И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

ЧТО ТАКОЕ «ПОЛУПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК»

Математика 2007 № 16

В письме А. Рубцова в редакцию газеты «Математика» внимание привлечено к одному из полуправильных многогранников – кубооктаэдру.

Полуправильные многогранники очень декоративны. Их модели, сделанные из разверток или геометрического конструктора могут украсить кабинет математики. Знакомство учащихся с полуправильными многогранниками будет способствовать повышению интереса к обучению геометрии, развитию пространственных представления школьников.

К сожалению, полуправильные многогранники не входят в программу курса геометрии 10-11 классов. В учебниках [1] и [2] в обзорном порядке рассматриваются только правильные многогранники. В учебниках [3] и [4] полуправильные и звездчатые многогранники рассмотрены в качестве дополнительного материала.

Правильным называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер. Оказывается, что существует только пять типов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Доказательство этого факта не такое простое, как может показаться на первый взгляд и использует теоремы Эйлера (о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника) и Коши (о жесткости выпуклого многогранника). Правильные многогранники называют также телами Платона, по имени древнегреческого математика, ими занимавшегося.

Полуправильные многогранники являются естественным расширением семейства правильных многогранников. Это выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон и удовлетворяющие некоторому дополнительному условию.

А. Рубцов в своем письме использует определение полуправильного многогранника, в котором в качестве этого дополнительного условия, по аналогии с определением правильного многогранника, требуется, чтобы в каждой вершине полуправильного многогранника сходилось одинаковое число ребер. Он приводит пример многогранника, который получается из кубооктаэдра поворотом нижней чаши на $60°$ (а не на $45°$, как указано в статье А. Рубцова). Его гранями являются квадраты и правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре ребра. Поскольку этот многогранник не указывается в литературе в качестве полуправильного многогранника, автор делает вывод о том, что ему удалось найти новый полуправильный многогранник. Однако дело здесь в том, что условие, используемое им в определении полуправильного многогранника, слабее, чем, например, условие, указанное в книгах [5], [6], в которых требуется, чтобы в полуправильном многограннике все многогранные углы были равны. Именно поэтому такие многогранники называются также равноугольно полуправильными. Доказывается, что существуют две бесконечные серии – ***правильные призмы*** (рис. 1) и ***антипризмы*** (рис. 2) и 14 типов таких многогранников, 13 из которых были известны еще Архимеду. Поэтому их называют многогранниками Архимеда.

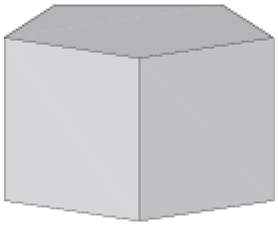

Рис. 1

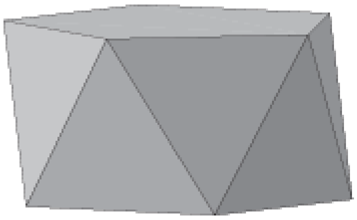

Рис. 2

Самые простые из многогранников Архимеда получаются из правильных многогранников операцией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Так, если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим ***усеченный тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 3). Из них четыре - правильные шестиугольники и четыре - правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

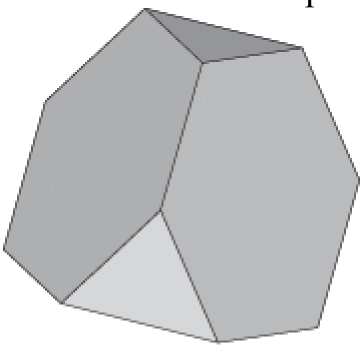

Рис. 3

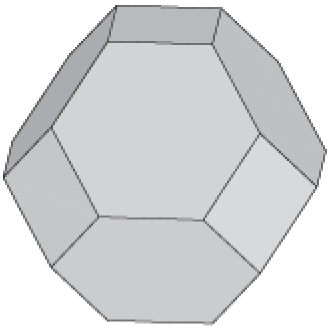

Рис. 4

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усеченный октаэдр*** (рис. 4) и ***усеченный икосаэдр*** (рис. 5).

