# О ЗНАКОМСТВЕ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ С ГЕОМЕТРИЕЙ НА СФЕРЕ

**В. А. Смирнов**
Московский педагогический государственный университет
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
**И. М. Смирнова**
Московский педагогический государственный университет
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

**Ключевые слова:** геометрия, сфера, учащиеся старших классов.

**Аннотация:** в работе рассматриваются основные понятия геометрии на сфере (сферической геометрии); формулируются и доказываются свойства и теоремы, аналогичные свойствам и теоремам геометрии на плоскости; устанавливается формула для суммы углов сферических многоугольников; показывается связь сферических многоугольников и многогранных углов; решается задача на нахождения кратчайшего пути по поверхности Земли.

# ABOUT THE ACQUAINTANCE OF HIGH SCHOOL STUDENTS WITH GEOMETRY ON A SPHERE

**V. A. Smirnov**
Moscow State Pedagogical University
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
**I. M. Smirnova**
Moscow State Pedagogical University
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

**Keywords:** geometry, sphere, high school students.

**Abstract:** the paper deals with the basic concepts of geometry on a sphere (spherical geometry); properties and theorems similar to the properties and theorems of geometry on the plane are formulated and proved; a formula is established for the sum of angles of spherical polygons; the relationship between spherical polygons and polyhedral angles is shown; solve the problem of finding the shortest path on the surface of the Earth.

Сферическая геометрия, или геометрия на сфере, возникла в связи с мыслями о шарообразности Земли, которые появились в результате астрономических наблюдений в VI-V вв. до н. э. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень Земли на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, встав между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну. Следовательно, Земля – круглая или шарообразная.

Мысль о шарообразности Земли подтверждали наблюдения мореплавателей за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем, постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль двигается по дуге шаровой поверхности Земли, и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблём и наблюдателем.

Так же, как и евклидова геометрия, сферическая геометрия применялась при решении практических задач, которые были необходимы путешественникам, мореплавателям, которые ориентировались по звёздам и др.

Первые сведения о сферической геометрии относятся к I веку н. э. Так, например, в книге «Сферика» греческого математика Менелая Александрийского рассматривались сферические треугольники и изучались их свойства.

Большой вклад в сферическую геометрию внёс другой греческий математик Клавдий Птолемей (II в.), который изложил основы сферической геометрии в своей работе «Великое математическое построение астрономии в 13 книгах».

Особую роль в развитии сферической геометрии сыграл Леонард Эйлер (1707-1783), благодаря которому сферическая геометрия приобрела современный вид.

В настоящее время сферическая геометрия находит применение в астрономии, где широко используется вспомогательная небесная сфера, в геодезии, где поверхность Земли в первом приближении представляют в виде сферы, в навигации для прокладки курсов кораблей, самолётов и др., в картографии для составления географических карт и т. д.

Геометрия на сфере имеет много общего с геометрией на плоскости, но есть и свои принципиальные отличия. Знакомство учащихся с геометрией на сфере важно для любого человека, так как оно развивает необходимые пространственные представления, позволяет учащимся лучше понять геометрию и пространство, в котором мы живём.

Рассмотрим сферу с центром $O$ и радиусом 1. Точки на сфере будем обозначать прописными латинскими буквами $A$, $B$, $C$, ..., $A_1$, $B_2$, $C_3$, ..., $A'$, $B''$, $C'''$,... .

*Сферическими прямыми* будем считать большие окружности, т. е. окружности на сфере, центром которых является центр сферы (рис. 1).

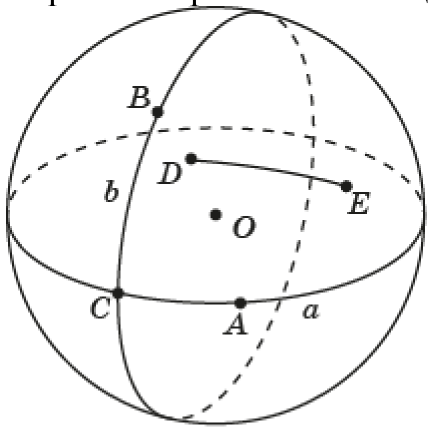


Рис. 1

Такие окружности являются пересечением сферы с плоскостями, проходящими через центр сферы.

Сферические прямые будем обозначать строчными латинскими буквами $a$, $b$, $c$, ..., $a_1$, $b_2$, $c_3$, ..., $a'$, $b''$, $c'''$, ... .

