И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

# МНОГОУГОЛЬНИКИ

КУРС ПО ВЫБОРУ

9 КЛАСС

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

# МНОГОУГОЛЬНИКИ

*КУРС ПО ВЫБОРУ*

**9 КЛАСС**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных учреждений

*Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2007

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721
С50

**Смирнова И. М.**

С50 Многоугольники. Курс по выбору. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2007. — 64 с. : ил.

ISBN 5-346-00605-2

В предлагаемом курсе рассматриваются свойства многоугольников, изучение которых выходит за рамки школьной программы, расширяются и углубляются геометрические представления учащихся. Показаны возможности использования графического редактора «Adobe Illustrator» для получения изображения геометрических фигур и решения задач.

Помимо теоретического материала, каждый пункт настоящего пособия содержит задачи для самостоятельной работы учеников.

**УДК 373.167.1:514**
**ББК 22.151.0я721**

Учебное издание

**Смирнова Ирина Михайловна**
**Смирнов Владимир Алексеевич**

**МНОГОУГОЛЬНИКИ**
**Курс по выбору**
**9 класс**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Н. А. Александрова, Л. С. Щербакова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.000389.01.06 от 25.01.06.
Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,68. Тираж 3000 экз. Заказ № 517

ИОЦ «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина». Тел./факс: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.
E-mail: tid@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс». 115477, г. Москва, ул. Кантемировская, 60.



**ISBN 5-346-00605-2**

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Многоугольники составляют основу геометрии. От того, насколько хорошо освоено это понятие, во многом зависит успешность изучения всей геометрии.

В данном курсе рассматриваются свойства многоугольников, изучение которых выходит за рамки школьной программы, расширяются и углубляются геометрические представления учащихся.

Даже само определение многоугольника как фигуры, ограниченной простой замкнутой линией, опирается на очень глубокую теорему Жордана о том, что всякая простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю.

Теорема о сумме углов многоугольника, доказываемая в основном курсе для выпуклых многоугольников, здесь распространяется на случай невыпуклых и звездчатых многоугольников.

Рассматриваются замечательные точки и линии, связанные с треугольником, среди которых: окружность девяти точек, прямые Эйлера и Симсона, точка Торричелли.

Устанавливается, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника и противоположные им стороны треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

Доказываются характеристические свойства вписанных и описанных четырехугольников.

Кроме этого в пособие включен научно-популярный материал, отражающий некоторые современные направления развития геометрии и их приложения. Это теорема Эйлера, а также задача Эйлера о трех домиках и трех колодцах, положившие начало теории графов и топологии, проблема четырех красок, паркеты, равносоставленность и задачи на разрезание, оптимальное управление.

Показаны возможности использования графического редактора «Adobe Illustrator» для изображения геометрических фигур и решения задач.

Помимо теоретического материала, каждый пункт настоящего пособия содержит задачи для самостоятельного решения, в том числе повышенной сложности (отмечены *). В конце приведены ответы к задачам и список рекомендуемой литературы.

# ПРОГРАММА КУРСА

(Всего 24 ч)

| Пункт | Содержание | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 1 | Общие свойства многоугольников | 2 |
| 2 | Сумма углов многоугольника | 2 |
| 3 | Замечательные точки и линии в треугольнике | 2 |
| 4 | Теоремы Менелая и Чевы | 2 |
| 5 | Вписанные и описанные многоугольники | 2 |
| 6 | Теорема Эйлера | 2 |
| 7 | Проблема четырех красок | 2 |
| 8 | Паркеты | 2 |
| 9 | Равносоставленность и задачи на разрезание | 2 |
| 10 | Многоугольники и оптимальное управление | 2 |
| 11 | Использование графического редактора «Adobe Illustrator» | 2 |
|  | Зачет | 2 |

# 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Напомним, что ***ломаной*** называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. (рис. 1). Отрезки называются ***сторонами ломаной***, а их концы — ***вершинами ломаной***.

Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2 \dots A_n$.

Ломаная называется ***простой***, если она не имеет точек самопересечения (рис. 2).

Ломаная называется ***замкнутой***, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 3).

Одной из важнейших теорем о простых замкнутых ломаных является следующая теорема Жордана.

**Теорема.** Всякая простая замкнутая ломаная на плоскости разбивает точки плоскости на две области — внутреннюю и внешнюю. При этом всякие две точки из одной области могут быть соединены ломаной, не пересекающейся с данной ломаной. Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, их соединяющая, пересекается с данной ломаной.

**Доказательство.** Пусть $L$ — заданная простая замкнутая ломаная (рис. 4). Выберем на плоскости какую-нибудь прямую $a$, не перпендикулярную ни одной из сторон ломаной $L$. Так как число сторон ломаной конечно, то такая прямая существует.

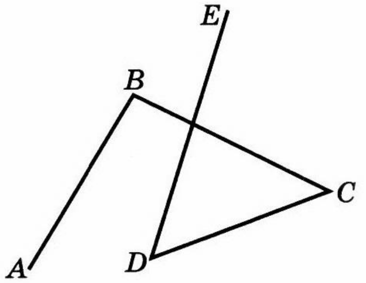



**Рис. 1**

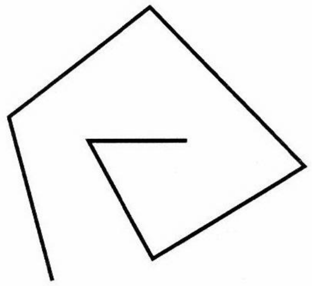


**Рис. 2**

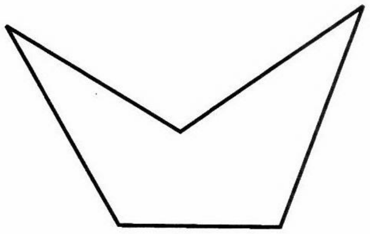


**Рис. 3**

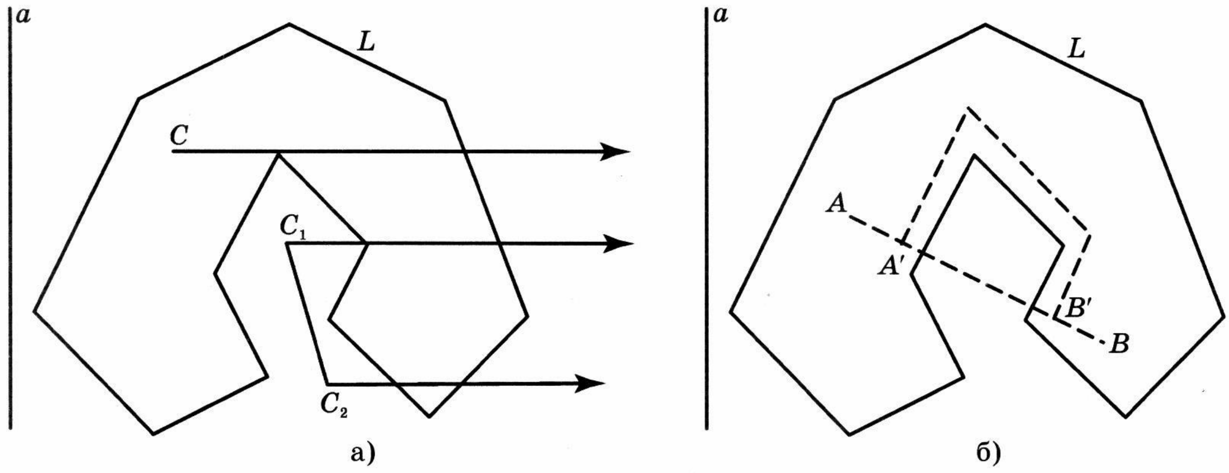



**Рис. 4**

Для точки $C$ плоскости, не принадлежащей ломаной $L$, рассмотрим луч с вершиной $C$, перпендикулярный $a$. Заметим, что ни одна из сторон ломаной не будет целиком лежать на этом луче. Подсчитаем число точек пересечения этого луча с ломаной $L$. При этом если рассматриваемый луч проходит через вершину ломаной, то эта вершина идет в счет или не идет в зависимости от того, расположены ли прилежащие к этой вершине стороны многоугольника по разные или по одну сторону от данного луча. Если число пересечений нечетно, то точку $C$ отнесем к внутренней области. Если число точек пересечения четно, то точку $C$ отнесем к внешней области.

Заметим, что если отрезок не пересекается с ломаной, то все его точки имеют одинаковую четность. Действительно, четность точки, движущейся по такому отрезку, может измениться только при прохождении соответствующего луча через вершину ломаной. Но, принимая во внимание принятый подсчет точек пересечения, в каждом из двух возможных случаев четность не изменится.

Из сказанного следует, что если какая-нибудь ломаная соединяет две точки разной четности, то она пересекается с $L$. Иначе четность всех точек ломаной, а значит, конечной и начальной точек, была бы одинаковой.

Пусть теперь $A$ и $B$ — две точки одинаковой четности. Покажем, что их можно соединить ломаной, не пересекающейся с $L$. Действительно, если отрезок $AB$ не пересекается с ломаной, то он является искомой ломаной. Пусть отрезок $AB$ пересекается с ломаной. Обозначим $A'$ и $B'$ соответственно первую и последнюю точку пересечения. Построим ломаную, начинающуюся в точке $A$ и заканчивающуюся в $B$. Сначала она идет по отрезку $AA'$. Перед точкой $A'$ она поворачивает и идет вдоль ломаной $L$

(безразлично, в каком из двух возможных направлений) до тех пор, пока снова не пересечет отрезок $AB$ около точки $B'$. Выбирая ломаную достаточно близко к ломаной $L$, можно добиться, чтобы она не пересекалась с $L$.

Весь вопрос в том, кончается ли построенная ломаная на отрезке $A'B'$ или на отрезке $B'B$. Покажем, что первое невозможно. Действительно, если две точки расположены близко друг к другу, но по разные стороны от одной из сторон ломаной $L$, то они будут иметь разную четность, так как выходящие из них лучи будут таковы, что один из них будет иметь на одну точку пересечения с $L$ больше, чем другой.

Таким образом, точки отрезков $A'B'$ и $B'B$, расположенные близко к $B'$, имеют различную четность. Следовательно, точки отрезка $A'B'$, расположенные близко к $B'$, не могут быть соединены ломаной с точкой $A$, и, значит, построенная ломаная заканчивается на отрезке $BB'$.

Завершим построение ломаной, соединив отрезком ее последнюю точку с точкой $B$. В результате получим искомую ломаную, соединяющую точки $A$ и $B$.

Доказанная теорема позволяет дать определение многоугольника.

***Многоугольником*** называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, стороны — ***сторонами многоугольника***, а углы, образованные соседними сторонами, — ***углами многоугольника***. Точки многоугольника, не лежащие на его сторонах, называются ***внутренними***.

Многоугольник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 5).

Любой треугольник — выпуклый. Среди многоугольников с числом углов большим трех могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 6).

***Диагональю*** многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.

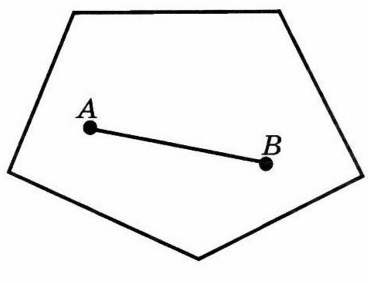



**Рис. 5**

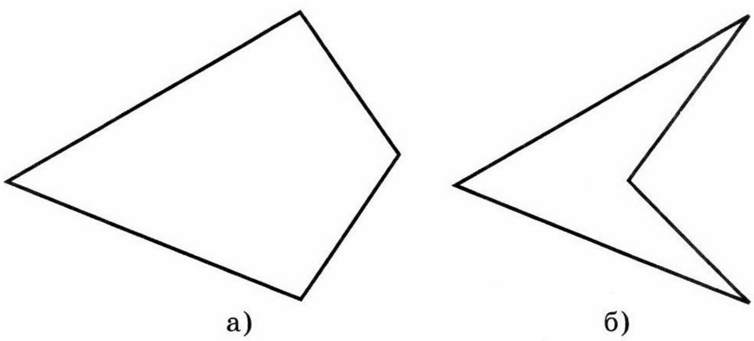



**Рис. 6**

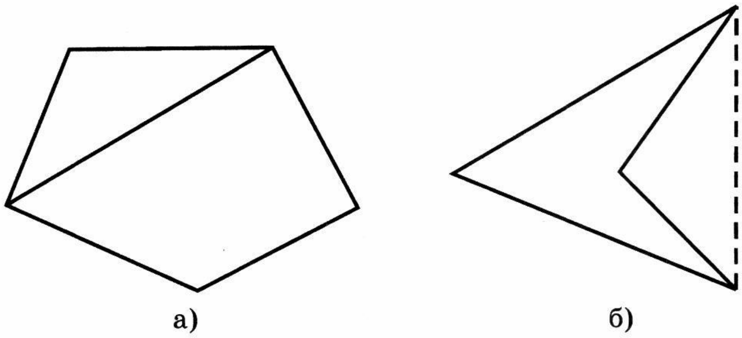



**Рис. 7**

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 7), однако имеет место следующая теорема.

**Теорема.** В каждом многоугольнике с числом сторон большим трех можно провести диагональ, целиком в нем содержащуюся.

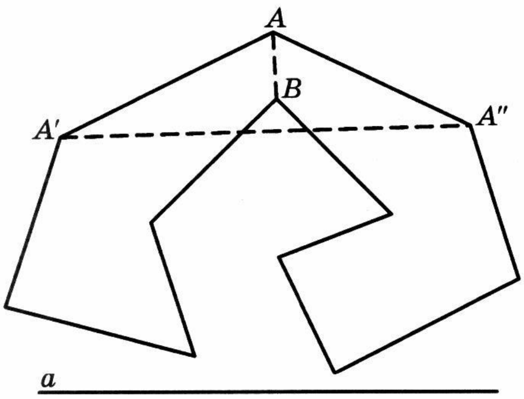



**Рис. 8**

**Доказательство.** Для данного многоугольника $M$ зафиксируем какую-нибудь прямую $a$, и найдем вершину $A$ многоугольника, расстояние от которой до этой прямой наибольшее. Пусть $A'$, $A''$ — соседние с ней вершины (рис. 8). Если отрезок $A'A''$ целиком содержится в многоугольнике $M$, то он является искомой диагональю. Если $A'A''$ не содержится целиком в $M$, то существуют вершины многоугольника $M$, содержащиеся в треугольнике $A'AA''$. Выберем из них вершину $B$, наиболее удаленную от прямой $a$. Тогда отрезок $AB$ будет целиком содержаться в многоугольнике. Следовательно, он является искомой диагональю.

*Следствие.* Любой $n$-угольник можно разбить на треугольники, причем число таких треугольников будет равно $n - 2$.

Действительно, по доказанной теореме, многоугольник можно разбить на два многоугольника проведением диагонали. Продолжая процесс проведения диагоналей, мы в конце концов дойдем до треугольников, на которые будет разбит наш многоугольник.

Докажем индукцией по $n$, что число таких треугольников равно $n - 2$. Для $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, мы доказали, что любой $m$-угольник при $m < n$ проведением диагоналей разбивается на $m - 2$ треугольника. Рассмотрим $n$-угольник. Проведением диагонали он разбивается на $i$-угольник и $(n - i + 2)$-угольник. Каждый из них, по предположению индукции, разбивается на $i - 2$ и $n - i$ треугольника, которые вместе составляют разбиение $n$-угольника на $n - 2$ треугольника.

