоятельности выбора и решения учебных проблем. Условно говоря, при эвристической деятельности проблему предлагает учитель, разбивает ее на подпроблемы, которые самостоятельно решаются учениками. При осуществлении исследовательской деятельности проблемы решаются от начала до конца самими учениками. Этот последний вид деятельности, как правило, осуществляется в старших классах.

Приведем примеры возможных исследовательских заданий по геометрии.

Пример 1. *Определите возможные формы сечений куба плоскостью.*

В сечении куба плоскостью могут получаться треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники.

1) *Треугольник* может быть равносторонним, если провести сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через точки, принадлежащие трем ребрам куба, выходящим из одной вершины и делящим эти ребра в равных отношениях, считая от данной вершины. Например, на рисунке 8, *а* изображено сечение EFG, проходящее через середины ребер, выходящих из вершины D_1. EFG — равносторонний треугольник. Вершины A, B_1 и C также являются вершинами равностороннего треугольника. Если сечение провести через вершину B_1 и середины ребер AB и BC, то в сечении получится равнобедренный треугольник (рис. 8, *б*).

2) *Четырехугольник*. Может получиться квадрат, это любое сечение, параллельное какой-нибудь грани куба; может получиться прямоугольник — это любое диагональное сечение. Параллело-

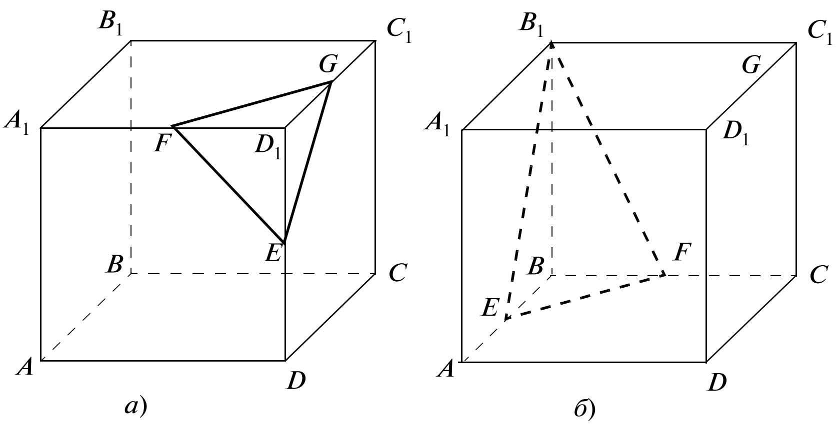


Рис. 8

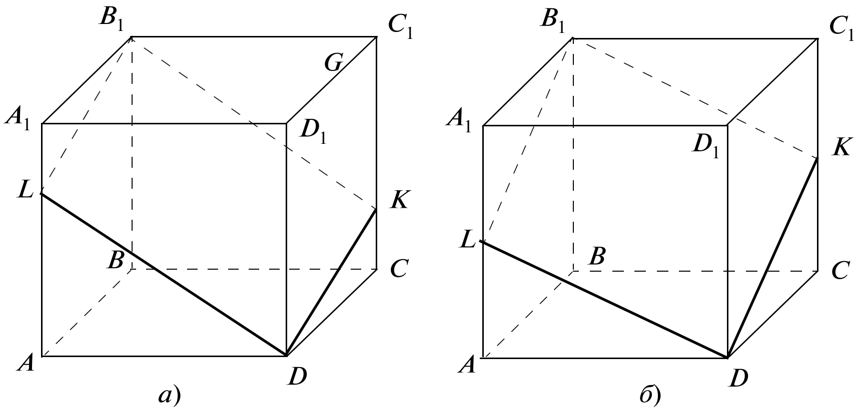


Рис. 9

грамм получится, если провести сечение, например, через вершины куба B_1, D и точку K, принадлежащую ребру CC_1 (рис. 9, *а*). Если точка K является серединой ребра CC_1, то в сечении получится ромб (рис. 9, *б*).

Трапеция получится, если провести сечение, например, через точки K, L M, принадлежащие соответственно ребрам AD, DC и A_1D_1 (рис. 10, *а*). Если K, L — середины соответственно ребер AD, DC, то в сечении получится равнобедренная трапеция (рис. 10, *б*).

3) *Пятиугольник* получится, если провести сечение, например, через вершину B_1 и точки E, F, принадлежащие соответственно ребрам AD, DC (рис. 11).

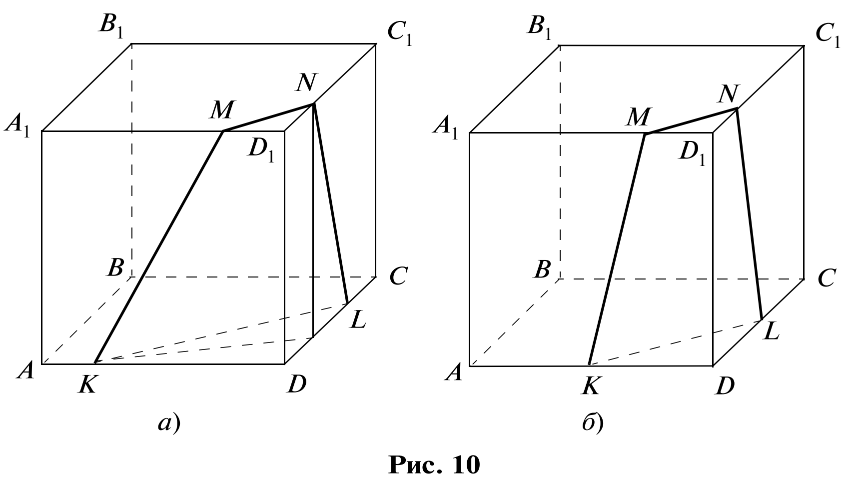


Рис. 10

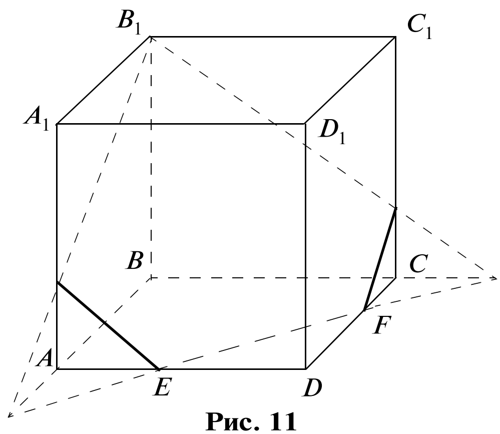


Рис. 11

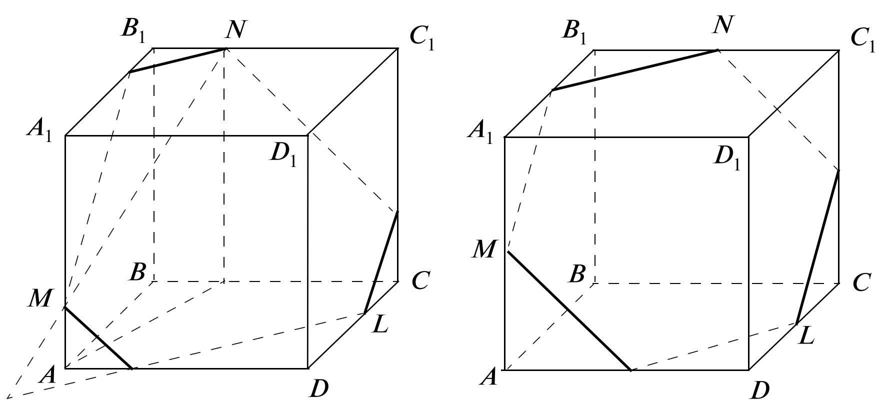
Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

Ответ. Нет, не может, так как в правильном пятиугольнике нет параллельных сторон, а в любом сечении куба, которое проходит через пять его граней, будет две пары параллельных сторон, что объясняется параллельностью противоположных граней куба.

4) *Шестиугольник* получится, если провести плоскость сечения таким образом, чтобы она пересекала все грани куба, например провести через три точки, принадлежащие скрещивающимся (попарно) ребрам куба, как показано на рисунке 12, *а*.

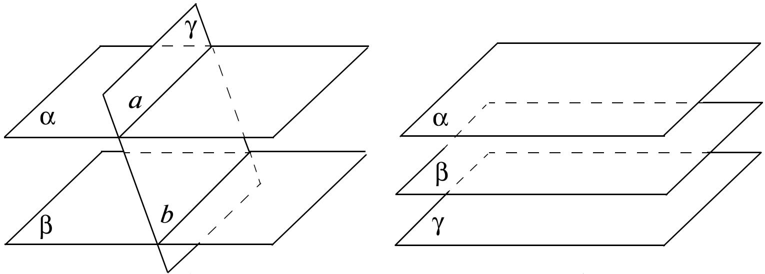
Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный шестиугольник?

Ответ. Да, может, если сечение проходит через середины трех скрещивающихся (попарно) ребер куба (рис. 12, *б*).



а)   *б*)

Рис. 12



а) *б*)

Рис. 13

П р и м е р 2. ***Исследуйте взаимное расположение трех плоскостей в пространстве.***

Исследуем взаимное расположение трех плоскостей α, β, γ.

Пусть какие-нибудь две плоскости, например α и β, будут параллельны. Тогда для плоскости γ имеются две возможности:

1) γ пересекает α и β по параллельным прямым (рис. 13, *а*);

2) γ параллельна обеим плоскостям (рис. 13, *б*).

Пусть теперь среди плоскостей α, β, γ нет параллельных, т. е. все они попарно пересекаются. Соответствующие линии пересечения обозначим: $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = c$. Обратим внимание на прямые *a* и *b*. Они лежат в одной плоскости α, значит, могут либо совпадать, либо пересекаться, либо быть параллельными.

3) Если прямые *a* и *b* совпадают, то плоскость β пересекается с плоскостью γ по той же прямой, т. е. все три плоскости пересекаются по одной прямой. Такое расположение плоскостей напоминает раскрытую книгу (рис. 14).

4) Если прямые *a* и *b* пересекаются в точке *A*, то *A* принадлежит всем трем плоскостям. В этом случае плоскости расположены как боковые грани в пирамиде (рис. 15, *а*).

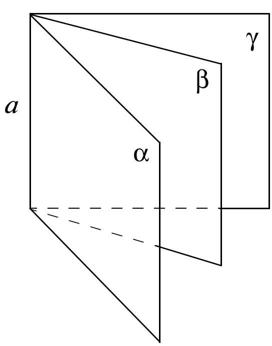
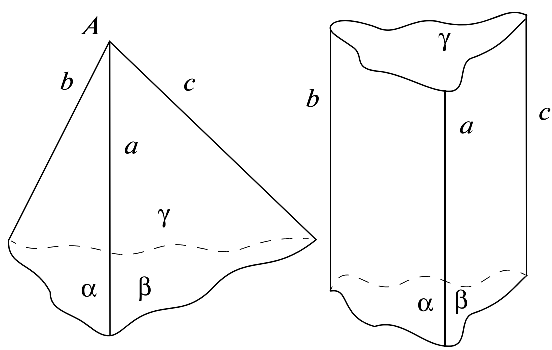


Рис. 14



а) *б*)

Рис. 15

5) Если прямые a и b параллельны, то прямая c тоже им параллельна. Пусть это не так, т. е. $a \cap c = B$, тогда точка B принадлежит всем трем плоскостям, и точка B принадлежит прямой b, что означает, что прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно и все три прямые a, b, c параллельны. В этом случае плоскости расположены как боковые грани в призме (рис. 15, *б*).

Итак, для правильной организации учебной, в частности математической, деятельности, эвристической, исследовательской деятельности, нужны соответствующие учебные задачи.

Проблемные ситуации

Существует общее определение *учебной задачи*, а именно учебная задача определяется как основной структурный компонент организации учебной деятельности, рассматривается как «обобщенная цель деятельности, поставленная (сформулированная) перед учащимися в виде обобщенного учебного задания» [53]. В качестве учебных задач по геометрии могут быть такие: «Осознать и усвоить этапы решения геометрической задачи на построение с помощью циркуля и линейки», «Систематизировать дополнительные построения на плоскости», «Узнать способы построения сечений многогранников плоскостью», «Узнать и обобщить способы вычисления объема пирамиды» и т. п.

Выделены следующие требования к учебным задачам [145].

1. Конструироваться должна не одна отдельная задача, а система задач.

2. Система задач должна обеспечивать достижение не только ближайших, но и отдаленных учебных целей.

3. Учебные задачи должны обеспечить усвоение средств, необходимых и достаточных для успешного осуществления учебной деятельности.

4. Учебная задача должна конструироваться так, чтобы соответствующие средства деятельности, усвоение которых предусматривается в процессе решения задач, выступали как прямой продукт обучения.

Каждая учебная задача разрешается через систему учебных заданий. Кроме этого, при решении учебных задач могут возникать различные ситуации. Например, автор [55] трактует *учебную ситуацию* «как единицу целостного образовательного процесса» и выделяет такие типы:

1) сотрудническую учебную ситуацию;

2) конфликтную учебную ситуацию.

Первый тип характеризуется столкновением различных взглядов, точек зрения, позиций на решение рассматриваемой учебной задачи и способствует лучшему изучению. Тогда как второй тип учебной ситуации касается личностных отношений между учащимися. Конфликт между ними препятствует продуктивному обучению. Учебная ситуация должна являться одним из компонентов *структуры организации учебной деятельности.*

1. Учебная мотивация как совокупность побудителей.

2. Учебная ситуация:

а) учебная задача, предлагаемая в форме учебного задания, которая принимается обучаемым;

б) решение учебной задачи посредством учебных действий — предметных и вспомогательных.

3. Контроль преподавателя.

4. Оценка преподавателя.

Среди учебных ситуаций особое место отводится *проблемным ситуациям*. Им посвящен ряд специальных исследований в области педагогики и психологии, например таких авторов, как *В. М. Вергасов, И. А. Ильницкая, Т. В. Кудрявцев, И. Я. Лернер, А. М. Матюшкин, М. И. Махмутов, В. Оконь* и др.

Проблемную ситуацию можно определить как «некоторое психическое состояние субъекта, испытывающего познавательную или практическую трудность, это выявившееся противоречие между субъектом и объектом деятельности и познания. Результатом деятельности по разрешению системы ситуаций на определенном этапе обучения должно быть овладение учащимися общими принципами решения задач» [113]. Выделяется три опознавательных признака проблемной ситуации в обучении.

1) Проблемная ситуация должна быть такова, чтобы учащийся, разрешая ее, проявлял собственную познавательную и исследовательскую активность.

2) Вопросы, порождаемые проблемной ситуацией, должны быть значимыми (жизненными) для учащихся.

3) Проблемная ситуация должна обладать свойством динамичности. Разрешение общей проблемы должно протекать в форме решения цепи соподчиненных проблем, вытекающих одна из другой и показывающих причинно-следственные отношения между изучаемыми явлениями и процессами.

К типам проблемных ситуаций отнесены следующие:

а) противоречие между имеющимися знаниями и теми требованиями, которые возникают в ходе решения новых учебных задач;

б) противоречие между теоретически возможным путем решения задачи и практической неосуществимостью его, а также между практически достигнутым результатом и отсутствием теоретического обоснования (у школьников);

в) противоречие между многообразием сложившихся знаний и необходимостью выбрать лишь одну из них, использование которой только и может обеспечить правильное решение задачи;

г) противоречие между сложившимися способами использования знаний и необходимостью их применить в новых практических условиях.

Выделяются следующие уровни проблемного обучения:

1. Проблемное изложение учебного материала.

2. Преподаватель сам создает (организует) проблемные ситуации, а учащиеся вместе с ним включаются в их разрешение.

3. Проблемная ситуация лишь создается преподавателем, разрешение же ее происходит в ходе самостоятельной деятельности учащихся.

4. Происходит «усмотрение» проблемы самими учащимися на основе представленных преподавателем неупорядоченных данных.

Таким образом, третий названный уровень соответствует формированию эвристической деятельности, а четвертый — исследовательской деятельности школьников.

Разработаны правила проблемного обучения [113], в которые входят правила создания проблемных ситуаций, правила управления процессом усвоения в проблемной ситуации и правила, определяющие последовательность проблемных ситуаций. Перечислим их.

1. Поставить такое практическое или теоретическое задание, при выполнении которого учащийся должен открыть подлежащие усвоению новые знания или действия. При этом задание основывается на тех знаниях и умениях, которыми уже владеет учащийся. Оно включает неизвестный элемент, потребность в котором должна вызываться у школьника в процессе выполнения задания. Неизвестное, которое нужно открыть для выполнения поставленного задания, составляет подлежащую усвоению общую закономерность, общий способ действия или некоторые общие условия выполнения действия. Выполнение проблемного задания должно вызвать у учащегося потребность в усваиваемом знании.

2. Предложить проблемное задание, которое соответствовало бы интеллектуальным возможностям ученика. Степень трудности этого задания можно оценить по двум показателям: по сте-

пени новизны подлежащего усвоению учебного материала и по степени его обобщенности.

3. Проблемное задание должно предшествовать объяснению подлежащего усвоению учебного материала. Однако если у учащихся нет достаточных знаний об изучаемом объекте, то первым этапом будет этап сообщения им необходимых сведений для создания проблемной ситуации. При подготовке учебного материала нужно выделять материал, который должен быть сообщен учащимся, и тот, который они должны усвоить творчески. В качестве проблемных заданий могут служить: учебные задачи; вопросы; практические задания и т. п. Одна и та же проблемная ситуация может быть вызвана различными типами заданий.

4. Возникшую проблемную ситуацию должен формулировать учитель путем указания ученику на причины невыполнения им поставленного учебного задания или невозможности объяснить им те или иные факты. Этим подчеркивается учебный характер предлагаемого ученику проблемного задания и определяется область поиска требуемого неизвестного.

Для проблемного обучения математической деятельности предложена общая схема (таблица 9), в которой предусмотрено несколько типов проблемных ситуаций [136].

Таблица 9

Основные аспекты математической деятельности	**Основные типы проблемных ситуаций**			
	Цель	**Известное**	**Неизвестное**	**Результаты**
Математический эмпирический материал	Введение новых понятий, расширение теоретических знаний	Эмпирический материал, подлежащий математическому описанию	Математический язык, аппарат, необходимый для описания эмпирического материала	Новые математические знания
Логическая организация математического материала	Систематизация знаний	Математический материал	Способ логической организации математического материала	Система математических знаний

Окончание табл.

Основные аспекты математической деятельности	Основные типы проблемных ситуаций			
	Цель	Известное	Неизвестное	Результаты
Применение математической теории	Применение знаний в новых ситуациях	Эмпирический материал и математическая теория	Способ применения математической теории к новому эмпирическому материалу в новых ситуациях	Перенос математических знаний

В качестве примера проблемных заданий, которые могут быть предложены учащимся основной школы или старшеклассникам при изучении геометрии для формирования учебной познавательной деятельности с элементами исследования возьмем блок задач, связанных с комбинаторными свойствами основных геометрических фигур: точек, прямых, плоскостей.

1. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости через: а) 3 точки; б) 4 точки; в) 5 точек; г) n точек?

О т в е т. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Даны: а) 4 прямые; б) 5 прямых; в) n прямых. Они попарно пересекаются, и никакие три из них не имеют общей точки. Сколько отрезков образуется на всех прямых?

О т в е т. а) $4 \cdot 3 = 12$; б) $5 \cdot 6 = 30$; в) $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

3. На прямой отмечены: а) 3 точки; б) 4 точки; в) 5 точек; г) n точек. Сколько получилось отрезков?

О т в е т. а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. Сколько диагоналей имеет выпуклый: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) n-угольник?

О т в е т. а) 2; б) 5; в) 9; г) $\frac{n(n-3)}{2}$.

5. На сколько частей разбивают плоскость: а) 3; б) 4; в) 5; г) n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Ответ. а) 7; б) 11; в) 16; г) $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$.

6. В пространстве даны: а) 3 точки; б) 4 точки; в) n точек. Сколько прямых можно провести через различные пары этих точек? Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

Ответ. Прямые: а) 3; б) 6; в) $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Плоскости: а) 1; б) 4; в) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

7. В пространстве даны параллельные прямые: а) 3; б) 4; в) n. Сколько плоскостей можно провести через различные пары этих прямых, если известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости?

Ответ. а) 3; б) 6; в) $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

8. Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться: а) 3; б) 4; в) n плоскостей.

Ответ. а) 3; б) 6; в) $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

9. Сколько диагоналей у призмы: а) четырехугольной; б) пятиугольной; в) n-угольной?

Ответ. а) 4; б) 10; в) $n\,(n - 3)$.

10. Сколько диагональных сечений у призмы: а) четырехугольной; б) пятиугольной; в) n-угольной?

Ответ. а) 2; б) 5; в) $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Представленный блок (цикл, набор) задач объединен одной идеей. Как правило, в школьном курсе математики, в частности геометрии, задачи не рассматриваются изолированно, сами по себе. Они объединяются в системы, которые представляют, например, некоторый прием решения, или метод решения, или способ построения и т. п. *Составление блоков взаимосвязанных* учебных задач является важной методической проблемой. Из психологии известно, что цепочка взаимосвязанных задач лучше воспринимается, запоминается и усваивается школьниками, чем набор изолированных друг от друга задач. Существуют различные приемы составления блоков взаимосвязанных задач. Приведем несколько геометрических примеров.

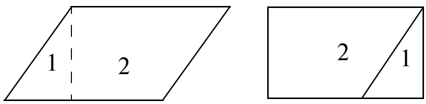
Блок задач «На разрезание»

Сначала предлагаем ребятам простейшие задачи на разрезание плоских фигур, начав рассмотрение одной из увлекательнейших тем, связанных с равновеликостью и равносоставленностью фигур.

1. Из параллелограмма получите прямоугольник.

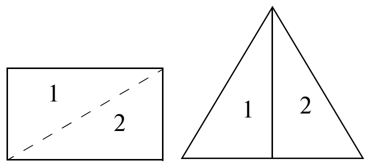
2. Из прямоугольника получите треугольник.

В рассматриваемых задачах производится всего один разрез данной фигуры (рис. 16, 17) и из образовавшихся двух частей складывается новая фигура.



а) *б*)

Рис. 16



а) *б*)

Рис. 17

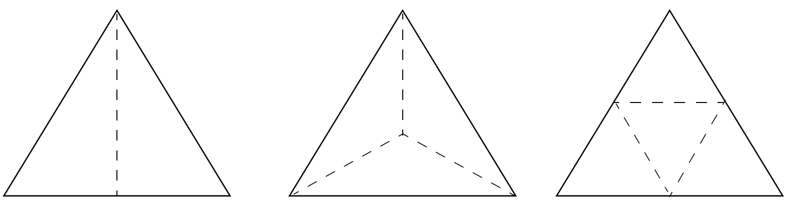
3. Равносторонний треугольник разрежьте:

а) на две равные части; б) на три равные части; в) на четыре равные части.

Р е ш е н и е представлено на рисунке 18.

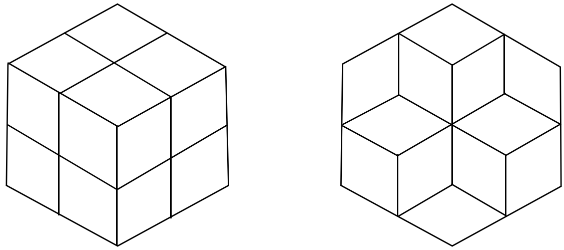
4. Разрежьте правильный шестиугольник на 12 равных четырехугольников.

Два способа р е ш е н и я показаны на рисунке 19.

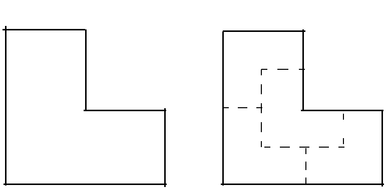


а) *б*) *в*)

Рис. 18

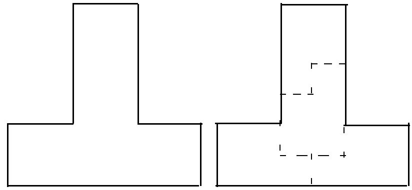


а) **Рис. 19** *б*)



а) *б*)

Рис. 20



а) *б*)

Рис. 21

5. Разрежьте фигуру, представленную на рисунке 20, *а*, на 4 равные части.

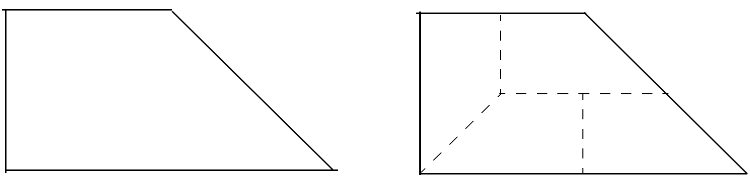
Р е ш е н и е дано на рисунке 20, *б*.

6. Разрежьте фигуру, представленную на рисунке 21, *а*, на 4 равные части.

Р е ш е н и е дано на рисунке 21, *б*.

7. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке 22, *а*, на четыре равные части.

Р е ш е н и е представлено на рисунке 22, *б*.

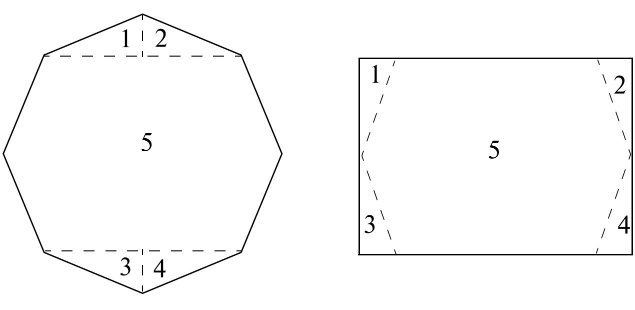


а) *б*)

Рис. 22

8. Перекроите правильный восьмиугольник в прямоугольник.

Р е ш е н и е показано на рисунке 23.



а) *б*)

Рис. 23

9. Покажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Решение. Правильный восьмиугольник имеет диагонали трех типов, соединяющие вершины через три вершины (это наибольшая диагональ, проходящая через центр правильного восьмиугольника), через две вершины и через одну вершину (это наименьшая диагональ правильного восьмиугольника). Правильный восьмиугольник равносоставлен с прямоугольником, сторонами которого являются наибольшая и наименьшая диагонали восьмиугольника, обозначим соответственно $d_{\max}$ и $d_{\min}$ (см. рис. 23). Таким образом, площадь S_8 восьмиугольника равна $S_8 = d_{\max} \cdot d_{\min}$.

10. В правильном восьмиугольнике $A_1 \ldots A_8$ проведены диагонали A_2A_7 и A_3A_6. Покажите, что площадь образовавшегося четырехугольника $A_2A_3A_6A_7$ равна половине площади правильного восьмиугольника.

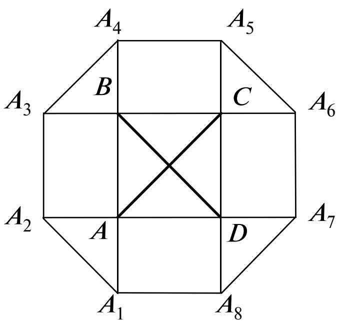


Рис. 24

Решение Проведем в правильном восьмиугольнике $A_1 \ldots A_8$ (рис. 24) диагонали A_1A_4 и A_5A_8. Фигуры $A_2A_3A_6A_7$ и $A_1A_4A_5A_8$ — прямоугольники; $ABCD$ — квадрат (это следует из свойств правильного восьмиугольника). В квадрате $ABCD$ проведем диагонали. Легко показать, что треугольники, на которые распадается этот квадрат, и треугольники, примыкающие к сторонам восьмиугольника A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 и A_7A_8, равны. Кроме этого, также равны прямоугольники, примыкающие к остальным сторонам восьмиугольника. Из этого следует, что площадь $A_2A_3A_6A_7$ равна сумме площадей $A_3A_4A_5A_6$ и $A_1A_2A_7A_8$. Это доказывает, что площадь прямоугольника $A_2A_3A_6A_7$ равна половине площади данного правильного восьмиугольника.

Блок задач «Греческий крест»

1. Перекроите греческий крест в квадрат: а) произвольным числом разрезов; б) двумя разрезами.

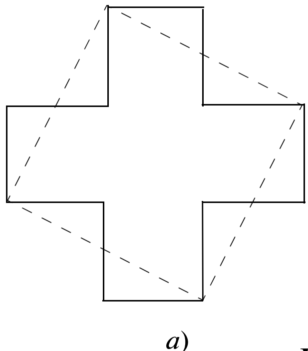


Рис. 25

Р е ш е н и е показано на рисунке 25.

2. Дан квадрат *ABCD.* Середины его сторон соединены с противоположными вершинами так, как показано на рисунке 26, *а*. Найдите площадь получившегося четырехугольника *EFGH*, если площадь данного квадрата равна 1.

Заметим, что задание для учащихся можно сделать более закрытым, а именно: «Докажите, что площадь получившегося четырехугольника *EFGH* равна $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата».

Р е ш е н и е представлено на рисунке 26, *б*. Получившийся четырехугольник *EFGH* является квадратом. Построенный греческий крест равновелик данному квадрату.

3. Площадь одного квадрата клетчатой бумаги равна 100 мм^2. Пользуясь только линейкой и ножницами, вырежьте из клетчатой бумаги квадрат площадью 80 мм^2.

Р е ш е н и е показано на рисунке 27. Квадрат *ABCD* имеет площадь 400 мм^2. По предыдущей задаче квадрат *EFGH* имеет площадь $\frac{1}{5} \cdot 400 = 80$ (мм^2).

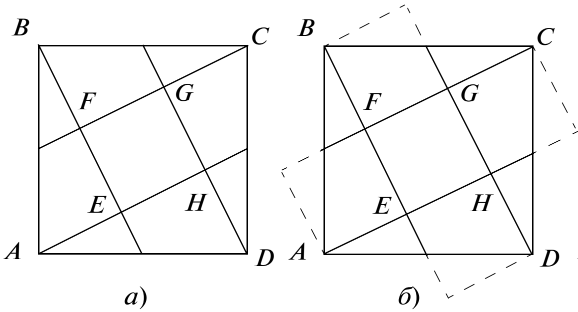


Рис. 26

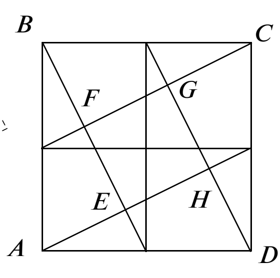


Рис. 27

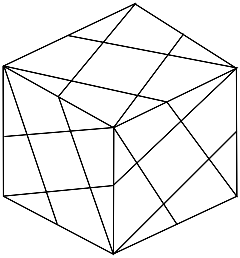


Рис. 28

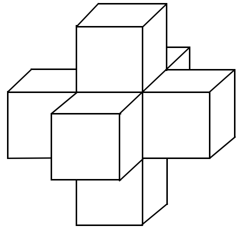


Рис. 29

4. Можно ли шестью греческими крестами оклеить поверхность куба, если площадь одного греческого креста равна площади одной грани куба?

Да, можно, если перекроить каждый греческий крест в квадрат (см. задачу 1 данного блока).

Вопрос: «А можно оклеить поверхность данного куба, не разрезая крестов»?

Да, тоже можно, решение показано на рисунке 28, оно основано на задаче 2 данного блока.

5. Как выглядит фигура, аналогичная греческому кресту, в пространстве — пространственный крест? Сколько у нее вершин (*В*), ребер (*Р*) и граней (*Г*)?

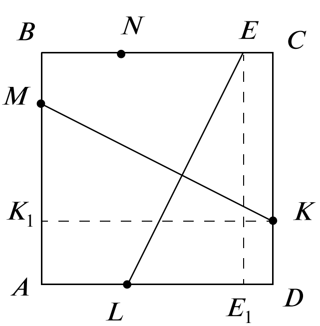
Пространственный крест изображен на рисунке 29. У него $В = 32$, ребер $Р = 60$ и граней $Г = 30$.

Теперь остановимся на блоках задач, в которых представляются некоторые приемы решения.

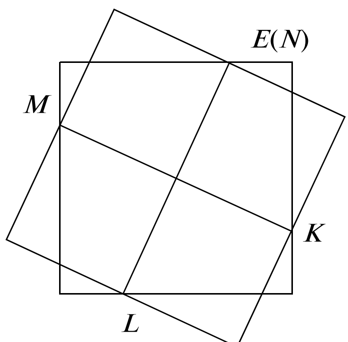
Задача из блока «Восстанови фигуру»

Восстановите квадрат, зная по одной точке (*K, L, M, N*) на каждой его стороне.

Решение. Опустим анализ решения и сразу приведем построение квадрата (рис. 30, *а*). Проводим MK; $LE \perp MK$ и



а)



б)

Рис. 30

$LE = MK$; прямую NE. Через точку L проводим прямую, параллельную прямой NE. Через точки M и K — прямые, перпендикулярные NE. Соответствующие точки пересечения A, B, C, D являются вершинами искомого квадрата.

Вопрос: «А если в приведенном построении точка E совпадет с точкой N»?

В этом случае получится бесконечно много решений, см. рисунок 30, *б*.

Блок задач «Точки и ломаные»

1. Соедините 4 точки, расположенные в вершинах квадрата, ломаной из трех сторон. (Эта задача открывает целый блок задач на ломаные. Первая очень простая, при ее решении учащиеся должны вспомнить понятие ломаной.)

2. Соедините 9 точек, расположенных в вершинах квадрата, в серединах его сторон и в его центре, ломаной из 4 сторон.

Решение показано на рисунке 31.

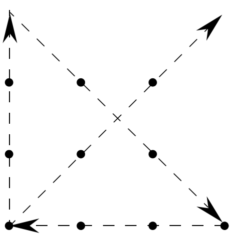
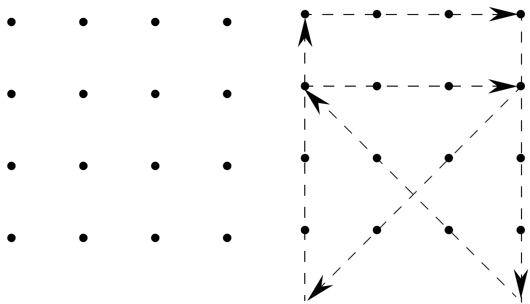


Рис. 31



а) *б*)

Рис. 32

3. Соедините 16 точек, расположенных так, как показано на рисунке 32, *а*, ломаной из 6 сторон.

Решение показано на рисунке 32, *б*.

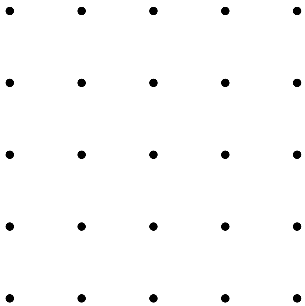
4. Соедините 25 точек, расположенных так, как показано на рисунке 33, *а*, ломаной из 8 сторон.

Решение показано на рисунке 33, *б*.

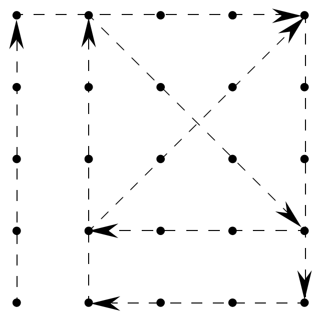
5. Установите зависимость между числом точек (x) и наименьшим числом (y) сторон в ломаной в условиях предыдущих задач для $x > 4$.

Ответ. $y = 2(\sqrt{x} - 1)$.

Для решения представленных задач учащимся не нужны особые знания. Каждый ученик может проявить себя в их решении. Например, к числу таких задач можно отнести следующие.



а)



б)

Рис. 33

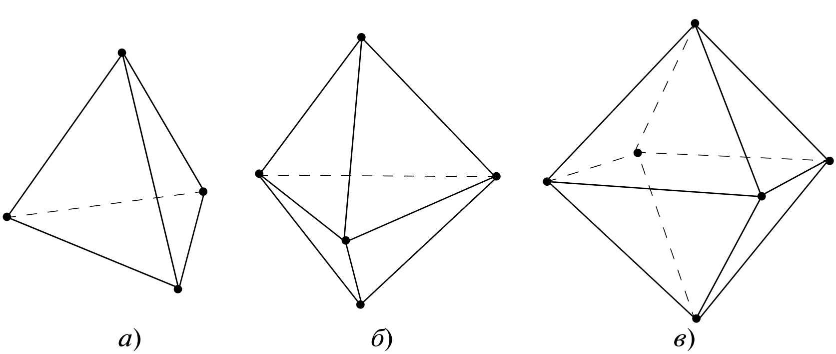
6. Составьте 4 треугольника из 6 одинаковых спичек.

7. Составьте 7 треугольников из 9 одинаковых спичек.

8. Составьте 8 треугольников и 1 четырехугольник из 12 одинаковых спичек.

Решения задач 6—8 показаны на рисунке 34. В случае а) получился тетраэдр; б) — треугольная бипирамида; в) — четырехугольная бипирамида — октаэдр.

Самой интересной в блоке «Точки и ломаные» является вторая задача. Во-первых, именно на ее основе решаются третья и четвертая задачи. Во-вторых, она часто используется в методических руководствах и даже в курсах по психологии для иллюстрации принятия неожиданного, нестандартного решения (выход за пределы площади квадрата), что связано с нестереотипной умственной деятельностью. Это пример нестандартной задачи. Термин «нестандартная задача» очень близок к другим названиям подобных задач, таким как творческая, исследовательская, проблемная, поисковая, эвристическая. При их решении ученик то-



а) *б*) *в*)

Рис. 34

же сталкивается с нешаблонными ситуациями, требующими соответствующих нестандартных действий.