*Сферическим отрезком* будем называть меньшую дугу большой окружности, соединяющую две данные точки на сфере. Эти точки будем называть концами сферического отрезка.

Сферический отрезок является кратчайшим путём на сфере, соединяющим его концы, Такой путь называют *ортодромией*, что в переводе с греческого языка означает "прямой бег".

Сферические отрезки будем обозначать указанием его концов, например, $DE$, $C_1D_1$ и т. д. (рис. 1).

Сферический отрезок, концы которого симметричны относительно центра сферы, будем называть *сферической полупрямой*.

Сферическую полупрямую, у которой выделен один из концов, будем называть *сферическим лучом*, а выделенный конец – *вершиной* сферического луча.

Фигуру, образованную двумя сферическими лучами с общей вершиной и одной из частей сферы, ограниченной этими лучами, будем называть *сферическим углом* или *двуугольником*. Общую вершину будем называть *вершиной*, а сферические лучи – *сторонами* сферического угла.

Сферический угол с вершиной в точке $C$, на сторонах которого выбраны точки $A$ и $B$, будем обозначать $ACB$ (рис. 1).

Для измерения величины сферического угла через его вершину проведём лучи, касающиеся его сторон. Величину угла, образованного этими лучами, будем называть *величиной* сферического угла.

Углом между двумя пересекающимися сферическими прямыми будем называть наименьший из сферических углов, образованных сферическими лучами, лежащими на данных сферических прямых, с вершиной в точке их пересечения.

Две сферические прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними прямой.

*Сферическим расстоянием* между точками $A$ и $B$ на сфере будем называть длину сферического отрезка $AB$. Будем длину сферического отрезка $AB$ также обозначать $AB$.

Фигуру, образованную конечным набором сферических отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т. д., будем называть *сферической ломаной*. Сферические отрезки называются *сторонами сферической ломаной*, а их концы – *вершинами сферической ломаной*.

*Длиной сферической ломаной* называется сумма длин её сторон.

Сферическая ломаная обозначается последовательным указанием её вершин. Например, сферическая ломаная $ABCDE$, сферическая ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

Сферическая ломаная называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Сферическая ломаная называется *замкнутой*, если начало первого её сферического отрезка совпадает с концом последнего.

Всякая простая замкнутая сферическая ломаная разбивает сферу на две области. Фигура, образованная простой замкнутой сферической ломаной и ограниченной ею частью сферы, называется *сферическим многоугольником*. Вершины сферической ломаной называются *вершинами сферического многоугольника*, стороны - *сторонами сферического многоугольника*. Сферические углы, образованные соседними сторонами сферического многоугольника, называются *углами сферического многоугольника*.

Сферический многоугольник называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их сферический отрезок.

*Периметром* сферического многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Учащимся можно предложить следующие упражнения.

**1.** В программе GeoGebra получите сферу. Отметьте на ней две точки, и постройте сферическую прямую, проходящую через эти точки. Отметьте две точки и постройте сферический отрезок с концами в этих точках. Постройте сферический угол, сферическую ломаную, сферический многоугольник.

**2.** Используя инструменты программы GeoGebra, найдите: приближённую длину построенного отрезка; приближённую величину построенного угла; приближённую длину построенной ломаной; приближённый периметр построенного многоугольника.

**3.** Верно ли, что через любые две точки сферы проходит единственная большая окружность?

Ответ. Нет. Через две центрально-симметричные точки проходит бесконечно много больших окружностей.

**4.** Верно ли, что перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную сферическую прямую, единственен.

Ответ. Нет.

Заметим, что каждому сферическому многоугольнику соответствует многогранный угол, вершиной которого является центр данной сферы. Его рёбрами являются лучи, проходящие через вершины сферического многоугольника. Гранями являются плоские углы, образованные соседними лучами и содержащие соответствующие стороны стерического многоугольника. При этом длины сторон и величины углов сферического многоугольника равны соответственно величинам плоских и двугранных углов этого многогранного угла.

Для сферических треугольников имеют место обычные признаки равенства.

Найдём выражение для суммы углов сферического треугольника. Рассмотрим сферический треугольник $ABC$ с углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Сферу можно представить как объединение шести попарно равных сферических двуугольников. При этом сферический треугольник $ABC$ и равный ему сферический треугольник $A'B'C'$ покрываются этими сферическими двуугольниками по три раза (рис. 2).

