И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

КРИВЫЕ

КУРС ПО ВЫБОРУ

9 КЛАСС

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

КРИВЫЕ

КУРС ПО ВЫБОРУ

9
КЛАСС

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных учреждений

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Москва 2007

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.

С50 Кривые. Курс по выбору. 9 класс учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. Мнемозина, 2007. — 63 с. ил.

ISBN 5-346-00530-7

В пособии рассмотрены классические кривые и способы их задания, показаны возможности использования графического редактора «Adobe Illustrator» для компьютерного изображения кривых и решения задач.

Пособие содержит как теоретический материал, так и задачи для самостоятельного решения.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

ISBN 5-346-00530-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Кривые с древних времен привлекали к себе внимание ученых и использовались ими для описания различных природных явлений от траектории брошенного камня до орбит космических тел. В школьном курсе математики в качестве кривых рассматриваются графики функций. При этом основное внимание уделяется их аналитическим свойствам, возрастанию, убыванию и т. п., геометрические же свойства остаются в стороне даже для таких известных кривых, как парабола, эллипс, гипербола.

Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии, создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и других наук.

В предлагаемом курсе рассмотрены классические кривые и способы их образования. Сначала изучаются линии, определяемые как геометрические места точек. Обычно среди геометрических мест в основном курсе геометрии рассматриваются: окружность, биссектриса угла, серединный перпендикуляр.

Обобщению и систематизации знаний по этой теме будет способствовать изучение таких кривых, как парабола, эллипс, гипербола, лемниската Бернулли, конхоида Никомеда, улитка Паскаля, строфоида и т. д. (пункты 1—4).

Далее (пункт 5) рассматриваются кривые как траектории движения точки. К их числу относятся циклоидальные кривые, которые описывают движение точки, закрепленной на окружности, катящейся по прямой или кривой, и обладают целым рядом замечательных свойств.

Аналитический способ образования кривых в декартовых и полярных координатах, рассмотренный в пунктах 6—9, позволяет получать самые разнообразные кривые, в том числе кривые как геометрические места точек и как траектории движения точек.

Реализацию этого способа дают современные компьютерные программы, одна из которых представлена в пункте 11.

В настоящем курсе приведены примеры вызывающих особый интерес в последние годы автоподобных кривых и фракталов, рассмотрены их свойства (пункт 10).

Показаны возможности использования компьютерной системы «Математика» для изображения кривых и решения задач.

Помимо теоретического материала каждый пункт настоящего пособия содержит задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы к задачам и список рекомендуемой литературы.

ПРОГРАММА КУРСА

(Всего 24 ч)

Пункт	Содержание	Кол-во часов
1	Парабола	2
2	Эллипс	2
3	Гипербола	2
4	Именные кривые	2
5	Кривые как траектории движения точек	2
6	Аналитическое задание кривых на плоскости	2
7	Кривые, заданные уравнениями в полярных координатах	2
8	Спирали	2
9	Кривые, заданные параметрическими уравнениями	2
10	Автоподобные кривые и фракталы	2
11	Изображение кривых в компьютерной системе «Математика»	2
	Зачет	2

1. Парабола

Пусть на плоскости заданы прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек, равноудаленных от прямой d и точки F, называется ***параболой***. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F — ***фокусом*** параболы (рис. 1).

Для того чтобы нарисовать параболу, потребуются линейка, угольник, нить длиной, равной бо́льшему катету угольника, и кнопки. Прикрепим один конец нити к фокусу, а другой — к вершине меньшего угла угольника. Приложим линейку к директрисе и поставим на нее угольник меньшим катетом. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги и прижималось к большему катету. Будем перемещать угольник и прижимать к его катету карандаш так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге параболу (рис. 2).

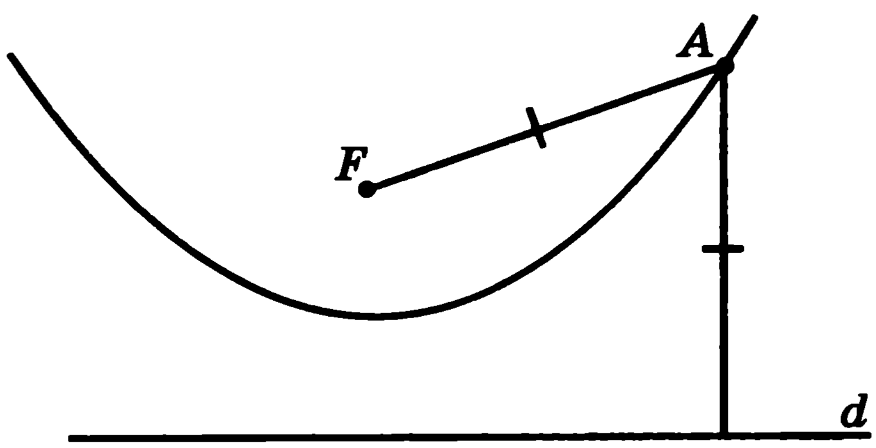


Рис. 1

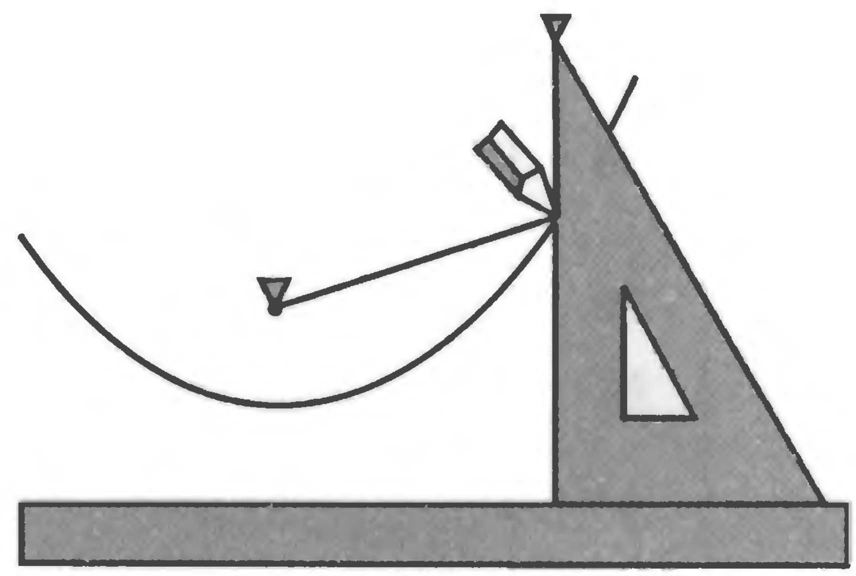


Рис. 2

Осью параболы называется прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Точка пересечения параболы с ее осью называется ***вершиной*** параболы.

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная ее директрисе, называется ***касательной*** к параболе.

Теорема. Пусть A — точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD — перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 3). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла FAD, будет касательной к параболе (рис. 3). Действительно, треугольник FAD равнобедренный. Следовательно, прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку FD. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Тогда

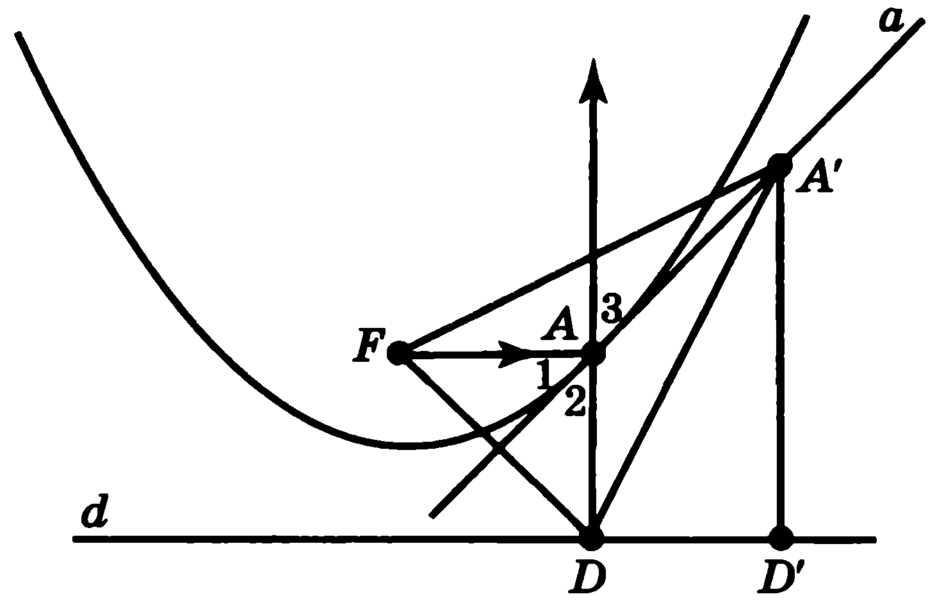


Рис. 3

$$A'F = A'D > A'D'.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит параболе и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т. е. является касательной.

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a — касательная, AD — прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 3). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD. Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отраженного луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Построение касательной к параболе. Пусть парабола задана фокусом F и директрисой d. Используя циркуль и линейку, построим касательную к параболе, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF проведем окружность и найдем ее точки пересечения с директрисой d. Если расстояние от точки C до фокуса больше, чем расстояние до директрисы, то таких точек две (рис. 4). Обозначим их

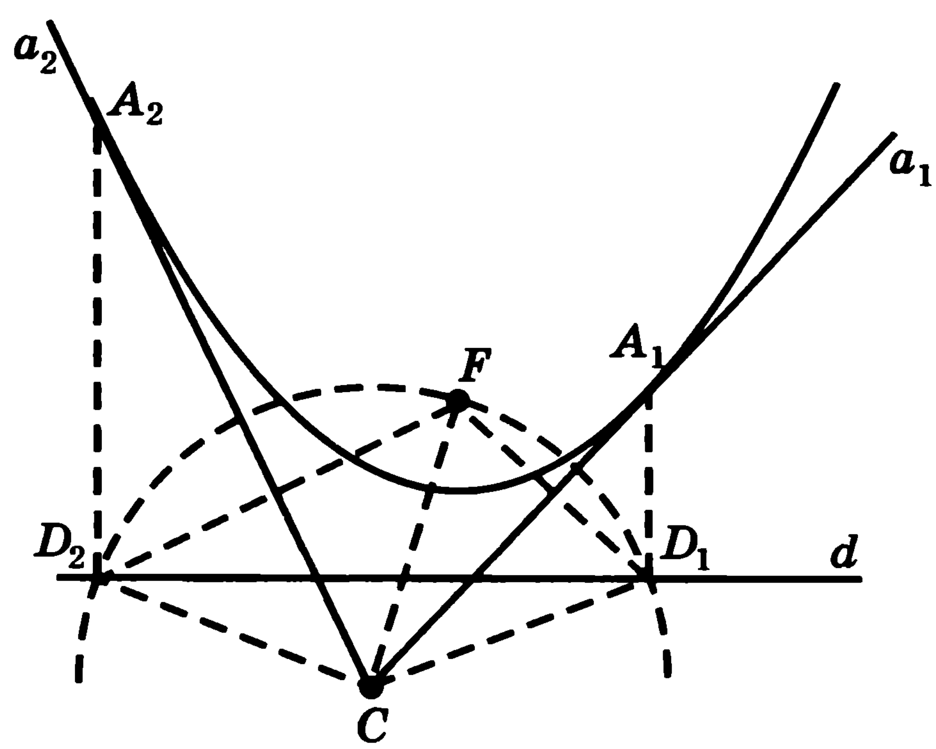


Рис. 4

D_1 и D_2. Проведем биссектрисы углов FCD_1 и FCD_2 соответственно. Прямые a_1 и a_2, содержащие эти биссектрисы, являются серединными перпендикулярами к отрезкам FD_1 и FD_2 и, значит, будут искомыми касательными к параболе. Для построения точек касания через точки D_1 и D_2 проведем прямые, перпендикулярные директрисе, и найдем их точки пересечения A_1 и A_2 с прямыми a_1 и a_2. Они и будут искомыми точками касания.

Может случиться, что расстояние от точки C до фокуса равно расстоянию до директрисы. В этом случае точка C будет лежать на параболе, окружность с центром в точке C и радиусом CF будет касаться директрисы в некоторой точке D и, следовательно, через точку C будет проходить одна касательная — биссектриса угла FCD.

В случае если расстояние от точки C до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, то точек пересечения окружности с директрисой нет и, следовательно, нет касательных к параболе, проходящих через эту точку.

Лабораторная работа

Укажем способ получения параболы из листа бумаги. Возьмем лист бумаги прямоугольной формы и отметим около его большой стороны точку F. Сложим лист так, чтобы точка F совместилась с какой-нибудь точкой D на большой стороне и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 5). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FD и, следовательно, касательной к параболе. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку F с другой точкой большой стороны. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к параболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму параболы (рис. 5).

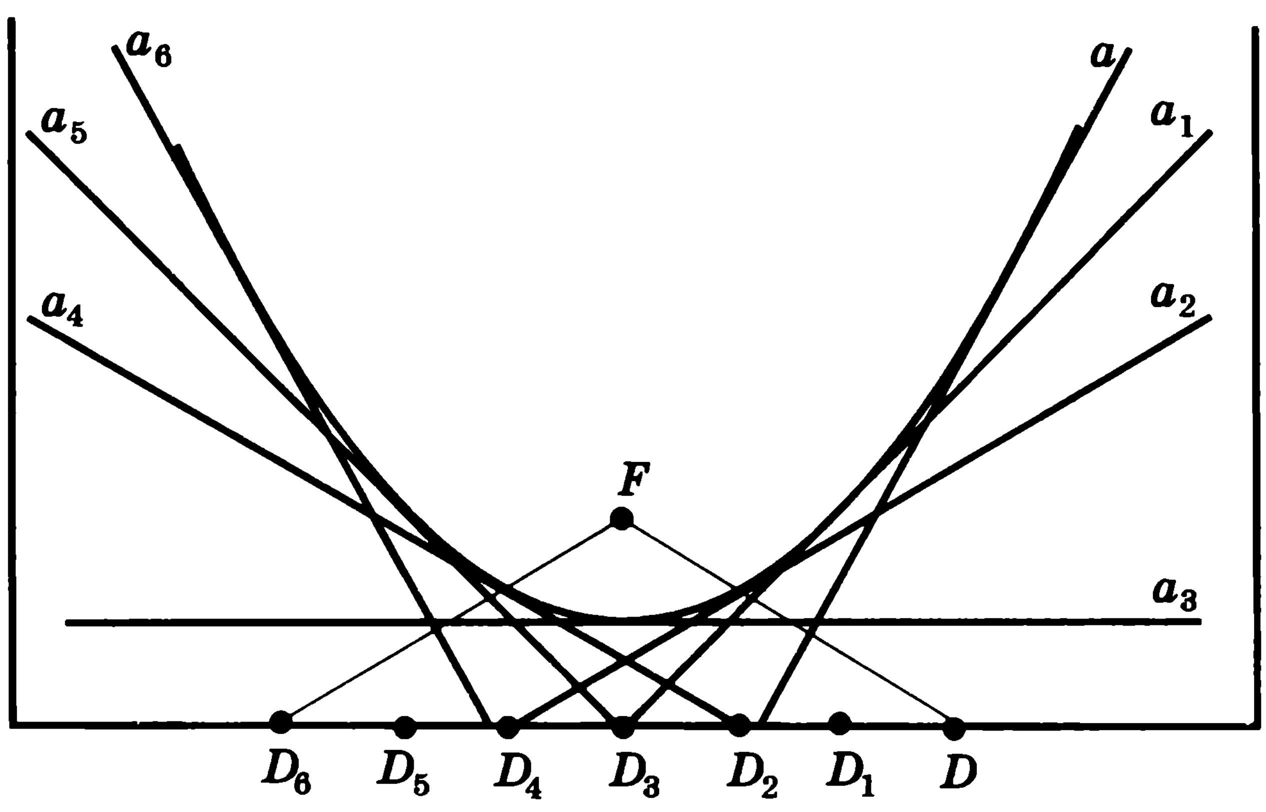


Рис. 5

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения параболы. Для заданных фокуса и директрисы постройте соответствующую им параболу.

2. Расстояние от фокуса параболы до директрисы равно 4 см. Чему равно наименьшее расстояние от точек на параболе до директрисы? Укажите соответствующую точку на параболе.

3. Для точки F, не лежащей на прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше расстояния до прямой d; б) больше расстояния до прямой d.

4. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?

5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, проходящую через данную точку: а) на параболе; б) вне параболы.

6. Для параболы с заданными фокусом и директрисой проведите касательную, перпендикулярную оси параболы.

7. Докажите, что две касательные к параболе, проведенные из точки, принадлежащей директрисе, перпендикулярны.

8. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

9. Для заданных фокуса и директрисы параболы с помощью циркуля и линейки постройте несколько точек параболы.

10. Даны фокус параболы и две касательные. Постройте директрису этой параболы.

11. Даны фокус, касательная и на ней точка касания. Постройте директрису параболы.

12. Даны директриса параболы и две касательные. Постройте фокус параболы.

13. Даны директриса параболы, касательная и на ней точка касания. Постройте фокус параболы.

14. Даны две пересекающиеся прямые. Нарисуйте какую-нибудь параболу, касающуюся этих прямых. Сколько таких парабол? Какие точки плоскости могут быть фокусами таких парабол?

15. Дана парабола. Укажите способ нахождения ее фокуса и директрисы.

2. Эллипс

Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***эллипсом***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса.

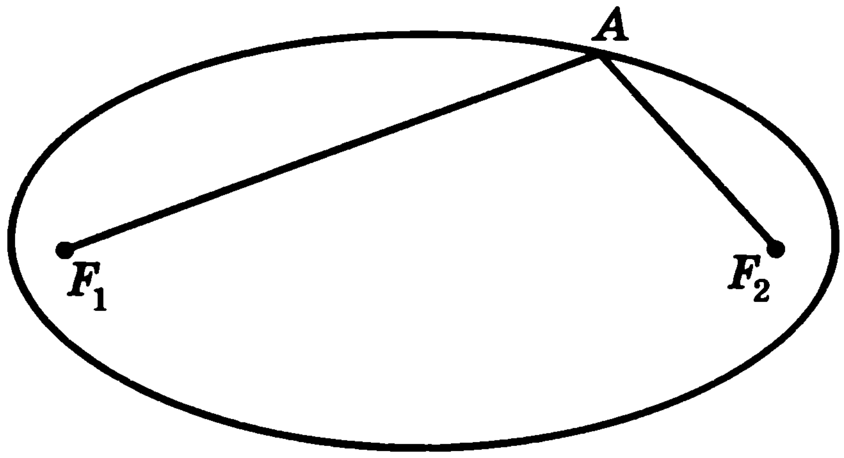


Рис. 6

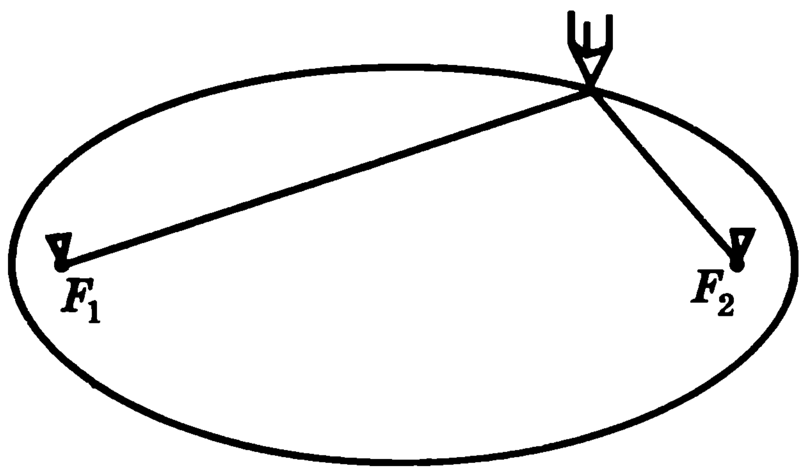


Рис. 7

Таким образом, для точек A эллипса с фокусами F_1 и F_2 сумма $AF_1 + AF_2$ постоянна и равна некоторому положительному числу c (рис. 6). Из неравенства треугольника следует, что c должно быть больше длины отрезка F_1F_2.

Слово «фокус» в переводе с латинского языка означает «очаг», «огонь». Это послужило основанием для того, чтобы назвать точки F_1, F_2 фокусами.

Еще И. Кеплер (1571—1630) обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в одном из фокусов этих эллипсов. Точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу, называется **перигелием**, а наиболее удаленная — **афелием**. Однако из-за того что орбита Земли представляет собой очень мало сжатый эллипс, похожий на окружность, такое приближение и удаление от Солнца незначительно сказывается на температуре. Гораздо большее значение для температуры на поверхности Земли имеет угол падения солнечных лучей. Так, например, когда Земля находится в перигелии, в нашем полушарии зима, а когда в афелии — лето. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Для того чтобы нарисовать эллипс, потребуется нить и кнопки. Прикрепим концы нити к фокусам. Карандашом натянем нить так, чтобы его острие касалось бумаги. Будем перемещать карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой. При этом карандаш будет вычерчивать на бумаге эллипс (рис. 7).

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку.

Теорема. Пусть A — произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2, будет касательной к эллипсу (рис. 8). Обозначим $AF_1 + AF_2 = c$. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной.

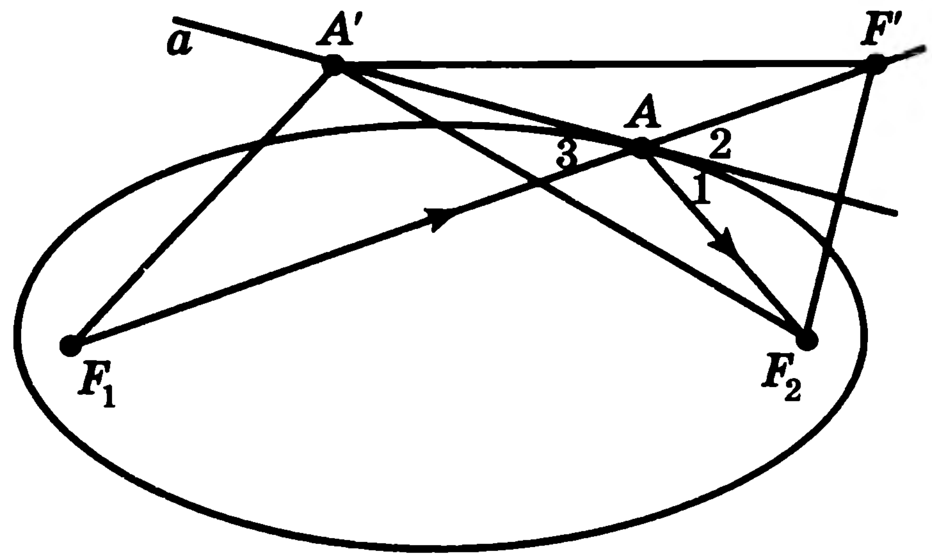


Рис. 8

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения, и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведенной в точку падения.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a — касательная (рис. 8). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_2AF' Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

Построение касательной к эллипсу. Пусть эллипс задан своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к эллипсу, проходящую через данную точку C.

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью (рис. 9). Таких точек может быть

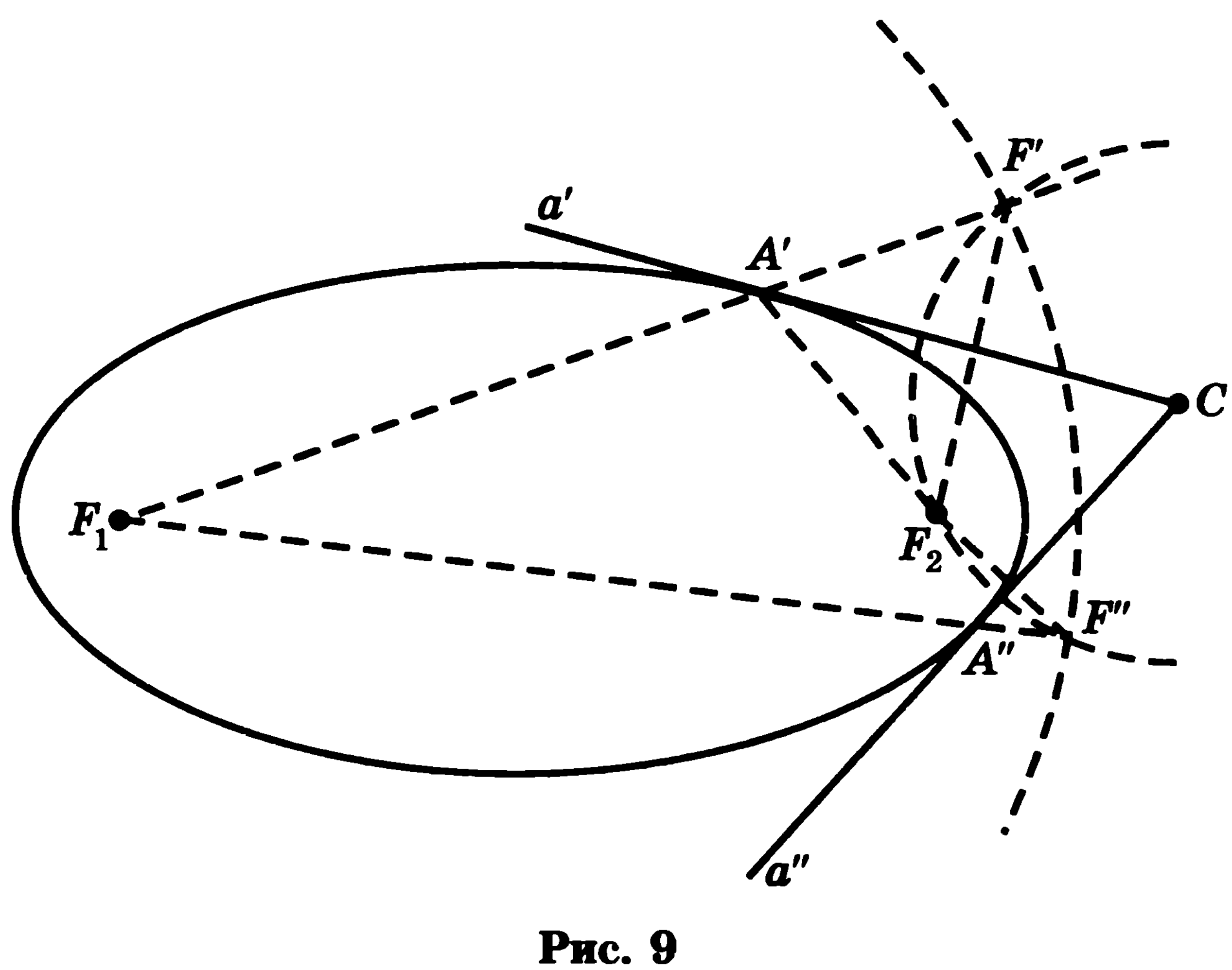


Рис. 9

две — F', F'', — одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к эллипсу. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения эллипса из листа бумаги. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, отличном от центра, поставим точку F. Сложим круг так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности круга и на бумаге образовалась линия сгиба a (рис. 10). Линия сгиба будет серединным перпендикуляром к отрезку FF' и, следовательно, касательной к эллипсу. Разогнем круг и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности круга. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется линиями сгибов. Линии сгибов будут касательными к эллипсу. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму эллипса.

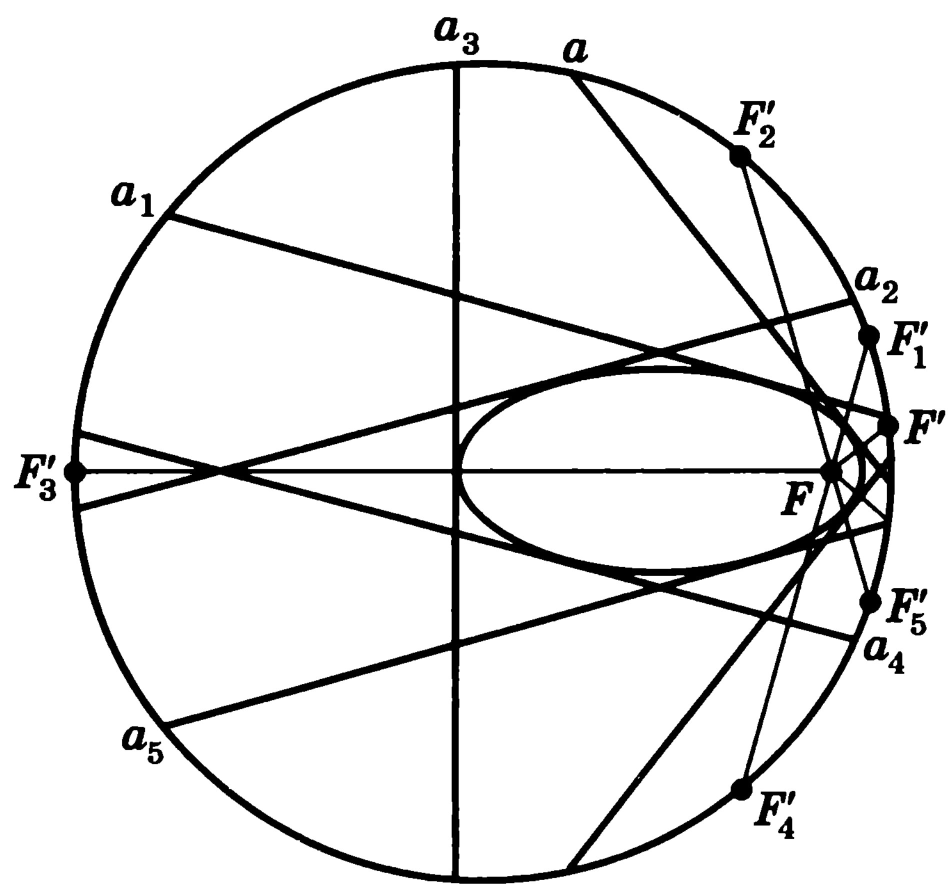


Рис. 10

Для получения эллипса другим способом потребуется сковорода и картонный круг диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положив круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс.

Задачи

1. Нарисуйте эллипс с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких эллипсов?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и суммой радиусов.

3. Даны фокусы эллипса и сумма расстояний до них. С помощью циркуля постройте несколько точек этого эллипса.

4. Что будет происходить с эллипсом, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

5. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них c постройте точки на эллипсе, равноудаленные от фокусов. Сколько таких точек?

6. Найдите геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

7. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c.

8. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AD = BC$ и $AB = CD$ (рис. 11), сторона AD закреплена, а остальные подвижны. Найдите геометрическое место точек пересечения сторон AB и CD.