Нестандартные задачи

Нестандартными называются задачи, для которых в курсе математики нет соответствующих методов или алгоритмов, определяющих точный план их решения. Отсюда основной особенностью процесса их решения является его поиск, открытие решения. Следует считать ошибочной точку зрения, согласно которой ребят нельзя научить решать нестандартные задачи. Можно, но для этого нестандартные задачи, наряду со стандартными, должны непосредственно включаться в процесс обучения, в содержание курса геометрии. «Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. И ... помните: если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!». Эти слова принадлежат известному венгерскому математику и педагогу ***Д. Пойа***.

Единого подхода, ключа к решению нестандартных задач, конечно, не существует, но в методике преподавания математики разработаны методы их решения и методы поиска их решений. Например, в работе [145] предложены соответствующие схемы: методы решения нестандартных задач (табл. 10) и поиск решения нестандартных задач (рис. 35).

Таблица 10

№ п/п	Методы решения нестандартной задачи		
I	Разделение на стандартные или более простые задачи с помощью разбиения на части:		
	условий задачи	объекта задачи	требований задачи
II	Замена данной задачи ей равносильной с помощью:		
	преобразования условий	замены переменных (неизвестных)	замены объектов другими
III	Введение вспомогательных элементов для:		
	сближения данных и искомых	разделения задачи на части	придания задаче определенности

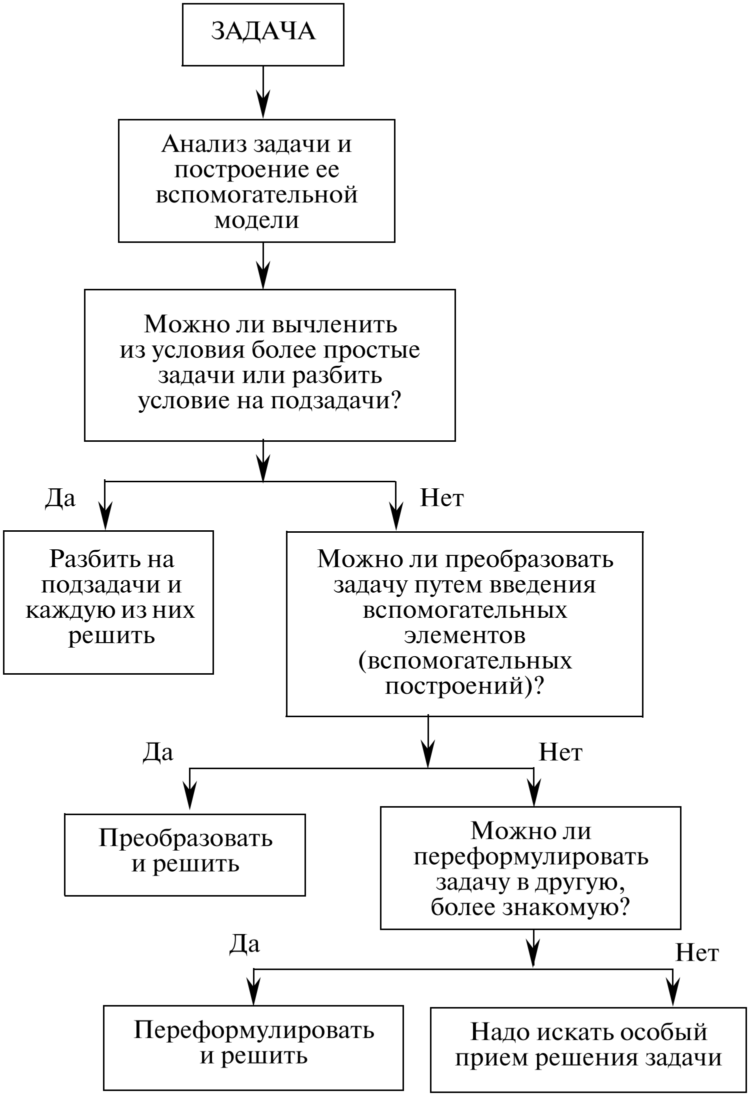


Рис. 35

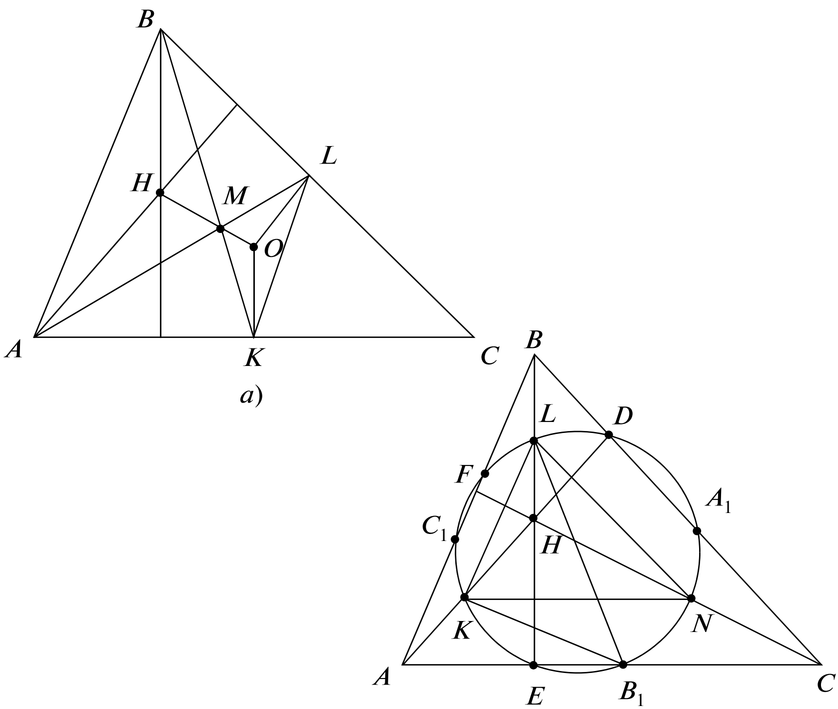
В качестве примера рассмотрим решения задач Эйлера.

1. *Прямая Эйлера.* Докажите, что во всяком треугольнике ортоцентр (точка пересечения высот), центроид (точка пересечения медиан) и центр описанной окружности принадлежат одной прямой (прямой Эйлера).

Р е ш е н и е. Сначала рассмотрим *вспомогательную задачу*: «Докажите, что в любом треугольнике (ABC) расстояние от ортоцентра (H) до некоторой вершины (B) вдвое больше расстояния от центра описанной окружности (O) до противоположной относительно выбранной вершины стороны (AC).

На рисунке 36, *а* точки K и L — середины соответствующих сторон. Треугольники ABH и LKO подобны (по углам) с коэффициентом подобия, равным 2, так как средняя линия треугольника $KL = \frac{1}{2}AB$, значит, $BH = 2KO$.

Теперь перейдем к решению основной задачи. В треугольнике ABC (см. рис. 36, *а*) проведем HO, где H — ортоцентр, O — центр описанной окружности. Точка K — середина стороны AC. Точка M — точка пересечения HO и BK. Докажем, что точка M является центроидом треугольника. Для этого достаточно показать, что $BM : KM = 2 : 1$. Это следует из подобия треугольников BHM и KOM (по углам). $BM : KM = BH : KO$, но $BH : KO = 2 : 1$, следовательно, $BM : KM = 2 : 1$, и точка M является центроидом треугольника. Более того, $HM = 2OM$.



а)

б)

Рис. 36

Выше рассмотрен чисто геометрический способ решения, но можно предложить доказательство с помощью геометрических преобразований, а именно: построим треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно точки M — центроида треугольника. Ортоцентр H треугольника ABC перейдет в ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, точки H, H_1 и M принадлежат одной прямой и $HM = MH_1$. Возьмем теперь гомотетию с центром в точке M и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Треугольник $A_1B_1C_1$ перейдет в треугольник LKN, где точки L, K, N — середины соответствующих сторон исходного треугольника ABC. Следовательно, точка, являющаяся ортоцентром треугольника LKN, гомотетичная точке H_1, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, т. е. с точкой O — центром описанной окружности. Так как точки H_1 и O гомотетичны с центром гомотетии M, то H_1, O, M принадлежат одной прямой; точка H принадлежит прямой MH_1. Следовательно, точки H, M, O принадлежат одной прямой. Более того, $HM = 2MO$.

2. *Окружность Эйлера.* Докажите, что в произвольном треугольнике основания медиан, основания высот, а также середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот треугольника с его вершинами, принадлежат одной окружности (окружности девяти точек, или окружности Эйлера).

Решение. Пусть дан треугольник ABC (рис. 36, *б*), точки D, E, F — основания высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 — основания соответствующих медиан; точки K, L, N — середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника, точку H, с его вершинами.

Выбираем произвольную сторону треугольника, например AC. Проводим окружность с диаметром LB_1. Точка E принадлежит этой окружности, так как $\angle LEB_1 = 90°$. Докажем, что точка K также принадлежит этой окружности. Действительно, $\angle LKB_1 = \angle BFC = 90°$ (как углы с соответственно параллельными сторонами, так как KL и KB_1 — средние линии треугольников соответственно ABH и AHC). Аналогично можно показать, что точка N принадлежит данной окружности. Таким образом, точки K, L, N, E, B_1 принадлежат одной окружности.

Выбираем другую сторону треугольника — AB, и поступаем таким же образом, как с AC. В результате получим, что точки K, L, N, F, C_1 принадлежат одной окружности.

Если теперь выбрать последнюю сторону треугольника — BC и провести аналогичные рассуждения, получим, что точки K, L, N, D, A_1 принадлежат одной окружности.

Так как точки K, L, N определяют единственную окружность, все названные точки принадлежат одной окружности — окружности девяти точек, или окружности Эйлера.

Как и в случае с прямой Эйлера, предложим доказательство, использующее геометрические преобразования.

Берем гомотетию с центром в точке M — центроиде данного треугольника — ABC — и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. Треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$. Точка H — ортоцентр данного треугольника — перейдет в точку H_1 — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$, она совпадет с точкой O — центром окружности, описанной около треугольника ABC, точка O перейдет в точку O_1 — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Заметим, что $HO_1 = O_1O$ (по свойствам прямой Эйлера).

Возьмем гомотетию с центром в точке H и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Тогда точки A, B, C, O перейдут соответственно в точки K, L, N, O_1. Таким образом, окружность, описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность, описанную около треугольника KLN, т. е. в окружность с центром в точке O_1 и радиусом, равным половине радиуса первой окружности. Итак, окружность, проходящая через точки K, L, N, совпадает с окружностью, описанной около треугольника A_1, B_1, C_1.

Осталось доказать, что точки D, E, F принадлежат этой последней окружности. Продолжим высоты и отложим $DD_1 = HD$, $EE_1 = HE$, $FF_1 = HF$. Треугольник HBD_1 — равнобедренный, так как у него BD является одновременно высотой и медианой, значит, и биссектрисой, т. е. $\angle EBC = \angle CBD_1$, но $\angle EBC = 90° - \angle ACB$ и $\angle CBD_1 = 90° - \angle AD_1B$. Таким образом, $\angle ACB = \angle AD_1B$, и точка D_1 принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC.

Аналогично при рассмотрении соответствующих треугольников показывается, что точки E_1 и F_1 принадлежат той же окружности. Таким образом, точки D_1, E_1, F_1, принадлежащие окружности, описанной около треугольника ABC, при гомотетии с центром в точке H и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ переходят соответственно в точки D, E, F, которые должны принадлежать окружности, описанной около треугольника KLN. Таким образом, все девять названных точек принадлежат одной окружности — окружности Эйлера.

В настоящее время появляются новые современные методики обучения математике. Например, вводятся интенсивные курсы математики [76]; курсы, опирающиеся на деятельностный подход [53]; использующие новые технологии обучения [88], в том числе информационно-коммуникационные [58]; появилось даже новое направление образования — психодидактика [34], в котором большое внимание уделяется интеллектуальному воспитанию учащихся [19, 147].

§ 9. Развитие основных познавательных процессов

Познавательные процессы, такие как восприятие, внимание, память, воображение, мышление, являются основными компонентами любой человеческой деятельности, в том числе учебной. При этом в психологии считается доказанным, что познавательные процессы не просто участвуют в деятельности, они сами развиваются и сами представляют особые виды деятельности.

Так *восприятие* в процессе учебной деятельности приобретает свои основные свойства — отражение целостности объекта и предметность. Например, на уроках геометрии школьники учатся воспринимать и оценивать формы объектов: объемные фигуры; пространство и т. п. Основные составляющие пространства — это место расположения, длина, ширина, высота, глубина, форма. Причем в процессе восприятия участвуют все органы чувств, однако 90% всей информации о пространственных характеристиках объектов приходится на зрение.

На уроках геометрии мы можем выявить и продемонстрировать основные особенности восприятия, такие как *целостность*; *избирательность*.

Дело в том, что прежде всего бросается в глаза изображение в целом, а уже потом прорисовываются детали. Благодаря целостности восприятия, отдельные точки, линии объединяются в фигуру. При этом восприятие не всегда дает верное представление о геометрических фигурах, значит, и о предметах окружающего мира. Ошибочные зрительные восприятия называются *зрительными иллюзиями*. Иллюзия — искаженное, неправильное восприятие. Их рассмотрение, включение в изучение геометрии оказывается очень полезным для развития правильного восприятия, наблюдательности, внимания учащихся.

Рассмотрим примеры иллюзии.

1. На рисунке 37, *а* изображена известная *иллюзия Мюллер-Лиера*, которая впервые была описана еще в 1889 г. Оба отрезка равны, но в первом случае сходящиеся стрелки направляют глаз внутрь, а во втором — расходящиеся стрелки направляют его наружу, поэтому кажется, что верхний отрезок короче нижнего. Эту старинную иллюзию можно несколько усилить, видоизменив ее

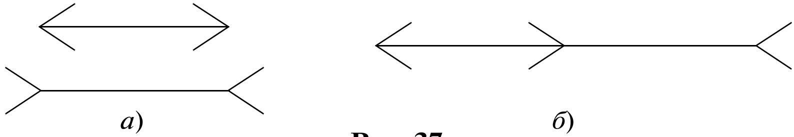


Рис. 37

так, как показано на рисунке 37, *б*. Отрезок разделен на две равные части, но левая из-за сходящихся стрелок кажется значительно меньше правой с расходящимися стрелками.

2. На рисунке 38 представлена *иллюзия сходящихся* и *расходящихся линий*, из-за которых кажется, что верхние основания трапеций не равны, тогда как в действительности они равны.

3. Диагонали AB и AC параллелограммов, изображенных на рисунке 39, равны.

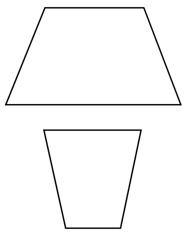


Рис. 38

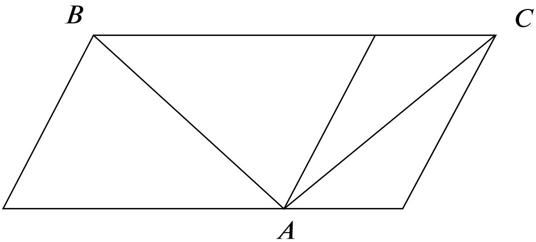


Рис. 39

4. Как вы думаете, какая прямая, AC или BC, изображена на рисунке 40? (*Иллюзии Поггендорфа*.)

5. Какие прямые изображены на рисунке 41? Есть ли среди них параллельные прямые? Это так называемая *иллюзия пересечения*.

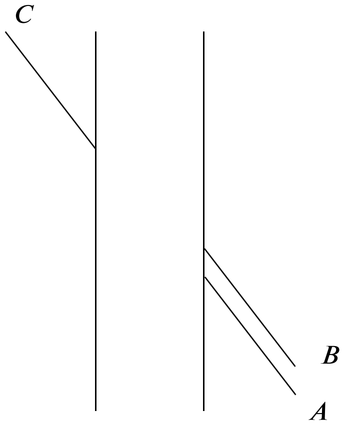


Рис. 40

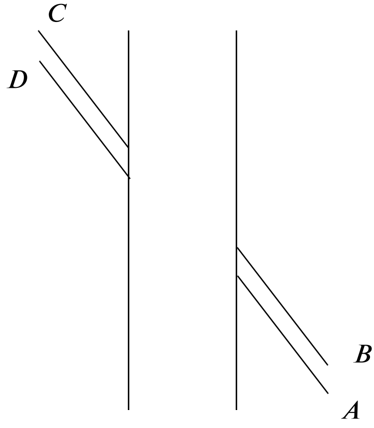


Рис. 41

Второй важной характеристикой восприятия, вслед за целостностью, является его избирательность. Воспринимая, мы обычно выделяем всего один или несколько объектов, а все остальное становится фоном. В качестве примера приведем так называемые *двойственные изображения*, которые можно воспринимать и интерпретировать по-разному.

6. Сосчитайте количество кубиков, изображенных на рисунке 42. Если мы сначала воспримем кубик с гранями, отмеченными 1, 2 и 3, то ответ будет 6 кубиков, а если — с гранями 3, 4 и 5 — то 7 кубиков.

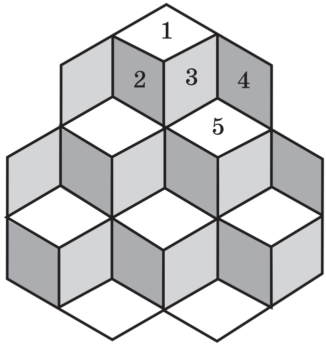


Рис. 42

Следует особо отметить, что, подчиняясь законам изображения, можно нарисовать даже невозможные ситуации. В живописи есть даже целое направление, называемое «импоссибилизм» (*impossibility* — невозможность) — изображение невозможных объектов. Известный голландский художник М. Эшер (Maurits Cornelis Escher) в гравюрах «Бельведер» (рис. 43), «Водопад» (рис. 44),

Рис. 43

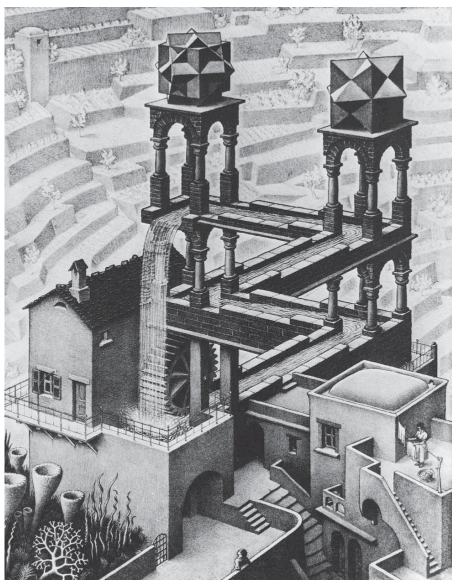


Рис. 44

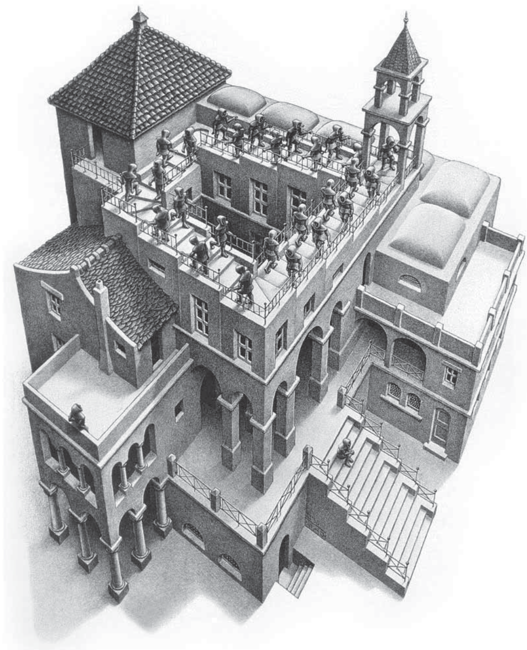


Рис. 45

«Поднимаясь и опускаясь» (рис. 45) изобразил невозможные фигуры.

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 46.

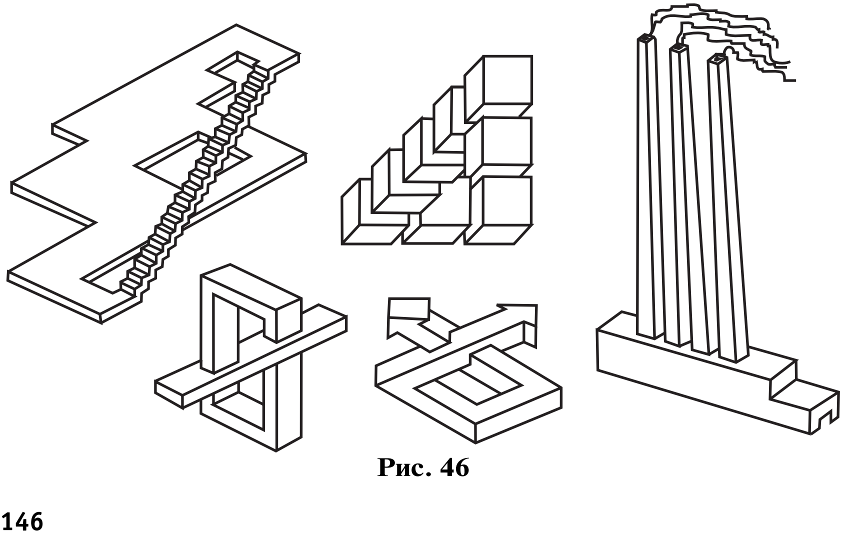


Рис. 46

Все это необыкновенно важно для преподавания геометрии, так как связано с одной из центральных ее проблем — изображением геометрических фигур, в том числе и пространственных, на плоскости.

В психологии специально выделяется *целенаправленное, планомерное восприятие*, называемое *наблюдением*. Оно дает возможность глубже понимать окружающий мир, делать правильные выводы, связано с деятельностью мышления — сравнением, различением, анализом. Кроме этого, наблюдательность напрямую ведет к *любознательности*, к желанию открыть для себя новое, интересное в предлагаемом материале.

Внимание

Уроки геометрии вносят неоценимый вклад в развитие наблюдательности и любознательности учащихся. На примере решения различных геометрических задач на изображение, построение, доказательство, исследовательских, нестандартных и т. п. школьники учатся выделять из целого объекта отдельные части, характерные особенности, различия, сходства, устанавливать связи и отношения.

Восприятие невозможно, как мы видели, без *внимания*. Именно благодаря вниманию наше сознание выделяет одни воспринимаемые объекты и отвлекается от других. То, к чему привлечено наше внимание, становится фигурой, а все остальное фоном, как было, например, на рисунке 42.

Вместе с тем, внимание отличается от других психических процессов тем, что оно характеризует активность человека, является необходимым условием любой деятельности. В частности, внимание — одно из основных условий успешной учебной деятельности. В то же время в учебной деятельности оно само и развивается.

Изучение геометрии может оказать благоприятное воздействие на воспитание, прежде всего, таких свойств внимания, как *сосредоточенность, устойчивость, объем, распределение, переключение* (*переключаемость*).

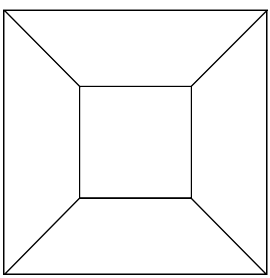


Рис. 47

Например, сосредоточенность внимания обычно связана с интересом к деятельности, которую выполняет ученик.

Посмотрите на рисунок 47. Что на нем изображено? Это может быть усеченная пирамида, изображенная в параллельной проекции, меньшее основание которой обращено или к нам, или вглубь. Может быть и изображение куба в центральной проекции, две грани которого параллельны плоскости проектирования, а прямая, соединяющая центр проектирования с центром куба, перпендикулярна плоскости проектирования.

Для понимания такого чертежа, кроме сосредоточенности внимания, нужна также его устойчивость. Она связана с длительностью удержания внимания на одном объекте. Неустойчивость внимания возникает от неинтересной, скучной, однообразной, механической деятельности, например от решения однотипных задач.

Объем внимания — это количество объектов, которые ученик может воспринимать одновременно, а распределение внимания — это умение одновременно выполнять несколько действий. Объем и распределение внимания играют исключительно важную роль в успехах учеников. Поэтому очень важной задачей, стоящей перед учителем, является изучение индивидуальных особенностей внимания каждого ученика. Только при этом условии можно вести целенаправленную работу по воспитанию внимания и ликвидации соответствующих недостатков.

Вот, например, несколько простых упражнений для определения объема внимания учащихся, предложенных в работе [103].

1. Покажите учащимся на 1 секунду рисунок 48, а потом попросите их вспомнить, в каких фигурах были записаны числа.

Как правило, ребята не обращают внимания на фигуры, а стараются запомнить числа. Конечно, здесь проявляется избирательность внимания. Если вы дадите специальную установку на запоминание чисел и фигур, то внимание учащихся будет организовано по-другому.

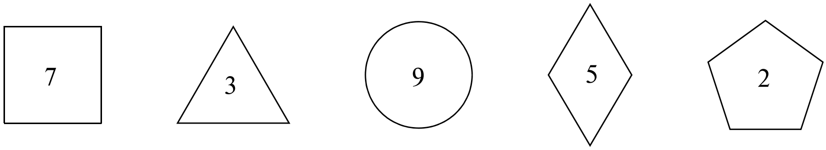


Рис. 48

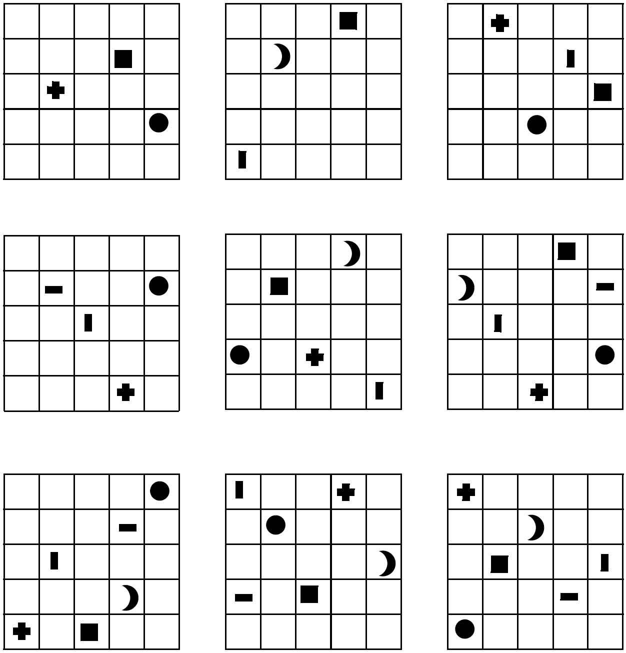


Рис. 49

2. Каждому участнику эксперимента даем девять сеток, таких же, как на рисунке 49, но незаполненных. Затем последовательно показываем в течение 1 секунды каждую сетку и просим ребят после ее удаления попытаться расставить фигуры по клеткам. Хорошим считается результат 4—5 правильно заполненных сеток.

При воспитании внимания учителю необходимо знать не только индивидуальные, но и возрастные особенности учеников. Именно в подростковом возрасте развивается умение длительное время удерживать внимание на отвлеченном, логически организованном учебном материале, хотя, конечно, это умение развивается постепенно и не одинаково у всех школьников.

У учащихся основной школы и старших классов появляются предпосылки для развития *произвольного*, *или волевого*, *внимания*. Для этого нужно постепенно и настойчиво тренировать стремление к достижению цели, непременного выполнения намеченного. Например, сделать правильный чертеж, разобраться в трудной теории, решить нестандартную задачу, изготовить красивую модель геометрической фигуры и т. п.

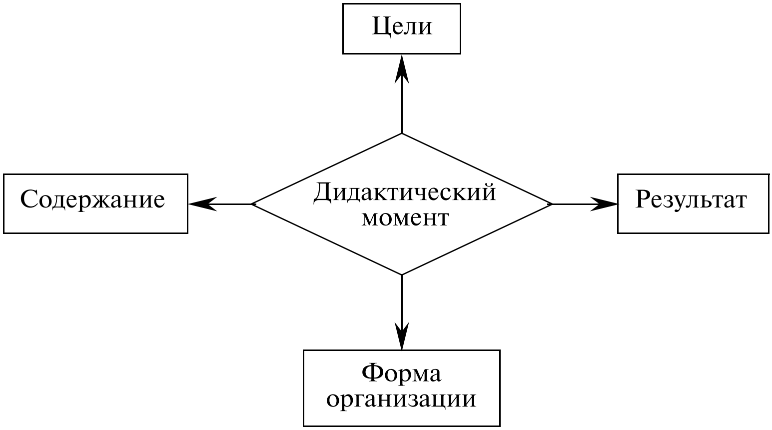


Рис. 50

Воспитанию привычки быть внимательным способствует четкая организация урока. По данным психологов у ребят 7—9 классов основной школы внимание удерживается в среднем не более 10—15 минут (в 7 классе 10 минут, в 9 классе 15 минут). Следовательно, на уроке должно быть 3—4 этапа — дидактических момента. Структура дидактического момента представлена на рисунке 50.

У старшеклассников внимание на профильном предмете может удерживаться в среднем до 20 минут а в отдельных случаях и до 30—40 минут. В частности, по данным нашего исследования на уроках геометрии в математических классах внимание учащихся можно удержать до 20—30 минут, а в гуманитарных классах в среднем до 12 минут. Поэтому для «математиков» на уроках геометрии может быть предложено всего два дидактических момента, в то время как для «гуманитариев» — 3—4 этапа. Если количество этапов урока, т. е. число смен учебной деятельности, превышает рекомендованное, то это приводит не к формированию устойчивого внимания, а, наоборот, к рассеянности учащихся.

Кроме этого, на уроке существуют кризисы внимания. Первый кризис наступает на третьей минуте урока, когда класс начинает «втягиваться» в работу. Второй кризис — двадцать третья минута. Это середина урока, и начинают проявляться первые признаки утомляемости, усталости. Третий кризис наступает в конце урока. Это надо иметь в виду. Например, в процессе проведения урока не делать в это время лишних замечаний. При подготовке конспекта урока запланировать соответствующие виды учебной деятельности. В начале урока это может быть математический диктант, причем с первыми простыми заданиями, в процессе которого ребята постепенно привыкают к темпу работы. В середине урока можно предложить устную работу, а в конце, последние 7 минут, посвятить занимательному моменту.

С занимательным материалом нужно быть очень осторожным, потому что излишняя занимательность может навредить, дать даже отрицательные результаты. Вместо того чтобы сделать урок интересным, она может привести к, так называемому *избалованному вниманию*. Это весьма опасное явление. Ведь не весь учебный материал может вызывать непосредственный интерес у школьников, хотя имеет очень важное значение для всего курса в целом.

Память

Следующей важной особенностью нашего мозга является *память*. Она определяется как процесс *запоминания, сохранения, воспроизведения, узнавания* ранее воспринятого, пережитого, сделанного.

Эти процессы у разных людей протекают по-разному. Одни с трудом запоминают, зато могут неплохо воспроизводить, другие надолго сохраняют в памяти запомненный ими материал. Это люди с развитой *долговременной памятью*. Есть люди, которые быстро запоминают, но также быстро и забывают. У них развита *кратковременная и оперативная память*.

На рисунке 51 представлена очень полезная и простая схема системы памяти, принцип которой предложен в работе [98]. На

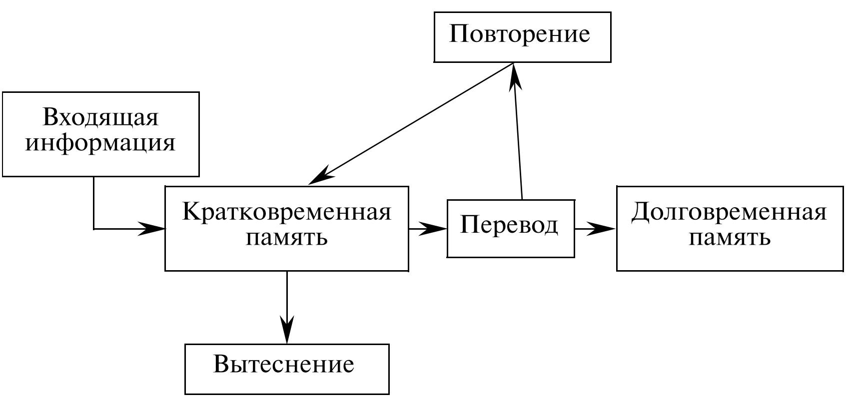


Рис. 51

ней показаны связи работы между кратковременной и долговременной памятью, включающие процессы вытеснения, повторения, кодирования (перевода), которые и составляют работу памяти.

Таким образом, память очень индивидуальна. Она характеризуется следующими количественными параметрами: *скорость, прочность, длительность, точность, объем*. Существуют и качественные различия. Например, на основании многолетних экспериментов все учащиеся делятся на семь групп в соответствии с преобладанием у них определенного типа или нескольких т и п о в п а м я т и [99].

1. Зрительная.
2. Слуховая.
3. Двигательная.
4. Двигательно-слуховая.
5. Зрительно-слуховая.
6. Зрительно-двигательная.
7. Неопределенная.

Учащиеся *зрительного* типа хорошо запоминают информацию, представленную на рисунках, схемах, таблицах, моделях и т. п., они обычно припоминают конспект урока или текст учебника, им легче учить уроки молча.

К *слуховому* типу отнесены учащиеся, которым легче запоминать информацию со слов учителя, не повторяя ее про себя. Во время ответа они, как правило, не могут припомнить текст учебника.

Двигательный, или, иначе, *моторный*, тип характеризуется тем, что учащимся легче запоминать информацию, проговаривая ее про себя или вслух.

На практике «чистые» типы памяти (1—3) встречаются крайне редко, чаще встречаются ученики со «смешанными» типами (4—6). Причем у большинства ребят тип памяти вообще не определен (7). На большом массиве учащихся, порядка 1000 человек, были получены следующие результаты по группам.

1. 4% — зрительная.
2. 2% — слуховая.
3. 4% — двигательная.
4. 5% — двигательно-слуховая.
5. 12% — зрительно-слуховая.
6. 33% — зрительно-двигательная.
7. 40% — неопределенная.

Как видим из представленных данных, действительно, процент односторонних «чистых» типов очень незначителен, всего 10%, тогда как неопределенный тип имеет большой процент (40%). Половину же составляют комбинированные «смешанные» типы, на них приходится 50% испытуемых. Причем обращает на себя внимание тот факт, что преобладает зрительная форма памяти, она участвует у 49% учащихся.

Таким образом, можно сделать следующие важные выводы.

1. Необходимо изучить индивидуальные особенности памяти, как количественные, так и качественные, учащихся конкретного класса.

Например, для определения и оценки объема кратковременной образной памяти можно предложить ребятам такой геометрический тест «Узнавание фигур».

Сначала предъявляем ученику первый рисунок с 10 геометрическими фигурами (рис. 52) и просим запомнить эти фигуры.

Убираем и показываем второй рисунок (рис. 53), на котором изображено 30 геометрических фигур, среди которых 10 из первого рисунка. Ученики должны назвать или записать за 10 секунд номера фигур из первого рисунка.

Обработка результата состоит в подсчете правильно и неправильно узнанных фигур. Коэффициент узнавания, назовем его *У*, подсчитывается по следующей формуле

$$У = \frac{П}{10} + Н,$$

где *П* — число правильно, а *Н* — неправильно узнанных фигур. При наивысшем результате $П = 10$, $Н = 0$, значит, $У = 1$. Таким образом, чем ближе результат у ученика к единице, тем лучше у него объем образной кратковременной памяти.

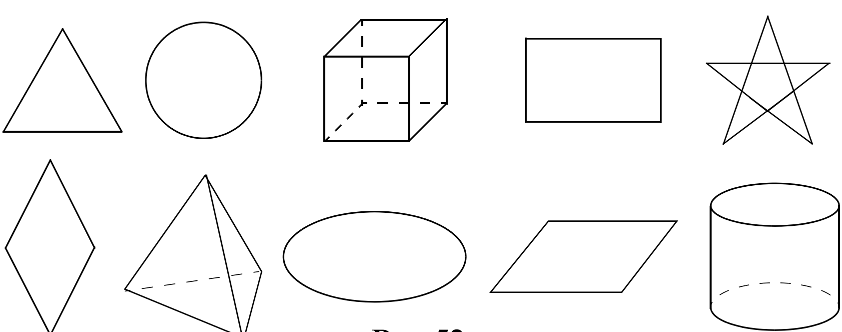


Рис. 52

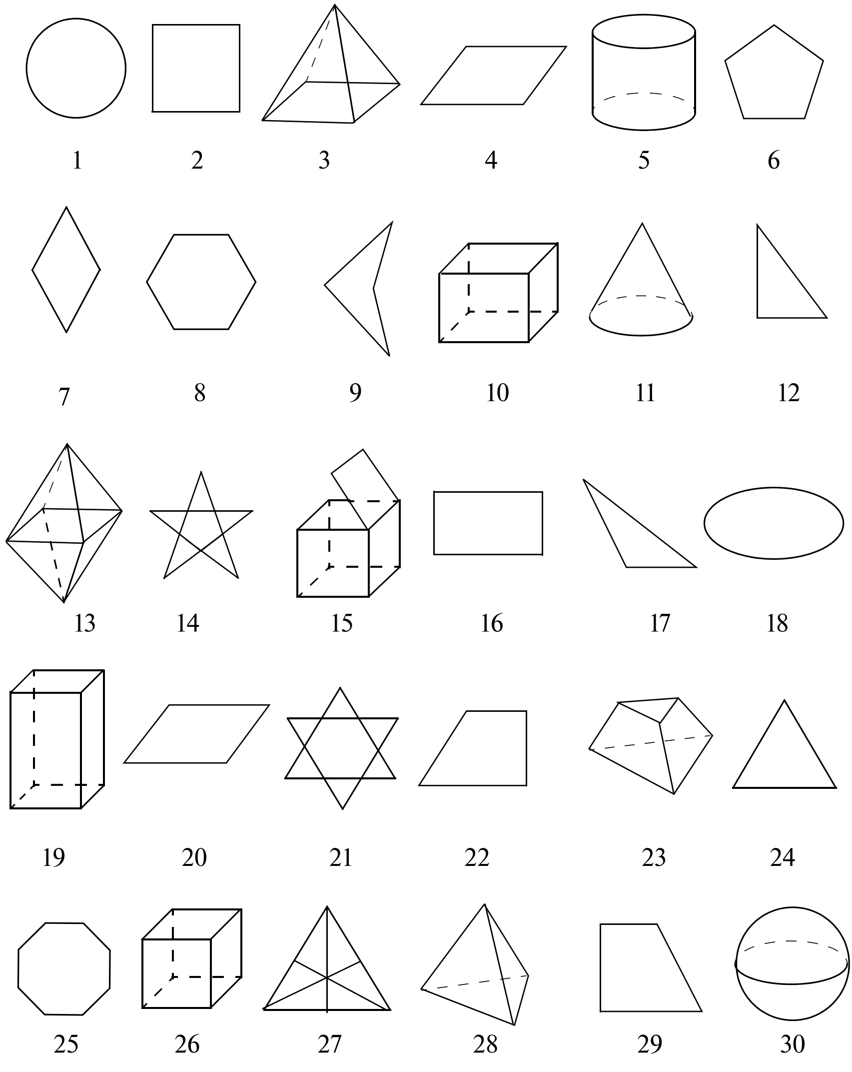


Рис. 53

Более трудный тест на узнавание абстрактных фигур был предложен в работе [103]. Он изображен на рисунках 54 и 55. Первый содержит 9 фигур, второй — 25. Соответствующий коэффициент в данном случае подсчитывается по формуле

$$У = \frac{П}{9} + Н.$$

Как и в предыдущем случае, *П* — число правильно, а *Н* — неправильно узнанных фигур.