## Задачи

**1.** Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у нее сторон?

**2.** Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у нее вершин?

**3.** Укажите, какие фигуры, изображенные на рисунке 9, являются простыми ломаными.

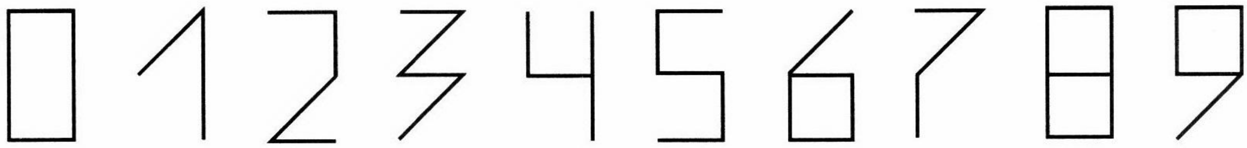


**Рис. 9**

**4.** Данные точки, изображенные на рисунке 10, соедините простой ломаной.

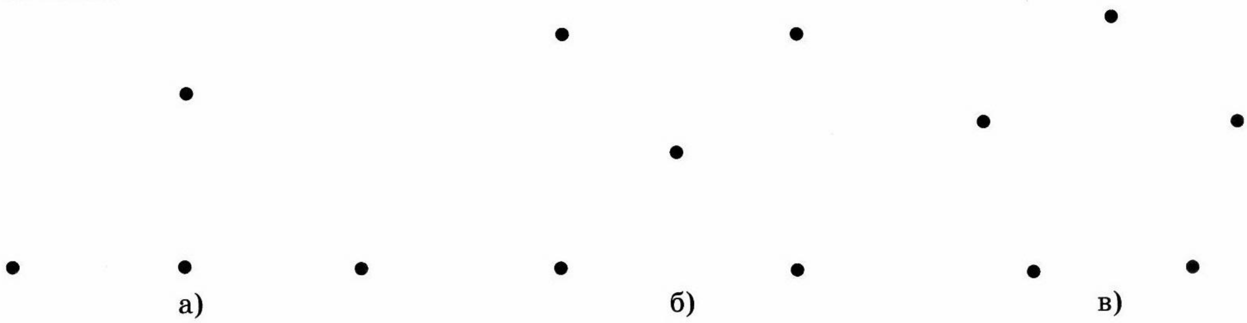



**Рис. 10**

**5.** Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?

**6.** Проверьте, что линия, изображенная на рисунке 11, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.

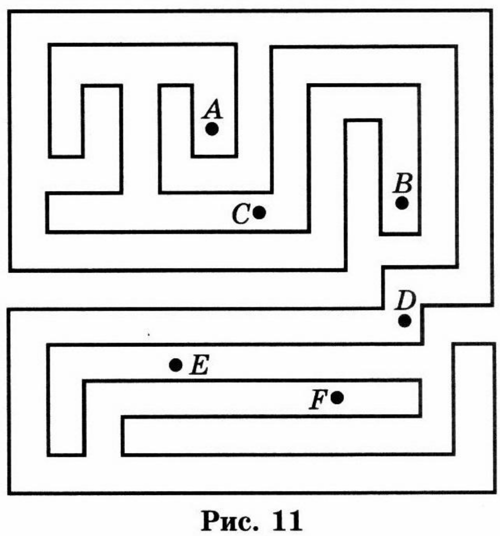
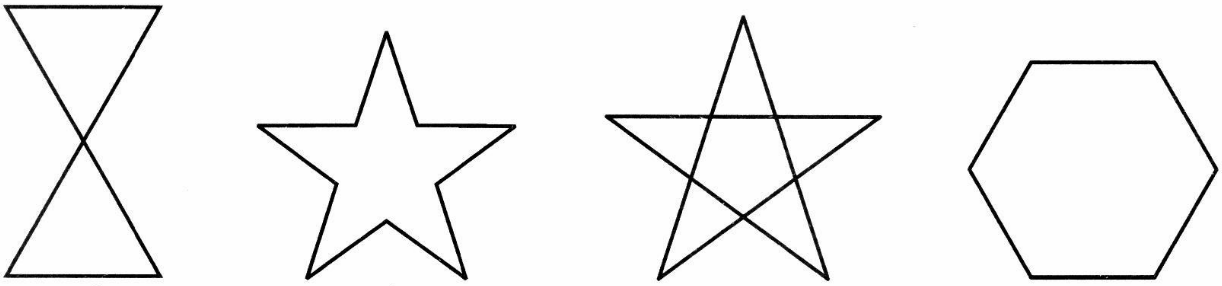



**Рис. 11**

**7.** Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырехугольники; б) пятиугольники; в) шестиугольники. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.

**8.** Нарисуйте правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

**9.** Укажите, какие из представленных на рисунке 12 фигур являются многоугольниками, а какие нет.



а) б) в) г)

**Рис. 12**

**10.** Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?

**11.** На сколько треугольников делится выпуклый: а) 4-угольник; б) 5-угольник; в) 6-угольник; г) $n$-угольник своими диагоналями, проведенными из одной вершины?

**12.** Сколько диагоналей имеет: а) шестиугольник; б)* $n$-угольник?

**13.** Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?

**14.** Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?

***15.** Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) четырех сторон; б) пяти сторон; в) $n$ сторон?

***16.** Нарисуйте замкнутую шестистороннюю ломаную, пересекающую каждую свою сторону ровно один раз.

***17.** Может ли прямая иметь с простой замкнутой ломаной нечетное число точек?

***18.** Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать ее стороны в нечетном числе точек?

***19.** Прямая $l$ пересекает простую замкнутую ломаную в 2003 точках. Докажите, что существует прямая $l'$, пересекающая эту ломаную более чем в 2003 точках.

***20.** Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, бóльших развернутого.

***21.** Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

## 2. СУММА УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

В основном курсе геометрии доказывалось, что сумма углов выпуклого $n$-угольника равна $180°(n - 2)$. Оказывается, что это утверждение справедливо и для невыпуклых многоугольников.

**Теорема.** Сумма углов произвольного $n$-угольника равна $180°(n - 2)$.

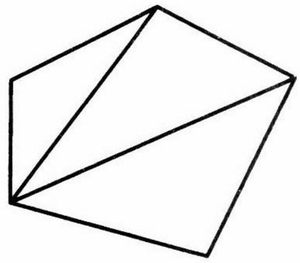


**Рис. 13**

**Доказательство.** Разобьем многоугольник на треугольники проведением диагоналей (рис. 13). Число таких треугольников равно $n - 2$, и в каждом треугольнике сумма углов равна $180°$. Поскольку углы треугольников составляют углы многоугольника, то сумма углов многоугольника равна $180°(n - 2)$.

Рассмотрим теперь произвольные замкнутые ломаные, возможно с самопересечениями $A_1A_2 \dots A_nA_1$ (рис. 14, а). Такие самопересекающиеся ломаные будем называть звездчатыми многоугольниками (рис. 14, б—г).

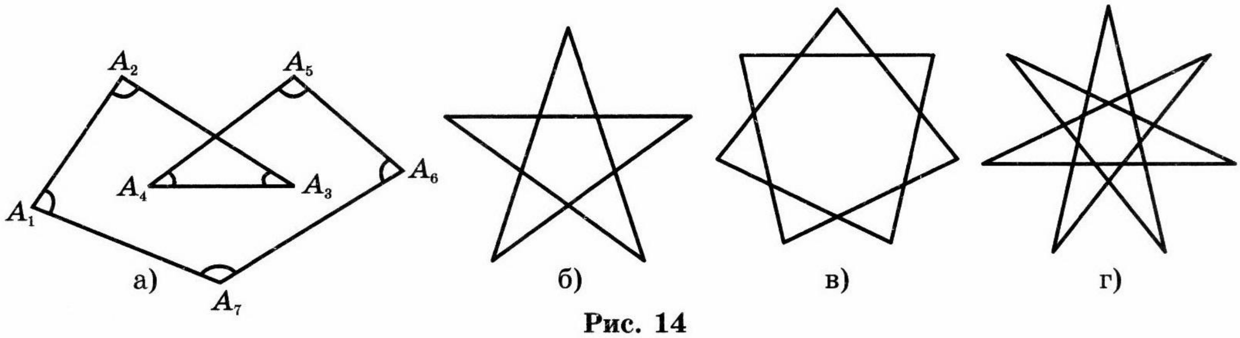



**Рис. 14**

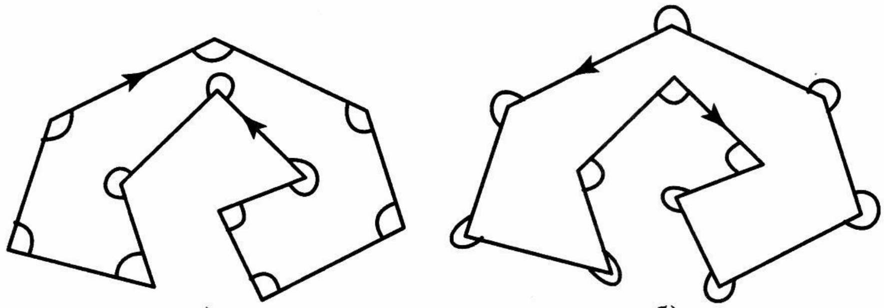
Зафиксируем направление подсчета углов против часовой стрелки. Заметим, что углы, образованные замкнутой ломаной, зависят от направления ее обхода. Если направление обхода ломаной меняется на противоположное, то углами многоугольника будут углы, дополняющие углы исходного многоугольника до $360°$.

Если многоугольник $M$ образован простой замкнутой ломаной, проходимой в направлении по часовой стрелке (рис. 15, а), то сумма углов этого многоугольника будет равна $180°(n - 2)$. Если же обход по ломаной происходит в направлении против часовой стрелки (рис. 15, б), то сумма углов будет равна $180°(n + 2)$.

Таким образом, общая формула суммы углов многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, имеет вид

$$\Sigma = 180°(n \pm 2),$$

где $\Sigma$ — сумма углов, $n$ — число углов многоугольника, «+» или «−» берется в зависимости от направления обхода ломаной.



а) б)

**Рис. 15**

Наша задача состоит в том, чтобы вывести формулу суммы углов произвольного многоугольника, образованного замкнутой (возможно самопересекающейся) ломаной. Для этого введем понятие степени многоугольника.

***Степенью многоугольника*** называется число оборотов, совершаемых точкой при полном последовательном обходе его сторон. Причем обороты, совершаемые в направлении против часовой стрелки, считаются со знаком «+», а обороты по часовой стрелке — со знаком «−».

Ясно, что у многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, степень равна +1 или −1 в зависимости от направления обхода. Степень ломаной на рисунке 14, а равна двум. Степень звездчатых семиугольников (рис. 14, в, г) равна соответственно двум и трем.

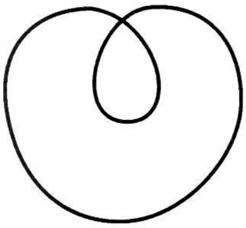
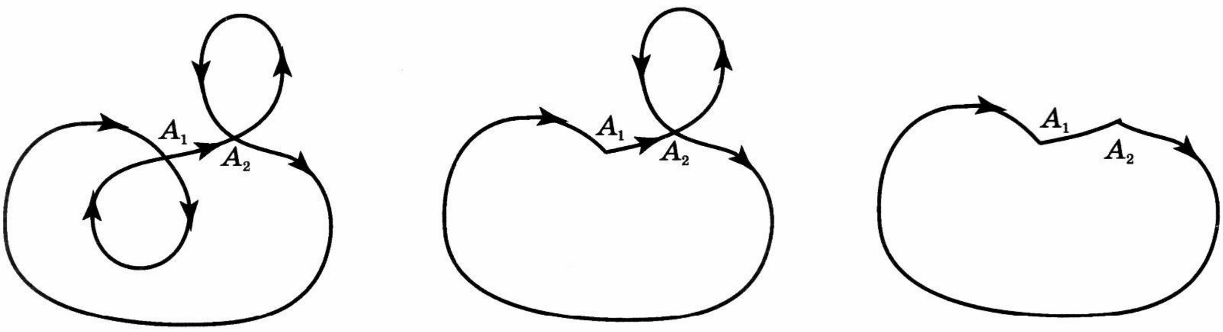


**Рис. 16**

Аналогичным образом понятие степени определяется и для замкнутых кривых на плоскости. Например, степень кривой, изображенной на рисунке 16, равна двум.

Для нахождения степени многоугольника или кривой можно поступать следующим образом. Предположим, что, двигаясь по кривой (рис. 17, а), мы, начиная с какого-то места $A_1$, совершили полный оборот и попали в ту




а) б) в)

**Рис. 17**

же точку $A_1$. Удалим из кривой соответствующий участок и продолжим движение по оставшейся кривой (рис. 17, б). Если, начиная с какого-то места $A_2$, мы снова совершили полный оборот и попали в ту же точку, то удаляем соответствующий участок кривой и продолжаем движение (рис. 17, в). Считая количество удаленных участков со знаками «+» или «–» в зависимости от их направления обхода, получим искомую степень кривой.

**Теорема.** Для произвольного многоугольника имеет место формула

$$\Sigma = 180°(n + 2m),$$

где $\Sigma$ — сумма углов, $n$ — число углов, $m$ — степень многоугольника.

**Доказательство.** Пусть многоугольник $M$ имеет степень $m$ и условно изображен на рисунке 18. $M_1, \ldots, M_k$ — простые замкнутые ломаные, проходя по которым, точка совершает полные обороты. $A_1, \ldots, A_k$ — соответствующие точки самопересечения ломаной, не являющиеся ее вершинами.

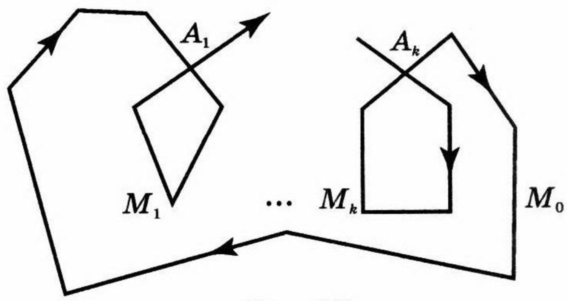


**Рис. 18**

Обозначим число вершин многоугольника $M$, входящих в многоугольники $M_1, \ldots, M_k$ через $n_1, \ldots, n_k$ соответственно. Поскольку, помимо вершин многоугольника $M$, к этим многоугольникам добавляются еще вершины $A_1, \ldots, A_k$, то число вершин многоугольников $M_1, \ldots, M_k$ будет равно соответственно $n_1 + 1, \ldots, n_k + 1$. Тогда суммы их углов будут равны $180°(n_1 + 1 \pm 2), \ldots, 180°(n_k + 1 \pm 2)$. Плюс или минус берется в зависимости от направления обхода ломаных.

Сумма углов многоугольника $M_0$, оставшегося от многоугольника $M$ после удаления многоугольников $M_1, \ldots, M_k$, равна $180°(n - n_1 - \ldots - n_k + k \pm 2)$.

Суммы углов многоугольников $M_0, M_1, \ldots, M_k$ дают сумму $\Sigma$ углов многоугольника $M$, и в каждой вершине $A_1, \ldots, A_k$ дополнительно получим 360°. Следовательно, имеем равенство

$$180°(n_1 + 1 \pm 2) + \ldots + 180°(n_k + 1 \pm 2) + 180°(n - n_1 - \ldots - n_k + k \pm 2) = \Sigma + 360° \cdot k.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\Sigma = 180°(n \pm 2 \pm \ldots \pm 2) = 180°(n + 2m),$$

где $m$ — степень многоугольника $M$.

## Задачи

**1.** По углам $\alpha$ и $\beta$ при основании треугольника ($\alpha < \beta$) определите угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противолежащей основанию.

