ПРЕДЛАГАЕТ
УЧЕБНУЮ И МЕТОДИЧЕСКУЮ
ЛИТЕРАТУРУ
ПО ГЕОМЕТРИИ

УМК для 7—9 классов

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Учебник**. 7—9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Рабочая тетрадь**. 7, 8, 9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 7, 8, 9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Многоугольники. Курс по выбору. **Учебное пособие**. 9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Кривые. Курс по выбору. **Учебное пособие**. 9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя**. 7, 8, 9 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи. **Учебное пособие**. 7—11 кл.

УМК для 10—11 классов
Базовый и профильный уровни

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Учебник**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Рабочая тетрадь**. 10, 11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Многогранники. Элективный курс. **Учебное пособие**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. **Учебное пособие**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя** (в 2-х частях). 10—11 кл.

Базовый уровень

И. М. Смирнова. Геометрия. **Учебник**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 10—11 кл.
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя**. 10—11 кл.

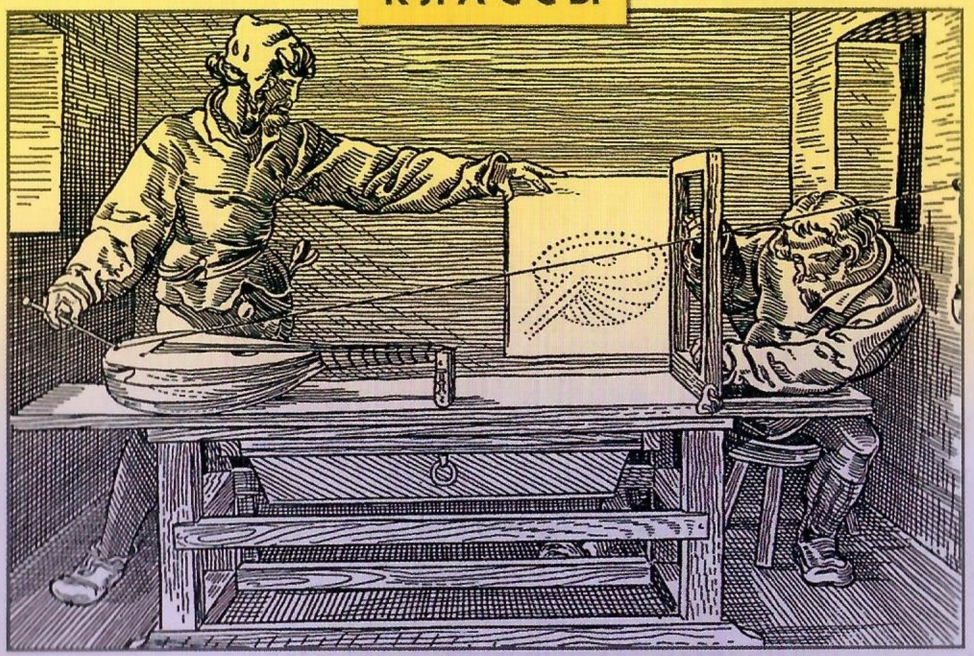
ISBN 5-346-00607-9
9 785346 006077

И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

10 – 11 КЛАССЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

К 373.167.1:514
К 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.
С50 Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2007. — 64 с. : ил.
ISBN 5-346-00607-9
В настоящем курсе рассматриваются способы изображения пространственных фигур с применением различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной. Доказываются свойства, приводятся примеры и исторические сведения. В конце каждого пункта предлагаются упражнения для самостоятельного решения.
Отдельно анализируется вопрос об использовании компьютерных графических редакторов для получения изображений пространственных фигур на экране монитора.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна
Смирнов Владимир Алексеевич

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕНЫХ ФИГУР
Элективный курс
10—11 классы
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
кнический редактор *И. Л. Ткаченко*. Корректоры *Н. А. Александрова, А. П. Пенская*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.000389.01.06 от 25.01.06.
Формат 70×90¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,68. Тираж 3000 экз. Заказ № 516

ИОЦ «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина». Тел./факс: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.
E-mail: tid@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс». 115477, г. Москва, ул. Кантемировская, 60.

3N 5-346-00607-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс, предлагаемый вашему вниманию, посвящен изображению пространственных фигур.

Как это ни странно, при изучении геометрии в старших классах вопросу изображения пространственных фигур не уделяется должного внимания. В то же время умение изображать пространственные фигуры необходимо не только будущему математику, физику, инженеру, конструктору, но и скульптору, архитектору, художнику, дизайнеру.

Обучаясь правильно изображать пространственные фигуры, ученик знакомится с законами восприятия окружающих его предметов, приобретает необходимые практические навыки, формирует свои пространственные представления.

Решение пространственных задач по геометрии, как правило, требует выполнения чертежа, и от того, насколько правильно он сделан, во многом зависит успешность получения результата.

В настоящем курсе рассматриваются способы изображения пространственных фигур с использованием различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной. Параллельная проекция удобна для изображения многогранников и построения их сечений. Ортогональное проектирование используется для изображения тел вращения: цилиндра, конуса, сферы, а также комбинаций многогранников и тел вращения. Центральное проектирование, или перспектива, наиболее близко к зрительному восприятию человеком окружающих предметов. Для указанных проекций доказываются свойства, приводятся примеры и исторические сведения.

Отдельно рассматривается вопрос об использовании компьютерных графических редакторов для получения изображений пространственных фигур на экране монитора.

После каждого пункта предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце пособия даются список рекомендуемой литературы, ответы и указания к упражнениям.

ПРОГРАММА КУРСА

(Всего 17 ч)

нкт	Содержание	Кол-во часов
.	Параллельное проектирование	2
2	Параллельные проекции плоских фигур	2
3	Изображение пространственных фигур в параллельной проекции	2
4	Сечения многогранников	2
5	Ортогональное проектирование	2
6	Центральное проектирование. Перспектива	3
7	Использование графического редактора «Adobe Illustrator» для изображения пространственных фигур	2
	Зачет	2

1. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно в геометрии для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть π — некоторая плоскость, l — пересекающая ее прямая (рис. 1). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведем прямую, параллельную прямой l. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется параллельной проекцией точки A на плоскость π в направлении прямой l. Обозначим ее A'. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

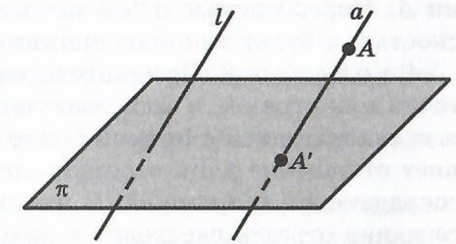


Рис. 1

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется ее проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется *параллельным проектированием* на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть Φ — некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется *параллельной проекцией* фигуры Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то ее проекцией является прямая.

Доказательство. Ясно, что если прямая k параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой на плоскость π будет точка пересечения прямой l и плоскости π. Пусть k не параллельна

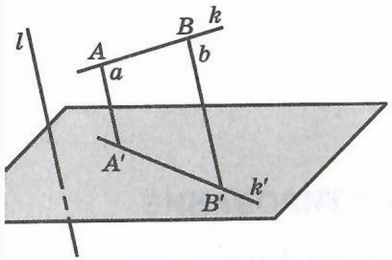


Рис. 2

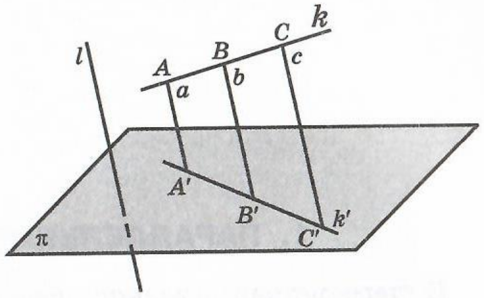


Рис. 3

е совпадает с прямой l (рис. 2). Возьмем какую-нибудь точку A на пря- : k и проведем через нее прямую a, параллельную l. Ее пересечение с скостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точ- A. Через прямые a и k проведем плоскость α. Ее пересечением с пло- стью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k.

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть ка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной : совпадающей с прямой l, или нет. Параллельное проектирование сохра- т отношение длин отрезков, лежащих на прямой, не параллельной и не падающей с прямой l. В частности, при параллельном проектировании эдина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Ясно, что если отрезок лежит на прямой, параллель- : или совпадающей с прямой l, то его проекцией будет точка. Пусть ки A, B и C лежат на прямой k, не параллельной и не совпадающей с імой l; k' — проекция прямой k на плоскость π в направлении прямой $'$, B', C' — проекции точек A, B и C соответственно; a, b, c — соответ- ующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l с. 3). Тогда из теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отноше- й $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B — середина отрезка , то B' — середина отрезка $A'C'$.

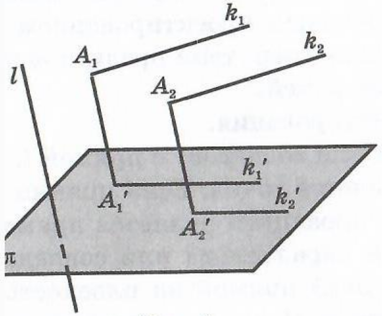


Рис. 4

Свойство 3. Если две параллельные прямые, не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 4). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой, по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны.

Упражнения

1. В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

2. Сколько точек может получиться при параллельном проектировании трех различных точек пространства? Сделайте чертеж.

3. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Сделайте чертеж.

4. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая? Сделайте чертеж.

5. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки? Сделайте чертеж.

6. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Сделайте чертеж.

7. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

8. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

9. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

10. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые»?

11. Справедливо ли утверждение: «Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую»?

12. В пространстве задана прямая. Может ли ее параллельная проекция быть параллельной этой прямой?

13. Можно ли по параллельной проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?

14. В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием ее параллельной проекции на плоскость?

15. Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

16. Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

17. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше (меньше) ого отрезка?

18. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной екции, то отрезок параллелен плоскости проектирования?

19. Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отиение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

20. Точки A', B' являются параллельными проекциями точек A, B; $= a$, $BB' = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите стояние между точкой C и ее проекцией C'.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важуметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в ерхность основных пространственных фигур. Например, плоские огоугольники являются гранями многогранников, круги — основания цилиндров и конусов.

Теорема. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной скости проектирования π, то ее проекция F' на эту плоскость будет равфигуре F.

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', оставляя точки фигуры F с их проекциями. Тогда, если A и B — точки туры F и A', B' — их проекции, то $ABB'A'$ — параллелограмм (рис. 5). Слеательно, $A'B' = AB$. Таким образом, это преобразование сохраняет расстоя- между точками, т. е. является движением и, значит, фигуры F и F' равны.

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проекрования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

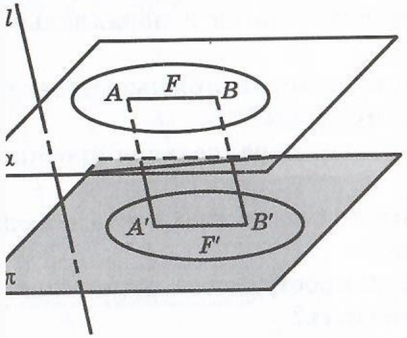


Рис. 5

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причем если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом, если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 6). Построим на одной из его сторон, например AC, равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

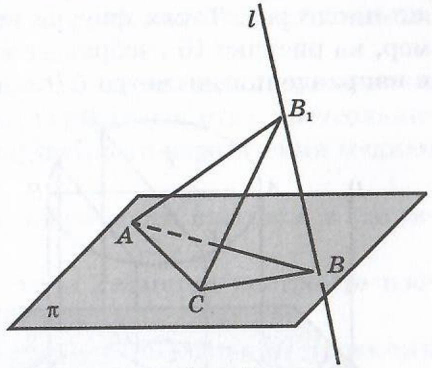


Рис. 6

Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром в точке O (рис. 7). Выберем какой-нибудь треугольник, например AOB. Его проекцией может быть треугольник $A'O'B'$ на плоскости π (рис. 8), имеющий произвольную форму. Далее отложим $O'D' = A'O'$ и $O'E' = B'O'$. Теперь из точек A' и D' проведем прямые, параллельные прямой $B'O'$; из точек B' и E' проведем прямые, параллельные прямой $A'O'$.

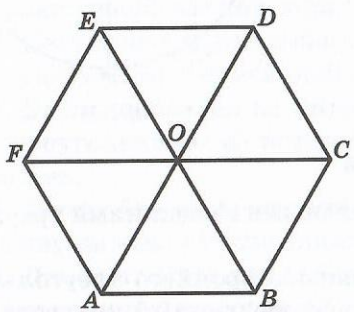


Рис. 7

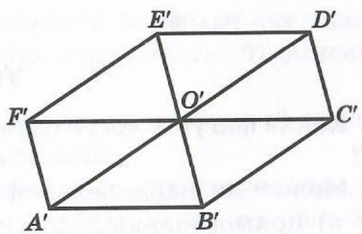


Рис. 8

ıки пересечения соответствующих прямых обозначим F' и C'. Шести-льник $A'B'C'D'E'F'$ и будет искомой проекцией правильного шестиуголь-ка $ABCDEF$.

Выясним, какая фигура является параллельной проекцией окружно-:. Пусть F — окружность в пространстве, F' — ее проекция на пло-ость π в направлении прямой l. Если прямая l параллельна плоскости ружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отре-:, равный диаметру окружности.

Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость окружности с. 9). Пусть AB — диаметр окружности, параллельный плоскости π, и $'$ — его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмем какой-ни-ць другой диаметр CD, и пусть $C'D'$ — его проекция. Обозначим отноше-$C'D' : CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохра-ются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для оизвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ дет параллельна $C'D'$ и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растя-нием окружности в направлении какого-нибудь ее диаметра в одно и то число раз. Такая фигура на плоскости называется эллипсом. Напри-р, на рисунке 10 изображен эллипс, полученный из окружности сжатием направлении диаметра CD в два раза.

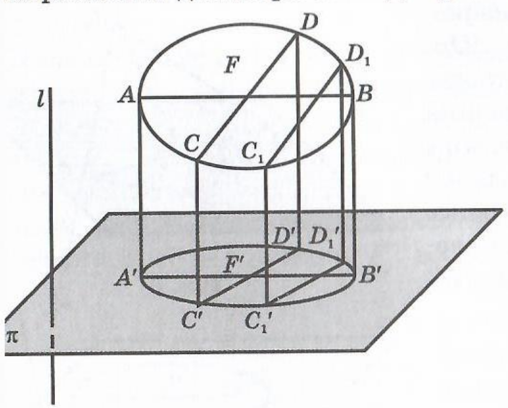


Рис. 9

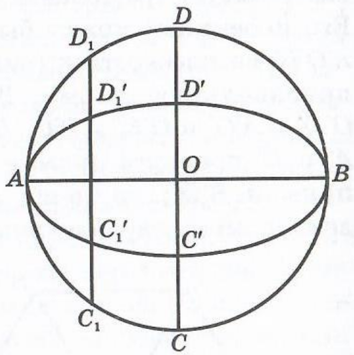


Рис. 10

Упражнения

1. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями треуголь-ка?

2. Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника ıть: а) прямоугольный треугольник; б) равнобедренный треугольник; разносторонний треугольник?

3. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется: а) в равносторонний треугольник; б) в равнобедренный треугольник?

4. Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?

5. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?

6. Верно ли, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?

7. Параллельной проекцией каких фигур может быть квадрат?

8. Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция?

9. В какую фигуру может проектироваться трапеция?

10. Изобразите параллельную проекцию: а) прямоугольника; б) трапеции.

11. Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника: а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

12. Изобразите параллельную проекцию: а) правильного пятиугольника; б) правильного восьмиугольника.

13. Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией треугольника ABC. Расстояния между соответствующими вершинами этих треугольников равны a, b, c. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников.

14. Нарисуйте эллипсы, полученные из окружности сжатием и растяжением в: а) 1,5 раза; б) 2 раза; в) 3 раза.

15. Для данного изображения окружности и диаметра постройте изображение диаметра, перпендикулярного данному.

16. Для данного изображения окружности в параллельной проекции постройте изображение касательной: а) проходящей через данную точку; б) параллельной данной хорде.

17. Изобразите параллельную проекцию квадрата: а) с вписанной в него окружностью; б) с описанной около него окружностью.

18. Дано изображение окружности. Постройте изображение правильного треугольника: а) вписанного в данную окружность; б) описанного около нее.

19. Постройте изображение прямоугольного треугольника: а) вписанного в окружность; б) описанного около окружности.

20. Докажите, что для любых двух треугольников существует параллельная проекция, переводящая один из них в треугольник, подобный другому.

3. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Как говорилось выше, для изображения пространственных фигур ис-
ьзуют параллельную проекцию. Плоскость, на которую проектируется
гура, называется ***плоскостью изображений***, а сама проекция фигуры —
бражением.

Приведем примеры изображений пространственных фигур на плоско-
.

Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его
ни — параллелограммы и, следовательно, изображаются параллело-
ммами (рис. 11).

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается
ɪаллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, парал-
ьные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются
ными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограм-
ми (рис. 12). Аналогичным образом изображается прямоугольный
ɪаллелепипед (рис. 13).

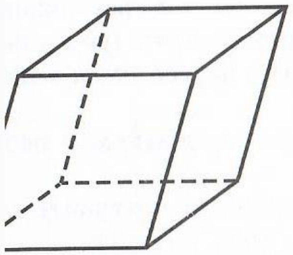


Рис. 11

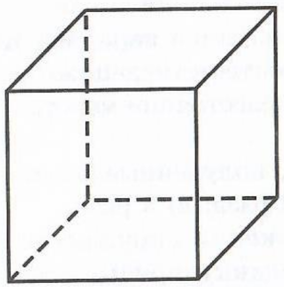


Рис. 12

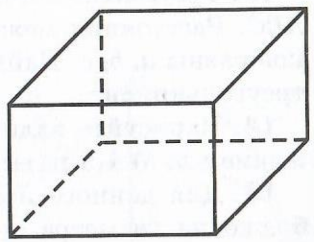


Рис. 13

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить
огоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин много-
ольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной пря-
й, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков,
лучим многоугольник, являющийся изображением второго основания
измы (рис. 14).