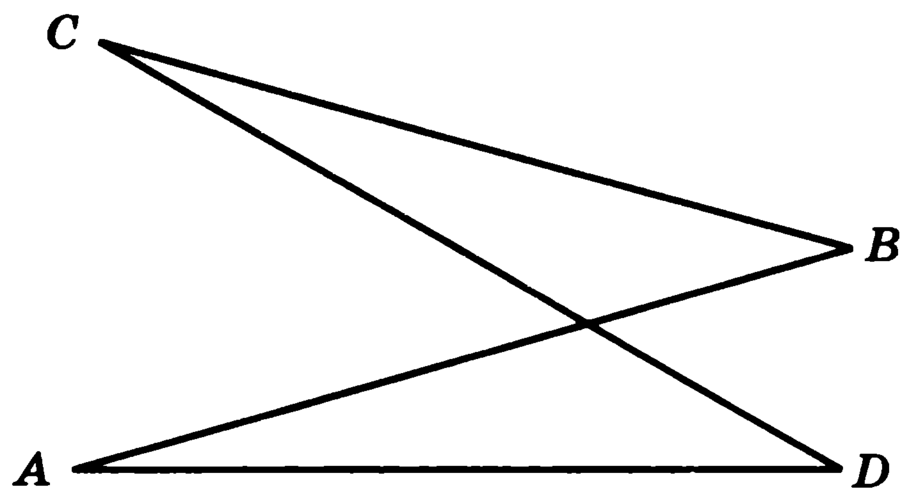


Рис. 11

9. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательные, перпендикулярные прямой F_1F_2.

10. Для эллипса с заданными фокусами F_1, F_2 и суммой расстояний до них проведите касательную, проходящую через заданную точку: а) на эллипсе; б) вне эллипса.

11. Даны фокусы F_1, F_2 эллипса и сумма расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к эллипсу. Найдите точку касания.

12. Даны два фокуса и касательная к эллипсу. Постройте постоянную c и нарисуйте эллипс.

13. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус эллипса.

14. Дан эллипс. Укажите способ нахождения его фокусов.

15. Возьмем сковородку и картонный круг, диаметром вдвое меньше диаметра сковороды. Клейкой лентой укрепим на дне сковороды лист бумаги. Положим круг на сковороду, продырявим его в любом месте, отличном от центра, отточенным карандашом. Если теперь катить круг по краю сковороды, прижимая острие карандаша к бумаге, то на бумаге появится эллипс. Докажите.

16. Леонардо да Винчи (1452—1519) предложил следующий способ построения эллипса. Вырежем из бумаги произвольный треугольник ABC. Проведем на листе бумаги две прямые a и b. Будем прикладывать треугольник ABC так, чтобы вершина A принадлежала прямой a, вершина B — прямой b, отмечая всякий раз на бумаге положение вершины C. Различные положения вершины C будут заполнять эллипс. Докажите.

3. Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, называется ***гиперболой***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 12).

Таким образом, для точек A гиперболы с фокусами F_1, F_2 выполняется равенство $|AF_1 - AF_2| = c$, где c — некоторое фиксированное положительное число.

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 - AF_1 = c$.

Из неравенства треугольника следует, что c должно быть меньше длины отрезка F_1F_2.

Для того чтобы нарисовать гиперболу, потребуются линейка и нить, длина которой меньше длины линейки. Разность длин линейки и нити должна быть меньше, чем расстояние между фокусами. Прикрепим один конец нити к концу линейки, а второй конец — к фокусу. Второй конец линейки совместим со вторым фокусом. Натянем нить, прижав ее к линейке острием карандаша (рис. 13). Если поворачивать линейку вокруг фокуса, прижимая к ней карандаш и оставляя нить натянутой, то карандаш будет описывать гиперболу.

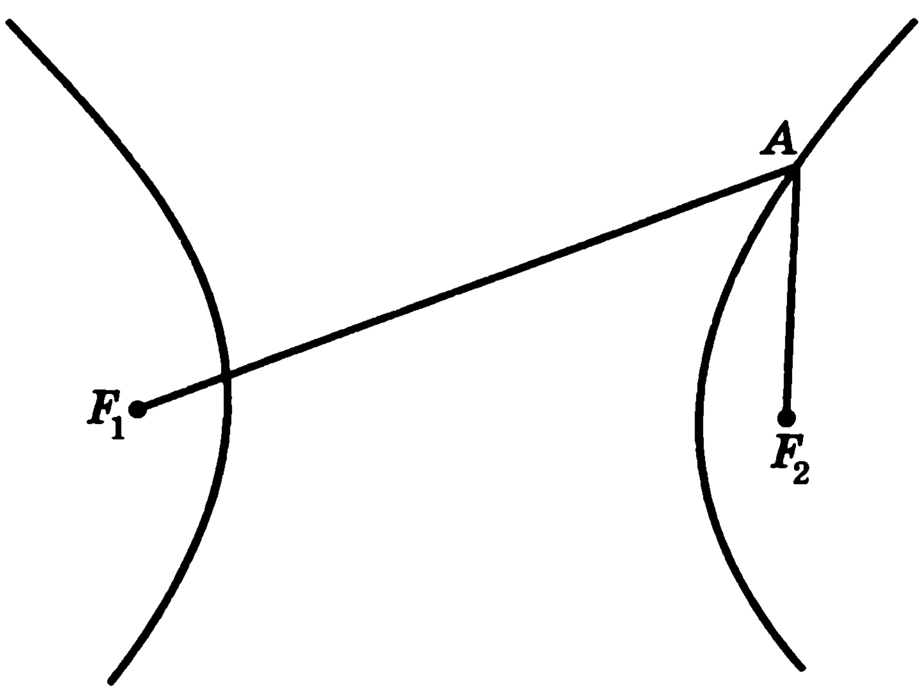


Рис. 12

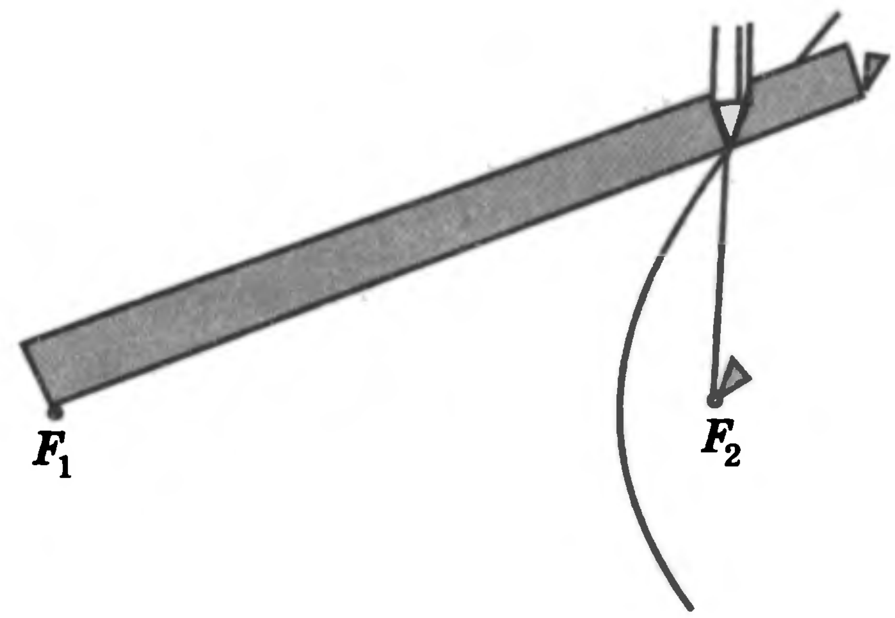


Рис. 13

Рассмотрим ветвь гиперболы, точки которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$. Она разбивает плоскость на две области — внешнюю, для точек A' которой выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$, и внутреннюю, для точек A'' которой выполняется неравенство $A''F_1 - A''F_2 > c$.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой лежат во внешней области, т. е. удовлетворяют неравенству $A'F_1 - A'F_2 < c$, называется ***касательной*** к гиперболе. Точка A называется ***точкой касания***.

Аналогичным образом определяется касательная для точки, лежащей на другой ветви гиперболы.

Теорема. Пусть A — точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что прямая a, содержащая биссектрису угла F_1AF_2, будет касательной к гиперболе (рис. 14). Обозначим $AF_1 - AF_2 = c$. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F' Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = c.$$

Следовательно, прямая a является касательной.

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от гиперболы, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A — точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a — касательная (рис. 14). Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2. Углы 2 и 3 равны как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдет в направлении AF_2.

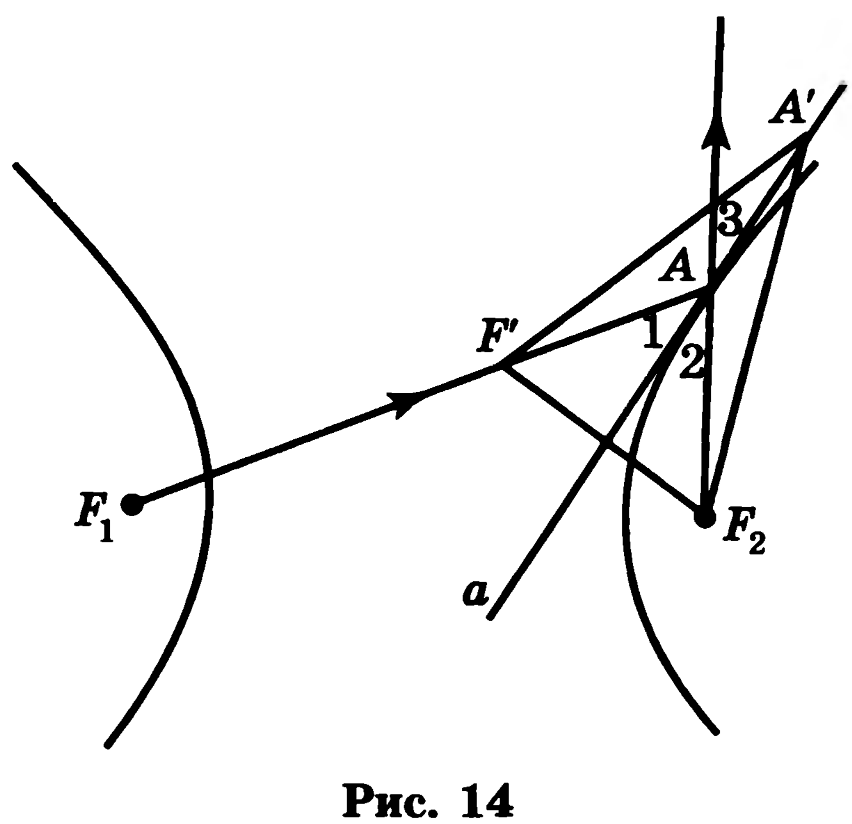


Рис. 14

Построение касательной к гиперболе. Пусть гипербола задана своими фокусами и константой c. Используя циркуль и линейку, построим касательную к гиперболе, проходящую через данную точку C (рис. 15).

С центром в точке C и радиусом CF_2 проведем окружность. С центром в точке F_1

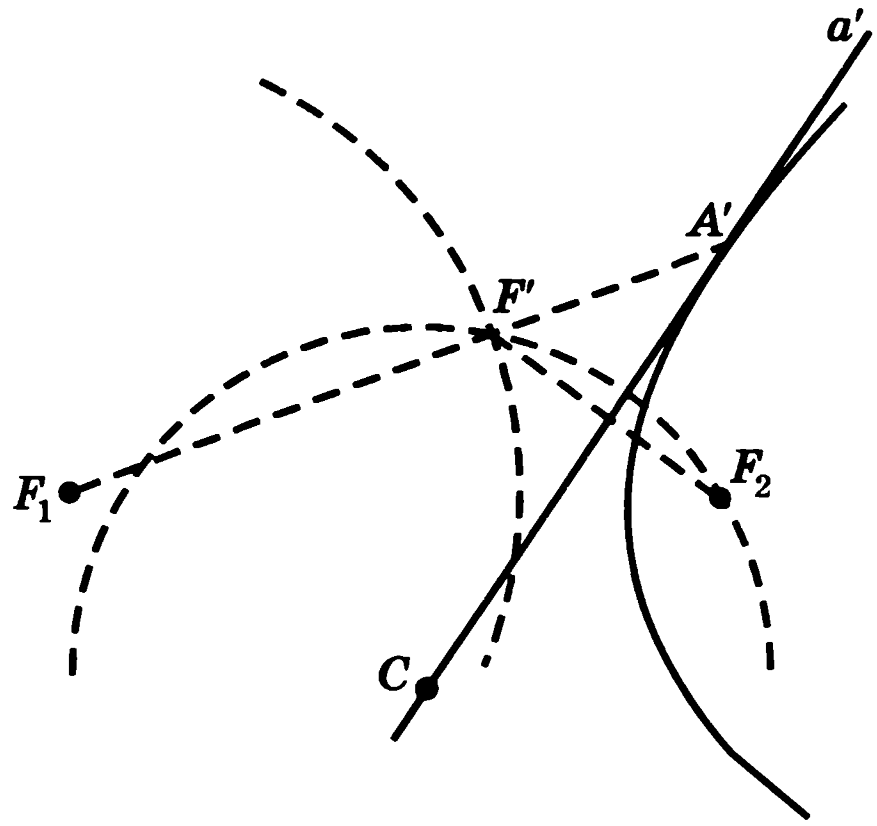


Рис. 15

и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точки пересечения с первой окружностью. Таких точек может быть две — F', F'', — одна или ни одной в зависимости от расположения точки C. В первом случае проведем биссектрисы углов $F'CF_2$, $F''CF_2$. Соответствующие прямые a', a'' являются серединными перпендикулярами к отрезкам $F'F_2$, $F''F_2$ и, значит, будут искомыми касательными к гиперболе. Для построения точек касания проведем прямые F_1F', F_1F'' и найдем их точки пересечения A', A'' с касательными a', a'' соответственно. Они и будут искомыми.

Во втором случае, когда проведенные окружности имеют одну общую точку (касаются), будем иметь одну касательную. Если же окружности не имеют общих точек, то касательных нет.

Лабораторная работа

Укажем способ получения гиперболы из листа бумаги. Вырежем из листа бумаги круг и отметим точку F на оставшейся части листа. Сложим лист так, чтобы эта точка совместилась с какой-нибудь точкой F' окружности вырезанного круга и на бумаге образовалась линия сгиба. Разогнем лист и снова согнем его, совместив точку с другой точкой окружности. Сделаем так несколько раз. Линии сгибов будут касательными к гиперболе. Граница участка внутри этих сгибов будет иметь форму гиперболы.

Задачи

1. Изготовьте прибор для построения гиперболы. Нарисуйте гиперболу с заданными фокусами F_1, F_2. Сколько таких гипербол?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения пар окружностей с заданными центрами и разностью радиусов.

3. С помощью циркуля постройте несколько точек гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них.

4. Найдите геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух заданных точек F_1, F_2: а) меньше заданной величины c; б) больше заданной величины c.

5. Что будет происходить с гиперболой, если фокусы: а) приближаются друг к другу; б) удаляются друг от друга?

6. У шарнирной замкнутой ломаной $ABCD$, у которой $AB = CD$ и $AD = BC$, сторона AB закреплена, а остальные стороны подвижны (рис. 16). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AD и BC.

7. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей. Рассмотрите различные случаи касания окружностей.

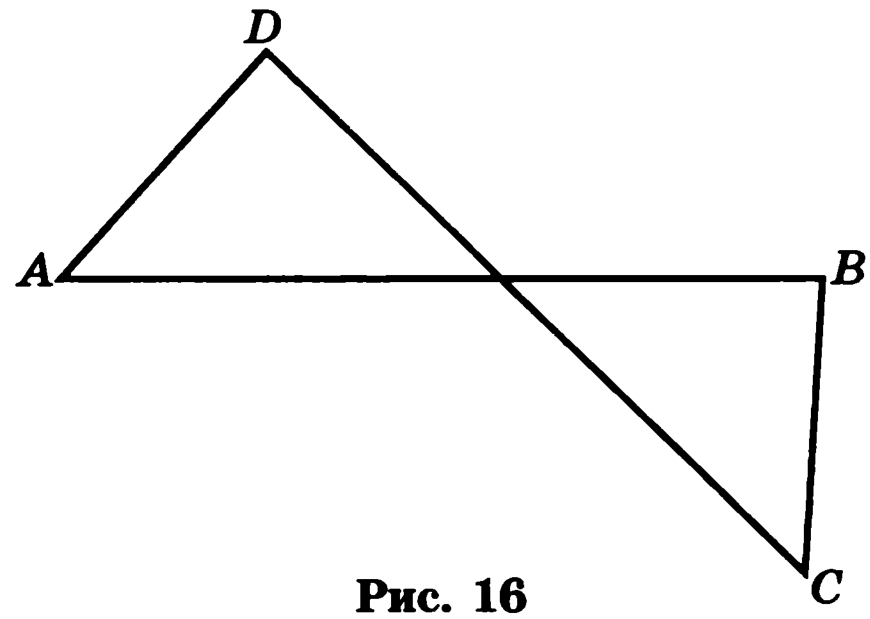


Рис. 16

8. Через точку гиперболы с заданными фокусами проведите касательную к гиперболе.

9. Для гиперболы с заданными фокусами F_1, F_2 и разностью расстояний до них c найдите точки, касательные в которых перпендикулярны прямой F_1F_2.

10. Через точку вне гиперболы с заданными фокусами и разностью расстояний до них проведите касательную к этой гиперболе.

11. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами имеют перпендикулярные касательные в точках пересечения.

12. Даны фокусы F_1, F_2 гиперболы и разность расстояний до них c. Докажите, что для произвольной точки C на окружности с центром в F_1 и радиусом c серединный перпендикуляр к отрезку F_2C будет касательной к гиперболе, если он пересекается с прямой F_2C. Найдите точку касания.

13. Даны два фокуса и касательная к гиперболе. Постройте постоянную c и нарисуйте гиперболу.

14. Даны две касательные, фокус и постоянная c. Постройте второй фокус гиперболы.

15. Дана гипербола. Укажите способ нахождения ее фокусов.

4. Именные кривые

Рассмотрим еще несколько классических кривых, определяемых как геометрические места точек и носящих имена ученых, занимавшихся их изучением.

1. Лемниската Бернулли представляет собой геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 равно a^2, где $2a$ — расстояние между F_1 и F_2. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** лемнискаты (рис. 17).

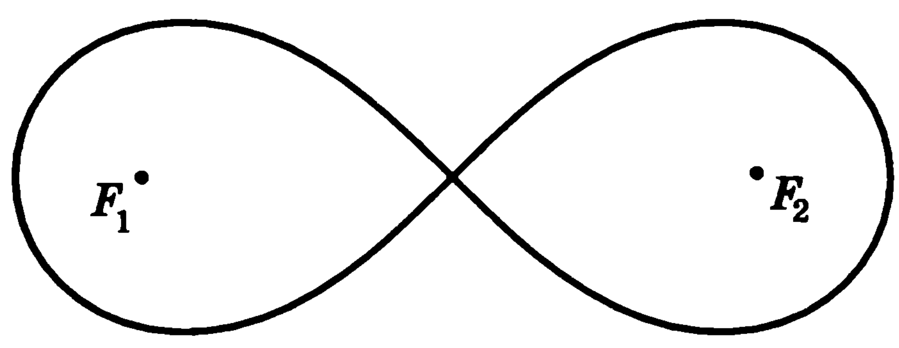


Рис. 17

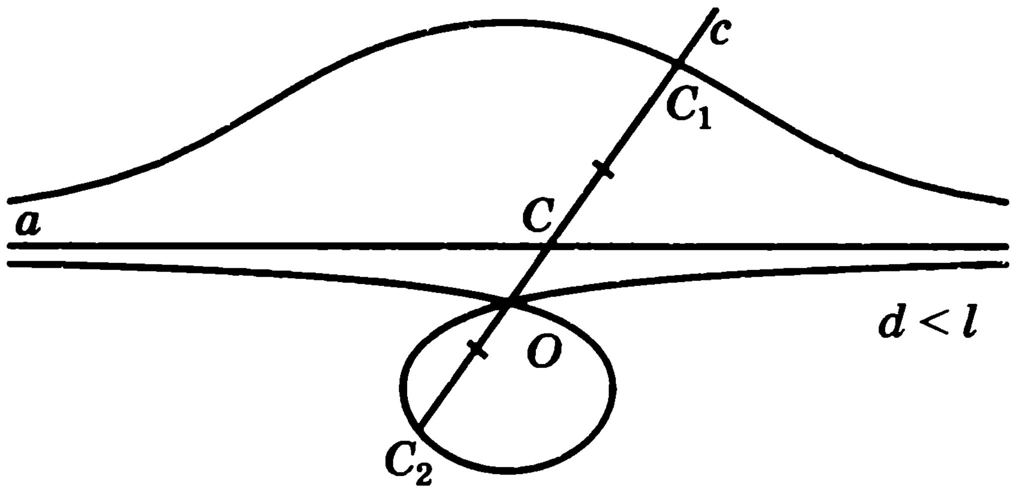


Рис. 18

2. Конхоида Никомеда — кривая, определяемая следующим образом. Через точку O, называемую ***полюсом*** конхоиды и отстоящую от прямой a, называемой ее ***базисом***, на расстояние d, проведем прямую c, пересекающую прямую a в точке C. Отложим на прямой c по обе стороны от точки C на данном расстоянии l от нее точки C_1 и C_2, $CC_1 = CC_2 = l$. Проводя всевозможные прямые c, получим геометрическое место точек C_1 и C_2, образующих две ветви конхоиды. На рисунке 18 показан случай, когда $d < l$.

3. Улитка Паскаля определяется так же, как и конхоида, только в качестве базиса берется не прямая, а окружность. А именно, через точку O, называемую ***полюсом*** и расположенную на окружности радиуса R, называемой ***базисом***, проведем прямую c, пересекающую окружность в точке C. Отложим на прямой c по обе стороны от точки C на данном расстоянии l от нее точки C_1 и C_2, $CC_1 = CC_2 = l$. Проводя всевозможные прямые c, получим геометрическое место точек C_1 и C_2, образующих улитку Паскаля. На рисунке 19 показан случай, когда $2R > l$.

4. Строфоида. Пусть дана прямая a и точка O, ей не принадлежащая. Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OA. Для точек C на прямой a рассмотрим лучи OC и будем откладывать на них отрезки CC_1 и CC_2 так, что $CC_1 = CC_2 = CA$. Геометрическое место таких точек C_1 и C_2 представляет собой кривую, называемую строфоидой (рис. 20). Точка O называется ***полюсом*** строфоиды.

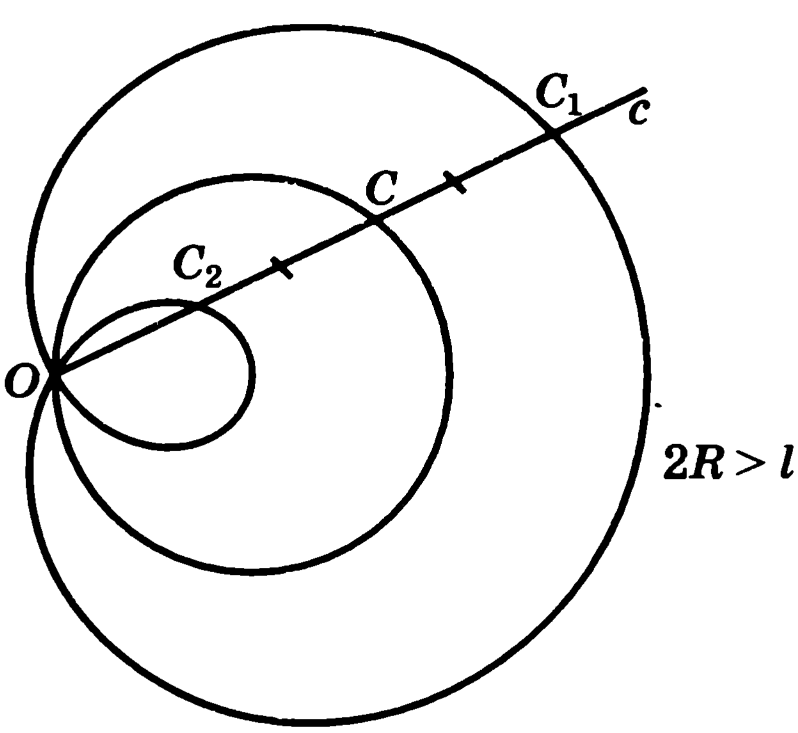


Рис. 19

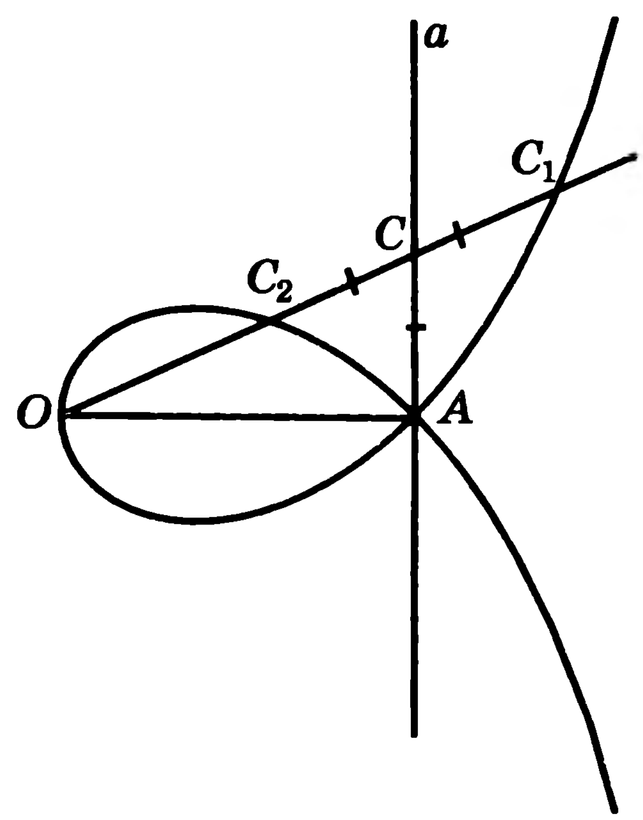


Рис. 20

Задачи

1. Укажите оси симметрии: а) лемнискаты; б) конхоиды; в) улитки; г) строфоиды.

2. Нарисуйте конхоиды Никомеда для случаев: а) $d = l$; б) $d > l$.

3. Нарисуйте улитки Паскаля для случаев: а) $2R = l$; б) $2R < l$.

4. Нарисуйте кривую, называемую ***циссоидой Диоклеса***, представляющую собой геометрическое место точек, полученных следующим образом. Рассмотрим окружность с диаметром OA и касательной в точке A (рис. 21). Для произвольной точки B этой касательной обозначим через C точку пересечения отрезка OB с окружностью. На луче OB отложим отрезок OM, равный BC. Геометрическое место таких точек M и будет искомой кривой.

5. Имеет ли циссоида оси симметрии? Если имеет, то сколько?

6. Нарисуйте кривую, называемую ***каппой*** и сходную по форме с одноименной греческой буквой. Она представляет собой геометрическое место точек, полученных следующим образом. Рассмотрим прямую a, точку A на этой прямой и окружность данного радиуса R с центром в точке O, расположенной также на прямой a. Из точки A проведем касательные к окружности и точки касания обозначим M, N (рис. 22). Геометрическое место таких точек, соответствующих различным положениям центра O окружности на прямой a, и дает искомую кривую.

7. Имеет ли каппа оси симметрии? Если имеет, то сколько?

8. Докажите, что расстояния от точек каппы до прямой a не превосходят радиуса R окружности.

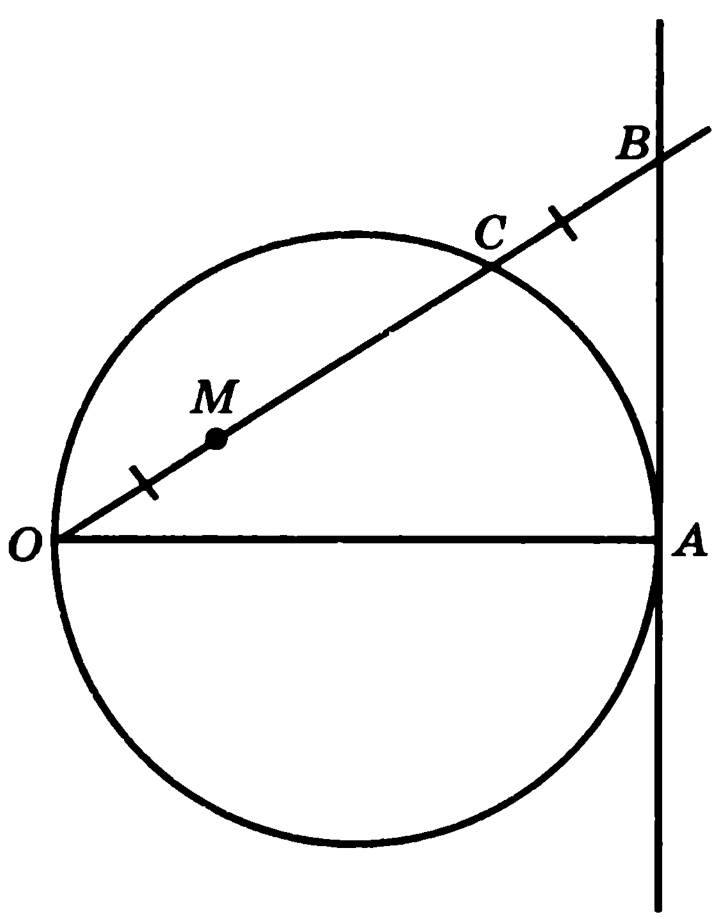


Рис. 21

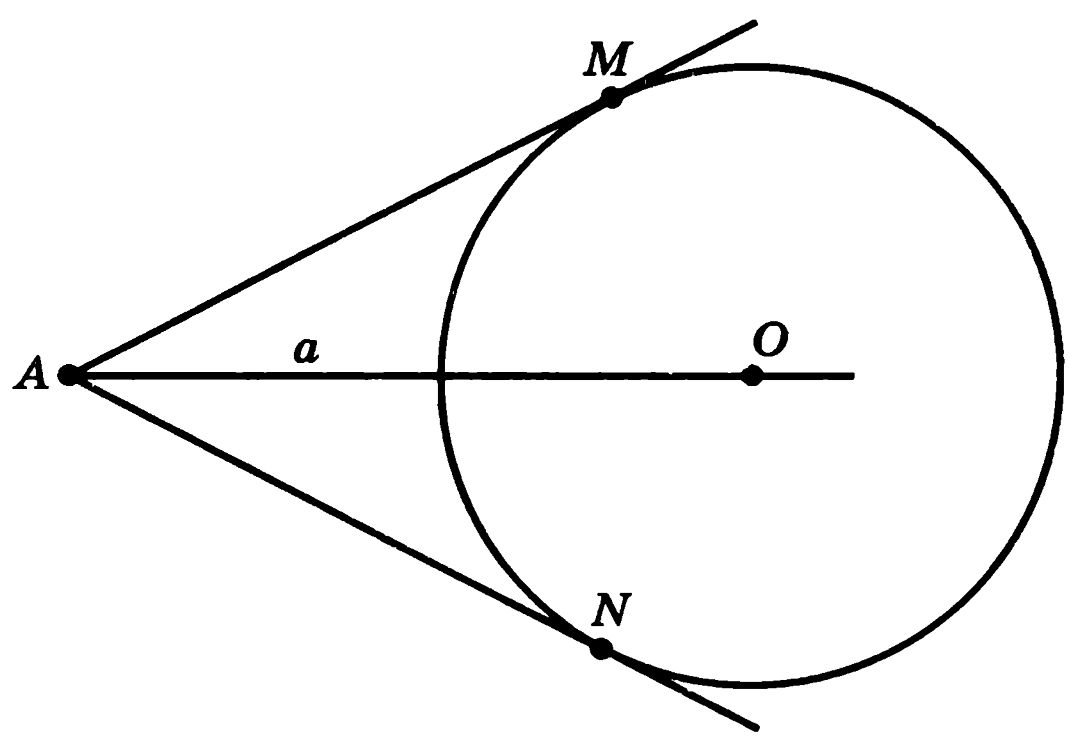


Рис. 22

5. Кривые как траектории движения точек

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки. Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся без скольжения по прямой, по окружности или другой кривой, называется циклоидальной, что в переводе с греческого языка означает «кругообразная, напоминающая о круге».