Первый тест может быть предложен учащимся основной школы, а второй — старшеклассникам.

2. Учитывать выясненные индивидуальные особенности памяти школьников в реальном учебном процессе: при разработке

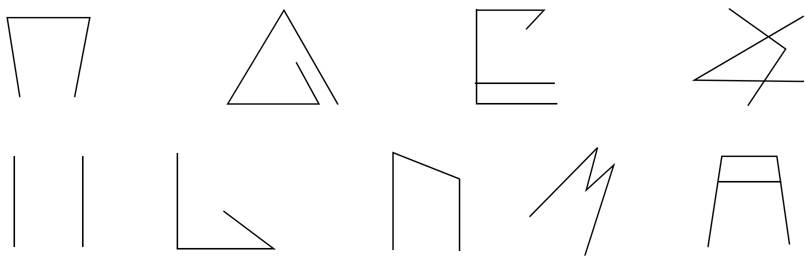


Рис. 54

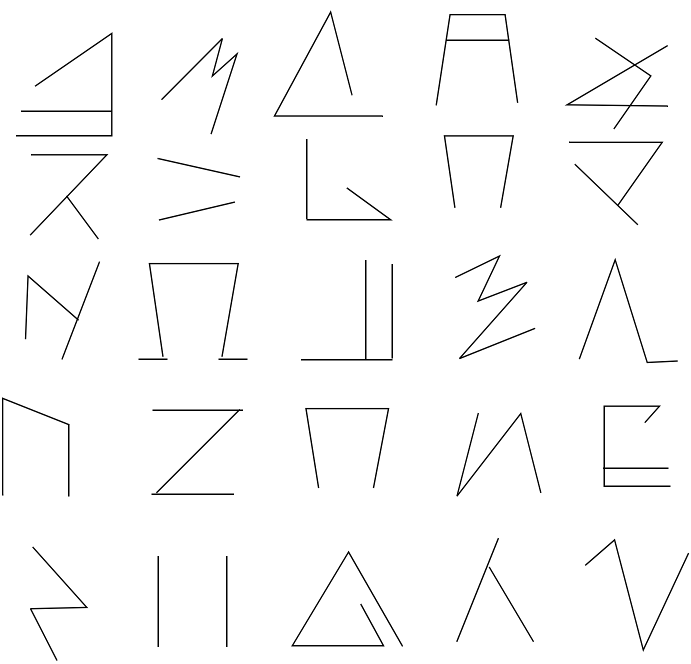


Рис. 55

содержания, организации учебной информации, подборе методов и форм обучения. В частности, выяснив индивидуальные особенности кратковременной памяти определенного ученика, учитель должен давать учебную информацию, объем которой не превышает или незначительно превышает объем его кратковременной памяти.

В свое время *К. Д. Ушинский* сетовал на то, что, «изучая процесс памяти, мы увидим, как бессовестно еще обращается с нею наше воспитание, как валит оно туда всякий хлам и радуется, если из ста брошенных туда сведений одно как-нибудь уцелеет; тогда воспитатель собственно не должен бы давать воспитаннику ни одного сведения, на сохранение которого он не может рассчитывать. Как мало еще сделала педагогика для облегчения работы памяти — мало и в своих программах, и в своих методах, и в своих учебниках».

3. В силу специфики геометрических знаний, учащиеся с преобладанием зрительной и двигательной типов памяти должны легче усваивать геометрическую информацию.

В. А. Крутецкий [72] среди параметров математических способностей выделил «*математическую память*». Она имеет ярко выраженный возрастной характер. У подростков она проявляется в способности запоминать обобщения и мыслительные схемы. При этом память носит обобщенный и «срочный» характер. Другими словами, подростки могут запоминать типы задач, методы их решения, схемы рассуждений, доказательств. Конкретные же данные запоминаются хорошо только на время решения поставленной проблемы, после чего они легко забываются.

Следуя сказанному, для развития «*геометрической памяти*» учащихся нужно знакомить их с основными методами геометрии, применяемыми в общем построении курса; доказательстве теорем; решении задач.

Таким образом, очень важно познакомить учащихся с идеей аксиоматического построения курса геометрии, с различными подходами (например, традиционным, опирающимся на аксиоматику *Евклида—Гильберта*, и векторным, опирающимся на понятие векторного пространства, самая известная аксиоматика которого была предложена *Г. Вейлем*). Необходимо рассмотреть два метода доказательства: аналитический и синтетический. Дать учащимся представление о прямом и косвенном доказательствах, о методе доказательства «от противного». На уроках геометрии нужно познакомить школьников со специальными методами доказательств, которые опираются на геометрические места точек, геометрические преобразования, на векторные и координатные методы. Учащиеся должны различать геометрические задачи на доказательство, построение и вычисление, знать наиболее важные приемы решения геометрических задач, среди которых особо выделить: аналогию; индукцию; дополнительные геометрические построения; «метод площадей»; решение задачи несколькими способами и т. п. Поясним сказанное несколькими примерами.

Пример 1. Постройте треугольник ABC по сторонам a, c и медиане m_b.

Решение представлено на рисунке 56. В этой задаче дается стандартное дополнительное построение — удвоение медианы: $MD = BM$, тогда $AD = BC = a$, так как треугольник AMD равен треугольнику CMB (по двум сторонам и углу между ними). Построение: строим треугольник ABD по трем сторонам $AB = c$, $AD = a$, $BD = 2m_b$; находим точку M — середину стороны BD; соединяем A с M и строим $MC = AM$; ABC — искомый треугольник.

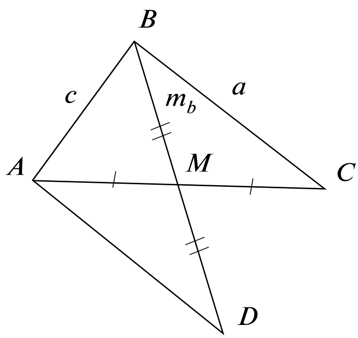


Рис. 56

В результате решения этой задачи учащиеся познакомятся и запомнят идею «удвоения медианы» и впоследствии им легко будет решать и более сложные задачи, например такие, как следующая задача: «Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC внешним образом построены квадраты $ADEB$ и $BFGC$ (рис. 57, a). Докажите, что отрезок EF в два раза больше медианы BM данного треугольника».

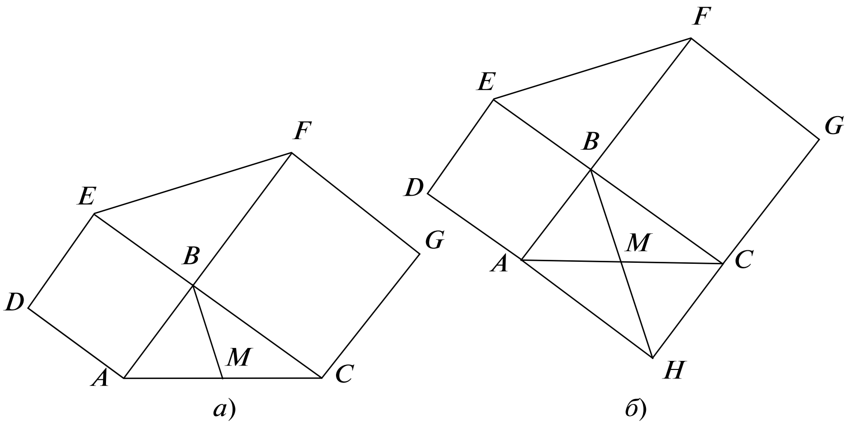


Рис. 57

Решение представлено на рисунке 57, *б*, где $MH = BM$, четырехугольник $ABCH$ — параллелограмм. Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle BCH = 180° - \alpha$ и $\angle EBF = 180° - \alpha$. Таким образом, $\triangle BEF = \triangle CHB$ (по двум сторонам и углу между ними) и $EF = HB$, но $HB = 2BM$. Следовательно, $EF = 2BM$.

Пример 2. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равных угла. Найдите углы данного треугольника.

Замечание. Перед решением этой задачи с учащимися рассматривалась такая задача: «Докажите, что биссектриса треугольника лежит между высотой и медианой треугольника, проведенными из той же вершины».

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB < BC$, $BH \perp AC$, $\angle ABL = \angle CBL$ и $AM = MC$. Докажем, что точка L лежит между точками H и M. Для этого воспользуемся дополнительным построением — удвоением медианы, $BM = MD$. $\triangle AMD = \triangle CMB$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\angle DBC = \angle BDA$ и $AD = CB$. В треугольнике ABD против большей стороны лежит и больший угол. Следовательно, $\angle ABD > \angle BDA$, т. е. $\angle ABD > \angle CBM$. Значит, точка L лежит между точками A и M. Точка H лежит между точками A и L, так как при других комбинациях должен получаться прямоугольный треугольник с тупым углом, чего быть не может.

Решение основной задачи

Первый способ. Пусть дан треугольник ABC, BH — его высота, BL — биссектриса и BM — медиана. Обозначим $AH = HL = x$, $LM = y$, тогда $MC = 2x + y$. Опираясь на свойства биссектрисы, имеем: $\frac{x}{y} = \frac{BH}{BM}$; $\frac{x}{x+y} = \frac{AB}{BC}$; $\frac{y}{2x+y} = \frac{BL}{BC}$. Учитывая, что $AB = BL$, получим $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{2x+y}$, откуда $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\angle BMH = 45^\circ$ и $\angle HBM = 45^\circ$. Искомые углы треугольника: $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 67^\circ30'$, $\angle C = 22^\circ30'$.

Второй способ. Опишем вокруг данного треугольника окружность и проведем через BL хорду BD. Тогда дуга AD будет равна дуге DC и, следовательно, $DM \perp AC$, т. е. $DM \| BH$. Значит, $\angle MDB = \angle DBM$, треугольник BMD — равнобедренный, $MD = MB$, M — центр окружности. Следовательно, AC — диаметр окружности и $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 90^\circ - \frac{1}{4}\angle B = 67^\circ30'$, $\angle C = 90^\circ - \angle A = 22^\circ30'$.

Пример 3. В равностороннем треугольнике ABC взята произвольная внутренняя точка O. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника есть величина постоянная.

Решение. Опустим из точки O перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 на стороны треугольника соответственно BC, AC и AB. Докажем, что $OA_1 + OB_1 + OC_1 = \text{const}$. Для этого соединим точку O с вершинами треугольника. Тогда его площадь равна:

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}a \cdot (OA_1 + OB_1 + OC_1),$$

где a — сторона данного треугольника. С другой стороны,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah$, где h — высота данного треугольника. Таким образом,

$OA_1 + OB_1 + OC_1 = h$, т. е. величина постоянная.

При решении этой задачи использовался так называемый «метод площадей», начальное овладение которым связано с демонстрацией учащимся свойства аддитивности площади.

Заметим, что представленные задачи очень важны для курса геометрии, так как учащиеся должны четко представлять, как расположены относительно друг друга основные элементы треугольника: высота, биссектриса, медиана, опущенные из одной вершины.

В настоящее время разработана целая система методов практического воздействия на память человека и ее совершенствования, которую с успехом можно применять и в школе. Среди них выделяются:

1. Формирование установки на значимость изучаемого учебного материала.
2. Осмысленное восприятие учебного материала.
3. Классификация изучаемого материала.

4. Формирование устойчивого интереса к изучаемому материалу.

5. Кодирование учебной информации в виде схем, таблиц, рисунков, опорных конспектов и т. п.

6. Использование неожиданных, нестандартных ситуаций.

7. Эмоциональная окраска предлагаемых материалов.

Важное значение при этом имеет правильная организация этапа *повторения*.

Виды повторения

- *Пропедевтическое*. Повторение учебного материала, необходимого для изучения нового.
- *Текущее*. Повторение темы в процессе ее изучения.
- *Тематическое*. Обобщающее повторение отдельной темы курса.
- *Систематическое*. Повторение, применяемое в течение изучения всего курса.
- *Обзорное*. Обобщающее повторение учебного материала за четверть, полугодие или год изучения курса.
- *Итоговое, заключительное*. Обобщающее повторение всего изученного курса в целом.

Любое повторение не должно сводиться к механическому воспроизведению ранее изученных сведений. При повторении, особенно обобщающем, происходит обогащение известного, его рассмотрение под другим углом зрения. *Н. М. Бескин* [16] называл повторение «вторым чтением», в процессе которого ученик устанавливает важные связи между отдельными вопросами геометрии.

Поскольку память связана с волей, то по характеру ее участия в запоминании и воспроизведении материала память делят на: а) *непроизвольную*; б) *произвольную*.

В первом случае запоминание происходит автоматически без особых усилий со стороны учащегося, во втором требуется соответствующая установка на запоминание, узнавание, сохранение или воспроизведение учебного материала. Интересно отметить, что непроизвольным запоминанием, оказывается, тоже можно руководить. В значительной степени это зависит от общей организации учебной деятельности и от руководства восприятием, осмыслением, пониманием учащимися предлагаемого материала. Основной путь здесь заключается в том, чтобы вызвать у школьников случайное внимание, интерес к тем объектам, которые учителю хотелось бы, чтобы его ученики непроизвольно запомнили.

В психологических исследованиях непроизвольное запоминание рассматривается как продукт целенаправленной деятельности. Важным является то, какое место в деятельности занимает конкретный учебный материал. Если он входит в содержание основной цели действия, то запоминается особенно продуктивно. Также непроизвольное внимание зависит от особенностей способов деятельности. Естественно, активные, содержательные способы ведут к успеху непроизвольного запоминания, и оно снижается, когда предлагаются, например, легкие познавательные задачи. Непроизвольное запоминание улучшается, когда решаемая учеником задача и достигаемые при этом результаты имеют для него важное личное значение.

Произвольная, волевая память зависит во многом от правильной организации запоминаемой информации. Чем больше умственных усилий мы прилагаем к тому, чтобы правильно организовать информацию, придать ей осмысленную структуру, тем легче она потом воспроизводится. Одним из таких способов является смысловая организация информации. *Смысловое запоминание называется также логическим запоминанием*.

Этапы смыслового запоминания

1. Понимание смысла представленного учебного материала.
2. Анализ учебного материала.
3. Выявление наиболее существенных мыслей, идей.
4. Обобщение.
5. Запоминание обобщенного материала.

В качестве примера рассмотрим учебный материал по теме «Взаимное расположение двух прямых в пространстве».

1) Необходимо представить классификацию взаимного расположения двух прямых в пространстве.

2) Как могут располагаться относительно друг друга две прямые в пространстве? Могут ли они пересекаться? Что это значит? Могут ли они не пересекаться? Покажите на примере прямых, на которых лежат ребра куба.

3) Существенным свойством при определении взаимного расположения двух прямых в пространстве является выяснение того, лежат или не лежат эти прямые в одной плоскости. Если они лежат в одной плоскости, то имеют или не имеют общей точки.

4) Определение параллельных прямых: «Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек». Определение скрещивающихся прямых: «Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости».

5) Классификация взаимного расположения двух прямых в пространстве отражена в таблице 11.

Таблица 11

<table>
<tr><th colspan="3">Классификация взаимного расположения двух прямых в пространстве</th></tr>
<tr><td colspan="2">Лежат в одной плоскости</td><td rowspan="2">Не лежат в одной плоскости (скрещиваются)</td></tr>
<tr><td>Имеют общую точку (пересекаются)</td><td>Не имеют общих точек (параллельны)</td></tr>
</table>

Кроме этого, на уроках геометрии очень важно использовать и развивать *образное запоминание*.

Например, чтобы учащиеся запомнили формы пяти правильных многогранников (тетраэдра, гексаэдра (куба), октаэдра, икосаэдра и додекаэдра, рис. 58), представим им такую красивую историю.

Одной из самых известных философских школ Древней Греции была школа Пифагора (VI—V вв. до н. э.). Для своих философских учений пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно:

Огонь → Тетраэдр (похож на языки пламени).

Земля → Гексаэдр (Куб) (очень надежен).

Воздух → Октаэдр (легко дышать такой бипирамидой).

Вода → Икосаэдр (круглая, катящаяся, похожая на шар).

Вселенная → Додекаэдр (у додекаэдра грани правильные пятиугольники, построение которых связано с названной позже «божественной пропорцией» — золотым сечением).

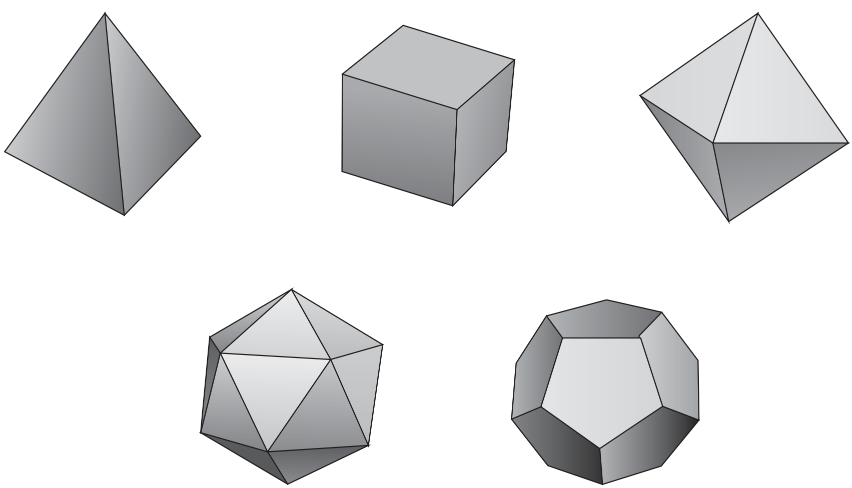


Рис. 58

Воображение

Запоминать во многом помогают образы, помогает воображение. Психологами установлено, что то, что человеку удается выразить и представить в виде образа, запоминается сразу и надолго.

Воображение — это форма опосредованного, обобщенного познания, создание новых, ранее неизвестных образов, представлений, понятий. Причем если восприятие — образ настоящего, память — прошлого, то воображение — будущего.

В процессе обучения геометрии воображение выполняет очень существенную роль, так как оно является предпосылкой для понимания и усвоения знаний, требующих умения представить себе конкретную геометрическую ситуацию на плоскости или в пространстве, которую школьник не может воспринять непосредственно.

Образы воображения возникают в процессе мысленного конструирования геометрических ситуаций. Это образы служат средством решения задач и предвосхищают результаты деятельности.

Например, найдем двугранный угол ромбододекаэдра (рис. 59). Это двенадцатигранник, у которого все грани равные ромбы. Мысленно проведем плоскость, перпендикулярную некоторому ребру многогранника, и вообразим, какую форму имеет многоугольник, лежащий в сечении. Это будет правильный шестиугольник, внутренний угол которого, как известно, равен 120°. Две соседние стороны этого шестиугольника составляют линейный угол соответствующего двугранного угла. Следовательно, искомый угол равен 120°.

В психологии различают *непроизвольное и произвольное воображение*. Последнее важно в обучении, так как оно проявля-

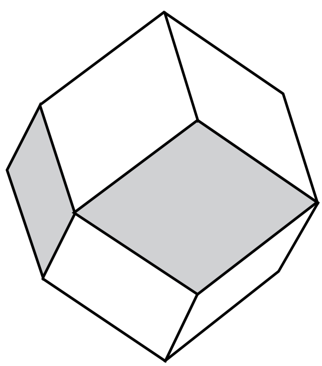
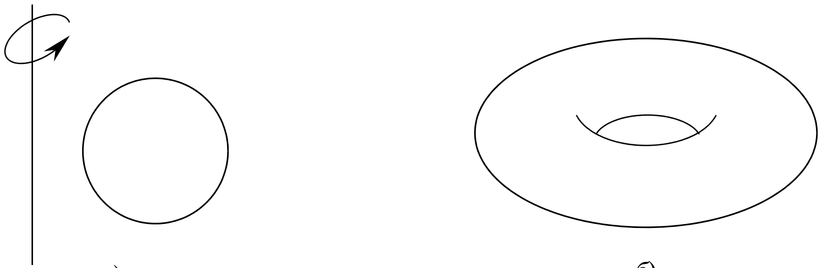


Рис. 59



а) **Рис. 60** *б*)

ется в ходе целенаправленного решения поставленных задач. Также выделяют ***репродуктивное***, или ***воссоздающее***, ***и творческое воображение***. Первое создает образы, соответствующие их описанию.

Например, вообразите и изобразите фигуру, которая получается при вращении окружности вокруг прямой, не проходящей через окружность и лежащей с ней в одной плоскости. Получится фигура вращения, которая называется ***тором*** (рис. 60), она напоминает бублик или автомобильную камеру.

Творческий вид воображения создает новые образы и понятия, чем и отличается от репродуктивного воображения. Именно воображение позволяет ученику высказывать догадки, строить гипотезы, мысленно представлять, искать и находить решения поставленных задач. Очень часто мы начинаем доказательство с фраз: «Представьте себе, что ...», «Допустим, что ...» и т. п.

О важной роли воображения в познании говорили и говорят многие отечественные психологи: ***П. П. Блонский, А. В. Брушлинский, Р. Г. Натадзе, Л. М. Фридман*** и многие другие.

Мышление

Основным высшим познавательным процессом является, как известно, ***мышление***. В работах ***В. А. Крутецкого*** [72] мышление определяется как процесс опосредованного и обобщенного познания (отражения) окружающего мира. Оно отражает:

а) общие и существенные свойства предметов и явлений, в том числе и такие свойства, которые не воспринимаются непосредственно;

б) существенные отношения и закономерные связи между предметами и явлениями.

Таким образом, мышление дает возможность человеку знать то, что он непосредственно не ощущает и не воспринимает, оно расширяет границы нашего познания. Мышление рассматривается как особого рода теоретическая и практическая деятельность, которая носит исследовательский, познавательный характер.

В психологии рассматриваются два основных вида мышления: *теоретическое* и *практическое* (табл. 12).

Таблица 12

Виды мышления	
Теоретическое	Практическое
• Понятийное • Образное	• Наглядно-образное • Наглядно-действенное

Теоретическим понятийным мышлением человек пользуется в процессе решения задач, обращается к понятиям, выполняет действия в уме, непосредственно не имея дела с опытом, получаемым при помощи чувств. Он обсуждает и ищет решение задачи с начала до конца в уме, пользуясь готовыми знаниями, выраженными в понятийной форме, суждениях, умозаключениях.

Теоретическое образное мышление отличается от понятийного тем, что материалом, который здесь использует человек для решения задачи, являются не понятия, или суждения, или умозаключения, а образы. Они непосредственно извлекаются из памяти или творчески воссоздаются воображением.

Практическое наглядно-образное мышление состоит в том, что мыслительный процесс в нем непосредственно связан с восприятием мыслящим человеком окружающей действительности и без него не совершается. Так мысля, человек привязан к действительности, необходимые для мышления образы представлены в кратковременной и оперативной памяти (образы для теоретического образного мышления извлекаются из долговременной памяти и затем преобразуются).

Особенностью *практического наглядно-действенного мышления* является то, что сам процесс мышления представляет собой практическую преобразовательную деятельность, осуществляемую человеком с реальными объектами. В этом случае основным условием решения задачи являются правильные действиями с этими объектами.

Перечисленные виды мышления выступают одновременно и как уровни его развития. Теоретическое мышление считается более совершенным, чем практическое, а понятийное представляет собой более высокий уровень, чем образное. Все перечисленные виды мышления могут быть представлены в одной и той же деятельности человека. Вместе с тем, в зависимости от характера и конечных целей деятельности, доминирует тот или иной вид мышления.

Выделяются различные характеристики мышления.

1. Критичность ума — умение строго оценивать работу мысли, тщательно взвешивать все доводы за и против намечающихся гипотез и подвергать эти гипотезы всесторонней проверке.

2. Гибкость ума — это свобода от предвзятых предположений и шаблонных способов решения, способность находить новые решения при изменении обстановки и условий задачи.

3. Конкретность мысли, выражающаяся в умении охватить весь вопрос в целом, не теряя в то же время из виду всех существенных для дела частностей.

4. Быстрота мысли. Разные виды деятельности представляют различные требования к скорости решения умственных задач.

5. Любознательность и пытливость ума. Они проявляются как потребность узнать то, что еще неизвестно, раскрыть, понять то новое, необычное, что встречается человеку в деятельности.

6. Глубина ума. Характеризуется умением поставить задачу, вскрыть суть явления. Быстрое определение самого главного, необычность и легкость решения определяют остроту и оригинальность ума.

7. Логичность и доказательность мышления. Наивысшей ступени познания человек достигает тогда, когда он правильно, в соответствии с законами логики решает стоящую перед ним задачу и умеет обосновать свое решение, доказать его правильность.

Основываясь на выделенных характеристиках, рассматривается *продуктивное, активное, самостоятельное, творческое мышление*.

Продуктивное мышление *А. В. Брушлинский* рассматривал как особый вид мыслительной деятельности, т. е. «его способность искать, находить, открывать и создавать нечто существенно новое, ранее неизвестное... Тогда и само мышление раскрывается в качестве процесса, т. е. как непрерывное взаимодействие мыслящего субъекта с познаваемым объектом. В ходе их взаимодействия субъект обнаруживает все новые и новые свойства, которые также включаются в практическую и познавательную деятельность. Именно в этом, говоря совсем кратко и общо, заключается объективный источник продуктивности мышления» [25].

По отношению к школьному учению он считал, что «усвоение исторически накопленного богатства знаний требует от ребенка больших усилий мышления, серьезной умственной работы, хотя он усваивает уже готовую систему понятий, причем под руководством взрослых». Таким образом, несмотря на то, что школьники изучают уже известные, открытые факты и теории, их усвоение требует настоящего самостоятельного продуктивного мышления. В противном случае усвоение знаний будет «чисто формальным, поверхностным, бездумным, механическим».

Основным критерием всякого мышления и его развития называются новообразования, которые возникают в результате мыслительного процесса, а именно «любое мышление у любого человека всегда, хотя бы в минимальной степени, есть искание и открытие существенно нового (т. е. нового по отношению к исходным, вообще предыдущим стадиям познавательной деятельности конкретного индивида)». Таким образом, мышление школьника в процессе учения всегда в той или иной мере носит творческий характер.

Вместе с тем, есть авторы, которые выделяют, наряду с продуктивным, и репродуктивное мышление. Например, в работе [48] подчеркивается, что «при репродуктивном мышлении субъект осуществляет знакомые ему умственные действия со знакомым материалом и типом содержания, достигая знакомых результатов или приобретая новые результаты подсказанными ему путями, как это бывает при восприятии готовых знаний. Творческое мышление отличается тем, что мыслящий субъект посредством особых процедур достигает новых для себя результатов самостоятельно в процессе поиска. Эти процедуры не свойственны деятельности воспроизведения или усвоения готовых знаний, т. е. приобретенных в ходе предъявления извне полной информации со всеми достаточными для данной ситуации обучения связями. Ученику не надо в этом случае заполнять пробелы между единицами информации, догадываться о связях между ними».

Творческое мышление может быть как теоретическим, так и практическим. Многими психологами рассматривались особенности творческого мышления. Так, в работе [39] выделены следующие черты творческого характера.

1. Пластичность. Творческие люди предлагают множество решений в тех случаях, когда обычный человек может найти лишь одно или два.

2. Подвижность. Для творческого мышления не составляет труда перейти от одного аспекта проблемы к другому, не ограничиваясь одной-единственной точкой зрения.

3. Оригинальность. Творческое мышление порождает неожиданные, небанальные и непривычные решения.

Таким образом, для творческого мышления характерна нестандартность решения поставленных задач. Его результаты можно охарактеризовать такими словами, как озарение, внезапное понимание — инсайт (от англ. *insight* — проницательность, проникновение в суть), вдохновение, интуиция.

Различают также проблемное и творческое мышление. Проблемное мышление, как и творческое, тоже дает решение новых задач, но на основе известных понятий и методов. Главное же в творческом мышлении — это неожиданное, нешаблонное решение, которое не закреплено в привычных понятиях и представлениях.

Более детально творческое мышление раскрывается через следующие процедуры творческой деятельности:

1) Самостоятельный перенос ранее усвоенных знаний и умений в новую ситуацию.

2) Видение новой проблемы в знакомой ситуации.

3) Видение новой функции объекта.

4) Осознание структуры объекта.

5) Поиск альтернативы решения или способа решения.

6) Комбинирование ранее известных способов решения проблемных задач в новой ситуации.

Математическое мышление

Все это находит отражение в обучении любому школьному предмету, в том числе и математике. В специальной литературе встречается понятие *математического мышления*. Представим некоторые точки зрения известных математиков, психологов, педагогов на этот счет.

Г. Вейль [28] под математическим способом мышления понимал:

а) особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире — в физику, химию, биологию, экономику и т. д., и даже в наши размышления о повседневных делах и заботах;

б) форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе.

В процессе мышления, по мнению ученого, «мы пытаемся постичь разумом истину; наш разум стремится просветить себя, исходя из своего опыта. Поэтому, подобно самой истине и опыту, мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое».

М. Клайн [65] представил математическое мышление как «процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция. Это фундаментальное интуитивное понятие следует представлять себе не как нечто сходное по природе с неопределяемыми понятиями, встречающимися в аксиоматических теориях. Наоборот, через него должны постигаться разумом все неопределяемые идеи, используемые в различных математических системах, если они действительно призваны служить математическому мышлению. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики».

В психологии выделили структуру математического мышления, которая рассматривается как пересечение пяти основных подструктур. В работе *И. Я. Каплуновича* и *Т. А. Петуховой* [61] они описаны следующим образом.

1. Топологическая подструктура — обеспечивает замкнутость, компактность, связность осуществляемых мышлением преобразований, непрерывность трансформаций, мысленное выращивание, вылепливание в представлении требуемого объекта (его образа).

2. Порядковая подструктура — дает возможность постоянного сопоставления человеком математических объектов и их элементов по таким характеристикам, как больше — меньше, ближе — дальше, часть — целое, изменение направления движения и его характера, положение, форма, конструкция предмета.

3. Метрическая подструктура — позволяет вычленять в объектах и их компонентах количественные величины и отношения (пропорции, величины углов, расстояний).

4. Алгебраическая подструктура — с ее помощью человек осуществляет не только прямые и обратные операции над математическими объектами, разложение и соединение их составляющих, но и замену нескольких операций одной из определенной совокупности.

5. Проективная подструктура — обеспечивает изучение математического объекта или его изображения с определенного, самостоятельно выбранного положения, установления соответствия между объектом и его изображением.

Авторы рассматривают индивидуальные особенности математического мышления учащихся, проявляющиеся в выявленных подструктурах, выясняют преобладание той или иной подструктуры. В зависимости от подструктуры учеником по-разному воспринимается и обрабатывается поступающая информация.

В качестве иллюстрирующего п р и м е р а приводится такой любопытный тест: учащиеся должны исключить, на их взгляд, лишнюю фигуру (рис. 61) и обосновать свой ответ.

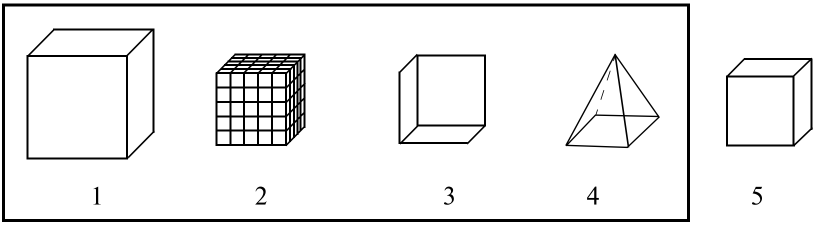


Рис. 61

Р е з у л ь т а т ы. Учащиеся первой группы исключили фигуру 5 — она вне замкнутого контура; второй группы — фигуру 1, она отличается размерами от других; третьей группы — фигуру 4, это четырехугольная пирамида и у нее пять граней, в отличие от остальных многогранников, все они являются кубами и имеют шесть граней; четвертой группы — фигуру 2, она разделена на несколько частей; наконец, учащиеся пятой группы исключили фигуру 3, она имеет другую проекцию.

В свое время *Д. Д. Мордухай-Болтовской* [95], характеризуя математическое мышление, выделил в нем два процесса:

1. Постановку проблемы.
2. Решение проблемы.

При этом для успешности постановки проблемы необходимым условием является творческое воображение. Решение проблемы начинается с составления гипотетического плана решения, причем первым ходом в процессе его осуществления является обращение к памяти, т. е. стремление подвести проблему (задачу) под известный случай. Самостоятельные поиски решения начинаются лишь в случае невозможности ответить на вопрос на основе обращения к памяти.

Ученый выделял *пространственную память математика*, под которой понимал память на взаимное расположение предметов в пространстве. Причем он даже особо выделил «*геометрическую память*». «Память геометра — не зрительная память, — писал он, — геометр не помнит зрительный образ чертежа, он помнит только взаимное расположение линий и поверхностей или их частей ... Вспоминая доказательство какой-нибудь теоремы, он мысленно делает чертеж, таким именно образом и вспоминается взаимное расположение его частей; в этом воспоминании непрерывного ряда мышечных ощущений и состоит геометрическая память». Заметим, что и «*алгебраическую память*», память на алгебраические формулы, он также относил к пространственной памяти. Он говорил: «Мы ведь запоминаем не зрительный образ формул, а запоминаем эти формулы совершенно так же, как геометрические построения».

Известный французский математик *А. Пуанкаре* в своем труде «Наука и метод» [111] попытался объяснить, что происходит в «душе математика» в процессе творчества. Особенности математического творчества определяются математическим мышлением, которое он характеризовал следующими чертами: своеобразием памяти, способной запоминать сложные математические доказательства и рассуждения; порядком расположения умозаключений в математическом рассуждении; эмоциональными переживаниями, сопутствующими процессу творчества.

В области геометрии *А. А. Столяром* [136] были описаны пять уровней мышления.

1. Геометрические фигуры рассматриваются как целые и различаются только по своей форме. Если показать первокласснику, например, ромб, прямоугольник, квадрат, параллелограмм и сообщить ему соответствующие названия, то после нескольких повторений он сможет безошибочно распознавать эти фигуры исключительно по их форме, не видя, разумеется, в ромбе параллелограмм и в квадрате прямоугольник. На этом уровне ромб противопоставляется параллелограмму, квадрат — прямоугольнику.

2. Проводится анализ воспринимаемых форм, в результате которого выявляются их свойства. На этом уровне геометрические фигуры выступают как носители своих свойств и по ним распознаются. При этом свойства фигур логически еще не упорядочены, они устанавливаются исключительно экспериментальным путем. Сами фигуры тоже не упорядочены, так как они только описываются, но не определяются. Этот уровень мышления в области геометрии еще не включает структуру логического следования.

3. Осуществляется логическое упорядочение свойств фигур и самих фигур. Одно или несколько свойств принимаются за определяющие фигуры, другие устанавливаются логическим путем. Геометрические фигуры выступают уже в определенной логической связи, выявляемой с помощью определений. Но собственное значение дедукции в целом еще не постигается учащимися

(11—14 лет), они еще не в состоянии понять дедуктивную систему в целом.

4. Достигается значение дедукции в целом, учащиеся переходят к пониманию ее значения как способа построения и развития всей геометрической теории. Этому переходу способствует разъяснение сущности аксиом, определений, теорем, логической структуры доказательств, логической связи понятий и предложений. Этот уровень вполне доступен учащимся старших классов (15—17 лет). На этом уровне осуществляется содержательная аксиоматизация, т. е. аксиоматизация теории в определенной конкретной ее интерпретации.

5. Обучаемые отвлекаются от конкретной природы объектов и конкретного смысла отношений между ними, т. е. развивают теорию вне всякой ее конкретной интерпретации. На этом уровне геометрическая теория строится как абстрактная дедуктивная система. Такое построение не может осуществляться ни на одном этапе обучения геометрии в средней школе.