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить
огоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь
чку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с
ршинами многоугольника (рис. 15). Полученные отрезки будут изобра-
ать боковые ребра пирамиды.

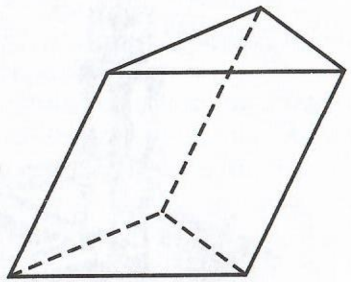


Рис. 14

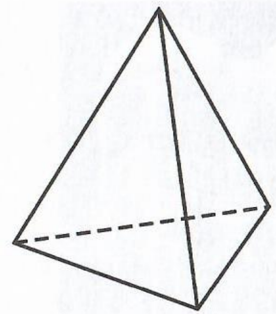


Рис. 15

Для изображения цилиндра достаточно изобразить его основания в виде двух эллипсов, получающихся друг из друга параллельным переносом, и нарисовать две образующие, соединяющие соответствующие точки этих оснований (рис. 16).

Для изображения конуса достаточно изобразить его основание в виде эллипса, отметить вершину и провести через нее две образующие, являющиеся касательными к этому эллипсу (рис. 17).

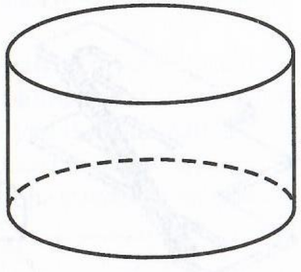


Рис. 16

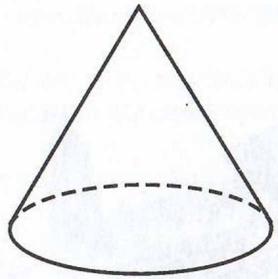


Рис. 17

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать впечатление о трехмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

В живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (impossibility — невозможность) — изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М. Эшер (1898—1972) в гравюрах «Бельведер» (рис. 18), «Водопад» (рис. 19), «Поднимаясь и опускаясь» (рис. 20) изобразил невозможные объекты.

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 21.

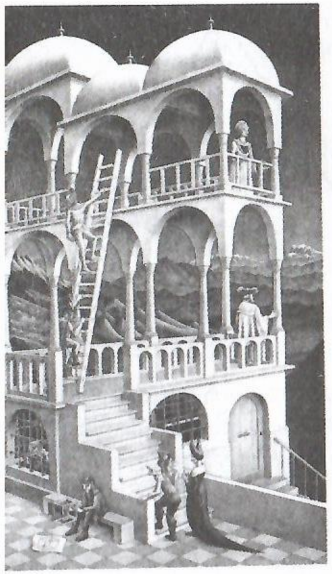


Рис. 18

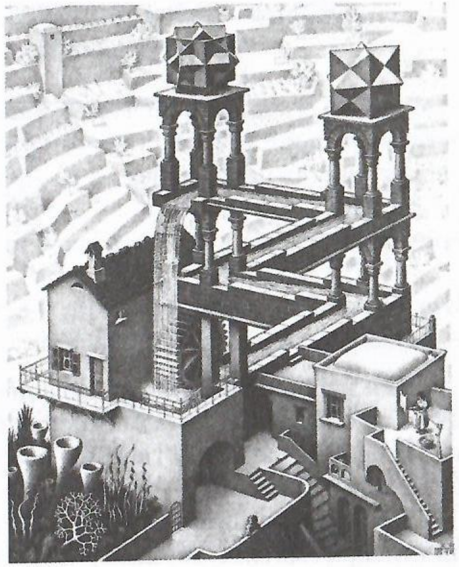


Рис. 19

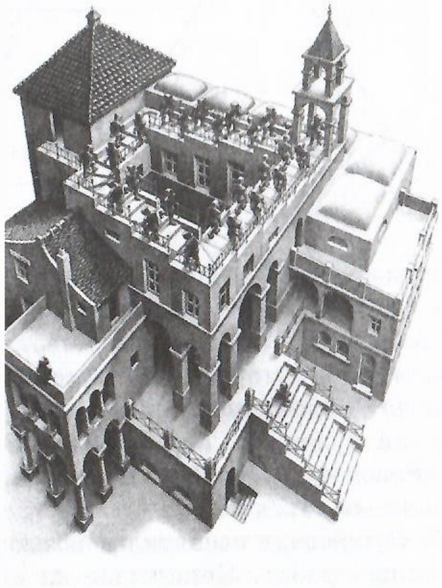


Рис. 20

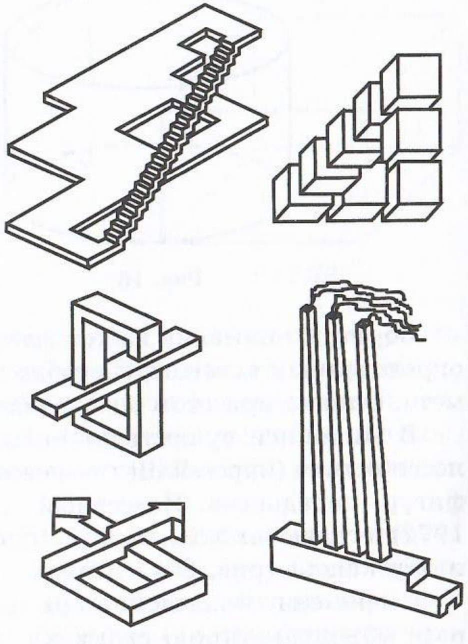


Рис. 21

Упражнения

1. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

2. Постройте изображение куба, ребро которого параллельно плоскости проектирования, а грани — нет.

3. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипедов, две противоположные грани которых параллельны плоскости изображения.

4. На рисунке 13 изображен прямоугольный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

5. На рисунке 11 изображен наклонный параллелепипед. Верно ли утверждение о том, что какие-то его ребра параллельны плоскости проектирования?

6. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

7. На рисунке 14 изображена треугольная призма. Верно ли утверждение о том, что какие-то ее ребра параллельны плоскости проектирования?

8. Постройте изображение правильного тетраэдра $ABCD$, грань ABD которого параллельна плоскости проектирования. Каким будет изображение треугольника ABD?

9. Изобразите в параллельной проекции правильную четырехугольную пирамиду.

10. Изобразите правильный октаэдр $SABCDS'$, две диагонали AC и SS' которого параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырехугольника $ASCS'$?

11. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображенные на рисунке 22?

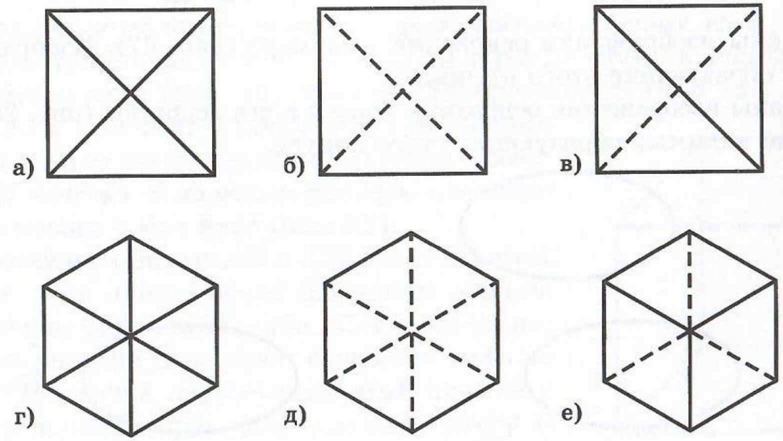


Рис. 22

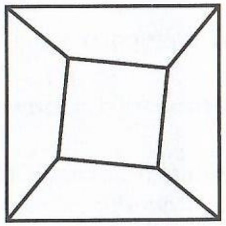


Рис. 23

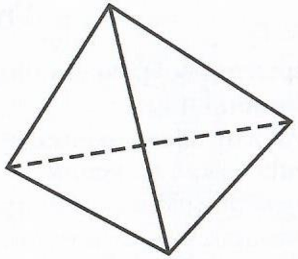


Рис. 24

12. Возможен ли многогранник, изображение которого показано на :унке 23?

13. Можно ли рисунок 24 считать изображением правильного тетраэдра?

14. Дано изображение правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 25). Постройте :оту этого тетраэдра, опущенную из вершины D.

15. Дано изображение правильного тетраэдра (рис. 26). Постройте нтр вписанной в него сферы.

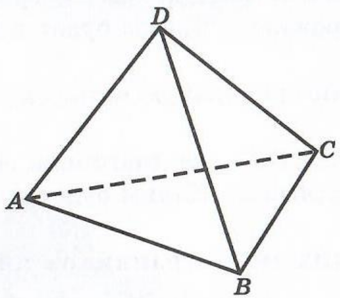


Рис. 25

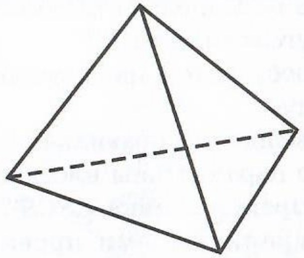


Рис. 26

16. Даны изображения оснований цилиндра (рис. 27). Изобразите две димые образующие этого цилиндра.

17. Даны изображения основания конуса и его вершины (рис. 28). Изоб- зите две видимые образующие этого конуса.

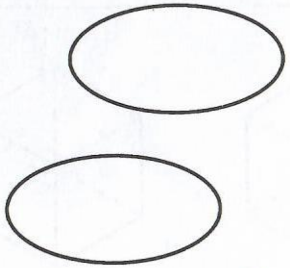


Рис. 27

Рис. 28

4. СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью.

Пусть дано изображение куба и три точки A, B, C, принадлежащие ребрам этого куба, выходящим из одной вершины. Тогда для того чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, достаточно просто соединить их отрезками. Полученный треугольник ABC и будет искомым изображением сечения куба (рис. 29).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 30).

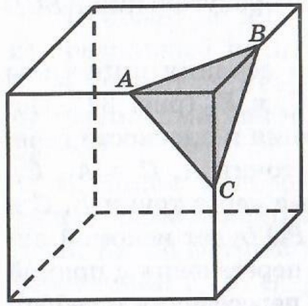


Рис. 29

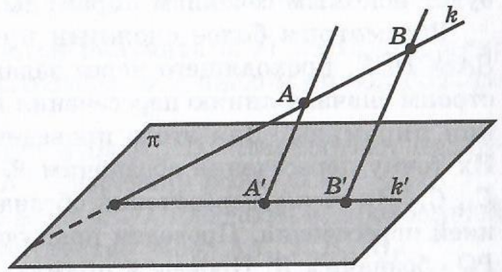


Рис. 30

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходящего через три точки A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (рис. 31). Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (рис. 32).

Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D

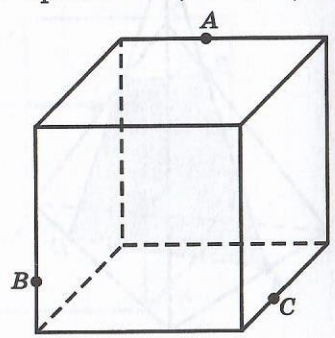


Рис. 31

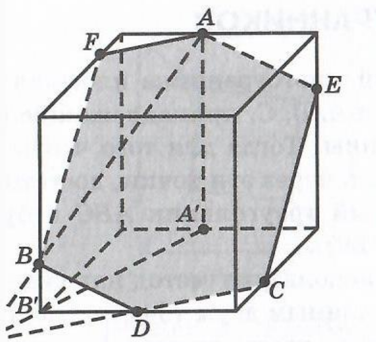


Рис. 32

отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 32).

В качестве примера построим изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, ɪнадлежащие ее ребрам (рис. 33). Проведем прямую AB, и точку ее пере-ения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем пря-о EC, и точку ее пересечения с ребром основания пирамиды обозначим ез D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ ет искомым сечением пирамиды.

Рассмотрим более сложный пример построения сечения пирамиды BCDEF, проходящего через заданные точки A_1, C_1 и E_1 (рис. 34). Пооим сначала линию пересечения плоскости основания и плоскости сече- пирамиды. Для этого проведем прямые через точки A, C и A_1, C_1. точку пересечения обозначим P. Проведем прямые через точки E, C и C_1. Их точку пересечения обозначим Q. Прямая PQ будет искомой ли-й пересечения. Проведем прямую ED, и точку ее пересечения с прямой обозначим R. Проведем прямую RE_1, и точку ее пересечения с ребром

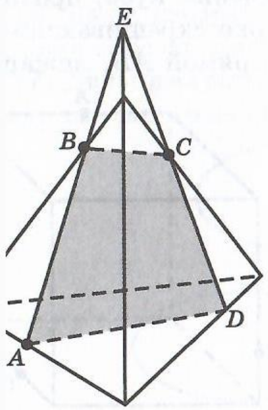


Рис. 33

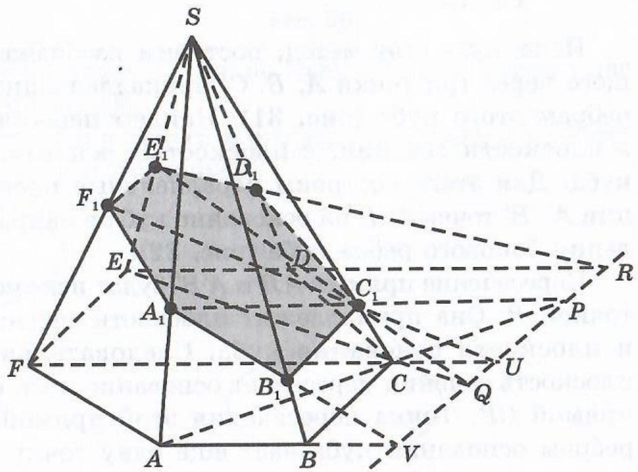


Рис. 34

SD обозначим D_1. Проведем прямую FC, и точку ее пересечения с прямой PQ обозначим U. Проведем прямую UC_1, и точку ее пересечения с ребром SF обозначим F_1. Проведем прямую AB, и точку ее пересечения с прямой PQ обозначим V. Проведем прямую VA_1, и точку ее пересечения с ребром SB обозначим B_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 являются вершинами искомого многоугольника — сечения пирамиды плоскостью.

Упражнения

1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) треугольник; б) правильный треугольник; в) равнобедренный треугольник; г) прямоугольный треугольник; д) тупоугольный треугольник?

2. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) четырехугольник; б) квадрат; в) прямоугольник; г) равнобедренная трапеция; д) неравнобедренная трапеция?

3. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) шестиугольник; б) правильный шестиугольник; в) многоугольник с числом сторон больше шести?

5. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку K — середину ребра CC_1?

6. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G — середины соответственно ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1?

7. Дан куб $A...D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

8. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках: а) 35; б) 36.

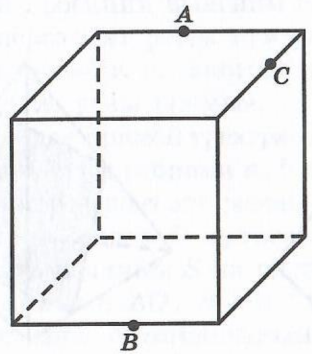


Рис. 35

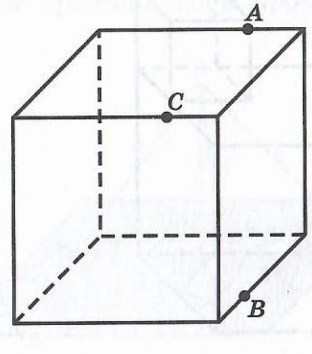


Рис. 36

9. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вер-
ны B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.
0. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая прохо- через две противоположные вершины нижнего основания и середину ого из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ра куба равна 1.
1. Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют ую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 37). Постройте се- ие полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, орые принадлежат скрещивающимся ребрам меньшего куба.
2. Найдите такое сечение куба плоскостью, которое имеет наибольшую щадь.
3. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды пло- стью, проходящей через точки, указанные на рисунке 38.
4. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной амиды плоскостью?
5. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ пло- стью, проходящей через вершину B и точки M, N — середины соот- ственно ребер AD, CD?
6. Как построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, аллельной грани BDC и проходящей через середину ребра AD?
7. Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.
8. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться драт?
9. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырех- льник, изображенный на рисунке 39?
0. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, ходящей через точки, указанные на рисунке 40.

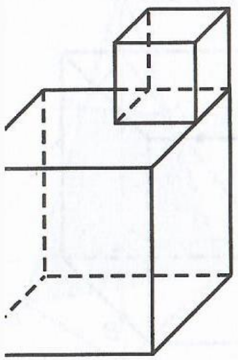


Рис. 37

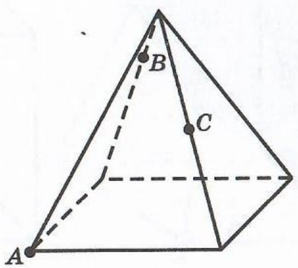


Рис. 38

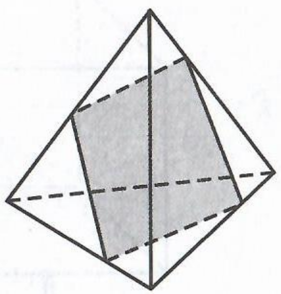


Рис. 39

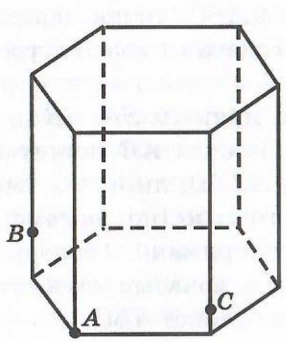


Рис. 40

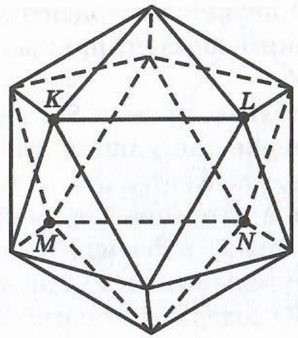


Рис. 41

21. Может ли в сечении октаэдра плоскостью получиться правильный шестиугольник?

22. Может ли в сечении додекаэдра плоскостью получиться правильный шестиугольник?