Рассмотрим сначала случай, когда окружность катится по прямой. Кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности, катящейся без скольжения по прямой, называется ***циклоидой***.

Пусть окружность радиуса R катится по прямой a. C — точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 23). Отложим на прямой a отрезок AB, равный длине окружности, т. е. $AB = 2\pi R$. Разделим этот отрезок на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., $A_8 = B$.

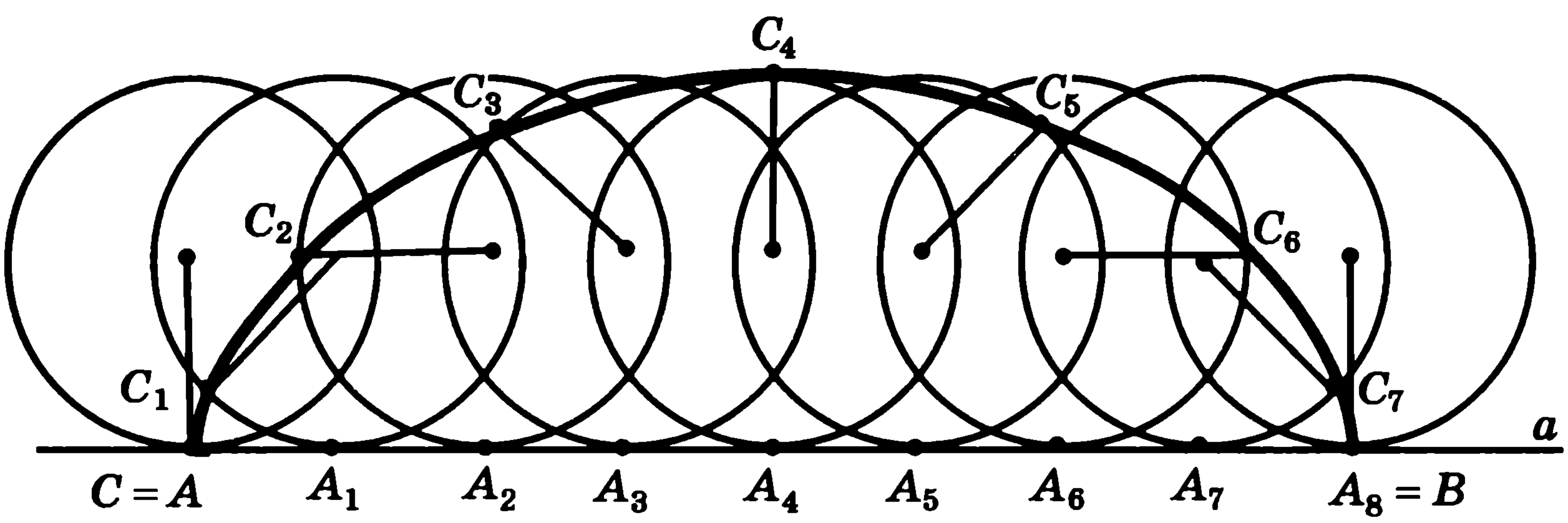


Рис. 23

Ясно, что когда окружность, катясь по прямой a, сделает один оборот, т. е. повернется на 360°, она займет положение (8), а точка C переместится из положения A в положение B.

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернется на 180°, она займет положение (4), а точка C переместится в самое верхнее положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, то окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 23 показаны также другие точки циклоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим участок циклоиды, соответствующий одному полному обороту окружности. При следующих оборотах будут получаться такие же участки, т. е. циклоида будет состоять из периодически повторяющегося участка, называемого ***аркой*** циклоиды.

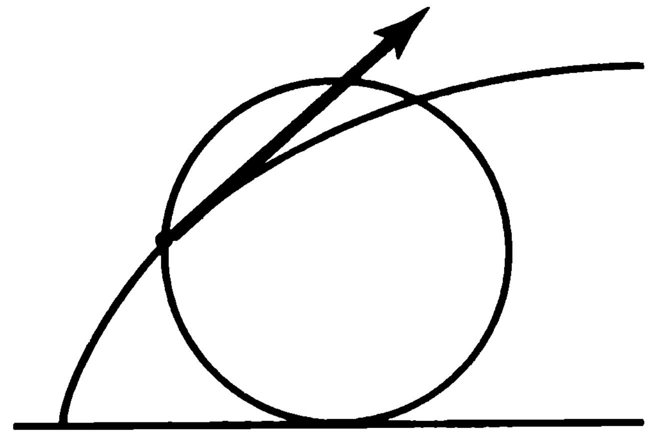


Рис. 24

Обратим внимание на положение касательной к циклоиде (рис. 24). Если велосипедист едет по мокрой дороге, то оторвавшиеся от колеса капли будут лететь по касательной к циклоиде и при отсутствии щитков могут забрызгивать спину велосипедиста.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564—1642). Он же придумал и ее название.

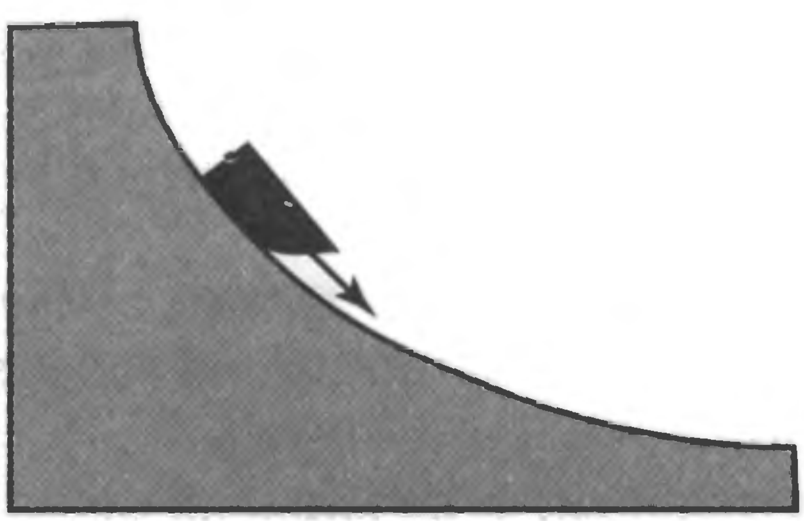
Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

Свойство 1. (Ледяная гора.) В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или иначе говоря, о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время (рис. 25, а). Искомую кривую назвали брахистохроной, т. е. кривой кратчайшего времени.

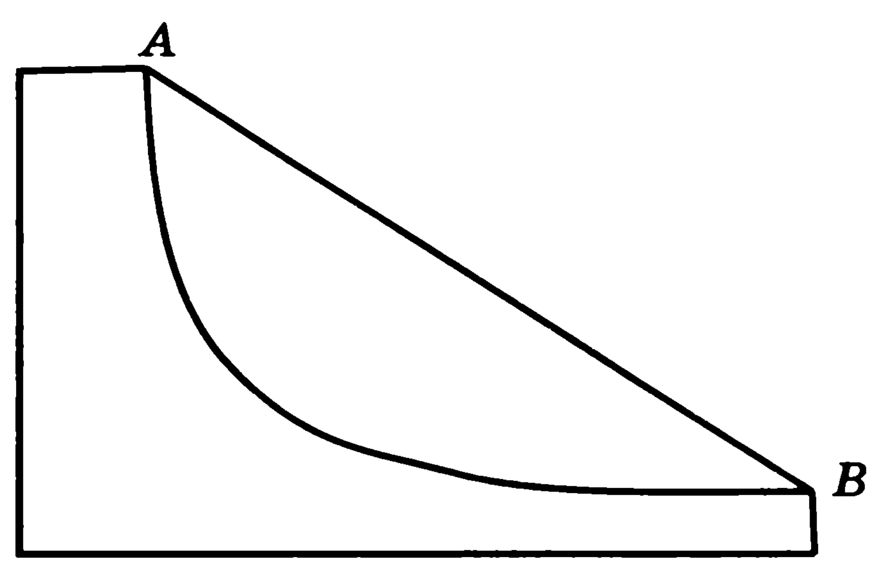
Ясно, что кратчайшим путем из точки A в точку B является отрезок AB. Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается большим (рис. 25, б).

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения.

Среди математиков, решавших эту задачу, были Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и И. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевернутая циклоида (рис. 25, а). Методы, развитые этими учеными при решении задачи о брахистохроне, положили начало новому направлению математики — вариационному исчислению.



а)



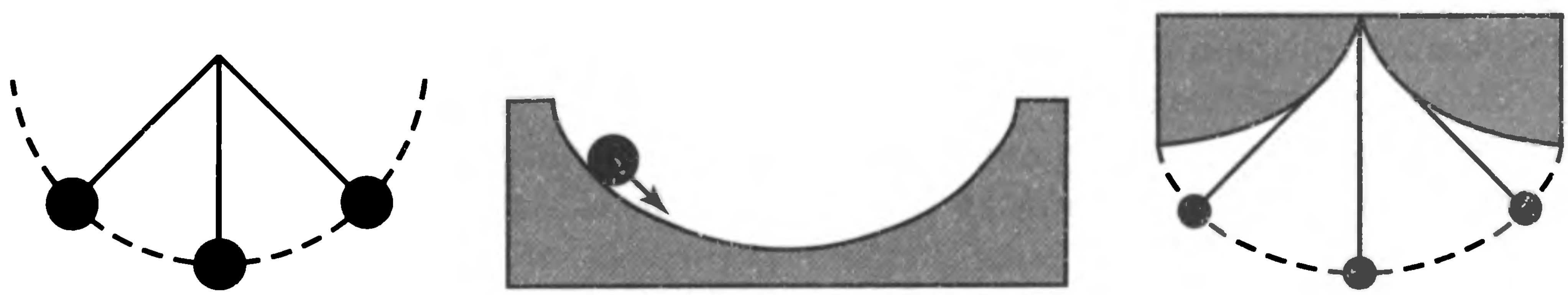
б)

Рис. 25

Свойство 2. (Часы с маятником.) Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды: чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629—1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность (рис. 26, а).

Искомой кривой оказалась перевернутая циклоида. Если, например, в форме перевернутой циклоиды изготовить желоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды (рис. 26, б). За это свойство циклоиду называют также таутохроной — кривой равных времен.

Гюйгенс изготовил две деревянные дощечки с краями в форме циклоиды, ограничивающие движение нити слева и справа (рис. 26, в). При этом сам шарик будет двигаться по перевернутой циклоиде и, таким образом, период его колебаний не будет зависеть от амплитуды.



а) б) в)

Рис. 26

Из этого свойства циклоиды, в частности, следует, что независимо от того, с какого места ледяной горки в форме перевернутой циклоиды мы начнем спуск, на весь путь до конечной точки мы затратим одно и то же время.

Пусть теперь окружность катится без скольжения не по прямой, а по окружности с внешней стороны. В зависимости от соотношения между радиусами неподвижной и катящейся окружностей будут получаться различные кривые. Рассмотрим некоторые из них.

Кривая, которая получается как траектория движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности того же радиуса, называется ***кардиоидой***.

Пусть C — точка, закрепленная на окружности, в начальный момент времени находящаяся в положении A (рис. 27). Разделим неподвижную окружность на 8 равных частей точками A_1, A_2, ..., $A_8 = A$.

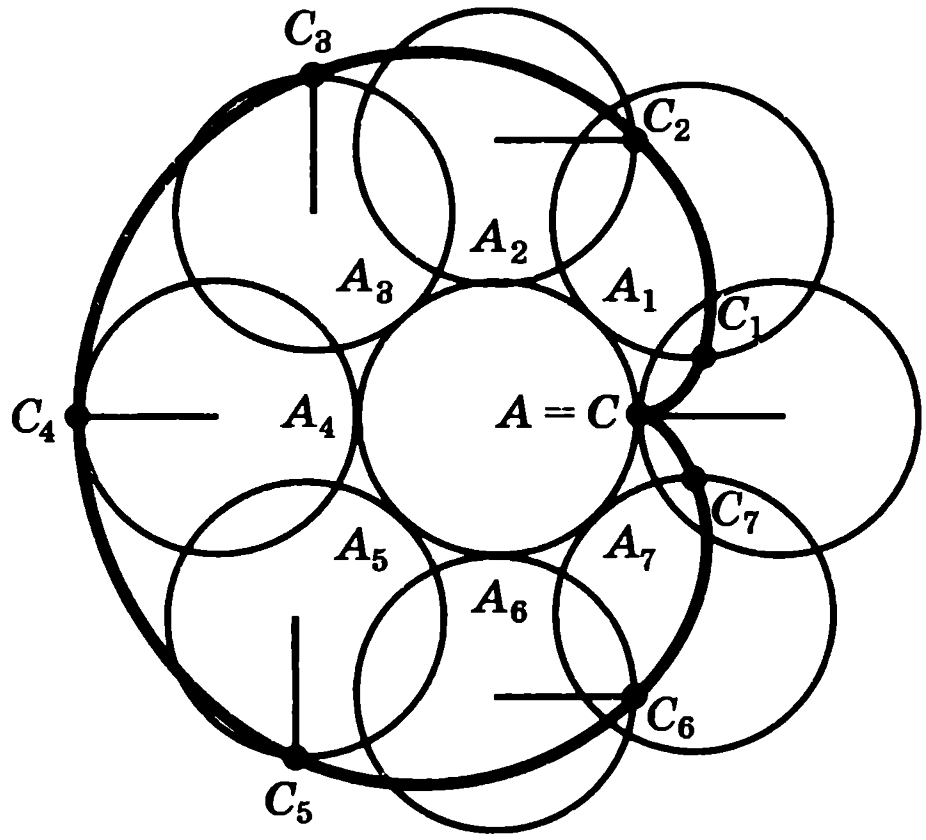


Рис. 27

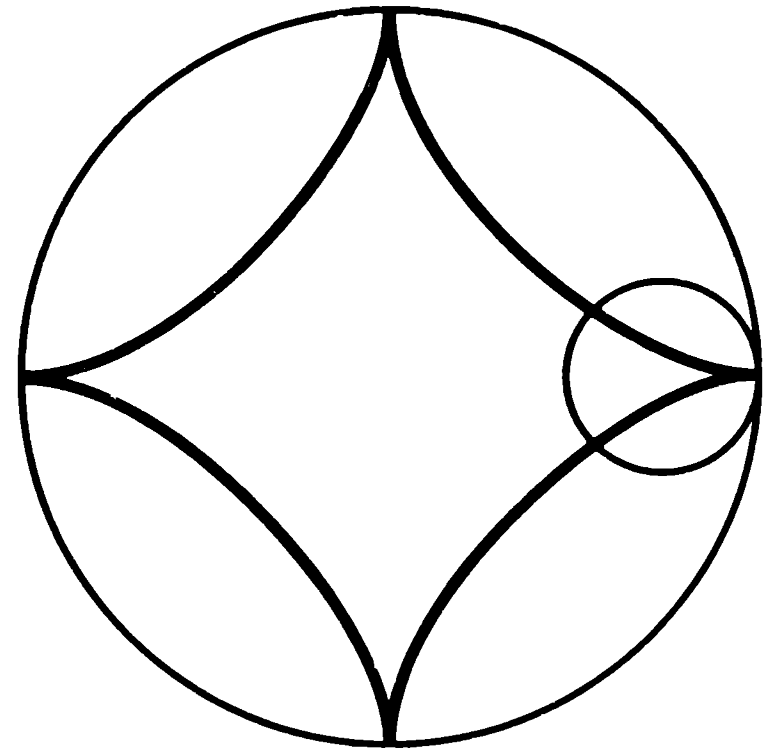


Рис. 28

Ясно, что, когда окружность сделает один оборот, т. е. повернется на 360°, она займет исходное положение и точка C переместится в исходное положение.

Если окружность сделает половину полного оборота, т. е. повернется на 180°, она займет положение (4), а точка C переместится в положение C_4.

Если окружность повернется на угол 45°, окружность переместится в положение (1), а точка C переместится в положение C_1.

На рисунке 27 показаны также другие точки кардиоиды, соответствующие оставшимся углам поворота окружности, кратным 45°.

Соединяя плавной кривой построенные точки, получим кривую, соответствующую одному полному обороту окружности. При следующих оборотах окружности точка C будет описывать ту же самую кривую.

Рассмотрим теперь случай, когда окружность катится по окружности с внутренней стороны и радиус неподвижной окружности в четыре раза больше радиуса катящейся окружности. Получаемая при этом траектория движения точки, закрепленной на катящейся окружности, называется ***астроидой*** (рис. 28).

Задачи

1. Окружность радиуса 2 см катится по прямой. Нарисуйте соответствующую циклоиду.

2. Имеет ли циклоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

3. Докажите, что касательная к циклоиде перпендикулярна отрезку, соединяющему точку касания и точку соприкосновения окружности с прямой, по которой она катится.

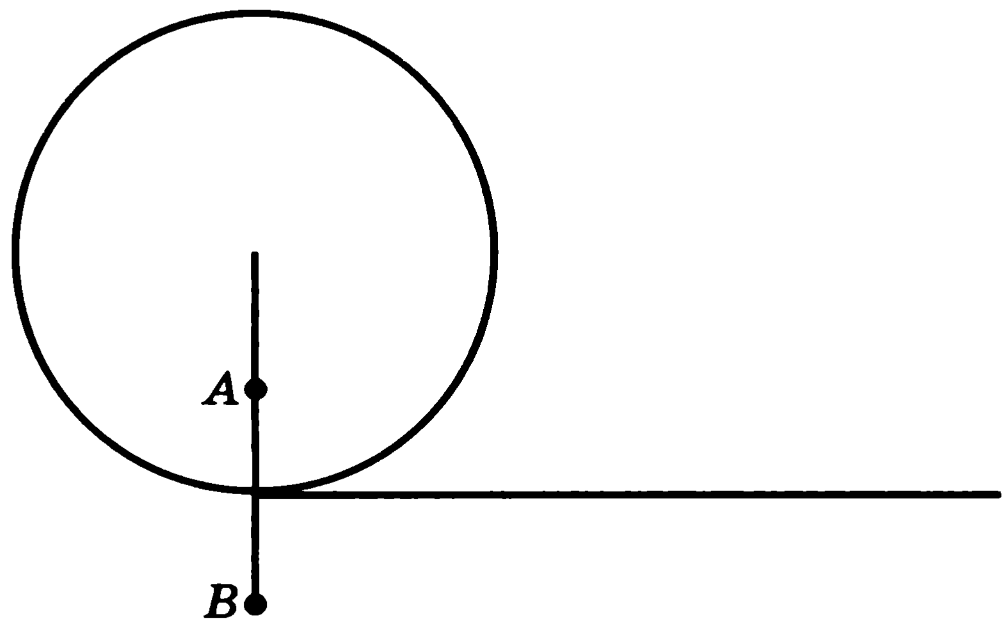


Рис. 29

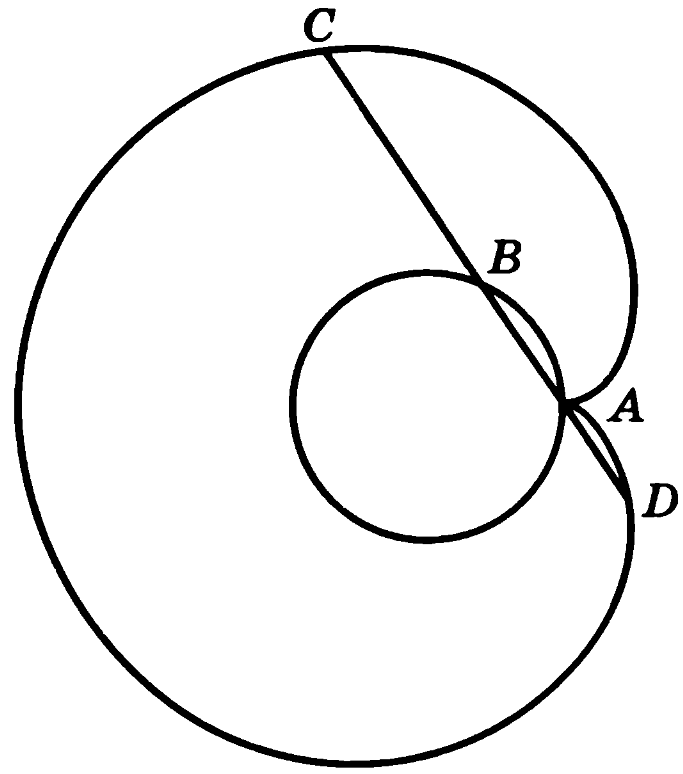


Рис. 30

4. Предположим, что круг без скольжения катится по прямой. Как мы знаем, точки на его окружности будут описывать циклоиды. Нарисуйте кривую, которую будет описывать: а) точка A, закрепленная внутри круга; б) точка B, закрепленная вне круга (рис. 29).

5. Нарисуйте траекторию движения вершины правильного n-угольника, когда он катится по прямой аналогично окружности: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

6. Окружность радиуса 2 см катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте соответствующую кардиоиду.

7. Имеет ли кардиоида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

8. Докажите, что кардиоида обладает следующим свойством: если провести произвольную прямую через точку A (рис. 30) и от точки B ее пересечения с неподвижной окружностью отложить в обе стороны отрезки, равные диаметру окружности, то концы этих отрезков C и D будут принадлежать кардиоиде.

9. Окружность радиуса 1 см катится с внутренней стороны по другой окружности радиуса 4 см. Нарисуйте соответствующую астроиду.

10. Имеет ли астроида: а) оси симметрии; б) центр симметрии?

11. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 1 см, катящейся с внешней стороны по окружности радиуса 2 см.

12. Нарисуйте кривую, получающуюся как траектория движения точки, закрепленной на окружности радиуса 1 см, катящейся с внутренней стороны по окружности радиуса 3 см.

13. Нарисуйте кривую, являющуюся траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса.

14. Нарисуйте кривую, являющуюся траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса.

15. Докажите, что если внутри большой окружности катится окружность вдвое меньшего диаметра, то любая точка внутренней окружности будет двигаться по диаметру внешней окружности.

6. Аналитическое задание кривых на плоскости

В курсе геометрии было показано, что окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других кривых на плоскости.

Парабола. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой d и данной точки F. Прямая d называется директрисой, а точка F — фокусом параболы (рис. 31).

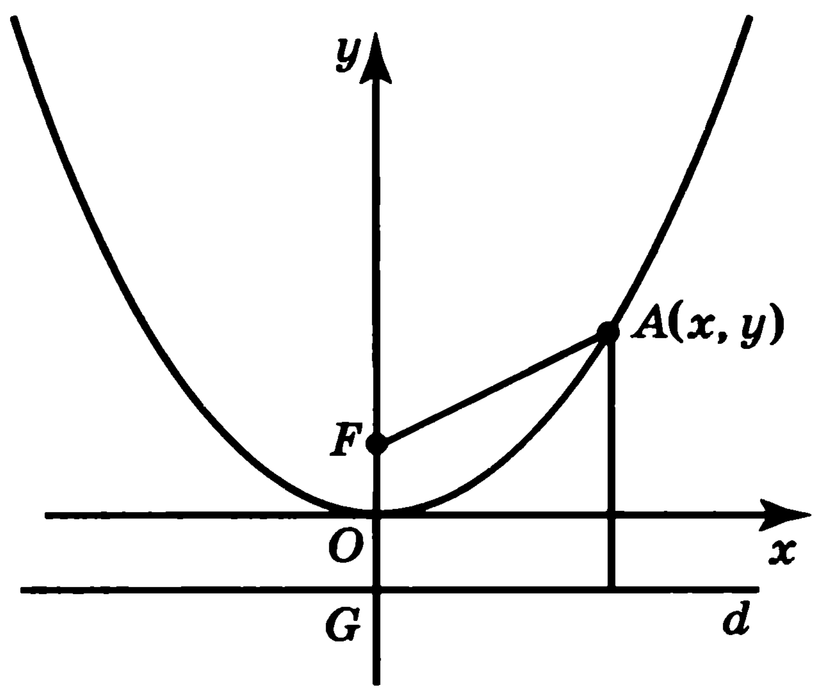


Рис. 31

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с ее директрисой через G. Длину отрезка FG обозначим через $2a$. Введем систему координат, считая началом координат O середину отрезка FG, осью абсцисс — прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат — ось параболы. Тогда фокус F будет иметь координаты $(0, a)$.

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от нее до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ и $|y + a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство $\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|$. Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные, будем иметь равенство

$$4ay = x^2,$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

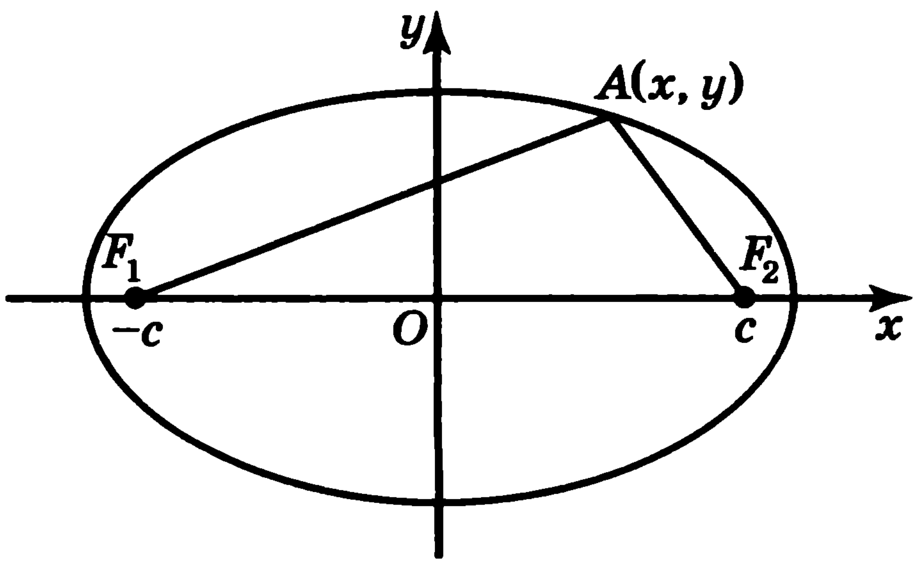


Рис. 32

Эллипс. Напомним, что эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса (рис. 32).

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введем систему координат, считая началом координат O середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс — прямую F_1F_2, осью ординат — прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс. Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $A(x, y)$ — точка плоскости. Расстояния от нее до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

где a — некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесем второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Приведем подобные

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Еще раз возведем в квадрат и приведем подобные

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^4-a^2c^2.$$

Обозначим $b^2=a^2-c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (*)$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

Гипербола. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть фиксированное число. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы (рис. 33).

Выведем уравнение гиперболы. Введем систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy — прямую, перпендикулярную оси Ox и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Точка $A(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a,$$

где a — некоторое фиксированное число ($0 < a < c$).

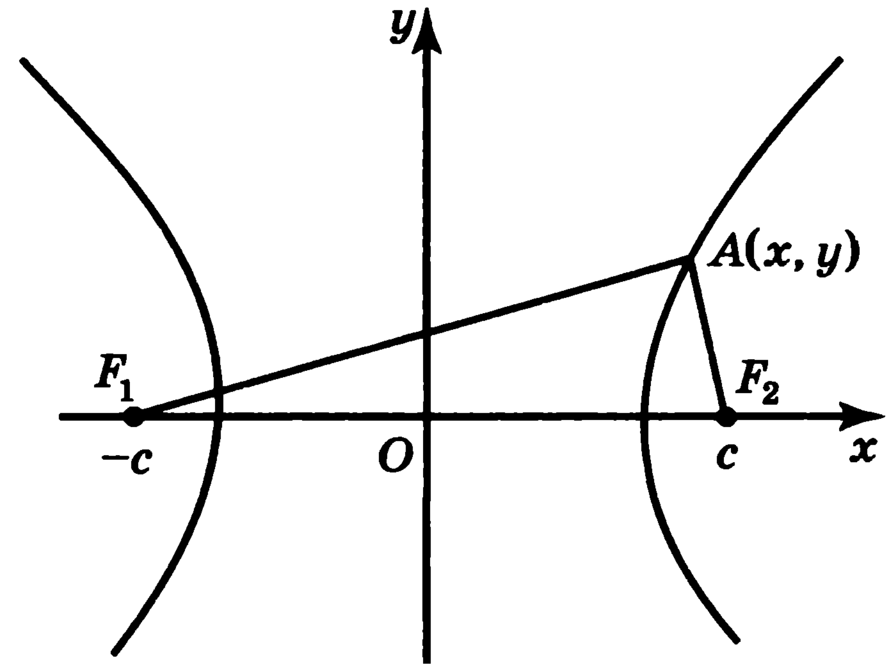


Рис. 33

Перепишем его в виде $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и возведем обе части этого равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Еще раз возводя в квадрат и обозначая $b^2 = c^2 - a^2$, получим

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (**)$$

Прямые, заданные уравнениями $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, называются ***асимптотами*** гиперболы.

Лист Декарта. Декартовым листом называется кривая, уравнение которой имеет вид

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Впервые эта кривая была определена в письме Декарта к Ферма в 1638 году, как кривая, для которой сумма объемов кубов, построенных на абсциссе и ординате каждой точки, равняется объему прямоугольного параллелепипеда, построенного на абсциссе, ординате и некоторой константе. Изображение листа Декарта представлено на рисунке 34.