В данном случае представлена система, отражающая возрастные особенности развития мышления на уроках геометрии.

При этом знания, которыми овладел ученик, неоднозначно характеризуют его мышление. В частности, большое количество знаний, которые нужно усвоить, приводит к тому, что у ребят не остается времени на размышление и обдумывание. Это делает усвоение формальным и нетворческим. Более того, тормозится развитие мышления. Невозможно передать учащимся всю массу знаний, которые накоплены человечеством. Поэтому при изучении каждого школьного предмета нужен отбор оптимального количества информации, чтобы не лишать учеников инициативы, самостоятельности, возможности развивать свое мышление. А геометрия обладает всеми необходимыми для этого возможностями.

Таким образом, при изучении геометрии в школе необходимо учитывать и решать важные проблемы развития основных познавательных процессов, таких как восприятие, внимание, память, воображение, мышление учащихся. Для развития каждого познавательного процесса необходимо знать:

а) его определение, основные виды, характеристики;

б) возрастные особенности учащихся;

в) индивидуальные особенности учащихся;

г) процессы взаимных отношений и связей;

д) проведение диагностики в конкретном классе;

е) пути воспитания и развития в процессе изучения геометрии.

Разработана структура математического мышления. Она выглядит следующим образом [37]: а) манипулирование пространственными объектами; б) манипулирование идеями в абстрактной форме, без опоры на конкретное; в) классификация; г) понимание и использование символов; д) применение знаний в новой ситуации; е) интеллектуальная любознательность; ж) «сильная» математическая память; з) хорошая ориентировка в сфере количественных отношений; и) «сильное» зрительное воображение; к) быстрота мысли; л) умение отыскивать сходное в отдаленных сферах.

Выделены такие компоненты модели предложенной структуры в области геометрии.

I. Интуитивный компонент. Интуиция на: 1) образы; 2) конструкции; 3) свойства; 4) метод построения; 5) метод доказательства; 6) бесконечность.

II. Пространственный компонент. 1) Одномерные, двумерные и трехмерные евклидовы представления и пространственные абстракции; 2) обобщенность представлений; 3) подвижность представлений; 4) ориентация в пространстве; 5) устойчивость представлений, пространственная память; 6) скорость схватывания образов (узнавание); 7) связь пространственных с количественными и временными представлениями; 8) умение анализировать геометрические образы; 9) умение синтезировать геометрические образы; 10) пространственное воображение; 11) n-мерные пространственные представления; 12) неевклидовы представления; 13) теоретико-множественные представления; 14) векторные представления; 15) изометрические представления; 16) представления подобия; 17) аффинные представления; 18) проективные представления; 19) топологические представления; 20) представления «в малом».

III. Метрический компонент. 1) Понимание сущности скалярных величин; 2) понимание приемов введения метрики на различных множествах, в различных пространствах (например, на плоскости, в трехмерном евклидовом пространстве, в векторных пространствах, в дифференциальной геометрии); 3) знание свойств метрических пространств; 4) умение определять, измерять, вычислять длины, площади поверхности, объемы фигур и другие их элементы; 5) числовые представления; 6) память на числа и числовые решения.

IV. Логический компонент. 1) Геометрические понятия; 2) общие понятийные связи; 3) владение правилами логического вывода; 4) понимание, запоминание и сохранение в памяти доказательств и методов; 5) владение аксиоматическим методом; 6) структурность геометрической деятельности; 7) владение аналитическими методами (векторным исчислением, методом координат, дифференциальным и интегральным исчислениями и др.).

V. Конструктивный компонент. 1) Умение осуществлять геометрические построения; 2) умение изображать фигуры; 3) владение конструктивным методом определений; 4) владение конструктивным методом доказательств; 5) умение устанавливать отношения изоморфизма между множествами разной природы.

VI. Символический компонент. 1) Понимание геометрических символов; 2) запоминание и сохранение в памяти символов; 3) операции с геометрическими символами.

Приведем пример того, как можно определить индивидуальные особенности познавательных процессов учеников. Для этой цели применим *метод тестирования*. Возьмем известные психологические тесты так называемого поперечного среза (т. е. определяющие присутствие или отсутствие данного признака и различие в выявлении этого признака между учениками). При этом тесты носят скорее исследовательский, чем диагностический характер. Экспериментальные задачи направлены на то, чтобы вскрыть качественные особенности процесса обучения. В первую очередь, особенности восприятия, пространственные представления учащихся, соотношение наглядно-образного и словесно-логического компонентов деятельности, а также направленность их интересов. Рассмотрим тесты, рекомендованные специалистами в этой области [2, 4]. Все они удовлетворяют необходимым к р и т е р и я м к а ч е с т в а: а) *валидности*; б) *надежности*; в) *объективности*.

Тест 1. Преднамеренное запоминание

Учащимся предлагается внимательно прослушать 21 слово и постараться запомнить их. Затем в течение трех минут записать эти слова.

Перечень слов тестового задания:

Доказательство (т); фантазия (г); план (п); пропорция (т); интуиция (г); повторение (п); суждение (т); выразительность (г); пример (п); плоскость (т); небеса (г); место (п); анализ (т); тайна (г); тетрадь (п); ось (т); сочинение (г); запись (п); уравнение (т); чувство (г); таблица (п).

В скобках после каждого слова указаны индивидуальные склонности учащихся, которые понадобятся для обработки данного теста, а именно: «т» — означает теоретик, «п» — практик, «г» — гуманитарий, что будет соответствовать теоретическим, практическим и творческим гуманитарным склонностям учащихся.

Тест 2. Непреднамеренное запоминание

Учащимся предлагается внимательно прослушать несколько слов, причем после каждого они могут в течение 15 секунд сделать рисунок, символизирующий это слово. На расшифровку рисунков дается затем 3 минуты.

Перечень слов: теорема (т); поиск (г); чертеж (п); сумма (т); литература (г); дробь (п); функция (т); идея (г); формула (п); математика (т); секрет (г); цифра (п); условие (т); волшебство (г); учебник (п); переменная (т); фантастика (г); ответ (п); умножение (т); красота (г); график (п).

Тест 3. Логическое мышление

Выберите нужную фигуру из пронумерованных и поместите ее в квадрат (рис. 62).

Задание рассчитано на 3 минуты.

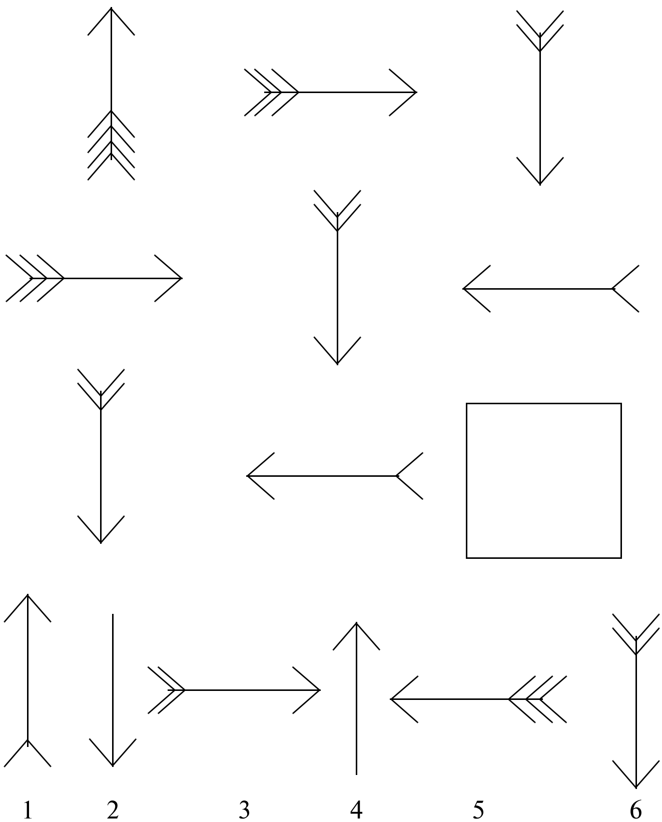


Рис. 62

Тест 4. Выяснение закономерности

1) Вставьте пропущенное число (рис. 63).
2) Вставьте пропущенное число (рис. 64).
Время исполнения 3 минуты.

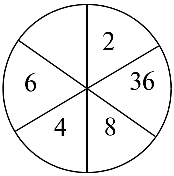


Рис. 63

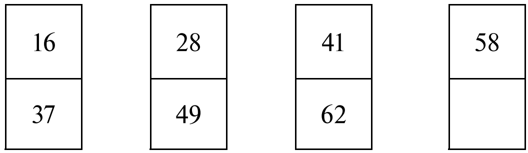


Рис. 64

Тест 5. Образное мышление

Выберите нужную фигуру из пронумерованных (рис. 65).

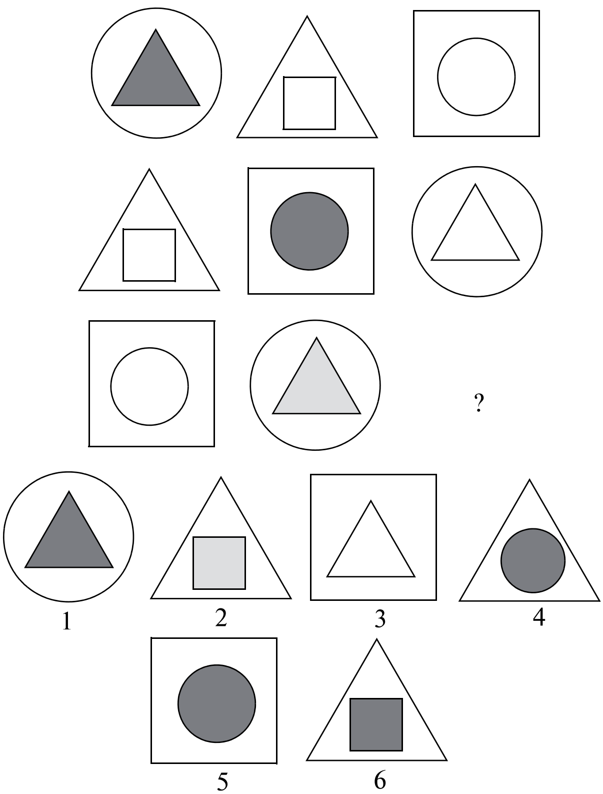


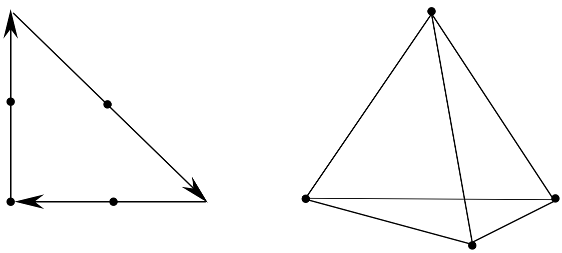
Рис. 65

Следует отмечать (и объявлять в классе) интервалы времени: 1 мин, 1,5 мин, 2 мин (если к отметке времени задание готово, ученик фиксирует это на контрольном листе).

Тест 6. Нестандартность мышления

1) Требуется соединить замкнутой трехсторонней ломаной точки, расположенные в вершинах квадрата.

2) Требуется из шести одинаковых палочек (спичек) сложить четыре треугольника.



а) **Рис. 66** *б*)

Ответы представлены на рисунке 66.

Задание рассчитано на 3 минуты.

Тест 7. Тест на аналогии

1) Какую букву поставить на шестое место (рис. 67)?

А, Г, Ж, Л, С, ?

Рис. 67

2) Какой из представленных фигур соответствует приведенная развертка (рис. 68)?

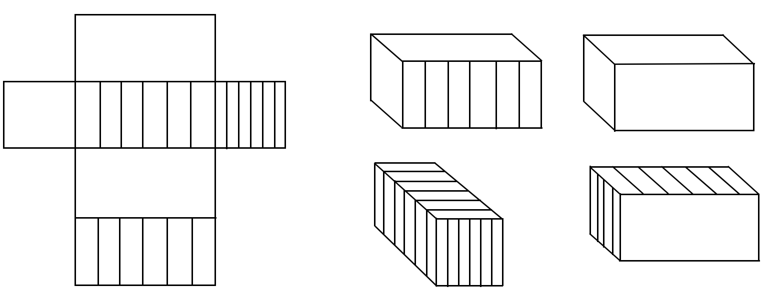
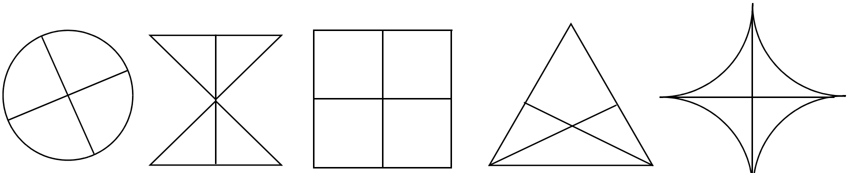


Рис. 68

Тест 8. Зрительное восприятие

1) Исключите лишнюю фигуру (рис. 69).

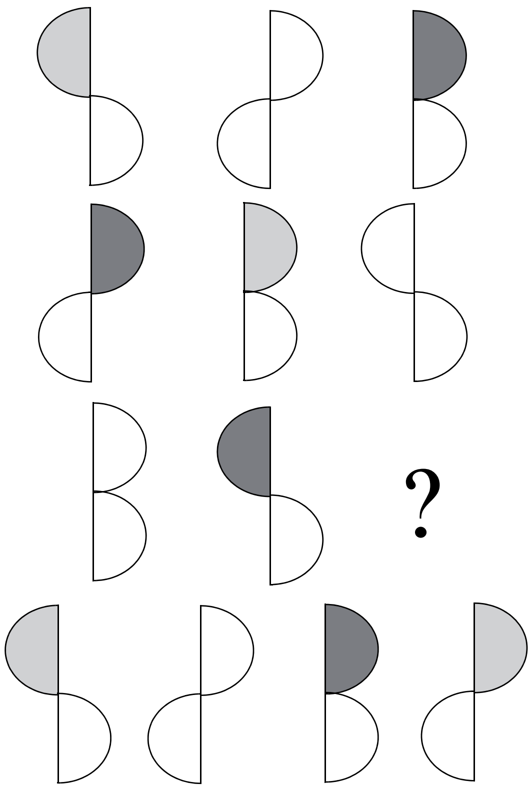


1 2 3 4 5

Рис. 69

2) Вставьте пропущенную фигуру, выбрав из четырех пронумерованных (рис. 70).

Задание дается на 3 минуты.



1 2 3 4

Рис. 70

Тест 9. Пространственное воображение

Посмотрев на рисунок, необходимо выбрать те фигуры, которые пройдут в щель (рис. 71).

Время исполнения 2,5 минуты.

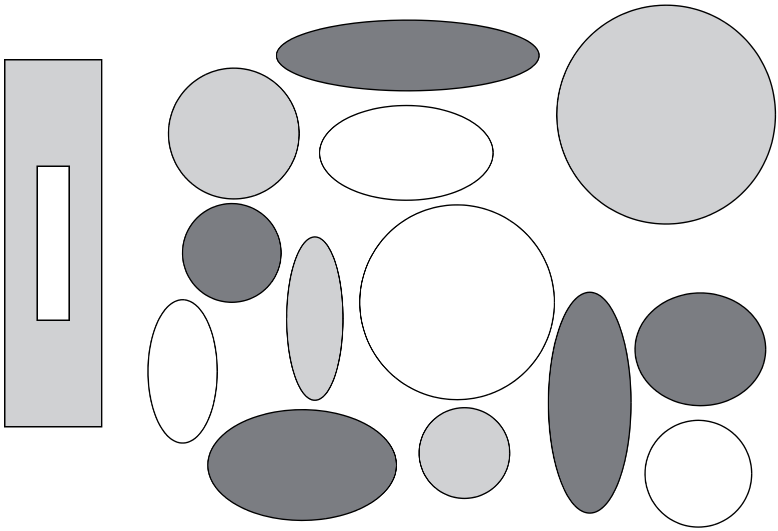


Рис. 71

Тест 10. Пространственное воображение

Укажите, какие из фигур могут быть полностью закрыты черными квадратами (рис. 72).

Время исполнения 2,5 минуты.

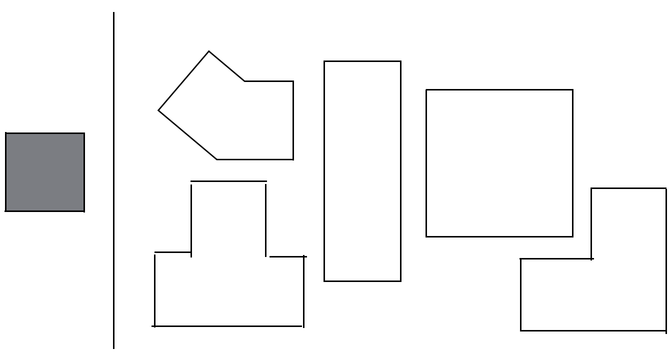


Рис. 72

Обработка тестов и оценка результатов

Тест 1. Прежде всего нужно определить коэффициент запоминания k: $k = \frac{K}{21}$, где K — количество правильно запомненных слов, в знаменателе стоит общее количество слов, предложенных в тесте.

Если среди запомненных преобладают слова с одним индексом (которые помечены буквами «т», «п», «г»), то склонности учащегося следует характеризовать в соответствии со значением этого индекса. В других случаях определение склонностей учащегося идет по коэффициенту k по соответствующей таблице (табл. 13).

Если учащийся воспроизвел менее 4 слов, то он получает штрафное очко, и в формуле индекса его адекватности (которая будет приведена ниже после всех тестов) параметр a увеличивается на 1.

Таблица 13

Характер склонностей	Уровень запоминания	Значение k
Теоретики	Низкий	Менее 0,3
Практики	Средний	От 0,3 до 0,5
Гуманитарии	Высокий	Более 0,5

Тест 2. Если среди воспроизведенных слов преобладают слова с одним индексом («т», «п», «г»), то склонности учащегося определяются в соответствии с этим индексом. Если такого преобладания слов с одним индексом нет, то определение склонностей производится по величине M в соответствии с данными таблицы 14.

Таблица 14

Характер склонностей	Уровень запоминания	Значение M
Теоретики	Низкий	Менее 11
Практики	Средний	От 11 до 13
Гуманитарии	Высокий	Более 13

Если учащийся воспроизвел в памяти менее 8 слов, то он получает штрафное очко, и в формуле индекса его адекватности параметр a увеличивается на 1.

Тест 3. Если учащийся дает неверный ответ (низкий уровень логического мышления), то его склонности по этому тесту относятся к практическим, и он получает штрафное очко, а в формуле индекса его адекватности параметр *а* увеличивается на 1. «Теоретик» — решал задачи более 1,5 минут; «гуманитарий» — до 1,5 минут.

Тест 4. Оценка результата этого теста зависит от количества решенных задач в соответствии с данными таблицы 15.

Таблица 15

Характер склонностей	Уровень логического мышления	Количество решенных задач
Теоретики	Низкий	0
Практики	Высокий	2
Гуманитарии	Средний	1

Тест 5. Если учащийся сделал неверный выбор, то его склонности по этому тесту относятся к «практикам». Неверный выбор по данному тесту не влияет на индекс адекватности учащегося. Оценка правильного ответа производится по времени, которое потребовалось ученику для ответа в соответствии с данными таблицы 16.

Таблица 16

Характер склонностей	Уровень образного мышления	Время
Теоретики	Высокий	от 1 до 2 минут
Гуманитарии	Очень высокий	до 1 минуты

Тест 6. Если учащийся правильно решил обе задачи (высокий уровень нестандартного мышления), то склонности по этому тесту следует оценить как «гуманитарий». Если учащийся правильно решил только одну задачу (средний уровень), то его склонности оцениваются как «практик». Если обе задачи решены неверно или вообще не решались (низкий уровень), то склонности учащегося следует отнести к «теоретикам». При этом штрафными очками он не наказывается.

Тест 7. Если учащийся правильно решил обе задачи (высокий уровень), то его склонности по этому тесту следует оценить как «теоретик». Если учащийся правильно решил только одну задачу (средний уровень), то его склонности оцениваются как «практик». Если обе задачи решены неверно или вообще не решались (низкий уровень), склонности учащегося следует отнести к «гуманитариям». При этом штрафными очками он не наказывается.

Тест 8. Если учащийся правильно ответил на обе задачи, то у него высокий уровень восприятия, и его склонности следует оценивать как «гуманитарий». Если учащийся правильно решил только одну задачу, то его склонности оцениваются как «теоретик», если же не решено ни одной задачи, то учащийся оценивается как «практик» (низкий уровень восприятия).

Тест 9. Если отклонение от правильного ответа от 0 до 2 мм, то склонности по этому тесту оцениваются, как «теоретик», если отклонение от правильного ответа колеблется от 3 до 4 мм — то «гуманитарий», в остальных случаях — «практик».

Тест 10. Если учащийся дал неверный ответ (низкий уровень пространственного воображения), то его склонности по этому тесту относятся к практическим, он получает штрафное очко, а в формуле индекса его адекватности параметр a увеличивается на 1. Если учащийся дал верный ответ меньше, чем за минуту, то по этому тесту он оценивается как «теоретик».

Для вывода формулы склонностей подсчитывается число теоретических, практических и гуманитарных склонностей учащегося по всем 10 тестам и записывается следующая формула:

$$xT + y\Pi + z\Gamma.$$

Индекс адекватности I определяется по формуле:

$$I = \frac{10 - a}{10},$$

где a — число штрафных очков, в нашем случае его максимальное значение равно 4. Максимальное значение I равно 1, минимальное — 0,6.

Приведем пример реального тестирования, в котором принимало участие 34 ученика (19 из гуманитарного класса и 15 из математического). Результаты приведены в таблице 17 (T — теоретики, Π — практики, Γ — гуманитарии, a — число штрафных очков; указано количество учащихся, получивших ту или иную оценку, а не процент от общего числа принимавших участие в тестировании).

Таблица 17

Номер теста	Гуманитарии				Математики			
	T	Π	Γ	a	T	Π	Γ	a
1	1	12	6	0	5	9	1	1
2	0	1	18	0	1	8	6	0
3	7	5	7	5	2	5	8	5
4	2	9	8		6	4	5	
5	5	2	12		7	2	6	
6	3	11	5		1	10	4	
7	2	8	9		6	3	6	
8	17	1	1		10	3	2	
9	9	3	7		5	6	4	
10	7	3	9		8	0	7	0

Проведенное тестирование показало, что учащиеся гуманитарных и математических классов по результатам ненамного отличаются друг от друга. Кроме того, гуманитарии по некоторым тестам имеют более высокие показатели. Например, у них лучше показатели по тестам 1 и 2 — соответственно преднамеренное и непреднамеренное запоминание. В тесте 2 гуманитарии оказались более изобретательными в зашифровке слов с помощью рисунков, причем из 21 слова три человека смогли запомнить все слова и шесть человек — 19 слов, это прекрасный показатель, в то время как у математиков наивысший показатель — 17 слов имеет только один человек. По первым тестам среднее количество запомненных слов у гуманитариев 8,8 и 15,9; у математиков эти показатели соответственно равны 5,6 и 9,6. По тесту 3 учащихся с низким уровнем логического мышления оказалось одно и то же количество (в процентном отношении у математиков этот показатель выше). Гуманитарии не хуже математиков нашли закономерности в тесте 4, хорошо справились с заданием теста 5 (образное мышление), причем 12 человек из 19 меньше, чем за минуту (в то время как у математиков — только 6 человек из 15). И в последующих тестах полученные результаты очень близки. В тесте 8 первое задание оказалось трудным как для гуманитариев, так и для математиков, ребята не смогли увидеть, что все фигуры, кроме треугольника, имеют центр симметрии.

Данное тестирование показало также, что учащиеся гуманитарных классов быстрее справляются с заданиями, быстрее включаются в работу, у них сильнее развито образное мышление, они лучше запоминают информацию, что связано с особенностями нервной системы. Отметим, что гуманитариям интересно отвечать на вопросы тестов, они это делают с удовольствием и смело пишут свою фамилию на контрольном листе, в то время как большинство математиков скорее исполняют тестирование по необходимости и предпочитают анонимное тестирование.

Приведенное тестирование еще раз подтверждает, что неспособных ребят к изучению геометрии нет. Есть школьники с разными индивидуальными особенностями, которые необходимо учитывать и использовать при построении курса геометрии. При изучении же традиционного курса происходит обратная картина: хотим, чтобы все учащиеся одинаково хорошо изучили некоторый определенный материал. Но этот материал и методы его изучения отвечают индивидуальным особенностям только части ребят. При этом другие учащиеся, как правило, зачисляются в неспособные к математике. Внедрение дифференцированного обучения открывает широкие возможности для изучения геометрии учащимися различной профильной ориентации.

Глава **III**

ТЕОРИЯ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Внедрение новых идей, связанных с гуманизацией, гуманитаризацией, дифференциацией, личностно-ориентированным обучением, в практику работы современной школы настоятельно требует пересмотра подходов, внесения изменений, дополнительных корректив в организацию учебного процесса. Под учебным процессом в школе понимается сложная система, состоящая из значительного количества различных компонентов и подсистем, например подсистемами являются различные школьные предметы, в частности геометрия. Такой взгляд на постановку и структуирование курса геометрии в школе требует комплексного подхода, сущность которого заключается в выявлении и прослеживании по возможности большего числа всевозможных связей и отношений между компонентами, причем как внутренних, так и внешних по отношению к нему. Курсом геометрии назовем весь комплекс проблем, связанных с ее преподаванием в школе. Для решения поставленной задачи будем использовать метод моделирования, который позволяет проверять выдвинутые гипотезы исследования; устанавливать внутренние и внешние связи и отношения геометрии; анализировать полученные результаты; судить об истинности имеющихся представлений о преподавании геометрии в различных классах основной и старшей школы; выявлять и предсказывать новые явления в ее изучении. Рассмотрим конструирование одной из возможных моделей обучения геометрии, которую назовем *методико-педагогической моделью построения систематического курса геометрии средней школы*. В частности, одной из ее подсистем будет модель обучения геометрии в старших классах, которую мы назовем *профильной моделью*, чтобы подчеркнуть специфику современного дифференцированного обучения в старших классах. Выделим естественные э т а п ы построения курса (рис. 73).

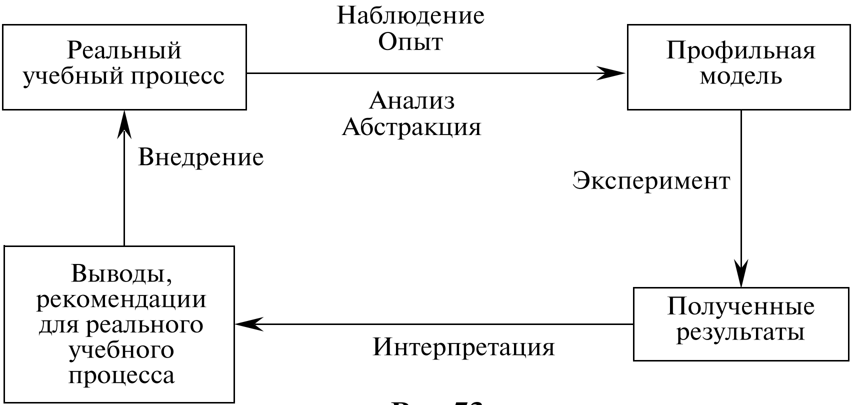


Рис. 73

I. Создание модели.

II. Исследование учебного процесса внутри спроектированной модели.

III. Получение результатов.

IV. Интерпретация полученных результатов.

Исходя из положений теории обучения об основных компонентах учебного процесса, рассмотрим следующую структуру *методической системы*: *цели*; *содержание*; *методы*; *формы*; *средства*; *оценка эффективности обучения*.

Представим подробно каждый блок выделенных проблем применительно к школьному курсу геометрии. Прежде всего, рассмотрим цели преподавания и изучения геометрии.

§ 10. Цели обучения геометрии в школе

В современной программе по математике для общеобразовательной школы говорится о том, что цели обучения математике определяются ее ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека. Таким образом, выделяются два основных направления в постановке курса математики. Назовем их *общее* и *личное*. Первое определяется общественными запросами, предъявляемыми к школе, а второе связано с выявлением и развитием задатков, склонностей, интересов, способностей учащихся. В соответствии с этим определяются следующие ц е л и обучения математике в школе:

а) овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

б) интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

в) формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

г) формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Сформулированные цели в равной степени относятся ко всем разделам школьной математики, в том числе и к геометрии.

Исторический опыт

Исходя из общих целей, рассмотрим специальные цели, ради которых преподается геометрия. Прежде всего проанализируем, как ставился и решался данный вопрос в известных руководствах по методике преподавания геометрии прошлых лет. Представим наиболее значимые для становления современного курса геометрии. Нельзя не отметить методическое пособие *Р. В. Гангнуса* и *Ю. О. Гурвица* [33], где говорится о том, что изучение геометрии должно дать умение и навык отличать друг от друга формы различных геометрических фигур, перечисляя их существенные признаки, знать их образование и свойства, соотношения между отдельными элементами фигур, выполнять четкий чертеж несложной геометрической ситуации, разбираться в данном чертеже и вызывать в своем воображении по данному чертежу соответствующие геометрические образы, решать задачи на вычисление длин, площадей, объемов тел и их частей, размеров их элементов, а также задачи на построение геометрических фигур. Изучение геометрии, содействуя развитию пространственных представлений и пространственной интуиции, должно, в конечном счете, дать учащимся прочные навыки и знания, нужные им не только для последующей учебной работы, но и для последующей профессиональной деятельности.

В методике геометрии *Н. М. Бескина* [15] выделяются три цели преподавания геометрии в школе:

1. Сообщение геометрических сведений.

Эти сведения, во-первых, непосредственно нужны работникам многих профессий. Во-вторых, они необходимы при изучении других школьных предметов, например таких, как физика, тригонометрия, география. В-третьих, геометрические сведения важны при обучении в высшей школе.

2. Логическое развитие.

Эта важная задача в школе возлагается в основном на курс геометрии. При этом учитель предостерегается от использования уроков геометрии для преподавания логики. В курсе геометрии имеют дело лишь с применением логических методов. Эта логика в действии, логика, которая основывается на геометрическом материале. По мнению автора, нельзя одобрить практику тех учителей, которые сосредоточивают все свое внимание на привитии ученикам навыков и обходят все сколько-нибудь «тонкие» принципиальные вопросы под тем предлогом, что они мало доступны ученикам. Если ученик только приобрел навыки в решении задач и запомнил доказательства теорем, приводимые в учебнике, то цель преподавания геометрии еще не достигнута. Основное правило преподавания математики на всех ступенях — не снижать научного уровня, не обходить принципиальных вопросов, а, наоборот, подчеркивать их. Глубоко ошибочно думать, что, имея перед собой «слабых» учеников, мы облегчим им усвоение математики, обходя «тонкие» вопросы. Дело обстоит как раз наоборот, ибо, не добившись вполне отчетливого усвоения учениками принципиальных вопросов, мы не облегчим, а затрудним для них изучение геометрии, так как лишим их многих ассоциаций, общего подхода к разным вопросам и многих внутренних связей. Из стройной системы мы превратим геометрию в собрание отдельных предложений. Имея дело со «слабыми» учениками, учитель должен проходить принципиальные вопросы математики нисколько не в меньшем объеме, чем с «сильными», а лишь разъяснять их более подробно. Математику можно преподавать всем, не превращая это преподавание в натаскивание, а сохраняя полностью все необходимые идейные моменты.

3. Развитие пространственного воображения.

При изучении геометрии надо добиваться, чтобы ученик мог охватывать сразу весь чертеж (сначала простой, потом — посложнее) и улавливать те соотношения между элементами чертежа, которые могут быть нужны при решении данного вопроса. Особенно полезны случаи, когда для решения проблемы приходится делать на чертеже дополнительные вспомогательные построения. Весьма полезны упражнения в проведении геометрических рассуждений, не делая чертежа на доске или на бумаге, а представляя его в уме. Решение задач на построение способствует развитию пространственного воображения.

В. М. Брадис [24] в своем методическом руководстве говорит о том, что основная цель изучения геометрии в школе состоит в овладении основами этой науки. При этом геометрию следует изучать в соответствии с тремя историческими стадиями развития этой науки:

а) накопление отдельных фактов и первые попытки установления связей между ними; здесь геометрия носит преимущественно экспериментальный характер;

б) геометрия Евклида; экспериментальная база геометрии существенно сужается; вместо построений и измерений на первый план выдвигается логическое рассуждение, нередко, однако, обращающееся к интуиции, к очевидным свойствам геометрических образов;

в) неевклидова геометрия; наряду с евклидовой геометрией появляются и другие, число аксиом в каждой из них доводится до минимума, и в списке аксиом остаются только те, относительно которых доказано, что они, действительно, недоказуемы с помощью других аксиом. Все остальные предложения доказываются на основе аксиом и ранее доказанных теорем, при доказательствах никакого обращения к интуиции, к очевидности не допускается.

Вместе с образовательной целью, заключающейся, с точки зрения автора, в усвоении фактического материала основного курса геометрии и того метода его логического развертывания, какой характерен для евклидовой стадии развития геометрии, ее изучение преследует и воспитательную цель, развивая логические навыки учащихся и их пространственное воображение. Правильно рассуждать они учатся на занятиях любого предмета учебного плана, но ни в одной дисциплине рассуждения не занимают столь большого и видного места, как в геометрии. Изучая геометрию, учащиеся приучаются правильно давать определения, правильно классифицировать понятия, различать условия и заключение в каждом предложении, различать предложение прямое, обратное, противоположное, понимать их взаимную зависимость, устанавливать условия, необходимые и достаточные, пользоваться различными методами доказательства и т. п.

В гармоническом развитии трех сторон — развития пространственного воображения, развития логического мышления и выработки навыков в практических приложениях — и заключается залог успеха занятий по геометрии.

В методике преподавания геометрии *В. Г. Чичигина* [150] говорится о том, что школьный курс геометрии имеет наибольшую стройность, логическую строгость и последовательность по сравнению с другими учебными математическими дисциплинами. Поэтому даже в дореволюционной школе XIX — начала XX в. основным мотивом внесения геометрии в учебный план средней школы было развитие логического мышления учащихся. Автор специально выделяет образовательные, воспитательные и практические цели преподавания геометрии.

Образовательные цели состоят в том, чтобы:

а) дать учащимся ряд геометрических понятий и знаний, приведенных в определенную стройную систему;

б) научить обрабатывать получаемые знания, объединять и обобщать создаваемые понятия и приводить их в систему;

в) научить в каждой задаче, понимая задачу в самом широком смысле этого слова, отчетливо различать, что дано, что надо найти и поставить вопрос, как это сделать.

Все это, вместе взятое, должно помогать развитию и повышению способности учащихся к правильному логическому мышлению.

К воспитательным целям отнесены:

а) развитие мировоззрения учащихся;

б) воспитание чувства национальной гордости и патриотизма;

в) воспитание инициативы, воли, настойчивости в преодолении трудностей;

г) воспитание уважения к истине и критического отношения к собственным и чужим суждениям;

д) развитие воображения, внимания, аккуратности при выполнении работы.

Практические цели состоят в том, чтобы:

а) приучить учащихся распознавать математическую сущность в явлениях окружающей жизни;

б) научить их применять полученные знания и навыки в повседневной практической жизни и при изучении других школьных предметов;

в) подготовить к дальнейшему изучению математики, физики и технических дисциплин в высшей школе.

В методике под общей редакцией *С. Е. Ляпина* [90] сказано, что основной целью обучения математике, в частности геометрии, в школе является задача подготовки учеников к будущей практической деятельности, а поэтому им необходимо сообщить определенный круг знаний, позволяющих понимать отношения и зависимости простейших явлений реального мира и разбираться в его формах. Эти знания должны содействовать воспитанию у школьников научного мировоззрения, развивать логическое мышление и пространственное воображение.

Геометрические знания должны помочь ученикам решать прикладные задачи, узнавать геометрические фигуры в реальных конструкциях, быстро ориентироваться в чертежах, проводить измерения и т. п. В то же время при изучении геометрии учащиеся должны овладеть умением логически обосновывать то, что многие зависимости, обнаруженные путем рассмотрения отдельных частных случаев, имеют общее значение и распространяются на все фигуры определенного вида, и, кроме того, вырабатывать потребность в логическом обосновании зависимостей.

Правильно построенное преподавание должно воспитывать у школьников стремление творчески применять геометрические знания на практике, что впоследствии может привести к плодотворным поискам решения конкретных прикладных задач.

В работе [89] в качестве первой и основной цели обучения геометрии выделяется ясное сознание учащимися, что предметом ее изучения являются пространственные формы окружающего мира. Одновременно с этим среди задач преподавания геометрии указываются:

а) развитие пространственных представлений и пространственного воображения;

б) ознакомление учащихся с методами геометрии, с ее логической структурой; в процессе ее изучения учащиеся должны получить известное представление о значении аксиом, о сущности, формах и способах доказательства, о значении математической и логической символики;

в) выявление практической значимости науки, ее многообразных приложений в смежных дисциплинах и технической деятельности людей.

В одном из первых изданий учебника по геометрии для средней школы *А. В. Погорелова* в послесловии говорится о том, что «главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать; очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами; будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора; однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать».

Автор другого известного учебника по геометрии для средней школы *А. Д. Александров* [3], говоря о целях преподавания геометрии, указывает, что особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и дополняют друг друга. В соответствии с этим делается вывод о том, что преподавание геометрии в школе должно включать в себя три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и применение к реальным вещам. Задача преподавания геометрии — развить у школьников соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Таким образом, видим, что в специальных руководствах по методике преподавания геометрии разные авторы отдавали и отдают предпочтение различным направлениям обучения геометрии в школе и по-разному формулируют основные задачи школьного курса геометрии. Поэтому для систематизации накопленного материала по этой проблеме, а также исходя из современных тенденций математического образования, сформулируем, прежде всего, *требования*, которым должны удовлетворять цели обучения геометрии в средней школе.