23. Постройте сечение икосаэдра, проходящее через ребра KL и MN (рис. 41).

5. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Ортогональным проектированием называется параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования.

Поскольку ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, для него справедливы все рассмотренные выше свойства параллельного проектирования.

Для изображения куба или прямоугольного параллелепипеда в ортогональной проекции выясним сначала, куда при ортогональном проектировании переходят ребра прямого трехгранного угла, т. е. такого, у которого все плоские углы прямые.

Пусть дан прямой трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b и c. Плоскость π пересекает эти ребра (рис. 42). Обозначим через O ортогональную проекцию вершины S на плоскость π. Тогда прямые AO, BO и CO будут соответственно ортогональными проекциями прямых SA, SB и SC. Докажем,

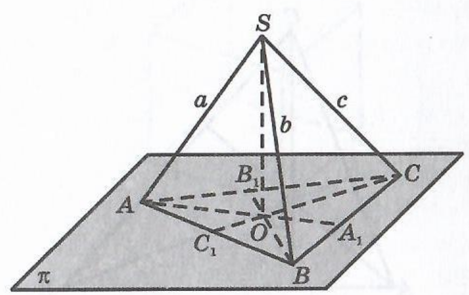


Рис. 42

точка O является ортоцентром треугольника ABC (точка пересечения
эт) и, таким образом, прямые AO, BO и CO содержат высоты треуголь-
а ABC.

Цействительно, прямая SC перпендикулярна прямым SA, SB и, следо-
›льно, перпендикулярна плоскости SAB. Прямая AB лежит в этой
скости и, следовательно, перпендикулярна SC. Прямая CO является
огональной проекцией прямой SC и, следовательно (по теореме о трех
пендикулярах), перпендикулярна AB. Значит, прямая CO содержит вы-
CC_1 треугольника ABC. Аналогичным образом доказывается, что пря-
AO и BO содержат высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC.

Используя доказанное утверждение, построим ортогональную проекцию
мого трехгранного угла. Для этого нарисуем треугольник ABC и прове-
в нем высоты (рис. 43). Лучи OA, OB и OC будут изображением ребер
кгранного угла.

Заметим, что для любых трех лучей a, b и c, с вершиной в точке O, для
орых углы aOb, bOc и aOc больше 90°, существует треугольник ABC,
оты которого лежат на этих лучах. Для его построения отметим
ую-нибудь точку A на луче a и проведем через нее прямую, перпендику-
ную b. Так как c не перпендикулярна b, то она пересечет прямую c
екоторой точке C. Аналогичным образом через точку A проведем пря-
›, перпендикулярную c, и точку ее пересечения с прямой B обозначим
ез B. Тогда прямые BO и CO будут содержать высоты треугольника ABC
начит, прямая AO также будет содержать высоту этого треугольника.

Имея изображение прямого трехгранного угла, легко построить изо-
жение прямоугольного параллелепипеда (рис. 44). Его ребра лежат на
мых, параллельных OA, OB и OC соответственно.

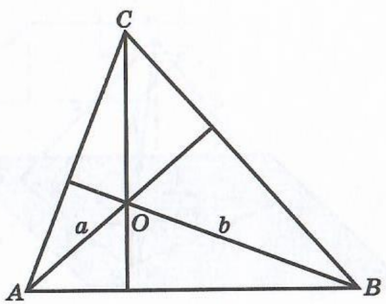


Рис. 43

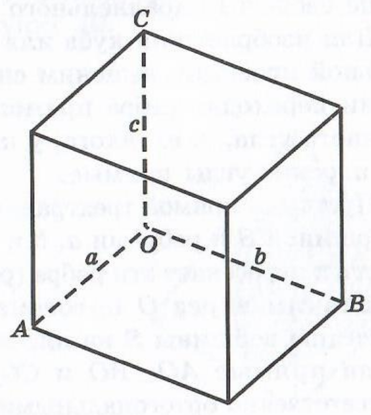


Рис. 44

Выясним теперь, как изображается куб в ортогональной проекции. Для этого вернемся к изображению прямого трехгранного угла, на ребрах которого отмечены точки A, B, C, и предположим, что SA — единичный отрезок, изображенный отрезком OA. Наша задача состоит в том, чтобы на лучах OB и OC построить изображения единичных отрезков.

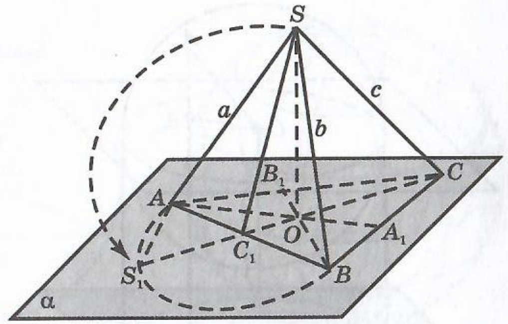


Рис. 45

Представим себе, что треугольник SAB поворачивается относительно прямой AB. При этом высота SC_1 этого треугольника поворачивается в плоскости, перпендикулярной прямой AB, и в плоскости треугольника ABC занимает положение S_1C_1 (рис. 45). Поскольку треугольник ASB прямоугольный, то точка S_1 будет пересечением окружности, построенной на AB как на диаметре, и прямой CO. При этом отрезок S_1A является единичным отрезком.

Пусть теперь дано изображение прямого трехгранного угла (рис. 46, а), для которого OA изображает единичный отрезок. Для построения изображения единичного отрезка на луче OB построим окружность с центром в точке S_1 и радиусом S_1A. Через точку ее пересечения с S_1B проведем прямую, параллельную CO. Ее точка пересечения B' с лучом OB и даст искомую точку, для которой отрезок OB' является изображением единичного отрезка. Аналогичным образом строится изображение OC' единичного отрезка.

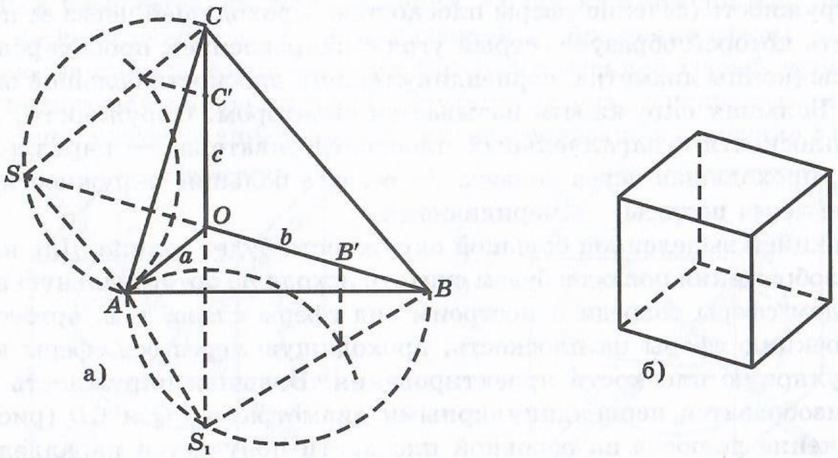


Рис. 46

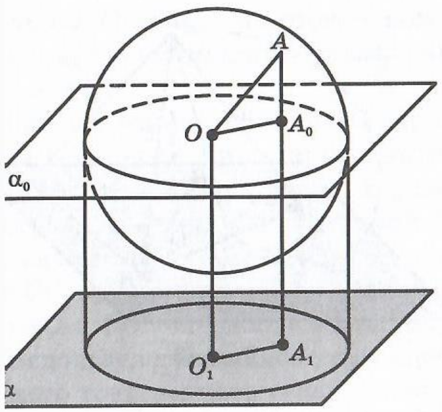


Рис. 47

После того как мы построили изображения единичных отрезков, изображение куба строится так же, как и изображение прямоугольного параллелепипеда с данными ребрами (рис. 46, б).

Ортогональное проектирование используется для изображения цилиндра, конуса, шара, сферы и др.

Рассмотрим вопрос об изображении сферы.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведем плоскость α_0, проходящую через центр сферы O іараллельную плоскости проектирования α. Поскольку плоскости α и α_0 эаллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 47). іением сферы плоскостью α_0 является окружность радиуса R, равного ļиусу сферы. Если A — точка сферы, не принадлежащая этой окружности, $_0$ — ее ортогональная проекция на плоскость α_0, то $OA_0 < OA \leqslant R$. Таким эазом, при ортогональном проектировании на плоскость α_0 точки этой эужности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются утрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией эры является круг того же радиуса.

Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют больюю окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр), оскость которой образует острый угол с направлением проектирования, юлюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружсти). Большая окружность называется экватором. Окружности, лежае в плоскостях, параллельных плоскости экватора, — параллелями, ямая, проходящая через полюсы, — осью, а большие окружности, продящие через полюсы, — меридианами.

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахожния изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекю видом сферы спереди и построим вид сферы слева, т. е. ортогональю проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перндикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось еры изобразятся перпендикулярными диаметрами PQ и CD (рис. 48). юбражение полюсов на основной плоскости получается параллельным реносом полюсов на виде сферы слева.

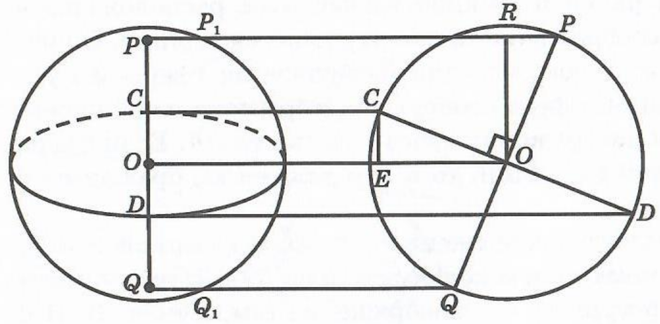


Рис. 48

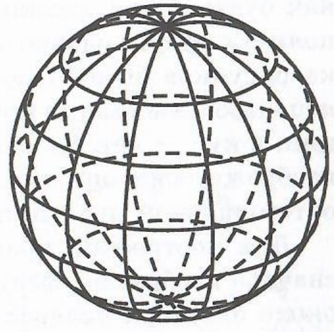


Рис. 49

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Кроме того, имеем $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит, $PP_1 = OC$. Аналогично $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

На изображении сферы, помимо экватора и полюсов, можно нарисовать несколько параллелей и меридианов (рис. 49).

Рассмотрим теперь вопрос об изображении комбинаций многогранников и тел вращения. Начнем с куба и сферы. Одной из распространенных ошибок изображения сферы, вписанной в куб, является изображение, показанное на рисунке 50. Здесь сразу несколько ошибок. Первая связана с неверным изображением точек касания. Точки касания должны располагаться не на окружности, ограничивающей изображение сферы, а внутри нее. Так, например, точки касания верхней и нижней граней куба должны располагаться в полюсах сферы. Эту ошибку можно исправить, несколько увеличив размеры вписанной сферы, как показано на рисунке 51. Здесь

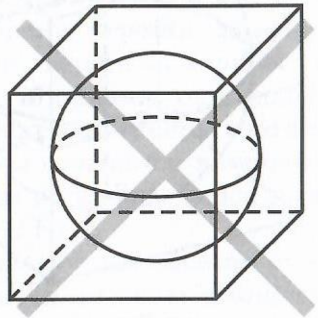


Рис. 50

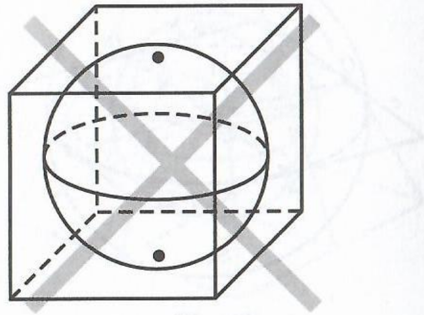


Рис. 51

будто точки касания верхней и нижней граней куба расположены в юсах сферы, однако это изображение также не является верным. Ошиб- рисунков 50 и 51 состоит в том, что для изображения сферы и куба ользованы разные проекции. Сфера изображена в ортогональной проек- :, а куб — нет. На одном изображении этого делать нельзя. Если сфера бражается в ортогональной проекции, то и куб должен изображаться в эгональной проекции.

Для построения правильного изображения сферы, вписанной в куб, чала изобразим сферу с экватором и полюсами (рис. 52). Затем опишем ло экватора квадрат и построим его изображение (см. пункт 2). Это кно сделать следующим образом. Отметим на эллипсе, изображающем атор, какую-нибудь точку A, и проведем касательную a к эллипсу в этой ке. Через точку A и центр эллипса O проведем прямую, и точку ее пере- ения с эллипсом обозначим B. Через точку B проведем прямую b, аллельную a. Она также будет касательной к эллипсу. Построим диа- р CD, сопряженный диаметру AB эллипса, и через точки C и D прове- : прямые c и d, параллельные AB. Они будут касательными к эллипсу. эаллелограмм $PQRS$ будет искомым изображением квадрата, описанно- эколо экватора.

Через вершины параллелограмма проведем прямые, параллельные оси сферы, и отложим на них в обе стороны отрезки, равные $ON = OS$. тучим вершины верхнего и нижнего оснований куба, описанного около ры. Соединяя теперь соответствующие вершины верхнего и нижнего ований, получим остальные ребра искомого куба (рис. 53).

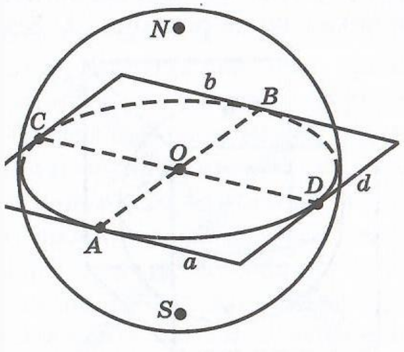


Рис. 52

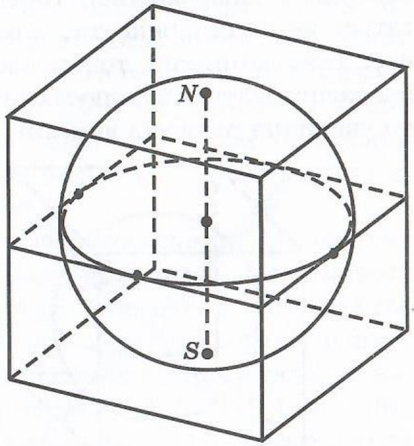


Рис. 53

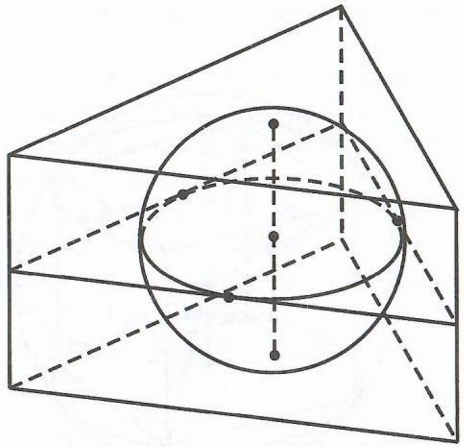


Рис. 54

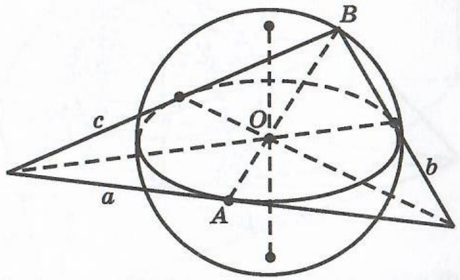


Рис. 55

Заметим, что изображение куба, описанного около данной сферы, полностью определяется начальным выбором точки A. Выбирая различным образом эту точку, можно получать различные изображения куба, описанного около сферы.

Аналогичным образом строится изображение правильной треугольной призмы, описанной около сферы (рис. 54). Сначала строим изображение правильного треугольника, описанного около экватора. Для этого выбираем точку касания A и проводим через нее касательную a. Через точку A и центр эллипса проводим прямую и откладываем на ней отрезок $OB = 2OA$. Через точку B проводим касательные b и c к эллипсу. Прямые a, b и c образуют искомый треугольник, описанный около эллипса (рис. 55). Через вершины этого треугольника проведем прямые, параллельные оси SN сферы, и отложим на них в обе стороны отрезки, равные $ON = OS$. Получим вершины верхнего и нижнего оснований призмы, описанной около сферы. Соединяя теперь соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, получим остальные ребра искомой призмы (рис. 54).

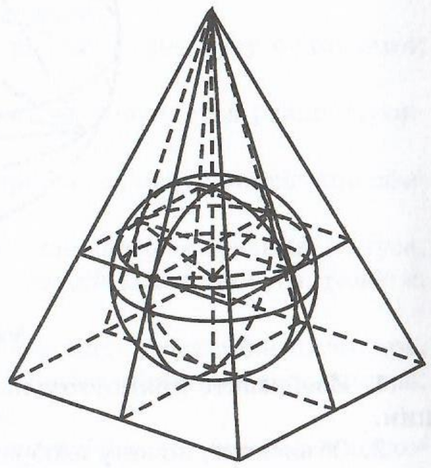


Рис. 56

Аналогичным образом строится изображение пирамиды с вписанной в нее сферой (рис. 56). В случае, если сфера

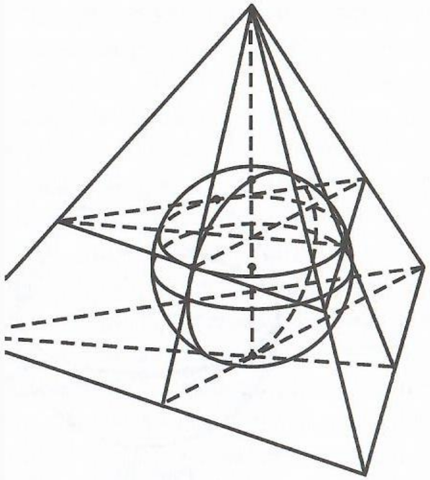


Рис. 57

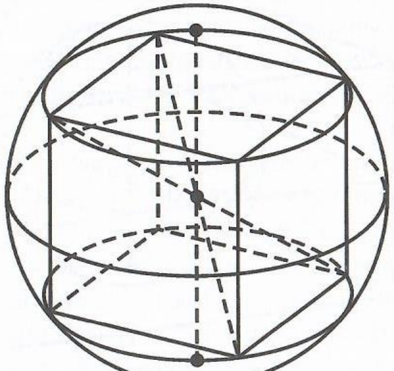


Рис. 58

сана в правильный тетраэдр (рис. 57), нужно учитывать, что центр ры делит высоту пирамиды в отношении 3 : 1, считая от вершины. На рисунках 58 изображена сфера с вписанным в нее кубом. На рисун- 59 изображена сфера с вписанным в нее правильным тетраэдром.