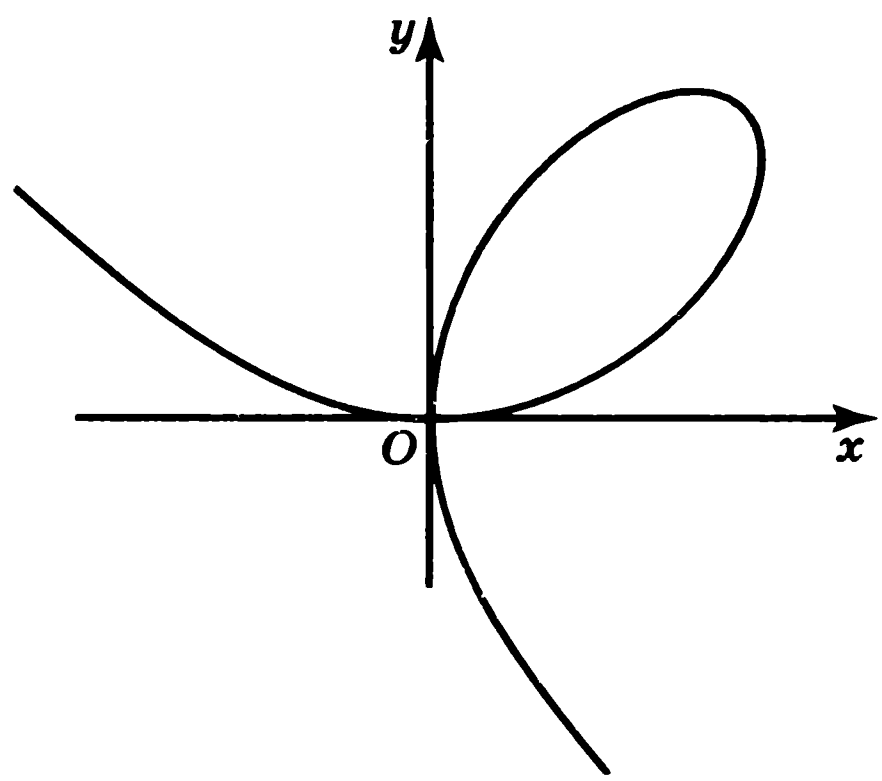


Рис. 34

Задачи

1. Найдите фокус и директрису параболы, заданной уравнением $y = x^2$.

2. Докажите, что ось параболы является ее осью симметрии.

3. Докажите, что любая прямая, проходящая через фокус параболы и не совпадающая с ее осью, пересекает параболу в двух точках.

4. Докажите, что движение переводит параболы в параболы. Какое движение переводит параболу $y = x^2$ в параболу $y^2 = x$?

5. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является параболой. Найдите ее вершину.

6. В каком случае уравнение эллипса дает окружность?

7. Докажите, что эллипс, заданный уравнением (*), симметричен относительно начала координат. Есть ли у него оси симметрии?

8. Для эллипса, заданного уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, найдите координаты фокусов. Нарисуйте этот эллипс.

9. Докажите, что движения переводят эллипсы в эллипсы. Каким движением эллипс, заданный уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, переводится в эллипс $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$?

10. Для гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$, найдите координаты фокусов и уравнения асимптот. Нарисуйте эту гиперболу.

11. Докажите, что движения переводят гиперболы в гиперболы. Каким движением гипербола, заданная уравнением $-x^2 + y^2 = 1$, переводится в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$?

12. Докажите, что гипербола, заданная уравнением (**), симметрична относительно начала координат. Есть ли у нее оси симметрии?

13. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = \frac{1}{x}$, является гиперболой. Найдите фокусы и асимптоты этой гиперболы.

***14.** Найдите уравнение лемнискаты Бернулли (рис. 17), фокусы которой расположены в точках с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

7. Кривые, заданные уравнениями в полярных координатах

Наряду с декартовыми координатами на плоскости, во многих случаях более удобными оказываются так называемые ***полярные координаты.***

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например: «Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели». При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая в данном случае будет называться ***полярной осью***. Точка O называется ***полюсом***.

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r — расстояние от точки A до точки O, φ — угол между полярной осью и вектором $\overline{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$ (рис. 35, а).

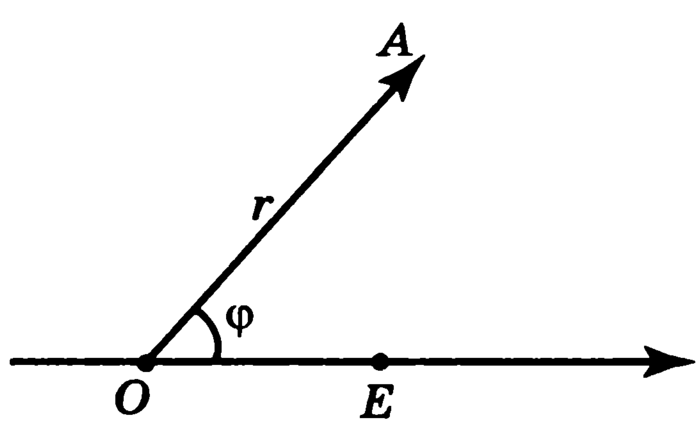
При этом первая координата r называется ***полярным радиусом***, а вторая φ — ***полярным углом***. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось — ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 35, б). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

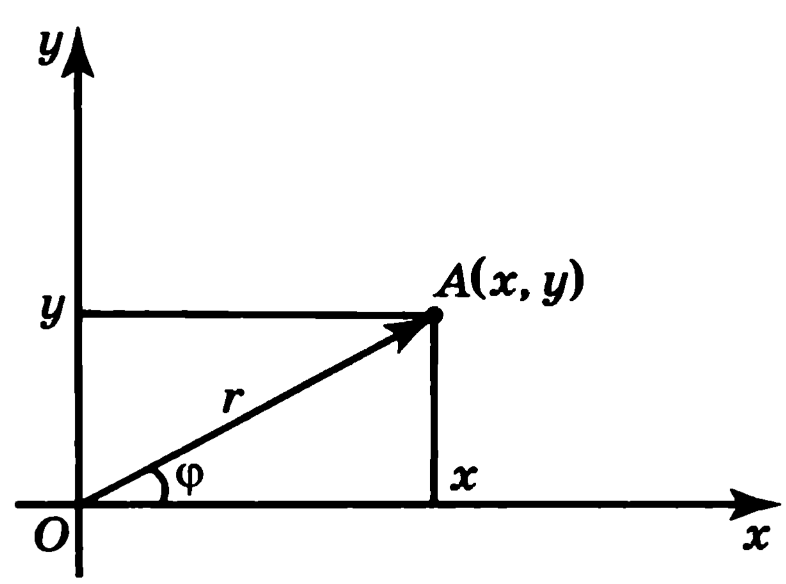
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



а)



б)

Рис. 35

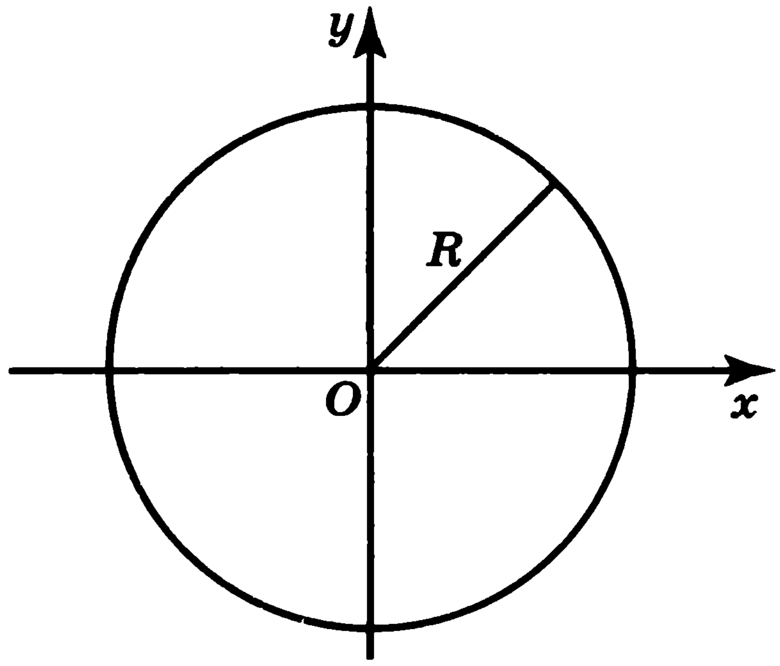


Рис. 36

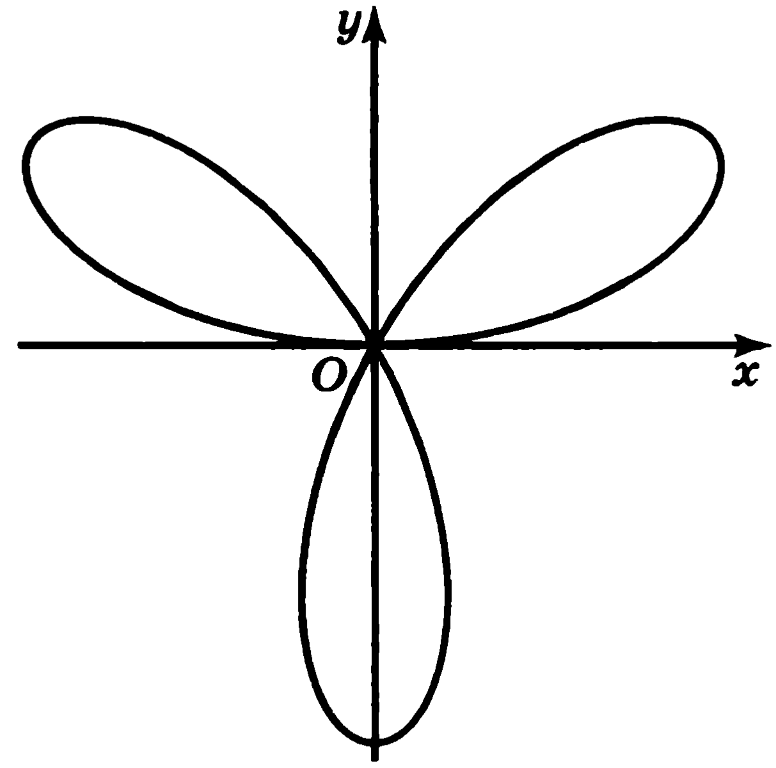


Рис. 37

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

Окружность радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r = R$ (рис. 36).

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом, если угол φ увеличивается, соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

Трилистник — кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geqslant 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ:

$$0° \leqslant \varphi \leqslant 60°;\quad 120° \leqslant \varphi \leqslant 180°;\quad 240° \leqslant \varphi \leqslant 300°.$$

Итак, пусть $0 \leqslant \varphi \leqslant 60°$. Если угол φ изменяется от нуля до 30°, то $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы, и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60°, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 37).

Розы — семейство кривых, полярные уравнения которых имеют вид $r = a \sin k\varphi$, где a — положительное число, k — положительное рациональное

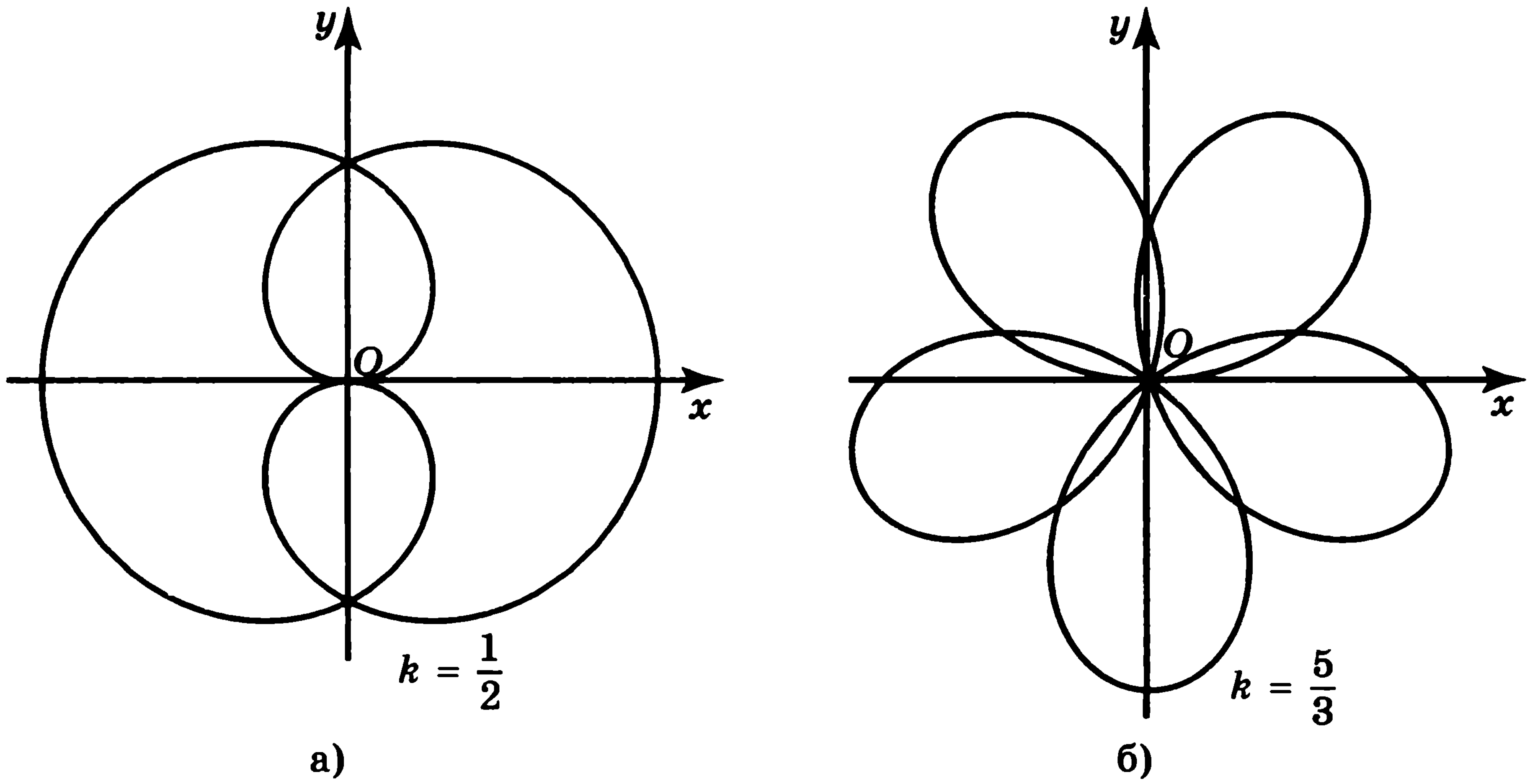


Рис. 38

число. Частным случаем роз является трилистник. Некоторые другие розы представлены на рисунках 38, а, б.

Конхоида. Для вывода полярного уравнения конхоиды воспользуемся прямоугольной системой координат (рис. 39). Примем начало координат за полюс и ось абсцисс за полярную ось. Тогда полярное уравнение конхоиды будет иметь вид

$$r = \frac{a}{\sin\varphi} + l.$$

Строфоида. Для вывода полярного уравнения строфоиды воспользуемся прямоугольной системой координат (рис. 40). Примем начало координат за полюс и ось абсцисс за полярную ось. Тогда $OC = \frac{d}{\cos\varphi}$, $AC = d\ \operatorname{tg}\varphi$ и полярное уравнение строфоиды будет иметь вид

$$r = \frac{d}{\cos\varphi} \pm d\ \operatorname{tg}\varphi = d\frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

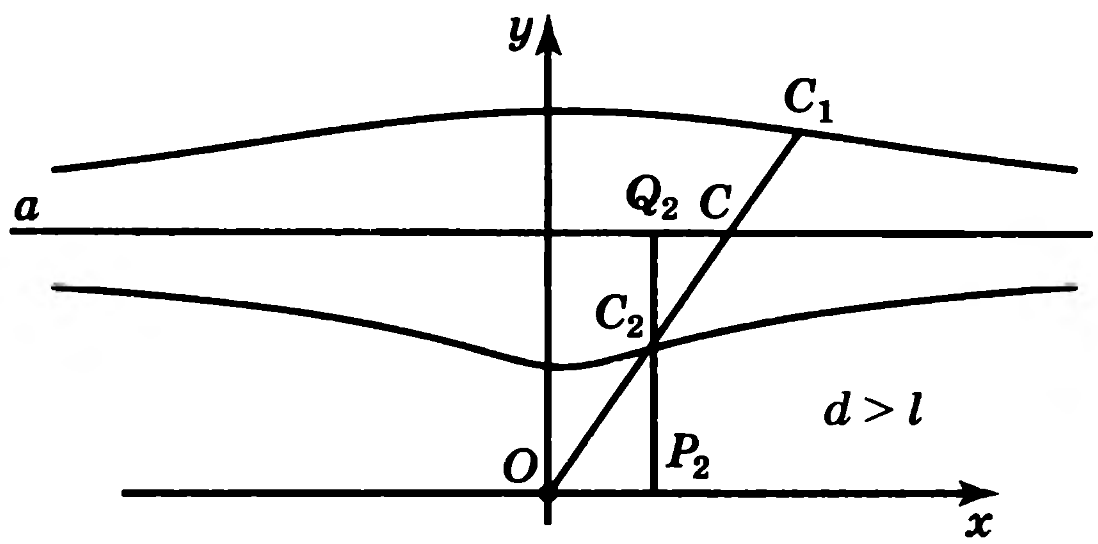


Рис. 39

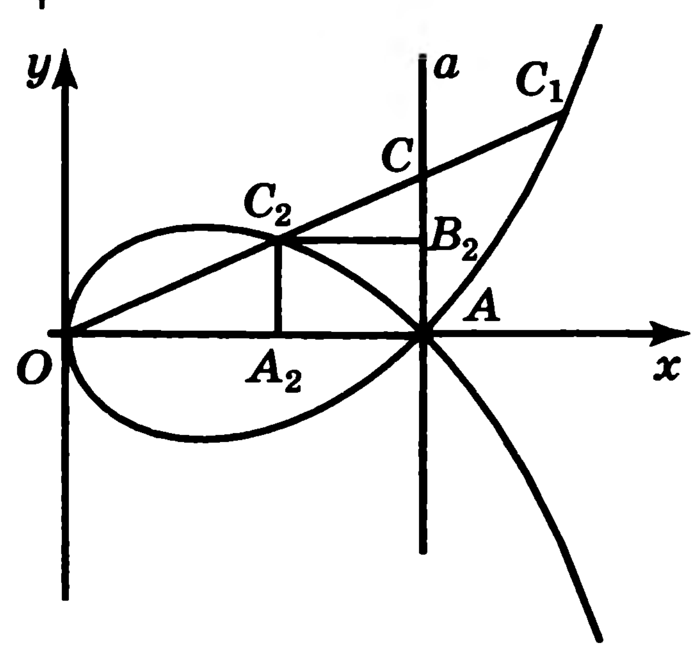


Рис. 40

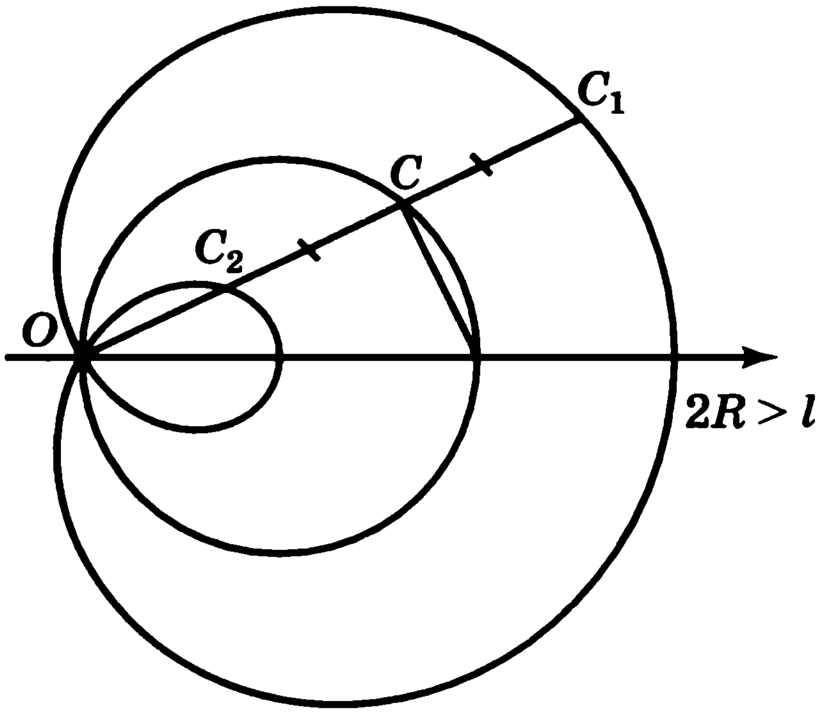


Рис. 41

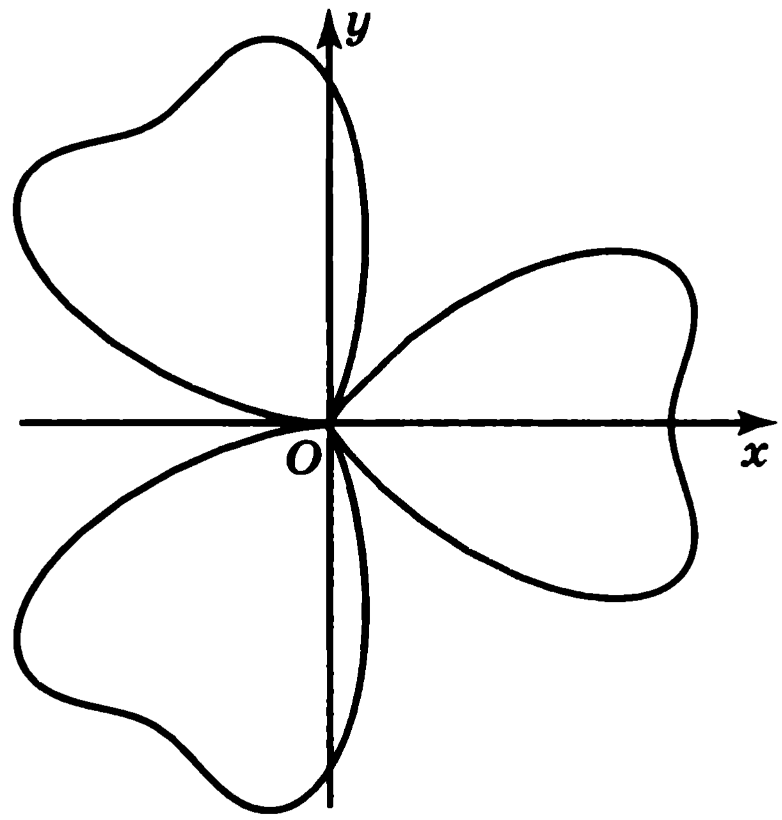


Рис. 42

Улитка Паскаля. Введем полярную систему координат. В качестве полюса возьмем полюс улитки Паскаля, а в качестве полярной оси — луч, проходящий через центр образующей окружности (рис. 41). Полярное уравнение улитки Паскаля будет иметь вид

$$r = 2R \cos\varphi + l.$$

Заметим, что в случае $l = 2R$ улитка Паскаля является кардиоидой.

Лист щавеля. С помощью уравнения в полярных координатах можно задавать самые различные формы цветов и листов. В качестве примера рассмотрим лист щавеля (рис. 42), описываемый уравнением

$$r = 4(1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi.$$

Задачи

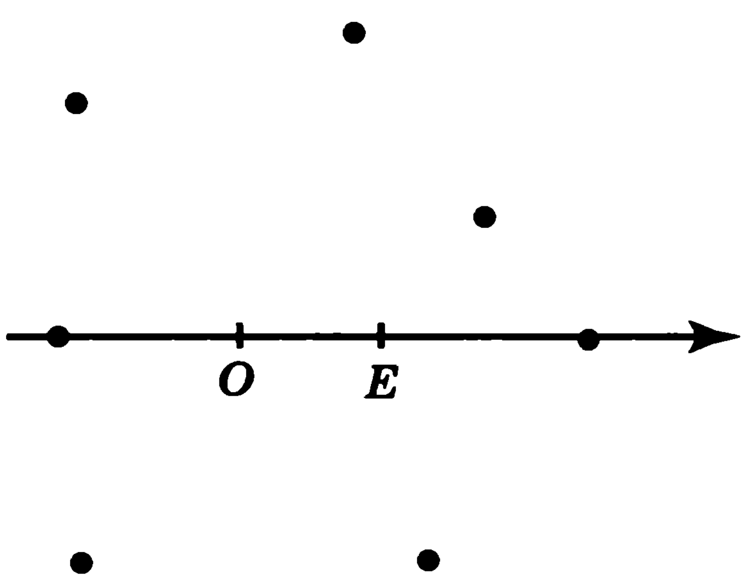


Рис. 43

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $(1, 0)$, $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Используя транспортир и линейку, найдите полярные координаты точек, изображенных на рисунке 43.

3. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: а) $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; б) $(-10, 0)$; в) $(1, -\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.

5. Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

6. Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30° < \varphi < 60°$; б) $1 < r < 2$; в) $30° < \varphi < 60°$, $1 < r < 2$.

7. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 4\varphi$.

8. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos \varphi$.

9. Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy, с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задается уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos \varphi}.$$

10. Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

задает эллипс, если $0 < \varepsilon < 1$, и гиперболу, если $\varepsilon > 1$.

8. Спирали

Спираль Архимеда — кривая, задаваемая уравнением

$$r = a\varphi,$$

где a — некоторое фиксированное число.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус r также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = a\frac{\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую,

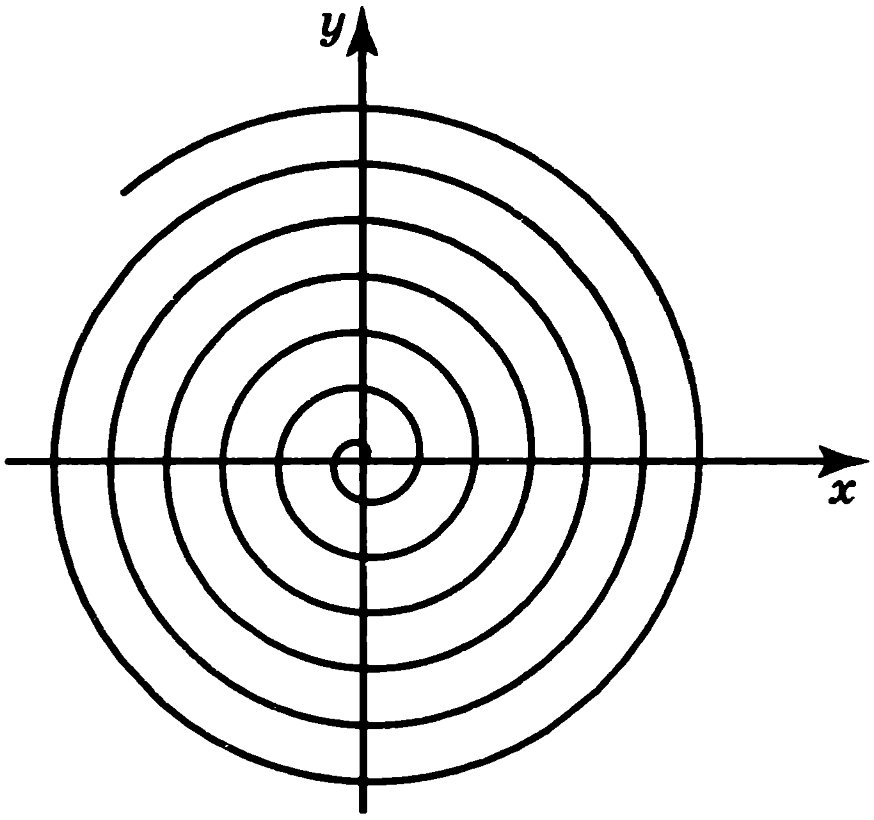


Рис. 44

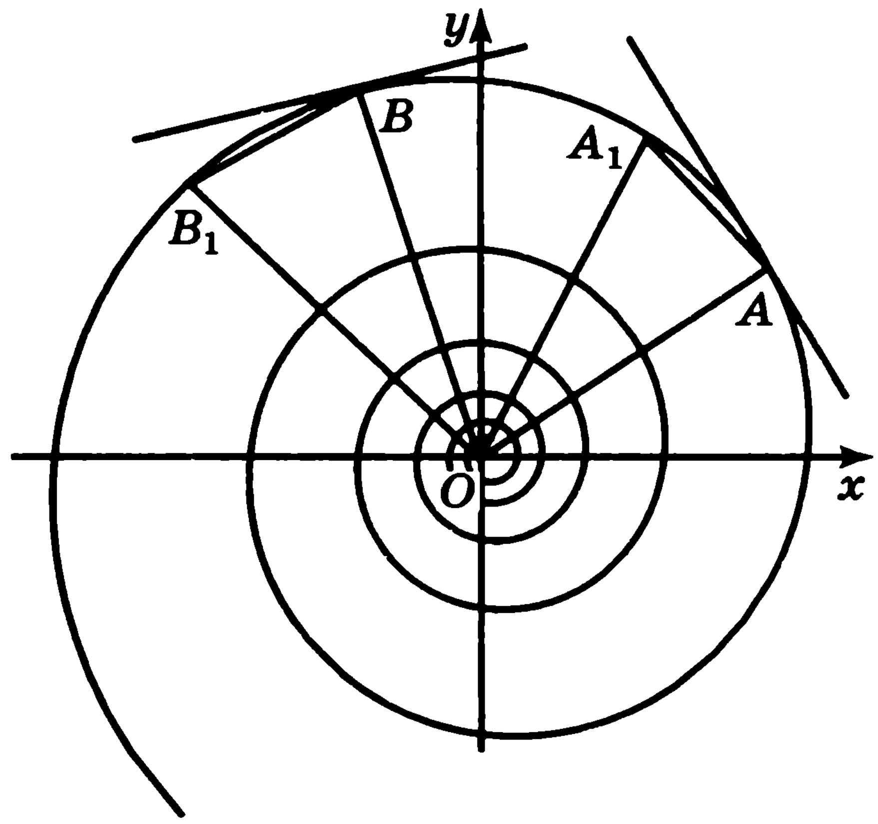


Рис. 45

которая называется спиралью Архимеда в честь ученого, ее открывшего и изучившего (рис. 44).

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку — имеет форму спирали Архимеда.

Логарифмическая спираль. Логарифмическая спираль задается уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где a — некоторое фиксированное положительное число, φ — угол, измеряемый в радианах (рис. 45).