Требования к целям обучения геометрии

I. *Требование преемственности*, означающее, что обучение геометрии должно обобщать исторический путь развития геометрии, передавать подрастающему поколению знания, накопленные человечеством на протяжении веков.

Геометрия как наука зародилась в глубокой древности и в своем развитии прошла несколько этапов. Первоначально она имела характер чисто практический и заключала в себе собрание правил, полученных эмпирически, длинные ряды опытов и наблюдений. Об этих правилах мы можем судить по папирусам, написанным около 2000 лет до нашей эры. В них содержатся решения задач, носящих довольно разрозненный и частный характер, среди которых имеется, например, задача о вычислении объема усеченной пирамиды. Какие-либо доказательства или обоснования решений отсутствуют.

Примерно за шесть столетий до нашей эры в Древней Греции впервые появились теоремы и доказательства. Наиболее известным ученым, внесшим значительный вклад в становление геометрии как науки, был Пифагор (VI в. до н. э.). Его прежде всего интересовало чистое знание, вне зависимости от того, чему оно может послужить на практике. В течение последующих трех столетий геометрия оформилась как дедуктивная наука, в основу которой положены некоторые аксиомы и постулаты, принимаемые без доказательств, и содержание которой составляли теоремы, выводимые из них с помощью рассуждений. Непревзойденным изложением геометрии как дедуктивной науки явились «Начала» Евклида, написанные за 300 лет до нашей эры, которые на протяжении двух тысячелетий формировали умы математиков. Геометрия Евклида не только не исходит из практических задач, но и сама наглядность и наглядные представления о геометрических фигурах отодвигаются на второй план. Они не могут служить опорой в доказательствах, которые проводятся исключительно с помощью логических рассуждений. Главным в геометрии становится ее логика, сами же геометрические понятия: точка, прямая, плоскость — могут иметь различные наглядные интерпретации (модели), лишь бы для них выполнялись данные постулаты (аксиомы). Итогом такой точки зрения на геометрию можно считать «Основания геометрии», опубликованные в 1899 г. *Д. Гильбертом*, в которых он сделал геометрию чисто дедуктивной наукой. По-существу, аксиоматика Гильберта является основой построения школьного курса геометрии и в настоящее время. Не следует, однако, думать, что аспекты аксиоматики и дедуктивного построения геометрии исчерпывают все вопросы геометрии. Среди других вопросов, которыми интересовались математики, выделим следующие.

1. Изображение пространственных фигур на плоскости.

Еще в глубокой древности человек пытался рисовать изображения различных предметов и животных. В Древней Греции уже знали некоторые законы, по которым следует изображать пространственные тела. Подобные изображения использовались, например, в декорациях спектаклей. В эпоху Возрождения методы изображения пространственных фигур систематически изучались художниками, скульпторами, архитекторами: *Леонардо да Винчи, А. Дюрером, Рафаэлем, Микеланджело, Тицианом* и многими другими. Основы математической теории изображения пространственных тел на плоскости были разработаны *Ж. Дезаргом* и *Г. Монжем*, труды которых привели к созданию новых разделов геометрии: начертательной и проективной.

2. Измерение геометрических величин.

Первые задачи на измерение объемов пирамид встречаются еще у древних египтян. Общая формула вычисления объема произвольной пирамиды была получена Евдоксом Книдским в IV в. до нашей эры с помощью так называемого метода исчерпывания. Этим методом впоследствии пользовались Евклид, Архимед и др. В XVI—XVII вв. проблемой нахождения объемов и площадей поверхностей пространственных фигур занимались *Галилей, И. Кеплер, Б. Кавальери* и другие ученые. В книге «Новая стереометрия винных бочек» Кеплер вычислил объемы многих тел, в том числе и тел вращения. Появление в конце XVII в. интегрального исчисления дало мощный аппарат не только для нахождения объемов и площадей поверхностей различных тел, но и для обоснования известных ранее формул.

3. Алгебраические методы в геометрии.

Долгое время, на протяжении веков, геометрия и алгебра были независимы друг от друга, развивались как бы параллельно. Только работы *Р. Декарта* (XVII в.) позволили применять алгебраические методы в геометрии. Декарт открыл метод координат, при котором каждой точке плоскости сопоставляется пара чисел, а каждой точке пространства — тройка чисел, называемых координатами точки. При этом геометрические фигуры определяются уравнениями, связывающими координаты точек этой фигуры, что позволяет свести многие геометрические задачи к алгебраическим. Другим алгебраическим методом в геометрии является векторный метод, интерес к которому возник в XIX в. в связи с потребностями механики и физики. Оказалось, что многие геометрические задачи удобно описываются и решаются с помощью векторов. Векторный метод в геометрии положил начало векторному анализу и векторной алгебре.

4. Помимо евклидовой геометрии, появлялись и другие геометрии, среди которых: проективная, геометрия Лобачевского, сферическая, риманова, многомерная, дифференциальная геометрия и др.

Требование преемственности целей обучения геометрии в школе предполагает включение в содержание обучения вопросов ее истории. О важности исторических аспектов в преподавании говорится во многих работах, специальных исследованиях, высказываниях известных ученых — математиков. Впервые эта проблема была поставлена на Всероссийских съездах преподавателей математики [141] в докладах *В. В. Бобынина* «Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы» и «Об указаниях, получаемых преподавателями математики от ее истории», в которых было обращено внимание на то, что рассмотрение исторического материала на уроках математики способствует: повышению интереса учащихся к предмету; углублению понимания ими фактического материала; расширению умственного кругозора учащихся; повышению их общей культуры.

Отечественной школой накоплен большой опыт включения элементов истории в преподавание школьного курса математики. Создана библиотека специальной литературы. Среди значительных книг по истории математики для школы можно назвать работы таких авторов, как *И. Г. Башмакова, Б. В. Болгарский, Г. И. Глейзер, Б. В. Гнеденко, В. Н. Молодший, К. А. Рыбников, А. А. Свечников, Д. Я. Стройк, В. Д. Чистяков, А. П. Юшкевич* и др. Вышли сборники исторических задач, среди них:

— *Г. Н. Попов*. Исторические задачи по элементарной математике (1938, переиздана в 1999);

— *В. Д. Чистяков*. Три знаменитые задачи древности (1963);

— *С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов*. Старинные занимательные задачи (1988, 1996);

— *И. И. Баврин, Е. А. Фрибус*. Старинные задачи (1994);

— *С. С. Перли, Б. С. Перли*. Страницы русской истории на уроках математики: Нетрадиционный задачник (1994) и др.

Среди ц е л е й введения элементов истории в преподавание математики особо выделим следующие:

• История математики служит для *формирования мировоззрения* учащихся, так как сведения о научных поисках, открытиях помогают увидеть по-новому то, что кажется привычным и обыденным. Основными целями введения исторического материала является проникновение в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей и методов. Исторический материал должен демонстрировать учащимся, каким может быть трудным и длительным путь ученого к истине, которая сегодня формулируется в виде короткого утверждения.

- Использование исторических сведений является одним из *критериев интересности содержания учебного материала*, служит для развития познавательных интересов учащихся к математике.

- Исторические сведения служат для развития *творческих способностей* учащихся, так как включение сведений о творчестве крупных ученых, о том, как они приходили к постановке своих исследований, как находили метод решения, как формулировали окончательный результат, позволяет создать творческую атмосферу на уроках, помогает понять, что в процессе творчества нет ничего необычного, сверхъестественного, но цели достигаются в результате упорного труда.

- Элементы истории служат средством *нравственного воспитания* учащихся, воспитания чувства гордости за достижения отечественной математики. История науки обладает множеством впечатляющих фактов о благородных социальных и гражданских мотивах деятельности ученых. Пренебрежение этим материалом или умалчивание о нем обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся. Лишенные конкретных доказательств о единстве науки и нравственности школьники могут считать, что существует чистая наука, далекая от реальной жизни, несвязанная с судьбами людей и общества.

- История математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе как «*памятник человеческому гению*, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов, управляющих внутриатомными процессами и процессами космического масштаба. История науки является тем факелом, который освещает новым поколениям путь дальнейшего развития и передает им священный огонь Прометея, толкающий их на новые открытия, на вечный поиск, ведущий к познанию окружающего нас мира, включая нас самих» [38].

Важная методическая проблема заключается в создании научно-обоснованной системы работы учителя с историческим материалом на уроках геометрии. Она еще очень далека от своего совершенства. Необходимо найти умелое сочетание элементов истории с математическим материалом. Трудность заключается в отборе конкретного исторического материала, а также методов и форм его преподавания. Для реализации названных дидактических функций элементов истории на уроках геометрии они должны быть специально включены в программы, учебники, контрольные мероприятия. В идеале по каждой теме школьного курса геометрии нужно создать соответствующие методические разработки с указанием конкретных исторических фактов и методов их преподнесения учащимся.

В своей работе с учащимися основной школы и старших классов выделяем следующие *формы использования исторического материала* (*классификация по объему предлагаемой информации*).

1. Историческая справка.
2. Исторический экскурс.
3. Историческая задача.
4. Статья (сочинение) на историческую тему.
5. Реферат, посвященный истории математики.
6. Подборка исторических материалов с использованием интернет-ресурсов.

Среди *форм проведения* выделяем следующие.

1) Создание соответствующей проблемной ситуации.
2) Короткое сообщение ученика.
3) Доклад ученика.
4) Беседа или рассказ учителя.
5) Урок или семинар по определенной теме.

В распоряжении каждого учителя математики должен быть исторический материал по изучаемой теме, которым он может распорядиться по собственному усмотрению, в соответствии со своим опытом, вкусом, уровнем и профилем класса. Значение такого материала для начинающего учителя трудно переоценить.

II. *Требование научной и практической значимости геометрии*, означающее, что цели ее обучения должны соответствовать той роли, которую играет геометрия в жизни общества, в познании окружающего нас мира.

По выражению *А. Д. Александрова* [3], «ученику нужно показать реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами». Показ прикладных аспектов геометрии совершенно необходим, особенно для учащихся старших классов, которых нужно убедить в полезности того, что они изучают в школе.

Опыт работы показывает, что учащиеся средней школы живо интересуются современными проблемами в различных областях знания. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы, научно-популярных телевизионных передач, современных информационных технологий. Неправильной является точка зрения, согласно которой считается, что школьникам недоступно познание современного состояния науки, в частности геометрии, поэтому вводить элементы современной геометрии в школе не нужно. Знакомство с основными направлениями развития современной науки необходимо каждому выпускнику школы, независимо от его будущей деятельности, для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе. Главное здесь — найти «золотую середину», т. е. такой метод изложения материала, при котором, не вдаваясь в трудные детали, познакомить учащихся с некоторыми современными вопросами геометрии.

III. Цели обучения должны соответствовать общественным запросам, тем задачам, которые общество ставит перед школой.

Общественные запросы меняются со временем. Так в период, когда ставилась задача политехнического образования, главной целью обучения в школе была подготовка учащихся к производственному труду. В то время, когда был взят курс на всеобщее высшее образование, главной целью обучения в школе являлась подготовка к продолжению образования в вузе. В настоящее время отношение общества к школе изменилось, усилилась дифференциация обучения, расширилась сеть профильных школ и классов. Требования, предъявляемые сейчас обществом к средней школе, носят общеобразовательный характер, предполагающий раскрытие возможностей и способностей каждого ученика с тем, чтобы он в дальнейшем мог выбрать себе профессию по душе в соответствии со своими склонностями и способностями.

IV. Цели обучения должны удовлетворять запросы самих учеников, учитывать их индивидуальные и возрастные особенности. Они должны быть понятными и принятыми самими учащимися, должны способствовать активному участию всех школьников в процессе обучения.

В отношении задач, которые ставятся перед учениками, *С. Л. Рубинштейн* писал: «Для того чтобы учащиеся по-настоящему включились в работу, нужно, чтобы задачи, которые перед ними ставятся в ходе учебной деятельности, были не только понятны, но и приняты ими, т. е. чтобы они приобрели значимость для учащихся и нашли, таким образом, отклик и опорную точку в их переживаниях» [114].

Принятие учениками целей обучения в качестве своих личных целей является одним из важнейших условий теории учебной деятельности, разработанной в трудах видных отечественных психологов *П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, А. Н. Леонтьева, Б. Д. Эльконина* и др.

V. Цели обучения должны удовлетворять психолого-педагогическим требованиям к процессу обучения.

В теории обучения рассматриваются принципы воспитывающего и развивающего обучения, разработанные в трудах известных отечественных педагогов и психологов: *Ю. К. Бабанского, Л. С. Выготского, П. Я. Гальперина, Л. В. Занкова, Н. А. Менчинской, Н. Ф. Талызиной* и др.

Принцип воспитывающего обучения предполагает рассмотрение обучения в качестве одной из форм воспитания. Это не означает, конечно, что в процессе обучения воспитание происходит автоматически. В случае, когда учитель ставит лишь цель научить учащихся определенным знаниям, умениям и навыкам, воспитание носит стихийный, случайный характер, не является прямым результатом обучения. Неправильным также является планирование и решение воспитательных задач на уроке в отрыве от процесса обучения. Воспитательные моменты, оторванные от содержания учебного предмета и логики педагогического процесса, отводят воспитанию второстепенную роль, противопоставляются обучение и воспитание. Воспитывающее обучение требует единства в решении образовательных и воспитательных задач обучения. Обучение должно так организовываться, так проводиться, чтобы оно прямо и непосредственно решало воспитательные задачи, связанные с формированием личности учащихся. Через воспитание, в процессе воспитания только и можно эффективно и по-настоящему осуществлять цели и задачи обучения.

О воспитании в процессе обучения математике ярко говорили и говорят российские математики. Широко известна речь *Н. И. Лобачевского* «О важнейших предметах воспитания» [84], произнесенная им 5 июля 1828 г. на торжественном собрании Казанского университета, в которой, в частности, говорится, что «одно образование умственное не довершает еще воспитание. Человек, обогащая свой ум познаниями, еще должен уметь наслаждаться жизнью» [84].

Б. В. Гнеденко отмечал, что мировоззрение воспитывается не только на уроках гуманитарного цикла. «В действительности, каждый школьный предмет обладает своими неповторимыми возможностями для развития и раскрытия, по крайней мере, некоторых аспектов научного мировоззрения. Перед математиками в этом большом ответственном деле стоит ряд серьезных задач и на первом месте — борьба с ошибочными точками зрения на природу математического знания, на его место в познании окружающего нас мира, на происхождение математических понятий, на источники новых задач в математике и новых ее ветвей» [38].

Известный математик и педагог *А. Я. Хинчин* в своих, ставших знаменитыми, «Педагогических статьях» [84] указывал на то, что среди воспитательных задач обучения математике важное место занимает воспитание патриотизма, чувства гордости за достижения отечественной науки, ученых. «История российской математики богата фактами, знакомство с которыми, в особенности на фоне правильной исторической перспективы, способно возбуждать в нас законную радостную гордость. И среди этих фактов есть немало таких, понимание которых доступно учащимся средней школы в достаточной мере для того, чтобы они могли оценить принципиальное и практическое значение». Среди черт личности, которые воспитывает математика, А. Я. Хинчин выделил *честность*, *правдивость*, *настойчивость* и *мужество*. «По моему многолетнему опыту работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает — исподволь и постепенно — в молодом человеке ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике. Сделать этот процесс более активным и результаты его более прочными — достойная задача учителя».

В. Г. Болтянский [21] отмечает, что природа математики представляет собой богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в строгих, смелых, оригинальных доказательствах, выводах, решениях, в проявлениях геометрии в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т. д.

Красивое всегда удивляет, оно неожиданно, необычно. В. Г. Болтянский приводит следующую формулу математической красоты:

$$\text{Красота} = \text{Наглядность} + \text{Неожиданность} =$$
$$= \text{Изоморфизм} + \text{Простота} + \text{Неожиданность}.$$

Среди развивающих задач обучения геометрии особо выделяются: развитие мышления; пространственного воображения; формирование познавательного интереса к геометрии; развитие творческих математических способностей.

Работа по реализации воспитательных и развивающих задач обучения не может идти стихийно. Она должна носить целенаправленный комплексный характер, охватывающий все стороны деятельности учащихся.

Единство образования, воспитания и развития учащихся составляет суть комплексного подхода к обучению. Следует особо отметить, что комплексный подход к планированию учебного процесса предполагает охват всех сторон воспитания школьников: формирование у них мировоззрения, трудовое, нравственное, эстетическое и физическое воспитание.

Не следует думать, что комплексный подход, требование единства обучения, воспитания и развития относится только ко всему процессу обучения и не относится к каждому отдельному предмету, вклад в процесс формирования личности учащихся для различных предметов является существенно различным. Это не так. Например, геометрия обладает всеми возможностями для успешного решения не только образовательных, но и воспитательных, и развивающих задач обучения.

VI. Цели обучения должны быть конкретными. Из них должны вытекать практические рекомендации по отбору содержания, выбору форм и методов обучения. Достижение целей обучения должно быть проверено с тем, чтобы можно было осуществлять соответствующий контроль за их достижением.

Конкретизация целей обучения позволяет более четко организовать процесс обучения, выделить наиболее существенные, значимые стороны, сосредоточить на них усилия учеников, организовать эффективный контроль за их достижением.

Основные цели обучения геометрии в средней школе

1. *Образовательные*. В результате изучения курса геометрии учащиеся должны получить представления об истории становления и развития науки геометрии; о роли геометрии в возникновении различных разделов математики и ее приложений; о методах геометрии; языке геометрии; прикладных аспектах геометрии; современных направлениях развития геометрии.

2. *Развивающие*. Изучение геометрии должно внести вклад в развитие логического мышления; развитие пространственных представлений и пространственного воображения; формирование познавательных интересов; развитие творческих интеллектуальных способностей учащихся.

3. *Воспитательные*. Изучение геометрии должно внести вклад в формирование научного мировоззрения; нравственное воспитание; эстетическое воспитание учащихся.

Обучение, являясь единым процессом, имеет две стороны: *преподавание*, которое определяется деятельностью учителя, и *учение*, связанное с деятельностью учащихся. Поэтому различаются цели преподавания и цели изучения геометрии, которые, конечно, по-существу должны совпадать, не иметь принципиальных различий. При этом цели изучения геометрии — это соответствующая интерпретация целей преподавания геометрии. Учащиеся должны понимать и принимать цели изучения геометрии. Очень важно обсуждать с ними эту проблему. Такой разговор целесообразно начинать сразу, на самых первых уроках геометрии, когда начинается ее систематическое изучение. В качестве примера приведем фрагмент беседы о целях изучения геометрии с учащимися старших классов.

Зачем нужно изучать геометрию

Во-первых, геометрия знакомит нас с окружающей действительностью, в которой многие предметы напоминают различные геометрические фигуры, фактически мы живем в мире геометрии. Необходимо научиться понимать, как он устроен, чтобы правильно ориентироваться в нем. Именно геометрия помогает нам это сделать, так как она дает необходимые каждому человеку пространственные представления, знакомит с разнообразными пространственными формами, законами их восприятия.

Во-вторых, очень интересно устроена наша голова. Есть левое полушарие головного мозга, которое «отвечает» за развитие рациональных психических функций, например логическое мышление. Правое полушарие связано с развитием иррациональных психических функций, образов, чувств, его даже называют «интуитивным полушарием». В психологии убедительно доказано, что, чтобы стать истинным творцом в любой сфере человеческой деятельности, нужно иметь хорошо и пропорционально развитыми оба полушария головного мозга, и левое, и правое. Приведем на этот счет два примера.

Выдающийся французский математик *Анри Пуанкаре*, исследуя вопрос о математическом творчестве, говорил о том, что самым важным качеством настоящего математика является чувство математической эстетики, красоты, изящества решения. Тот, кто не обладает этим свойством, т. е. не имеет хорошо развитым правое полушарие, никогда не сможет сделать неожиданных, нестандартных открытий, а потому добиться значительных результатов в области математической науки.

Другой знаменитый француз, выдающийся архитектор XX столетия, *Ле Корбюзье* считал, что в основе всего изобразительного искусства лежит геометрия. Он писал: «Человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем».

Геометрия, как ни один другой предмет, обладает широкими возможностями для развития обоих полушарий головного мозга, так как в ней интуитивно понятные, наглядные факты получают строгое логическое обоснование и доказательство. Действительно, геометрия, по образному выражению *А. Д. Александрова*, это «лед и пламень».

Кроме этого, при изучении геометрии вырабатываются необходимые практические навыки изображения, моделирования, конструирования геометрических фигур, а также измерения основных геометрических величин — длин, величин углов, площадей, объемов.

Наконец, геометрия интересна и сама по себе, так как имеет яркую историю, связанную с именами выдающихся ученых, таких как *Пифагор, Евклид, Архимед, И. Кеплер, Л. Эйлер* и др.; богатые прикладные аспекты, в том числе в кристаллографии, живописи, архитектуре, строительстве и т. д. Геометрия занимательна, изучает красивые объекты, среди которых особо выделяются правильные, полуправильные, звездчатые многогранники и др. Она связана с развитием многих разделов современной математики и ее приложений.

Сказанному и посвящен школьный курс геометрии, по мере изучения которого все это и будет подробно раскрываться и представляться.

§ 11. Учебная информация по геометрии

Цели обучения геометрии определяют разработку других компонентов структуры методической системы обучения. Рассмотрим блок проблем, связанных с учебной информацией. Термин *«учебная информация»* употребим для того, чтобы подчеркнуть, что имеется в виду не только содержание обучения, но и его организация. Учебная информация имеет две составные части: содержание курса и организацию этого содержания, т. е. способы и средства выражения информации, хранения и ее передачи (табл. 18).

Таблица 18

Учебная информация по геометрии	
Содержание курса	Организация содержания • Способы выражения • Средства передачи • Способы хранения

Содержание учебной информации

В дидактике под содержанием курса понимают:

а) систему знаний о природе, обществе, мышлении, технике, способах деятельности;

б) систему общих интеллектуальных и практических навыков и умений;

в) опыт творческой деятельности, ее основные черты, которые постепенно были накоплены человечеством в процессе развития общественно-практической деятельности;

г) опыт эмоционально-волевого отношения к миру, к друг другу.

В известной монографии [78] представлен логико-методологический аспект современной теории содержания непрерывного образования. В работе отмечается одна важная проблема. Существенную роль в становлении личности играет дифференцированная часть образования, существующая наряду с общей (инвариантной) частью, выражающаяся в вариативности содержания (занятия по выбору), форм и методов обучения, воспитания и развития. Автор отмечает, что, отдавая должное дифференциации образования, без которой невозможно полное формирование многих важных индивидуальных качеств личности, дифференциация отнюдь не противоречит необходимости изучения (в рамках общего образования) некоторой системы одних и тех же учебных предметов. В этом как раз и состоит суть общего образования, что оно инвариантно и призвано передать новому поколению, каждому молодому человеку основы общечеловеческой культуры. Одно не должно идти в ущерб другому: необходимо и дифференцированное образование, и его общекультурное ядро.

Исходя из основных идей модернизации образования, связанных с гуманизацией, гуманитаризацией, личностно-ориентированным обучением, в исследованиях [158, 160] подчеркивается необходимость разработки специального технологического обеспечения, существенно отличного от того, которое долгие годы доминировало в отечественной школе. Основу его составляет содержание образования, понимаемое как совокупность общественных практик деятельности, овладение которыми осуществляется через усвоение социально-значимой системы знаний, средств деятельности, методов мышления. Содержание образования: не является лишь хорошо сконструированной по законам логики научной информацией, заданной для усвоения, а это становление интеллекта, при этом различные его формы равноценны и социально значимы; не следует отождествлять с содержанием учебных дисциплин как «проекцией» различных наук; не должно представлять собой только набор социокультурных образцов в виде законов, правил, приемов действия, поведения; оно должно включать содержание субъектного опыта ученика как опыта его индивидуальной жизнедеятельности, без чего содержание образования становится обезличенным, формальным, невостребованным; должно обеспечивать согласование двух его равноправных источников — преподавания и учения, как своеобразное единение общественного и индивидуального познания. Подчеркивается, что «обученность» и «образованность» — личностные качества разного порядка. Они обеспечиваются разным содержанием образования, цель которого — становление индивидуальности на основе изучения каждого ученика; проектирование и организация условий для раскрытия, становления, проявления его как личности.

Исходя из анализа рассмотренных классификаций, соответствующей литературы, а также специфических особенностей математики, *в курсе геометрии выделим следующие элементы содержания.*

1. Термины (их запись, чтение, обозначение); понятия (неопределяемые и определяемые).

2. Аксиомы, теоремы, задачи (среди которых мы выделяем устные, основные (базовые, стандартные), повышенной трудности, нестандартные, исследовательские, прикладные и практические, занимательные, исторические).

3. Классификации.

4. Теории.

5. Факты (исторические справки, дополнительные сведения).

Поскольку одной из важнейших особенностей современного этапа развития школьного образования является внедрение идей уровневой и профильной дифференциации, необходимо специально определять объем учебной информации, а также соответствующие требования к уровню овладения этой информацией различными учащимися.

Например, в работе [49] обосновываются две группы принципов отбора содержания. Первую группу образуют так называемые следующие внешние принципы.

1. Информационная емкость — обучение математике должно обеспечивать приобретение всеми учащимися объема знаний, достаточного для реализации поставленных целей математического образования.

2. Социальная эффективность — формирование кадрового потенциала общества во всех сферах деятельности, требующих математических знаний и интеллектуальной культуры.

Ко второй группе относятся следующие внутренние принципы, которые касаются системы школьного обучения и характеризуются психолого-педагогическими, дидактическими и методическими требованиями.

1) Интеллектуальная емкость — максимальные возможности для организации полноценной математической деятельности.

2) Дифференцируемая реализуемость — реализуемость усвоения программных знаний всеми учащимися в условиях развитой уровневой и профильной дифференциации и ограниченности объема учебного времени совокупностью внешних факторов.

3) Познавательная емкость — максимальные возможности для формирования, поддержания и развития интереса к изучению математики на каждом этапе обучения.

4) Диагностико-прогностическая емкость — выявление математических и общеинтеллектуальных способностей учащихся с целью их обоснованной ориентации на профиль обучения и выбор специальности.

Из всей совокупности математических знаний выделяются несколько групп основных знаний, которые соответствуют реализации целей математического образования. Для их освоения предусматривается несколько уровней, а именно: общепрагматический (прикладной, в «повседневной жизни»); дидактико-прагматический (операционный в процессе обучения); общекультурный (фактологический). Из всего многообразия конкретных знаний выделяются целевые знания и вспомогательные знания. Например, к целевым знаниям по геометрии нужно отнести только: плоские и пространственные фигуры и конфигурации, изображения на плоскости (на рисунках и чертежах), измерение длин, площадей и объемов, измерение углов.

Различные точки зрения на содержание математического образования сходятся в том, что содержание любого школьного предмета, в частности геометрии, должно определяться конкретными целями обучения. Для реализации поставленных целей содержание должно быть специальным образом сконструировано. При этом нужны критерии, соответствующие общим целям образования и конкретизирующие механизм отбора содержания по определенному предмету. Представим разработанные *И. М. Смирновой* критерии отбора учебного материала на примере школьной геометрии.

Критерии отбора содержания учебного материала

В результате анализа соответствующей литературы, проведенного исследования, а также личного опыта работы в школе были выдвинуты следующие критерии отбора.

I. Критерий научной и практической значимости.

II. Критерий соответствия содержания воспитательным и развивающим целям обучения.

III. Критерий соответствия содержания уровню и профилю обучения.

IV. Критерий соответствия содержания возрастным особенностям учащихся.

V. Критерий соответствия содержания индивидуальным особенностям школьников.

VI. Критерий соответствия содержания учебно-методическому обеспечению.

VII. Критерий соответствия содержания имеющемуся времени.

Остановимся более подробно на каждом из них.

Критерий научной и практической значимости

Большое значение для отбора содержания школьных курсов для учащихся, особенно старших классов, имеет критерий научной и практической значимости учебного материала. Он предполагает, что учебный курс отражает одно из важных направлений развития теории и практики. В школьном преподавании геометрии этот вопрос рассматривается в недостаточной степени. Это не означает, что ученикам недоступно понимание научной и практической значимости изучаемого или что в рассматриваемом материале нет такой значимости. Нужно не только сообщение учащимся достоверных фактов о свойствах реального пространства, но и объяснение их сущности, раскрытие внутренних связей между свойствами действительного и абстрактного пространства.

Категории — наука и учебный предмет, имеют тесные связи. Наука состоит из приведенных в систему законов внешнего мира и духовной деятельности людей, а также из процессов добывания, накопления и передачи практического использования знаний. Геометрия, как учебный предмет, должна представлять собой дидактически обоснованную систему отобранных из науки знаний, которые должны быть усвоены школьниками.

Тезис о влиянии практики на развитие математики ни у кого не вызывает возражений. Решение задач практики (в самом широком ее понимании) — один из путей, стимулов появления новых исследований в математике. По словам *Б. В. Гнеденко*, общение с практикой дает математике не только широкий набор вопросов, которые внутри самой математики могли бы и не возникнуть. Еще важнее другое: тесные связи с практикой дают математике возможность сохранять свое значение в качестве орудия исследования для самых разнообразных областей практической деятельности от естествознания до сельского хозяйства и экономики [38].

Подводя итог сказанному, можно сказать, что для решения вопроса о научной и практической значимости в содержание учебного предмета, в частности геометрии, необходимо включать следующее.

1) Историю возникновения и постановки той или иной проблемы.

2) Поиски решения, трудности на пути решения проблемы.

3) Сведения об ученых, занимавшихся решением проблемы.

4) Значимость решения проблемы для развития науки.

5) Применение полученного результата к решению прикладных и народнохозяйственных задач.

Одним из путей реализации критерия научной и практической значимости содержания является раскрытие межпредметных связей изучаемого материала, а также демонстрация прикладных аспектов курса геометрии. Рассмотрение задач межпредметного и прикладного характера при изучении геометрии приводит к естественной взаимосвязи теории и практики, способствует глубокому, неформальному изучению основ наук. Кроме этого, как показывают наши наблюдения и личный опыт проведения уроков по геометрии, такие задачи встречаются учащимися с повышенным интересом, способствуют их активизации, повышают их творческую активность.

Критерий соответствия содержания воспитательным и развивающим целям обучения

Опыт показывает, что не любое содержание способствует достижению целей воспитания и развития учащихся. Необходимо специальным образом конструировать содержание учебного курса, включая в него элементы истории, современности, занимательности, красоты математики.

Включение элементов истории в преподавание геометрии выполняет следующие важные дидактические функции.

1. Использование исторического материала позволяет проникнуть в мировоззренческий смысл науки, в процесс формирования ее основных идей, эволюцию методов.

2. Использование исторических сведений является одним из критериев интересности содержания учебного материала, служит для развития познавательных интересов учащихся к математике.

3. Исторические сведения служат для развития творческих способностей учащихся.

4. Сведения из истории служат средством нравственного воспитания учащихся: воспитания чувства патриотизма, гордости за достижения отечественных математиков.

Наряду с интересом к вопросам истории математики, учащиеся, особенно старших классов, живо интересуются современными проблемами в различных областях знания. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, научно-популярная литература, компьютерные продукты.

Знакомство с основными направлениями современной науки необходимо теперь каждому выпускнику школы для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в обществе, в движении вперед.

Для того чтобы познакомить учащихся с современным состоянием развития геометрии, вовсе необязательно вводить элементы этой геометрии в основной курс школы. Для этого мы включаем в содержание курса геометрии следующие элементы:

а) знакомство с некоторыми направлениями и проблемами современной геометрии;

б) знакомство с жизнью и творчеством известных современных ученых-геометров;

в) работа с научно-популярной литературой;

г) решение современных прикладных задач;

д) использование современных компьютерных технологий.

В методической литературе обосновывается принцип занимательности содержания, в частности, включение в содержание занимательного материала. Занимательность не в смысле развлечения, рассказов математических анекдотов, а занимательность в смысле показа занимательных элементов в самом содержании математики. К ним можно отнести неожиданный факт; аналогии, примеры; исторический материал; решение поучительных задач; раскрытие красоты математики.

В педагогических исследованиях занимательность указывается как стимул развития познавательных интересов учащихся, как эмоциональная основа для запоминания наиболее трудных вопросов изучаемого материала.

Элементы занимательной математики прочно завоевали сферу внеклассной работы, но, к сожалению, недостаточно используются на основных уроках математики. Главным фактором, обеспечивающим занимательность, должен служить удачно подобранный фактический материал, органично включенный в содержание изучаемого материала.

Среди элементов занимательности учебного материала была названа красота математики, которая играет существенную роль в воспитании и развитии у школьников чувства красоты в самом широком значении этого слова. По словам известного математика *Г. Г. Харди*, «творчество математика в такой же степени есть создание прекрасного, как творчество живописца или поэта: совокупность идей, подобно совокупности красок или слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике» [84].

Известный французский математик *Ж. Адамар* вслед за *А. Пуанкаре* тоже считал, что отличительной чертой математического ума является не логичность, а эстетичность. Он полагал, что чувство эстетического у нас врожденное, но его непрерывно нужно совершенствовать в себе. Люди, которые способны совершенствовать в себе умение ценить красоту математики, становятся теоретиками-математиками [1].

Для формирования эстетического чувства красоты математики мы включаем в содержание курса геометрии следующие вопросы.

— Необычные, красивые факты, доказательства, решения.

— Нестандартные задачи с изящным решением.

— Красивые математические объекты, их модели.

— Иллюстрации проявления математики в живой природе, живописи, архитектуре, декоративно-прикладном искусстве и т. п.

Критерий соответствия содержания уровню и профилю обучения

При уровневой дифференциации учащиеся учатся в одном классе, по одной программе, по одному учебнику. Различие состоит в уровне усвоения предлагаемого учебного материала. В качестве основополагающего, исходного, базового берется уровень обязательных результатов. Кроме него, предусматриваются уровень коррекции и продвинутый уровень, соответствующие слабо и отлично успевающим учащимся. Уровневая дифференциация это не новое явление для отечественной школы. У нас накоплен богатый опыт работы с так называемыми «слабыми», «средними» и «сильными» учащимися, что в современной терминологии и означает соответственно уровни коррекции, базовый, продвинутый и творческий.

Интереснее обстоит дело с профильной дифференциацией, относительно новым являнием для российской школы. Выбор профиля обучения зависит в большой степени от выбора будущей специальности, от того, какое место будет занимать в ней, в частности, математика. Среди профильных классов наиболее часто встречаются математические, физико-математические, информационно-технологические, социально-экономические; гуманитарные, среди которых исторические, филологические, философские; естественные — биологические, химические, географические и др. Для профильных классов создаются специальные курсы математики, в том числе и геометрии.

При разработке методики преподавания геометрии в условиях профильного обучения за основу взяты следующие направления профильной дифференциации:

а) гуманитарное, включающее в себя специализированные учебные заведения, профильные классы с углубленным изучением иностранных языков, исторические, филологические, философские и т. д.;

б) прикладное, ориентированное на прикладные аспекты использования математики в науке, технике, производстве, экономике и т. д.;

в) естественно-математическое, включающее в себя физико-математические специализированные школы и классы.

Главным вопросом при этом является вопрос о том, каким должно быть преподавание математики в классах с различной профильной направленностью. Что общего и чем отличается преподавание геометрии в этих классах? Нужна ли вообще математика в классах гуманитарной направленности? Это не простой и не праздный вопрос, как может показаться на первый взгляд. Существует мнение, согласно которому предмет — математика вовсе не обязателен для учащихся гуманитарных классов. Конечно, с этим нельзя согласиться. Хорошо известно, и это было показано выше, что математика, и, в частности, геометрия, является объектом общей культуры человека. Она в равной степени нужна художнику и математику. Это связано с тем, что в равной степени необходимо развивать рациональные и иррациональные психологические функции человека. К первым, например, относится мышление, ко вторым — ощущения, интуиция. Для любого человека важно заботиться о равномерном развитии как левого, так и правого полушарий головного мозга. Как известно, левое полушарие связано с развитием логического, а правое — художественного мышления. Если одно из них не будет развито, из человека не получится гармонично развитой личности. Математика представляет для этого как раз богатые возможности. В частности, такими возможностями обладает и раздел школьной математики — геометрия. Среди важнейших целей обучения геометрии мы назвали развитие основных психологических компонентов: пространственных представлений, пространственного воображения, логического мышления, без которых невозможно развитие творческих способностей учащихся, формирование их личности. Важно подчеркнуть, что при изучении геометрии учащиеся познают пространство, в котором живут, знакомятся с пространственными образами и формами окружающего мира. Кроме этого, в процессе изучения геометрии учащиеся приобретают необходимые практические умения: изображать, моделировать, конструировать, измерять.

Неправильной следует считать точку зрения, согласно которой преподаванию математики, в частности геометрии, в нематематических классах отводится второстепенная роль. Наоборот, значение математического образования в этих классах не только не меньше, но даже и больше, чем в специализированных математических классах. Связано это с тем, что в гуманитарных классах математическое образование, как правило, завершается, а после специализированных математических классов образование продолжается в соответствующих высших учебных заведениях.

Учащиеся на общекультурном базовом уровне обучения должны получить более широкое математическое образование, которое, например по геометрии, не должно ограничиваться только евклидовой геометрией или развитием логического мышления. В то же время необходимо учитывать гуманитарную направленность личности обучаемых. Это применительно к математике выражается в большей значимости для них вопросов мировоззренческого характера, истории математики и ее приложений в различных областях и сферах человеческой деятельности.