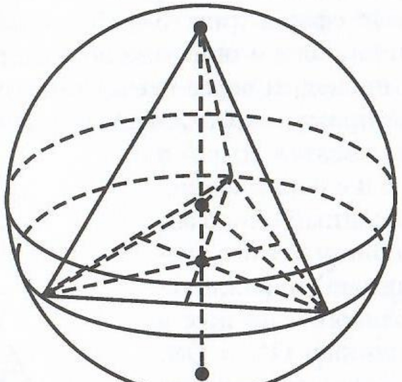


Рис. 59

Упражнения

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед в ортогональной проек- ı.

2. Объясните, почему изображение прямоугольного параллелепипеда на унке 60 не является ортогональной проекцией.

3. Изобразите куб в ортогональной проекции.

4. Докажите, что в сечении прямого трехгранного угла плоскостью не может получиться прямоугольный или тупоугольный треугольник.

5. Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор, постройте изображения полюсов.

6. Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами изобразите экватор.

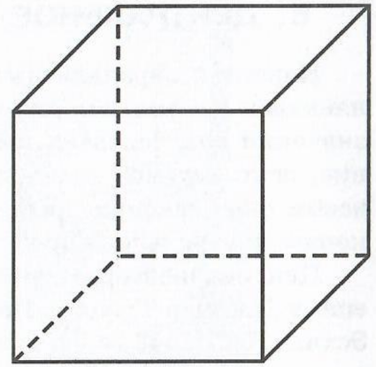


Рис. 60

7. Изобразите сферу, вписанную в куб.

8. Изобразите правильную шестиугольную призму, описанную около сферы.

9. Изобразите цилиндр, описанный около сферы.

10. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду, описанную около сферы.

11. Изобразите конус, описанный около сферы.

12. Изобразите сферу, описанную около правильной шестиугольной призмы.

13. Изобразите сферу, описанную около правильной четырехугольной пирамиды.

14. Изобразите октаэдр, вписанный в сферу.

15. Изобразите сферу, описанную около цилиндра.

16. Изобразите сферу, описанную около конуса.

17. Изобразите конус, высота которого равна: а) радиусу основания; б) диаметру основания.

18. Изобразите конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник.

19. По данному изображению конуса постройте: а) центр вписанной сферы; б) центр описанной сферы.

20. Большая и малая оси эллипса, изображающего основания конуса, равны соответственно a и b. Отрезок, изображающий высоту конуса, равен c. Найдите саму высоту конуса.

21. Большая и малая оси эллипса, изображающего основания цилиндра, равны соответственно 5 см и 3 см. Отрезок, изображающий высоту цилиндра, равен 8 см. Найдите саму высоту цилиндра.

22. По данному изображению цилиндра постройте его сечение плоскостью, не параллельной основанию.

6. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ПЕРСПЕКТИВА

Наряду с параллельным и ортогональным проектированиями, приме- ыми в геометрии для изображения пространственных фигур, большое ение для человека имеет так называемое центральное проектирова- , используемое в живописи, фотографии и т. д. Само восприятие чело- м окружающих предметов посредством зрения осуществляется по за- ам центрального проектирования.

Центральное проектирование, или перспектива, как наука возникла в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах ила (525—456 гг. до н. э.). Значительное место изображению пространст- ых фигур с использованием перспективы уделено в трактате «О гео- рии» известного мыслителя и ученого Демокрита (около 460—370 гг. . э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. имо своих знаменитых «Начал», он написал много других сочинений. м числе в работе «Оптика» Евклид с позиций геометрии подробно изло- природу человеческого зрения, того, как получается изображение различ- предметов на сетчатке глаза. Евклид писал, что мы ощущаем предметы, да исходящие от них прямолинейные лучи сходятся в нашем глазу. тому всю систему лучей зрения можно представить себе в виде пира- ы, вершина которой находится в глазу, а основанием ее служит рас- гриваемый нами предмет. Евклид ввел также постулат о том, что ка- щиеся размеры предмета зависят от угла, под которым он виден.

Самыми значительными работами древнегреческого периода по перс- тиве считаются произведения римского архитектора и инженера Марка рувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, умер около . до н. э.). Способы построения изображений в перспективе изложены ым в труде «Об архитектуре», состоящем из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха рождения. При этом теоретиком перспективы считается итальянский итектор Филиппо Брунеллески (1377—1446), а практиками, воплотив- ии ее достижения в своих полотнах, — великие художники Леонардо Винчи (1452—1519) и Альбрехт Дюрер (1471—1528) и многие другие ожники, скульпторы, архитекторы Возрождения.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяю- к получать перспективу, некоторые из которых он изобразил на своих вюрах. Например, на рисунке 61 изображена гравюра, на которой азано, что для получения перспективного изображения предмета меж- глазом наблюдателя и предметом помещается рамка, разделенная на

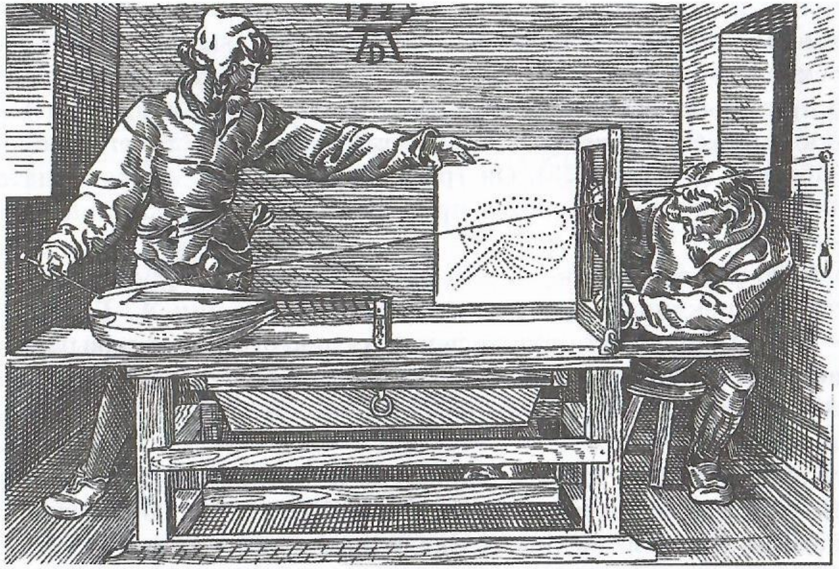


Рис. 61

небольшие квадраты сеткой. С помощью натянутой нити сначала копируются контуры модели, а затем полученное изображение переносится на бумагу.

Леонардо да Винчи в своем произведении «Трактат о живописи» делит перспективу на три основные части.

1. Линейная перспектива, которая изучает законы построения уменьшения фигур по мере удаления их от наблюдателя.

2. Воздушная и цветовая перспектива, которая трактует изменение цвета предметов в зависимости от их расстояния до наблюдателя и влияния слоя воздуха на насыщенность и локальность цвета.

3. Перспектива четкости очертания формы предмета, в которой анализируется изменение степени отчетливости границ фигур и контраста света и тени на них по мере удаления их в глубину пространства, изображаемого на картине.

Два последних раздела не получили дальнейшего теоретического развития из-за сложности исследования проблемы. Первый же раздел развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Основателем этого раздела геометрии считают французского ученого, геометра, инженера и активного общественного деятеля Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818). Его книга «Начертательная метрия», изданная в 1795 году, явилась первым систематизированным :ожением методов изображения пространственных фигур на плоскости.

Русские художники XVII—XIX вв. хорошо владели теорией перспек- :ы и применяли ее в своих картинах. Крупнейшим представителем рус- й академической школы, лучшим рисовальщиком своего времени был П. Лосенко (1737—1773). Он требовал от своих учеников тщательного чения теории перспективы и применения ее законов в академическом :унке.

Более 20 лет вел поиск способа овладения видением натуры на основе .онов перспективы известный русский художник А. Г. Венецианов 80—1847). Он считал, что обучение художественным навыкам необхо- ιо начинать с изучения законов перспективы, которую художник рас- ιтривал как метод изображения реальных предметов в конкретной об- новке.

Большое значение придавал изучению перспективы замечательный ский художник и педагог Н. Н. Ге (1831—1894). Обращаясь к своим никам, он говорил: «Учите перспективу, и когда овладеете ею, внесите з работу, в рисование. Никогда не отделяйте ее от рисования, как это ают многие, т. е. рисуют по чувству, а потом поправляют правилами ɪспективы — напротив, пусть перспектива у вас будет всегдашним спут- ɪом вашей работы и стражем верности».

Перейдем теперь к рассмотрению основных определений, свойств и тео- ɪ центрального проектирования.

Пусть π — некоторая плоскость, S — не принадлежащая ей точка, центр ɪектирования (рис. 62). Для точки A пространства проведем прямую a, диняющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с пло- стью π называется центральной проекцией точки A на плоскость π. Обо- ιчим ее A'. Соответствие, при котором точкам A пространства со- :тавляются их центральные проекции A', называется ***центральным*** ***ɪектированием***, или ***перспективой***.

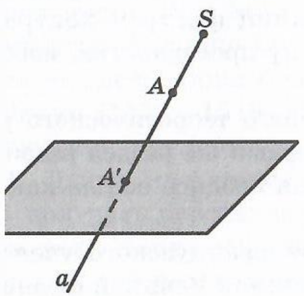


Рис. 62

Заметим, что не для каждой точки пространства определена ее центральная проекция. В случае, если прямая a параллельна плоскости π, точка A не имеет проекции на эту плоскость.

Если Φ — фигура в пространстве, то проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется центральной проекцией фигуры Φ на плоскость π. Говорят также, что фигура Φ' является перспективой фигуры Φ.

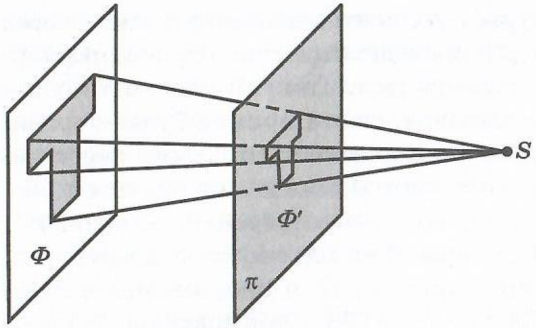


Рис. 63

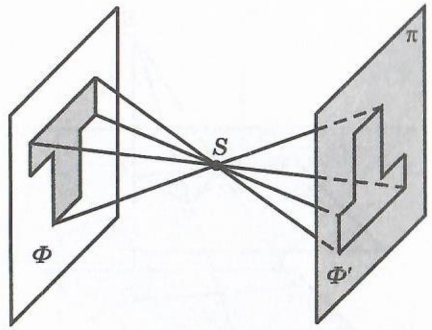


Рис. 64

На рисунке 63 показано центральное проектирование в случае, когда плоскость проектирования расположена между фигурой Φ и центром проектирования S. Если центр проектирования представлять себе как глаз наблюдателя, то впечатление, производимое на него изображением Φ', будет таким же, как и от самой фигуры Φ. Отсюда ясно, что центральное проектирование дает наиболее наглядное изображение пространственных фигур.

На рисунке 64 показано центральное проектирование в случае, когда центр проектирования расположен между фигурой Φ и плоскостью проектирования. Такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования.

На рисунке 65 показано центральное проектирование в случае, когда фигура Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования. Примеры таких проекций дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Такие проекции получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

Теорема. Если плоская фигура F расположена в плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то ее центральной проекцией будет фигура F', подобная F, причем коэффициент подобия k будет равен отношению расстояний от центра S до плоскостей π и α (рис. 66).

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам

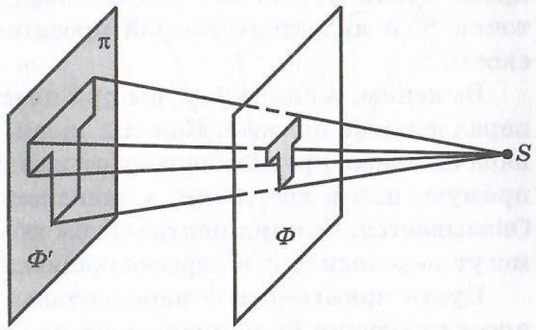


Рис. 65

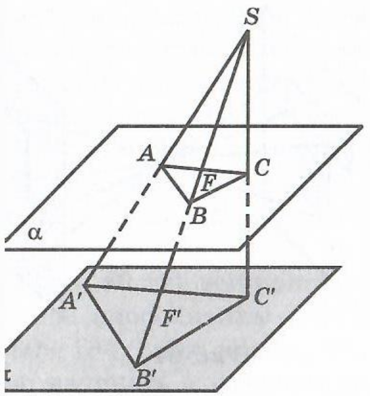


Рис. 66

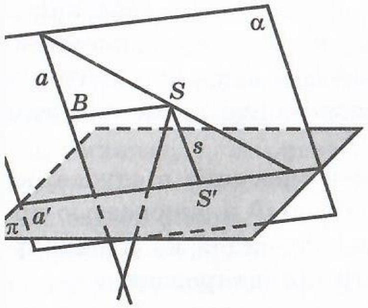


Рис. 67

фигуры F их центральные проекции. Через центр S проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точки пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим C и C' соответственно. Для точек A и B фигуры F на плоскости α рассмотрим их проекции A', B' и треугольники ABS, $A'B'S$ и ACS, $A'C'S$. Они подобны, и коэффициент подобия k равен отношению $SC : SC'$. Таким образом, определенное преобразование фигуры F в фигуру F' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры F и F' подобны.

Выясним, в какую фигуру при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведем плоскость α и линию ее
ересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 67). В плоскости α через
ку S проведем прямую s, параллельную a, и точку ее пересечения с
мой a' обозначим S'. Легко видеть, проекции имеют все точки прямой a,
ме точки B, для которой SB параллельна плоскости π. Прямая a' без
ки S' и является искомой проекцией прямой a (без точки B) на пло-
сть π.

Выясним, в какие фигуры при центральном проектировании переходят
аллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании
аллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну
мую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых.
азывается, что при центральном проектировании параллельные прямые
ут переходить и в пересекающиеся прямые.

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр
ектирования не принадлежит плоскости этих прямых (рис. 68). Тогда,
олняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их

проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b', за исключением их общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. п.

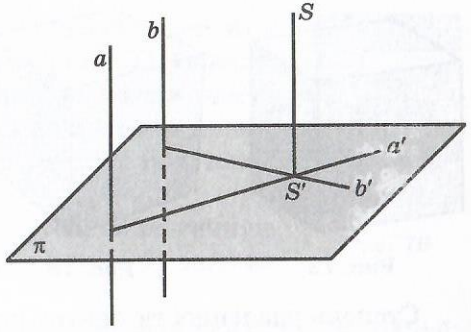


Рис. 68

Приведем изображения куба в центральной проекции.

На рисунке 69 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

На рисунке 70 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

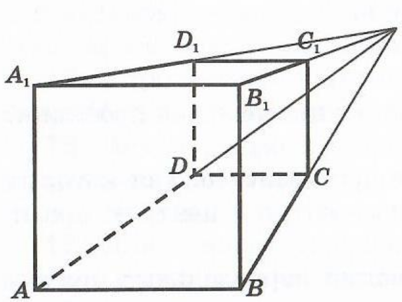


Рис. 69

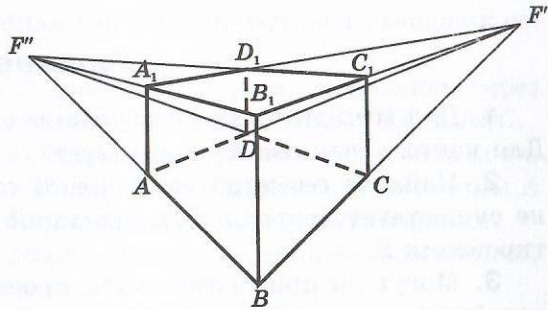


Рис. 70

На рисунке 71 изображен куб в центральной проекции на плоскость, не параллельную ни одному его ребру.

Для получения изображений пространственных фигур в ортогональной и центральной проекциях можно воспользоваться графическими возможностями компьютерной программы «Maple». Среди готовых изображений в этой программе имеются изображения правильных многогранников, и в частности куба.

Направление проектирования можно задавать, указывая сферические координаты центра проектирования или просто поворачивая фигуру мышкой.

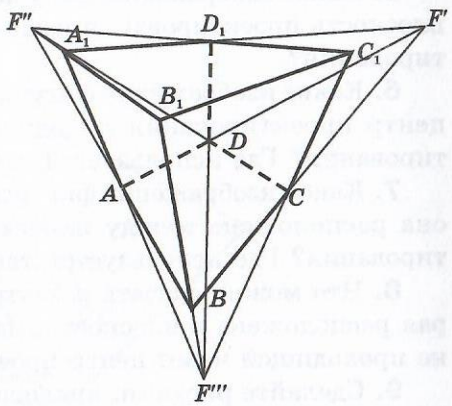


Рис. 71

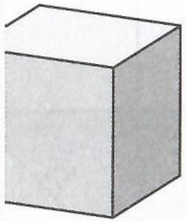


Рис. 72

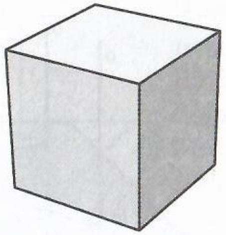


Рис. 73

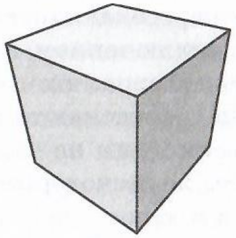


Рис. 74

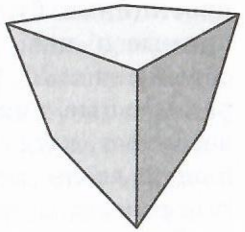


Рис. 75

Степень удаленности центра проектирования от фигуры можно указать слом от 0 до 1 или выбрать из предложенных вариантов: а) бесконечная ›тогональное проектирование); б) большая; в) средняя; г) маленькая.