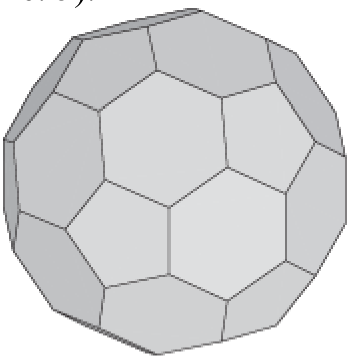

Рис. 5

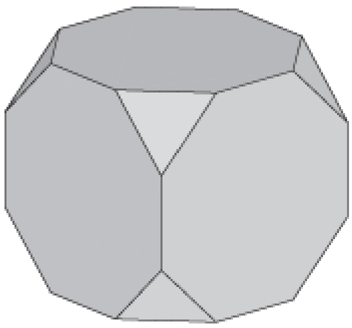

Рис. 6

Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить ***усеченный куб*** (рис. 6) и ***усеченный додекаэдр*** (рис. 7).

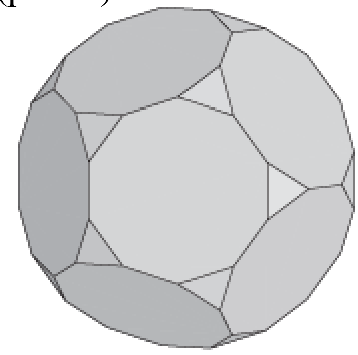

Рис. 7

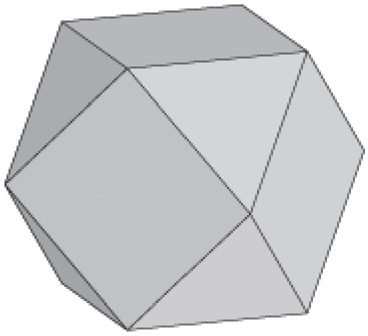

Рис. 8

Для того, чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется ***кубооктаэдром*** (рис. 8). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название - кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 9). У него двадцать граней - правильные треугольники и двенадцать граней - правильные пятиугольники, т.е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

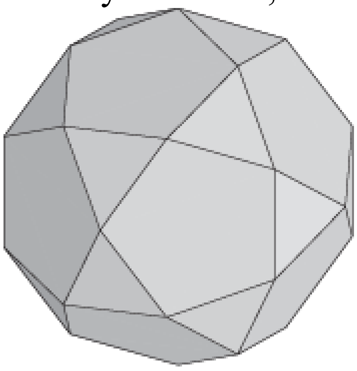

Рис. 9

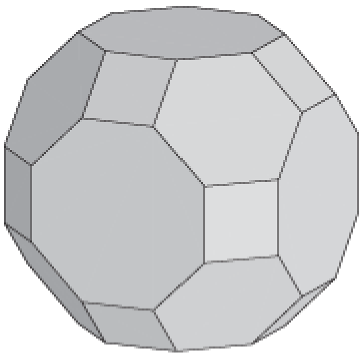

Рис. 10

Еще два многогранника называются ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 10) и ***усеченный икосододекаэдр*** (рис. 11), хотя их нельзя получить усечением кубооктаэдра и икосододекаэдра. Отсечение углов этих многогранников дает не квадраты, а прямоугольники.

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся - многогранники более сложного типа.

На рисунке 12 мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

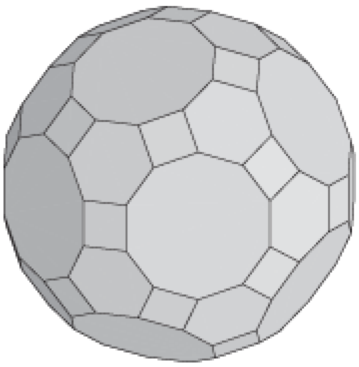 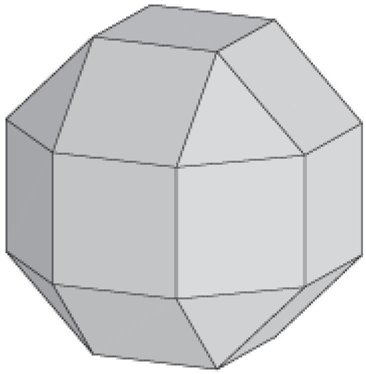