Отметим, что все сказанное в равной степени можно отнести и к продвинутому уровню обучения геометрии. Будущим математикам тоже нужны воображение, фантазия, широта взглядов, представлений и т. п.

Профильная модель обучения (И. М. Смирнова)

1. *Гуманитарная составляющая* включает в себя, в частности, исторический материал, а также материал философского, мировоззренческого характера.

2. *Прикладная составляющая* включает элементы прикладной математики, а также материал межпредметного характера.

3. *Естественно-научная составляющая* включает углубленное изучение математики, элементы современной математики.

Конечно, обучение математике, в частности геометрии, по тому или иному профилю не должно сводиться только к соответствующей составляющей. В каждом профиле обучения должны содержаться все три составляющие, но с разным процентным отношением. В гуманитарном профиле больше внимания должно быть уделено гуманитарной составляющей обучения, однако при этом должны присутствовать прикладная и естественно-научная составляющие.

Представим профильную модель обучения наглядно. Для этого различные составляющие отложим по соответствующим осям координат; *Г* — гуманитарная, *П* — прикладная и *Е* — естественно-научная. Тогда профильная модель обучения будет выглядеть следующим образом. Обучение в гуманитарных классах будет изображаться параллелепипедом, вытянутым в направлении гуманитарной составляющей (рис. 74, *а*).

Аналогичным образом в физико-математических классах присутствуют все три составляющие, однако приоритет здесь имеет естественно-научная составляющая (рис. 74, *б*).

В классах прикладной направленности также присутствуют все три составляющие обучения, но преобладание имеет прикладная составляющая (рис. 74, *в*).

Собирая все три рисунка вместе (рис. 74, *г*), видим соотношение различных составляющих при обучении в классах разного профиля. Видно, что гуманитарные составляющие в классах естественно-математического и прикладного профилей примерно одинаковы. Естественно-научная составляющая в гуманитарных классах меньше, чем в классах прикладной направленности, а прикладная

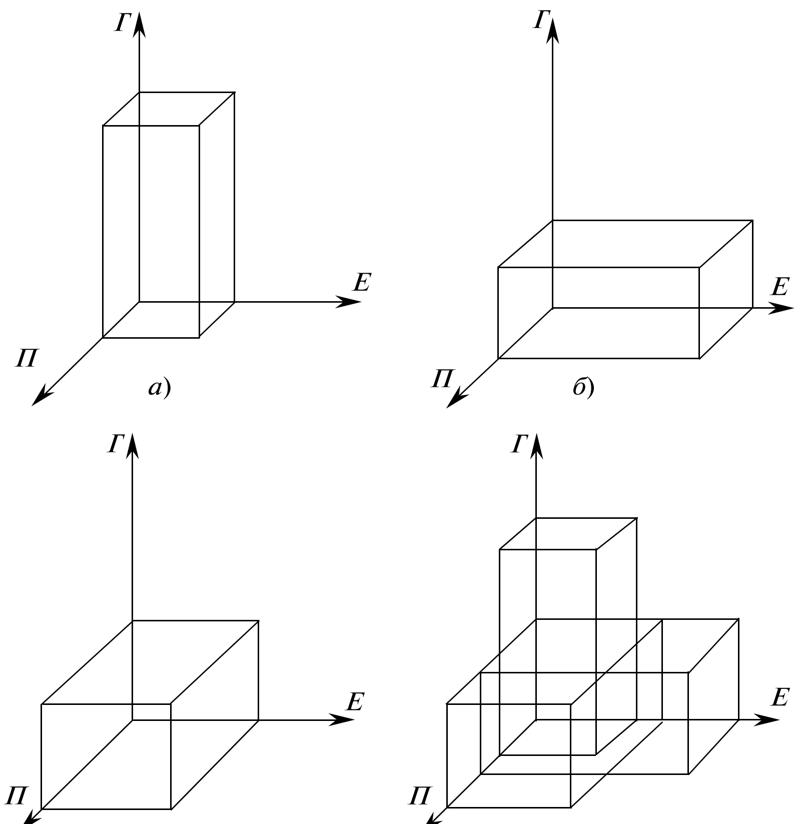


Рис. 74

составляющая меньше, чем в классах естественно-математического направления.

Представленные параллелепипеды имеют различные объемы. Наибольший объем имеет параллелепипед, соответствующий естественно-математическому профилю. Примерно две третьих его объема составляет параллелепипед, соответствующий прикладному профилю, и примерно половину исходного объема имеет параллелепипед, соответствующий гуманитарному профилю.

Отметим также, что учебная информация, соответствующая различным параллелепипедам, имеет различную плотность. Естественно-математическому профилю соответствует наибольшая плотность информации, а гуманитарному — наименьшая.

Пересечение всех трех параллелепипедов представляет собой параллелепипед, содержащий минимумы всех трех составляющих содержания обучения и соответствующий общекультурному уровню обучения математике. Заметим, что общекультурный уровень отличается от уровня обучения в гуманитарных классах тем, что имеет, вообще говоря, меньшую гуманитарную составляющую и, таким образом, составляет только часть от гуманитарного уровня обучения.

Критерий соответствия содержания возрастным особенностям учащихся

Этот критерий предполагает не только доступность изучаемого материала, соответствие уровня трудности изучаемого материала уровню развития школьников, но и включение в содержание такого материала, который, в силу возрастных особенностей развития школьников, вызывает у них интерес, стимулирует их творческую деятельность.

Например, из анализа возрастных особенностей учащихся старших классов следует, что в содержание обучения по математике нужно включать следующее.

1. Вопросы истории математики, жизни и творчества выдающихся ученых прошлого, исторические задачи и проблемы, решение которых внесло значительный вклад в развитие математики.

2. Философские вопросы математики, связанные с познанием окружающего нас мира, роли и места в этом познании математики.

3. Прикладные аспекты математики, приложение изученных теоретических методов и результатов к решению прикладных задач.

4. Некоторые вопросы современной математики, жизни и творчества современных ученых-математиков.

Критерий соответствия содержания индивидуальным особенностям школьников

Из всех учебных предметов, изучаемых в школе, геометрия требует наиболее активной работы по созданию пространственных образов и оперированию с ними.

В психологических исследованиях представлены индивидуальные различия пространственного мышления школьников. Это выражается, во-первых, в том, что индивидуальные различия в пространственном мышлении ярко обнаруживаются в процессе восприятия пространственных свойств и отношений. Здесь выделяется аналитический (т. е. постепенный, с выделением отдельных частей) и синтетический (т. е. целостный, недифференцированный) охват воспринимаемого объекта или его изображения.

Во-вторых, индивидуальные различия ярко проявляются при создании пространственных образов на наглядной основе и оперировании ими. Это сказывается в умении мысленно преобразовывать наглядный материал, а также в овладении способами его понятийной обработки, в избирательной направленности на оперирование отдельными элементами в структуре пространственного образа (его формой, величиной), пространственными отношениями, в легкости оперирования образами разной степени наглядности. Одни учащиеся при предъявлении изображения (с целью создания по нему образа) детально фиксируют все его конкретные особенности, постепенно воссоздают образ из отдельных деталей, объединяя их в единое целое. Другие охватывают в представлении сначала общий контур объекта и лишь затем мысленно наполняют его соответствующими деталями, придающими образу структурную определенность, законченность, четкую конфигурацию. Причем эти особенности проявляются у одного и того же учащегося при работе с различными видами наглядности (чертежом, моделью, рисунком и т. д.), при выполнении разных учебных заданий, что свидетельствует об их устойчивости.

В-третьих, индивидуальные различия наблюдаются в способах чувственного обобщения. У одних учащихся обобщение наглядного материала идет через детальный анализ разрозненных данных, у других оно осуществляется свернуто, быстро, причем обобщаются наиболее значимые соотношения наглядных признаков. Эта особенность обобщения рассматривается как важная предпосылка успешного овладения геометрией.

У школьников с геометрическим складом ума преобладает, как известно, наглядно-образный компонент над словесно-логическим. Они легко оперируют образным материалом, без затруднения решают задачи на наглядном материале. Хорошо развитые представления дают возможность быстро и безошибочно решать задачи в образной форме. Нередко они пытаются оперировать наглядными образами даже там, где легче опираться на словесно-логические рассуждения. Выделяются следующие типы математического склада ума:

— аналитический (аналитический или абстрактно-математический склад ума);

— геометрический (геометрический или образно-математический склад ума);

— гармонический (две модификаци абстрактного и образного типа склада ума с небольшим преобладанием одного над другим).

Учитель, работая в конкретном классе и изучив индивидуальные особенности пространственного мышления своих учеников, вне зависимости от профиля обучения, должен будет включать в содержание в том или ином объеме соответствующий наглядный материал, в котором специально выделим следующие элементы.

1. Чертежи, рисунки.
2. Стереочертежи.
3. Модели геометрических фигур (изготовленные из различного материала и в разной технике).
4. Средства ИКТ.
5. Конструирование различных геометрических ситуаций (в том числе с помощью компьютера).

Следующими важными индивидуальными особенностями учащихся, которые обязательно нужно учитывать учителю и отражать в содержании занятий, является неоднородность интереса учащихся к самой математике.

Даже у школьников, которые называют математику любимым или одним из любимых предметов, интерес к ней дифференцирован. Во-первых, одни предпочитают алгебру, другие — геометрию, что связано, как показано выше, с соответствующим типом мышления. Во-вторых, у ребят, которым больше нравится изучать геометрию, интерес к ней тоже разный. Анализ неоднократно проведенных соответствующих анкетирований показывает, что одним учащимся больше всего интересно решать геометрические задачи, другим — доказывать теоремы, третьи предпочитают приложения геометрии, а четвертые увлекаются изготовлением моделей красивых геометрических фигур, например многогранников. Вывод: учителю, опираясь на знание индивидуальных интересов своих учеников, необходимо выбирать соответствующую дозировку различных компонентов учебного материала. С одной стороны, такая работа удовлетворит индивидуальные запросы учащихся в геометрии, а с другой — будет способствовать более успешному и эффективному ее обучению.

Теперь выделим некоторые особенности профильных классов в целом. Сравним два диаметрально противоположных профиля по отношению к математике: гуманитарный и математический. С точки зрения *У. У. Сойера* [135], математиков отличают следующие характерные особенности, которые в полной мере проявляются и у учащихся математических классов.

1. Дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он до всего хочет дойти сам.

Из личных наблюдений можно добавить, что, как правило, после урока учащиеся не хотят уходить и «атакуют» учителя вопросами, а если на уроке не успели решить какую-нибудь задачу, то они обязательно будут пытаться найти ее решение. У этих ребят сформирован устойчивый интерес к математике, и они все время пытаются узнать новое, часто забегая вперед программы.

2. Желание исследовать. Математик получает удовольствие от полученных знаний и постоянно хочет знать, зачем они, где используются, как дальше преобразуются и развиваются. Ему хочется новых открытий.

3. Интерес к закономерностям. Математики умеют наблюдать, выявлять закономерности, что ведет к математическим открытиям. Причем способность к наблюдению математических закономерностей можно развивать очень рано. Определенное содержание учебного материала может развивать в учениках навык наблюдения за математическими закономерностями. В связи с этим для учащихся математических классов и близким к ним по профилю в содержании необходимо предусмотреть, специально подобрать: нестандартные задачи; исследовательские задачи; задачи на выявление математических закономерностей.

Исходя из анализа наблюдений, достаточно большого количества соответствующих анкетирований и тестирований, а также личного опыта преподавания в гуманитарных и математических классах И. М. Смирновой определены следующие *психолого-педагогические особенности* учащихся этих классов.

1. Преобладание у ребят гуманитарных классов наглядно-образного мышления. В математических классах — абстрактно-логического мышления.

2. Восприятие красоты математики направлено у учащихся гуманитарных классов на ее проявления в живой природе, в произведениях искусства, через красивые конкретные математические объекты. В то же время учащиеся математических классов красоту математики видят в изящных, необычных, неожиданных решениях задачи, доказательствах теорем.

3. Внимание на уроке у гуманитариев может быть устойчивым в среднем не более 12 мин. У учащихся математических классов этот показатель колеблется от 20 до 25 мин.

4. Среди компонентов содержания обучения у гуманитариев наибольшим интересом пользуются вопросы истории математики, прикладные аспекты, занимательный материал. Математики предпочитают решение нестандартных задач, исследовательских проблем.

5. Из форм работы на уроке гуманитарии выделяют следующие: объяснение учителем нового материала; лабораторные работы; деловые игры; выполнение индивидуальных заданий с привлечением научно-популярной литературы. Математики — решение нестандартных, проблемных, исследовательских задач.

6. Гуманитарии предпочтение отдают активным, коллективным методам работы. Например, при решении задач в классе им нравятся дискуссии, в процессе которых происходит поиск решения задач всем классом. Математики предпочитают самостоятельное решение задач.

7. У школьников гуманитарных классов богаче, чем у учащихся математических классов, воображение, сильнее проявляются эмоции.

8. В гуманитарных классах по составу больше девочек, в математических — мальчиков, фактор, который не нашел в нашей школе пока должного внимания и учета. Все курсы рассчитаны на некое бесполое, усредненное существо.

Исследования, проведенные в нашей стране и за рубежом, говорят о том, что принципиальных различий в мышлении мальчиков и девочек нет, выявлены отдельные качественные его особенности.

> Например, известно, что у мальчиков наблюдается больший интерес к алгебре, чем у девочек. Связывается это с повышенным интересом мальчиков к физическим и инженерным наукам, в которых применяется алгебра. Мальчики превосходят девочек в способности к логическим рассуждениям, зато девочки мальчиков — в точности, строгости, аккуратности, своего рода «педантичности» мышления.

Опыт работы в школе показывает, что девочки живее, острее реагируют на красивые математические объекты, больше восхищаются проявлениями математики в природе, искусстве. Поэтому, учитывая особенности восприятия девочек, особенно в гуманитарных классах, где их большинство, учителю математики совершенно необходимо включать в содержание курса геометрии соответствующий материал, а именно: исторические аспекты жизни и творчества выдающихся ученых, проявления математики в природе, красивые математические объекты, различные приложения в искусстве — живописи, архитектуре, скульптуре, декоративно-прикладном искусстве.

Критерий соответствия содержания учебно-методическому обеспечению

Этот критерий предполагает, что содержание школьного курса геометрии и в основной школе, и в старших классах определенного профиля должно охватываться учебными пособиями, научно-популярной литературой, наглядными пособиями и техническими средствами обучения в объеме, достаточном для успешного решения поставленных задач обучения.

В *учебно-методическое обеспечение* содержания школьного курса геометрии мы включаем следующие важные компоненты.

- Программа.
- Тематическое планирование.
- Учебник.
- Дидактические материалы: математические диктанты, самостоятельные и контрольные работы, тесты, задания для зачетов.
- Учебные материалы для индивидуальной работы с учащимися.
- Банк задач: устных, опорных (базовых, стандартных), повышенной трудности, нестандартных, исследовательских, прикладных, занимательных, исторических.
- Дополнительные учебные материалы для воспитания и развития учащихся (история, внутри- и межпредметные связи, прикладные аспекты, связь с современностью, занимательность, в том числе красота математики).
- Компьютерная поддержка.
- Рекомендуемая литература.

Критерий соответствия содержания имеющемуся времени

Этот критерий предполагает планирование содержания курса геометрии по занятиям, соответствие объема учебного материала каждого занятия времени, отведенному на него, а также соответствие всего объема содержания курса геометрии определенного профиля времени, отведенному на его изучение.

Подводя итог всему вышесказанному об отборе содержания курса геометрии, направленного на формирование личности обучаемых, выделим следующие приоритетные блоки проблем — аспекты содержания:

— ***общекультурный***, основной, или базовый, или стандартный (который наглядно выражается параллелепипедом, лежащим в пересечении трех параллелепипедов, изображающих содержание гуманитарной, прикладной и естественно-научной составляющих — рис. 74); ***наглядный***; ***исторический***; ***прикладной***; ***научно-популярный***; ***занимательный***, в который входит составной частью *красота* математики.

Наглядно содержание систематического школьного курса геометрии может быть выражено соответствующей табл. 19.

Таблица 19

Структура содержания систематического курса геометрии	
Элементы содержания	Аспекты содержания
• Термины • Понятия • Теоремы • Задачи • Аксиомы • Факты • Классификации	• Базовый • Наглядный • Научно-популярный • Занимательный • Исторический • Прикладной

Организация учебной информации

Организация учебной информации направлена на лучшее ее восприятие и последующее воспроизведение. По воспроизведению информации можно судить о ее усвоении, понимании, запоминании, умении практического использования. Естественно, не вся поступающая к ученику информация будет воспринята им, а тем более усвоена. Мы выделяем следующие виды учебной информации (УИ).

1. *Поступающая*.
2. *Воспринятая*.
3. *Усвоенная*.
4. *Воспроизведенная*.

На рисунке 75 наглядно с помощью диаграммы представлен процесс отбора информации. В круге наибольшего радиуса (I) изображена учебная информация, поступившая к ученику; затем (II) учебная информация, воспринятая, затем (III) усвоенная и,

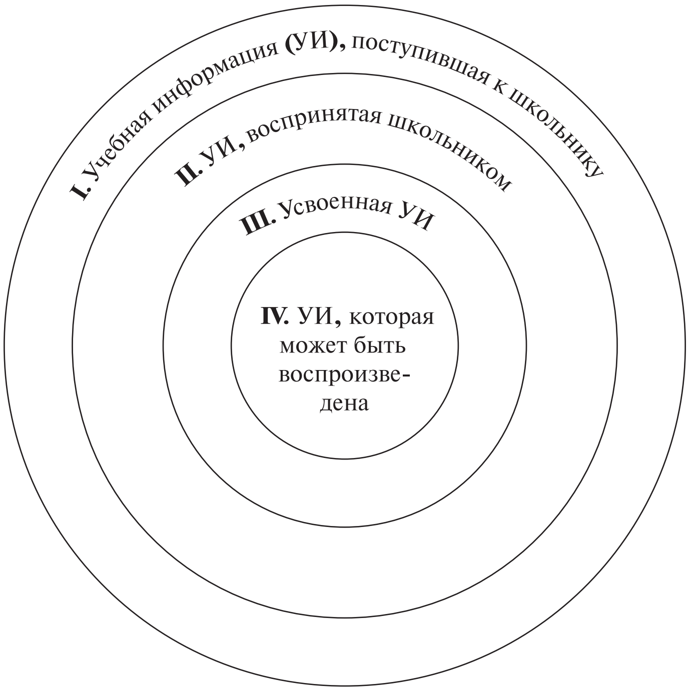
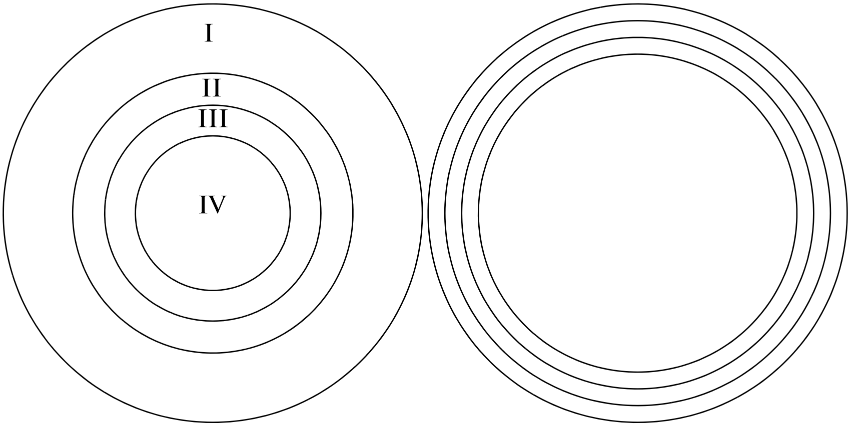


Рис. 75

наконец, (IV) учебная информация, которую ученик может воспроизвести.

Несовпадение объемов (радиусов кругов диаграммы) полученной и воспринятой, или удержанной, учебной информации связано с несколькими важными факторами. Во-первых, учебная информация, как и всякая другая информация, воспринимается учеником субъективно, избирательно. Это связано прежде всего с его общими интересами, и в частности, с интересами к геометрии, с его готовностью изучать этот предмет; способностями; видами на будущую профессию. Эта сторона восприятия учебной информации у старшеклассников непосредственно связана с профилем обучения. Сделанный вывод объективно подтверждает необходимость профильной дифференциации в старших классах, когда учащиеся уже проявляют сформировавшиеся интересы, устойчивые способности. Во-вторых, разница между поступившей информацией и воспринятой учеником зависит от ее содержания. Например, трудная теорема (обобщенная теорема Фалеса или признак параллельности двух плоскостей, кото-



а) *б*)

Рис. 76

рый доказывается методом «от противного», при этом используется чертеж, который не сочетается с реальными представлениями учеников), может дать сильно отличающиеся значения поступившей и воспринятой школьником учебной информации (рис. 76, *а*). На этой диаграмме радиус первого круга (учебная информация, поступившая к ученику) и второго круга (учебная информация, воспринятая учеником), довольно сильно отличаются друг от друга.

В то же время, если дается историческая справка, например об увлечении математикой художников Возрождения Леонардо да Винчи и А. Дюрера или о жизни Л. Эйлера в России, то радиусы соответствующих кругов диаграммы, другими словами, значения поступившей и вопринятой учебной информации, будут мало отличаться друг от друга (рис. 76, *б*).

Наконец, количество воспринятой учебной информации зависит от ее организации, т. е. ее формы, способов передачи, качества, что во многом определяется мастерством учителя, его знаниями и искусством преподавания.

При построении наилучшей, оптимальной модели курса геометрии закономерно желание добиться того, чтобы количества поступающей и усвоенной учебной информации мало отличались друг от друга. Рассмотрим пути осуществления этого.

Прежде всего, в силу сказанного выше, *у школьников необходимо сформировать готовность к изучению геометрии*. В основном это относится к учащимся старших классов, в кото-

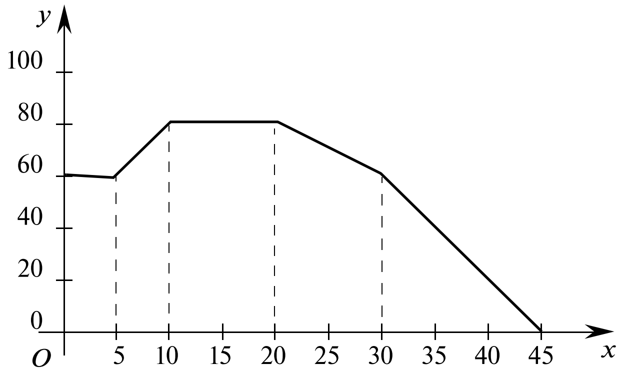


Рис. 77

рых геометрия не является профилирующим предметом. Это очень важный аспект, но он не имеет прямого отношения к организации учебной информации. Второй важный аспект рассматриваемой проблемы связан, как мы видели, с содержанием учебного материала. Третий аспект касается индивидуальных психологических особенностей восприятия и усвоения учебной информации. Итак, усвоение учебного материала зависит от следующих факторов: содержания усваиваемого материала, методов и форм обучения, индивидуальных особенностей учащихся, моментов времени урока.

Последний фактор можно наглядно представить рисунком (рис. 77, данные *В. И. Жохова*).

По горизонтальной оси *Ox* отложим минуты урока (из расчета 45-минутного урока), по вертикальной оси *Oy* — процент усвоения материала. Как видим, стопроцентного усвоения вообще не достигается, самый благоприятный период от 10-й до 20-й минуты урока, но и первые 5 минут тоже обладают большой интенсивностью, именно на них уже можно решать важные дидактические задачи урока, применять активные методы работы, например проводить устную работу или математический диктант. Зато последние 15 минут урока наименее благоприятны для усвоения. Поэтому решение важных дидактических задач, например объяснение нового материала, не рекомендуется откладывать на последнюю треть урока. Учитывая все выделенные особенности, можно предложить следующую структуру урока по геометрии для основной школы (табл. 20).

Таблица 20

Время урока (в минутах)	Этапы урока (дидактические моменты урока)
0—3	Организационный момент
3—12	Устная работа (Математический диктант) (Проверка домашнего задания)
12—27	Решение основных педагогических задач урока
27—37	Первичный контроль
37—42	Повторение
42—44	Домашнее задание
44—45	Подведение итогов урока

В старших классах удобнее проводить сдвоенные уроки по геометрии — занятия. Возможная структура такого занятия представлена в таблице 21.

Таблица 21

Время занятия (в минутах)	Этапы занятия (дидактические моменты занятия)
0—3	Организационный момент
3—15	Математический диктант (Проверка домашнего задания)
15—30	Решение основных педагогических задач урока: решение задач нового типа
30—40	Повторение пройденного
40—45	Индивидуальные задания учащимся
45—53	Устная работа
53—73	Решение основных педагогических задач урока: объяснение нового материала
73—81	Первичное закрепление нового материала
81—87	Занимательный момент
87—90	Домашнее задание. Итоги занятия

Организация учебной информации по своей значимости для курса геометрии неоднородна. Она имеет следующие виды:

1. *Основная*.

2. *Вспомогательная*.

3. *Дополнительная*.

Учащиеся должны четко представлять себе, с каким видом информации они работают в каждый отдельный момент урока, должны понимать, что обязательному усвоению подлежит основная учебная информация. Заметим, что усвоенная учеником дополнительная учебная информация влияет, например, на определение его рейтинга в классе, что стало весьма актуально в предпрофильной подготовке.

В организации учебной информации выделим такие структурные элементы: подача учебной информации; переработка учебной информации; хранение учебной информации.

Для хранения вся поступающая учебная информация кодируется следующим образом:

а) виды информации обозначаются определенными значками, например вспомогательная учебная информация помечается значком «#», дополнительная — «*», основная не имеет никакого значка;

б) элементы содержания кодируются следующим образом:

A_1 — первая аксиома; T_{II} — теорема II (основные теоремы нумеруются римскими числами); $З_{i,j}$ — задача, где i — номер урока, на котором она решалась, j — ее порядковый номер на этом уроке; задачи делятся на устные, основные (базовые, стандартные) и дополнительные (повышенной трудности, нестандартные, исследовательские, прикладные и практические, занимательные, исторические). Устные задачи помечаются кружком («$^{\circ}$»), дополнительные — звездочкой («*»).

Например, $З^{\circ}{}_{1,2}$ означает вторая устная задача с первого урока, $З^{*}{}_{27,1}$ — первая дополнительная задача с двадцать седьмого урока и т. д.;

$И_{10}$ — историческая справка с десятого урока; $ЗМ_{44}$ — так обозначается занимательный материал, в данном случае с сорок четвертого урока;

$МД_i$ — математический диктант с i-го урока;

$СР_i$ — самостоятельная работа с i-го урока;

КР № 1 — первая контрольная работа;

$ИЗ_i$ — индивидуальное задание с i-го урока.

Такая кодировка учебной информации облегчает ученикам ее поиск. Нужная для школьников информация находится в тетрадях, но в классе (по желанию ученики делают это и у себя дома) созданы информационные каталоги (на компьютере), которые в совокупности представляют из себя упрощенный вариант информационно-поисковой системы, состоящей из следующих четырех каталогов.

1. *Урочно-справочный.*
2. *Алфавитно-предметный.*
3. *Банк задач.*
4. *Банк курсов по выбору, элективных курсов.*

В первом, урочно-справочном каталоге, информация располагается так же, как в тетрадях учеников, по урокам, т. е. при этом упорядочивается по номеру урока. При этом предлагаются подробные конспекты уроков. Каталог носит динамический характер, новая информация поступает в него после каждого урока. Его нельзя предъявить учащимся сразу весь, так как реальный учебный процесс неизбежно внесет свои коррективы в смоделированный учебный процесс. Информация поступает в него по мере прохождения уроков.

Второй каталог, алфавитно-предметный, содержит названия, темы, наименования, ссылки на уроки, на которых представляется та или иная учебная информация. Последовательность рубрик в этом каталоге располагается по алфавиту:

Аксиомы → Занимательный материал → Зачеты →
Индивидуальные задания → История → Коллекции книг →
Контрольные работы → Конференции → Круглые столы →
Лабораторный практикум → Математические диктанты →
Математический калейдоскоп → Моделирование →
Программа → Проекты → Рефераты → Сайты →
Самостоятельные работы → Справки → Теоремы →
Тесты → Экзамены.

Из данного каталога исключены задачи, для которых предусмотрен отдельный третий каталог. Внутри каждой представленной рубрики порядок устанавливается или по порядковому номеру (для аксиом, теорем, индивидуальных заданий, математических диктантов, самостоятельных и контрольных работ), или по названию в алфавитном порядке. Например, рубрика «История» имеет несколько основных разделов, которые упорядочены по своим названиям:

Биографии → Открытия → Исторические задачи.

Внутри каждого раздела сведения еще раз упорядочиваются опять по алфавиту.

Приведем пример. В разделе «*Биографии*» карточки располагаются в следующей последовательности:

Александров А. Д. → Андреев Н. Н. → Аполлоний → Архимед → Л. да Винчи → Дюрер А. → Евклид → Канторович Л. В. → Киселев А. П. → Колмогоров А. Н. → ...
... → Эйлер Л. → Яглом И. М.

Этот каталог можно сформировать полностью на весь учебный год или, по усмотрению учителя, на половину года, чтобы ученики видели перспективы изучаемого курса. Для математических диктантов, самостоятельных, контрольных работ, зачетов, тестов даются репетиционные, примерные варианты.

Третий специальный каталог называется банком задач по курсу геометрии. Все задачи распределены сначала на три раздела:

1. *Устные*.
2. *Основные*, *стандартные*.
3. *Дополнительные*.

Задачи в каждом разделе располагаются по темам. Несколько сложнее устроен раздел «Дополнительные задачи». Он, в свою очередь, состоит из нескольких разделов, а именно задачи:

1) *Повышенной трудности*.
2) *Нестандартные*.
3) *Исследовательские* (*поисковые, проблемные, эвристические, творческие*).
4) *Прикладные*, *практические*.
5) *Занимательные*.

Заметим, что исторические задачи помещены во второй каталог в рубрику «*История*». Причем в банк помещены задачи, которые могут и не обсуждаться в классе, т. е. представлено избыточное количество задач по курсу. Правильное их решение повышает рейтинг ученика в классе.

В четвертом каталоге, банке элективных курсов, предусмотрено три раздела: *естественно-научный*, *прикладной* и *гуманитарный*. В каждом из них учебная информация располагается по таким же рубрикам, как во втором, алфавитно-предметном каталоге, только еще добавлены задачи.

Например, представим программу геометрического курса по выбору гуманитарного направления для учащихся 9 класса. Она включает в себя такие темы (каждое занятие рассчитано на 2 урока).

1. История происхождения геометрических терминов.
2. Три знаменитые задачи древности на построение.
3. Великие теоремы геометрии.

4. Золотое сечение и связанные с ним вопросы.
5. Уникурсальные графы.
6. Проблема четырех красок.
7. Паркеты.
8. Геометрия в искусстве.

Оптимальное время, отводимое на каждый курс по выбору в основной школе, должно занимать приблизительно 17 часов (2 часа в неделю). За это время учащихся можно познакомить с основными идеями, аспектами предлагаемой тематики, с другой стороны, не очень их перегрузить и утомить. Кроме этого, ученик за год сможет набрать в свой портфолио (небалльный) четыре курса (всего 68 часов за год). Учащиеся должны принимать непосредственное участие в организации учебной деятельности. Например, сами выбирать форму своей аттестации: традиционную контрольную работу или зачет, написание реферата или подготовку проекта и т. п. Геометрические курсы по выбору должны занять свое достойное место в предпрофильной подготовке учащихся и помочь им правильно определить направление обучения в старших классах.

Опыт внедрения рассмотренной информационно-поисковой системы в практику работы школы показал, что такая организация учебной информации обладает рядом важных преимуществ перед традиционной, а именно учащиеся:

— могут осуществлять целенаправленный поиск нужной учебной информации;

— не на словах, а на деле учатся работать с информационно-поисковой системой, овладевают элементарными навыками и приемами работы с ней;

— видят перспективу содержания учебного курса, могут выбрать, в соответствии со своими интересами и вкусами, индивидуальные задания;

— привыкают к самостоятельным поступкам, для отставших по каким-либо причинам от класса учащихся становится доступным весь пропущенный материал;

— благодаря такой организации учебной информации устанавливается яркая межпредметная связь с курсом информатики, учащиеся на себе, на конкретном примере, убеждаются в необходимости изучения теории информатики и видят реальную помощь, которую она оказывает им, например при изучении курса геометрии.

§ 12. Методы обучения геометрии

Следующим шагом после отбора содержания и организации учебной информации для курса геометрии, направленного на формирование личности учащихся, является выбор методов обучения, соответствующих разрабатываемому подходу.

Перечисленные возможности содержания курса геометрии для своей реализации требуют применения таких методов и форм обучения, которые побуждали бы учащихся к самостоятельной, поисковой, исследовательской деятельности, активизировали бы творчество учащихся, их личность в целом. *Метод рассматривается как способ существования деятельности*, в случае и учебной деятельности, который ведет к достижению поставленных целей. Отечественной школой накоплен богатый опыт по организации и формированию различных аспектов учебной деятельности школьников. Новые задачи перестройки школьного образования, в частности разработка и внедрение идей гуманизации, гуманитаризации, уровневой и профильной дифференциации, личностно-ориентированного обучения, требуют непрерывного пересмотра и усложнения задач, постоянного обновления методов их решения.

Открытая методика

Новые ориентиры, стоящие перед школой, требуют и новых подходов к организации учебной деятельности. И. М. Смирновой была разработана специальная методика, названная *открытой методикой*.

Заметим, что здесь не имеется в виду теория открытого обучения, нашедшего признание в некоторых зарубежных школах. Особенно она распространена в Соединенных Штатах Америки. Если говорить упрощенно, то с формальной стороны признаками открытого обучения является отсутствие обязательного учебного плана, программы, учащиеся сами могут разрабатывать содержание изучаемого предмета, выбирать виды учебной деятельности, темп учения, его сроки, ликвидируется четко регламентированная классно-урочная система. Исследователи открытого обучения указывали отрицательные стороны такого обучения, среди которых: падение уровня знаний, твердых умений, появление различных нарушений и беспорядков. Эта критика, естественно, справедлива. Вместе с тем, нужно отметить и положительные стороны открытого обучения. Во-первых, стремление к максимальному развитию каждого ученика. Во-вторых, свободу выбора для ученика.

Основные *принципы* открытой методики.

I. *Направленность обучения на развитие личности ученика*, формирование для каждого школьника своего собственного индивидуального стиля деятельности.

II. *Вариативность обучения*, предполагающая разнообразие его содержания, форм и методов. Этот принцип обеспечивает каждому ученику возможность выбора учебного материала в соответствии со своими индивидуальными возможностями и интересами, предпочтительными формами и методами работы. При этом основное содержание образования не может быть свободным, добровольным или выборочным, оно необходимо для общего развития учащихся. Однако, например, для старших школьников можно представить большую самостоятельность в выборе школы, профиля класса, элективов, дополнительно осваиваемого материала в соответствии со своими индивидуальными возможностями, запросами и интересами.

III. *Валидность обучения*, означающая достаточно высокую значимость математического материала для достижения результатов обучения, решения задач образования, воспитания и развития.

IV. *Успешность обучения*, состоящая в том, что у каждого ученика должен быть свой, пусть маленький, но собственный успех в обучении. Успех рождает вдохновение, уверенность в своих силах. Задача учителя — помочь каждому своему ученику достичь такого своего успеха.

V. *Наличие устойчивого интереса к обучению*. Интерес является необходимым условием процесса обучения. Чем ниже интерес, тем формальнее обучение, ниже его результаты. Отсутствие интереса приводит к низкому качеству обучения, быстрому забыванию и даже полной потере приобретенных знаний, умений и навыков. Чем выше интерес, тем активнее идет процесс обучения, выше его результаты.

VI. *Открытость методической работы учителя*. Речь идет не только о понимании учениками целей обучения, но и о том, чтобы школьники представляли себе, почему, например, они доказывают некоторую теорему, или решают данную задачу, или чем хорошо предложенное индивидуальное задание и т. д. Ученикам должно нравиться построение уроков, их основные этапы, техника проведения каждого из них. Именно в этом смысле данная методика названа открытой.

Учащиеся должны стать непосредственными участниками методической работы учителя, который подробно объясняет им цели своих методический действий, поступков, приемов. Причем это относится ко всем основным компонентам учебного процесса: целям, содержанию, методам и формам обучения. То, что вызывает неодобрение, неприятие всего класса, должно уйти из учебного процесса. Ученики сознательно принимают всю методическую работу учителя. Ребята не должны воспринимать учителя как человека, который объясняет новый материал, потом спрашивает его, ловит ученика на незнании и при случае ставит двойку. Такой взгляд на учителя явно не будет способствовать успешному решению поставленных задач, какими бы благими они ни были.