В отличие от спирали Архимеда, логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если $a > 1$, то при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, то при увеличении угла радиус уменьшается.

Одним из основных свойств логарифмической спирали является то, что в любой ее точке угол между касательной к ней и радиусом-вектором сохраняет постоянное значение.

Для доказательства этого воспользуемся тем, что касательную к кривой в точке A можно определить как предельное положение секущей AA_1 при A_1, стремящейся к A.

Пусть точки B, B_1 получены поворотом лучей OA и OA_1 на угол φ, (рис. 45). Тогда треугольники OAA_1 и OBB_1 подобны, и поэтому углы OAA_1 и OBB_1 равны. При A, стремящейся к A_1, эти углы дадут углы между касательными и радиусами-векторами в точках A и B соответственно. Следовательно, угол между касательной и радиусом-вектором не зависит от положения точек на логарифмической спирали, т. е. сохраняет постоянное значение.

Именно это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Однако, если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полета и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

Задачи

1. Может ли в спирали Архимеда, задаваемой уравнением $r = a\varphi$, коэффициент a быть отрицательным?

2. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$. Чему равно расстояние между соседними витками этой спирали?

3. Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

4. Нарисуйте ***гиперболическую спираль***, задаваемую уравнением $r = \frac{a}{\varphi}$.

5. Нарисуйте ***спираль Галилея***, которая задается уравнением $r = a\varphi^2$ ($a > 0$). Она вошла в историю математики в XVII веке в связи с задачей нахождения формы кривой, по которой двигается свободно падающая в области экватора точка, не обладающая начальной скоростью, сообщаемой ей вращением земного шара.

6. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = |\varphi|$.

7. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sqrt{\varphi}$.

8. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \frac{a}{\varphi^2}$.

9. Кривые, заданные параметрическими уравнениями

Рассмотрим вопрос о том, как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется ее координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости ее координат x, y от времени t, т. е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки на плоскости.

Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям при изменении параметра t, называется ***параметрически заданной кривой*** на плоскости. Сами уравнения называются ***параметрическими уравнениями***.

График функции $y = f(x)$ является частным случаем параметрически заданной кривой на плоскости. Параметрическими уравнениями в этом случае будут уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то, переходя к декартовым координатам, ее можно задать и параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(t)\cos t, \\ y = r(t)\sin t. \end{cases}$$

Окружность. Окружность радиуса R с центром в начале координат можно рассматривать как параметрически заданную кривую на плоскости с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

При изменении параметра t от нуля до 2π точка на окружности делает один оборот против часовой стрелки, начиная и заканчивая в точке с координатами $(R, 0)$. При дальнейшем увеличении параметра t точка будет многократно проходить по окружности в направлении против часовой стрелки.

Лист Декарта. Листом Декарта называется кривая, задаваемая уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (рис. 46). Полагая в этом уравнении $y = tx$ и решая его относительно x, получим параметрические уравнения декартова листа

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

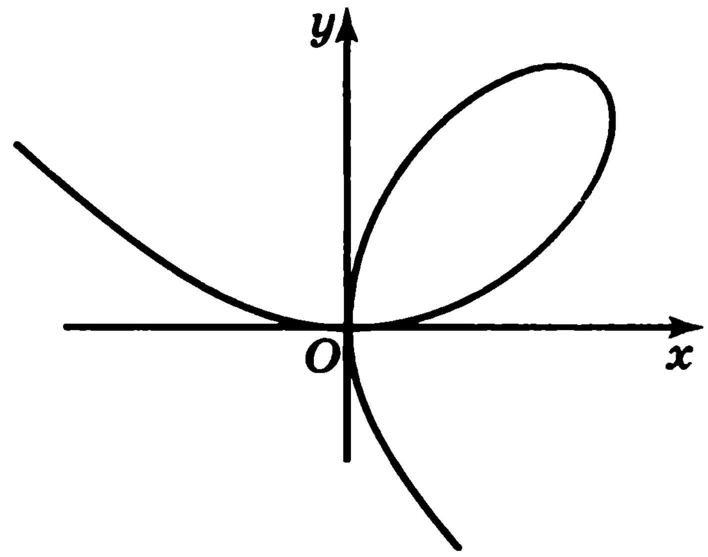


Рис. 46

Циклоида. Рассмотрим циклоиду — кривую, которая описывается точкой, закрепленной на окружности радиуса R, когда эта окружность катится по оси Ox (рис. 47).

Найдем параметрические уравнения циклоиды. Пусть окружность катится по оси Ox и в начальный момент времени касается начала координат. Предположим, что окружность повернулась на некоторый угол величиной t. При этом точка касания O на окружности переместится в точку A. Поскольку дуга AP окружности при этом прокатилась по отрезку OP, то их длины равны, т. е. $AP = OP = Rt$. Для координат x, y точки A имеем

$$x = OP - AQ = Rt - R\sin t = R(t - \sin t),$$
$$y = O_1P - O_1Q = R - R\cos t = R(1 - \cos t),$$

и, таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

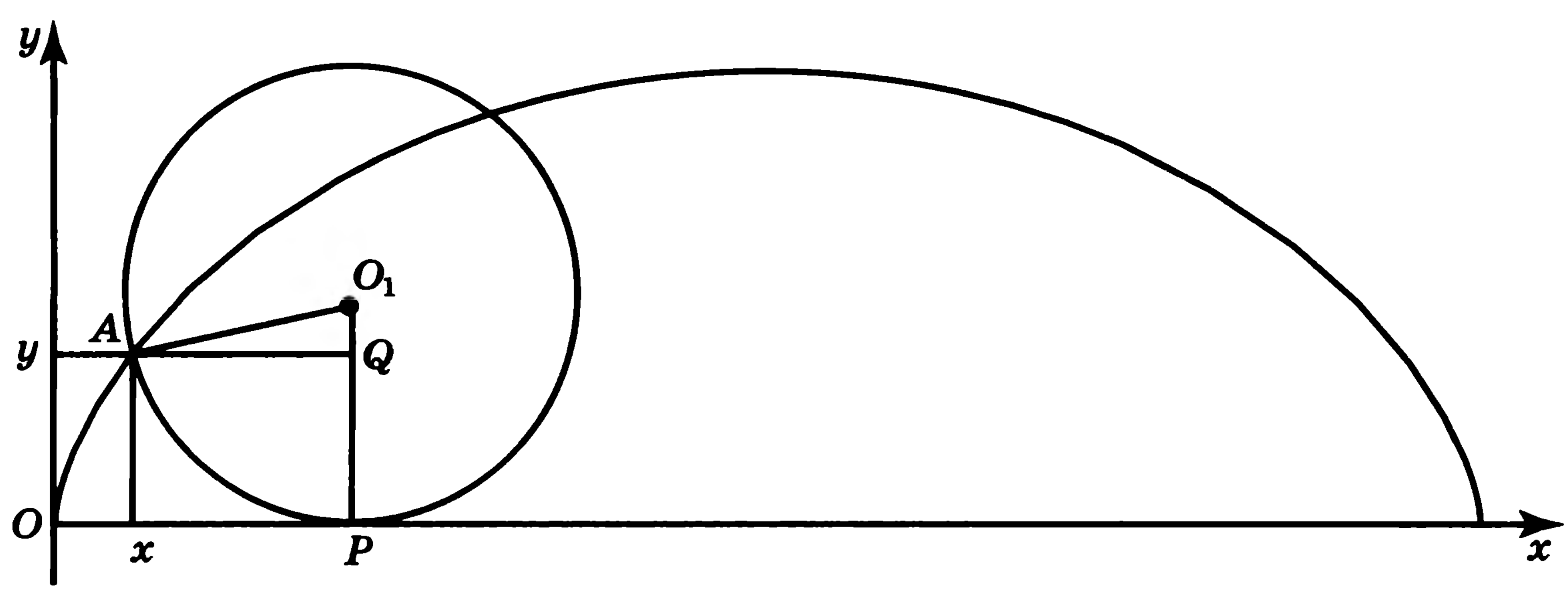
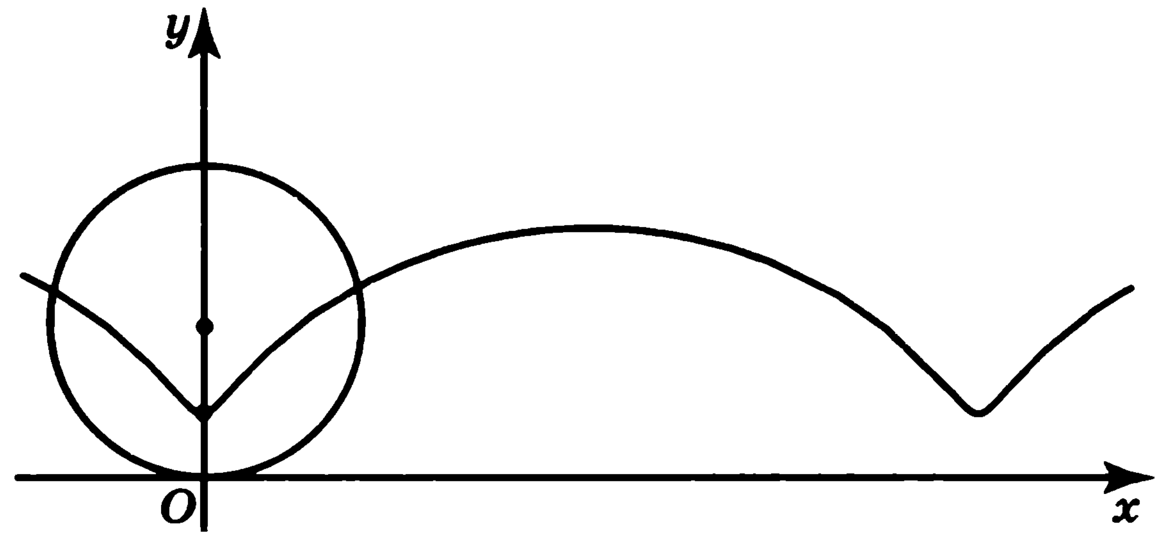


Рис. 47



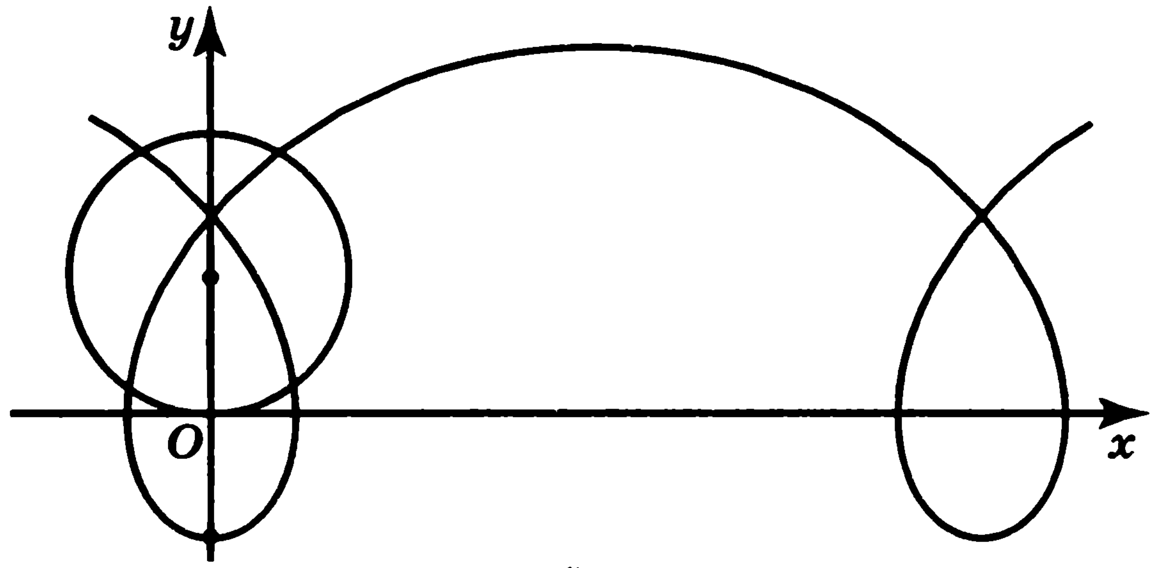


Рис. 48

Трохоида. Обобщением циклоиды является трохоида — траектория движения точки, закрепленной на радиусе окружности или его продолжении, когда эта окружность катится по прямой.

Так же, как и в случае с циклоидой, показывается, что параметрическими уравнениями трохоиды являются

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t, \\ y = R - d\cos t, \end{cases}$$

где d — расстояние от точки до центра окружности.

Если $d < R$, то кривая называется ***укороченной циклоидой*** (рис. 48, а).

Если $d > R$, то кривая называется ***удлиненной циклоидой*** (рис. 48, б).

Кардиоида — кривая, являющаяся траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по окружности того же радиуса.

Обозначим через O центр неподвижной окружности радиуса a. В качестве полюса возьмем точку C на окружности, соответствующую начальному моменту времени. Пусть катящаяся окружность повернулась на угол φ и точка C переместилась в точку C_1 (рис. 49, а). Четырехугольник OCC_1O_1 является равнобедренной трапецией. Следовательно, полярный угол точки C_1 будет равен φ и

$$OC_1 = 2a(1 - \cos\varphi).$$

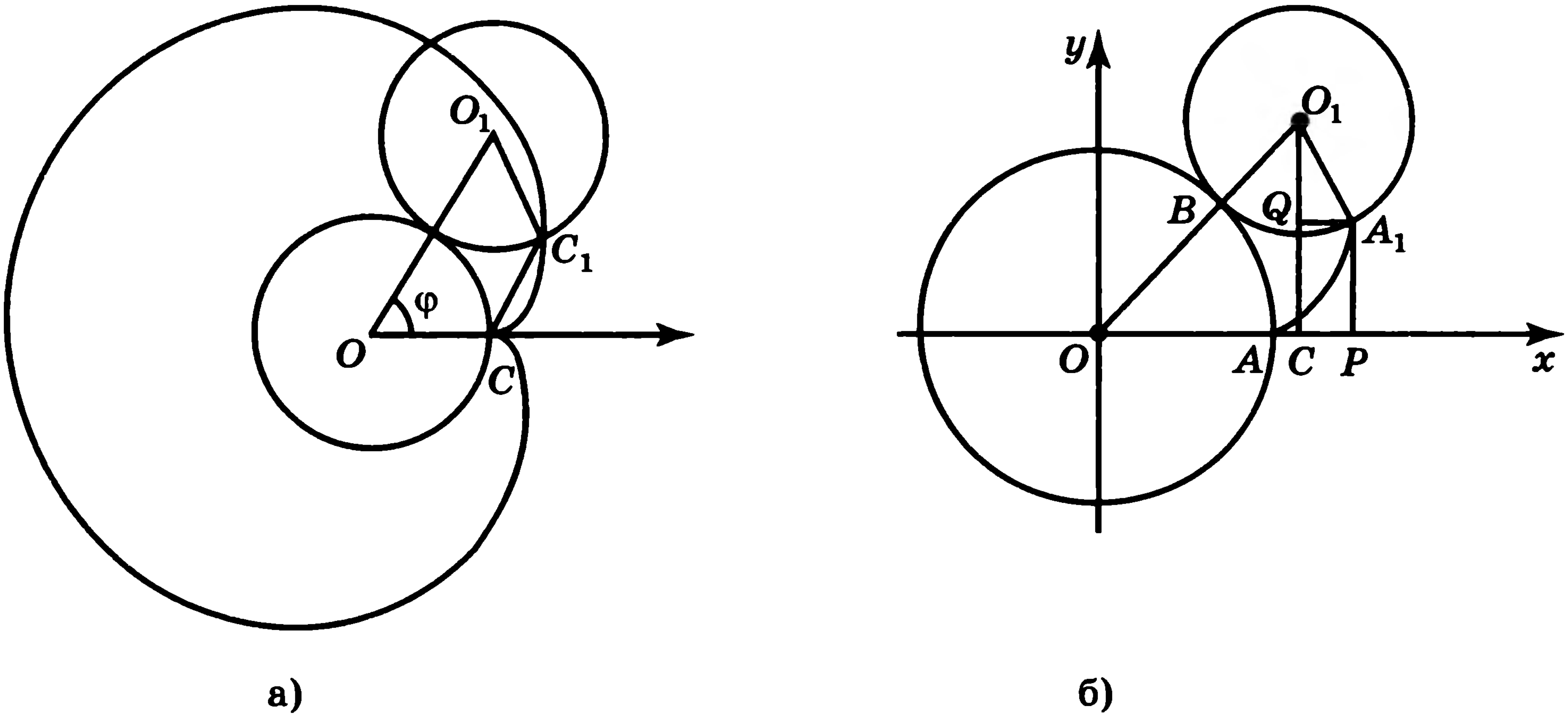


Рис. 49

Таким образом, уравнение кардиоиды будет иметь вид

$$r = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Эпициклоиды. Рассмотрим теперь ситуацию, когда точка закреплена на окружности радиуса r, катящейся по окружности радиуса R. Получаемые кривые подразделяются на эпициклоиды и гипоциклоиды в зависимости от того, располагается ли катящаяся окружность с внешней или внутренней стороны. Выведем уравнения эпициклоиды.

Пусть центр O неподвижной окружности является началом координат и точка $A(0, R)$ соответствует начальному моменту времени. Предположим, что катящаяся с внешней стороны окружность повернулась на угол, равный t. При этом точка A переместилась в точку $A_1(x, y)$ (рис. 49, б). Обозначим отношение $\frac{r}{R}$ через m. Из равенства длин дуг AB и A_1B следует, что угол AOB равен mt. Далее,

$$\angle A_1O_1C = \angle A_1O_1B - \angle CO_1O = t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right),$$

и, следовательно,

$$\sin\angle A_1O_1C = \sin\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = -\cos(t + mt),$$

$$\cos\angle A_1O_1C = \cos\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = \sin(t + mt).$$

Учитывая, что $x = OP - OC$, $y = O_1C - O_1Q$, получаем параметрические уравнения эпициклоиды

$$\begin{cases} x = (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt), \\ y = (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt). \end{cases}$$

В частности, если $m = 1$, параметрические уравнения кардиоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t. \end{cases}$$

Еще один частный случай эпициклоиды показан на рисунке 50.

Аналогичным образом показывается, что если окружность радиуса $r = mR$ катится по окружности радиуса R с внешней стороны, то точка, закрепленная на радиусе катящейся окружности на расстоянии h от центра, описывает кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

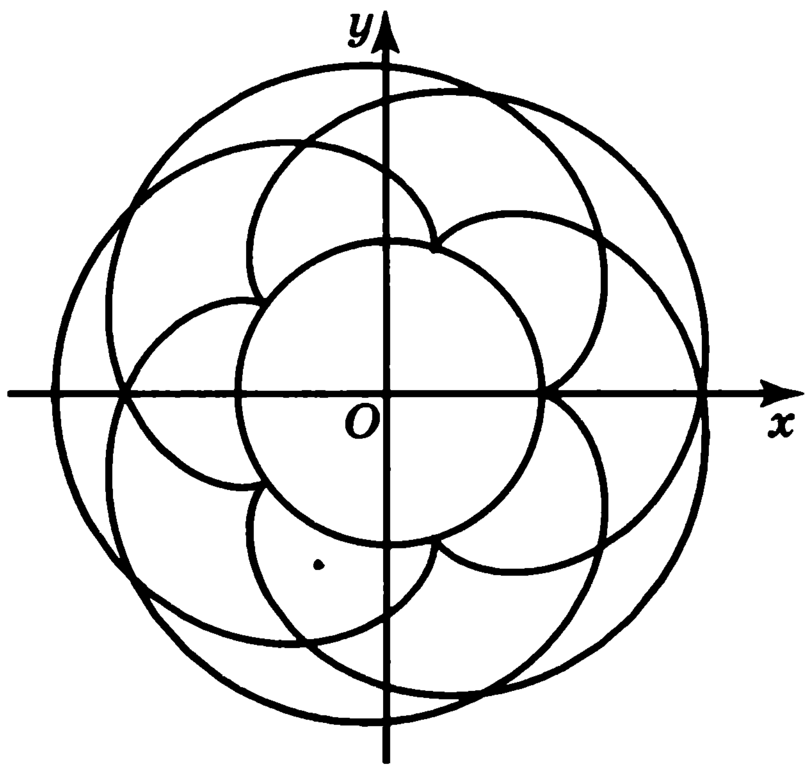


Рис. 50

$$\begin{cases} x = (R + mR)\cos mt - h\cos(t + mt), \\ y = (R + mR)\sin mt - h\sin(t + mt). \end{cases}$$

При этом если $h < R$, то кривая называется ***укороченной эпициклоидой***, а если $h > R$, то ***удлиненной эпициклоидой***.

Гипоциклоиды. Так же, как и для эпициклоиды, показывается, что уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - mR\sin(t - mt). \end{cases}$$

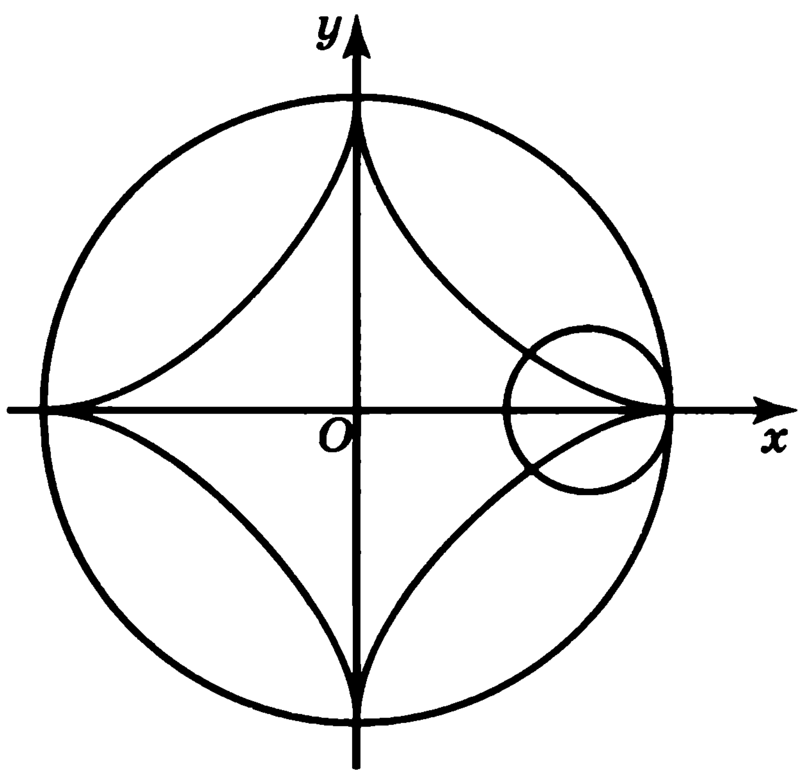


Рис. 51

В частности, параметрические уравнения астроиды (рис. 51) $\left(m = \dfrac{1}{4}\right)$ имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}R\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3t}{4}, \\ y = \dfrac{3}{4}R\sin\dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3t}{4}. \end{cases}$$

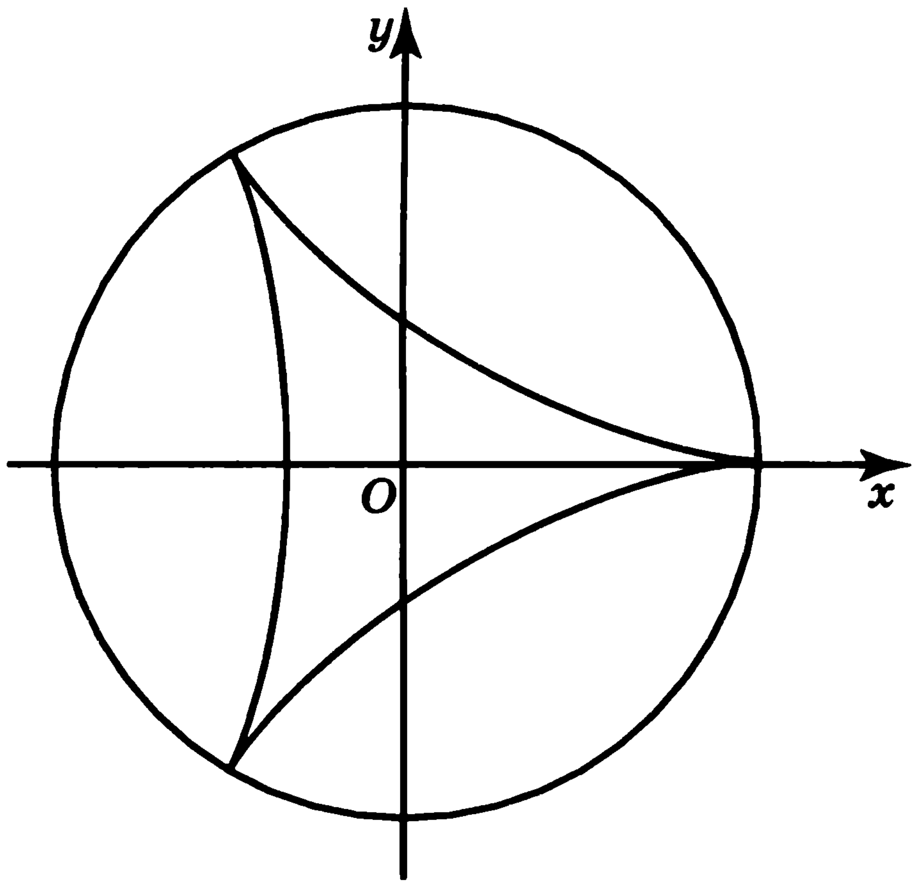


Рис. 52

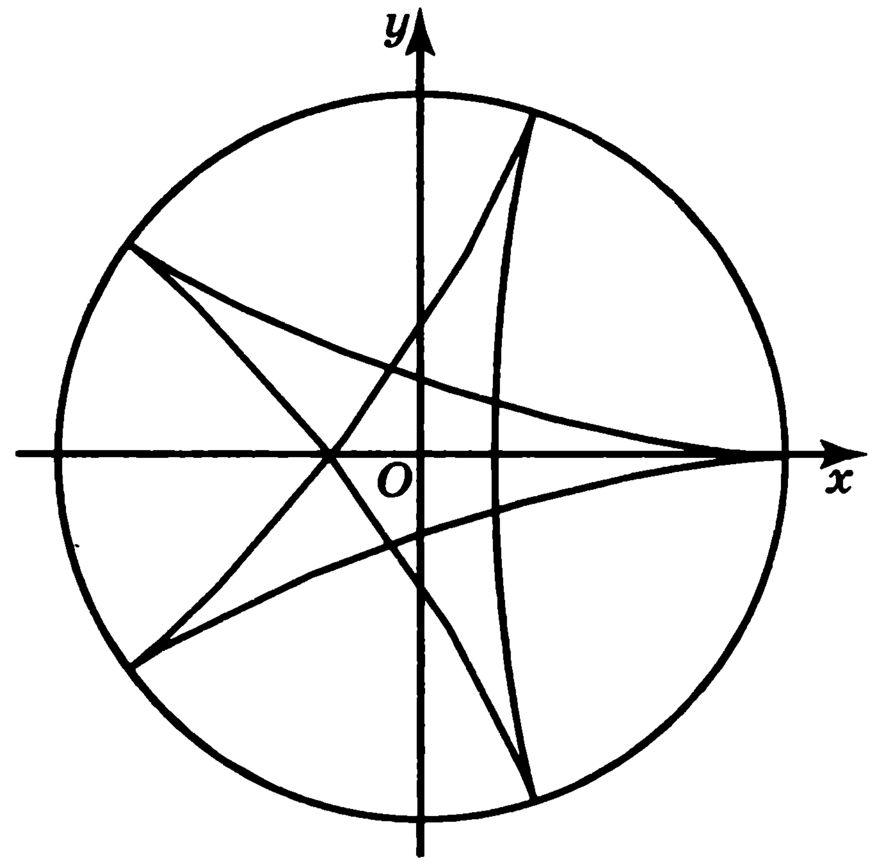


Рис. 53

Параметрические уравнения **кривой Штейнера** (рис. 52) $\left(m = \dfrac{1}{3}\right)$ имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}R\cos\dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2t}{3}, \\ y = \dfrac{2}{3}R\sin\dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2t}{3}. \end{cases}$$

Еще один частный случай гипоциклоиды показан на рисунке 53.

Если окружность радиуса $r = mR$ катится по окружности радиуса R с внутренней стороны, то точка, закрепленная на радиусе катящейся окружности на расстоянии h от центра, описывает кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt). \end{cases}$$

При этом если $h < R$, то кривая называется ***укороченной гипоциклоидой***, а если $h > R$, то ***удлиненной гипоциклоидой***.

Задачи

1. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.

2. Найдите параметрические уравнения окружности с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиусом R.

3. Какую кривую задают параметрические уравнения $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$?

4. Докажите, что параметрические уравнения $\begin{cases} x = a \quad \cos t, \\ y = b \quad \sin t \end{cases}$ задают эллипс. Найдите координаты его фокусов.

5. Найдите параметрические уравнения: а) спирали Архимеда; б) логарифмической спирали.

6. Выясните, какая часть листа Декарта соответствует изменению параметра t: а) от 0 до $+\infty$; б) от -1 до 0; в) от $-\infty$ до -1.

7. Чему равно отношение радиусов катящейся и неподвижной окружностей на рисунке: а) 50; б) 53?

8. Нарисуйте какие-нибудь укороченные и удлиненные эпициклоиды.

9. Нарисуйте какие-нибудь укороченные и удлиненные гипоциклоиды.

10. Автоподобные кривые и фракталы

Автоподобные фигуры, т. е. фигуры, части которых подобны целому, все больше и больше привлекают к себе внимание не только математиков, но и ученых самых различных областей знания.

Пропорциональность проявляется в подобном строении дерева и его ветвей, в формах кристаллов и снежинок, в сохранении одной клеткой живого организма всей информации о целом и т. д.

Автоподобие широко использовал в своих картинах известный голландский художник М. Эшер (1898—1972). Одна из его картин взята в качестве иллюстрации обложки учебника геометрии И. М. Смирновой, В. А. Смирнова для 7—9 классов.

Примером автоподобной фигуры является золотая, иначе логарифмическая, спираль.

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток логарифмической спирали, все остальные витки можно получить подобием.