**2.** По углам $\alpha$ и $\beta$ прямоугольного треугольника ($\alpha < \beta$) определите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

**3.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

**4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с боковыми сторонами $AB = BC$ угол $ABC$ равен 80°. Внутри треугольника взята точка $O$ так, что угол $OAC$ равен 10°, а угол $OCA$ равен 30°. Найдите угол $AOB$.

**5.** Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

**6.** Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?

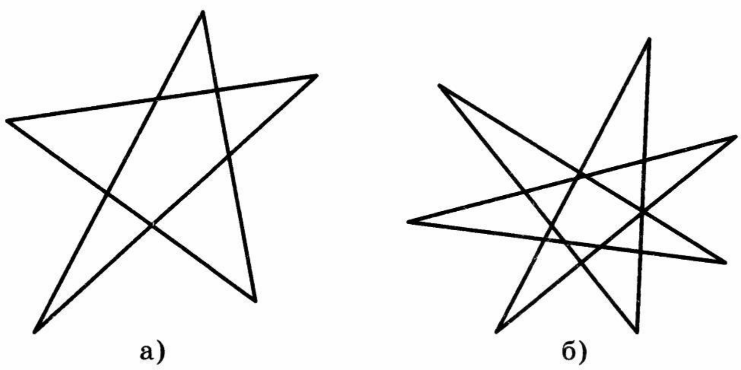
**7.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36°; б) 24°?

**8.** Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.

**9.** Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

**10.** Изобразите многоугольник, имеющий четыре острых угла.

**11.** Найдите суммы углов: а) пятиконечной звездочки; б) семиконечной звездочки (рис. 19, а, б).

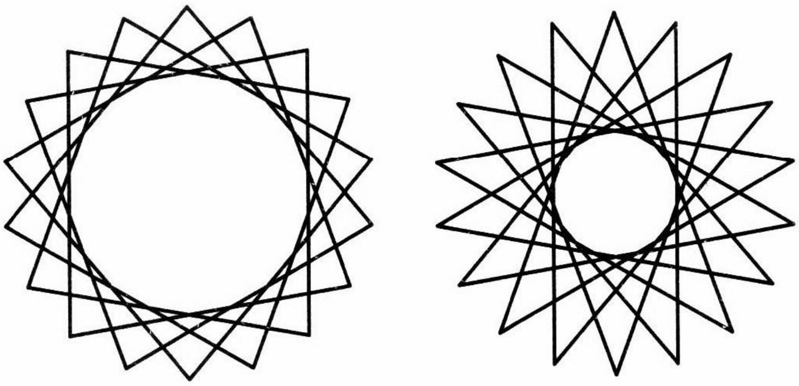


а) б)

**Рис. 19**

**12.** Чему равны степени звездчатых многоугольников на рисунке 20?

**13.** Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся две диагонали, угол между которыми не превосходит 5°.



а) б)

**Рис. 20**

**14.** В выпуклом шестиугольнике все углы равны. Докажите, что разности противоположных сторон такого шестиугольника равны между собой.

***15.** Докажите, что утверждение о сумме углов треугольника эквивалентно аксиоме параллельных.

## 3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

К числу замечательных точек в треугольнике, изучаемых в основном курсе геометрии, относятся:

а) точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);

б) точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности);

в) точка пересечения высот (ортоцентр);

г) точка пересечения медиан (центроид).

Рассмотрим некоторые другие замечательные точки и линии в треугольнике.

### Точка Торричелли

Пусть дан треугольник $ABC$. Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка O, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 21, а), т. е. углы $AOB$, $AOC$ и $BOC$ равны 120°.

Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120°, точка Торричелли существует.

На стороне $AB$ треугольника $ABC$ построим равносторонний треугольник $ABC'$ (рис. 21, а) и опишем около него окружность. Отрезок $AB$ стягивает дугу этой окружности величиной 120°. Следовательно, точки этой

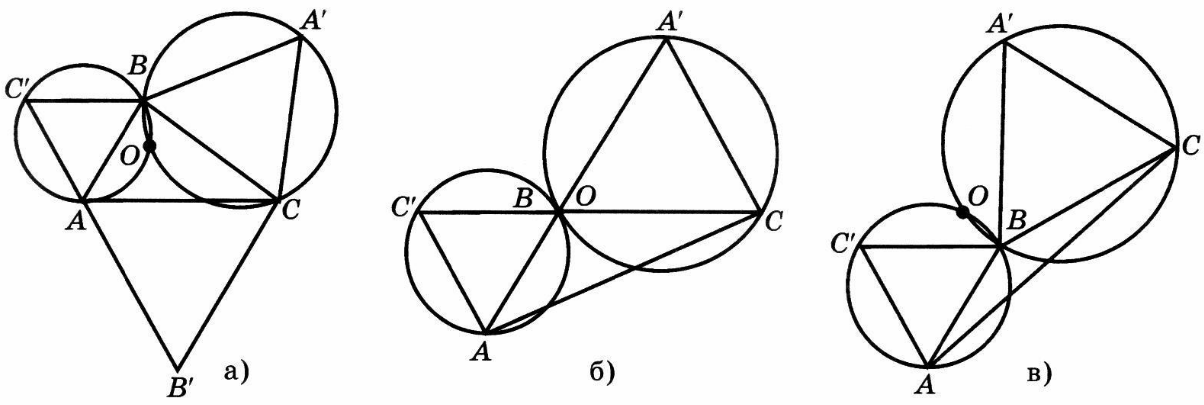



**Рис. 21**

дуги, отличные от $A$ и $B$, обладают тем свойством, что отрезок $AB$ виден из них под углом 120°. Аналогичным образом, на стороне $AC$ треугольника $ABC$ построим равносторонний треугольник $ACB'$ и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные от $A$ и $C$, обладают тем свойством, что отрезок $AC$ виден из них под углом 120°. В случае, когда углы треугольника меньше 120°, эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке $O$. В этом случае $\angle AOB = 120°$, $\angle AOC = 120°$. Следовательно, и $\angle BOC = 120°$. Поэтому точка $O$ является искомой.

В случае, когда один из углов треугольника, например $ABC$, равен 120°, точкой пересечения дуг окружностей будет точка $B$ (рис. 21, б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны $AB$ и $BC$.

В случае, когда один из углов треугольника, например $ABC$, больше 120° (рис. 21, в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются. Сами окружности пересекаются в некоторой точке $O$, из которой стороны $AB$ и $BC$ видны под углом 60°. В этом случае точки Торричелли также не существует.

Таким образом, во всех трех случаях окружности, описанные около равносторонних треугольников, построенных на сторонах данного треугольника, пересекаются в одной точке. Если углы треугольника меньше 120°, то эта точка лежит внутри треугольника и является точкой Торричелли.

## Окружность девяти точек

**Теорема.** Пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 22), $H$ — точка пересечения высот треугольника; точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ обозначают основания высот; $A_2$, $B_2$, $C_2$ — середины соответствующих сторон; $A_3$, $B_3$, $C_3$ — середины отрезков $AH$, $BH$ и $CH$. Тогда точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$ лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек.

Действительно, $A_3B_2$ — средняя линия треугольника $AHC$ и, следовательно, $A_3B_2 \parallel CC_1$. $B_2A_2$ — средняя линия треугольника $ABC$ и, следовательно, $B_2A_2 \parallel AB$. Так как $CC_1 \perp AB$, то $\angle A_3B_2A_2 = 90°$. Аналогично, $\angle A_3C_2A_2 = 90°$. Поэтому точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$ лежат на одной окружности с диаметром $A_2A_3$. Так как $AA_1 \perp BC$, то точка $A_1$ также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки $A_1$ и $A_3$ лежат на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$. Аналогичным образом показывается, что точки $B_1$ и $B_3$, $C_1$ и $C_3$ лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.

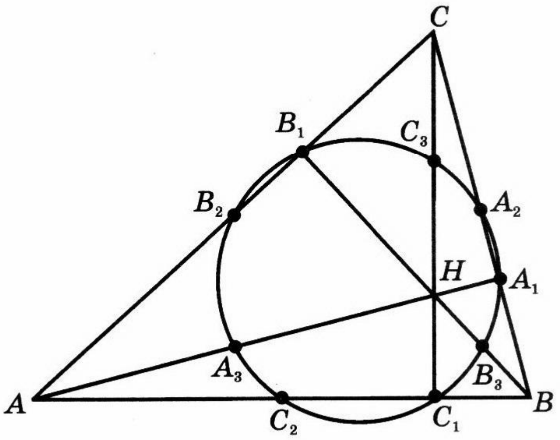


Рис. 22

## Прямая Эйлера

**Теорема.** В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.

Действительно, пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 23), точка $O$ — центр описанной окружности; $G$ — точка пересечения медиан. Обозначим точку пересечения прямой $OG$ с высотой $CC_1$ через $H$. Требуется доказать, что $H$ является точкой пересечения высот и центр окружности девяти точек $N$ делит отрезок $OH$ пополам.

Так как $CC_1 \parallel OC_2$, то треугольники $GOC_2$ и $GHC$ подобны и, следовательно,

$$\frac{GO}{GH} = \frac{GC_2}{GC} = \frac{1}{2}.$$

Треугольники $GOB_2$ и $GHB$ подобны. Поэтому $OB_2 \parallel BB_1$ и, следовательно, $BB_1$ — высота. Значит $H$ — точка пересечения высот.

Покажем, что середина $N$ отрезка $OH$ является центром окружности девяти точек. Действительно, $C_1C_2$ — хорда

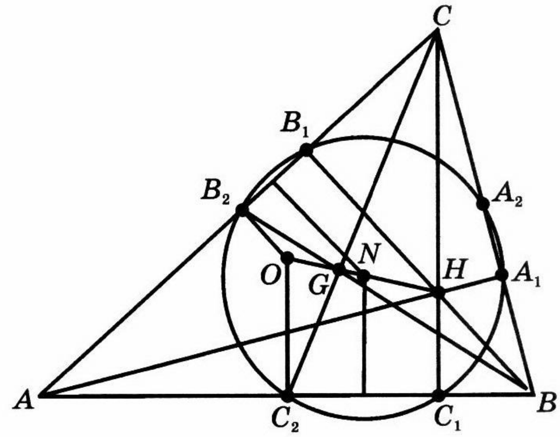


Рис. 23

окружности девяти точек. Поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде является диаметром и пересекает $OH$ в середине $N$. Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде $B_1B_2$ является диаметром и пересекает $OH$ в той же точке $N$. Значит $N$ — центр окружности девяти точек. Что и требовалось доказать.

## Прямая Симсона

**Теорема.** Для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной окружности на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона.

Действительно, пусть $P$ — произвольная точка, лежащая на окружности, описанной около треугольника $ABC$; $D$, $E$, $F$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $P$ на стороны треугольника (рис. 24). Требуется доказать, что точки $D$, $E$, $F$ лежат на одной прямой.

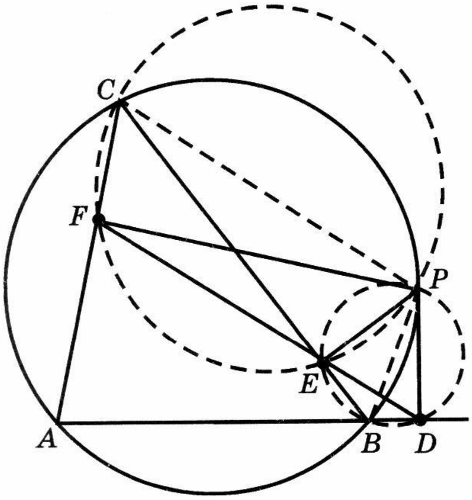


**Рис. 24**

Заметим, что в случае если $AP$ проходит через центр окружности, то точки $D$ и $E$ совпадают с вершинами $B$ и $C$. В противном случае один из углов $ABP$ или $ACP$ — острый, а другой — тупой. Из этого следует, что точки $D$ и $E$ будут расположены по разные стороны от прямой $BC$ и для того, чтобы доказать, что точки $D$, $E$ и $F$ лежат на одной прямой, достаточно проверить, что $\angle CEF = \angle BED$.

Опишем окружность с диаметром $CP$. Так как $\angle CFP = \angle CEP = 90°$, то точки $E$ и $F$ лежат на этой окружности. Поэтому $\angle CEF = \angle CPF$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Далее, $\angle CPF = 90° - \angle PCF = 90° - \angle DBP = \angle BPD$. Опишем окружность с диаметром $BP$. Так как $\angle BEP = \angle BDP = 90°$, то точки $F$ и $D$ лежат на этой окружности. Поэтому $\angle BPD = \angle BED$. Следовательно, окончательно получаем, что $\angle CEF = \angle BED$. Значит точки $D$, $E$, $F$ лежат на одной прямой.

### Задачи

**1.** Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?

**2.** Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?

**3.** Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?

**4.** Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?

**5.** Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров для: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?

**6.** Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?

**7.** Докажите, что из четырех точек, одна из которых есть ортоцентр треугольника, с вершинами в трех остальных точках, каждая является центроидом треугольника с вершинами в трех остальных точках.

**8.** К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?

**9.** К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?

**10.** К какой из сторон ближе расположена точка пересечения медиан треугольника?

**11.** Углы $B$ и $C$ треугольника $ABC$ равны соответственно $10°$ и $100°$. Найдите углы $BOC$ и $COA$, где $O$ — центр описанной окружности.

**12.** Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $ABC$ и $DCA$ лежат на диагонали $BD$ и делят ее на три равные части.

**13.** Разделите данный отрезок на три равные части, не пользуясь построением параллельных прямых.

**14.** Пусть $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Докажите, что $A$ — точка пересечения продолжения высот треугольника $BHC$.

**15.** Пусть $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$, $AHB$, $BHC$, $CHA$, равны между собой.

**16.** Докажите, что если какие-нибудь из замечательных точек треугольника совпадают, то этот треугольник — равносторонний.

**17.** Биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найдите углы $ACO$ и $BCO$, если $\angle AOB = 136°$.

**18.** Постройте окружности девяти точек для: а) остроугольного треугольника; б) прямоугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника.

## 4. ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ И ЧЕВЫ

Здесь мы рассмотрим общие теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также, в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника и противоположные им стороны треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

Начнем с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры.

**Теорема (Менелая).** Пусть на сторонах $AB$, $BC$ и продолжении стороны $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

**Доказательство.** Предположим, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ принадлежат одной прямой $a$ (рис. 25). Через вершину $C$ треугольника $ABC$ проведем прямую, параллельную $a$, и обозначим через $C'$ точку ее пересечения с $AB$. Из подобия треугольников $AC'C$ и $AC_1B_1$ следует выполнимость равенства

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{C'C_1}{AC_1}. \qquad (1)$$

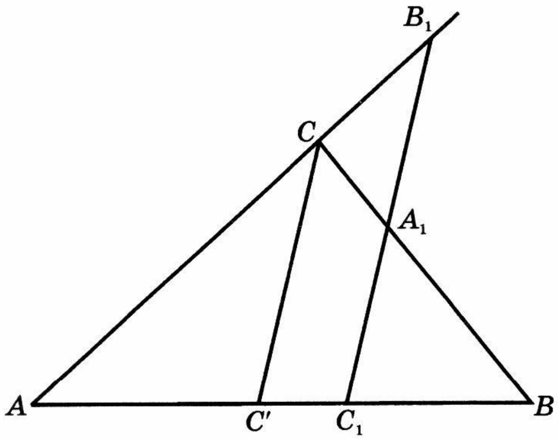


**Рис. 25**

Аналогично, из подобия треугольников $BC'C$ и $BC_1A_1$ следует выполнимость равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{C_1C'}. \qquad (2)$$

Перемножая равенства (1) и (2), получим равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC_1}{AC_1},$$

из которого следует требуемое равенство (*).