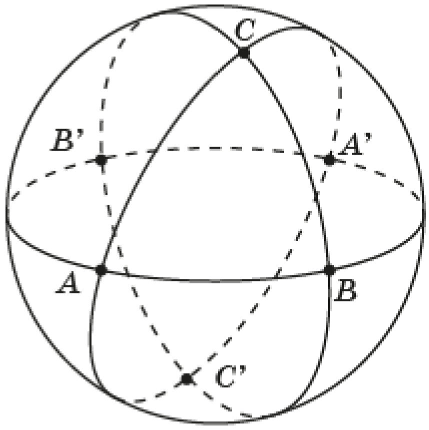


**Рис. 2**

Так как площадь единичной сферы равна $4\pi$, то площади сферических двуугольников, с углами соответственно $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, равны соответственно $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$. Следовательно, сумма площадей шести сферических двуугольников равна площади сферы плюс четыре площади сферического треугольника $ABC$. Значит, имеет место равенство

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4S_{ABC},$$

из которого получаем следующую теорему.

**Теорема.** Для сферического треугольника $ABC$ с углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ имеет место формула

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + S_{ABC}.$$

**Следствие.** Сумма углов сферического треугольника больше 180$^{\circ}$.

Как и в случае обычных выпуклых многоугольников доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Сумма $\Sigma_n$ углов выпуклого сферического $n$-угольника $M$ выражается формулой

$$\Sigma_n = \pi(n-2) + S(M),$$

где $S(M)$ – площадь сферического многоугольника $M$.

Для сферических треугольников рассмотрим аналог теоремы косинусов.

Напомним, что теорема косинусов утверждает, что для треугольника $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$, имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Для сферических треугольников имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Для сферического треугольника $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$, а углы $A$, $B$, $C$ равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

**Доказательство.** Рассмотрим единичную сферу с центром $O$ и сферический треугольник $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$. Предположим, что $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$. Через вершину $C$ проведём касательные к большим окружностям, содержащим стороны $AC$ и $BC$ сферического треугольника $ABC$ (рис. 3).

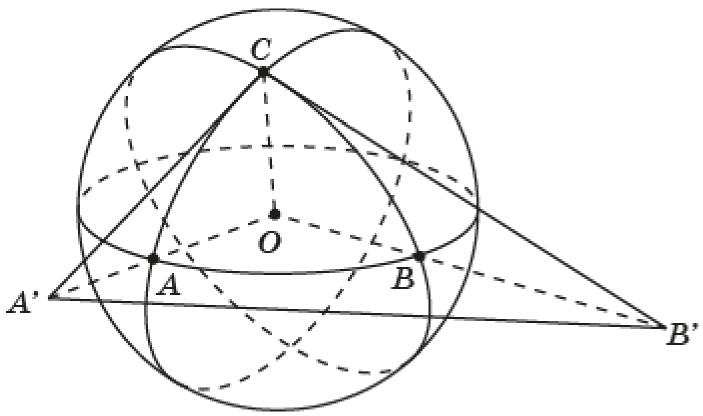


Рис. 3

Обозначим $A'$, $B'$ точки пересечения этих касательных с прямыми соответственно $OA$, $OB$.

В треугольнике $OA'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = b$, $A'C = \operatorname{tg} b$, $OA' = \frac{1}{\cos b}$.

В треугольнике $OB'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = a$ $B'C = \operatorname{tg} a$, $OB' = \frac{1}{\cos a}$.

В треугольнике $A'B'C$ угол $A'CB'$ равен углу $ACB$ сферического треугольника $ABC$.

Применим теорему косинусов к треугольнику $A'B'C$. Получим равенство

$$(A'B')^2 = (\operatorname{tg} a)^2 + (\operatorname{tg} b)^2 - 2\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos \gamma.$$

В треугольнике $A'B'O$ угол $A'OB$ равен $c$. Применим к этому треугольнику теорему косинусов. Получим равенство

$$(A'B')^2 = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{\cos b} \cdot \cos c.$$

Приравнивая правые части полученных равенств для $(A'B')^2$ и используя равенство $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \operatorname{tg}^2 a$, получим искомое равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Хотя мы предположили, что $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$, можно доказать, что это равенство остаётся верным и для произвольного сферического треугольника.

Оно позволяет по известным двум сторонам и углу между ними находить третью сторону, а также по известным сторонам находить углы сферического треугольника.

В качестве следствия из этой теоремы получаем следующий аналог теоремы Пифагора.

**Теорема.** Для прямоугольного сферического треугольника $ABC$, катеты $BC$, $AC$ и гипотенуза $AB$ которого равны соответственно $a$, $b$ и $c$, имеет место формула

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Рассмотрим теперь аналог теоремы синусов.