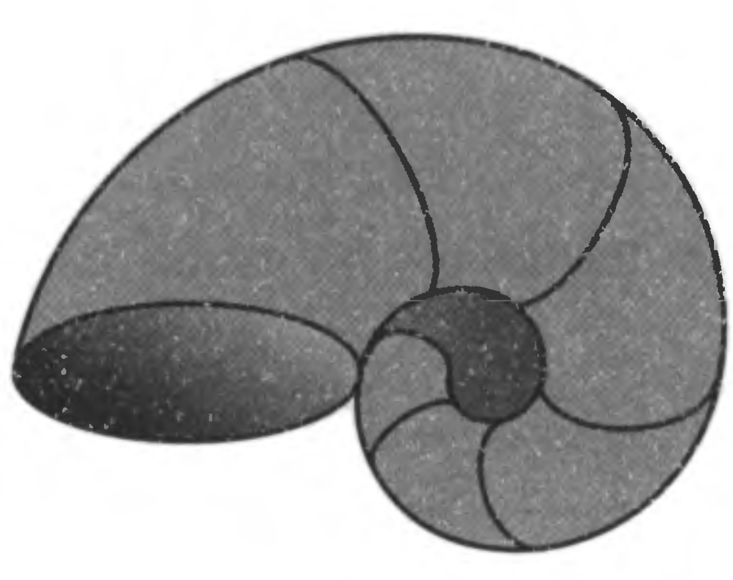


Рис. 54

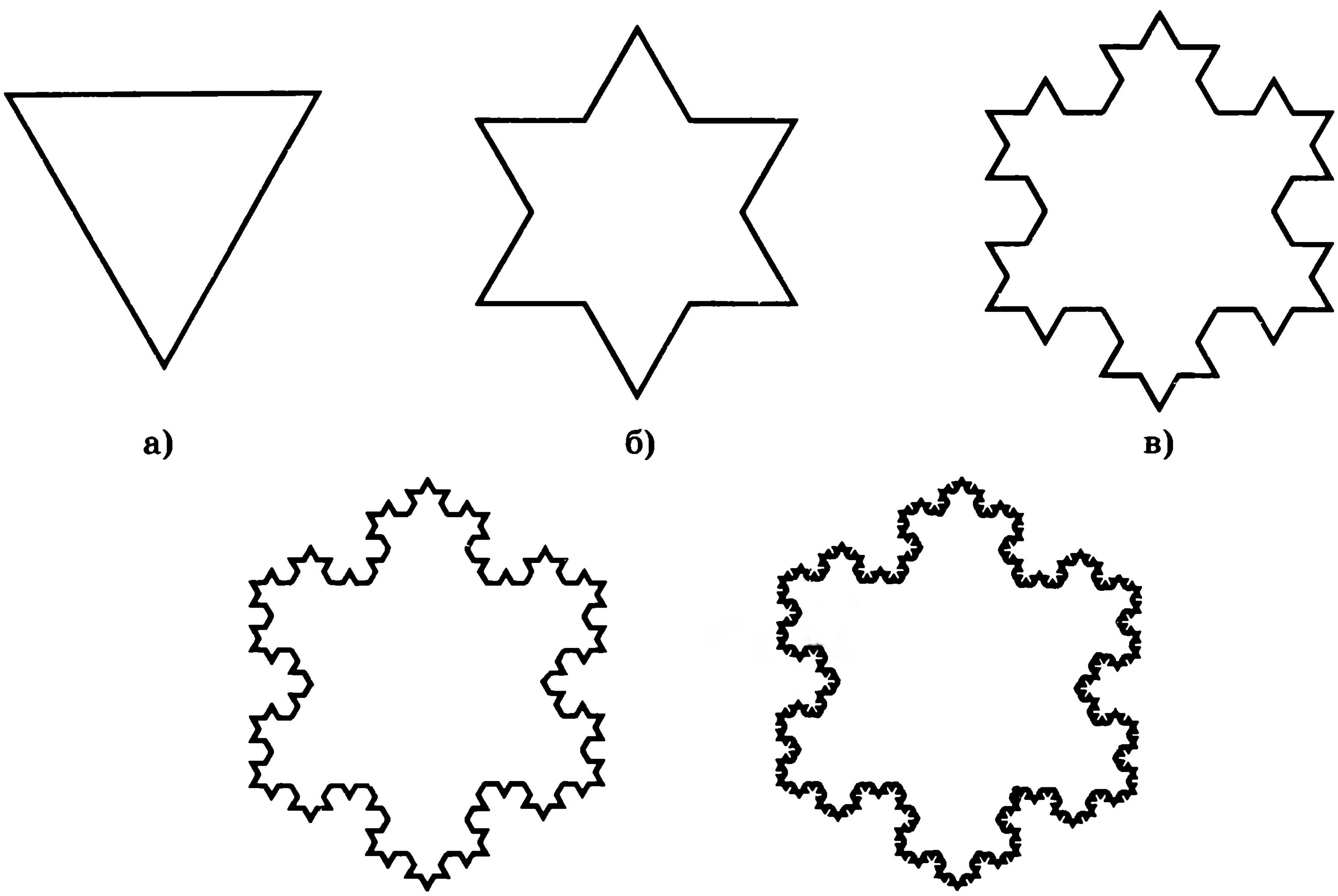
В форме золотой спирали закручиваются раковины многих моллюсков, улиток (рис. 54), рога архаров. Один из наиболее распространенных пауков — эпейра — сплетает свою паутину по золотой спирали. Природа повторяет свои находки как в малом, так и в большом:

например, семечки в подсолнухе располагаются по золотой спирали точно так же, как закручиваются многие галактики во Вселенной.

В последние десятилетия возникло и развивается новое направление в геометрии — фрактальная геометрия. Фрактал (fractus) в переводе с латинского означает «изломанный, дробный», и основным его свойством является автоподобность.

Один из первых примеров таких фигур был придуман в начале XX века немецким математиком Хельгой фон Кох (1870—1924) и называется ***звездой Кох***. Для ее построения берется равносторонний треугольник и последовательно добавляются к нему новые, подобные ему, треугольники. На первом шаге стороны правильного треугольника (рис. 55, а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на правильные треугольники, подобные исходному. В результате получается правильный звездчатый шестиугольник (рис. 55, б). Стороны этого шестиугольника снова разбиваются на три равные части, и их середины заменяются на правильные треугольники (рис. 55, в). Повторяя этот процесс, будем получать все более сложные многоугольники (рис. 55, г, д), все более приближающиеся к предельному положению — звезде Кох.

Выясним, какова длина кривой, ограничивающей звезду Кох. Предположим, что сторона исходного равностороннего треугольника равна



а) б) в)

г) д)

Рис. 55

единице и, следовательно, его периметр равен трем. На следующем шаге число сторон увеличивается в четыре раза и длина каждой из них в три раза меньше исходной. Поэтому периметр правильного звездчатого шестиугольника будет равен $3 \quad \frac{4}{3} = 4$. Аналогично на каждом следующем шаге периметр многоугольника увеличивается в $\frac{4}{3}$ раза, становясь все больше и больше. Из этого следует, что кривая Кох, к которой приближаются многоугольники, будет иметь бесконечную длину.

Вычислим площадь звезды Кох. Пусть площадь исходного равностороннего треугольника равна 1. На первом шаге мы добавляем три равносторонних треугольника, со сторонами в три раза меньшими исходных. Площадь каждого такого треугольника равна $\frac{1}{9}$. Следовательно, площадь правильного звездчатого шестиугольника (рис. 55, б), равна $1 + \frac{3}{9} \quad \frac{4}{3}$. На следующем шаге добавляется двенадцать треугольников суммарной площадью $\frac{12}{81}$. Поскольку длины сторон треугольников на каждом шаге уменьшаются в три раза, то их площадь уменьшается в девять раз. Число добавляемых треугольников равно числу сторон многоугольника и на каждом шаге увеличивается в четыре раза. Поэтому площадь S звезды Кох представляет собой площадь исходного треугольника плюс сумма геометрической прогрессии с начальным членом $\frac{3}{9}$ и знаменателем $\frac{4}{9}$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, находим $S = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.

Еще один вариант звезды Кох можно построить из квадратов последовательным добавлением к исходному квадрату подобных ему квадратов.

На первом шаге стороны квадрата (рис. 56, а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на квадраты, подобные исходному (рис. 56, б). Стороны получившегося многоугольника снова разбиваются на три равные части, и их середины заменяются на квадраты (рис. 56, в). Повторяя этот процесс, будем получать сложные многоугольники (рис. 56, г, д), все более приближающиеся к искомой фигуре.

На рисунках 57, 58 показаны фигуры Кох, построенные из окружностей.

Еще один интересный пример кривой, получающейся последовательным приближением подобными многоугольниками, был получен Джузеппе Пеано (1858—1932) и называется ***кривой Пеано***. Для ее построения разобьем данный квадрат на четыре равные квадрата и соединим их центры тремя

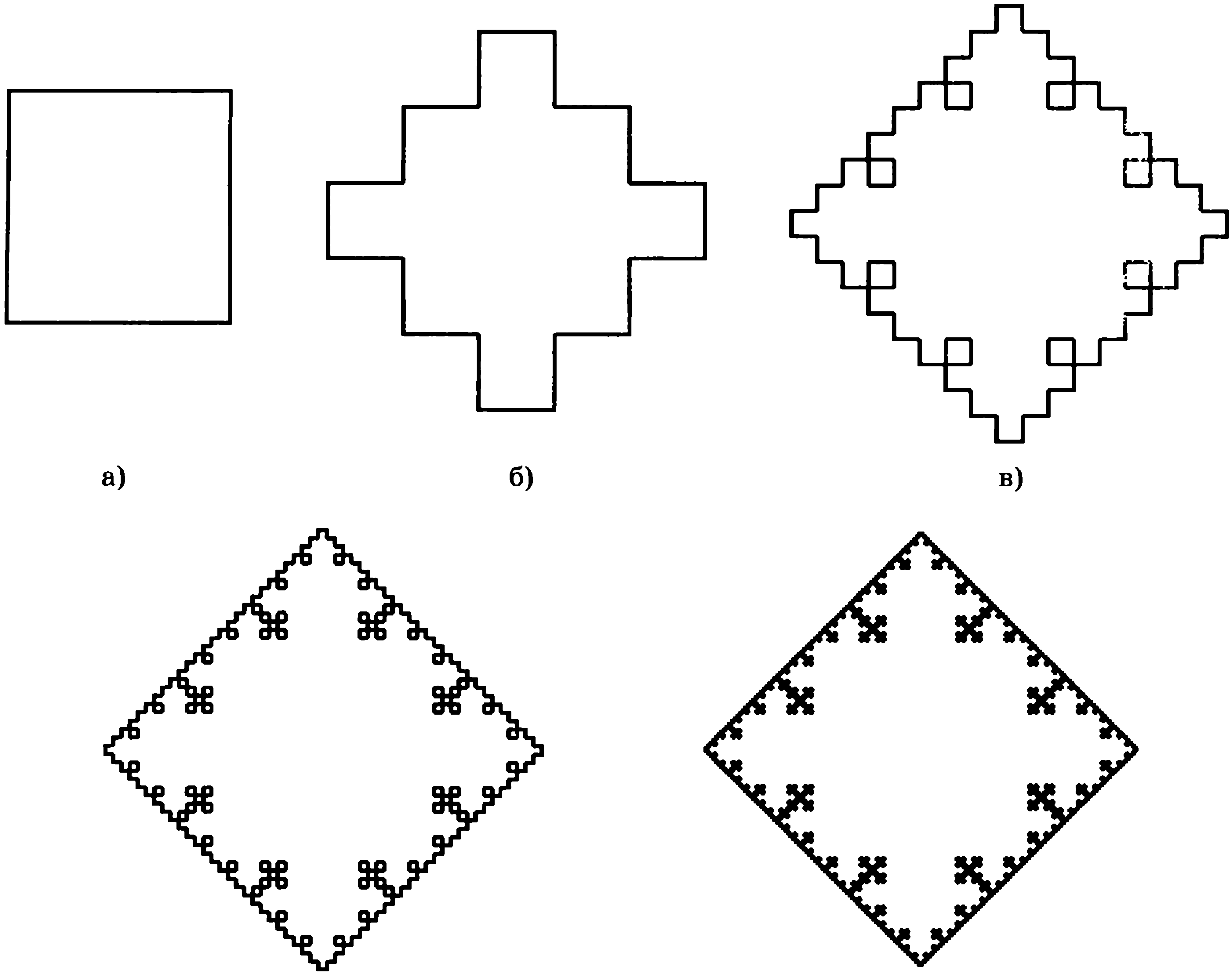


Рис. 56

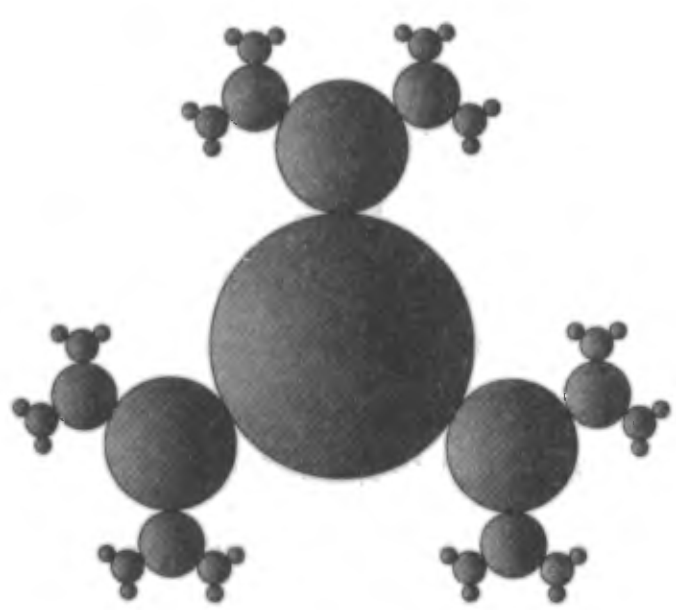


Рис. 57

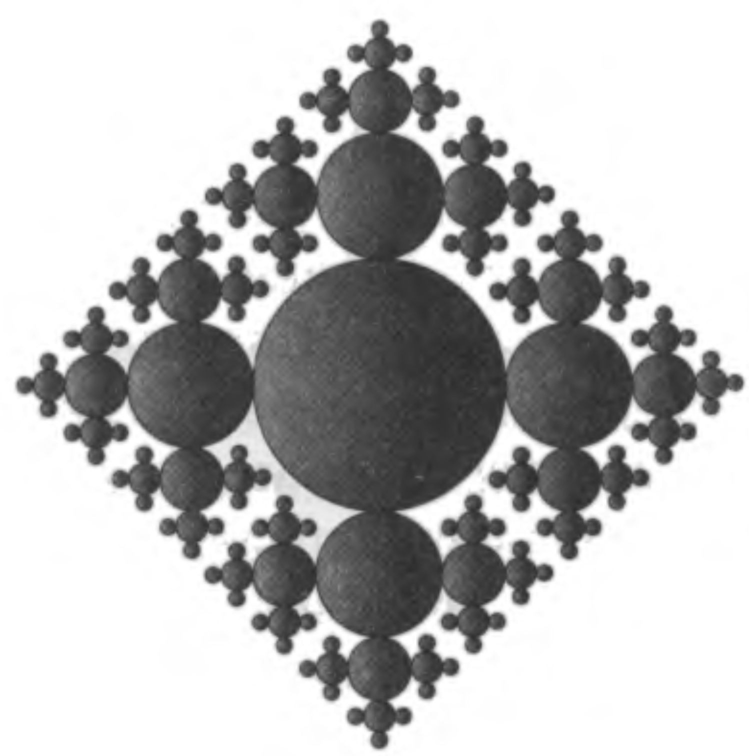


Рис. 58

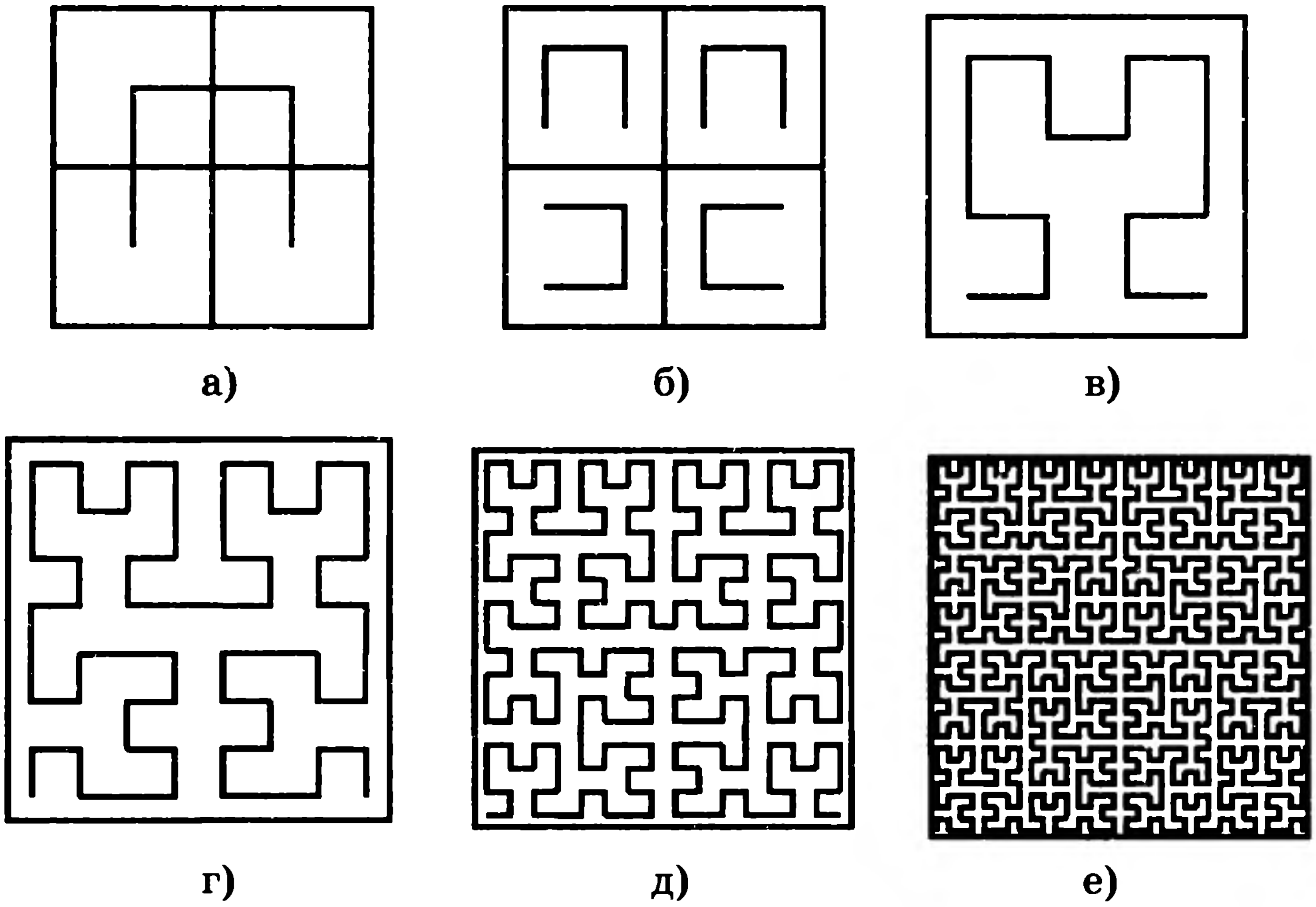


Рис. 59

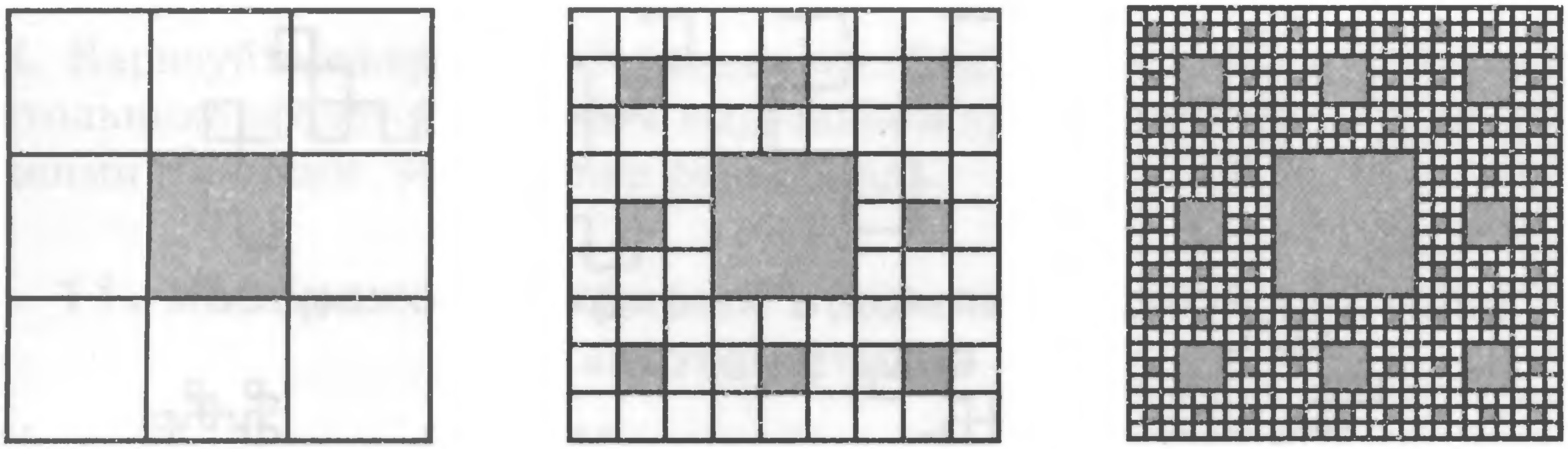
отрезками, как показано на рисунке 59, а. Уберем внутренние стороны квадратов и из четырех их копий составим фигуру, изображенную на рисунке 59, б. Снова уберем внутренние стороны квадратов и соединим тремя отрезками концы ломаных, как показано на рисунке 59, в. Повторяя описанную процедуру, будем получать сложные ломаные (рис. 59, г—е), все более приближающиеся к кривой Пеано.

Отметим, что ломаные, участвующие в построении кривой Пеано, на каждом этапе проходят через все квадраты, а сами квадраты уменьшаются, стягиваясь к точкам исходного квадрата. Поэтому кривая Пеано будет проходить через все точки исходного квадрата, т. е. она будет полностью заполнять весь исходный квадрат. Конечно, она будет иметь бесконечную длину.

Еще одна автоподобная фигура была придумана польским математиком В. Серпинским (1882—1969) — ***ковер Серпинского.***

Она получается из квадрата последовательным вырезанием серединных квадратов. Разделим данный квадрат на девять равных квадратов и серединный квадрат вырежем. Получим квадрат с дыркой (рис. 60, а). Для оставшихся восьми квадратов повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и серединные квадраты вырежем (рис. 60, б). Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру (рис. 60, в). То, что остается после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского.

Поскольку расположение вырезаемых квадратов становится частым, то в результате на ковре Серпинского не останется ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки.



а) б) в)

Рис. 60

Вычислим площадь ковра Серпинского, считая исходный квадрат единичным. Для этого достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площади $\frac{1}{9}$. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{81}$. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальным членом $\frac{1}{9}$ и знаменателем $\frac{8}{9}$. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице, т. е. площадь ковра Серпинского равна нулю.

Возьмем теперь квадрат площади, равной двум, и вырежем из него квадрат с тем же центром площади $\frac{1}{2}$. Оставшуюся часть представим в виде восьми прямоугольников и в каждом из них вырежем квадрат с тем же центром площади $\frac{1}{32}$. Таким образом, суммарная площадь маленьких квадратов будет равна $\frac{1}{4}$. Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру, которую также называют ковром Серпинского.

Как и раньше, в этом ковре Серпинского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки. Однако, в отличие от обычного ковра Серпинского, его площадь будет отлична от нуля. Действительно, площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальным членом $\frac{1}{2}$ и знаменателем $\frac{1}{2}$, т. е. равна 1. Поэтому площадь оставшейся части будет равна единице.

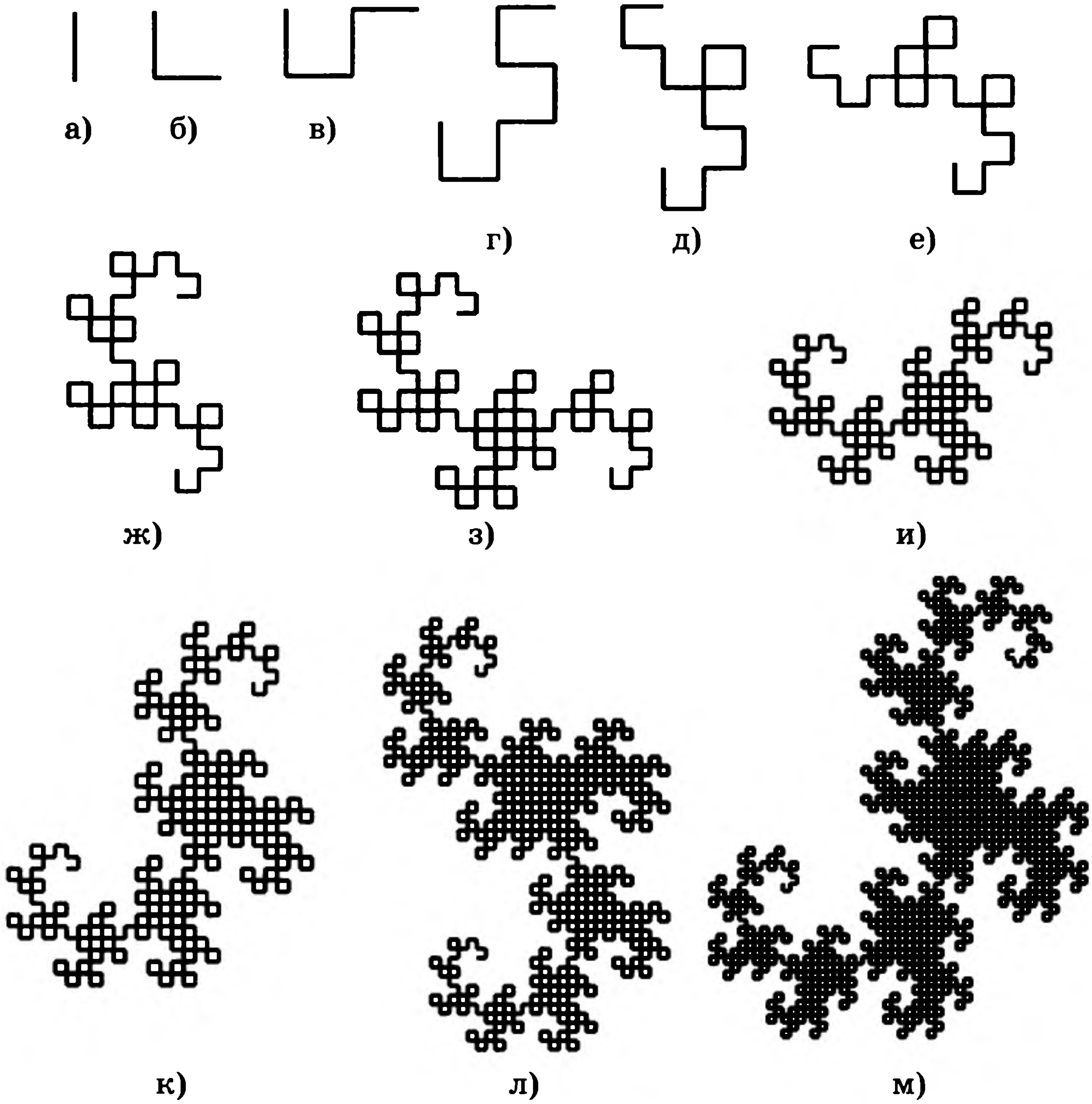


Рис. 61

Интересным примером автоподобной кривой является ***«кривая дракона»***, придуманная американским математиком Э. Хейуэем. Для ее построения возьмем отрезок (рис. 61, а). Повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному.

Получим угол из двух отрезков (рис. 61, б). Повторим описанную процедуру. Повернем угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной (рис. 61, в). Повторяя описанную процедуру и уменьшая ломаные, будем получать все более сложные ломаные, напоминающие дракона (рис. 61, г—м).

Задачи

1. Придумайте какие-нибудь примеры автоподобных фигур.

2. Является ли спираль Архимеда автоподобной кривой?

3. Покажите, что вариант кривой Кох, полученной с помощью квадратов, имеет бесконечную длину.

4. Нарисуйте ***салфетку Серпинского***. Она получается из правильного треугольника последовательным вырезанием треугольников, образованных средними линиями. Вычислите ее площадь.

11. Изображение кривых в компьютерной системе «Математика»

Компьютерная система «Математика» обладает многими возможностями. Здесь мы рассмотрим использование этой системы для создания изображений кривых, многогранников и поверхностей, что составляет малую часть ее графических возможностей.

Рабочее окно выглядит так, как показано на рисунке 62. В верхней его части расположено «Меню», в котором имеется подробная справочная система.

Данная программа позволяет получать изображения правильных многоугольников (в том числе и звездчатых); графиков функций; кривых,

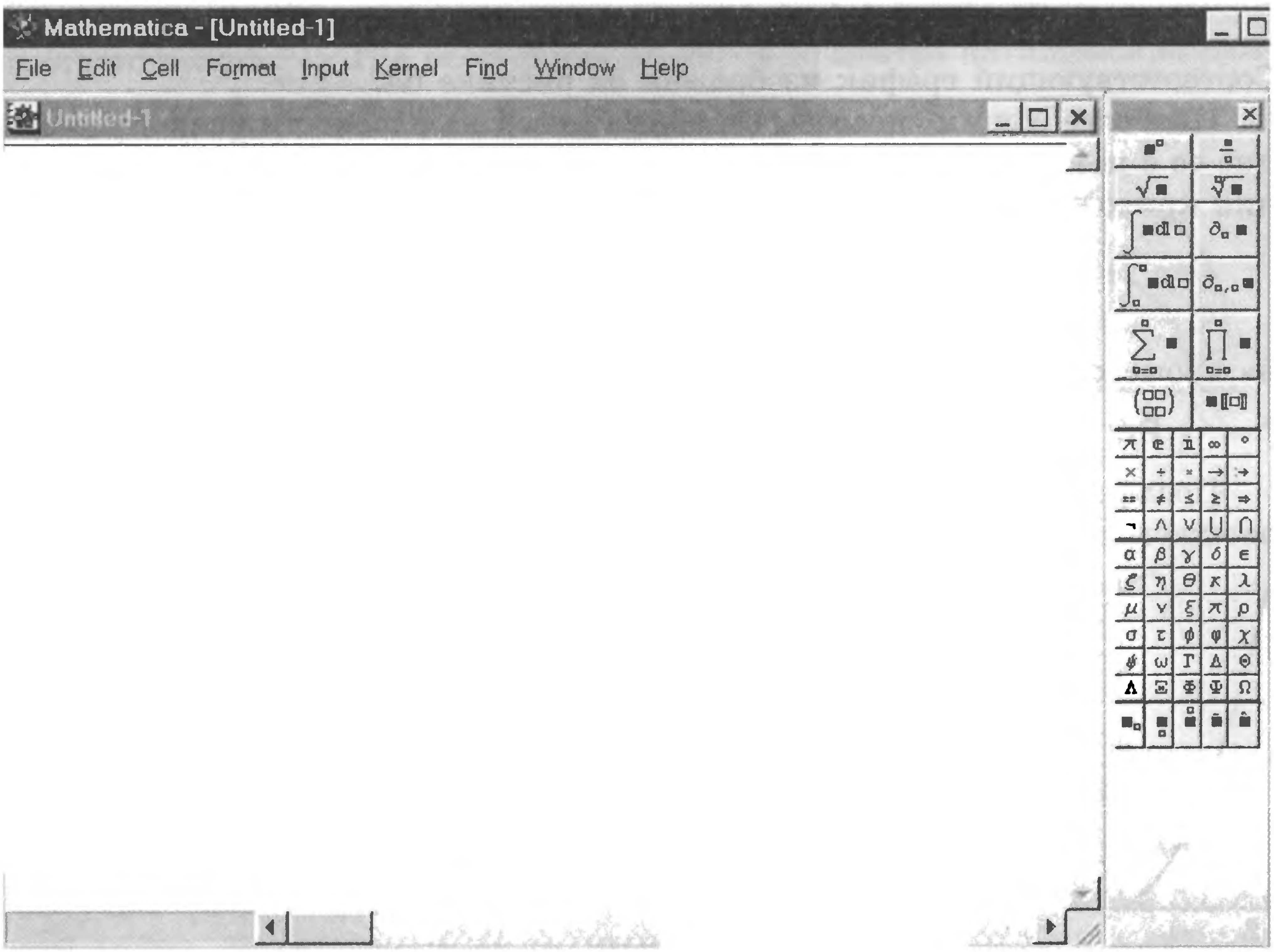


Рис. 62

заданных параметрическими уравнениями, уравнением в полярных координатах, неявным уравнением.