Докажем обратное. Пусть на сторонах $AB$, $BC$ и продолжении стороны $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$, для которых выполняется равенство (*). Прямая $A_1B_1$ пересекает прямую $AB$ в точке $C'$. По доказанному, выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек $C'$ и $C_1$, и, значит, точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ принадлежат одной прямой.

Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевой.

**Теорема (Чевы).** Пусть на сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

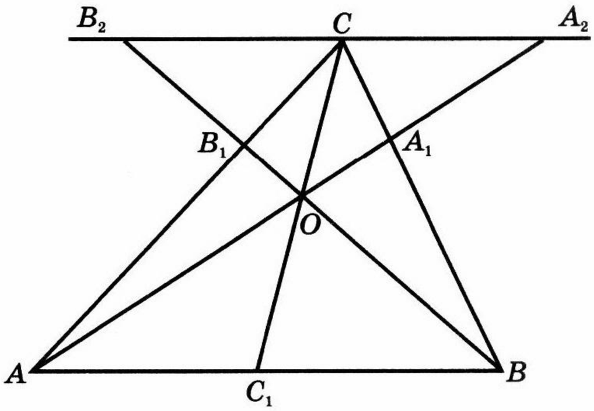


Рис. 26

**Доказательство.** Предположим, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $O$ (рис. 26). Через вершину $C$ треугольника $ABC$ проведем прямую, параллельную $AB$, и ее точки пересечения с прямыми $AA_1$, $BB_1$ обозначим соответственно $A_2$, $B_2$. Из подобия треугольников $CB_2B_1$ и $ABB_1$ имеем равенство

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB_2}{AB}. \qquad (1)$$

Аналогично из подобия треугольников $BAA_1$ и $CA_2A_1$ имеем равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{CA_2}. \qquad (2)$$

Далее, из подобия треугольников $BC_1O$ и $B_2CO$, $AC_1O$ и $A_2CO$ имеем $\frac{CB_2}{C_1B} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_2}{AC_1}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_2}{CB_2}. \qquad (3)$$

Перемножая равенства (1), (2) и (3), получим требуемое равенство (*).

Докажем обратное. Пусть для точек $A_1$, $B_1$, $C_1$, взятых на соответствующих сторонах треугольника $ABC$, выполняется равенство (*). Обозначим точку пересечения прямых $AA_1$ и $BB_1$ через $O$ и точку пересечения прямых $CO$ и $AB$ — через $C'$. Тогда на основании доказанного имеет место равенство

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая равенство (*), получим равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует совпадение точек $C'$ и $C_1$, и, значит, прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Заметим, что из этой теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Воспользуемся теоремой Чевы для установления еще одной замечательной точки треугольника.

**Т е о р е м а.** Прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергона.

**Доказательство.** Пусть окружность касается сторон треугольника $ABC$ соответственно в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, и, значит, прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

## Задачи

**1.** Точка $C_1$ делит сторону $AB$ треугольника $ABC$ в отношении $2 : 1$. Точка $B_1$ лежит на продолжении стороны $AC$ и $AC = CB$. В каком отношении делит прямая $B_1C_1$ сторону $BC$?

**2.** Точки $A_1$ и $B_1$ лежат соответственно на сторонах $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ и делят их в отношениях $3 : 1$ и $1 : 2$. Найдите отношения, в которых делятся отрезки $AA_1$, $BB_1$ их точкой пересечения.

**3.** Точки $C_1$ и $A_1$ делят стороны $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ в отношении $1 : 2$. Прямые $CC_1$ и $AA_1$ пересекаются в точке $O$. Найдите отношение, в котором прямая $BO$ делит сторону $AC$.

**4.** На продолжениях сторон $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите отношение, в котором прямая $AB_1$ делит сторону $A_1C_1$ треугольника $A_1B_1C_1$.

**5.** Точки $A_1$ и $B_1$ делят стороны $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ в отношениях $2 : 1$ и $1 : 2$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $ABC$ равна 1. Найдите площадь треугольника $OBC$.

**6.** На медиане $CC_1$ треугольника $ABC$ взята точка $M$. Прямые $AM$ и $BM$ пересекают стороны треугольника соответственно в точках $A_1$ и $B_1$. Докажите, что прямые $AB$ и $A_1B_1$ параллельны.

**7.** Используя теорему Чевы, докажите, что: а) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; б) высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

**8.** С помощью теоремы Менелая докажите, что медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

**9.** Отрезок $MN$, соединяющий середины сторон $AD$ и $BC$ четырехугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, одно из оснований $AB$ или $CD$ которой вдвое больше другого.

**10.** Окружность называется ***вневписанной*** в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

**11.** Пусть на сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ так, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

**12.** Пусть на сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ так, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что выполняется равенство

$$\frac{OA_1}{A_1A} + \frac{OB_1}{B_1B} + \frac{OC_1}{C_1C} = 1.$$

## 5. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

В основном курсе геометрии доказывалось, что около всякого треугольника можно описать окружность и во всякий треугольник можно вписать окружность. Оказывается, для четырехугольников это уже не имеет места.

**Теорема 1.** Около четырехугольника можно описать окружность, тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

**Доказательство.** Пусть $ABCD$ — четырехугольник, около которого описана окружность (рис. 27, а). Докажем, что $\angle B + \angle D = 180°$. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг $ADC$ и $ABC$, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме измеряются половиной дуги окружности, т. е. их сумма равна 180°.

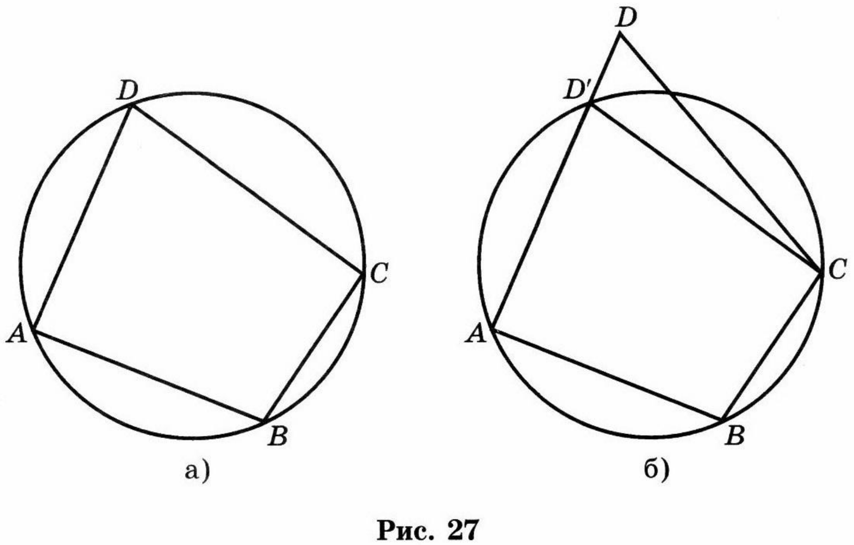


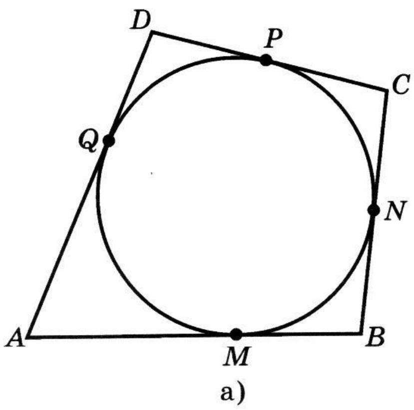

**Рис. 27**

Обратно, пусть в четырехугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна $180°$. Через вершины $A$, $B$, $C$ проведем окружность. Предположим, что эта окружность не проходит через вершину $D$ (рис. 27, б). Обозначим точку пересечения окружности с прямой $AD$ через $D'$. Тогда четырехугольник $ABCD'$ вписан в окружность, и, следовательно, $\angle B + \angle D' = 180°$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180°$. Поэтому $\angle D = \angle D'$, что невозможно, так как прямые $DC$ и $D'C$ не являются параллельными. Полученное противоречие показывает, что окружность, проходящая через точки $A$, $B$ и $C$, должна пройти и через точку $D$.

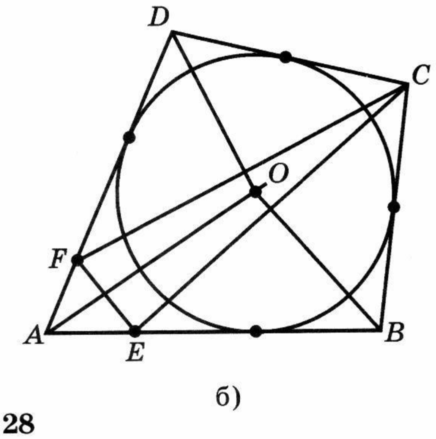
**Теорема 2.** В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

**Доказательство.** Пусть $ABCD$ — четырехугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках $M$, $N$, $P$, $Q$ (рис. 28, а). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Поэтому $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = AD + BC$.

Обратно, пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Покажем, что в него можно вписать окружность. Для этого достаточно проверить, что биссектрисы углов этого четырехугольника пересекаются в одной точке. Эта точка будет равноудалена от всех сторон четырехугольника и, следовательно, будет центром искомой вписанной окружности. Если в данном четырехугольнике выполняется равенство $AB = BC$, то этот четырехугольник — ромб. Ясно, что биссектрисы углов ромба пересекаются в одной точке — точке пересечения его диагоналей. Пусть $AB \neq BC$. Предположим, для определенности $AB > BC$ (рис. 28, б). Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB - BC = AD - CD$. Возьмем на $AB$ точку $E$ так, что $BE = BC$. Тогда $AE = AB - BC$. Возьмем на $AD$ точку $F$ так, что $DF = DC$. Тогда $AF = AD - CD$. Следовательно, $AE = AF$.



а)



б)

**Рис. 28**

Треугольники $AEF$, $BCE$, $CDF$ — равнобедренные. Поэтому биссектрисы углов $A$, $B$, $D$ являются серединными перпендикулярами к отрезкам $EF$, $EC$, $CF$. Следовательно, они пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника $EFC$. Эта точка будет равноудалена от всех сторон исходного четырехугольника, т. е. будет искомым центром вписанной окружности.

**Теорема (Птолемея).** Если четырехугольник вписан в окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

**Доказательство.** Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис 29). Докажем, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Возьмем на диагонали $BD$ точку $E$ так, чтобы $\angle ECD = \angle BCA$. Треугольники $ABC$ и $DEC$ подобны, и, значит, $CD : ED = CA : AB$. Следовательно, $AB \cdot CD = AC \cdot ED$. Аналогично, треугольники $BCE$ и $ACD$ подобны, и, значит, $BC : BE = AC : AD$. Следовательно, $BC \cdot AD = AC \cdot BE$. Складывая полученные равенства, имеем $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot ED + AC \cdot BE = AC \cdot BD$. Что и требовалось доказать.

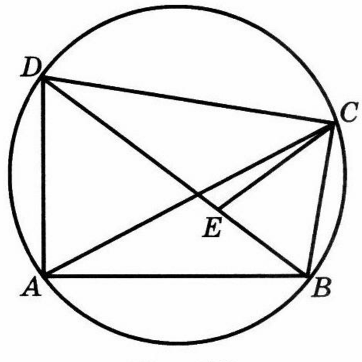



**Рис. 29**

## Задачи

**1.** Можно ли описать окружность около: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба?

**2.** Приведите примеры четырехугольников, около которых нельзя описать окружность.

**3.** Можно ли вписать окружность в: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб?

**4.** Какой вид имеет четырехугольник, если центр вписанной в него окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей?

**5.** Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы?

**6.** Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны?

**7.** Два равнобедренных треугольника имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Можно ли в образованный ими выпуклый четырехугольник вписать окружность?

**8.** Докажите, что биссектрисы углов любого четырехугольника при пересечении образуют четырехугольник, который может быть вписан в окружность.

**9.** Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1 : 3. Определите углы треугольника.

**10.** Найдите угол $C$ треугольника $ABC$, если вершина $A$ находится на одинаковом расстоянии от центров вневписанных окружностей, касающихся сторон $AB$ и $BC$.

**11.** Определите углы треугольника, если центры вписанной и описанной около него окружностей симметричны относительно одной из его сторон.

**12.** Докажите, что если разность между суммой двух сторон треугольника и его третьей стороной равна диаметру вписанной окружности, то один из углов треугольника — прямой.

***13.** Выразите диагонали $e$, $f$ вписанного четырехугольника через его стороны $a$, $b$, $c$, $d$.

***14.** По углам $\alpha$, $\beta$ между противоположными сторонами вписанного четырехугольника найдите углы этого четырехугольника.

***15.** Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, описанного около окружности, проходит через центр этой окружности.

## 6. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Следующая теорема была доказана Леонардом Эйлером в 1752 году и положила начало нескольким направлениям в математике: теории графов, топологии и другим.

**Теорема.** Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

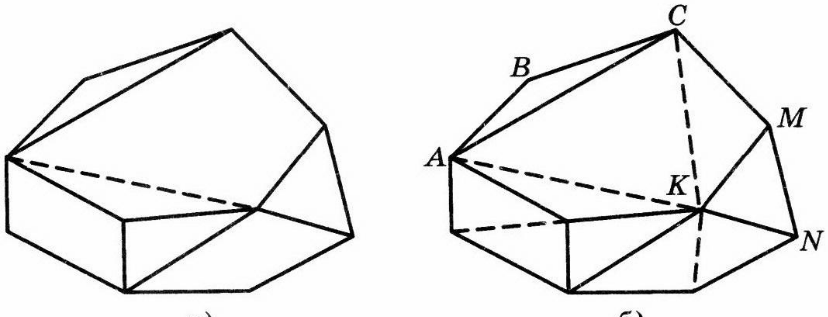
$$В - Р + Г = 1, \qquad (*)$$

где В — общее число вершин, Р — общее число сторон (ребер), Г — число многоугольников (граней).

**Доказательство.** Докажем, что соотношение (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 30, а). Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, Р + 1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем

$$В - (Р + 1) + (Г + 1) = В - Р + Г.$$

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 30, б). Для этого будем




а) б)

**Рис. 30**

последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника $ABC$ требуется снять два ребра, в нашем случае $AB$ и $BC$;

б) для удаления треугольника $MKN$ требуется снять одно ребро, в нашем случае $MN$.

В обоих случаях соотношение (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из В − 1 вершин, Р − 2 ребер и Г − 1 многоугольника:

$$(\text{В} - 1) - (\text{Р} + 2) + (\text{Г} - 1) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г}.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения В = 3, Р = 3, Г = 1 и, следовательно, В − Р + Г = 1. Значит, соотношение (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).

Заметим, что соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменится.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу о трех домиках и трех колодцах, также связанную с именем Эйлера.