> Несколько лет назад, например, автор в своем старшем гуманитарном классе объявила ребятам, что вместе с ними будет писать учебник по стереометрии, что без их помощи (что соответствует действительности) хорошей книги не получится. Ребята активно включились в эту деятельность, ведь им предложили серьезное, взрослое, нужное дело. Никогда не следует жалеть времени на объяснение своих действий, это способствует подключению всего класса к активной учебной деятельности и не жалеть времени на то, чтобы помочь каждому ученику раскрыть себя. В том же классе (гуманитарном, историко-философском) три девочки не могли добиться значительных успехов ни при доказательстве теорем, ни при решении основных задач. Но оказалось, что одна из них прекрасно делает модели многогранников, причем ей удавались сложные — модели полуправильных и правильных звездчатых многогранников, другая любит решать и решает правильно дополнительные занимательные задачи, а третья с успехом отвечает на вопросы устной работы. При таких достижениях невозможно назвать этих учениц неспособными к геометрии или, как часто бывает в школе, приклеить ярлык «слабый, ни на что не годящийся ученик». Если школьник действительно почувствует к себе такое отношение, он будет потерян для учителя, и в результате пострадает весь процесс обучения геометрии в целом. В этом же классе была такая ученица, которая в начале 10 класса даже не пыталась ничего понять, твердо уверовав в свою полную неспособность к геометрии. Но постепенно стало проясняться, что это совсем не так. Она смогла проявить себя в устной работе в классе, в решении домашних задач, но главное оказалась непревзойденной рассказчицей исторических математических экскурсов.

Приведенные примеры относятся к классам, где геометрия не является профилирующим предметом. Но и в математических классах возникают подобные проблемы, ведь у одних ребят ярко выражены и проявляются математические способности, а другие имеют хорошие общие способности. Из сказанного следует важный вывод о необходимости нахождения и формирования для каждого ученика своего собственного индивидуального стиля деятельности. Успех приходит тогда, когда делаешь то, что лучше всего получается, а лучше всего получается, когда занимаешься делом, которое наиболее соответствует личным качествам. Индивидуальный стиль деятельности, возникая сначала на основе некоторых задатков, склонностей ученика, создает активные положительные мотивы, положительное отношение к деятельности, что, в свою очередь, приводит к овладению другими, более сложными, методами учебной деятельности. Это приводит к естественному повышению эффективности обучения в целом.

Классификация методов обучения

В дидактике рассматриваются различные классификации методов обучения, в зависимости от того, что берется в качестве основания для нее. Например, в классификацию *по источникам знаний* включаются следующие методы: рассказ, беседа, лекция, работа с учебником, экскурсия и т. п. *По характеру учебных задач* включаются следующие методы.

1. Приобретение учащимися новых знаний:

а) подготовка к слушанию объяснения учителя;

б) изложение учебного материала учителем;

в) осмысление и закрепление учащимися материала после объяснения учителем;

г) приобретение учащимися новых знаний без предварительного их изложения учителем.

2. Формирование у школьников умений и навыков.

3. Практика учащихся в применении знаний.

4. Практика учащихся в творческой деятельности.

5. Закрепление знаний путем повторения.

6. Проверка знаний, умений и навыков.

Исследования проблемы оптимизации учебно-воспитательного процесса в школе привели к классификации методов обучения на основе характера учебной деятельности [13]. Она включает в себя следующие методы.

1) Словесные методы: рассказ, беседа, учебная лекция.

2) Наглядные методы: иллюстрации, демонстрации.

3) Практические методы: письменные упражнения, лабораторные упражнения, работа в ученических бригадах.

4) Репродуктивные и проблемно-поисковые методы. Эти методы применяются на практике с помощью словесных, наглядных и практических методов. Например, проблемный рассказ, проблемно построенная лекция, проблемно-поисковая беседа и т. п.

5) Логические методы: анализ, синтез, выделение главного, сравнение, обобщение, конкретизация, доказательство, определение понятий.

6) Методы самостоятельной работы: с книгой, по решению задач, с рисунками, схемами, таблицами, моделями и т. д.

7) Методы стимулирования и мотивации учебной деятельности школьников: формирование познавательных интересов, формирование чувства долга и ответственности в учении.

8) Методы контроля и самоконтроля: фронтальный опрос, контрольная работа, самостоятельная работа, домашнее задание, итоговое повторение и т. п.

Одной из самых используемых и цитируемых является классификация по степени самостоятельности учащихся в учебной деятельности. Она включает в себя следующие методы [48].

— Информационно-рецептивный.

— Репродуктивный.

— Проблемный.

— Частично-поисковый, или эвристический.

— Исследовательский.

В названиях методов заключена их специфика. В первом случае ребята слушают и воспринимают учебную информацию, во втором — воспроизводят (англ. *reproduction* — воспроизведение) полученную информацию. При проблемном методе ученики под руководством учителя формулируют и решают некоторую проблему. Эвристический метод предполагает, что учитель ставит перед учащимися проблему, разбивает ее на подпроблемы, которые решаются ребятами самостоятельно. Наконец, при исследовательском методе ученики самостоятельно решают проблемы от ее формулировки до окончательного результата.

Задача учителя заключается в том, чтобы, в зависимости от конкретных целей, условий, возможностей учащихся, на разных этапах обучения выбрать оптимальный набор методов, разумное их сочетание для достижения планируемых результатов. Представим разработанные И. М. Смирновой критерии отбора методов обучения (на примере школьной геометрии).

Критерии отбора методов обучения

I. Критерий соответствия целям и задачам обучения.

Он предполагает, что при выборе методов обучения необходимо исходить из общих целей преподавания геометрии и из конкретных задач образования, воспитания и развития учащихся, которые будут реализовываться на данном этапе урока и на протяжении изучения всего курса. Роль методов обучения не ограничивается только усвоением содержания курса геометрии. Методы обучения играют первостепенную роль в выработке не только знаний, но и умений, и навыков учащихся. Среди них особо выделим умения, ключевые компетенции:

— по определению понятий, доказательству теорем, решению задач, определяемых программой курса;

— слушать объяснение нового материала, выделять главное, существенное, вести конспект урока;

— работать с книгой: учебником по геометрии, учебно-методической и научно-популярной литературой;

— подготовить и сделать сообщение, доклад по прочитанному материалу;

— написать реферат на определенную тему с самостоятельным подбором и изучением соответствующей литературы;

— проводить самостоятельное исследование поставленной проблемы, организации проекта, включающие в себя: изучение необходимой литературы, поиски и нахождение решения проблемы, доказательство полученных результатов, доклад по итогам проведенных исследований.

Последнее умение является итогом всей предшествующей деятельности учащегося, к этому нужно постепенно подводить на протяжении всего изучаемого курса геометрии; планировать темы исследований, ставить перед учащимися соответствующие цели и задачи, вести контроль за достижением этих целей и задач.

Опора на устойчивый интерес учащихся к обучению позволяет значительно повысить качество контроля за учебной деятельностью школьников, ориентировать его не на мелочную опеку, а на достижение важных задач обучения, оказывать своевременную помощь в преодолении возникающих трудностей, значительно расширить функции самоконтроля ребят.

II. Критерий соответствия содержанию.

Он предполагает, что использование тех или иных методов обучения на уроках непосредственно зависит от содержания учебного материала. В частности, для введения новых понятий эффективным средством повышения активности учащихся является конструирование определений этих понятий (исходя из наглядных соображений, рассмотрения задач, приводящих к возникновению этих понятий).

Рассмотрение исторического материала, истории возникновения и развития того или иного вопроса требует проведения специальных лекций или рассказов, бесед учителя, сообщений, докладов, презентаций, подготовленных учениками.

При изучении прикладных аспектов, решении задач прикладного характера наиболее целесообразным является применение проблемного, эвристического, или частично-поискового, методов обучения и т. п.

III. Критерий соответствия возрастным и индивидуальным особенностям развития школьников.

Этот критерий означает выбор таких методов обучения, которые в наибольшей степени отвечают возрастным особенностям ребят подросткового возраста, стимулируют их активность, способствуют достижению целей обучения. Например, анализ возрастных ососбенностей развития старшеклассников, опыт проведения занятий с ними показывают, что для этого возраста можно эффективно использовать методы обучения, ориентированные на самостоятельную, творческую, исследовательскую работу. Учащимся старших классов нравятся такие формы деятельности, как коллективные дискуссии, лабораторно-практические работы, самостоятельное изучение литературы, подготовка презентаций, выполнение проектов, выступление с индивидуальными заданиями и т. д.

IV. Критерий соответствия уровню и профилю обучения.

Естественно, при выборе методов обучения в основной школе мы должны ориентироваться на уровень усвоения учащимися предлагаемого геометрического учебного материала, заложенного в стандарте общего образования, Фундаментальном ядре содержания общего образования [146]. Заметим, что у ребят уровня выравнивания плохо развиты навыки выделения главного, самостоятельность мышления, низкий темп продвижения, чтения, письма, вычислений и т. п. Их, как правило, больше интересует практическая работа, нежели теоретические занятия. При объяснении нового материала для них специально следует выделять наиболее трудные места и замедлять темп объяснения. Им необходимо давать соответствующие упражнения, конкретно указав тип решения задачи, например «на применение теоремы Пифагора», «на составление пропорции», «на рассмотрение подобных треугольников». Можно дать поясняющий рисунок, схему решения, сообщить ответ для самоконтроля, поставить наводящие вопросы.

Наоборот, для более подготовленных учащихся на продвинутом уровне необходимо увеличить объем заданий, применять проблемные методы, больше уделять внимания самостоятельной работе.

В качестве примера рассмотрим задачу по теме «Четырехугольники» курса геометрии основной школы и сформулируем ее для разных уровней усвоения учебного материала.

1. *Уровень выравнивания*. Докажите, что середины сторон (выпуклого) четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Докажите, что площадь полученного параллелограмма равна половине площади данного четырехугольника.

Указание. Для решения задачи проведите какую-нибудь диагональ данного четырехугольника и рассмотрите образовавшиеся треугольники.

2. *Базовый*, *основной уровень*. Какой четырехугольник получится, если последовательно соединить середины сторон (выпуклого) четырехугольника? Найдите площадь получившегося четырехугольника, если площадь данного четырехугольника равна 16 см^2.

3. *Продвинутый уровень*. Какой четырехугольник получится, если последовательно соединить середины сторон (выпуклого) четырехугольника? Найдите площадь получившегося четырехугольника, если площадь данного четырехугольника равна Q. В каком случае полученный четырехугольник будет: а) параллелограммом; б) прямоугольником; в) ромбом; г) квадратом?

4. *Творческий уровень*. Докажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон (выпуклого) четырехугольника, делит пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей этого четырехугольника.

В старших классах выбор методов во многом определяется профилями обучения. Так, учащиеся гуманитарных классов предпочитают коллективные формы работы, совместное обсуждение сообщений, решений задач, любят объяснение нового материала учителем, охотно участвуют в различного рода дискуссиях и деловых играх. Напротив, учащиеся естественно-научного и математического профилей обучения отдают предпочтение самостоятельным методам работы: решению задач, выполнению индивидуальных заданий, самостоятельных работ.

Выбор методов обучения не менее важная, по сравнению с отбором содержания учебного материала, каждодневная методическая работа учителя.

Представим подробно некоторые методы учебной деятельности, отвечающие предложенным принципам открытой методики и выделенным критериям отбора методов обучения. Они способствуют активизации учащихся, формированию их интересов, развитию творчества.

Устная работа заняла достойное место в начальных и младших 5—6 классах в преподавании математики, значительно меньше ей уделяется внимания в 7—9 классах, и практически полностью она игнорируется в старших классах. Вместе с тем, некоторые дидактические функции устной работы, например такие, как подготовка учащихся к работе на уроке, в частности к восприятию нового материала; систематическое повторение пройденного; развитие учащихся, остаются не менее актуальными и для учащихся средних и старших классов. Кроме этого, устная работа активизирует учебную деятельность учащихся. Это связано как с содержанием, так и с формой проведения. Содержание устной работы должно, как правило, включать в себя упражнения четырех типов.

1. Упражнения на закрепление и отработку текущего материала.

2. Упражнения на повторение.

3. Упражнения с элементами творчества. Это может быть, например, задача с новой для учащихся геометрической ситуацией или элементами подготовки к восприятию нового материала.

4. Упражнения развивающего, занимательного характера.

При планировании устной работы необходимо иметь в виду, что ее продолжительность не должна превышать 10 мин (оптимально 7—8 мин). Начинать устную работу желательно с легкого задания, чтобы не подавить инициативу ребят, постепенно повышая трудность задач и вводя элементы творчества. Устная работа — это хорошее активное мобилизующее, настраивающее на работу начало урока. Для стимулирования активности и инициативы учащихся, возможности себя проявить можно ввести следующую систему оценок во время устной работы: за каждый ответ учащийся получает «+», «–» или «±», «∓». Если учащийся (может быть, за несколько уроков) набрал пять представленных знаков, например, все «+», то он получает оценку — «5», за четыре «+» и один «–» — оценку «4» и т. д., учитываются все возможные комбинации сочетания четырех знаков. В соответствии с провозглашенными принципами открытой методики, такая система оценки устных ответов должна быть принята учащимися. Опыт работы в школе показывает, что она с успехом принимается учащимися и нравится им. Причины этого заключаются в том, что она позволяет довольно гибко реагировать на ответы, ребята могут проявить себя, сами добиться хорошей оценки.

В качестве примера рассмотрим подборку устных упражнений по некоторым важным темам школьного курса геометрии [132, 133].

ТЕМА «ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ»

1. Сколько окружностей можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки, не принадлежащие одной прямой?

2. Может ли окружность проходить через три заданные точки, принадлежащие одной прямой?

3. Сколько общих точек могут иметь две различные окружности?

4. Какую фигуру образуют центры окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку?

5. Какую фигуру образуют центры окружностей различных радиусов, проходящих через две данные точки?

6. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?

7. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 10 см больше радиуса этой же окружности.

8. Верно ли следующее утверждение: «Равные хорды окружности одинаково удалены от ее центра»?

9. Сформулируйте утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи 8. Верно ли оно?

10. В окружности на равном расстоянии от центра проведены хорды AB и CD. Чему равна хорда AB, если хорда CD равна 8 см?

11. В окружности проведены две равные хорды, одна из которых удалена от центра на 2 см. На каком расстоянии от центра находится другая хорда?

12. Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.

13. Из данной точки окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между диаметром и хордой.

14. Из данной точки на окружности проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу окружности. Найдите угол между ними.

15. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.

16. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.

17. Могут ли три параллельные друг другу хорды окружности быть равными друг другу?

18. На рисунке изображена фигура, которая называется кольцом. Сформулируйте определение этой фигуры.

19. Как найти центр окружности, если он неизвестен?

20. Какую линию описывает центр круга, катящегося по прямой линии?

ТЕМА «СФЕРА И ШАР»

21. Что является сечением: а) сферы; б) шара плоскостью?

22. При каком условии сечения шара плоскостью: а) равны; б) имеют разные площади, какое больше?

23. Какое сечение шара плоскостью называется большим кругом?

24. Какое сечение шара плоскостью имеет наибольшую площадь?

25. Верно ли утверждение о том, что через две точки сферы проходит один большой круг?

26. Сколько окружностей большого круга можно провести через точку шаровой поверхности?

27. Какая фигура является пересечением двух больших кругов шара?

28. Через какие две точки шаровой поверхности можно провести несколько окружностей большого круга?

29. Через всякие ли три точки можно провести сферу? Как провести сферу через три точки, не принадлежащие одной прямой? Сколько сфер можно провести через четыре точки, не принадлежащие одной плоскости?

30. Верно ли, что окружность лежит на сфере, если она имеет со сферой: а) две общие точки; б) три общие точки?

31. Сколько общих точек может иметь сфера и: а) прямая; б) плоскость; в) другая сфера?

32. Шар, радиус которого равен 5 см, пересечен плоскостью на расстоянии 4 см от центра. Найдите площадь сечения.

33. Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная к радиусу. Какую часть площади большого круга составляет площадь круга, полученного в сечении?

34. В пространстве даны два круга. Как узнать, являются ли они сечениями одного и того же шара?

35. Как определить центр сферы, проходящей через окружность и точку, не принадлежащую ей?

36. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере таким образом, чтобы расстояния между любыми двумя точками были равны?

37. Что называется касательной плоскостью к сфере и касательной прямой к сфере? Какими свойствами они обладают?

38. Где находится центр шара, если известна окружность на его поверхности и касательная плоскость в точке, принадлежащей окружности?

39. Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проведена сфера радиуса R. Какой величины должен быть радиус сферы, чтобы задача имела решение? При каком условии через эти три точки проходит: а) хотя бы одна сфера; б) только одна сфера?

40. Можно ли к любым двум сферам провести общую касательную прямую?

41. Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, лежащую вне сферы?

42. Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

ОТВЕТЫ

1. а), б) Бесконечно много; в) одну. **2.** Нет. **3.** Одну или две. **4.** Окружность с центром в данной точке и данного радиуса. **5.** Серединный перпендикуляр отрезка, концами которого являются данные точки. **6.** Бесконечно много. **7.** 20 см. **8.** Да. **9.** «Хорды окружности, одинаково удаленные от ее центра, равны». Это верное утверждение. **10.** 8 см. **11.** 2 см. **12.** 10 см. **13.** 60°. **14.** 120°. **15.** 15 см. **16.** 12 см. **17.** Нет. **18.** Кольцом называется фигура, заключенная между окружностями, имеющими общий центр и разные радиусы (концентрическими окружностями). **19.** Нужно взять прямоугольный треугольник и совместить вершину его прямого угла с любой точкой окружности, по катетам провести хорды, концы этих хорд образуют отрезок, являющийся диаметром данной окружности. Затем нужно повторить эту операцию с другой точкой окружности, получится еще один диаметр. Точка пересечения диаметров будет центром данной окружности. **20.** Прямую.

21. а) Окружность; б) круг. **22.** а) Если они находятся на равном расстоянии от его центра, в частности, проходят через центр сферы; б) если они находятся на разных расстояниях от его центра, больше то, которое ближе к центру. **23.** Сечение, проходящее через центр. **24.** Сечение большого круга. **25.** Да, если точки не принадлежат одному диаметру; нет, в противном случае. **26.** Бесконечно много. **27.** Отрезок, который является диаметром данного шара. **28.** Через концы диаметра. **29.** Нет, точки не должны принадлежать одной прямой. Центр сферы принадлежит ГМТ, одинаково удаленных от трех точек, не принадлежащих одной прямой (перпендикуляр к плоскости, определяемой этими точками, и проходящий через центр окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются данные точки). Одну. **30.** а) Нет; б) да. **31.** а) Две; одну; ни одной; б) бесконечно много точек, принадлежащих окружности; одну; ни одной; в) бесконечно много точек, принадлежащих окружности; одну; ни одной. **32.** 9π см^2. **33.** 0,75 площади большого круга. **34.** Нужно через их центры провести перпендикуляры к их плоскостям. Если они пересекутся, то данные круги являются сечениями одного и того же шара. **35.** Через данную точку и центр данной окружности проведем плоскость, перпендикулярную плоскости этой окружности; через две точки пересечения построенной плоскости с данной окружностью и данную точку проведем окружность; ее центр будет центром сферы. **36.** 4 точки. Они служат вершинами правильного тетраэдра, вписанного в данную сферу. **37.** Плоскость, имеющая со сферой лишь одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере. Касательной прямой к сфере называется прямая, лежащая в касательной плоскости к сфере и проходящая через точку касания. Свойства: касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания; касательная прямая имеет лишь одну общую точку со сферой и перпендикулярна к ее радиусу, проведенному в точку касания; все касательные к сфере, проведенные из одной внешней точки, равны между собой. **38.** Центр шара находится на пересечении перпендикуляров, один из которых проведен к плоскости окружности через ее центр, а другой — к данной плоскости через точку, заданную на окружности. **39.** При $R \geqslant r$, где r — радиус окружности, проходящей через данные три точки. а) При $R \geqslant r$; б) при $R = r$. **40.** Можно, при условии, что одна из них не лежит внутри другой. **41.** а) Две; б) бесконечно много. **42.** Окружностью.

Диалоговая культура учащихся

В устной работе особенно ярко проявляется еще один аспект открытой методики — возможности для формирования и развития *диалоговой культуры* учащихся. Построение устной работы идет в форме:

Вопрос учителя → Ответ ученика.

Умение ставить, формулировать и отвечать на вопросы является основной частью диалоговой культуры человека. Для выяснения функции вопросов воспользуемся таблицей 22 [113].

Таблица 22

Функции вопросов	
Познавательная	Коммуникативная
• Собственно познавательная (получение новой информации от другого человека) • Регуляторная • Рефлексивная • Исследовательская	• Эмоциональное сопереживание • Побуждение к действию • Установление контакта

Вопрос выступает как толчок к началу деятельности, в случае учебной деятельности, выражением начала творческой активности учащегося. Очень важно, чтобы ученик научился сам формулировать вопросы. Конечно, прежде всего в классе должна царить такая атмосфера, при которой любой ученик не боялся бы, не стеснялся задавать интересующие его познавательные вопросы. Например: «Почему плоскость не имеет толщины?», «Почему, если точка — это объект, размерами которого можно пренебречь, города или звезды на соответствующих картах обозначаются точками?» и т. д. Вопросы — важная часть диалоговой культуры, которая является элементом общей культуры современного человека. Диалоговая культура — это умение вести диалог с собеседником, т. е. умение общаться, убеждать, слушать его. Это умение вести диалог с компьютером. В настоящее время создаются даже школы диалоговых культур, правда, математика в них представлена пока только лишь в начальных классах.

Для формирования элементов диалоговой культуры в обучении нужно вводить соответствующие методы учебной деятельности. Одним из них является *дискуссия*, тем более, что она как нельзя лучше соответствует возрастным особенностям подростков. Многие учителя придерживаются того мнения, что дискуссии мешают проведению уроков, отрывают от прохождения программы, что это лишняя трата времени. При этом они не задумываются над преимуществами, которые дает дискуссия. Она стимулирует активизацию учения, повышение интереса к изучаемому материалу, лучшее его усвоение. Темы дискуссий могут быть самыми разнообразными. Например, интересно проходят в старших классах дискуссии, в которых используются исторические факты, возникновение и развитие некоторых теорий. У нас, например, очень интересно прошла дискуссия об открытии неевклидовой геометрии. Учащимся был представлен непростой путь попыток доказательства знаменитого V постулата Евклида, начиная с работ древнегреческих математиков и кончая революционным шагом Н. И. Лобачевского.

Дискуссия может быть посвящена и не такой обширной теме, она может возникнуть и при изучении обычных учебных вопросов на любом уроке. Например, при доказательстве теоремы — признака параллельности двух плоскостей, где используется метод доказательства от противного. На доске возникает чертеж нереальной пространственной ситуации. Учащиеся не могут смириться с мыслью, что по чертежу неправильной ситуации можно сделать правильный вывод, и возникает жаркий спор. Продолжением этой дискуссии является знакомство учащихся с так называемыми невозможными объектами (о которых речь шла выше, в параграфе 9 главы II).

Дискуссия может возникнуть стихийно на уроке при обсуждении какой-нибудь допущенной учеником ошибки.

Например, в нашей практике возникло живое обсуждение того, какие же все-таки многогранники называются правильными звездчатыми, а началось все с того, что один ученик отнес звездчатый октаэдр И. Кеплера (восьмиугольная звезда — *Stella octangula*, рис. 78) к правильным звездчатым многогранникам. Подробно эти многогранники представлены в работах [129, 131].

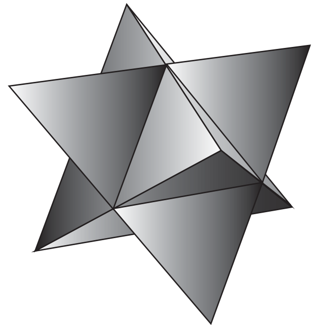


Рис. 78

Вопросы, подлежащие обсуждению, дискуссионные вопросы, могут специально планироваться учителем. Они должны найти отражение в методическом обеспечении каждой темы курса геометрии.

Плодотворные дискуссии возникают при обсуждении индивидуальных заданий, выполняемых учениками. *Индивидуальные задания* являются одним из методов учебной деятельности. В открытой методике была специально разработана система индивидуальных заданий по всему курсу геометрии страших классов, которая была введена в информационно-поисковую систему (о ней шла речь в предыдущем параграфе настоящей главы). Причем для всех профилей обучения была создана полная система индивидуальных заданий по всем выделенным аспектам содержания. Это было сделано для того, чтобы представить учащимся все разнообразие индивидуальных заданий; для того чтобы они имели большую свободу выбора в соответствии со своими вкусами, интересами; чтобы можно было сравнить и проанализировать, ученики каких профильных классов каким индивидуальным заданиям отдают предпочтение.

Важной частью выполнения любого индивидуального задания является *работа с научно-популярной литературой* и соответствующими информационными ресурсами. В список такой литературы, в частности, должен входить журнал «Квант», предназначенный для старшеклассников.

С дискуссиями, с привитием учащимся элементов диалоговой культуры связан относительно новый для нашей школы метод учебной деятельности — *деловая игра*. Этот метод больше применяется при проведении уроков гуманитарного цикла: литературы, истории, иностранных языков. Однако его можно использовать и в преподавании математики. Но исходя из опыта работы школы, в гуманитарных и математических классах имеют успех разные деловые игры. Приведем примеры.

Одной из игр является «*мозговой штурм*». Этот метод впервые был предложен в прошлом веке американским специалистом в области творческого мышления *А. Осборном*. Сущность его заключается в том, что весь коллектив делится на две группы: группа «генераторов идей» и группа «критиков». Основными правилами проведения «мозгового штурма» являются следующие:

а) необходимо сформулировать проблему, выделив в ней центральный основной пункт;

б) во время дискуссии не объявлять ни одну идею ложной и не прерывать обсуждение ни одной выдвинутой гипотезы;

в) подхватывать идею любого рода, даже если ее уместность кажется в данное время сомнительной;

г) оказывать поддержку и поощрение, столь необходимые для того, чтобы освободить участников от скованности;

д) категорически запрещены критические замечания и промежуточные оценки, которые мешают построению и формулированию новых идей;

е) проводить оценку выдвинутых идей только после окончания обсуждения с помощью группы «критиков».

Проведением игры руководит учитель. В его задачу входит организация творческой непринужденной обстановки. Для этого он должен руководить и направлять обсуждение умело заданными вопросами, уместной подсказкой и уточнением выдвигаемых идей, следить за тем, чтобы не было больших пауз, задержек. Длительность «штурма» может быть 10—15 мин. После этого «критики» вместе с учителем подводят итоги и высказывают свое мнение.

В условиях школы «мозговой штурм» способствует активизации учащихся, помогает им преодолеть свою неуверенность, учит не бояться высказывать свое мнение. Сама обстановка проведения такой игры настраивает на необходимость принимать быстрые решения. Еще одно качество, присущее современному стилю любой деятельности.

По многим наблюдениям «мозговой штурм» успешнее проходит в математических классах.

Например, по теме «Площадь поверхности шара». Трудность заключается в том, что, в отличие от поверхности других пространственных фигур (многогранников, цилиндра, конуса), поверхность шара не разворачивается на плоскость, поэтому нельзя применить известные методы вычисления площади поверхности. Задача состоит в том, чтобы придумать такой способ. В результате «мозгового штурма» выясняются два способа, а именно:

1. Апроксимация поверхности шара многогранной поверхностью, образованной касательными плоскостями к шару. Площадь такой многогранной поверхности вычисляется обычным образом, и при приближении многогранной поверхности к поверхности ша-

ра, площадь многогранной поверхности дает приближение к площади поверхности шара.

2. Поверхность шара представляется имеющей некоторую толщину h. В этом случае можно вычислить объем соответствующего шарового слоя. Например, это можно представить себе как то, что поверхность шара окрашена краской, и толщина этой краски равна h. Разделив объем этого слоя на высоту h, получим приближенное значение площади поверхности шара. Устремляя h к нулю, в пределе получим точное значение.

В развитии обсуждения этих способов дискутируется вопрос о том, что такое площадь поверхности.

В гуманитарных классах живее проходят *ролевые деловые игры*. Они требуют основательной подготовки. Назовем основные этапы такой игры:

1) Распределение ролей: докладчики, критики, союзники, пропагандисты, конформисты.

2) Разработка сценария.

3) Подготовка докладчиков к выступлениям.

4) Инструктаж учеников, исполняющих другие роли.

5) Проведение игры.

6) Подведение итогов.

При каждом докладе принимается следующая последовательность выступлений:

Докладчик → *Конформист* → *Критик* → *Союзник* →
Пропагандист → *Непредусмотренные выступления*
(*если найдутся желающие*) → *Докладчик*.

Лабораторные работы

В любой деятельности, в частности учебной, выделяют две стороны: *внешнюю — предметную*, и *внутреннюю — психологическую*. Успешное учение в любой области знания идет, если первична внешняя деятельность, которая преобразуется во внутреннюю путем преобразования внешних действий предметной учебной деятельности во внутренние субъективные характеристики ученика, его сознание. Такой процесс психологи называют *интериоризацией* (лат. *internus* — внутренний). Это очень важное положение, особенно для изучения систематического курса геометрии. Для решения этой серьезной проблемы мы, в частности, используем *метод лабораторных работ*.

В 50—60-е годы прошлого века лабораторные работы систематически проводились при изучении школьного курса геометрии и были включены в обязательные программы. С приходом в школу новых программ по математике, новых учебников для лабораторных работ просто не осталось места ни в курсе планиметрии, ни тем более в курсе стереометрии. Это неправильно, так как в обучении осталось все, ради чего они проводились. Отсутствие лабораторных работ, конечно, обедняет методы преподавания геометрии. В условиях, когда ослабевает интерес учащихся к математике, и в частности к геометрии, нельзя пренебрегать ни одной возможностью, чтобы изменить это положение. Лабораторные работы могли бы сыграть в этом далеко не последнюю роль. Этот метод не устарел, он актуален и в настоящее время, так как по-прежнему актутально то, чему служили лабораторные работы, а именно:

— привлечению учащихся к математике;

— формированию интереса к ней;

— форма проведения лабораторных работ отвечает индивидуальным особенностям обучения многих учащихся;

— активизации их математической деятельности.

Другое дело, что устарело содержание, многие лабораторные работы требуют пересмотра, да и современная школьная программа по математике не может вместить в себя много лабораторных работ. В разработанной открытой методике обучения геометрии предусмотрены следующие лабораторные работы:

I. *Планиметрия*

1. Построение геометрических мест точек.

2. Построение кривых: эллипса, параболы, гиперболы.

3. Получение циклоидальных кривых: циклоиды, кардиоиды, астроиды.

4. Центральная симметрия.

5. Поворот.

6. Осевая симметрия.

7. Параллельный перенос.

8. Заполнение плоскости: равными четырехугольниками, правильными многоугольниками.

9. Задачи на разрезание (на плоскости).

10. Вычисление площадей плоских фигур.

II. *Стереометрия*

1. Изображение пространственных фигур на плоскости.

2. Моделирование стереометрических тел.

3. Опыты с листом Мебиуса.

4. Каскадные модели последовательно вписанных друг в друга правильных многогранников.

5. Стереометрические фигуры из куска бумаги.

6. Заполнение пространства многогранниками.
7. Задачи на разрезание (в пространстве).
8. Фигуры вращения.
9. Вычисление площади поверхности фигур вращения.
10. Вычисление объема фигур вращения.

В качестве примера рассмотрим содержание одной лабораторной работы по планиметрии (*5*) и одной лабораторной работы по стереометрии (*8*).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «**ПОВОРОТ**»

Теория. Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ, если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$.

Преобразование плоскости, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ, называется ***поворотом*** вокруг точки O.

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O, если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ.

Хотя изначально поворот определяется для величин углов, не превосходящих 360°, тем не менее, его можно определить и для произвольных градусных величин.

Считают, что поворот на 0° оставляет все точки на месте. Определим поворот для произвольных положительных градусных величин. Обычно направление поворота в этом случае выбирается против часовой стрелки. Воспользуемся тем, что, делая поворот вокруг точки O на угол φ_1, а затем вокруг той же точки на угол φ_2, мы получаем поворот вокруг точки O на угол $\varphi_1 + \varphi_2$. Поэтому, если градусная величина φ больше 360°, то мы представляем ее в виде суммы градусных величин $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, меньших 360°, и последовательно делаем повороты вокруг точки O на углы $\varphi_1 \ldots \varphi_n$. В результате получим искомый поворот на угол φ.

Заметим, что поворот на 360° переводит точки в те же самые точки, т. е. оставляет их на месте. Поэтому для поворота на градусную величину φ, большую 360°, можно поступать и другим образом. Сначала представить φ в виде $\varphi = 360°n + \varphi_o$, где n — некоторое натуральное число, $\varphi_o < 360°$. Затем сделать поворот на угол φ_o. Он и будет искомым поворотом.

Для отрицательных градусных величин поворот определяется так же, как и для положительных, только в направлении по часовой стрелке. А именно, поворот на угол $-\varphi$ для $0 < \varphi < 360°$ означает поворот на угол φ по часовой стрелке. Поворот на произвольную градусную величину $-\varphi$, где $\varphi > 0$, означает поворот на градусную величину φ в направлении по часовой стрелке.

Оборудование. Линейка, циркуль, транспортир.

Практические задания. 1. Постройте точки, в которые переходит данная точка M при повороте вокруг точки O на углы: а) 90°; б) 30°; в) 180°; г) 405°; д) –60°; е) –270°.

2. Постройте фигуру, в которую переходит данный отрезок AB при повороте вокруг точки O на: а) 60°; б) –120°.

3. Постройте фигуру, в которую переходит данный квадрат $EFGH$ при повороте вокруг точки O — его центра на –45°.

4. Даны две точки K и K_1. Постройте точку O, поворотом вокруг которой на угол: а) 45°; б) –45° точка K переходит в точку K_1.

5. Дан круг и внутри него точка O. Нарисуйте фигуру, которая является общей частью этого круга и кругов, получающихся из него поворотами на углы 72°, 144°, –72°, –144°. Обладает ли она центром симметрии?

Ответ. Обладает; центром симметрии является центр поворота — точка O.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «**ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ**»

Теория. Рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки. Пусть в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой. Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой на угол φ, называется *поворотом* или *вращением*. Прямая a при этом называется осью вращения.

Говорят, что фигура Ф в пространстве получена вращением фигуры Ф вокруг оси a, если точки фигуры Ф получаются всевозможными поворотами точек фигуры Ф вокруг оси a. Фигура Ф при этом называется *фигурой вращения*.

Оборудование. Линейка, циркуль, трафарет эллипса.

Практические задания. 1. Даны прямая a и точка $A \notin a$. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении точки A вокруг прямой a.

2. Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC вокруг стороны AB, если треугольник ABC: а) остроугольный; б) тупоугольный и угол A тупой. Как эту фигуру можно получить из конусов?

3. Нарисуйте фигуру, которая получится вращением квадрата $ABCD$ вокруг прямой a, которая проходит через вершину B и параллельна диагонали AC.

4. Нарисуйте фигуру, полученную вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его.

Полученная фигура вращения называется *тором* и напоминает баранку или бублик.

5. Нарисуйте фигуру, полученную вращением: а) прямой треугольной призмы вокруг бокового ребра; б) четырехугольной пирамиды вокруг ее высоты.

В случае а) получится прямой круговой цилиндр, в случае б) — прямой круговой конус.

§ 13. Оценка эффективности обучения геометрии

В работах по методике преподавания математики довольно часто встречается словосочетание «...способствует повышению эффективности обучения». При этом речь может идти о новом содержании или введении новых методов, форм обучения или других компонентах учебного процесса. Обычно подчеркивается констатация этого факта, но, как правило, доказательство эффективности не приводится. Остается непонятным, почему то или иное нововведение эффективнее старого способа. Эта проблема актуальна для современной школы, в которой внедряются идеи гуманитаризации, гуманизации, дифференциации обучения, компетентностного подхода. Разрабатывается новое содержание старых курсов, вводятся новые курсы, новые методы обучения, педагогические технологии. Естественно, возникает необходимость проверять, насколько они лучше, эффективнее традиционных курсов, на смену которым идут. Ведь может оказаться, что новый курс ничем не лучше старого, а то и хуже. То же самое может иметь место не только при изменении содержания курсов и методах обучения, но и при замене одного предмета другим, что сейчас и происходит в ряде школ. Поэтому разработка надежных критериев определения эффективности обучения в новых условиях является важной, актуальной проблемой методики обучения, в частности геометрии.

В теории обучения *эффективность рассматривается как определенный результат достижения поставленных целей*. Это достаточно общее рассуждение требует конкретных разъяснений. Рассмотрим оценку эффективности обучения геометрии в рамках разработанной методико-педагогической модели построения систематического курса геометрии средней школы, в частности, для ее подсистемы — профильной модели. Для этого были прежде всего выделены параметры зависимости эффективности обучения.

1. *Отбор содержания курса геометрии.*
2. *Наличие интереса у школьников к изучению геометрии.*
3. *Результативность обучения.*

Отбор содержания курса геометрии

Для повышения эффективности обучения главным критерием в отборе содержания должна быть значимость и польза рассматриваемого учебного материала для изучения всего курса в целом. С этой целью введем в рассмотрение *вектор-функцию* $Z(T_i)$ — *функцию значимости данной темы* (T_i — тема, стоящая в программе под i-м номером). Таким образом, областью определения вектор-функции Z является множество тем курса, областью значений — векторы шестимерного пространства:

$$Z(T_i) = (G_i;\ P_i;\ D_i;\ U_i;\ O_i;\ N_i),$$

где координата G_i оценивает гуманитарную направленность темы, куда входят следующие параметры:

1) История математики.

2) Проявление математики в живой природе.

3) Связь математики с искусством: живописью, архитектурой, скульптурой и т. д.

4) Красивые математические объекты.

Наличие такого компонента в данной теме оценивается баллом 1, отсутствие — 0. Это можно записать следующим образом:

$$G_i = \sum_{j=1}^{4} g_{ij}, \text{ где } g_{ij} \text{ равняется 1 или 0.}$$

Координата P_i оценивает приложения данной темы по таким параметрам.

1) Внутрипредметные связи.

2) Межпредметные связи.

3) Прикладные аспекты.

4) Связь с современностью.

Аналогично предыдущему, $P_i = \sum_{j=1}^{4} p_{ij}$, где p_{ij} равняется 1 или 0.