Напомним, что теорема синусов утверждает, что для треугольника $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$, а углы $A$, $B$, $C$ равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Для сферических треугольников имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Для сферического треугольника $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$, а углы $A$, $B$, $C$ равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим единичную сферу с центром $O$ и остроугольный сферический треугольник $ABC$, стороны $BC$, $AC$, $AB$ которого соответственно равны $a$, $b$, $c$ (рис. 4).

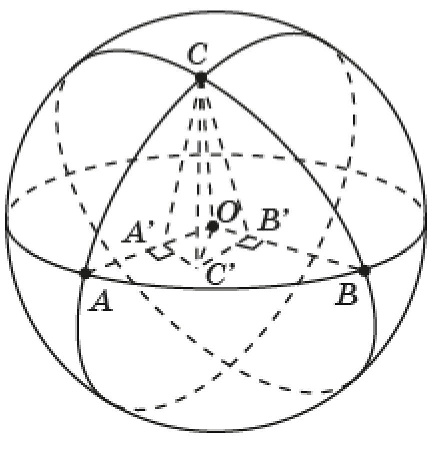


**Рис. 4**

Из точки $C$ опустим перпендикуляр $CC'$ на плоскость $OAB$. Из точки $C'$ опустим перпендикуляры $C'A'$ и $C'B'$ на прямые соответственно $OA$ и $OB$. Углы $CA'C'$ и $CB'C'$ являются линейными углами двугранных углов соответственно с рёбрами $OA$ и $OB$. Значит, они равны углам α и β сферического треугольника $ABC$. Имеем равенства

$$CC' = CA' \cdot \sin\alpha = CO \cdot \sin b \cdot \sin\alpha = \sin b \cdot \sin\alpha,$$
$$CC' = CB' \cdot \sin\beta = CO \cdot \sin a \cdot \sin\beta = \sin a \cdot \sin\beta.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получим равенство

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Хотя мы предположили, что сферический треугольник $ABC$ остроугольный, можно доказать, что эти равенства остаются верными и для произвольного сферического треугольника. Они позволяют по известным стороне и двум углам сферического треугольника находить его другую сторону, а также по известным двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой из этих сторон сферического треугольника.

Учащимся можно предложить следующие упражнения.

**1.** Может ли у сферического треугольника быть: а) два; б) три прямых угла?

Ответ: а), б) да.

**2.** Может ли гипотенуза прямоугольного сферического треугольника быть: а) равна катету; б) меньше катета?

Ответ: а), б) да.

**3.** В программе GeoGebra изобразите равносторонний сферический треугольник на сфере. Найдите приближённое значение его сторон и углов.

**4.** Найдите площадь сферического треугольника, углы которого равны 90°.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

**5.** Найдите гипотенузу и синусы острых углов прямоугольного сферического треугольника, катеты которого равны $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Для определения положения точек на сфере используют сферические координаты. Они применяются при определении положения объектов на поверхности Земли, нахождении кратчайших путей для самолётов, кораблей и др., определении положения звёзд и других небесных тел и т. д.

Напомним определение сферических координат. Рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку $A$.

Ортогональную проекцию точки $A$ на плоскость $Oxy$ обозначим $A'$, а длину вектора $OA$ - через $r$. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости $Oxy$ обозначим ψ, причём, будем считать его изменяющимся от -90° до +90°. Если точка $A$ расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором

$\overrightarrow{OA'}$ и осью $Ox$ обозначим φ. Тройка ($r$; φ; ψ) называется сферическими координатами точки $A$ в пространстве (рис. 5).

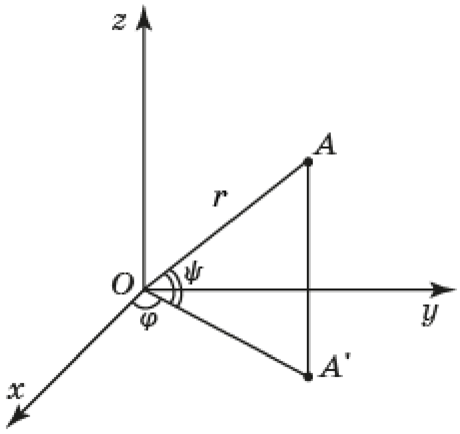


Рис. 5

Для того чтобы отличать сферические координаты от декартовых, сферические координаты будем писать через точку с запятой, а декартовы – через запятую.