**Задача.** Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу (рис. 31)?

**Решение.** Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы — точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 31). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

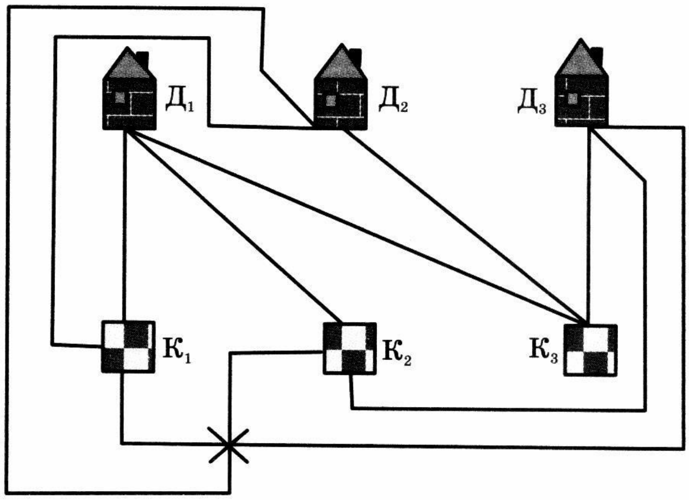



**Рис. 31**

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера В − Р + Г = 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну — внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В − Р + Г = 2, причем В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет, по крайней мере, четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

## Задачи

**1.** Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого четырехугольника на выпуклые четырехугольники.

**2.** Докажите, что для произвольного разбиения четырехугольника на четырехугольники выполняется равенство В − Г = 3.

**3.** Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого пятиугольника на выпуклые пятиугольники.

**4.** Укажите какое-нибудь разбиение треугольника на семиугольники.

**5.** Внутри $n$-угольника взяты $m$ точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.

**6.** Докажите, что для любого разбиения $n$-угольника на $m$-угольники выполняется равенство $2В + (2 - m)Г = n + 2$.

**7.** В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно В – Р + Г для этого разбиения?

**8.** Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

**9.** Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

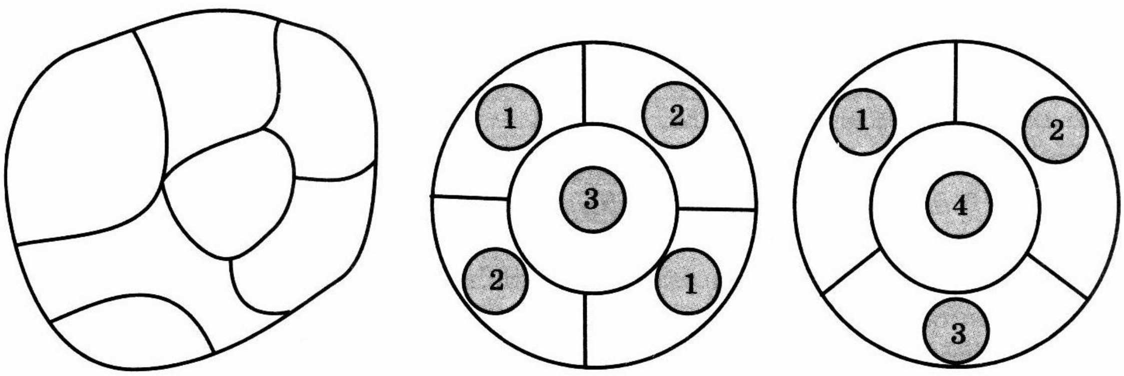
**10.** Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно: а) 6; б) 12; в) 15? Нарисуйте такие разбиения.

## 7. ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Еще одной проблемой, связанной с теоремой Эйлера, является проблема четырех красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том, чтобы раскрасить данную географическую карту (рис. 32, а) так, чтобы пограничные страны были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

На рисунке 32, б изображена карта, для раскраски которой требуется три цвета. На рисунке 32, в изображена карта, для раскраски которой трех цветов недостаточно и требуется четыре цвета.




а) б) в)

**Рис. 32**

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырех красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя цветами, выдвинул гипотезу о том, что этого количества цветов достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал ее широкому распространению.

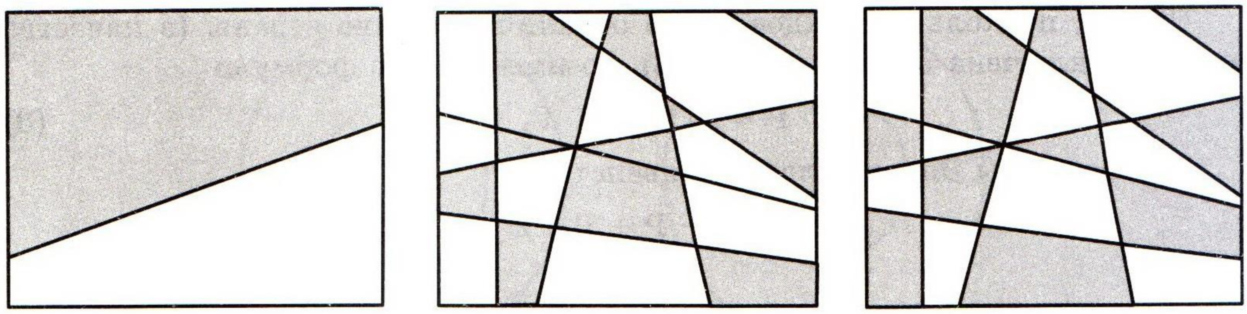
Однако годом рождения проблемы четырех красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879). Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А. Кэли четко сформулировал поставленную задачу: «Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками». Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Однако долгое время проблема четырех красок не поддавалась решению. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, на которой изображено не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы существенно используются компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений. В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: «Нет», — что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок.

**Теорема.** (О двух красках.) Всякую карту, образованную прямыми, можно раскрасить в два цвета.

**Доказательство.** Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета (рис. 33, а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой также может быть раскрашена в два цвета (рис. 33, б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой



а) б) в)

**Рис. 33**

области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 33, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.

Аналогично, любую карту, образованную окружностями, можно раскрасить в два цвета.

**Теорема*.** (О пяти красках.) Любую карту на плоскости можно раскрасить пятью красками.

**Доказательство.** Пусть дана карта на плоскости. Как и в случае задачи о трех домиках и трех колодцах, добавим к карте еще одну страну — внешнюю область. Ясно, что если мы сможем раскрасить полученную карту, то, убрав внешнюю область, получим раскраску исходной карты. Дополнительно можно предполагать, что в каждой вершине карты сходятся ровно три ребра. Действительно, если в каких-нибудь вершинах сходится большее число ребер, то проведем небольшие окружности с центрами в этих вершинах и образуем новую карту, в которой вместо вершин появятся новые страны в форме кругов. Причем число ребер, сходящихся в каждой вершине такой карты, уже будет равно трем. Если удастся раскрасить эту новую карту, то, убрав страны в форме кругов, мы получим раскраску исходной карты.

Используя теорему Эйлера, покажем, что для карты, в вершинах которой сходится по три ребра, существует страна с числом ребер, меньшим или равным пяти.

Обозначим через $Г_n$ число стран в такой карте с числом ребер, равным $n$. Тогда общее число стран Г выражается формулой

$$Г = Г_2 + Г_3 + \dots . \qquad (1)$$

Обозначим через Р общее число ребер и через В общее число вершин в карте. Тогда, поскольку у каждого ребра две вершины и в каждой вершине сходятся три ребра, имеет место формула

$$2 \cdot Р = 3 \cdot В. \qquad (2)$$

Далее, поскольку каждое ребро ограничивает две страны (в качестве страны включена внешняя область), то имеет место формула

$$2 \cdot Р = 2 \cdot Г_2 + 3 \cdot Г_3 + \dots . \quad (3)$$

Из формулы Эйлера следует равенство

$$В - Р + Г = 2$$

или

$$6 \cdot В - 6 \cdot Р + 6 \cdot Г = 12. \quad (4)$$

Выразим В через Р по формуле (2), Р через $Г_2$, $Г_3$, ... по формуле (3) и Г через $Г_2$, $Г_3$, ... по формуле (1). Подставляя эти выражения в формулу (4), получим равенство

$$6 \cdot Г_2 + 6 \cdot Г_3 + \dots - (2 \cdot Г_2 + 3 \cdot Г_3 + \dots) = 12$$

или

$$4 \cdot Г_2 + 3 \cdot Г_3 + 2 \cdot Г_4 + Г_5 + 0 \cdot Г_6 - Г_7 - \dots = 12.$$

Так как вся сумма в левой части последнего равенства положительна, а все слагаемые в ней, начиная с шестого, отрицательны, то среди чисел $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$, $Г_5$ обязательно должно найтись хотя бы одно, отличное от нуля. Следовательно, существует страна с числом ребер, меньшим или равным пяти.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы, которое будем проводить индукцией по числу стран.

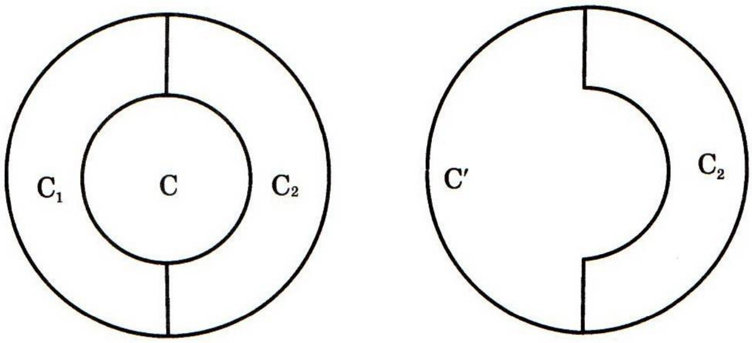
Если карта состоит из одной страны, то очевидно, для ее раскраски требуется одна краска.

Предположим, мы доказали, что любую карту, состоящую не более чем из $n$ стран, можно раскрасить пятью красками. Рассмотрим карту из $n + 1$ страны, и покажем, что ее также можно раскрасить пятью красками.

В силу сказанного выше, можно предполагать, что в каждой вершине карты сходится три ребра и существует страна С с числом ребер, меньшим или равным пяти. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Страна С имеет два ребра, граничащие с двумя странами $С_1$ и $С_2$ (рис. 34, а).

Удалим общую границу между странами С и $С_1$. Получим карту, в которой вместо стран С и $С_1$ имеется одна страна $С'$ (рис. 34, б). По предположению индукции эту карту можно раскрасить пятью красками. Если при этом страна $С'$ покрашена краской № 1, а страна $С_2$ — краской № 2, то восстанавливая прежнюю границу и перекрашивая в исходной карте страну С любой из оставшихся красок — № 3, № 4 или № 5, получим требуемую раскраску нашей карты.

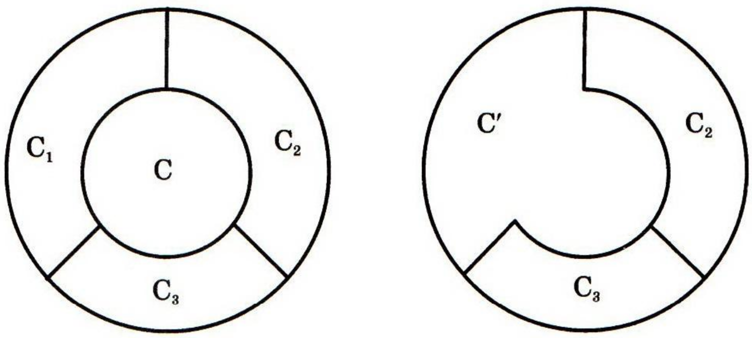



а) б)

**Рис. 34**

Случай 2. Страна $C$ имеет три ребра, граничащие с тремя странами.

Доказательство этого случая аналогично предыдущему и опирается на рисунки 35, а, б.

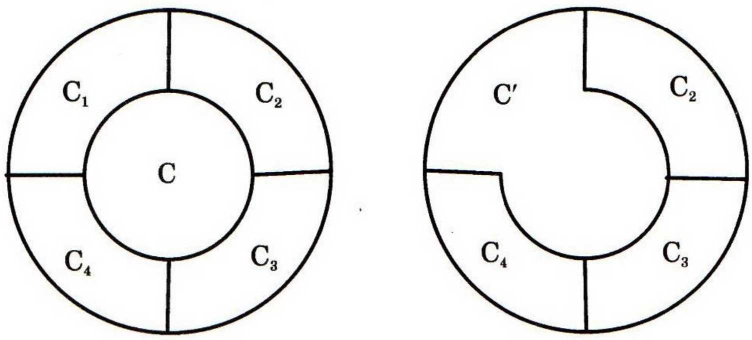



а) б)

**Рис. 35**

Случай 3. Страна $C$ имеет четыре ребра, граничащие с четырьмя странами.

Если разные ребра страны $C$ являются границами разных стран, то поступаем так же, как и в предыдущем случае (рис. 36, а, б). Однако может случиться, что два противоположных ребра страны $C$ являются



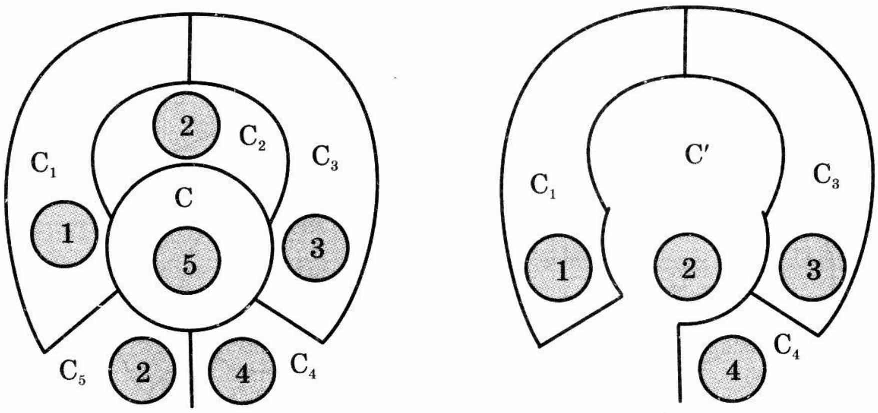

а) б)

**Рис. 36**

границами одной и той же страны. В этом случае два соседних ребра не могут быть границами одной страны, и, следовательно, одно из этих ребер можно удалить и далее поступать как и в предыдущих случаях.

Случай 4. Страна С имеет пять ребер. Граничащие с С страны обозначим соответственно $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$.

Среди этих стран всегда найдутся две, не граничащие друг с другом (рис. 37, а). Действительно, если страны $C_1$ и $C_3$ граничат друг с другом, то страна $C_2$ не может граничить ни с $C_4$, ни с $C_5$. Удалим два ребра страны С, граничащие с такими странами (рис. 37, б). Полученная карта будет содержать $n - 2$ страны. Если она раскрашена, как показано на рисунке 37, б, то исходную карту раскрашиваем согласно рисунку 37, а.




а) б)

**Рис. 37**

Таким образом, мы рассмотрели все случаи и в каждом из них убедились в возможности раскраски карты. Что и завершает доказательство.

Для раскрашивания карт специального вида может требоваться меньшее число красок.

## Задачи

**1.** Раскрасьте карту, изображенную на рисунке 32, а. Какое минимальное число красок для этого потребуется?

**2.** Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими $n$ перегородок (рис. 32, б, в)?

**3.** Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета.

**4.** Исследуйте вопрос о том, какие свойства прямых и окружностей используются при раскрашивании карт двумя цветами. Можно ли раскрасить двумя цветами карту, образованную: а) параболами; б) эллипсами?

**5.** Докажите, что если карту, заполняющую всю плоскость, можно раскрасить в два цвета, то она имеет вершины только четного индекса.

**6.** Используя то, что любую карту на плоскости можно раскрасить в четыре цвета, решите задачу известного астронома и геометра Августа Мёбиуса, сформулированную им в 1840 году: на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу.

**7.** Какое наибольшее число клеток в квадрате $n \times n$, нарисованном на бумаге в клетку, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате $2 \times 2$ не оказалось трех закрашенных клеток?