На рисунках 72—75 представлены соответствующие изображения куба, ичем центр проектирования расположен несколько выше куба.

Упражнения

1. Для всех ли точек пространства существует центральная проекция? я каких точек она не существует?

2. Найдите геометрическое место точек в пространстве, для которых существует центральных проекций на плоскость π с центром проек- рования S.

3. Могут ли при центральном проектировании параллельные прямые ейти в пересекающиеся?

4. В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две раллельные прямые?

5. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если оскость проектирования расположена между фигурой и центром проек- рования?

6. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если нтр проектирования находится между фигурой и плоскостью проек- рования? Где используется такое изображение?

7. Какое изображение фигуры получится в центральной проекции, если а расположена между плоскостью проектирования и центром проек- рования? Где используется такое изображение?

8. Что можно сказать о центральной проекции плоской фигуры, кото- я расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования и проходящей через центр проектирования?

9. Сделайте рисунки, аналогичные рисункам 63, 64, 65, для централь- х проекций фигуры, изображенной на рисунке 76.

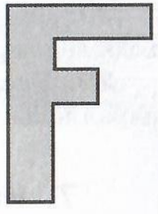


Рис. 76

10. Пусть прямая пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования (рис. 67). Определите, куда при центральном проектировании переходит часть этой прямой, расположенная выше плоскости проектирования. Куда переходит часть этой прямой, расположенная ниже плоскости проектирования?

11. Постройте центральную проекцию куба, аналогичную изображенной на рисунке 69, так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

12. Постройте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

13. Постройте центральную проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость, не параллельную ее основанию.

14. В пирамиде с высотой 3 м на расстоянии 2 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите коэффициент подобия сечения и основания пирамиды.

15. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через точки M, N и P, принадлежащие соответственно граням ADB, BDC и ABC.

16. Шестиугольник $ABCDEF$ плоскости α проектируется на плоскость π с центром проектирования S (рис. 77). Дано изображение A_1 вершины A этого многоугольника. Постройте изображения остальных его вершин.

17. Для данного изображения конуса постройте сечение плоскостью, пересекающей все его образующие.

18. Угол между образующей и высотой конуса равен φ. Через точку на образующей, отстоящую от вершины на расстояние d, проведено сечение под углом ψ к высоте ($\psi > \varphi$), пересекающее боковую поверхность конуса по эллипсу. Найдите большую ось этого эллипса.

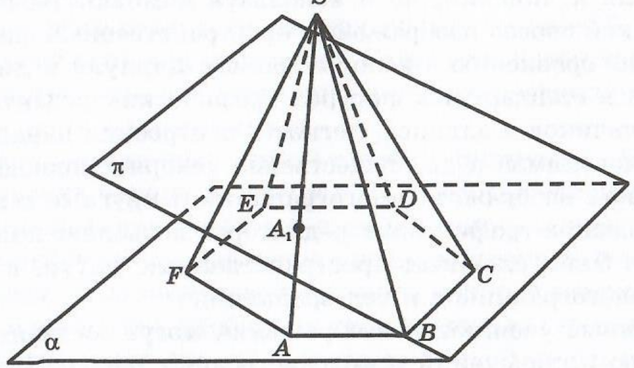


Рис. 77

19. Для данного изображения конуса постройте сечение плоскостью, про-
;ящей через центр основания и параллельной одной из образующих конуса.
20. Для данного изображения конуса постройте сечение плоскостью,
›аллельной высоте конуса.

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА «ADOBE ILLUSTRATOR» ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Обычно изображение пространственных фигур на плоскости осуще-
ляется с помощью циркуля и линейки. Однако использование цир-
ія и линейки для изображения пространственных фигур имеет свои
;остатки:

1. Оно занимает много времени даже для изображения простых про-
анственных фигур, не говоря уже о сложных.

2. Использование циркуля и линейки является скорее теоретическим
ходом, свидетельствующим о возможности построения фигуры, чем прак-
ческим. На практике неизбежные погрешности могут приводить к не-
івильным изображениям. Например, такие погрешности возникают при
строении прямой, параллельной данной, и т. п.

3. Для изображения круглых тел (цилиндр, конус, сфера) требуется
строить изображение окружности, являющееся эллипсом. Однако цир-
лем и линейкой можно построить отдельные точки эллипса, но не весь
ипс. Соединяя же отдельные построенные точки эллипса плавной кри-
і, мы получим только приближенное изображение эллипса, не всегда
рошего качества.

Строить изображения пространственных фигур можно не только с по-
цью циркуля и линейки, но и используя компьютерные графические
;акторы. Такой способ изображения пространственных фигур имеет ряд
імуществ по сравнению с использованием циркуля и линейки:

1. Наличие в стандартных фигурах графических редакторов правиль-
х многоугольников и эллипса, легкость построения параллельных пря-
х, параллелограммов и др. существенно ускоряет процесс построения,
т возможность изображать многогранники и круглые тела.

2. Использование графических редакторов позволяет получать изобра-
ния гораздо более сложных пространственных фигур, в том числе на
ібинации многогранников и тел вращения.

3. Построенные учениками изображения могут составить компьютер-
о коллекцию изображений пространственных фигур, ежегодно попол-
ямую самими учениками.

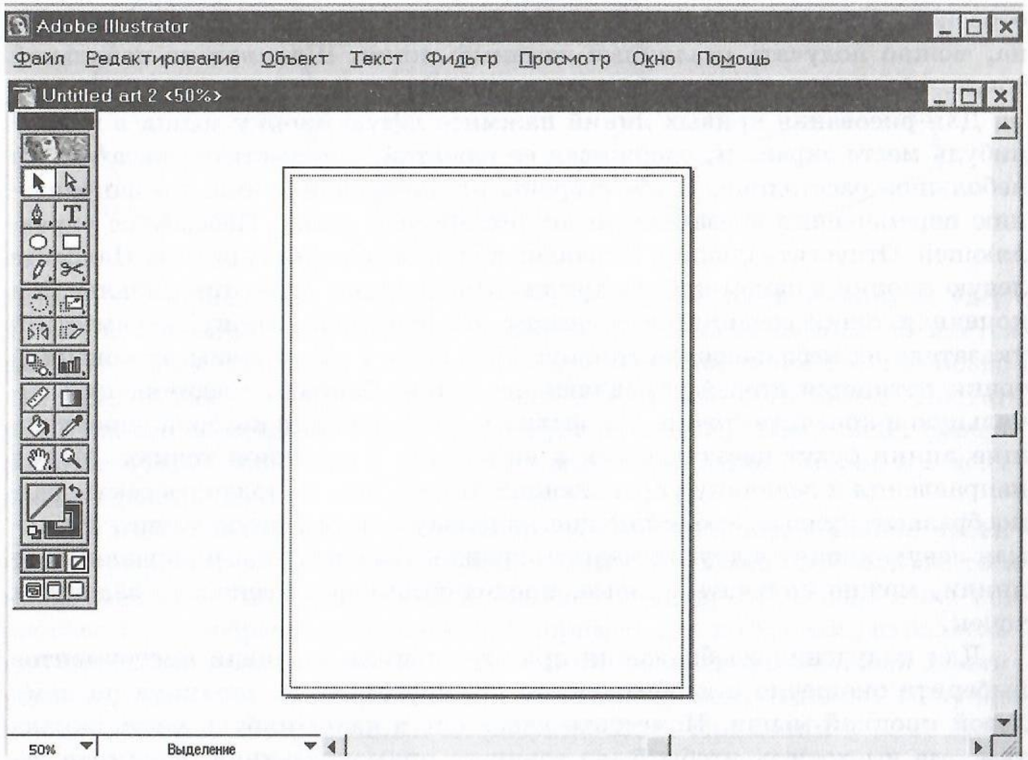


Рис. 78

Рассмотрим возможности использования графического редактора «Adobe Illustrator» для получения изображения плоских и пространственных фигур.

Рабочее окно этого редактора изображено на рисунке 78. Центральную его часть занимает поле для рисования. Слева находится панель с инструментами, используемыми при рисовании и редактировании рисунков. Верхнюю строчку экрана занимает меню.

Для рисования различных линий служит инструмент ***Перо***, расположенный в окошечке панели инструментов с изображением пера.

Сначала выясним, как рисуются прямые линии. В панели инструментов выберите окошечко с изображением пера, щелкнув по нему левой кнопкой мыши. Затем щелкните левой кнопкой мыши в каком-нибудь месте экрана, там, где вы хотите, чтобы был один из концов отрезка. Переместите указатель в другое место экрана и создайте второй конец отрезка, щелкнув еще раз левой кнопкой. Первая и вторая точка будут соединены эзком. Продолжая щелкать левой кнопкой в различных точках экра- можно получать различные ломаные линии. Щелкнув по начальной ке, получим замкнутую ломаную линию.

Для рисования кривых линий нажмите левую кнопку мыши в каком- удь месте экрана и, удерживая ее нажатой, переместите указатель на ольшое расстояние. В обе стороны от начальной точки, по направле- ɔ перемещения указателя потянется прямая линия. Назовем ее управ- ɔщей. Отпустите кнопку. Управляющая линия зафиксируется. Нажмите ую кнопку в каком-нибудь другом месте экрана. При этом начальная и ечная точки соединятся отрезком. Не отпуская кнопку, переместите затель на небольшое расстояние. При этом в обе стороны от конечной ки потянется вторая управляющая линия. Отрезок, соединяющий на- ьную и конечную точки, превратится в кривую, для которой управляю- э линии будут касательными в начальной и конечной точках. Меняя равления и величину управляющих линий, можно получать самые раз- бразные кривые, соединяющие начальную и конечную точки. Нажи- : левую кнопку в других местах экрана и создавая новые управляющие іии, можно получать кривые, проходящие через несколько заданных ек.

Для получения изображения прямоугольника в панели инструментов іерите окошечко с изображением прямоугольника, щелкнув по нему ой кнопкой мыши. Поместите указатель в какое-нибудь место экрана :, где вы хотите, чтобы была вершина прямоугольника. Нажмите ле- ɔ кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. При этом за ı потянется прямоугольник. Достигнув нужного положения, отпустите ıпку. Произойдет фиксирование прямоугольника с вершинами в началь- : и конечной точках перемещения. Если при перемещении указателя олнительно держать нажатой клавишу Shift, то в результате получится драт с вершиной в начальной точке.

Создание изображений эллипса и окружности производится с помощью шечка с эллипсом, и оно совершенно аналогично созданию изображе- ı прямоугольника и квадрата.

Для получения изображения правильных многоугольников поставьте затель на окошечко с изображением эллипса, нажмите левую кнопку ши и удерживайте ее нажатой. Откроются новые окошечки с изобра- ниями многоугольника, звездчатого многоугольника и спирали. Подве- е указатель к многоугольнику и отпустите кнопку. При этом окошечко зображением эллипса на панели инструментов заменится на много- льник. Далее последовательность действий аналогична предыдущему. іменно, поместите указатель в какое-нибудь место экрана там, где вы

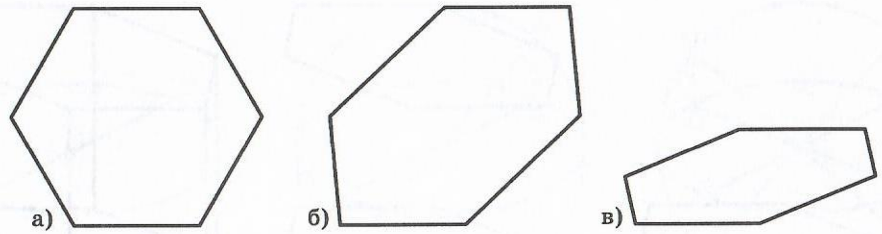


Рис. 79

хотите, чтобы был центр многоугольника. Нажмите левую кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. При этом за ним потянется многоугольник. Нажатие клавиш ↑, ↓ при нажатой левой кнопке позволяет увеличивать или уменьшать число сторон многоугольника. Достигнув нужного положения и размера, отпустите кнопку. Произойдет фиксирование правильного многоугольника с заданным числом сторон и с центром в заданной точке.

Для изображения правильных многоугольников в параллельной проекции в графическом редакторе «Adobe Illustrator» можно воспользоваться инструментами ***Размер*** и ***Наклон***, окошечки которых расположены под окошечком с изображением ножниц. Например, для построения параллельной проекции правильного шестиугольника возьмем правильный шестиугольник (рис. 79, а) и применим к нему инструмент ***Наклон***. Получим шестиугольник, изображенный на рисунке 79, б. Применим к нему инструмент ***Размер***, сжимая его по вертикали. Получим шестиугольник, изображенный на рисунке 79, в, который и будет искомой параллельной проекцией исходного правильного шестиугольника.

Аналогичным образом строятся параллельные проекции других правильных многоугольников.

Используя эти изображения, можно строить изображения многогранников.

Например, для построения изображения куба в параллельной проекции возьмем квадрат (рис. 80, а). Это будет изображение передней грани куба. Скопируем ее и перенесем параллельно на некоторый вектор (рис. 80, б).

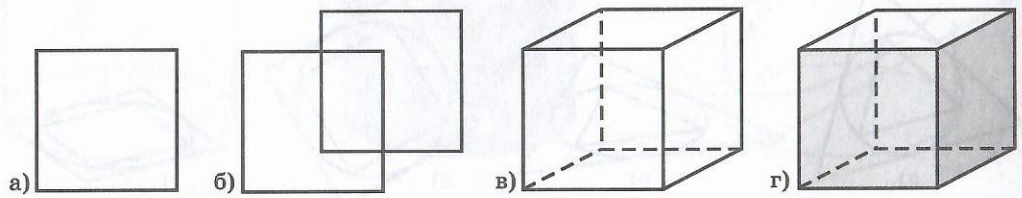


Рис. 80

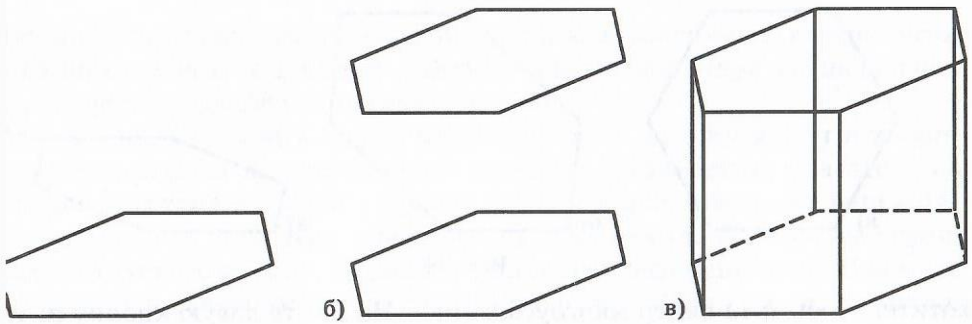


Рис. 81

будет изображение задней грани куба. Соединим отрезками соответ-
гющие вершины передней и задней граней и сделаем три невидимых
ра пунктирными. Получим искомое изображение куба (рис. 80, в). Грани
а можно раскрасить в разные цвета (рис. 80, г).

Для построения изображения правильной шестиугольной призмы вос-
ьзуемся изображением правильного шестиугольника (рис. 81, а). Это
ет изображение нижнего основания призмы. Скопируем его и перене-
вертикально вверх на некоторое расстояние. Это будет изображение
кнего основания призмы (рис. 81, б). Соединим отрезками соответствую-
вершины верхнего и нижнего оснований и сделаем невидимые ребра
ктирными. Получим искомое изображение правильной шестиугольной
змы (рис. 81, в).

Так как параллельной проекцией окружности является эллипс, то для
учения изображения окружности достаточно просто воспользоваться
трументом ***Эллипс***.

Для получения изображения окружности с вписанным или описанным
ло нее правильным треугольником достаточно соответственно впи-
, или описать правильный треугольник около исходной окружности
. 82, а), а затем сжать их в направлении одного из диаметров (рис. 82, б).

Для получения изображения окружности с вписанным или описанным
ло нее квадратом достаточно соответственно вписать или описать квадрат

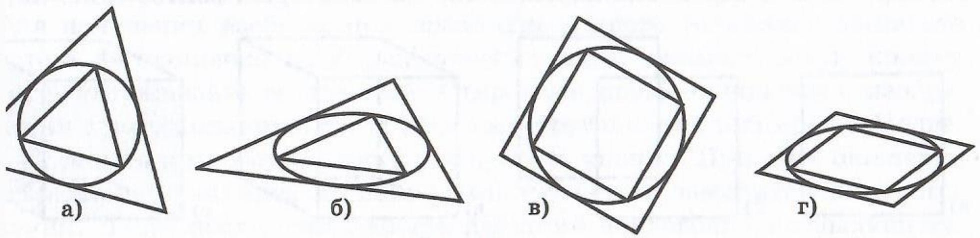


Рис. 82

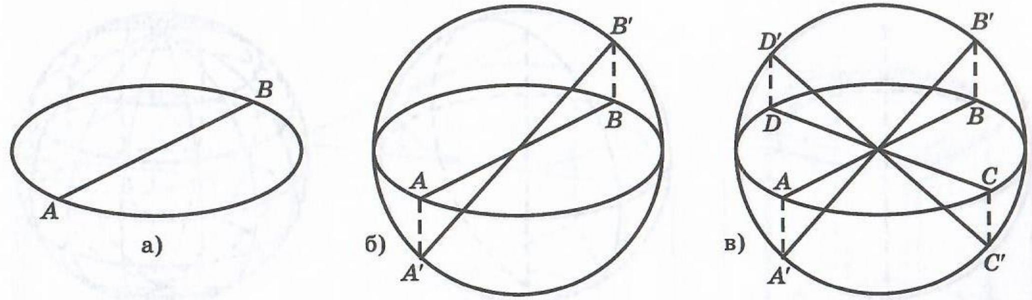


Рис. 83

около исходной окружности (рис. 82, в), а затем сжать их в направлении одного из диаметров (рис. 82, г).