Наиболее простыми кривыми являются графики функций. Для получения изображения графика функции $y = f(x)$ на промежутке от a до b нужно набрать

```
Plot[f[x],{x,a,b},AspectRatio->Automatic]
```

После нажатия клавиш Shift и Enter на экране появится график соответствующей функции.

Например, для получения графика параболы $y = x^2$ на промежутке $[-2, 2]$ нужно набрать

```
Plot[x^2,{x,-2,2},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 63.

Для получения графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[0, 2\pi]$ нужно набрать

```
Plot[Sin[x],{x,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 64.

Наиболее общим способом задания кривой на плоскости является задание ее с помощью параметрических уравнений. Для получения изображения кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

на промежутке от α до β, нужно набрать

```
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,α,β},AspectRatio->Automatic]
```

После нажатия клавиш Shift и Enter на экране появится график соответствующей функции.

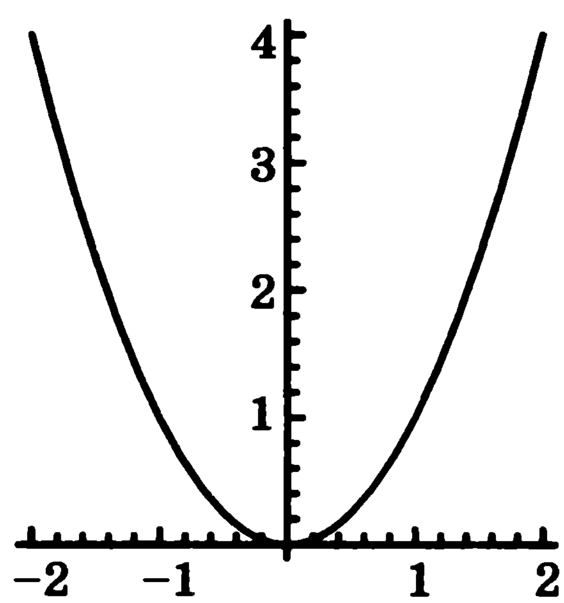


Рис. 63

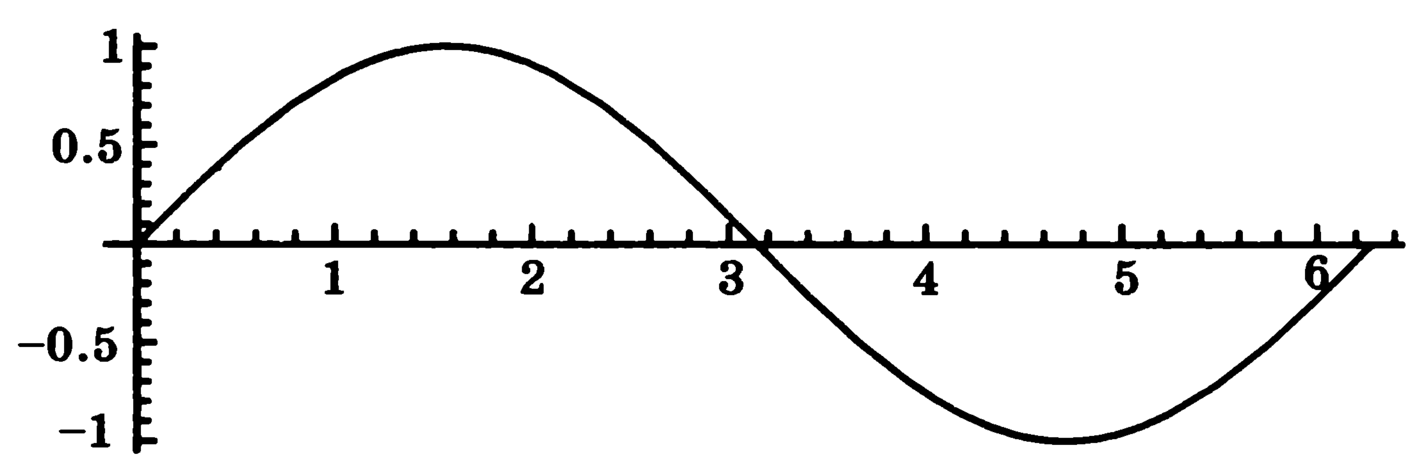


Рис. 64

Например, для получения графика циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

на промежутке $[0, 2\pi]$, нужно набрать

```
ParametricPlot[{t-Sin[t],1-Cos[t]},{t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 65.

Если набрать

```
ParametricPlot[{(4/3)*cos[t/3]-(1/5)*cos[4t/3],(4/3)*sin[t/3]-
-(1/5)*sin[4t/3]},{t,0,6Pi},AspectRatio->Automatic, Axes->true],
```

получим график укороченной эпициклоиды (рис. 66) — траектории движения точки, закрепленной на радиусе окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности. При этом радиусы окружностей равны соответственно $\frac{1}{3}$ и 1, а расстояние от точки до центра катящейся окружности равно $\frac{1}{5}$.

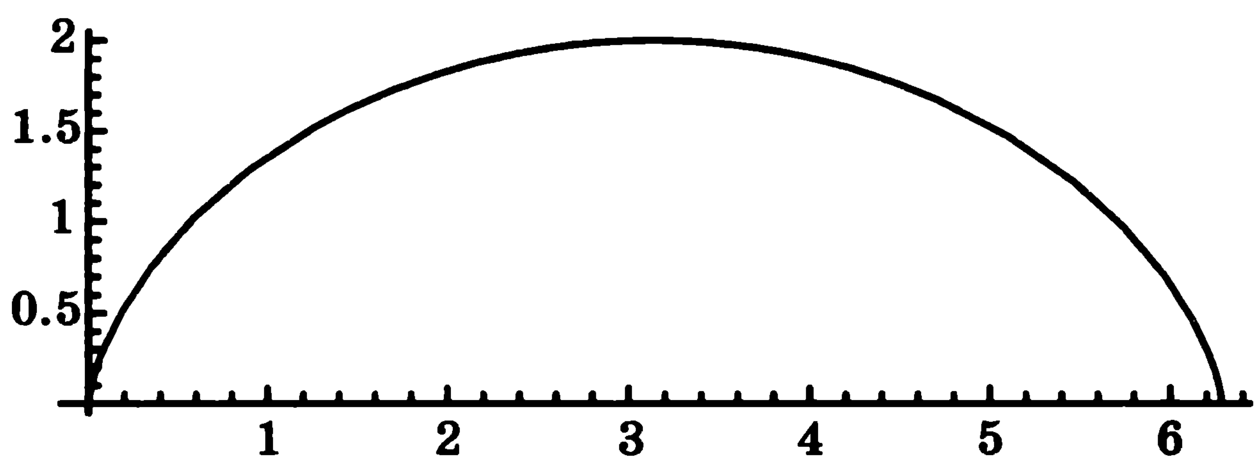


Рис. 65

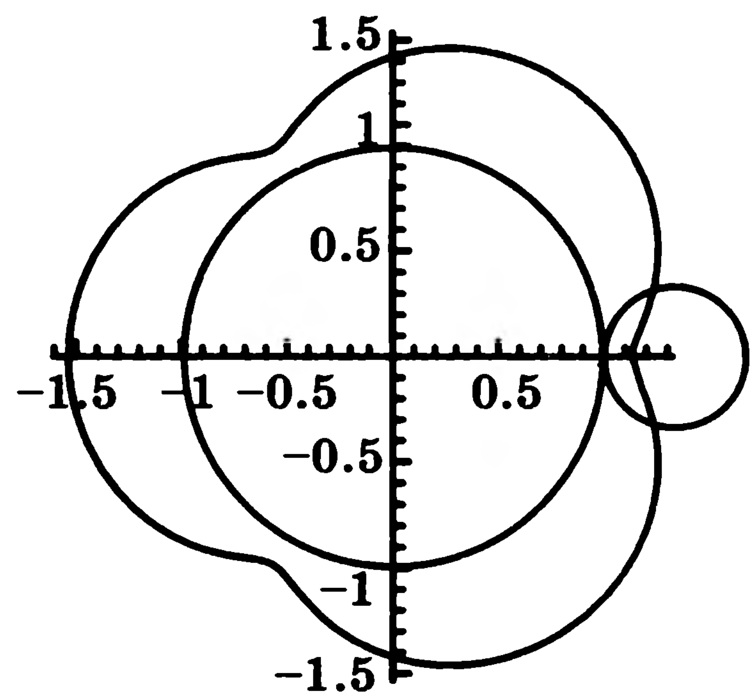


Рис. 66

Если же набрать

```
ParametricPlot[{(4/3)*cos[t/3]-(3/5)*cos[4t/3],(4/3)*sin[t/3]-
-(3/5)*sin[4t/3]},{t,0,6Pi},AspectRatio->Automatic, Axes->true],
```

получим график удлиненной эпициклоиды (рис. 67) — траектории движения точки, закрепленной на радиусе окружности, катящейся с внешней стороны по другой окружности. При этом радиусы окружностей равны

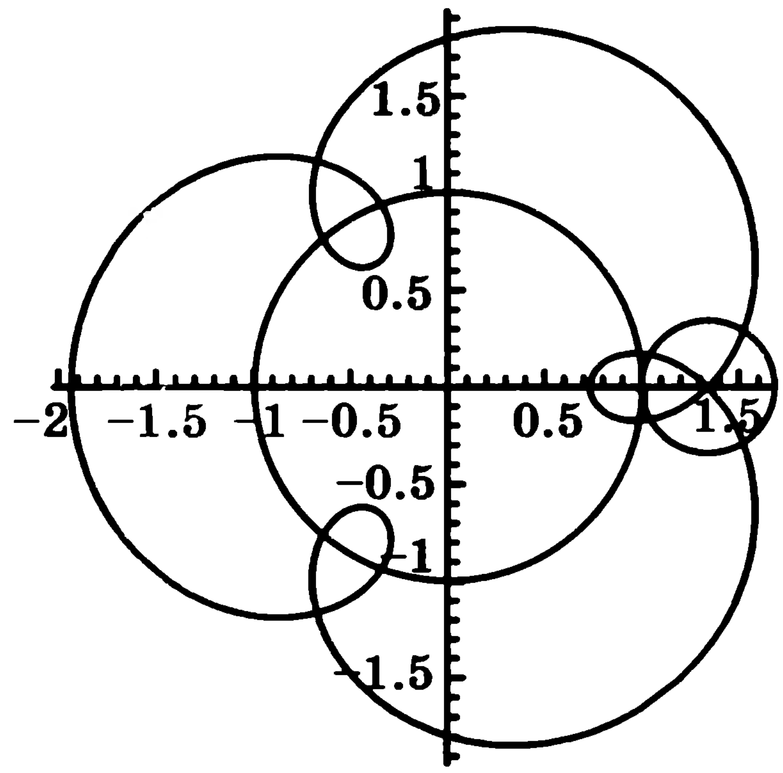


Рис. 67

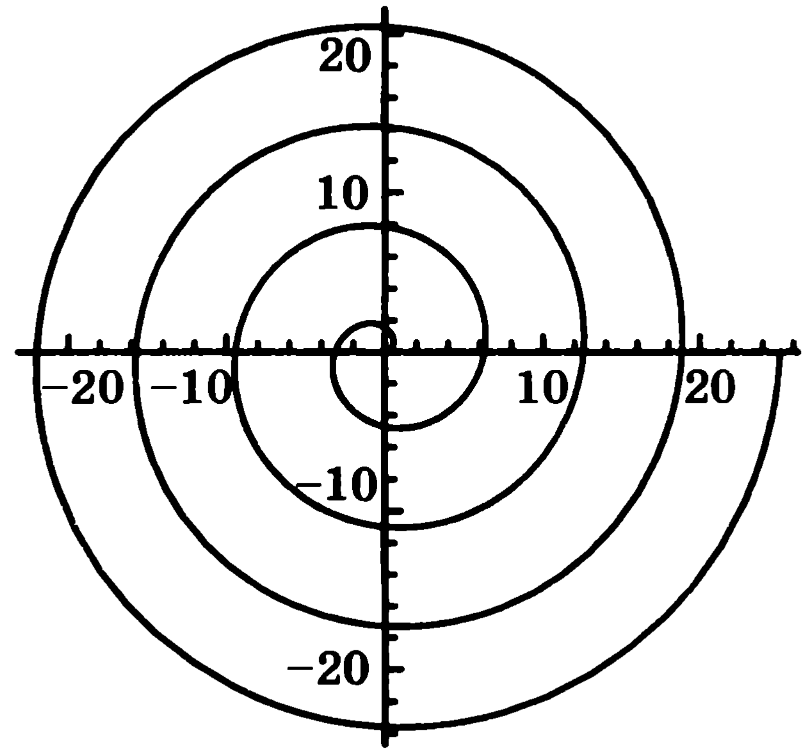


Рис. 68

соответственно $\frac{1}{3}$ и 1, а расстояние от точки до центра катящейся окружности равно $\frac{3}{5}$.

Для получения графика кривой, заданной уравнением в полярных координатах, нужно сначала набрать

```
<<Graphics`Graphics`
```

и нажать клавиши Shift и Enter. При этом подгружается пакет программ, позволяющий получать изображения кривых, заданных уравнением в полярных координатах. После этого нужно набрать

```
PolarPlot[r[t],{t,min,max},AspectRatio->Automatic]
```

и нажать клавиши Shift и Enter.

Например, для получения спирали Архимеда, заданной уравнением в полярных координатах $r = t$ на промежутке от 0 до 8π, нужно набрать

```
PolarPlot[t,{t,0,8Pi},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 68.

Для получения логарифмической спирали, заданной уравнением $r = 1{,}1^t$ на промежутке от -4π до 4π, нужно набрать

```
PolarPlot[1.1^t,{t,-4Pi,4Pi},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 69.

Для получения трилистника, заданного уравнением $r = \sin(3t)$ на промежутке от 0 до 2π, нужно набрать

```
PolarPlot[sin[3t],{t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]
```

Соответствующий график изображен на рисунке 70.

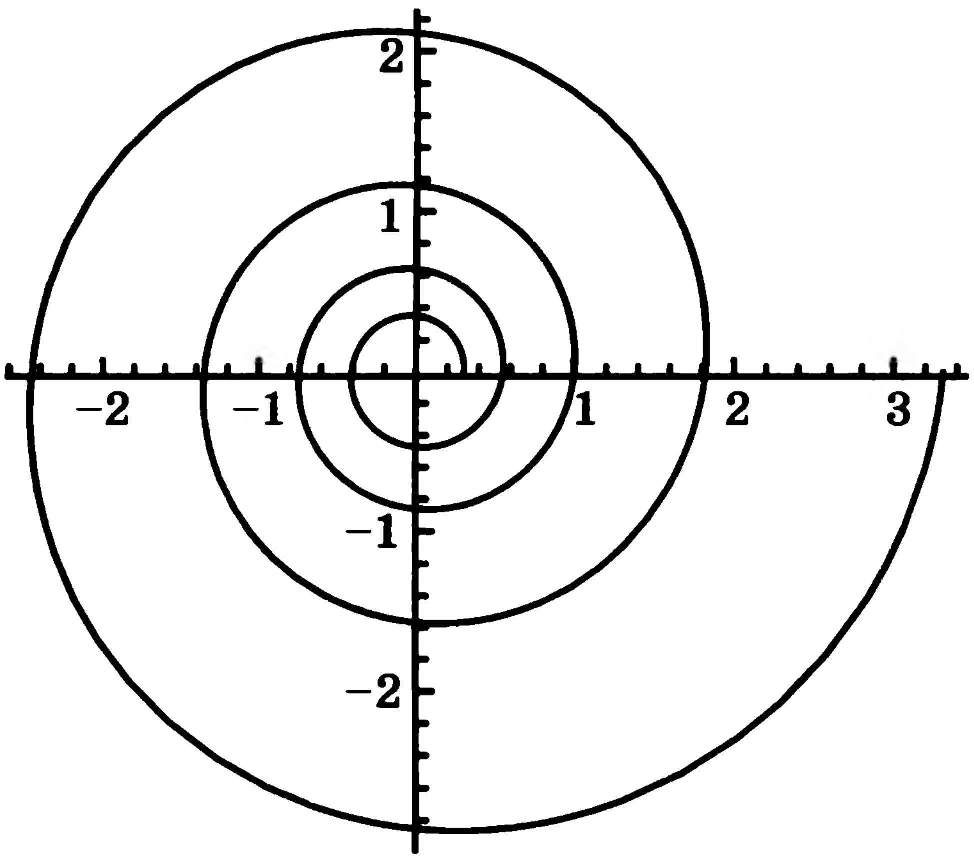


Рис. 69

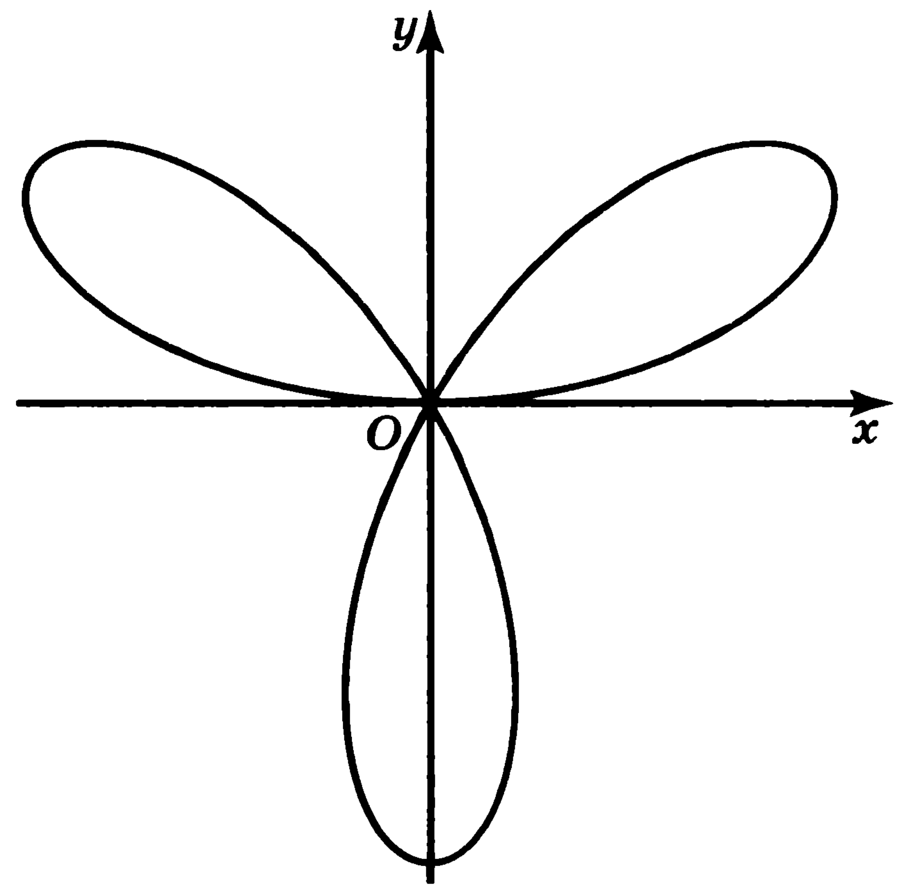


Рис. 70

Если же набрать

PolarPlot[1+cos[3t]+sin[3t]^2,{t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]

получим кривую, изображенную на рисунке 71, напоминающую листки щавеля.

Для получения изображения кривых, заданных неявным уравнением $f(x, y) = 0$, следует набрать

<<Graphics`ImplicitPlot`

и нажать клавиши Shift и Enter. При этом подгружается пакет программ, позволяющий получать изображения кривых, заданных уравнением в декартовых координатах. После этого нужно набрать

ImplicitPlot[f[x,y]==0,{x,min,max}]

и снова нажать клавиши Shif и Enter.

Например, для получения изображения гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$ в промежутке изменения x от -2 до 2, следует набрать

ImplicitPlot[x^2-y^2-1==0,{x,-2,2}]

Соответствующий график изображен на рисунке 72.

Для получения изображения декартова листа, заданного уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$ в промежутке изменения x от -2 до 2, следует набрать

ImplicitPlot[x^3+y^3-3xy==0,{x,-2,2}]

Соответствующий график изображен на рисунке 73.

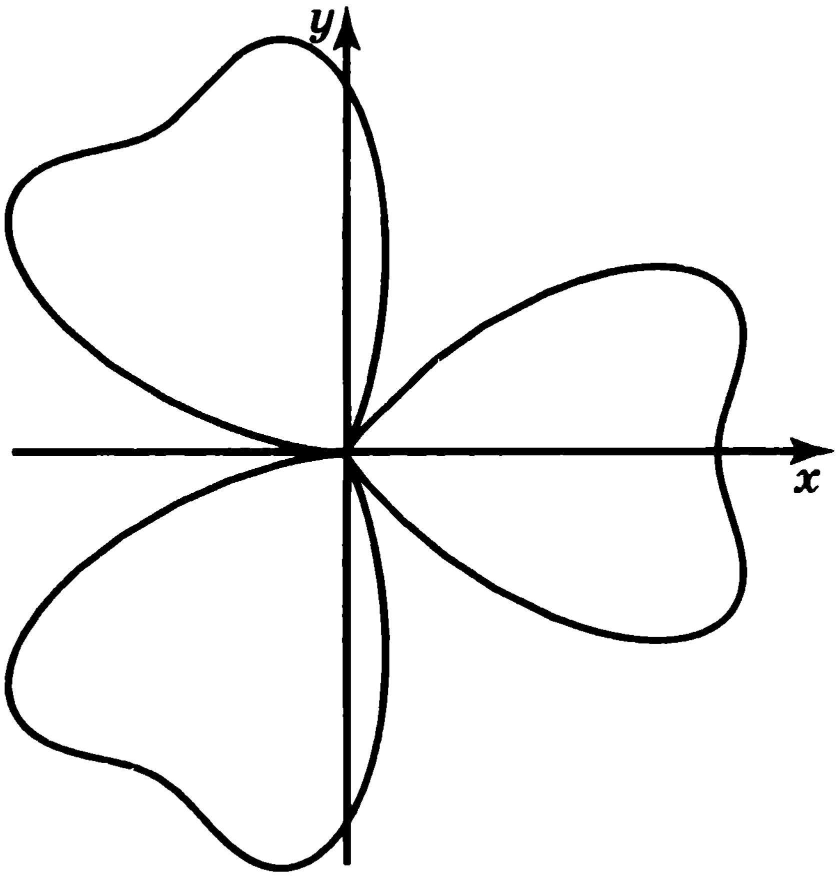


Рис. 71

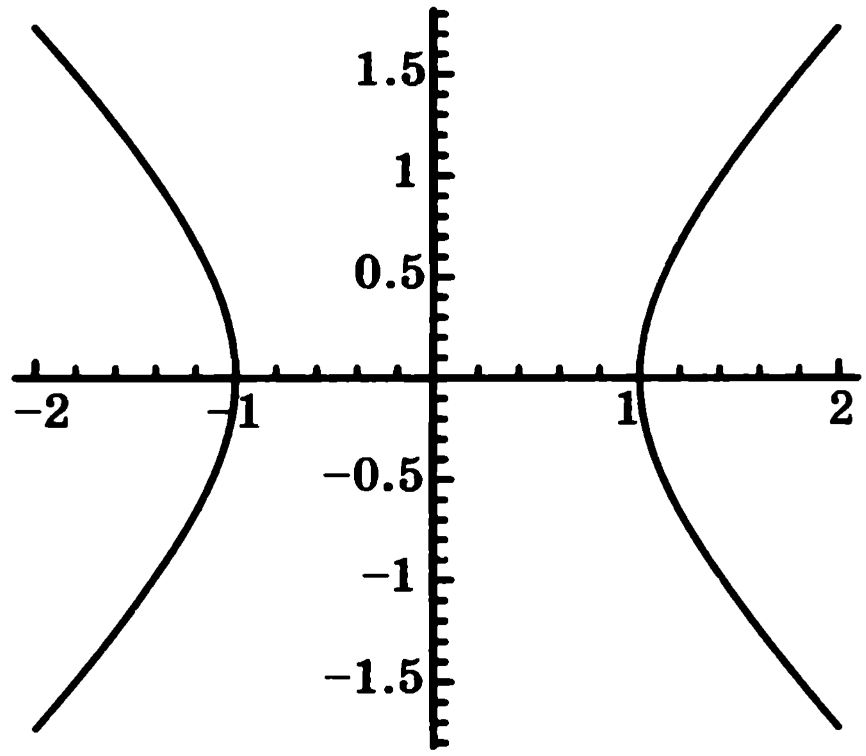


Рис. 72

С помощью системы «Математика» можно получать изображения различных многоугольников. Например, для получения правильного звездчатого пятиугольника следует набрать

Pentagon=Table[N[{Sin[4Pi*n/5],Cos[4Pi*n/5]}],{n,6}]]

и нажать клавиши Shift и Enter. При этом появятся координаты вершин пятиугольника. После этого следует набрать

Show[Graphics[Line[Pentagon],AspectRatio->Automatic,

Axes->False]

и снова нажать клавиши Shift и Enter. Соответствующий пятиугольник приведен на рисунке 74.

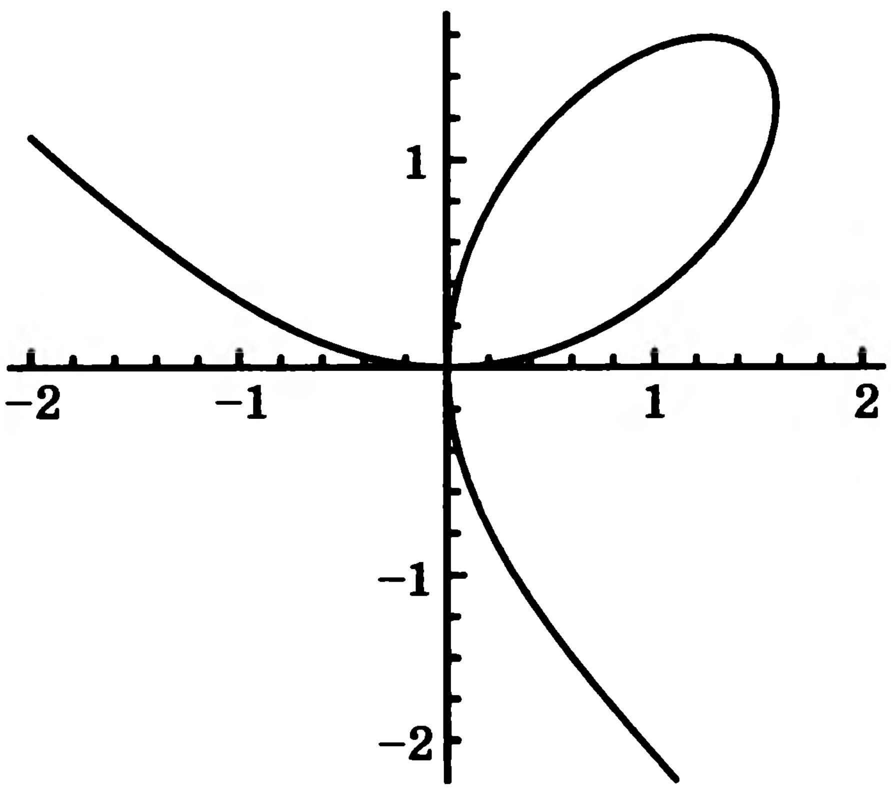


Рис. 73

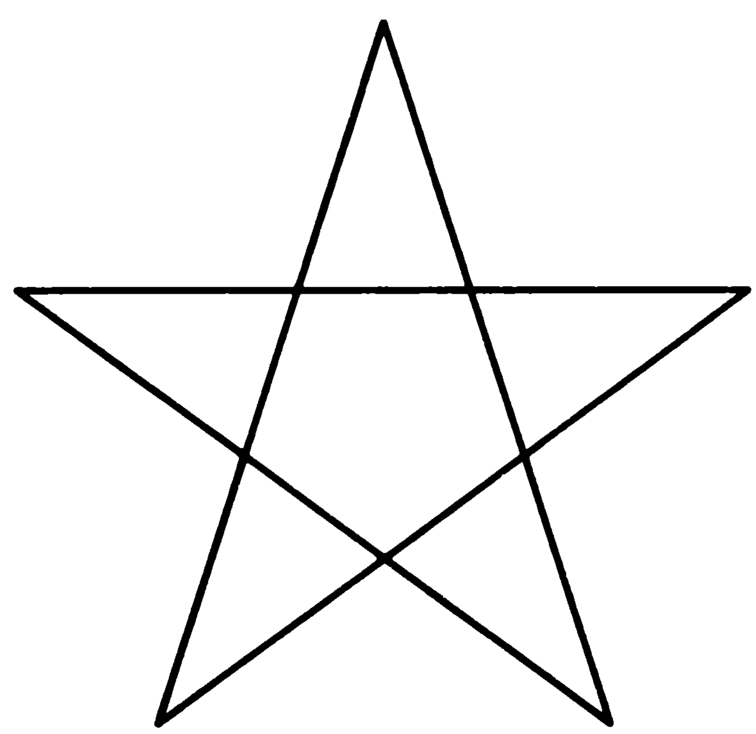


Рис. 74

Особенностью системы «Математика» является то, что она позволяет увидеть объект в движении. Например, мы можем увидеть на экране, как окружность катится по прямой и как точка, закрепленная на окружности, образует траекторию движения. Для этого нужно набрать