**8.** Можно ли закрасить на бумаге в клетку 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона.)

**9.** На рисунке 38 изображена карта, раскрашенная в два цвета, полученная разбиением шестиугольника на треугольники. Причем треугольники, примыкающие к сторонам шестиугольника, окрашены в один цвет. Докажите, что карту, полученную разбиением 10-угольника на треугольники, нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, примыкающие к сторонам 10-угольника были окрашены в один цвет.

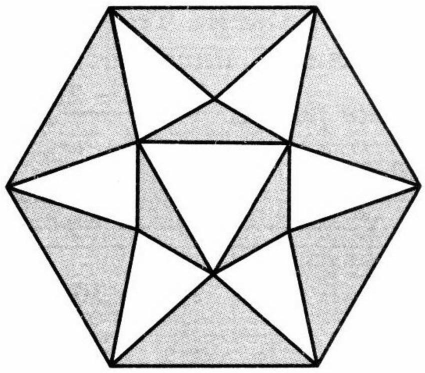


**Рис. 38**

**10.** Сколько красок потребуется для раскраски поверхности куба, при которой соседние грани имели бы разные цвета?

## 8. ПАРКЕТЫ

***Паркетом*** называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

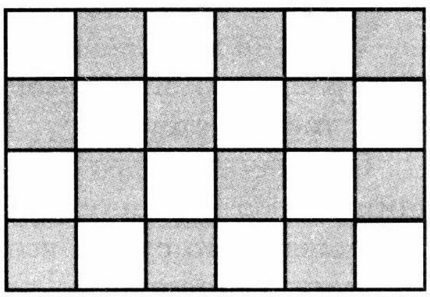


**Рис. 39**

Примеры правильных паркетов дает заполнение плоскости:

а) квадратами (рис. 39);

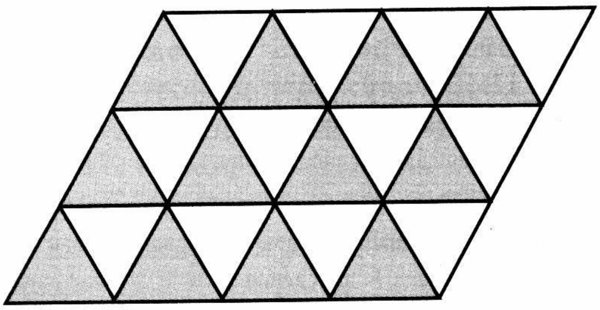


Рис. 40

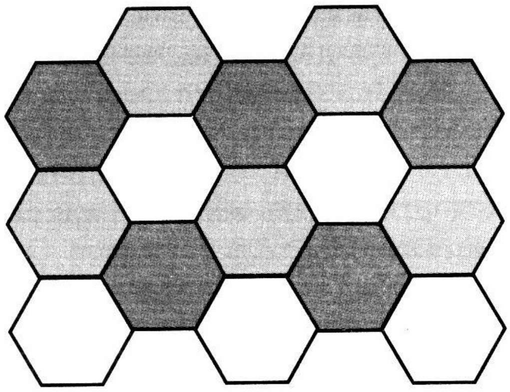


Рис. 41

б) равносторонними треугольниками (рис. 40);

в) правильными шестиугольниками (рис. 41).

Докажем, что другими равными правильными многоугольниками заполнить плоскость нельзя. Действительно, углы правильного $n$-угольника равны $\frac{180°(n-2)}{n}$. Заполним таблицу, состоящую из углов $\alpha$ правильных $n$-угольников.

| $N$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 60° | 90° | 108° | 120° | $128\frac{4}{7}°$ | 135° | 140° | 144° | $147\frac{3}{11}°$ | 150° |

Если в одной вершине паркета сходится $m$ правильных $n$-угольников, то должно выполняться равенство

$$\frac{m \cdot 180°(n-2)}{n} = 360°,$$

откуда $m = \frac{2n}{n-2}$.

Возможными допустимыми значениями $n$ являются 3, 4 и 6. При остальных значениях $n$ число $m$ оказывается дробным. В частности, нельзя заполнить плоскость правильными пятиугольниками.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, разрешив использовать в них правильные многоугольники с различным числом сторон.

Обозначим через $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ . Учитывая, что сумма всех таких углов должна быть равна 360°, составим таблицу, содержащую возможные наборы углов и укажем соответствующие паркеты.

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_1 + \alpha_2 + ... = 360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60° | 60° | 60° | 60° | 60° | 60° | Паркет из 3-в (рис. 40) |
| 60° | 60° | 60° | 60° | 120° | | Паркет из 3-в и 6-в (рис. 42) |
| 60° | 60° | 60° | 90° | 90° | | Два паркета из 3-в и 4-в (рис. 43, 44) |
| 60° | 60° | 90° | 150° | | | Нет паркета |
| 60° | 60° | 120° | 120° | | | Паркет из 3-в и 6-в (рис. 45) |
| 60° | 90° | 90° | 120° | | | Паркет из 3-в, 4-в и 6-в (рис. 46) |
| 60° | 150° | 150° | | | | Паркет из 3-в и 12-в (рис. 47) |
| 90° | 90° | 90° | 90° | | | Паркет из квадратов (рис. 39) |
| 90° | 120° | 150° | | | | Паркет из 4-в, 6-в и 12-в (рис. 48) |
| 90° | 135° | 135° | | | | Паркет из 3-в и 8-в (рис. 49) |
| 120° | 120° | 120° | | | | Паркет из 6-в (рис. 41) |

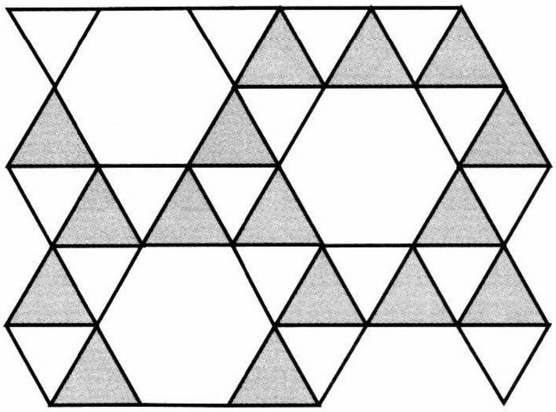


**Рис. 42**

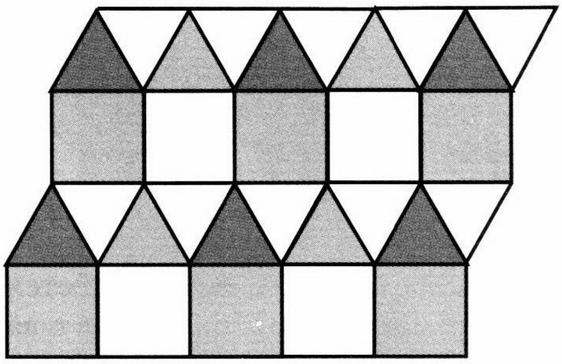


**Рис. 43**

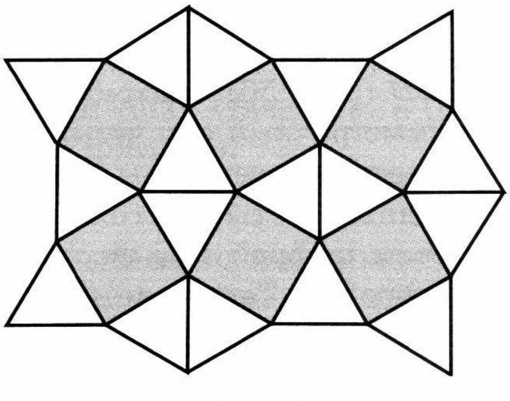


**Рис. 44**

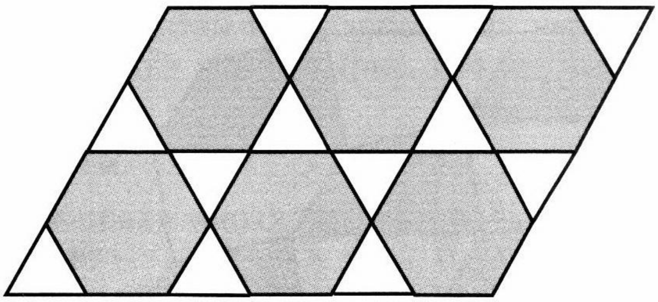


**Рис. 45**

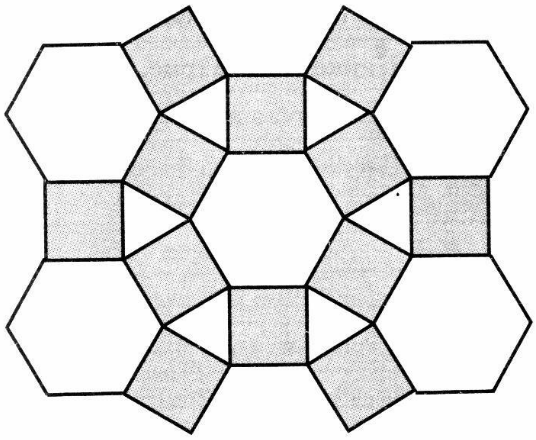


Рис. 46

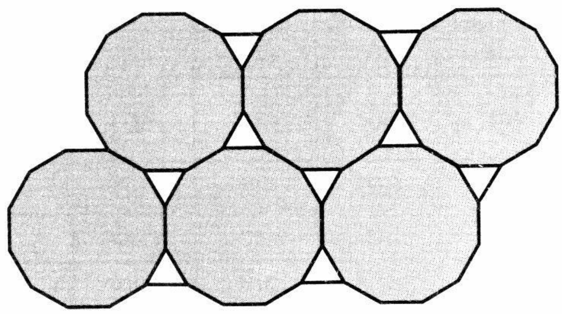


Рис. 47

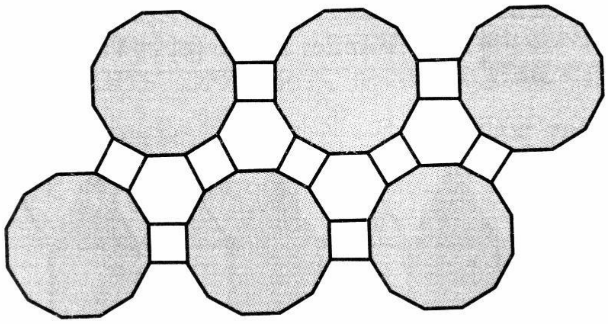


Рис. 48

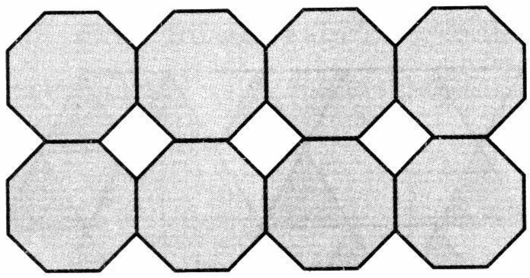


Рис. 49

Таким образом, всего имеется 11 типов правильных паркетов.

Рассмотрим теперь вопрос о заполнении плоскости неправильными равными многоугольниками.

**Теорема.** Для любого четырехугольника существует паркет, состоящий из четырехугольников, равных исходному. Иначе говоря, четырехугольником произвольной формы можно заполнить всю плоскость.

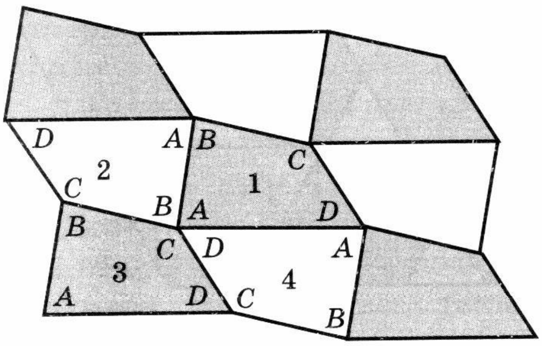
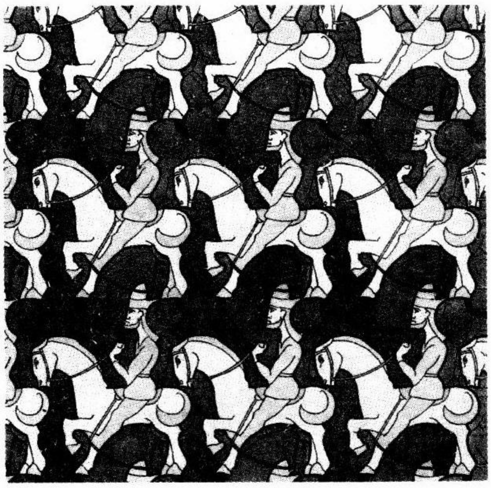



Рис. 50

**Доказательство.** Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 50). Рассмотрим центрально-симметричный ему четырехугольник относительно середины стороны $AB$. Исходный четырехугольник $ABCD$ обозначим цифрой 1, а симметричный — цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны $BC$. Полученный четырехугольник обозначим



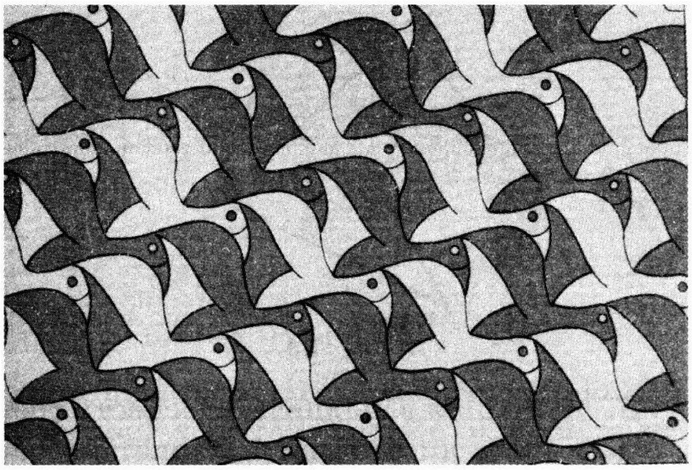


Рис. 51

Рис. 52

цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны $CD$. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами $A$, $B$, $C$ и $D$. А так как сумма углов четырехугольника равна $360°$, то эти четырехугольники заполнят часть плоскости вокруг общей вершины. Такое же построение можно провести вокруг каждой новой вершины, что и даст искомое заполнение плоскости.

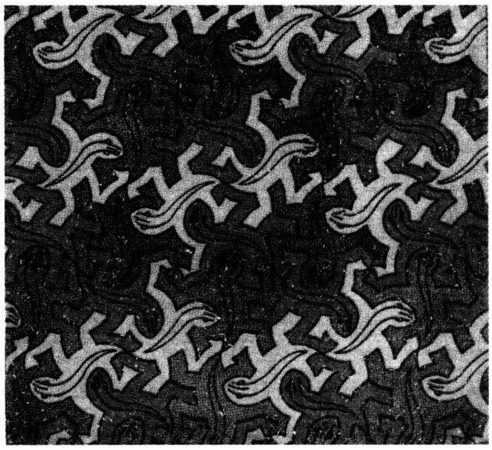


Рис. 53

Заметим, что четырехугольники, закрашенные одним цветом (рис. 50), получаются друг из друга параллельным переносом.

Заполнение плоскости может быть произведено не только многоугольниками, но и фигурами более сложного вида. Повторяющиеся равные фигуры являются основой составления орнаментов, с давних времен привлекавших к себе внимание людей. Знаменитый голландский художник Мариус Эшер (1898—1972) посвятил орнаментам несколько своих картин. Среди них: «Всадники» (рис. 51), «Летящие птицы» (рис. 52), «Ящерицы» (рис. 53).