В некоторых случаях изображения круглых тел требуется изобразить диаметр, перпендикулярный диаметру, изображение которого дано. Пусть, например, дано изображение окружности и ее диаметра AB (рис. 83, а). Требуется изобразить диаметр, ему перпендикулярный. Восстановим окружность, сжатием которой получен эллипс, и растянем изображение AB диаметра в вертикальном направлении до диаметра $A'B'$ этой окружности (рис. 83, б). Повернем этот диаметр на 90°. Получим перпендикулярный диаметр $C'D'$. Сожмем этот диаметр в вертикальном направлении до отрезка CD с вершинами в точках эллипса (рис. 83, в). Этот отрезок CD и будет искомым изображением.

Используя изображение эллипса, так же как и в случае призмы, можно получить изображение цилиндра (рис. 84, а). Основание и боковую поверхность цилиндра можно раскрасить (рис. 84, б).

На рисунке 84, в показано, как можно получить изображение сечения цилиндра плоскостью. Для этого достаточно взять эллипс верхнего основания цилиндра, повернуть его на некоторый угол, опустить вниз

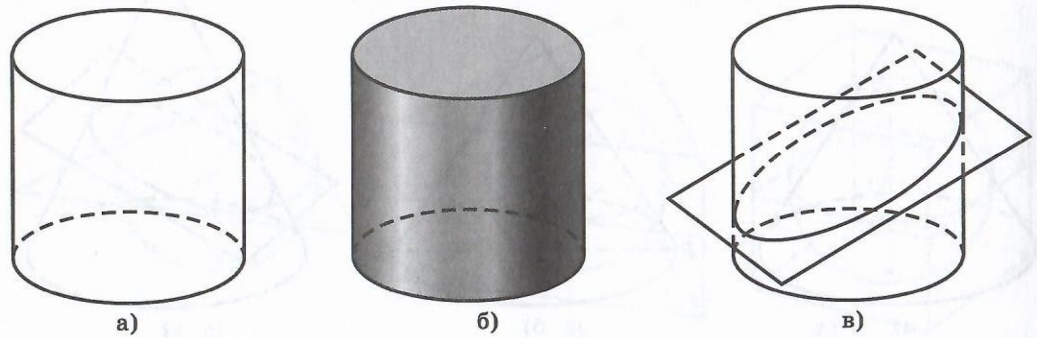
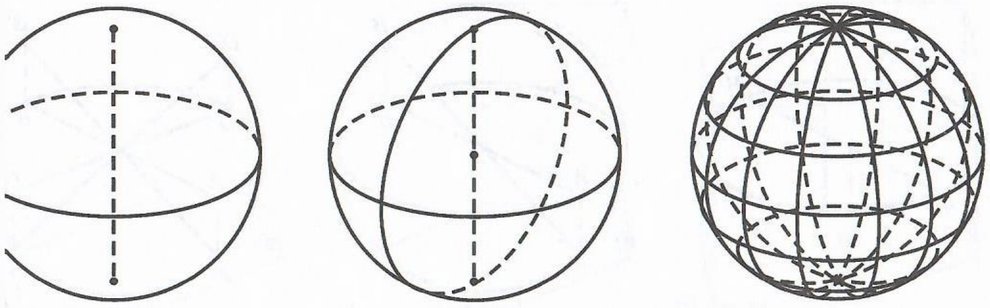


Рис. 84



а) б) в)

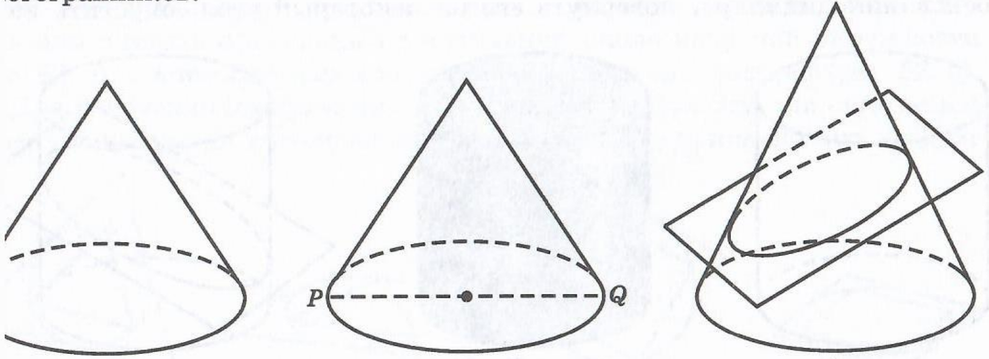
Рис. 85

некоторое расстояние и растянуть так, чтобы он касался образующих илиндра.

Сфера обычно изображается в ортогональной проекции. Изображение эры с выделенным экватором получается сжатием окружности в вертильном направлении (рис. 85, а). Для изображения меридиана (окружно-ı, проходящей через полюса сферы) достаточно сжать исходную окружють в эллипс, а затем повернуть его вокруг центра так, чтобы он прохол через полюса (рис. 85, б). На рисунке 85, в показано изображение неольких меридианов и параллелей.

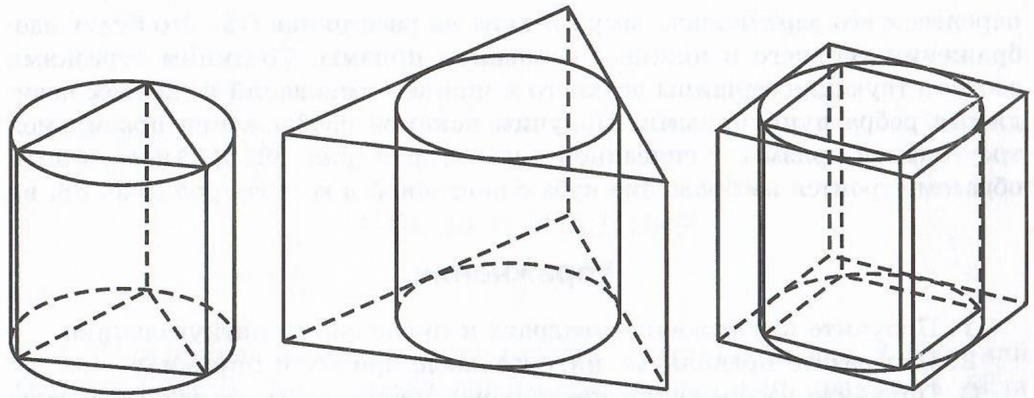
При изображении конуса (рис. 86, а) следует иметь ввиду, что видимые разующие конуса касаются эллипса, изображающего основание конуса, точках, расположенных выше большой оси этого эллипса (рис. 86, б). ображение сечения конуса плоскостью (рис. 86, в) получается так же, к и изображение сечения цилиндра плоскостью.

Рассмотрим теперь вопрос об изображении вписанных и описанных огогранников.



а) б) в)

Рис. 86

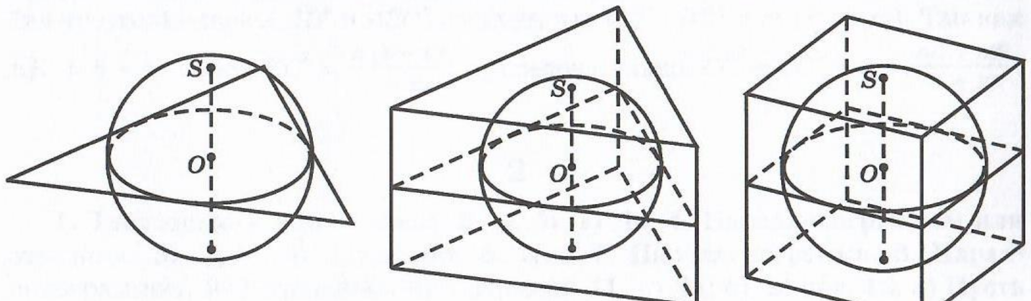


а) б) в)

Рис. 87

Для построения изображения правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, воспользуемся изображением правильного треугольника, вписанного в окружность. Это будет изображение верхнего основания призмы. Скопируем его и перенесем вертикально вниз на некоторое расстояние. Это будет изображение нижнего основания призмы. Соединим отрезками соответствующие точки верхнего и нижнего оснований и сделаем невидимые ребра пунктирными. Получим искомое изображение правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр (рис. 87, а). Аналогичным образом строятся изображения правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (рис. 87, б), и правильных четырехугольных призм, вписанной и описанной около цилиндра (рис. 87, в).

Построим правильную треугольную призму со вписанной в нее сферой. Для этого воспользуемся изображением сферы и опишем около ее экватора правильный треугольник (рис. 88, а). Скопируем этот треугольник и



а) б) в)

Рис. 88

енесем его вертикально вверх и вниз на расстояние OS. Это будут изо- жения верхнего и нижнего основания призмы. Соединим отрезками тветствующие вершины верхнего и нижнего оснований и сделаем неви- ıые ребра пунктирными. Получим искомое изображение правильной угольной призмы с вписанной в нее сферой (рис. 88, б). Аналогичным азом строится изображение куба с вписанной в него сферой (рис. 88, в).

Упражнения

1. Получите изображения квадрата и правильного пятиугольника.
2. Изобразите правильные пятиугольные призму и пирамиду.
3. Получите изображения правильных пятиугольников и шестиуголь- ков, вписанных и описанных около окружности.
4. По данному изображению окружности и ее диаметра постройте изо- жение перпендикулярного ему диаметра.
5. Изобразите цилиндр, у которого образующая равна диаметру осно- ия.
6. Изобразите правильную пятиугольную призму, вписанную в ци- ıдр.
7. Изобразите правильную шестиугольную призму, описанную около иындра.
8. Изобразите сферу вместе с несколькими параллелями и меридиа- ıи.
9. Изобразите треугольную пирамиду и описанную около нее сферу.
0. Изобразите треугольную пирамиду и вписанную в нее сферу.
1. Изобразите конус и описанную около него сферу.
2. Изобразите конус и вписанную в него сферу.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1

1. Если прямая параллельна направлению проектирования. **2.** Три, или две, или одна. **3.** Две пересекающиеся прямые или одна прямая. **4.** Если они лежат в плоскости, параллельной направлению проектирования. **5.** Если они параллельны направлению проектирования. **6.** Пересекающиеся прямые, параллельные прямые, прямая и точка. **7.** Прямая не параллельна направлению проектирования, и через эту прямую и данную точку проходит плоскость, параллельная направлению проектирования. **8.** Пересекаются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **9.** Скрещиваются, и одна из них параллельна направлению проектирования. **10.** Нет. **11.** Нет. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Если она параллельна направлению проектирования. **15.** Нет. **16.** Нет. **17.** Да. **18.** Нет. **20.** Пусть A', B', C' — проекции точек A, B, C соответственно. Если числа a и b равны, то CC' также им равняется. Предположим, что $a < b$ (рис. 89). Через точку A проведем прямую, параллельную $A'B'$, и точки ее пересечения с прямыми BB', CC' обозначим B'', C''. Из подобия треугольников ABB'' и ACC'' следует, что $CC'' : BB'' = m : (n + m)$. Так как $BB'' = b - a$, имеем $CC'' = \dfrac{m(b-a)}{n+m}$, и, следовательно, $CC' = CC'' + a = \dfrac{na + mb}{n + m}$.

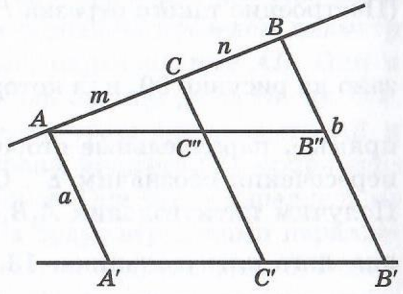
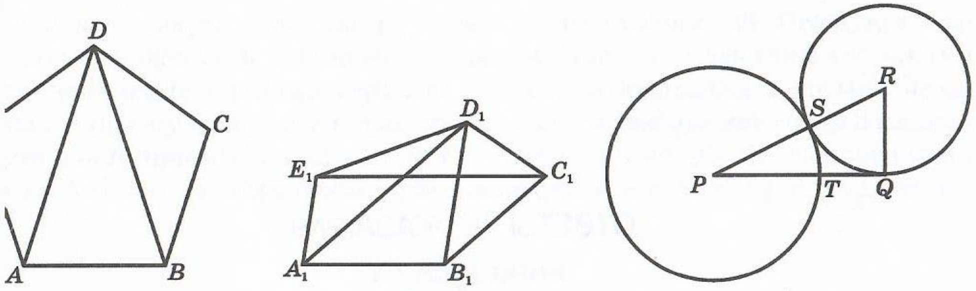


Рис. 89

2

1. Треугольник или отрезок. **2.** а), б), в) Да. **4.** Параллелограммом или отрезком. **5.** а), б), в) Да; г) нет. **6.** Нет. **7.** Параллелограмма. **8.** Параллелограммом. **9.** В трапецию или отрезок. **11.** а) Да; б), в) нет. **12.** а) Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник (рис. 90, а). Построим параллельную проекцию треугольника ABD (рис. 90, б). Ею может быть произвольный



а) б) в)

Рис. 90

угольник $A_1B_1D_1$. Воспользуемся тем, что сторона правильного пяти-
льника и его диагональ находятся в золотом отношении, т. е. $AB : AD =$
$\frac{5-1}{2}$. Через точку B_1 проведем прямую, параллельную A_1D_1, и отложим
ней отрезок B_1C_1, находящийся с отрезком A_1D_1 в золотом отношении.
строение такого отрезка $PT = \frac{\sqrt{5}-1}{2}PQ$ по заданному отрезку PQ пока-
о на рисунке 90, в, в котором $RQ = \frac{1}{2}PQ$.) Через точки A_1 и C_1 проведем
мые, параллельные сторонам B_1D_1 и A_1B_1 соответственно, и их точку
есечения обозначим E_1. Соединим отрезками точки C_1 и D_1, D_1 и E_1.
тучим пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, который и будет изображением пра-
ьного пятиугольника. 13. $\frac{a+b+c}{3}$. 15. Пусть дан эллипс, изображаю-
й окружность, и отрезок A_1B_1, изображающий диаметр AB (рис. 91).
строим отрезок C_1D_1, изображающий диаметр CD, перпендикулярный
ному (такой отрезок называется ***сопряженным диаметром***). Для этого

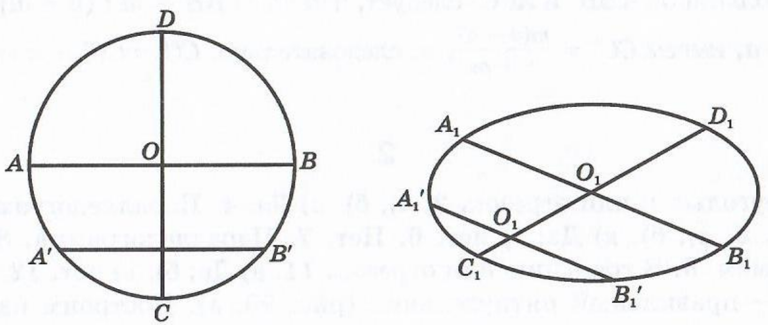
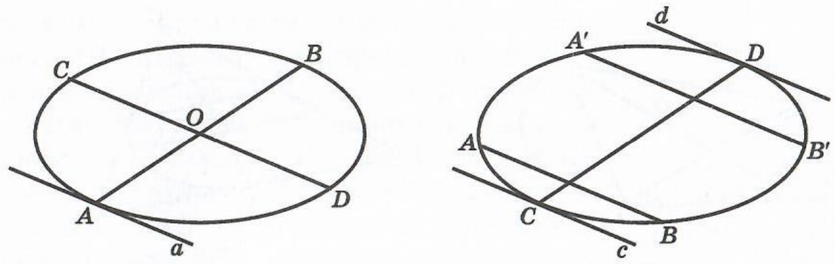


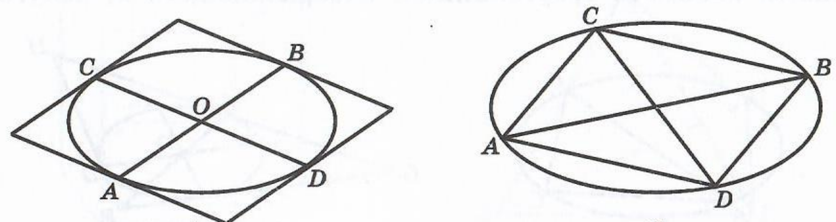
Рис. 91



а) б)

Рис. 92

проведем какую-нибудь хорду $A_1'B_1'$, параллельную A_1B_1. Она будет изображать хорду $A'B'$, параллельную AB. Искомый сопряженный диаметр C_1D_1 проходит через середины отрезков A_1B_1 и $A_1'B_1'$. **16.** а) Пусть дан эллипс, изображающий окружность, и точка A (рис. 92). Через точку A и центр эллипса O проведем диаметр и построим диаметр CD, ему сопряженный. Тогда прямая a, проходящая через точку A и параллельная диаметру CD, будет искомой касательной. б) Пусть дан эллипс и его хорда AB. Проведем хорду $A'B'$, параллельную данной, и через их середины проведем диаметр CD. Через его концы C и D проведем прямые, параллельные AB. Они и будут искомыми касательными. **17.** а) Пусть дан эллипс (рис. 93, а). Выберем на нем какую-нибудь точку A и проведем через нее диаметр AB и через его концы проведем касательные. Построим диаметр CD, сопряженный AB, и через его концы проведем касательные. Они будут параллельны CD. Попарные точки пересечения касательных будут вершинами параллелограмма, изображающего квадрат, описанный около окружности. б) В данном эллипсе, изображающем окружность (рис. 93, б), проведем сопряженные диаметры AB и CD. Их концы будут вершинами параллелограмма, изображающего квадрат, вписанный в окружность. **18.** а) Пусть дан эллипс (рис. 94, а). Выберем в нем какую-нибудь точку A и проведем диаметр AB. Через середину отрезка OB проведем хорду EF, параллельную



а) б)