Рис. 11 Рис. 12

На рисунке 13 изображен ***ромбоикосододекаэдр***, поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 14, 15 представлены, так называемые, ***плосконосый*** (иногда называют ***курносый***) ***куб*** и ***плосконосый*** (***курносый***) ***додекаэдр***, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

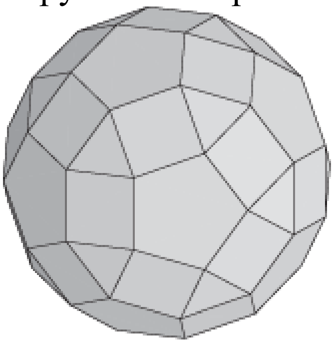 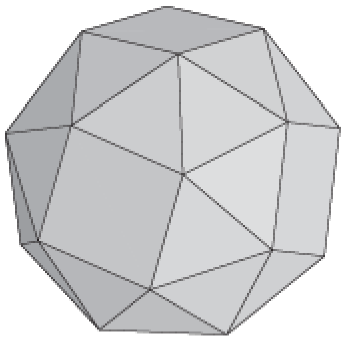

Рис. 13 Рис. 14

Кроме этих тринадцати тел Архимеда в число полуправильных многогранников в книгах [5], [6] включается 14-ый многогранник, называемый псевдоархимедовым (рис. 16). Он получается из ромбокубооктаэдра поворотом нижней чаши на $45°$.

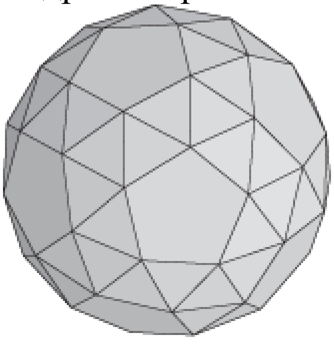 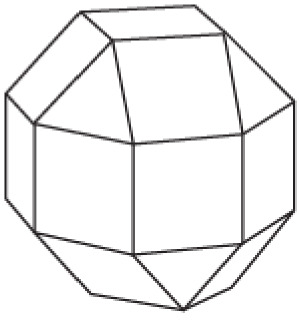

Рис. 15 Рис. 16

Конечно, если в определении полуправильного многогранника ослабить второе условие, то можно найти и другие многогранники, кроме указанных выше, удовлетворяющие этому определению. Помимо многогранника, указанного А. Рубцовым, имеется, по крайней мере, еще пять таких многогранников, получаемых из некоторых полуправильных многогранников поворотом их частей. Все они указаны в книге [5].

Так, если повернуть нижнюю или верхнюю чашу икосододекаэдра на 36°, то получим новый многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники и треугольники, и в каждой вершине сходится четыре ребра.

Поворачивая чаши ромбоикосододекаэдра можно получить еще четыре многогранника, гранями которых являются квадраты и правильные пятиугольники и треугольники, а в каждой вершине сходится четыре ребра.

Какое же определение полуправильного многогранника «правильное»? Какое определение имел в виду Архимед, описавший тринадцать полуправильных многогранников? Знал ли он о псевдоархимедовом теле, или не догадался, что можно повернуть чашу кубооктаэдра? К сожалению, определение полуправильного многогранника, которым пользовался Архимед, до нас не дошло. По-видимому, Архимед не считал псевдоархимедов многогранник полуправильным многогранником.

Действительно, по внешнему виду псевдоархимедов многогранник не такой «правильный» как многогранники Архимеда. Но чем же определяется «правильность»?

Представим полуправильный многогранник, сделанным из прозрачного материала и посмотрим сквозь одну n-угольную грань. Мы увидим остальные грани, расположенные в определенном порядке. Точно такую же картину мы увидим, если посмотрим сквозь другую n-угольную грань этого многогранника. Этим свойством обладают все полуправильные многогранники, а псевдоархимедов многогранник – нет. Если посмотреть сквозь верхнюю квадратную грань и сквозь боковую квадратную грань, то мы увидим разные расположения остальных граней.

С математической точки зрения правильность определяется наличием симметрий, т.е. движений, переводящих многогранник сам в себя.