Для задания сферических координат на поверхности Земли, которая считается сферой, начало координат выбирается в центре этой сферы. Ось $Oz$ выбирается проходящей через северный полюс, а ось $Ox$ так, чтобы соответствующая плоскость $Oxz$ проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат $O$, то положение точки $A$ на поверхности Земли определяется двумя сферическими координатами (φ; ψ). При указании этих координат на поверхности Земли для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова "восточной долготы", а для отрицательных φ от нуля до -180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова "западной долготы". Аналогично, для положительных ψ от нуля до 90° добавляют слова "северной широты", а для отрицательных ψ от нуля до –90° берут абсолютную величину ψ и добавляют слова "южной широты". Например, город Москва имеет координаты: 37°35' восточной долготы и 55°45' северной широты. Санкт-Петербург имеет координаты: 30°19′ в. д., 59°57′ с. ш. Владивосток имеет координаты: 131°54′ в. д., 43°07′ с. ш.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую *меридианом*. Точки, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется *параллелью*.

Рассмотрим точки $A_1(1; \varphi_1; \psi_1)$ и $A_2(1; \varphi_2; \psi_2)$ на единичной сфере с центром $O$ и северным полюсом $N$. Найдём длину кратчайшего пути, соединяющего эти точки, которая равна радианной величине γ угла $A_1OA_2$ (рис. 6)

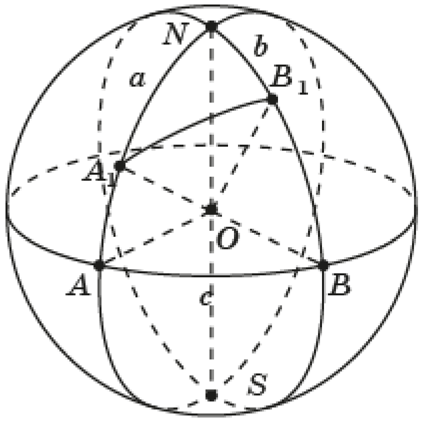


**Рис. 6**

В сферическом треугольнике $NA_1B_1$, стороны $NA_1$, $NB_1$ равны соответственно $\frac{\pi}{2} - \psi_1$, $\frac{\pi}{2} - \psi_2$, а угол между ними равен $\varphi_2 - \varphi_1$. По теореме косинусов получим равенство

$$\cos\gamma = \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2 + \cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В частности, если точки $A_1$, $B_1$ расположены на противолежащих меридианах, то кратчайшим путём на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через северный или южный полюс, в зависимости от того, в каких полушариях, северном или южном, лежат эти точки. Например, кратчайший путь, соединяющий точки $A_1(R;\ 0°;\ 45°)$, $A_2(R;\ 180°;\ 45°)$, проходит через северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиусом $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\pi R\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути (рис. 7).

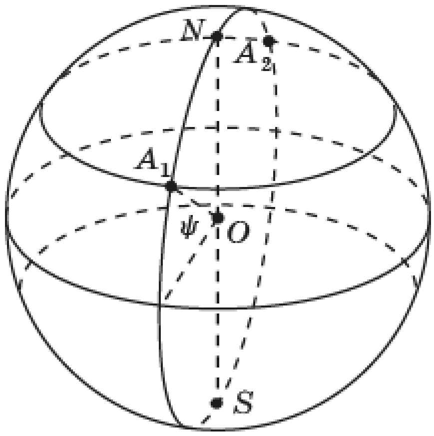


**Рис. 7**

Учащимся можно предложить следующие упражнения.

**1.** Найдите формулы, выражающие сферические координаты точки через её декартовы координаты.

Ответ: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

**2.** Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, 0, 2)$.

Ответ: $A$: $r = \sqrt{3}$, $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $B(\sqrt{2}; 180^{\circ}; 45^{\circ})$; $C(2; 0^{\circ}; 90^{\circ})$.

**3.** Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) $r$ постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.

Ответ: а) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость.

**4.** Примерные географические координаты Москвы: 37° восточной долготы; 56° северной широты. Примерные географические координаты Владивостока: 132° восточной долготы; 43° северной широты. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности Земли из Москвы во Владивосток. Примите длину экватора приближённо равной 40 000 км.

Ответ: 6410 км.

## Литература

1. Абрамов А. М. и др. Избранные вопросы математики. 10 класс: факультативный курс. – М.: Просвещение, 1980.
2. Богомолов С. А. Введение в неевклидову геометрию Римана. – М.-Л.: ОНТИ, 1934.
3. Вентцель М. К. Сферическая тригонометрия. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.