Рис. 93

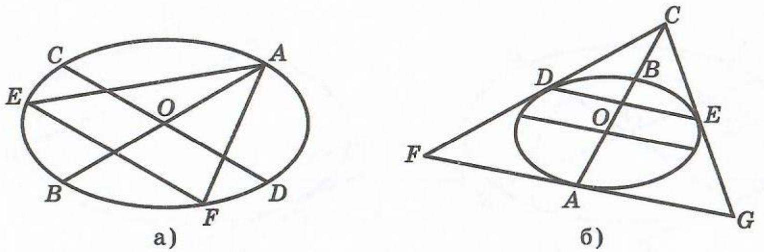


Рис. 94

пряженному диаметру CD. Точки A, E, F будут вершинами искомого треьльника, изображающего правильный треугольник, вписанный в окружсть. б) Пусть дан эллипс (рис. 94, б). Выберем на нем какую-нибудь точ- A и проведем через нее диаметр AB. Отложим на его продолжении отэок BC, равный OB. Точка C будет одной из вершин искомого треуголька, изображающего правильный треугольник, описанный около окружсти. Через точку A проведем касательную и через середину отрезка AC эведем хорду DE, параллельную этой касательной. Точки D и E будут іками касания искомого треугольника с эллипсом. Проведем прямые CD E. Их точки пересечения F, G с касательной будут вершинами искомотреугольника CFG. 19. а) Пусть дан эллипс, изображающий окружность іс. 95,а). Проведем какой-нибудь его диаметр AB и возьмем произьную точку C на эллипсе, отличную от A и B. Треугольник ABC будет ображением прямоугольного треугольника, вписанного в окружность. Пусть дан эллипс, изображающий окружность (рис. 95, б). Проведем каких-нибудь сопряженных диаметра AB и CD. Через их концы A и D эведем прямые, параллельные соответствующим диаметрам. Они будут сательными к эллипсу. Точку их пересечения обозначим E. Она будет ошиной искомого треугольника. Возьмем произвольную внутреннюю іку F дуги CB эллипса и проведем через нее касательную. Точки G и H ресечения этой касательной с прямыми EA и ED соответственно будут ошинами искомого треугольника, изображающего прямоугольный

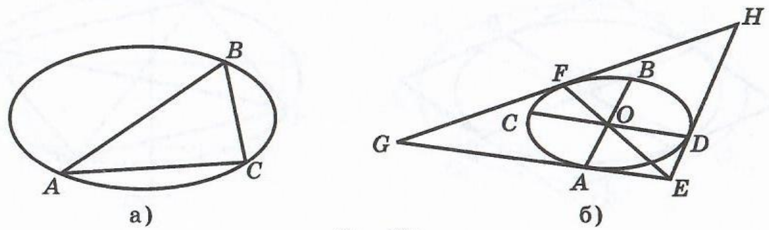


Рис. 95

треугольник, описанный около окружности. 20. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника. Рассмотрим треугольник ABC', подобный треугольнику $A_1B_1C_1$, вершина C' которого не лежит в плоскости треугольника ABC. Тогда параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость треугольника ABC' в направлении прямой CC' будет треугольник ABC', подобный треугольнику $A_1B_1C_1$ (рис. 96).

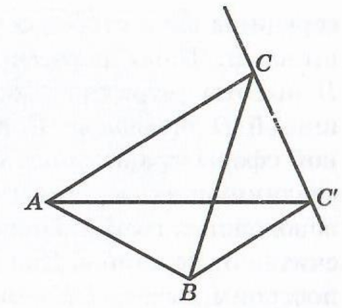


Рис. 96

3

1. См. рисунок 97. 2. См. рисунок 98. 3. См. рисунок 99. 4. Да.

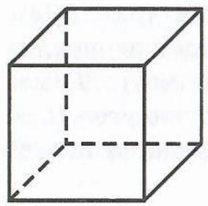


Рис. 97

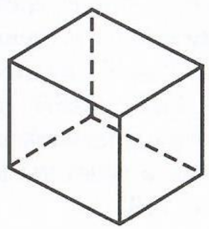


Рис. 98

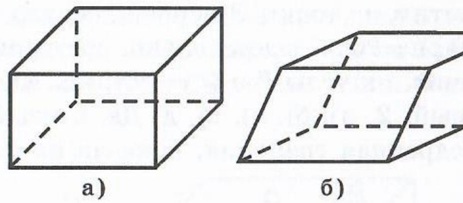


Рис. 99

5. Нет. 6. См. рисунок 100. 7. Нет. 8. См. рисунок 101; правильный треугольник. 10. Квадрат. 11. а), б) четырехугольная пирамида; в) тетраэдр; г), д) шестиугольная пирамида; е) параллелепипед. 12. Нет. 13. Да. 14. Основанием H высоты DH правильного тетраэдра $ABCD$ является точка пересечения медиан треугольника ABC. Для его нахождения построим

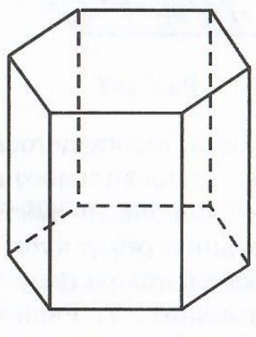


Рис. 100

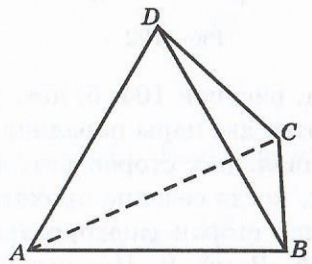


Рис. 101

›едины двух сторон основания и соединим их с противоположными вер-
:нами. Точка пересечения этих отрезков и будет искомым основанием высоты тетраэдра. Соединим теперь эту точку с противоположной вер-
:ной D тетраэдра. Получим искомую высоту DH. **15.** Центром вписан-
й сферы правильного тетраэдра является точка O пересечения отрезков,
:диняющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан проти-
юложных граней. Причем в точке O эти отрезки делятся в отношении 3 : 1,
тая от вершины. Для построения центра O правильного тетраэдра $ABCD$
:троим высоту DH (см. предыдущую задачу) и отложим на нем отрезок
', равный одной четвертой DH.

4

1. а), б), в) Да; г), д) нет. Докажем, что в сечении куба плоскостью не
жет получиться прямоугольный или тупоугольный треугольники. Пусть
R — треугольник, являющийся сечением куба плоскостью (рис. 102).
устим из точки B перпендикуляр BS на PQ. Тогда RS будет перпенди-
ярна PQ. Следовательно, треугольники PSR и QSR — прямоугольные.
ачит, их углы P и Q — острые. Аналогично доказывается, что угол R —
рый. **2.** а), б), в), г), д) Да. Случай, когда в сечении получается нерав-
бедренная трапеция, показан на рисунке 103.

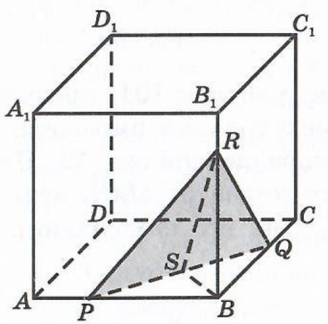


Рис. 102

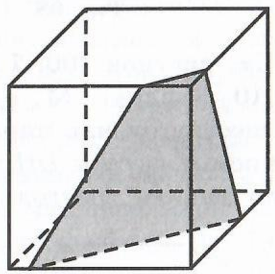


Рис. 103

а) Да, см. рисунок 104; б) нет, у пятиугольника, являющегося сечением
ба, имеются две пары параллельных сторон, а у правильного пятиуголь-
ка параллельных сторон нет. **4.** а), б) Да, правильный шестиугольник
тучается, когда сечение проходит через середины ребер куба (рис. 105);
нет, число сторон многоугольника не может быть больше числа гра-
й куба. **5.** Ромб. **6.** Правильный шестиугольник. **7.** Равнобедренная
апеция. **8.** а) Через точки A и C проведем прямую и найдем точку P

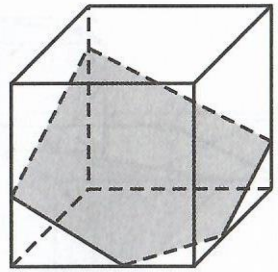


Рис. 104

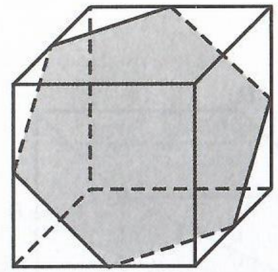
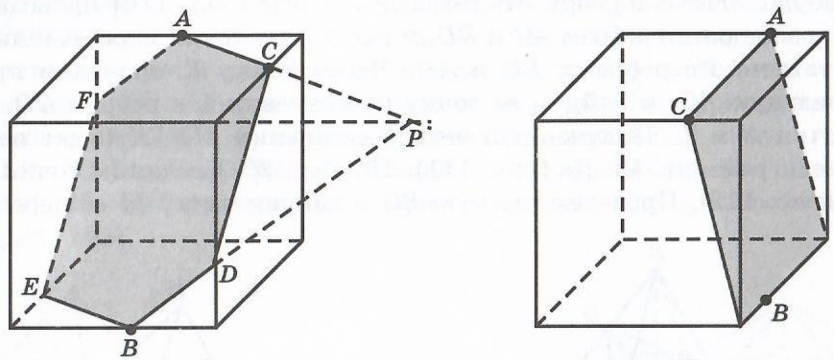


Рис. 105

ее пересечения с продолжением ребра куба (рисунок 106, а). Соединим отрезком точки B и P и найдем точку D его пересечения с ребром куба. Соединим отрезком точки C и D. Проведем BE параллельно AC. Проведем EF параллельно CD. Соединим точки A и F. Получим искомый шестиугольник $ACDBEF$. б) Точки A и C расположены так, что прямая AC параллельна ребру куба, содержащему точку B. Изображение соответствующего сечения показано на рисунке 106, б. **9.** Соединим отрезками точки B_1 и H, D и H, (рис. 107). Через точку D проведем прямую, параллельную B_1H, и найдем точку G ее пересечения с ребром AA_1 куба. Соединим точки G и B_1. Получим искомое сечение DHB_1G.



а) б)

Рис. 106

10. Равнобедренная трапеция, $P = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$. **11.** Решение показано на рисунке 108. **12.** Правильный шестиугольник площади $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$. **13.** Соединим точки A и C, A и B (рис. 109). Проведем диагонали основания пирамиды

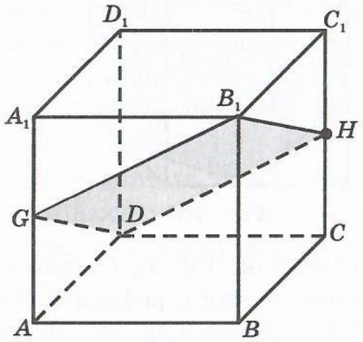


Рис. 107

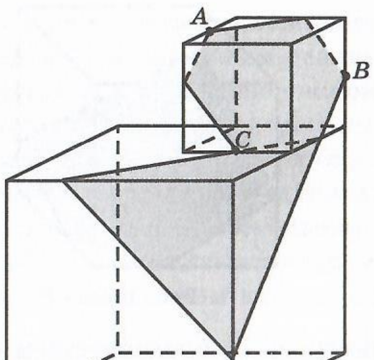


Рис. 108

іх точку пересечения O соединим с вершиной S пирамиды. Соединим іки B и C. Через вершину A и точку пересечения BC и SO проведем ямую и найдем ее точку D пересечения с боковым ребром пирамиды. тырехугольник $ACDB$ будет искомым сечением. **14.** Треугольник, четырехльник, пятиугольник. **15.** Равнобедренный треугольник. **17.** Через ка-о-нибудь точку M ребра AB тетраэдра $ABCD$ (рис. 110) проведем пря-е, параллельные ребрам AC и BD, и найдем их точки пересечения N и K ответственно с ребрами BC и AD. Через точку K проведем прямую, раллельную AC, и найдем ее точку пересечения L с ребром CD. Соеди-м точки N и L. Полученный четырехугольник $MNLK$ будет искомым раллелограммом. **18.** Да (рис. 111). **19.** Нет. **20.** Соединим точки A и B, і C (рис. 112). Проведем прямую BC и найдем точку M ее пересечения

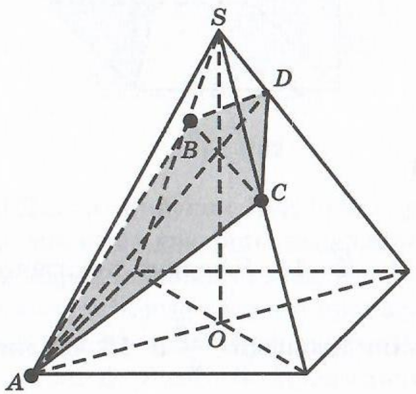


Рис. 109

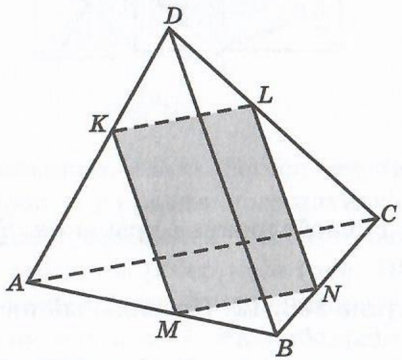


Рис. 110

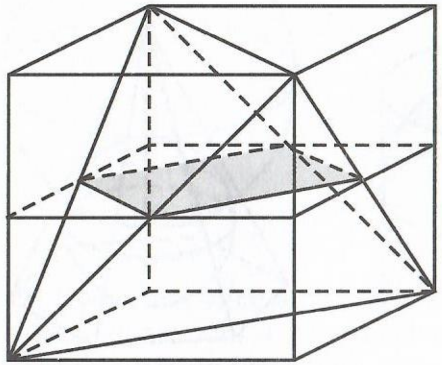


Рис. 111

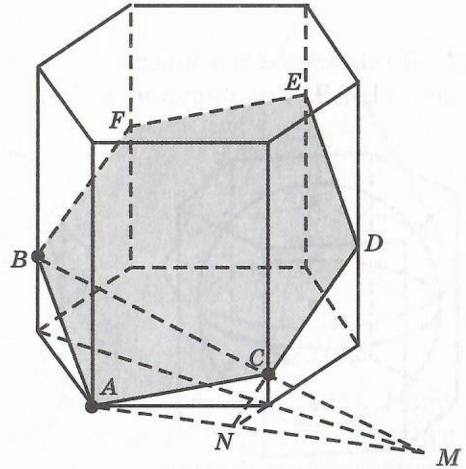


Рис. 112

с плоскостью основания призмы. Прямая AM будет линией пересечения плоскости основания и плоскости сечения призмы. Пусть N — точка пересечения AM с продолжением ребра основания призмы. Проведем прямую NC и найдем точку D ее пересечения с ребром призмы. Проведем DE параллельно AB, EF параллельно AC. Соединим точки B и F. Шестиугольник $ACDEFB$ будет искомым сечением. **21.** Пересечем октаэдр плоскостью, параллельной грани и проходящей посередине между этой гранью и противоположной параллельной ей гранью. Эта плоскость разделит пополам все шесть ребер и в сечении получится правильный шестиугольник (рис. 113). **22.** Искомое сечение проходит через середины ребер додекаэдра (рис. 114). **23.** Сечение проходит через середины двух противоположных ребер (рис. 115).

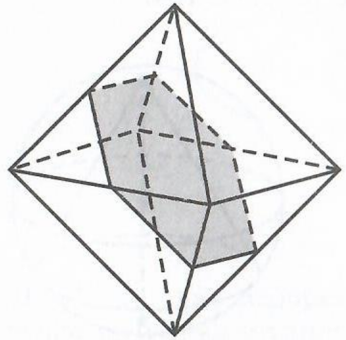


Рис. 113

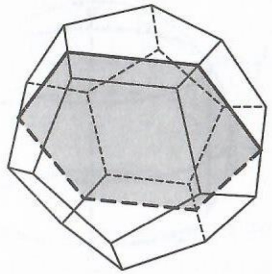


Рис. 114

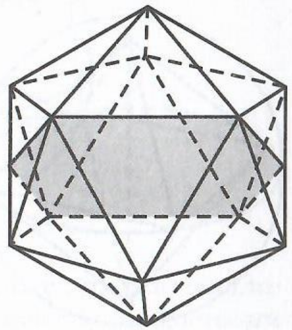


Рис. 115

5

Доказательство аналогично решению задачи 1 пункта 4. **8.** См. рисунок 116. **9.** См. рисунок 117. **10.** См. рисунок 118.

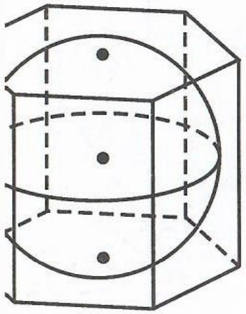


Рис. 116

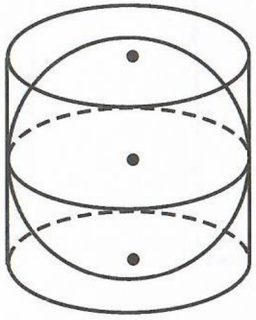


Рис. 117

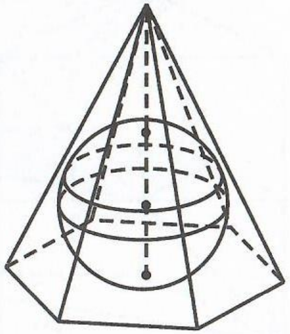


Рис. 118

См. рисунок 119. **12.** См. рисунок 120. **13.** См. рисунок 121.

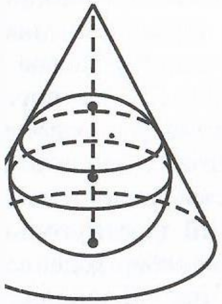


Рис. 119

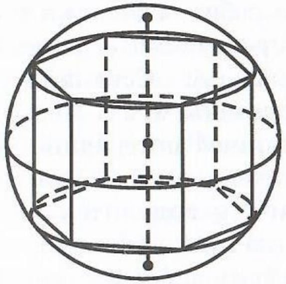


Рис. 120

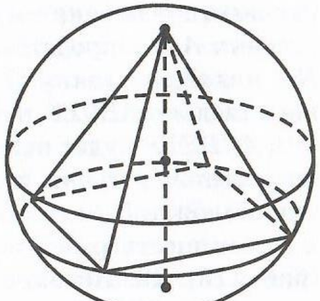


Рис. 121

См. рисунок 122. **15.** См. рисунок 123. **16.** См. рисунок 124.