## Задачи

**1.** Можно ли сложить паркет из правильных: а) пятиугольников; б) шестиугольников; в) семиугольников?

**2.** Можно ли сложить паркет из: а) правильных восьмиугольников и квадратов; б) правильных двенадцатиугольников и треугольников; в) правильных десятиугольников и пятиугольников?

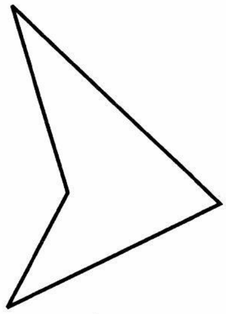


Рис. 54

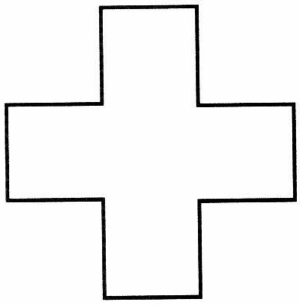


Рис. 55

**3.** Можно ли заполнить плоскость треугольником произвольной формы?

**4.** Можно ли составить паркет из равных невыпуклых четырехугольников?

**5.** Нарисуйте паркет, составленный из четырехугольников, равных четырехугольнику, изображенному на рисунке 54.

**6.** Можно ли составить паркет из равных пятиугольников?

**7.** Докажите, что с помощью центрально-симметричных шестиугольников произвольной формы (даже невыпуклых) можно заполнить плоскость. Приведите пример соответствующего паркета.

**8.** Составьте паркет из греческих крестов (рис. 55).

**9.** Приведите пример невыпуклого семиугольника, которым можно заполнить плоскость.

**10.** Приведите пример невыпуклого восьмиугольника, которым можно заполнить плоскость.

**11.** Два равных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной диагонали, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных четырехугольников можно сложить параллелограмм.

**12.** Выпуклый четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.

**13.** Сколько красок потребуется для раскраски правильных и полуправильных паркетов так, чтобы соседние многоугольники были раскрашены в разные цвета?

## 9. РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ И ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

Две фигуры называются ***равносоставленными***, если они могут быть разложены на одинаковое число попарно равных фигур.

Из свойств площади следует, что равносоставленные фигуры равновелики. В частности, равносоставленные многоугольники равновелики.

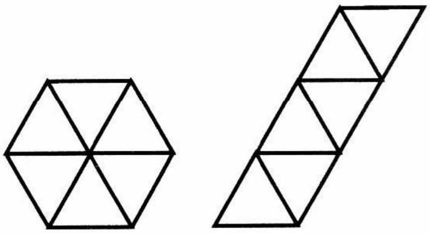


Рис. 56

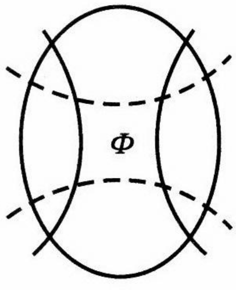



Рис. 57

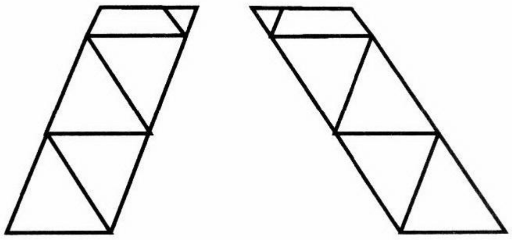


Рис. 58

Например, изображенные на рисунке 56 правильный шестиугольник и параллелограмм — равносоставленные фигуры, так как обе они составлены из шести равных равносторонних треугольников.

Естественно поставить обратный вопрос: всякие ли два равновеликих многоугольника равносоставлены? Утвердительное его решение было получено в XIX веке.

**Теорема.** Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Доказательство этой теоремы будет получено как результат применения нескольких теорем.

**Теорема 1.** Две фигуры, равносоставленые с одной и той же фигурой, равносоставлены.

**Доказательство.** Действительно, пусть фигуры $Ф'$ и $Ф''$ равносоставлены с фигурой $Ф$. Рассмотрим линии, разбивающие фигуру $Ф$ на части, из которых можно составить фигуру $Ф'$, и, кроме того, линии, разбивающие фигуру $Ф$ на части, из которых можно составить фигуру $Ф''$ (рис. 57). Те и другие линии разбивают фигуру $Ф$ на более мелкие части, из которых можно составить как фигуру $Ф'$, так и $Ф''$. Таким образом, фигуры $Ф'$ и $Ф''$ равносоставлены.

**Теорема 2.** Любые два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала два параллелограмма с равными основаниями (рис. 58). По условию они равновелики, значит, имеют равные высоты. Проведем внутри каждого параллелограмма отрезки, параллельные сторонам другого параллелограмма. Тогда оба параллелограмма разобьются на одинаковое число попарно равных треугольников.

Пусть теперь параллелограммы не имеют равных сторон. Построим третий параллелограмм, имеющий с первым одинаковые основание и высоту. Поскольку при этом другую сторону третьего параллелограмма можно выбирать произвольно, сделаем ее равной одной из сторон второго параллелограмма. Тогда третий параллелограмм будет равновелик и с первым, и со вторым, и с каждым из них имеет по равной стороне. Следовательно, он равносоставлен и с первым, и со вторым параллелограммом. В силу теоремы 1, первый и второй параллелограммы равносоставлены.

**Теорема 3.** Любые два равновеликих треугольника равносоставлены.

**Доказательство.** Каждый треугольник, продолжением средней линии, преобразуется в равновеликий ему параллелограмм (рис. 59). Поэтому два равновеликих треугольника преобразуются в два равновеликих параллелограмма. В силу теоремы 2, эти параллелограммы равносоставлены и, следовательно, равносоставлены исходные треугольники.

**Теорема 4.** Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.

**Доказательство.** Рассмотрим многоугольник и одну из его вершин перенесем параллельно диагонали на продолжение одной из сторон (рис. 60). При этом исходный многоугольник преобразуется в равновеликий многоугольник с числом сторон, на единицу меньшим. Имея в виду, что мы заменили один треугольник другим — равновеликим, а остальная часть осталась неизменной, получим, что новый многоугольник будет равносоставлен с исходным. Продолжая этот процесс, мы превратим исходный многоугольник в равносоставленный с ним треугольник.

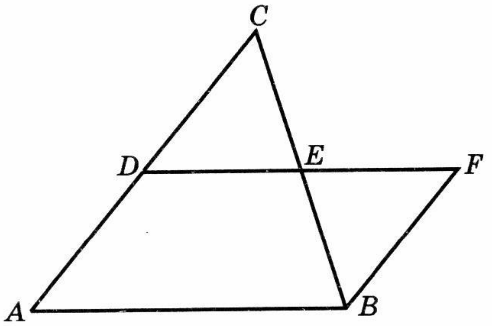



**Рис. 59**

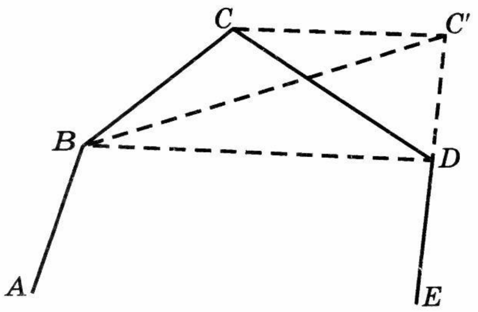



**Рис. 60**

Приступим теперь к доказательству теоремы. Пусть $M'$ и $M''$ — равновеликие многоугольники. Рассмотрим равносоставленные с ними треугольники $T'$ и $T''$ соответственно. Эти треугольники равновелики, а следовательно, равносоставлены. Значит, равносоставлены и исходные многоугольники $M'$ и $M''$.

Доказанная теорема позволяет в принципе разрезать один из двух равновеликих многоугольников на части и сложить из них другой многоугольник. Однако это приводит к очень большому числу мелких многоугольников. В конкретных примерах, как правило, можно указать гораздо более рациональный способ разрезания.

В качестве применения метода разрезания рассмотрим доказательство теоремы Пифагора. С точки зрения площадей ее можно переформулировать в следующем виде.

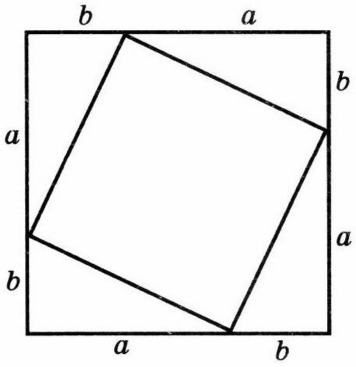



**Рис. 61**

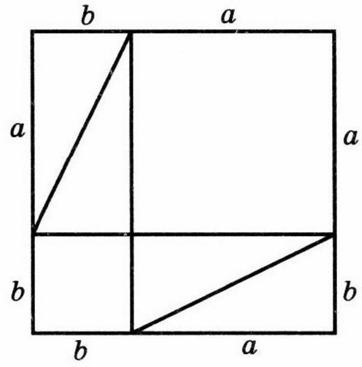



**Рис. 62**

**Теорема.** Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Доказательство следует из рассмотрения двух равных квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника $ABC$, в которых проведены отрезки, как показано на рисунках 61, 62. В первом случае квадрат разобьется на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьется на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному.

## Задачи

**1.** Параллелограмм разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.

**2.** Треугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

**3.** Треугольник разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

**4.** Трапецию разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

**5.** Трапецию разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

**6.** Данный прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.

**7.** Прямоугольник со сторонами 4 и 9 разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

**8.** Правильный шестиугольник разрежьте на две части, из которых можно составить параллелограмм.

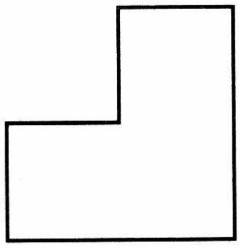


Рис. 63

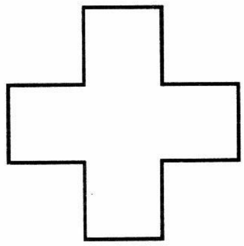


Рис. 64

**9.** Разрежьте изображенную на рисунке 63 фигуру, составленную из трех квадратов, на четыре равные части.

**10.** Греческий крест (рис. 64) разрежьте на несколько частей и составьте из них квадрат.

**11.** Шестиугольник, изображенный на рисунке 65, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.

**12.** Используя разрезания, докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

**13.** Стороны $AB$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на $n$ равных частей, $AD$ и $BC$ — на $m$ равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 66. Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

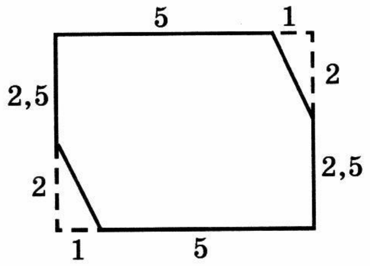



Рис. 65

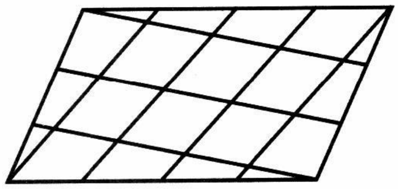


Рис. 66

***14.** Докажите, что никакой выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

***15.** Докажите, что всякий выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы.

## 10. МНОГОУГОЛЬНИКИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В основном курсе геометрии показывалось, что прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании многоугольников и его использовании при решении задач оптимального управления.

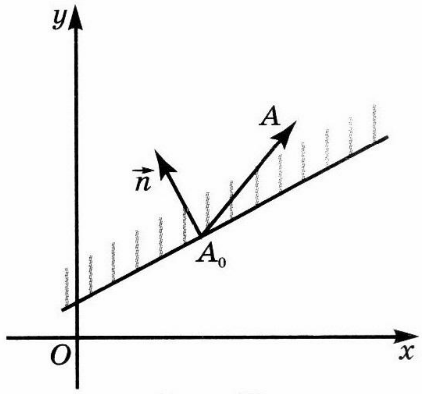


**Рис. 67**

Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$ и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Ее вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты $(a, b)$ и определяет полуплоскость (рис. 67). Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°, т. е. в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т. е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = a(x - x_0) + b(y - y_0) \geqslant 0$. Но $-ax_0 - by_0 = c$. Следовательно, точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax + by + c \geqslant 0$.

Аналогично, точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости, по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \leqslant 0$.

Для того чтобы определить, какой из двух полуплоскостей принадлежит точка $A(x, y)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения прямой и найти знак получившегося значения.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Действительно, пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_nx + b_ny + c_n = 0.$$

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1 + c_1 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многоугольник.

Например, неравенства $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный квадрат (рис. 68).

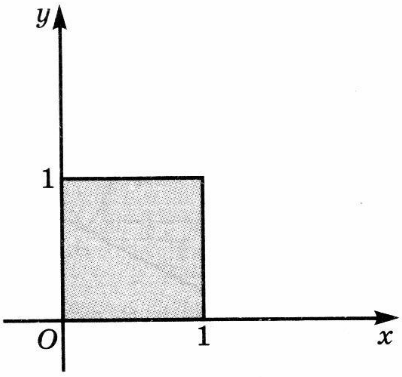



**Рис. 68**

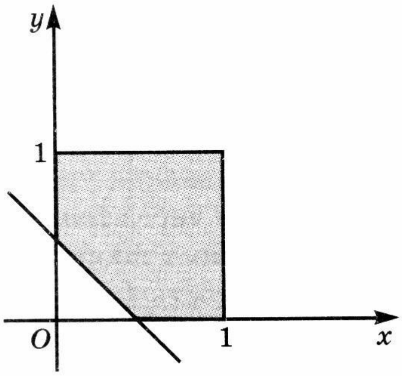



**Рис. 69**

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y - \frac{1}{2} \geqslant 0,$$

то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 69).

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые задачи оптимизации.

Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

**З а д а ч а.** Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

*Таблица 1*

| Наличие сырья (т) на складе | | Потребность в сырье (т) на заводе | | |
|---|---|---|---|---|
| $С_1$ | $С_2$ | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| 20 | 25 | 10 | 15 | 20 |

*Таблица 2*

| Склад | Расстояние (км) от склада до завода | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | 5 | 7 | 10 |
| $С_2$ | 3 | 4 | 6 |

**Решение.** В первую очередь проанализируем условие задачи и переведем его на язык математики, т. е. составим математическую модель. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим через $x$ и $y$ соответственно. Тогда на третий завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y$ (т) сырья, а со второго склада на заводы нужно будет перевезти соответственно $10 - x$, $15 - y$, $x + y$ (т) сырья. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

*Таблица 3*

| Склад | Количество сырья (т), перевезенное на заводы | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | $x$ | $y$ | $20 - x - y$ |
| $С_2$ | $10 - x$ | $15 - y$ | $x + y$ |

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 10 - x \geqslant 0, \\ 15 - y \geqslant 0, \\ 20 - x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство является следствием двух первых и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник $OABCD$, изображенный на рисунке 70. Назовем его ***многоугольником ограничений***.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой:

$$5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) + 4(15 - y) + 6(x + y) =$$
$$= 290 - 2x - y.$$

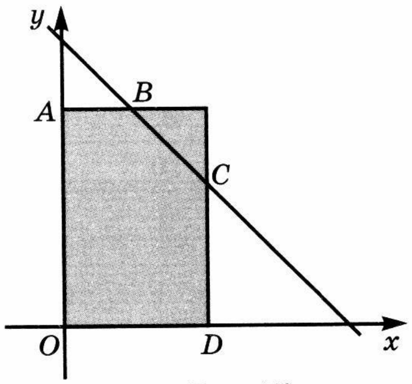


Рис. 70

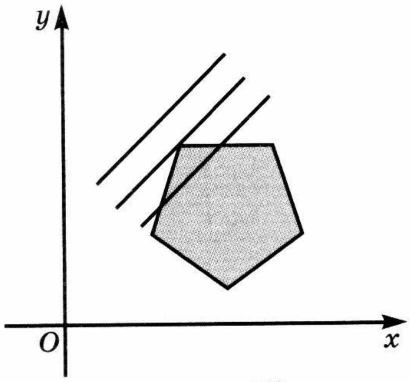


Рис. 71

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 290 - 2x - y$ на многоугольнике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = 2x + y$. Тогда $F_{\min} = 290 - f_{\max}$.