```
<<Graphics`Animation`
```

и нажать клавиши Shift и Enter. В результате загрузится пакет, позволяющий реализовать движение.

Далее набираем

```
MovieParametricPlot[{{t-Sin[t],1-Cos[t]},
{Cos[t]+x,1+Sin[t]},{-Sin[x]t/(2Pi)+x,-Cos[x]t/(2Pi)+1},
{x-Sin[x],1-Cos[x]}},{t,0,2Pi},{x,0,2Pi},
AspectRatio->Automatic, Axes->True,PlotRange->{{-1,7.3},{0,2}},
PlotStyle->{Thickness[0.002],RGBColor[1,0,0]},{Thickness[0.002],
RGBColor[0,1,0]},{Thickness[0.002],RGBColor[0,1,0]},
{Thickness[0.02],RGBColor[1,0,0]}}]
```

Первая строчка обращается к программе и предназначена для рисования циклоиды. Вторая строчка нужна для рисования движущейся окружности и радиуса, соединяющего центр окружности с закрепленной на окружности точкой. Третья строчка предназначена для рисования движущейся точки, закрепленной на окружности. Четвертая строчка устанавливает границы изображения. Пятая, шестая и седьмая строчки устанавливают толщину и цвет линий. В нашем случае циклоида и движущаяся точка будут красными, окружность и радиус будут зелеными. Размеры точки существенно больше толщины линий. Поэтому на экране она выглядит как небольшой красный круг.

После набора всех строк нажмите клавиши Shift и Enter. В результате появится рисунок 75 и программа будет готова к работе.

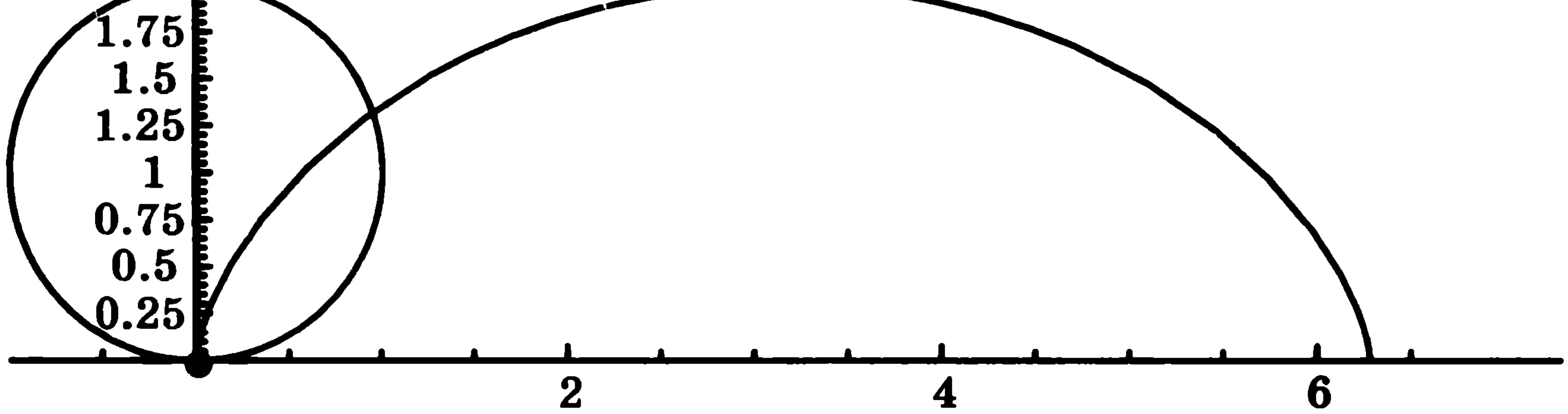


Рис. 75

Если теперь дважды щелкнуть левой кнопкой мыши на рисунке, то он придет в движение. Окружность покатится по прямой, и точка, закрепленная на окружности, будет описывать циклоиду. Направление и скорость движения можно регулировать стрелками, которые появятся в левом нижнем углу окна.

Аналогичным образом, если набрать

```
MovieParametricPlot[{{2Cos[t]-Cos[2t],2Sin[t]-Sin[2t]},
{Cos[t]+2Cos[x],Sin[t]+2Sin[x]},{Cos[t],Sin[t]},
{-Cos[2x]t/(2Pi)+2Cos[x],-Sin[2x]t/(2Pi)+2Sin[x]},
{-Cos[2x]+2Cos[x],-Sin[2x]+2Sin[x]}},{t,0,2Pi},{x,0,2Pi,Pi/16},
AspectRatio->Automatic,Axes->False,
PlotRange->{{-3.1,3.1},{-3.1,3.1}},
PlotStyle->{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{RGBColor[0,1,0]},
{RGBColor[0,1,0]},{Thickness[0.03],RGBColor[1,0,0]}}]
```

и нажать клавиши Shift и Enter, получим рисунок 76. Если теперь дважды щелкнуть левой кнопкой мыши на этом рисунке, то он придет в движение. Красный кружок, обозначающий закрепленную на окружности точку, будет описывать красную кардиоиду.

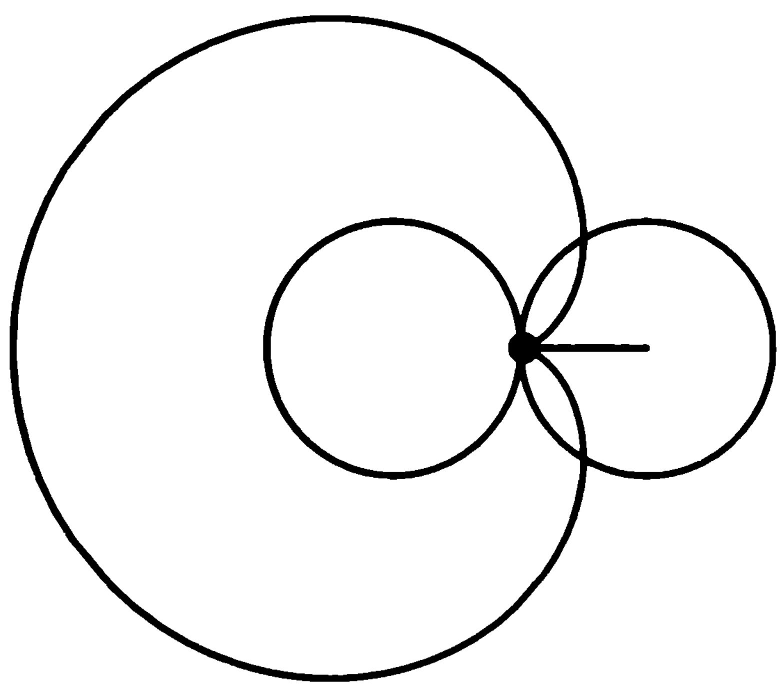
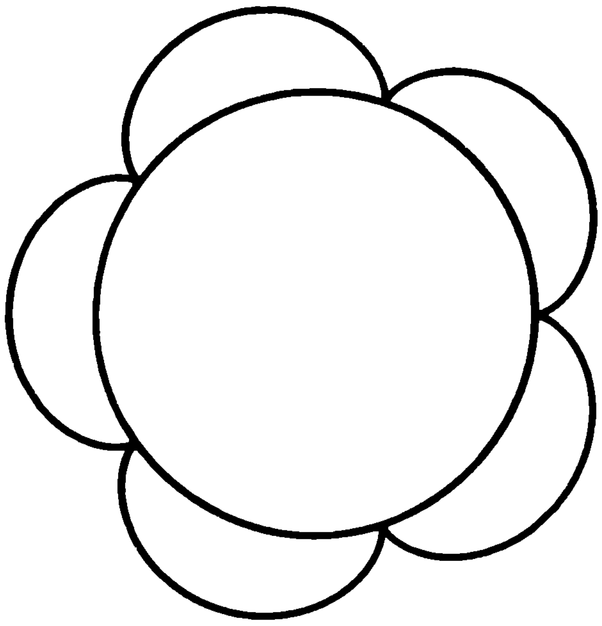
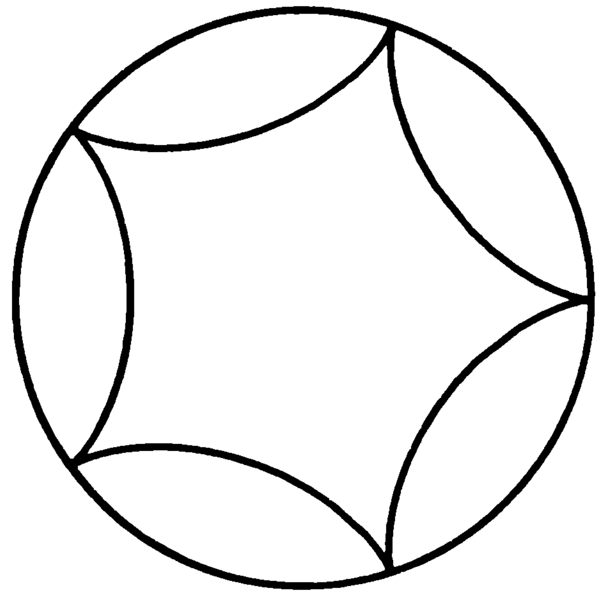
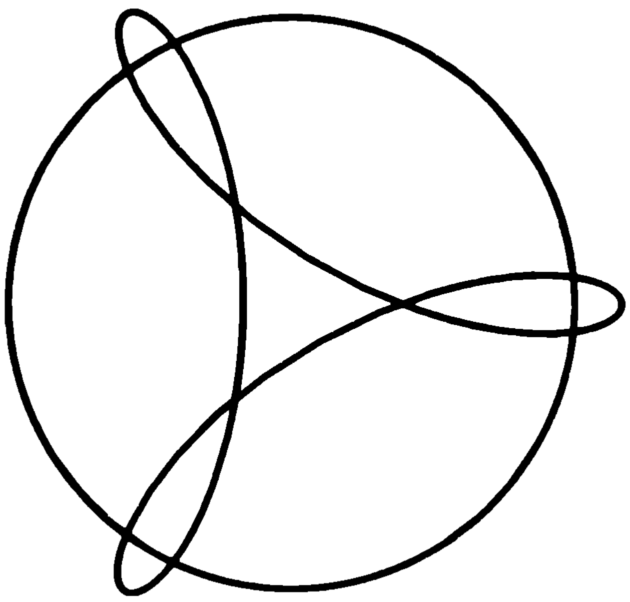


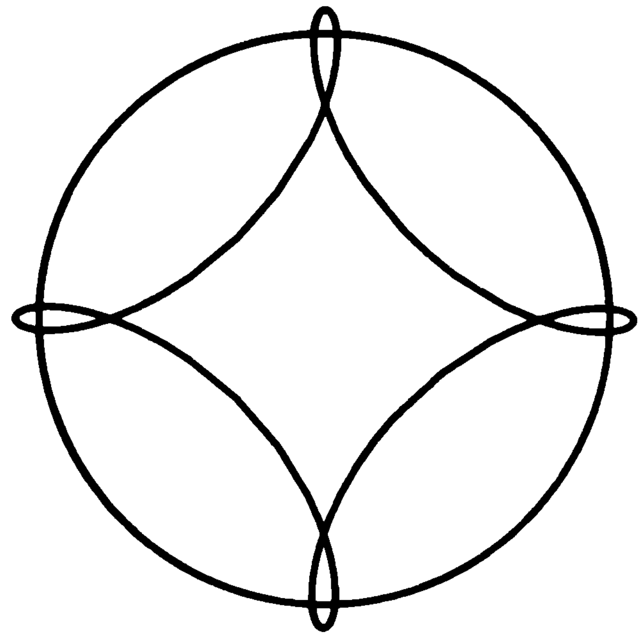
Рис. 76

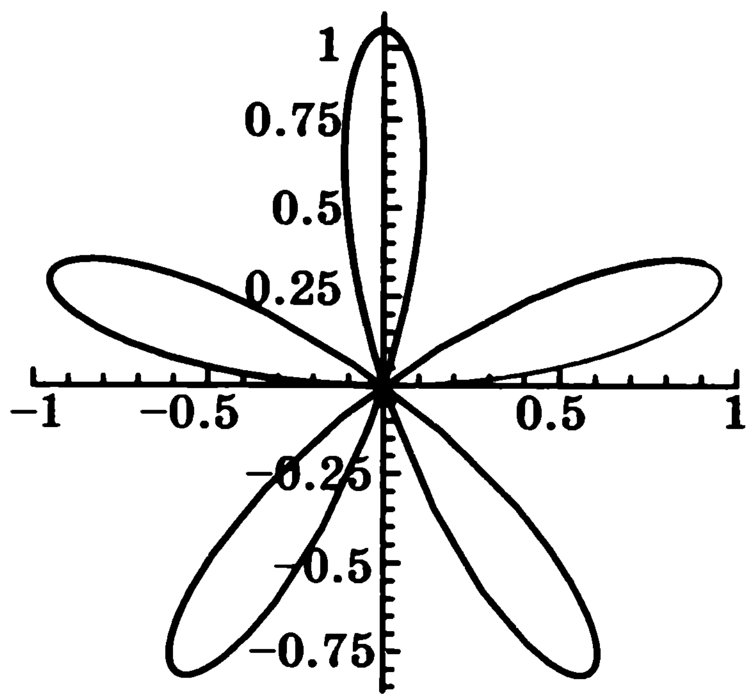
Приведем еще несколько примеров циклоидальных кривых, полученных с помощью системы «Математика».

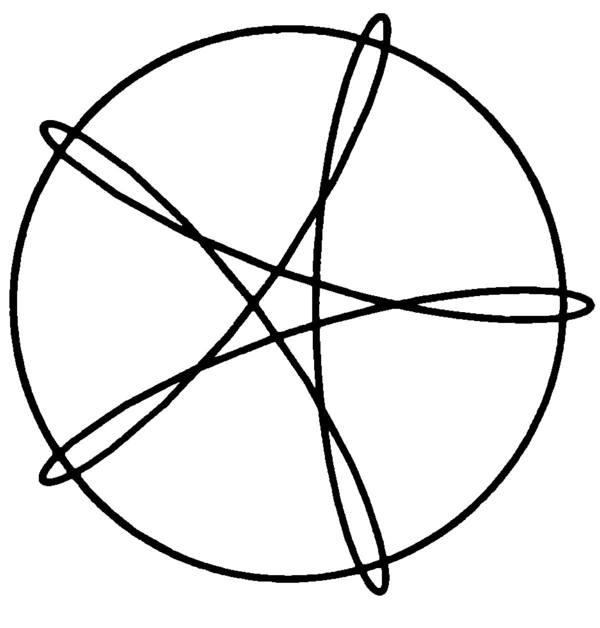


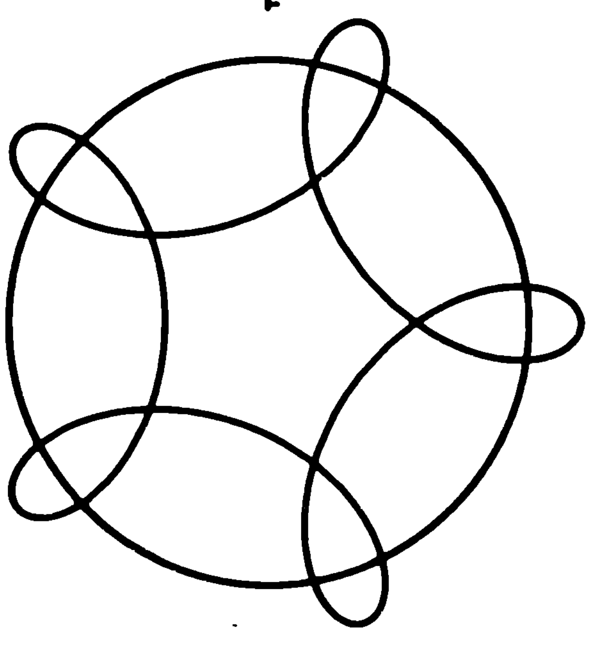


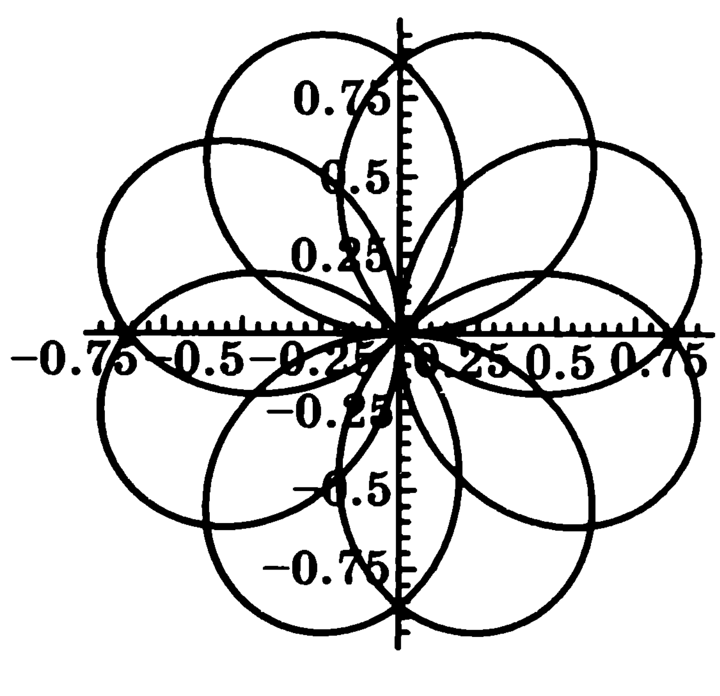


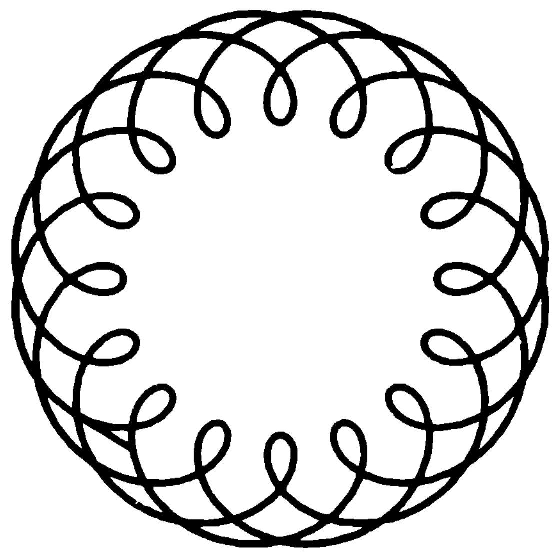


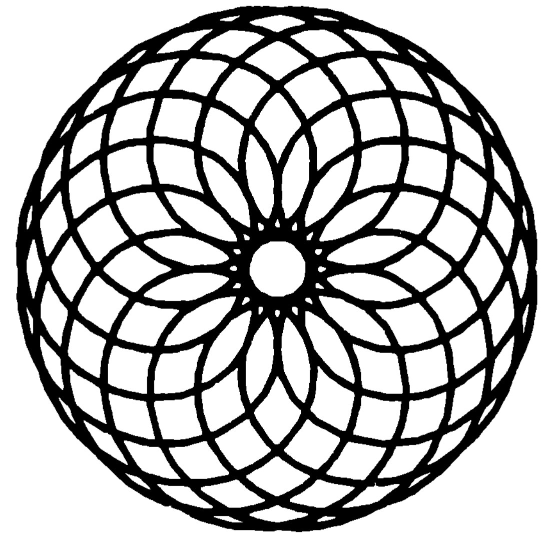

1
0.75
0.5
0.25
−1
−0.5
0.5
1
−0.25
−0.5
−0.75

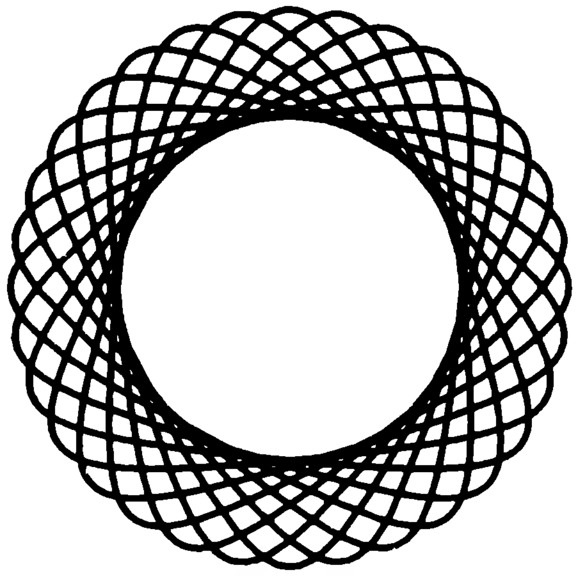


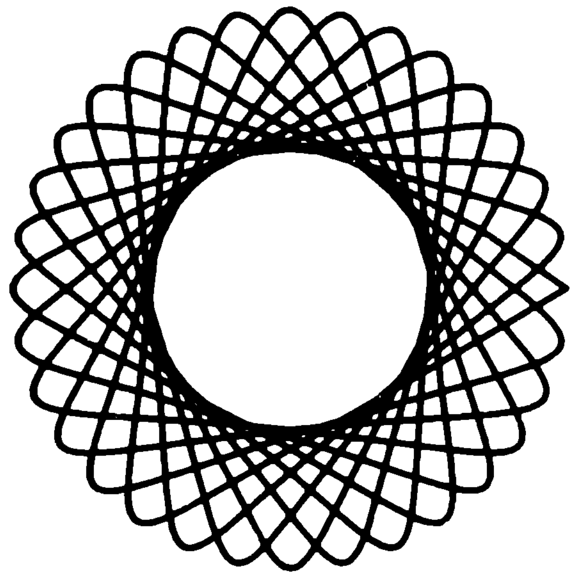


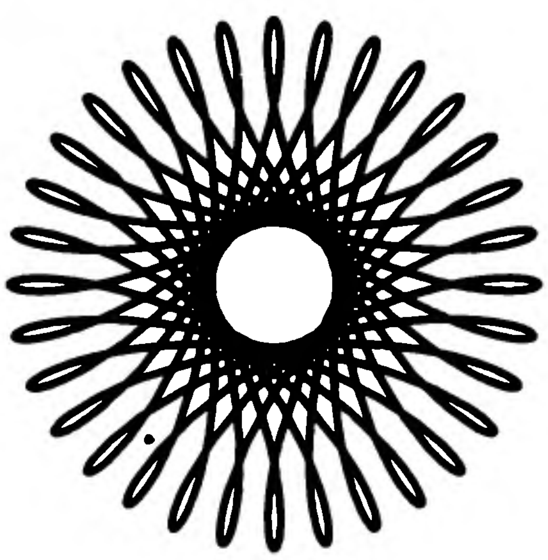

0.75
0.5
0.25
−0.75
−0.5
−0.25
0.25
0.5
0.75
−0.25
−0.5
−0.75

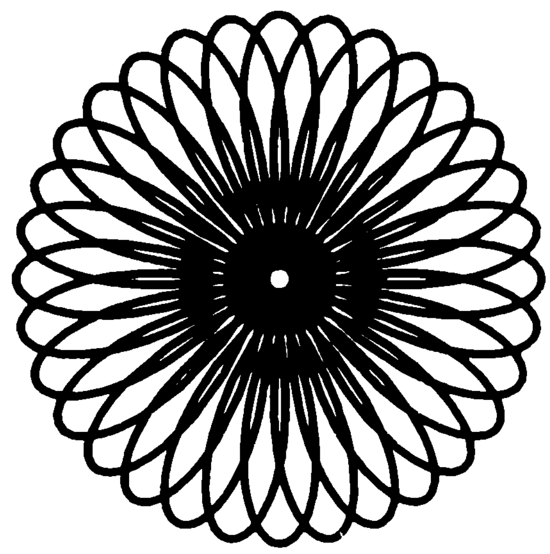


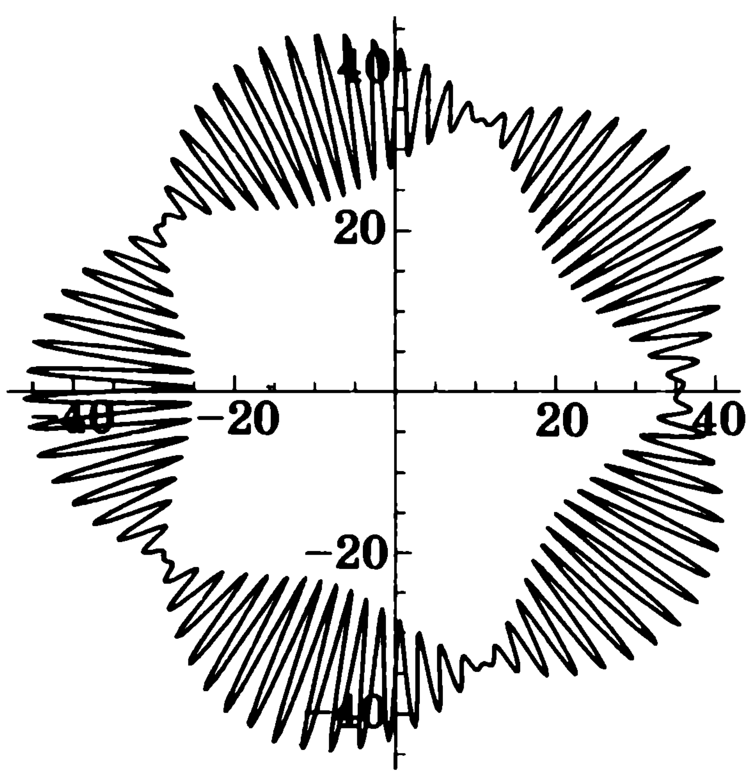











40
20
−20
−40
−40
−20
20
40

Задачи

1. Получите изображения звездчатых: а) 7-угольников; б) 8-угольников; в) 11-угольников.

2. Получите изображения: а) укороченной циклоиды; б) удлиненной циклоиды; в) кардиоиды; г) астроиды; д) кривой Штейнера.

3. Получите кривые, заданные уравнениями в полярных координатах: а) $r = \sin(5t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (пятилистник); б) $r = 1 - \cos(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (кардиоида); в) конхоида; г) улитка Паскаля; д) строфоида; е) $r = 35.5 + 10.5 \sin(80t) \sin(2.5t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4. Получите изображения кривых: а) $x^2 + 2y^2 = 1$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (эллипс); б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (астроида); в) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (лемниската Бернулли).

5. Получите изображения укороченных и удлиненных эпициклоид. Радиусы окружностей возьмите равными: а) $\frac{1}{4}$ и 1; б) $\frac{1}{5}$ и 1; в) $\frac{2}{5}$ и 1.

6. Получите изображения укороченных и удлиненных гипоциклоид. Радиусы окружностей возьмите равными: а) $\frac{1}{3}$ и 1; б) $\frac{1}{4}$ и 1; в) $\frac{1}{5}$ и 1; г) $\frac{2}{5}$ и 1.

ОТВЕТЫ

1

2. 2 см. **3.** а) Точки, расположенные внутри параболы; б) точки, расположенные вне параболы. **4.** а) Ветви параболы сжимаются; б) ветви параболы расширяются. **8.** Директриса. **15.** Построим две перпендикулярные касательные. Точка их пересечения будет принадлежать директрисе. Аналогично строим вторую точку, принадлежащую директрисе, и проводим через них прямую. Она и будет директрисой параболы. С центрами в каких-нибудь двух точках параболы и радиусами, равными расстояниям от этих точек до директрисы, проводим окружности. Фокус параболы будет точкой пересечения этих окружностей.

2

2. Эллипс. **4.** а) Большая ось уменьшается, а малая увеличивается. Эллипс приближается к окружности; б) большая ось увеличивается, а малая уменьшается. **5.** Две точки. **6.** а) Точки внутри эллипса; б) точки вне эллипса. **7.** Эллипс с фокусами A и B, за исключением двух точек, лежащих на прямой AB. **8.** Эллипс. **14.** Проведем большую и малую оси эллипса. Затем проведем окружность с центром в одном из концов малой оси и радиусом, равным большой полуоси. Ее точки пересечения с большой осью и будут искомыми фокусами.

3

2. Гипербола. **4.** а) Точки, расположенные между ветвями гиперболы; б) точки, расположенные внутри ветвей гиперболы. **5.** а) Ветви гиперболы сжимаются; б) ветви гиперболы расширяются. **7.** Гипербола. **9.** Точки пересечения прямой F_1F_2 с гиперболой.

4

1. а) Две оси симметрии; б), в), г) одна ось симметрии. **5.** Имеет одну ось симметрии. **7.** Имеет две оси симметрии.

5

2. а) Да; б) нет. **7.** а) Да; б) нет. **10.** а), б) Да.

6

1. $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$; $y = -\frac{1}{4}$. **6.** $a = b$. **8.** $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$. **10.** $F_1\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{2}, 0\right)$; $y = x$, $y = -x$. **14*.** $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$.

7

3. а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 4. а) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$; б) $(10, \pi)$; в) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$. 5. Да.

8

1. Да. 3. Спираль Архимеда.

9

1. $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$ 3. Парабола.

5. а) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = a^t\cos t, \\ y = a^t\sin t. \end{cases}$ 7. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$.

10

2. Нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин В.* Кардиоида // Квант. 1977. № 12.

2. *Березин В.* Лемниската Бернулли // Квант. 1977. № 1.

3. *Берман Г. Н.* Циклоида. — М. Наука, 1975.

4. *Бронштейн И.* Эллипс. Гипербола. Парабола // Такая разная геометрия; Сост. А. А. Егоров. — М. Бюро Квантум, 2001 // Приложение к журналу «Квант». 2001. № 2.

5. *Васильев Н. Б.* Прямые и кривые / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. — 3-е изд. — М. МЦНМО, 2000.

6. *Маркушевич А. И.* Замечательные кривые. — М. — Л. Государственное издательство технико-теоретической лититературы, 1951. // Популярные лекции по математике. Вып. 4.

7. *Савелов А. А.* Плоские кривые. — М. Физматлит, 1960.

8. *Смирнова И. М.* Геометрия. Учебник для 7—9 классов общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. Мнемозина, 2005.

9. *Смирнова И. М.* Геометрия. Учебник для 10—11 классов общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. Мнемозина, 2003.

10. *Смирнова И. М.* Компьютер помогает геометрии / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Дрофа, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