Для тел Архимеда выполняется следующее свойство: для любых двух вершин существует симметрия, при которой одна вершина переходит в другую. Это означает, что не только все многогранные углы равны, но, что для любых двух многогранных углов существует движение самого многогранника, переводящее один из них в другой. Конечно, это более сильное условие, чем просто равенство многогранных углов.

Этому условию не удовлетворяют не только многогранник, указанный в письме А. Рубцова, но и псевдоархимедов многогранник.

Таким образом, имеется три варианта определения полуправильного многогранника.

Определение 1. Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, поверхность которого состоит из правильных многоугольников, возможно, с разным числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

В этом случае, помимо двух бесконечных серий, имеется, по крайней мере, 19 таких многогранников (см. [5]).

Определение 2. Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, поверхность которого состоит из правильных многоугольников, возможно, с разным числом сторон и все многогранные углы равны.

В этом случае, помимо двух бесконечных серий, имеется 14 таких многогранников – 13 многогранников Архимеда и псевдоархимедов многогранник (см. [5], [6]).

Определение 3. Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, поверхность которого состоит из правильных многоугольников, возможно, с разным числом сторон и для любых двух вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну из них в другую.

В этом случае, помимо двух бесконечных серий, имеется 13 таких многогранников – многогранников Архимеда.

К сожалению, последнее, «правильное» определение полуправильного многогранника отсутствует в учебно-методической литературе. Его используют математики в научных статьях и кристаллографы, которые называют такие многогранники изогонами.

Можно предположить, что Архимед руководствовался именно таким определением.

Помимо рассмотренных равноугольно полуправильных многогранников, имеются, так называемые, равногранно полуправильные многогранники [6].

Равногранно полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, все многогранные углы которого правильные и все грани – равные многоугольники, причем для любых двух граней существует симметрия многогранника, переводящая одну из них в другую.

Эти многогранники двойственны равноугольно полуправильным многогранникам в том смысле, что центры их граней являются вершинами равноугольно полуправильных многогранников.

Помимо двух бесконечных серий равногранно полуправильных многогранников, двойственных призмам и антипризмам, имеется 13 равногранно полуправильных многогранников, двойственных многогранникам Архимеда.

На рисунках 17, 18, 19 показаны равногранно полуправильные многогранники, двойственные к усеченному тетраэдру, усеченному кубу и усеченному октаэдру.

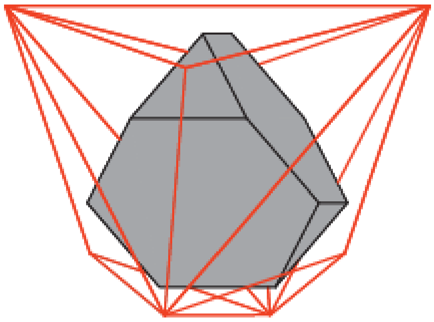

Рис. 17

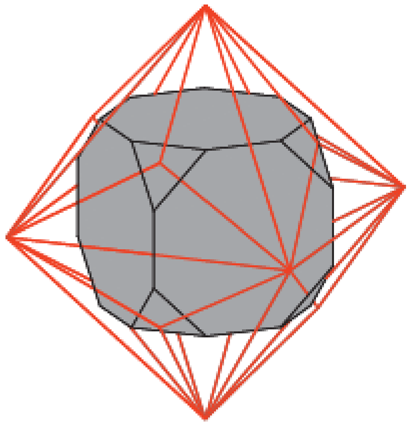

Рис. 18

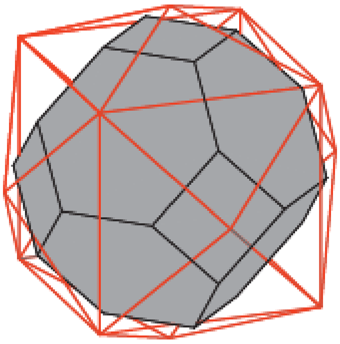

Рис. 19

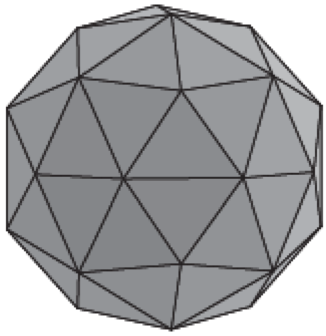

Рис. 20

На рисунках 20-29 показаны равногранно полуправильные многогранники, двойственные к остальным равноугольно полуправильным многогранникам.