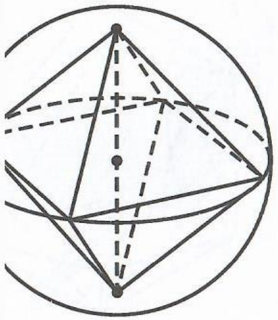


Рис. 122

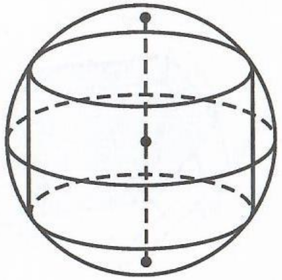


Рис. 123

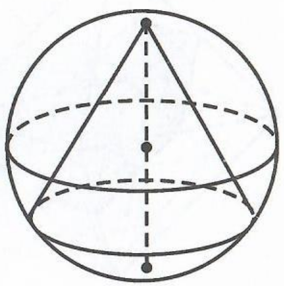


Рис. 124

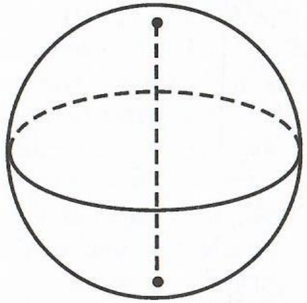


Рис. 125

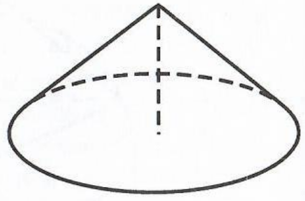


Рис. 126

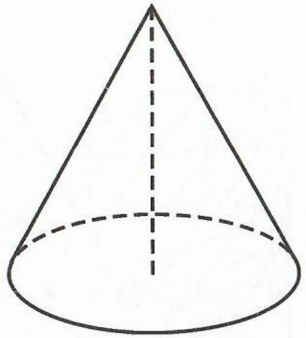


Рис. 127

17. Пусть дан эллипс, изображающий основание конуса (рис. 125). Построим окружность на большой оси эллипса, как на диаметре, и отметим полюса соответствующей сферы. В случае а) вершиной конуса будет полюс сферы (рис. 126). В случае б) расстояние от центра сферы до вершины конуса будет в два раза больше расстояния от центра сферы до полюса (рис. 127). **18.** Пусть дан эллипс, изображающий основание конуса (рис. 128). Опишем около него окружность. Аналогично тому, как строились полюсы сферы с данным экватором, построим окружность, изображающую вид сферы сбоку. На ее диаметре CD построим равносторонний треугольник CDE. Искомая вершина конуса S будет расположена на том же расстоянии от прямой AB, что и вершина E треугольника CDE.

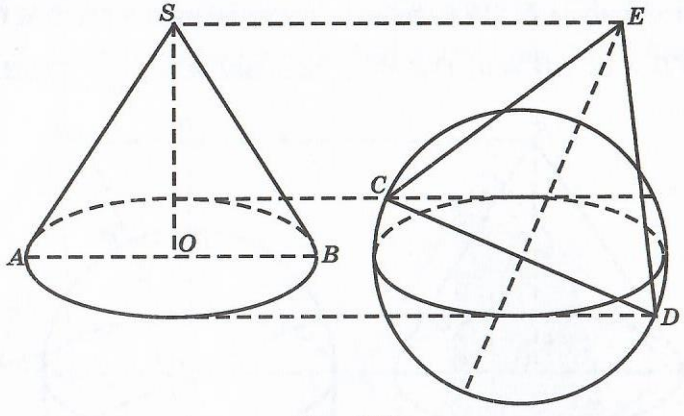


Рис. 128

19. Пусть дано изображение конуса (рис. 129). Для случая а) аналогично тому, как строились полюсы сферы с данным экватором, построим окружность, изображающую вид сферы сбоку. С основанием CD построим

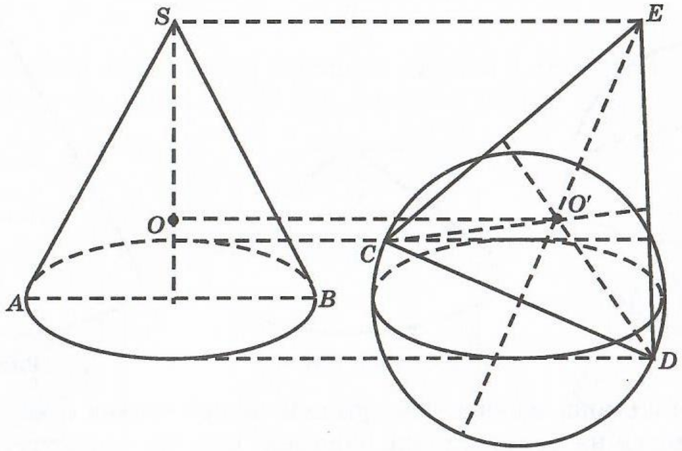


Рис. 129

:нобедренный треугольник, вершина E которого расположена на том же :стоянии от прямой AB, что и вершина S конуса. Центром O' вписанной ужности треугольника CDE будет точка пересечения биссектрис. Ис- ый центр O вписанной сферы будет расположен на том же расстоянии ірямой AB, что и центр O'. Для случая б) построение аналогично. Пусть дано изображение конуса (рис. 130). Аналогично тому, как строи- ь полюсы сферы с экватором в виде данного эллипса, построим окруж- :ть, изображающую вид сферы сбоку. Тогда длина отрезка $O'Q$ будет равна эмой высоте конуса h. Из подобных треугольников $O'CD$ и $O'PQ$ и учи- ая, что $O'D = a$, $CD = b$, $O'P = c$, находим $h = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. **21.** Решение

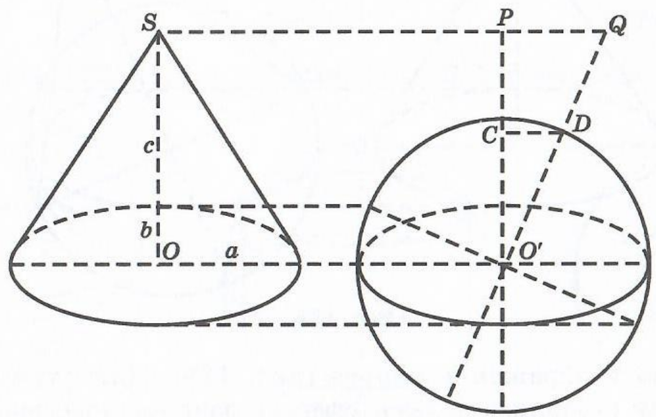


Рис. 130

аналогично решению предыдущей задачи, h = 10 см. **22.** Пусть дано изображение цилиндра (рис. 131). Проведем сопряженные диаметры AB и CD. Построим сечение цилиндра, проходящее через диаметр CD и точки A', B'. Воспользуемся тем, что плоскость, параллельная плоскости ABB', пересекает плоскость сечения по прямой, параллельной $A'B'$. Проведем несколько таких плоскостей и найдем соответствующие точки на поверхности цилиндра. Соединяя эти точки плавной кривой, получим эллипс, изображающий сечение цилиндра плоскостью.

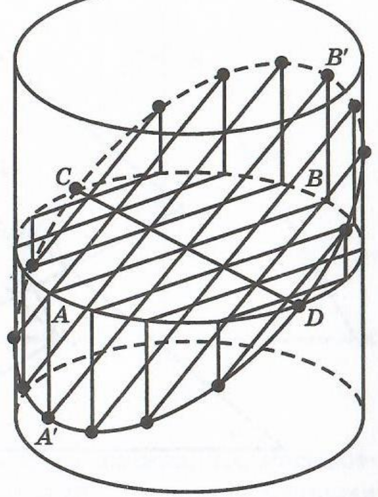


Рис. 131

6

1. Нет. **2.** Плоскость, параллельная плоскости проектирования и проходящая через центр проектирования. **3.** Да. **4.** Если прямые, параллельны плоскости проектирования и не лежат в плоскости, проходящей через центр проектирования. **5.** Прямое. **6.** Перевернутое. **7.** Увеличенное прямое. **8.** Она будет подобна исходной. **12.** См. рисунки 74, 75. **13.** См. рисунок 132. **14.** $\dfrac{2}{3}$. **15.** Проведем прямые DM и DN (рис. 133). Через их точки

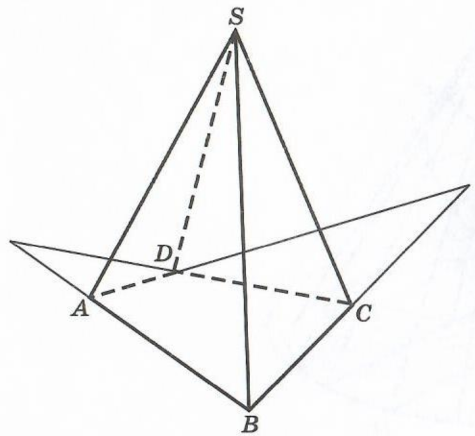


Рис. 132

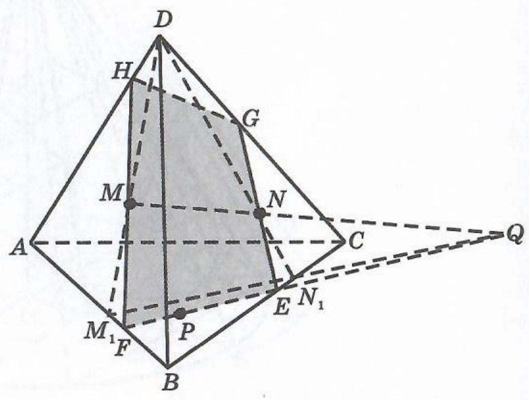


Рис. 133

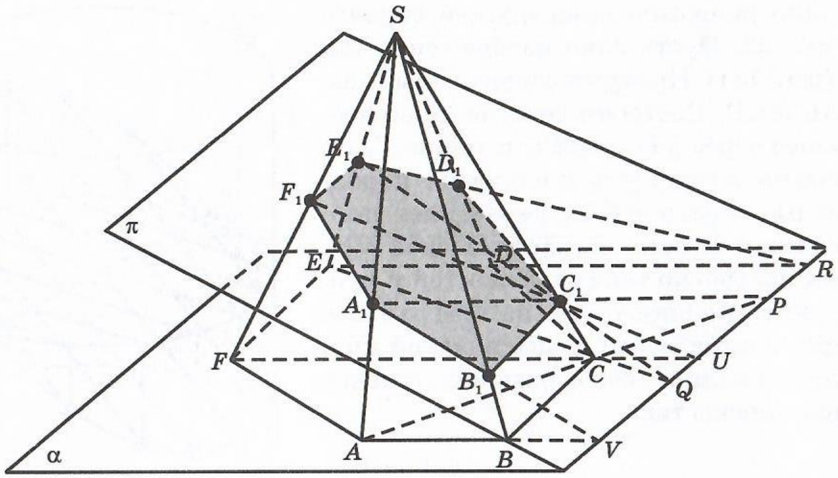


Рис. 134

есечения с ребрами пирамиды проведем прямую M_1N_1. Пусть Q — ючка пересечения с прямой MN. Тогда прямая PQ будет лежать в пло- сти сечения и, следовательно, точки ее пересечения E, F с ребрами пи- иды также будут принадлежать сечению. Проведем прямые EN, FM и дем точки G, H их пересечения с ребрами пирамиды. Четырехуголь- : $FEGH$ будет искомым сечением. **16.** Решение показано на рисунке 134. Пусть дано изображение конуса (рис. 135). Построим сопряженный

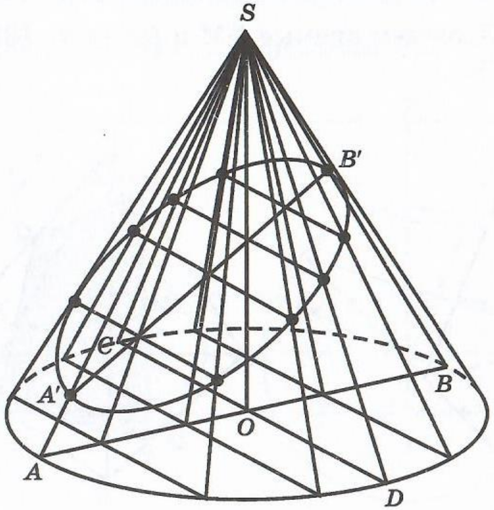


Рис. 135

диаметр AB и отметим на образующих SA и SB точки A' и B', принадлежащие сечению. Построим сечение, параллельное диаметру CD и проходящее через точки A', B'. Воспользуемся тем, что если плоскость параллельна прямой CD, то ее линия пересечения с плоскостью сечения также будет параллельна CD. Проводя через вершину S различные плоскости и соответствующие прямые, параллельные CD, получим точки на поверхности конуса, принадлежащие сечению. Соединяя их плавной кривой, получим линию пересечения плоскости с боковой поверхностью конуса. Как известно, этой линией является эллипс. **18.** Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 136), в котором $A'B'$ — искомая большая ось. Тогда угол $A'B'S$ равен $\psi - \varphi$ и по теореме синусов имеем $A'B' : \sin 2\varphi = d : \sin(\psi - \varphi)$. Откуда $A'B' = \dfrac{d \cdot \sin 2\varphi}{\sin(\psi - \varphi)}$. **19.** Пусть дано изображение конуса (рис. 137). Построим сечение, параллельное образующей SA. Заметим, что в этом сечении будет содержаться диаметр, сопряженный

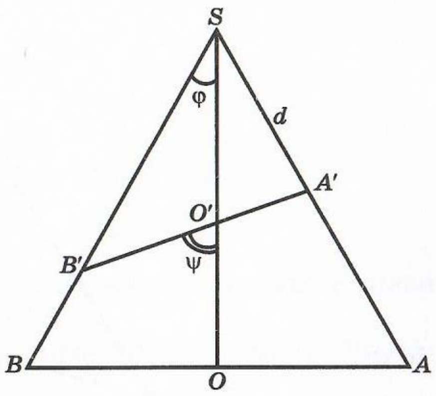


Рис. 136

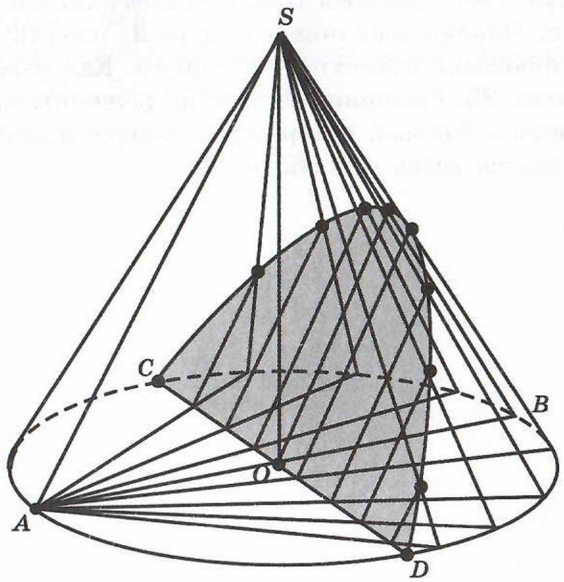


Рис. 137

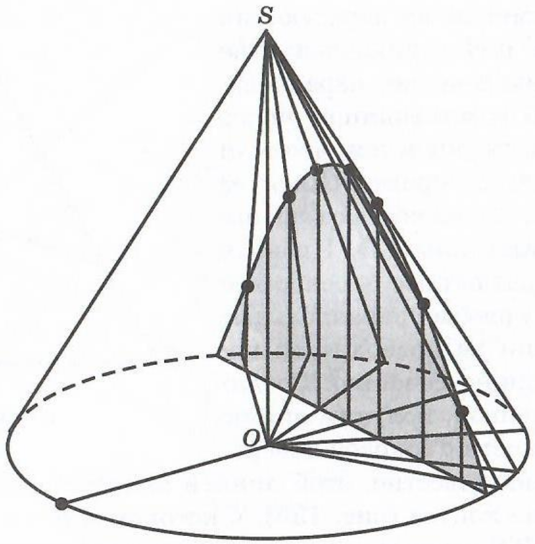


Рис. 138

аметру AB. Воспользуемся тем, что если плоскость проходит через пряю SA, то она пересекает искомое сечение конуса по прямой, параллельй SA. Проводя через SA различные плоскости и соответствующие пряе, параллельные SA, получим точки на поверхности конуса, принадлещие сечению. Плавно соединяя их кривой, получим линию пересечея плоскости с боковой поверхностью конуса. Как известно, этой линией пяется парабола. **20.** Решение аналогично решению предыдущей задачи ic. 138). Сечением боковой поверхности конуса плоскостью, параллельй высоте, является ветвь гиперболы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бескин Н. М.* Методы изображений. Энциклопедия элементарной математики. Кн. IV. — М. : Физматлит, 1963.
2. *Василевский А. Б.* Метод параллельных проекций. — Минск : Народная асвета, 1985.
3. *Костицын В. Н.* Моделирование на уроках геометрии. — М. : Владос, 2000.
4. *Макарова М. Н.* Перспектива. — М. : Просвещение, 1989.
5. *Польский И. Г.* Проекционный чертеж и построения на нем. — М. : Учпедгиз, 1962.
6. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия. Учебник для 10—11 классов общеобразовательных учреждений. — М. : Мнемозина, 2003.
7. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Компьютер помогает геометрии. — М. : Дрофа, 2003.
8. *Четверухин Н. Ф.* Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. — М. : Учпедгиз, 1946.
9. *Четверухин Н. Ф.* Стереометрические задачи на проекционном чертеже. — 3-е изд. — М. : Учпедгиз, 1955.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Программа курса 4

1. Параллельное проектирование 5
2. Параллельные проекции плоских фигур 8
3. Изображение пространственных фигур в параллельной проекции 12
4. Сечения многогранников 17
5. Ортогональное проектирование 21
6. Центральное проектирование. Перспектива 30
7. Использование графического редактора «Adobe Illustrator» для изображения пространственных фигур 38

Ответы и указания 47

Литература 63