Заметим, что в нашем случае $0 \leqslant G_i \leqslant 4$, $0 \leqslant P_i \leqslant 4$.

D_i характеризует число новых, основных для курса понятий, которые входят в обязательный планируемый минимум понятий (эта координата названа D от первой буквы латинского слова «*definition*» — определение понятия).

U_i — число основных теорем (утверждений) курса, рассмотренных в данной теме.

O_i — число опорных задач темы.

N_i — число практических навыков, которыми должен овладеть ученик в процессе изучения данной темы.

В координатах D_i, U_i, O_i и N_i отражаются только те факты, которые входят в планируемые результаты и определяются стандартом общего образования.

Теперь кратко представим некоторые возможности, которые открываются с введением вектор-функции Z. Во-первых, исходя из исследования первой координаты G_i, получено максимальное ее значение (в нашем случае 4), например в курсе стереометрии только в теме «Многогранники». Таким образом, именно эта тема располагает наиболее интересным для учащихся гуманитарных классов материалом. С другой стороны, самой неинтересной, с точки зрения гуманитарной направленности, оказалась тема «Аксиомы стереометрии» ($G_1 = 0$). Это очень важное заключение, так как именно с нее начинается изучение всего курса. Отсюда вывод: темы, в которых рассматриваются пространственные тела — многогранники, имеющие интересную историю, красивые формы, яркое использование в кристаллографии, искусстве и т. д., необходимо широко вводить буквально с первых уроков. Специально для этого в рамках открытой методики был разработан вопрос о взаимосвязанном изучении многогранников с началами стереометрии и взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

В качестве примера рассмотрим $Z(T_4) = (3; 3; 2; 2; 6; 4)$, где T_4 — «Изображение пространственных фигур на плоскости». Эта тема не является самостоятельной в традиционном курсе стереометрии, она включается в тему «Параллельность в пространстве». Но ее гуманитарная значимость, как видим по вектор-функции, весьма велика, что делает возможным специально выделить вопросы изображения в отдельную тему. Причем в эту тему можно включить не только параллельную проекцию, но и центральную проекцию, которая дает нам богатый материал по применению перспективы в живописи, скульптуре, архитектуре.

Введение вектор-функции Z позволило пересмотреть содержание традиционного курса геометрии с точки зрения его изучения в различных классах, например в старших профильных классах, а также организовать и ранжировать учебный материал по степени его интереса для учащихся и необходимости его изучения и включения в основной курс геометрии.

Наличие интереса является необходимым условием процесса обучения. Чем выше интерес, тем активнее идет процесс обучения, выше его результат. Чем ниже интерес, тем формальнее обучение, ниже его результаты. Отсутствие интереса приводит к низкому качеству обучения, быстрому забыванию и даже полной потере приобретенных знаний, умений и навыков. Поэтому так важно знать уровень интереса учеников к обучению, контролировать и следить за его изменением.

Не менее важным параметром для оценки эффективности обучения, помимо отбора соответствующего содержания, является наличие интереса у школьников к изучению геометрии.

Интерес учащихся в классе можно измерять уровнем активности учащихся. Как правило, опытный учитель в своем классе в каждый момент времени урока может определить степень активности и интереса учеников, выразив ее числом I_i (*interest* — интерес) от 0 до 1, где за единицу принимается максимальная активность и интерес данного ученика. Интерес всего класса I определяется как среднее арифметическое интересов учеников класса, т. е.

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_i, \text{ где } n \text{ — число учеников в классе.} \qquad (1)$$

Приведенная формула интереса позволяет в принципе определять интерес учеников в классе. Однако ее практическое использование учителем на уроке затруднено в силу ее громоздкости. Поэтому лучше использовать другую, приближенную формулу. Для ее вывода разобьем отрезок [0,1] изменения интереса на m равных частей точками $0, \frac{1}{m}, ..., \frac{m-1}{m}, 1$.

Обозначим через n_0 число учеников в классе, у которых интерес приближенно равен нулю, n_1 — число учеников с интересом, приближенно равным $\frac{1}{m}$ и т. д., n_m — число учеников с интересом, приближенно равным $\frac{m}{m} = 1$, так чтобы $n_0 + ... + n_m = n$. Тогда интерес I будет приближенно равен:

$$\frac{1}{n}\left(0 \cdot n_0 + \frac{1}{m} \cdot n_1 + ... + \frac{m}{m} \cdot n_m\right) = (n_1 + 2n_2 + ... + m \cdot n_m)\,\frac{1}{nm},$$

т. е. имеет место формула:

$$I \approx (n_1 + 2n_2 + \ldots + m \cdot n_m)\,\frac{1}{nm}. \qquad (2)$$

В частности, при $m = 2$ имеем формулу:

$$I \approx (n_1 + 2n_2) \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{n_2 - n_0}{2n}. \qquad (3)$$

Для подсчета интереса по этой формуле достаточно определить два числа: n_0 — число учеников с интересом 0, n_2 — число учеников с интересом 1. Пары чисел (n_0, n_2) можно определять непосредственно на уроке в наиболее важные моменты времени, а вычисление интереса по формуле (3) можно проводить и после урока.

Заметим, что в случае необходимости увеличения точности вычисления нужно в качестве m выбирать не 2, а большие числа: 3, 4 и т. д.

Интерес учеников в классе можно измерять и с помощью опроса или анкетирования. Для этого в начале урока ученикам раздаются карточки, в которые в определенные моменты времени, по просьбе учителя, ученики заносят значения I_i своего интереса к изучаемому материалу. В конце урока карточки собираются и содержащиеся в них данные используются для нахождения интереса по формулам (1), или (2), или (3).

Измерение интереса к обучению с использованием рассмотренной методики проводилось нами у школьников при изучении систематического курса геометрии основной школы и старших классов. В результате проведенного исследования было выяснено, что интерес учеников к обучению зависит от многих факторов как субъективного, так и объективного характера. Субъективные факторы определяются личностью ученика, его склонностями, способностями, целями, мотивами и т. д. Среди объективных факторов, влияющих на интерес к обучению, выявлены следующие [122].

1. Длительность изучения однородного по содержанию учебного материала. Уровень интереса учащихся при этом убывает с увеличением времени (t) прохождения материала. График этой зависимости изображен на рисунке 79, *а*.

Промежуток времени (на графике t_0), на котором не происходит заметного снижения интереса (*И*), наиболее благоприятен для обучения. Его величина была определена экспериментально и составила в среднем 10—12 мин урока в 7—9 классах и 15—20 мин в старших классах. Если мы хотим в течение некоторого продолжительного времени, например нескольких уроков, со-

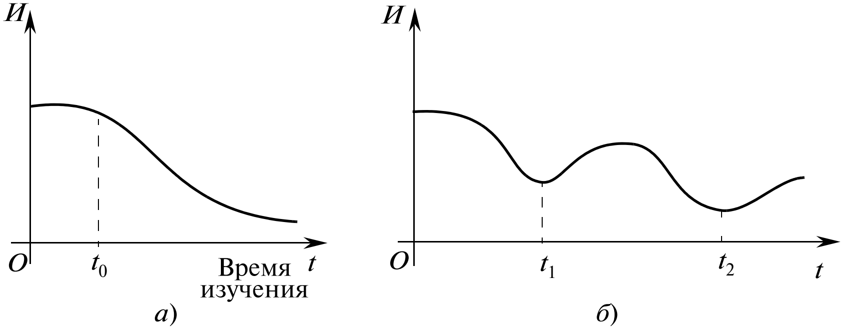


Рис. 79

хранить интерес учащихся к данному материалу, то необходимо прилагать дополнительные усилия, направленные на его поддержание. Это можно сделать с помощью создания проблемной ситуации, использования материала исторического или занимательного характера, рассмотрения приложений, решения нестандартных задач и т. д. График зависимости интереса от времени в этом случае изображен на рисунке 79, *б*.

2. Интерес к обучению зависит не только от времени, но и от объема (V) изучаемого однородного материала. При этом зависимость интереса от объема примерно такая же, как и зависимость интереса от времени (рис. 80).

При увеличении объема материала интерес снижается. Участок, на котором не происходит заметного снижения интереса, и соответствующий этому участку объем материала наиболее благоприятен для обучения, с точки зрения интереса. Величина оп-

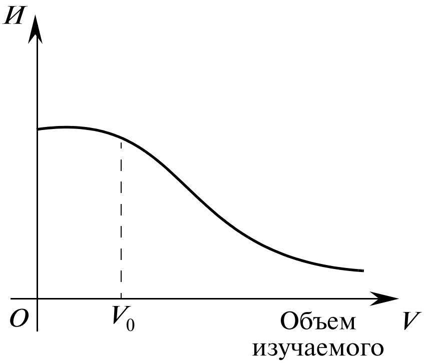


Рис. 80

тимального объема была определена экспериментально. Она составляет 1—2 единицы содержания (определения, свойства, теоремы, задачи и т. д.) для ребят основной школы и 2—3 единицы содержания для старших классов.

Анализ изучения курса планиметрии показал, что, с точки зрения интереса, наиболее неблагоприятными темами являются «Признаки равенства треугольников», «Параллельные прямые», «Теоремы косинусов и синусов», более интересными темы «Четырехугольники», «Теорема Пифагора», «Правильные многоугольники». В старших классах в числе неблагоприятных тем оказались такие, как «Параллельность прямых и плоскостей», «Перпендикулярность прямых и плоскостей», которые содержат большое количество свойств и теорем и изучаются в течение полугода. Более благоприятные темы — «Многогранники», «Тела вращения», содержащие меньше новых определений, свойств, теорем.

3. Трудность изучаемого материала также существенно влияет на интерес к обучению. Причем при достаточно высокой трудности интерес может совсем пропасть. Так, например, если ученикам была предложена задача слишком высокой трудности, превышающей их возможности, то интерес к последующему обучению резко снижается.

График зависимости интереса от трудности (T) представлен на рисунке 81.

4. Интерес зависит и от уровня понимания учащимися предлагаемого материала. Однако зависимость здесь не монотонная, как в предыдущих случаях, а имеет вид, как на рисунке 82.

Для появления интереса, заинтересованности учащихся достаточно совсем небольшого понимания. Более того, неполное

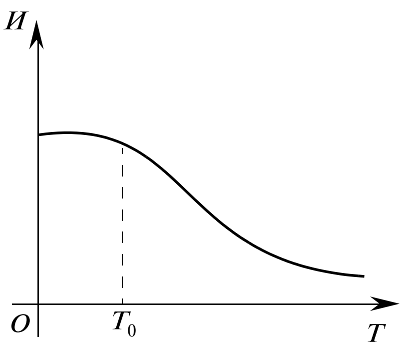


Рис. 81

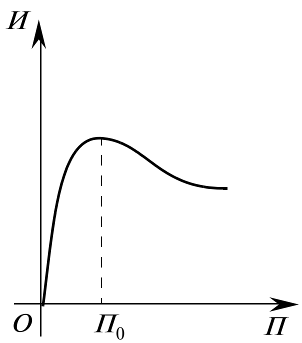


Рис. 82

понимание, желание разобраться и понять приводит к увеличению интереса и, наоборот, после того, как материал понят, интерес к нему снижается.

5. Интерес обладает свойством локальной устойчивости, которое проявляется, во-первых, в том, что после появления интереса он сохраняется в течение некоторого времени и без приложения дополнительных усилий на его сохранение, во-вторых, после снижения интереса к данному объекту его очень трудно восстановить, поднять на прежний уровень, в-третьих, интерес к какому-либо объекту вызывает интерес и к близким объектам, однако величина этого интереса быстро убывает при удалении объектов.

Объекты, расположенные вблизи данного объекта и на которые распространяется интерес, будем называть *зоной интереса данного объекта* (рис. 83).

При переключении внимания учащихся с одного объекта на другой, находящийся вне зоны интереса данного объекта, интерес с первого объекта на второй не переносится автоматически. Кроме того, величина интереса при таком переключении существенно снижается, возможно, и до нуля. Такому переключению соответствует график на рисунке 84.

Величина скачка графика зависит от удаленности объектов друг от друга. Так, например, используя занимательный материал, учитель может вызвать интерес учащихся. Однако если этот занимательный материал не связан непосредственно с темой урока, то после его рассмотрения интерес к основному содержанию урока не наступает, и, даже наоборот, рассмотренный занимательный материал отвлекает учащихся, мешает выработке интереса к основному материалу урока.

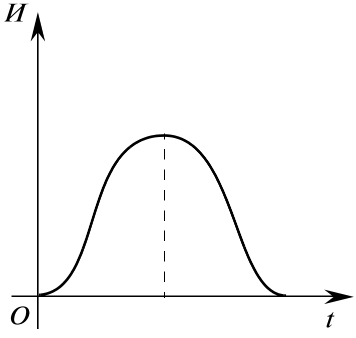


Рис. 83

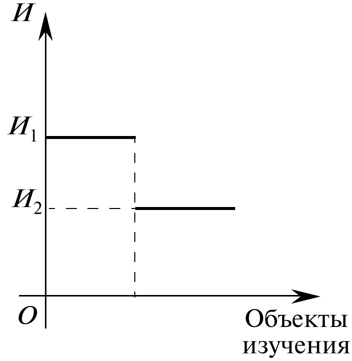


Рис. 84

6. Интерес обладает свойством иррадиации — способностью распространяться от учителя или ученика, проявляющего повышенный интерес, к другим ученикам. Так интерес, увлеченность учителя вызывает ответный интерес учеников и, наоборот, неинтересное, скучное объяснение учителя или неинтересный, скучный ответ ученика приводят к снижению интереса класса. Поэтому учителю нужно стремиться не только к тому, чтобы его объяснения были интересными, но и к тому, чтобы ответы и объяснения самих учеников также были интересными. С этой целью при изучении геометрии следует шире практиковать индивидуальные задания творческого характера, раскрывающие интересы учеников в классе.

Результативность обучения

Третьим параметром эффективности функционирования профильной модели выделена *результативность обучения*, для оценки которой использовались следующие критерии.

1) Критерий усвоения разработанного курса — K_u.

2) Критерий соответствия временным затратам — K_t.

3) Критерий достижения планируемого уровня формирования личности учащегося — K_l.

Остановимся на каждом представленном критерии более подробно.

Первый критерий K_u связан с оценкой достижения образовательных целей обучения, которые закладываются нами в планируемые результаты обучения и состоят из элементов содержания (см. табл. 19). Напомним их: термины, понятия, аксиомы, теоремы, задачи, классификации, факты. Для определения K_u используются количественные измерители, к которым относятся: математические диктанты, самостоятельные и контрольные работы, зачеты, экзамены, тестовые проверки. Все они выражаются в определенной ранговой системе баллов. Можно воспользоваться традиционной пятибалльной системой, за исключением оценки тестов.

Критерий усвоения K_u определяется измерением усвоения каждой темы курса, т. е. $K_u = \sum_{i=1}^{n} k_i$, где k_i — коэффициент усвоения i-й темы; n — общее количество изученных тем.

Остановимся на определении k_i. Сначала k_i рассматривается для каждого ученика, обозначим его a_{ij}, где j — порядковый номер учащегося в списке класса. Назовем N общее количество учеников в классе; a_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{\text{Число верных ответов}}{\text{Общее число заданных вопросов}}.$$

Легко видеть, что $0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1$. Если a_{ij} принадлежит отрезку [0,9; 1], то ученик получает оценку «5» за данную тему; если a_{ij} принадлежит отрезку [0,7; 0,9) — оценка «4»; a_{ij} принадлежит отрезку [0,4; 0,7) — оценка «3»; a_{ij} принадлежит отрезку [0; 0,4) — оценка «2».

Затем подсчитывается общее количество каждой оценки и находится ее процентное отношение от общего числа оценок. При этом коэффициент усвоения i-й темы будет определяться как вектор пятимерного пространства, а именно:

$$k_i\,(N_{i5};\, N_{i4};\, N_{i3};\, N_{i2};\, N_{i1}),$$

где координаты определяют количество учеников, получивших оценку «5» — N_{i5}, «4» — N_{i4}, «3» — N_{i3}, «2» — N_{i2} и неаттестованных учащихся — N_{i1}.

Основываясь на анализе соответствующей литературы, работы школы, опыта преподавания, можно сделать вывод, что допустимыми значениями k_i следует считать такие, при которых:

$$\frac{N_{i5} + N_{i4} + N_{i3}}{N} \geqslant \frac{90\ \%}{100\ \%},$$

т. е. положительных оценок должно быть не меньше 90%. Другими словами, ребят, совсем не усвоивших тему и неаттестованных, не должно быть больше одной десятой всего класса.

Из числа положительных оценок приблизительно половину должны составлять отличные и хорошие оценки, а именно:

$$\frac{N_{i5} + N_{i4}}{N_{i5} + N_{i4} + N_{i3}} \geqslant \frac{50\ \%}{100\ \%}.$$

При таких количественных показателях можно говорить о хорошем усвоении темы.

Следующим критерием эффективности обучения по разработанной модели обучения геометрии в средней школе назван *критерий соответствия временным затратам*. Время в учебном процессе является очень важным показателем его состояния и результативности. K_t определяется оптимальным числом уроков, отводимых на изучение разработанного курса, и может определяться для каждой конкретной темы в отдельности.

Значительно сложнее обстоит дело с *качественным критерием* K_l, который определяет достижение развивающих и воспитательных целей обучения и планируемый уровень формирования личности учащегося, так как соответствующих методик пока практически не разработано.

Для определения K_l были выделены следующие параметры.

1) Выполнение учащимися заданий, носящих развивающий и воспитательный характер. Среди этих заданий: выступление с сообщением или докладом на историческую тему, раскрытие прикладных аспектов геометрии в других науках, природе, искусстве; чтение научно-популярной литературы; написание и оформление соответствующих рефератов; проектов; изготовление моделей.

2) Активность учащихся. К видам активности отнесены следующие:

— посещение занятий и активное участие во всех видах учебной работы на уроке;

— выполнение индивидуальных заданий;

— выполнение обязательной и необязательной частей домашних заданий.

3) Самостоятельность учащихся, которая выражается таким образом:

— самостоятельность суждений, умозаключений при решении возникающих проблем;

— самостоятельное решение дополнительных задач;

— самостоятельная подготовка и выполнение индивидуальных заданий.

Уровень достижения развивающих и воспитательных целей обучения определяется общим объемом выполненных учеником соответствующих заданий. Причем каждое задание имеет свой удельный вес, т. е. свою оценку, зафиксированную некоторым натуральным числом. Все задания учитываются в специальной зачетке ученика. При их сравнении формируется рейтинг ученика в классе по успехам изучения геометрии. Наилучший рейтинг на определенный момент времени имеет ученик, набравший максимальное число в своей индивидуальной зачетке.

Таким образом, не учитель выставляет оценку ученику, а он сам непосредственно участвует в формировании своей оценки.

Опыт работы в школе показывает, что такая рейтинговая система оценок уже сама по себе является достаточным стимулом для выполнения большей части заданий и способствует активизации всей учебной деятельности при изучении геометрии.

Подробно с разработанными практическими учебными материалами можно ознакомиться на сайте geometry2006@narod.ru [161].

Литература

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики /пер. с франц. М. А. Шаталова, О. П. Шаталовой, под ред. И. Б. Погребысского. — М.: МЦНМО, 2001.
2. *Айзенк Г. Ю.* Проверьте свои интеллектуальные способности. — 2-е изд. — Рига: Виеда, 1992.
3. *Александров А. Д.* О геометрии //Математика в школе. — 1980. — № 3.
4. *Анастази А.* Психологическое тестирование /пер. с англ. М. К. Акимова, Е. М. Борисова, под ред. К. М. Лубовского. Книга I, книга II. — М.: Педагогика, 1982.
5. *Аничков Д.* Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества, из разных авторов собранная. — М., 1780.
6. Антология педагогической мысли России. XVIII в. — М.: Педагогика, 1985.
7. Антология педагогической мысли России второй половины XIX — начала XX в. — М.: Педагогика, 1990.
8. Антология педагогической мысли России первой половины XIX в. — М.: Педагогика, 1987.
9. *Астряб А. М.* Задачник по наглядной геометрии. — М.: Государственное издательство, 1924.
10. *Астряб А. М.* Методика преподавания наглядной геометрии /В кн. Бескин Н. М. Методика геометрии. — М.-Л.: Учпедгиз, 1947.
11. *Астряб А. М.* Наглядная геометрия (лабораторный метод изложения). Начальный курс. — 6-е изд. — М.-Л.: Гостехиздат, 1923.
12. *Атанасян Л. С., Болибрух А. А.* и др. Факультативные курсы по математике для 10—11 классов. — М.: НИИ школ Министерства образования РФ, 1989.
13. *Бабанский Ю. К.* Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы. — М.: Просвещение, 1982.
14. *Башмаков М. И.* Уровень и профиль математического образования //Математика в школе. — 1993. — № 2.

15. *Бескин Н. М.* Методика геометрии: Учебник для педагогических институтов. — М.-Л.: Учпедгиз, 1947.

16. *Бескин Н. М.* О задачах методики математики //Математика в школе. — 1989. — № 5.

17. *Биркгофф Г.* Математика и психология /пер. с англ. Г. Н. Поварова. — 2-е изд. — М.: Издательство ЛКИ, 2008.

18. *Богомолов С. А.* Геометрия. Систематический курс: Пособие для учителей средней школы. — М.-Л.: Учпедгиз, 1949.

19. *Боженкова Л. И.* Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии. — Калуга: Изд. КГПУ им. К. Э. Циолковского, 2007.

20. *Божович Л. И.* Проблемы формирования личности /под ред. Д. И. Фельдштейна. — 2-е изд. — М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1995.

21. *Болтянский В. Г.* Математическая культура и эстетика //Математика в школе. — 1982. — № 2.

22. *Болтянский В. Г., Глейзер Г. Д.* К проблеме дифференциации школьного образования //Математика в школе. — 1988. — № 3.

23. *Борышкевич М.* Курс элементарной геометрии с практическими задачами /Для городских училищ по программе Винницкого съезда учителей. — 2-е изд. — Киев, 1893.

24. *Брадис В. М.* Методика преподавания математики в средней школе /под ред. А. И. Маркушевича. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1951.

25. *Брушлинский А. В.* Субъект: мышление, воображение. — М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1996.

26. *Буссе Ф. И.* Руководство к геометрии для гимназий. — СПб., 1844.

27. *Ващенко-Захарченко М. Е.* История математики. Исторический очерк развития геометрии. Том 1. — Киев: Типография Императорского Университета святого Владимира, 1883.

28. *Вейль Г.* Математическое мышление /Пер. с англ. и нем. Сост. Ю. А. Данилов, под ред. Б. В. Бирюкова, А. Н. Паршина. — М.: Наука, 1989.

29. *Волков Е.* Образовательный курс наглядной геометрии: Руководство для преподавателей начальных и городских школ и низших классов средних общеобразовательных заведений. — СПб.: Колесов и Михин, 1873.

30. *Вулих З. Б.* Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач: Руководство для городских и уездных училищ. — СПб., 1873.

31. *Выготский Л. С.* Педагогическая психология /под ред. В. В. Давыдова. — М.: Педагогика, 1991.

32. *Габай Т. В.* Педагогическая психология. — 3-е изд. — М.: Академия, 2006.

33. *Гангнус Р. В., Гурвиц Ю. О.* Геометрия: Методическое пособие / под ред. И. К. Андронова. — Часть I. Планиметрия. — 3-е изд. — М.: Учпедгиз, 1936; Часть II. Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1935.
34. *Гельфман Э. Г., Холодная М. А.* Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. — СПб.: Питер, 2006.
35. *Глаголев А. Н.* Сборник геометрических задач и краткий курс элементарной геометрии. — М., 1890.
36. *Глейзер Г. Д.* Каким быть школьному курсу геометрии //Математика в школе. — 1991. — № 4.
37. *Глейзер Г. Д.* Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. — М.: Педагогика, 1978.
38. *Гнеденко Б. В.* О математике. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
39. *Годфруа Ж.* Что такое психология. В 2-х томах /пер. с франц. — М.: Мир, 1992.
40. *Головин М. Е.* Краткое руководство к геометрии, изданном для народных училищ Российской империи по высочайшему повелению царствующей императрицы Екатерины второй. — СПб., 1782.
41. *Гончаров Н. К.* Еще раз о дифференцированном обучении в старших классах общеобразовательной школы //Советская педагогика. — 1963. — № 2.
42. *Гурьев П. С.* Практические упражнения в геометрии. — СПб., 1844.
43. *Гурьев С. Е.* Морского учебного курса часть первая, содержащая основания геометрии. — СПб., 1804.
44. *Гурьев С. Е.* Опыт об усовершенствовании элементов геометрии, составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева. — СПб., 1798.
45. *Гусев В. А.* Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования. — М.: Дрофа, 2010.
46. *Давидов А. Ю.* Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. — 34-е изд. — М.-СПб.: Типография В. В. Думнов — насл. бр. Салаевых, 1914.
47. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения. — М.: ИНТОР, 1996.
48. Дидактика средней школы /под ред. М. Н. Скаткина. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1982.
49. *Дорофеев Г. В.* Математика для каждого. — М.: Аякс, 1999.
50. *Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В.* Дифференциация в обучении математике //Математика в школе. — 1990. — № 4.

51. *Дорофеев Г. В., Седова Е. А., Троицкая С. Д.* Концепция профильного курса математики //Математика в школе. — 2006. — № 7.

52. *Евлид.* Начала /пер. с греч. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. — М.: Гостехиздат, 1948—1950.

53. *Епишева О. Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. — М.: Просвещение, 2003.

54. *Жовнир Я. М.* Фузионизм в системе преподавания геометрии в средней школе: Автореф. Дисс. ... канд. пед. наук. — Киев, 1970.

55. *Зимняя И. А.* Педагогическая психология. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.

56. Избранные вопросы математики. 7—8 (9, 10) классы. — М.: Просвещение, 1978 (1979, 1980).

57. *Ильинский А. Н.* Основания геометрии, составленные по системе императорской Санкт-Петербургской Академии наук академика С. Е. Гурьева. — СПб.: Типография А. Смирдина, 1825.

58. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебно-методическое пособие /И. В. Роберт, С. В. Панюкова, А. А. Кузнецов, А. Ю. Кравцова: под ред. И. В. Роберт. — М.: Дрофа, 2008.

59. *Калашников А. Г.* Проблемы политехнического образования. Избр. труды. — М.: Педагогика, 1990.

60. *Калмыкова З. И.* Темп продвижения как один из показателей индивидуальных различий учащихся //Вопросы психологии. — 1961. — № 2.

61. *Каплунович И. Я., Петухова Т. А.* Пять подструктур математического мышления: как их выявить и использовать в преподавании // Математика в школе. — 1998. — № 5.

62. *Карасев П. А.* Элементы наглядной геометрии в школе: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1955.

63. *Кемпбель В.* Наглядная геометрия: Пособие для обучения и самообучения /пер. с англ. Е. Попова. — 2-е изд. — М., 1910.

64. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. — М., 1892.

65. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности (Поиск истины) / пер. с англ. — М.: Мир, 1984 (1988).

66. *Клаус Г.* Введение в дифференциальную психологию учения /пер. с нем. — М.: Педагогика, 1987.

67. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Том второй. Геометрия /пер. с нем. Д. А. Крыжановского, под ред. В. Г. Болтянского. — 2-е изд. — М.: Наука, 1987.

68. *Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С.* Геометрия: Учебн. пос. для 6—8 классов средней школы. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 1982.

69. *Колягин Ю. М.* Русская школа и математическое образование. — М.: Просвещение, 2001.

70. *Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Е.* Профильная дифференциация обучения математике //Математика в школе. — 1990. — № 4.

71. *Косинский М. О.* Наглядная геометрия: Для детей от 9 до 12 лет. — 4-е изд. — СПб.: Мартынов, 1902.

72. *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников. — М.: Просвещение, 1968.

73. *Кулишер А. Р.* Начальный курс геометрии в средней школе. — СПб., 1914.

74. *Кулишер А. Р.* Учебник геометрии. Часть I. Курс подготовительный. — СПб., 1914.

75. *Кутузов Н. Е.* Наглядная геометрия: Для двухклассных школ. — 2-е изд. — М.: Сотрудник школы, 1915.

76. *Кучугурова Н. Д.* Интенсивный курс методики преподавания математики. — Ставрополь: Изд. СГУ, 2001.

77. *Лазурский А. Ф.* Классификация личностей /под ред. М. Я. Басова, В. Н. Мясищева. — 2-е изд. — М.-Петроград: Госиздат, 1923.

78. *Леднев В. С.* Содержание образования: сущность, структура, перспективы. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1991.

79. *Леонтьев А. Н.* Избр. психологические труды. — М.: Педагогика, 1983.

80. *Лобачевский Н. И.* Геометрия //Полн. собр. соч. — Том 2. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

81. *Магалиф Б.* Систематический сборник геометрических задач на вычисление. Планиметрия (Стереометрия). — 7-е (4-е) изд. — М.-СПб.: В. В. Думнов — насл. бр. Салаевых, 1914.

82. *Малинин А. Ф.* Курс наглядной геометрии и собрание геометрических задач для уездных училищ. — М.: Изд. братьев Салаевых, 1873.

83. Математика: Учебн. для 5 класса средней школы / Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 1989.

84. Математика в образовании и воспитании /Сост. В. Б. Филиппов. — М.: ФАЗИС, 2000.

85. *Менчинская Н. А.* Проблемы обучения, воспитания и психического развития ребенка. — М.; Воронеж, 1998.

86. *Мерлин В. С.* Психология индивидуальности. — М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1996.

87. *Мерчинский А.* Элементарная геометрия. — М., 1897.

88. Методика и технология обучения математике: Курс лекций / Н. Л. Стефанова и др. — М.: Дрофа, 2005.

89. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы /под ред. А. И. Фетисова. — М.: Просвещение, 1967.
90. Методика преподавания математики /под общей ред. С. Е. Ляпина. — 2-е изд. — Л.: Учпедгиз, 1955.
91. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика /В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1980.
92. Методика факультативных занятий в 7—8 (9—10) классах. — М.: Просвещение, 1981 (1983).
93. *Минин В. П.* Сборник геометрических задач. — 15-е изд. — М., 1913.
94. *Моиз Э. Э., Даунс Ф. Л.* Геометрия /пер. с англ. И. А. Вайнштейна, под ред. И. М. Яглома. — М.: Просвещение, 1972.
95. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Философия. Психология. Математика. — М.: Серебряные нити, 1998.
96. *Назаров С.* Теоретическая и практическая геометрия (сочиненная тит. советн. Степаном Назаровым для употребления к геодезии, межеванию и протчего). — СПб., 1772.
97. *Небылицын В. Д.* Актуальные проблемы дифференциальной психофизиологии: Хрестоматия по психологии /состав.: В. В. Мироненко, под ред. А. В. Петровского. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1987.
98. *Немов Р. С.* Практическая психология. — М.: ВЛАДОС, 1997.
99. *Нечаев А. П.* Психология и школа /под ред. А. А. Никольской. — М.: Институт практической психологии; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997.
100. *Осиповский Т. Ф.* Курс математики. — М.; Том I, 1802; Том II, 1801; Том III, 1820.
101. *Остроградский М. В.* Руководство начальной геометрии. — СПб.; II общий класс, 1855; III общий класс, 1857; IV общий класс, 1860.
102. Педагогические технологии /под ред. В. С. Кукушина. — Ростов-на- Дону: Изд. Центр «Март», 2002.
103. *Платонов К. К.* Занимательная психология. — 4-е изд. — М.: Молодая гвардия, 1986.
104. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения (Математическое открытие) /пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975 (1976).
105. *Полякова Т. С.* История математического образования в России. — М.: МГУ, 2002.
106. *Потоскуев Е. В.* Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач. Элективные курсы. 10—11 классы. — М.: Дрофа, 2008.
107. *Пржевальский Е. М.* Собрание геометрических теорем и задач. — 9-е изд. — М., 1913.

108. Программы средней общеобразовательной школы. Факультативные курсы. Сборник № 2. — Часть 1 (математика, биология, химия). — М.: Просвещение, 1990.

109. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. — М.: Учпедгиз, 1956.

110. Психология: Словарь /под ред. А. В. Петровского, М. Г. Ярошевского. — М., 1990.

111. *Пуанкаре А. О* науке /пер. с франц., под ред. Л. С. Понтрягина. — М.: Наука, 1983.

112. *Пышкало А. М.* Геометрия в I—IV классах (проблемы формирования геометрических представлений у младших школьников). — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1968.

113. Развитие творческой активности школьников /под ред. А. М. Матюшкина. — М.: Педагогика, 1991.

114. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии. — СПб.: Питер, 1999.

115. *Рыбкин Н. А.* Сборник геометрических задач на вычисление. Часть I (Часть II). Планиметрия (Стереометрия). — 10-е (9-е) изд. — М.: Школа, 1915.

116. *Рыбкин Н. А.* Собрание стереометрических задач, требующих применения тригонометрии. — М.-Петроград: Гос. изд., 1923.

117. *Саранцев Г. И.* Методика обучения математике в средней школе. — М.: Просвещение, 2002.

118. Сборник нормативных документов. Математика. — М.: Дрофа, 2007.

119. *Смирнова И. М.* Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии //Математика. — 1998. — № 17.

120. *Смирнова И. М.* Исторические аспекты дифференциации обучения //Математика. — 2000. — № 44.

121. *Смирнова И. М.* Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения. — М.: МПГУ, 1994.

122. *Смирнова И. М.* Об измерении интереса на уроках математики // Математика в школе. — 1998. — № 5.

123. *Смирнова И. М.* Профильная модель обучения математике //Математика в школе. — 1997. — № 1.

124. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрические задачи с практическим содержанием. — М.: МЦНМО, 2010.

125. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия на клетчатой бумаге. — М.: МЦНМО, 2009.

126. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10—11 классы. — М.: Мнемозина, 2007.

127. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Компьютер помогает геометрии. — 2-е изд. — М.: Дрофа, 2009.
128. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Кривые. Курс по выбору. 9 класс. — М.: Мнемозина, 2007.
129. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Многогранники. Элективный курс. 10—11 классы. — М.: Мнемозина, 2007.
130. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Многоугольники. Курс по выбору. 9 класс. — М.: Мнемозина, 2007.
131. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. — М.: МЦНМО, 2010.
132. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Устные упражнения по геометрии. 7—9 классы. — М.: Мнемозина, 2010.
133. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Устные упражнения по геометрии. 10—11 классы. — М.: Мнемозина, 2010.
134. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Четырехмерная геометрия. — М.: МЦНМО, 2010.
135. *Сойер У. У.* Прелюдия к математике /пер. с англ. М. Л. Смолянского, С. Л. Романовой, под ред. А. С. Солодовникова. — М.: Просвещение, 1965.
136. *Столяр А. А.* Педагогика математики. — 3-е изд. — Минск: Вышэйшая школа, 1986.
137. *Стоюнин В. Я.* Избранные педагогические сочинения. — М.: Педагогика, 1991.
138. *Талызина Н. Ф.* Педагогическая психология. — М.: Академия, 1998.
139. *Теплов Б. М.* Проблемы индивидуальных различий. Способности и одаренность. Психология музыкальных способностей //Избр. труды в двух томах. Том I. — М.: Педагогика, 1985.
140. *Тихомиров В. М.* Геометрия в современной математике и математическом образовании //Математика в школе. — 1993. — № 4.
141. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Том 1, том 2, том 3. — СПб., 1913.
142. *Унт И. Э.* Индивидуализация и дифференциация обучения. — М.: Педагогика, 1990.
143. Факультативный курс по математике: Учебн. пос. для 7—9 классов средней школы /под ред. И. Л. Никольской. — М.: Просвещение, 1991.
144. *Фельдштейн Д. И.* Психология развивающейся личности. — М.: Институт практической психологии. — Воронеж: НПО «МОДЭК», 1996.
145. *Фридман Л. М.* Теоретические основы методики обучения математике. — М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998.

146. Фундаментальное ядро содержания общего образования /под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. — М.: Просвещение, 2011.
147. *Холодная М. А.* Психология интеллекта: парадоксы исследования. — М.: Барс; Томск: Томский государственный университет, 1997.
148. *Хьелл Л., Зиглер Д.* Теории личности /пер. с англ. С. Менелевской, Д. Викторовой. — 2-е изд. — СПб.: Питер Пресс, 1997.
149. *Черкасов Р. С.* История отечественного школьного математического образования //Математика в школе. — 1997. — № 2; № 3; № 4.
150. *Чичигин В. Г.* Методика преподавания геометрии. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1959.
151. *Шарыгин И. Ф.* К семидесятилетию со дня рождения. Избранные статьи и выступления. — М.: МЦНМО, 2007.
152. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс. — М.: Просвещение, 1989.
153. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс. — М.: Просвещение, 1991.
154. *Шохор-Троцкий С. И.* Геометрия на задачах: Книга для учащихся. — М.: Сытин, 1909.
155. Элективные курсы. Геометрическое моделирование окружающего мира. 10—11 классы /В. В. Орлов, Н. С. Подходова, Е. А. Ермак, И. А. Иванов. — М.: Дрофа, 2009.
156. *Эльконин Б. Д.* Психология развития. — 2-е изд. — М.: Академия, 2005.
157. *Юнг К. Г.* Психологические типы. — М.: Алфавит, 1992.
158. *Якиманская И. С.* Личностно-ориентированное обучение в современной школе. — 2-е изд. — М.: Сентябрь, 2000.
159. *Якиманская И. С.* Психологические основы математического образования. — М.: Академия, 2004.
160. *Якиманская И. С.* Технология личностно-ориентированного образования. — М.: Сентябрь, 2000.
161. geometry2006.narod.ru

Оглавление