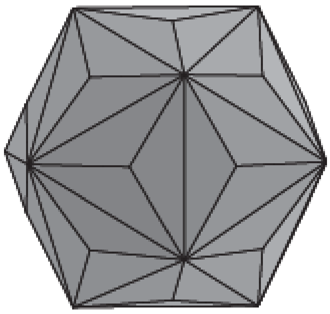

Рис. 21

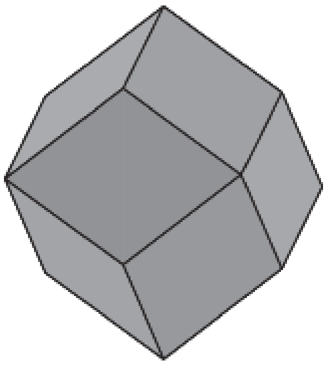

Рис. 22

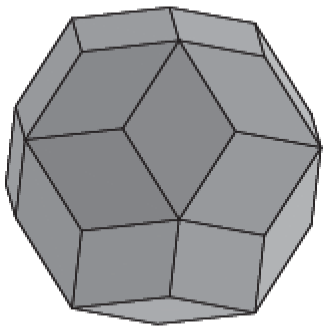

Рис. 23

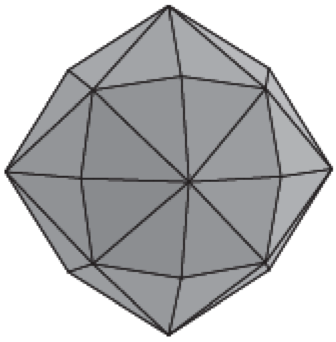

Рис. 24

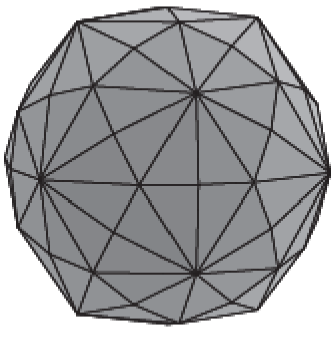

Рис. 25

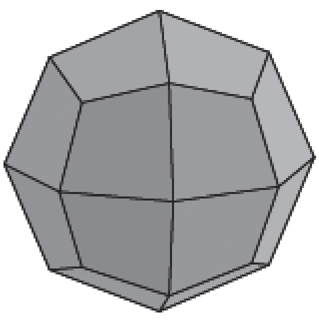

Рис. 26

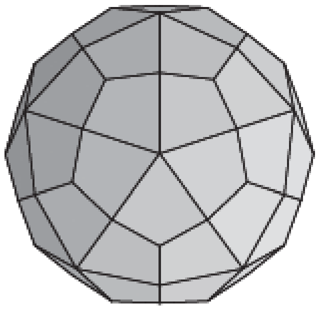

Рис. 27

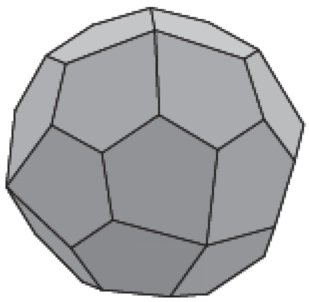

Рис. 28

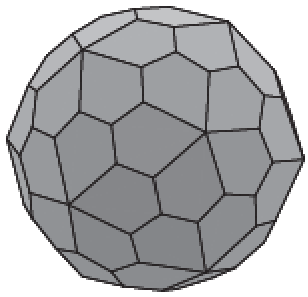

Рис. 29

Литература

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10-11. Учебник для 10-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 9-е изд., 2000.

2. Погорелов А.В. Геометрия 10-11. Учебник для 10-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 2000.

3. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2005.

4. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2005.

5. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть II. ОГИЗ, Гостехиздат. Москва, Ленинград, 1949.

6. Энциклопедия элементарной математики, книга IV. – М.: Физматгиз, Москва, 1963.