Воспользуемся тем, что свои наименьшее и наибольшее значения линейная функция достигает в вершинах многоугольника ограничений. Это свойство является основополагающим в задачах оптимизации.

Используя геометрические соображения, покажем, например, что линейная функция $ax + by$ ($b > 0$) принимает свое наибольшее значение на многоугольнике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение $c$ функции $ax + by$. Тогда уравнение $ax + by = c$ задает прямую на плоскости, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение $c$. В точках, расположенных выше этой прямой, она принимает значения, большие $c$, а в точках, расположенных ниже этой прямой, — значения, меньшие $c$. Если число $c$ выбрать достаточно большим, то прямая $ax + by = c$ расположится выше многоугольника. Будем опускать эту прямую, уменьшая значения $c$ до тех пор, пока она не коснется многоугольника. Такое касание произойдет при некотором $c_0$ — в какой-нибудь вершине многоугольника (рис. 71) или по какому-нибудь его ребру.

В точках касания линейная функция принимает значение $c_0$, и, поскольку все остальные точки многоугольника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше $c_0$. Таким образом, $c_0$ — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах многоугольника и выбрать из них наибольшее. Сосчитаем значение функции $f = 2x + y$ в вершинах многоугольника ограничений:

$$f(O) = 0,\ f(A) = 15,\ f(B) = 25,\ f(C) = 30,\ f(D) = 20.$$

Таким образом, максимальное значение функции $f$ достигается в точке $C(10, 10)$ и равно 30. Поэтому наименьшее значение функции $F$ достигается в точке $C$ и равно $290 - 30 = 260$. В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно двум и поэтому в процессе ее решения получился многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше двух, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение $n$-мерного пространства с очень большим $n$. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

*Таблица 4*

| Склад | Количество сырья (т), перевезенное на заводы | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | 10 | 10 | 10 |
| $С_2$ | 0 | 5 | 20 |

## Задачи

**1.** Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant 8,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 8,$$
$$x + y \leqslant 12.$$

**2.** Две полуплоскости задаются неравенствами:

$$a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полуплоскостей?

**3.** Определите, какой полуплоскости, $5x + 3y - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - 2 \leqslant 0$, принадлежат точки: а) $A(1, 0)$; б) $B(0, 1)$; в) $C(0, 0)$.

**4.** Какую фигуру задает следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5? \end{cases}$$

**5.** Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant 3,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 5,$$
$$x + y - 6 \geqslant 0.$$

**6.** Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$.

**7.** Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3x + 4y - 48 \leqslant 0, \\ 3x - 4y \geqslant 0, \\ x \geqslant 4,\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0, \\ x - y \geqslant 1, \\ x \leqslant 7,\ y \geqslant 0. \end{cases}$

**8.** Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при условии

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 5x + 3y \leqslant 15, \\ 2x + 6y \leqslant 12, \\ x \leqslant 3,\ y \leqslant 2. \end{cases}$$

**9.** Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ -2 - 2x - y \geqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

**10.** Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 12 руб., а от реализации одного трансформатора второго вида — 10 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

## 11. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО РЕДАКТОРА «ADOBE ILLUSTRATOR»

Данный графический редактор является мощным средством для создания и обработки рисунков. Он обычно используется профессиональными художниками и художественными редакторами. Все рисунки данной книги выполнены с помощью этого редактора.

Рабочее окно этого редактора изображено на рисунке 72. Центральную его часть занимает поле для рисования. Слева находится панель с инструментами,

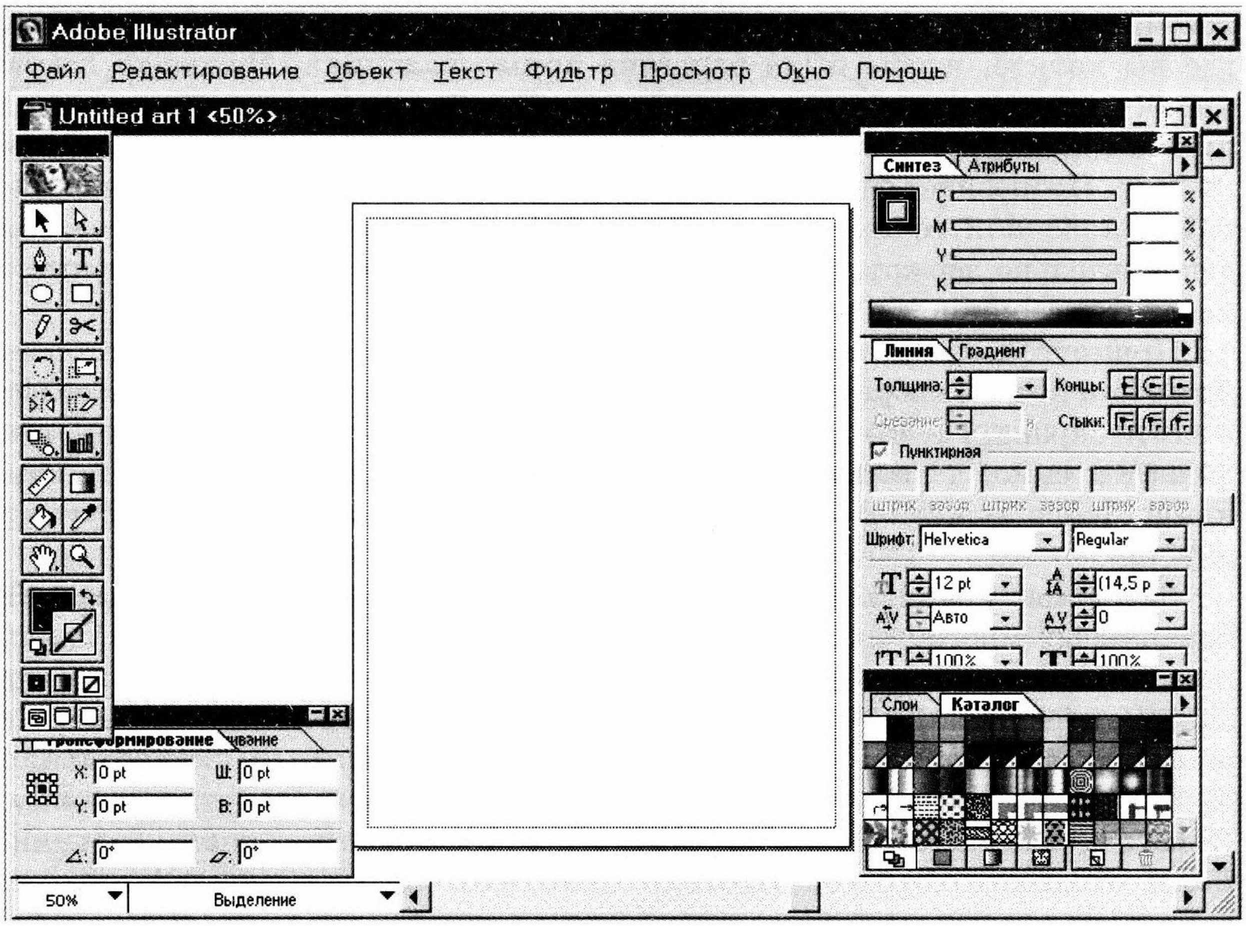



Рис. 72

используемыми при рисовании и редактировании рисунков. Верхнюю строчку экрана занимает меню.

**Рисование ломаных.** Для рисования различных линий служит инструмент ***Перо***, расположенный на квадратике панели инструментов с изображением пера. Сначала выясним, как рисуются прямые линии. В панели инструментов выберите ***Перо***, щелкнув по нему левой кнопкой мыши. Щелкните левой кнопкой в каком-нибудь месте экрана, где вы хотите, чтобы был один из концов отрезка. Переместите указатель в другое место экрана и создайте второй конец отрезка, щелкнув еще раз левой кнопкой. Первая и вторая точка будут соединены отрезком. Продолжая щелкать левой кнопкой в различных точках экрана, можно получать различные ломаные линии. Щелкнув по начальной точке, получим замкнутую ломаную линию.

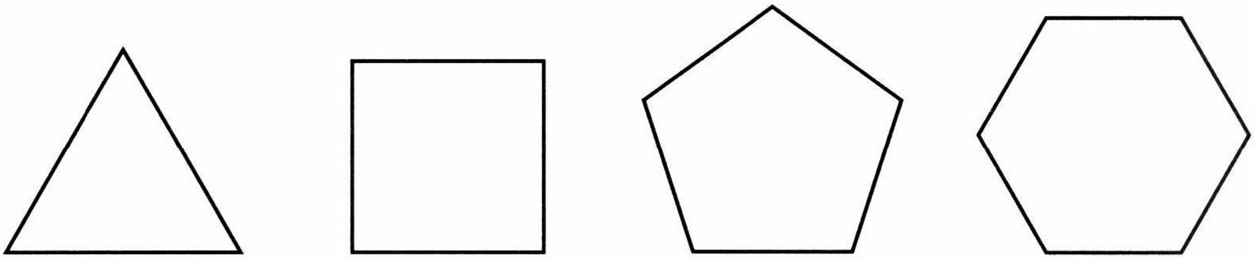
**Рисование прямоугольника.** Для создания изображения прямоугольника в панели инструментов выберите ***Прямоугольник***, щелкнув по нему левой кнопкой мыши. Поместите указатель в какое-нибудь место экрана, где вы хотите, чтобы была вершина прямоугольника. Нажмите левую кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. При этом за ним потянется прямоугольник. Достигнув нужного положения, отпустите кнопку. Произойдет фиксирование прямоугольника с вершинами в начальной и конечной точке перемещения. Если при перемещении указателя дополнительно держать нажатой клавишу Shift, то в результате получится квадрат с вершиной в начальной точке.

Прямоугольник можно получить, задавая его центр и длины сторон. Для этого после выбора инструмента ***Прямоугольник*** щелкните указателем в месте экрана, где вы хотите поместить центр прямоугольника. При этом появится окно, в котором можно указать ширину и высоту прямоугольника. После нажатия *OK* на экране появляется требуемый прямоугольник.

**Рисование правильных многоугольников.** Для получения изображений правильных многоугольников поставьте указатель на инструмент ***Эллипс***, предназначенный для рисования окружностей и эллипсов. Нажмите левую кнопку мыши и удерживайте ее нажатой. Откроется окно, в котором, помимо эллипса, будут шестиугольник, звездчатый пятиугольник и спираль. Подведите указатель к шестиугольнику и отпустите кнопку. При этом эллипс в панели инструментов заменится на шестиугольник. Далее последовательность действий аналогична предыдущему. А именно, поместите указатель в какое-нибудь место экрана, где вы хотите, чтобы был центр многоугольника. Нажмите левую кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. При этом за ним потянется многоугольник. Нажатие клавиш ↑, ↓ при нажатой левой кнопке позволяет увеличивать или уменьшать число сторон многоугольника. Достигнув нужного положения и размера, отпустите кнопку. Произойдет фиксирование правильного многоугольника с заданным числом сторон и с центром в заданной точке.

Правильный многоугольник можно получить, задавая его центр, число сторон и радиус описанной окружности. Для этого после выбора инструмента ***Многоугольник*** щелкните указателем в каком-нибудь месте экрана, в которое вы хотите поместить центр многоугольника. При этом откроется окно, в котором можно указать радиус и число сторон многоугольника. После нажатия *OK* на экране появляется требуемый правильный многоугольник (рис. 73, а—г).

**Рисование звездчатых многоугольников.** В панели инструментов замените ***Эллипс*** на ***Звезду***. Далее последовательность действий аналогична предыдущему. А именно, поместите указатель в какое-нибудь место экрана,

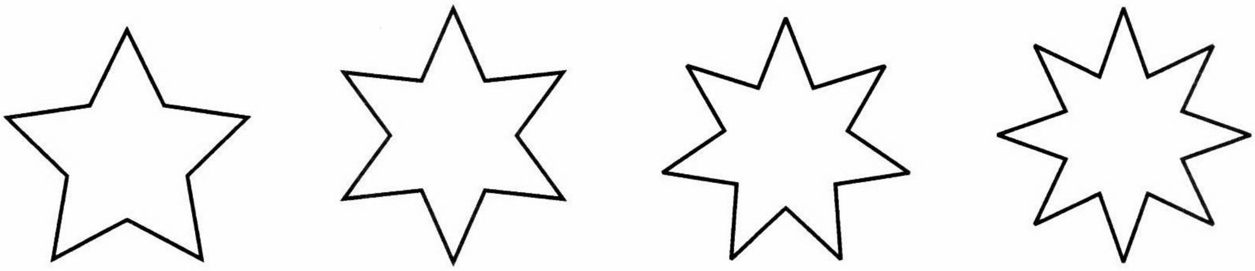


а) б) в) г)

**Рис. 73**

где вы хотите, чтобы был центр многоугольника. Нажмите левую кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. При этом за ним потянется звездчатый многоугольник. Нажатие клавиш ↑, ↓ при нажатой левой кнопке позволяет увеличивать или уменьшать число сторон многоугольника. Достигнув нужного положения и размера, отпустите кнопку. Произойдет фиксирование звездчатого многоугольника с заданным числом сторон и с центром в заданной точке. Нажатие клавиши Ctrl при нажатой левой кнопке позволяет фиксировать радиус внутренней окружности звездчатого многоугольника и тем самым регулировать относительную величину лучей.

Звездчатый многоугольник можно получить, задавая его центр, число сторон и радиусы внутренней и внешней окружностей. Для этого после выбора инструмента ***Звезда*** щелкните указателем в каком-нибудь месте экрана, в которое вы хотите поместить центр многоугольника. При этом откроется окно, в котором можно задать число сторон многоугольника и радиусы окружностей. После нажатия ***OK*** на экране появляется требуемый звездчатый многоугольник (рис. 74, а—г).



а) б) в) г)

**Рис. 74**

**Выделение рисунка.** Для выделения и снятия выделения рисунка служит инструмент ***Выделение***, расположенный в левом верхнем углу панели инструментов с изображением стрелки. Щелкнув по нему левой кнопкой мыши, поступайте так, как при создании прямоугольника, содержащего ваш рисунок. При этом контур рисунка станет синим. Выделение рисунка возможно и другим способом. Выбрав инструмент ***Выделение***, щелкните указателем в каком-нибудь месте контура рисунка. Контур станет синим, а сам рисунок будет выделен.

Для снятия выделения щелкните левой кнопкой вне контура рисунка.

**Перемещение рисунка.** Для перемещения (параллельного переноса) рисунка сначала выделите его, используя инструмент ***Выделение***. Затем установите указатель в каком-нибудь месте выделенного контура. Нажмите левую кнопку и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель. За ним будет перемещаться и весь рисунок. Достигнув нужного положения, отпустите кнопку и снимите выделение. Рисунок будет зафиксирован в выбранном месте. Если перед отпусканием кнопки нажать клавишу Alt, то исходный рисунок сохранится.

**Поворот рисунка.** В редакторе «Adobe Illustrator» имеется возможность поворота рисунка на произвольный угол. Для этого служит инструмент ***Поворот***, расположенный в квадратике панели инструментов с нарисованной пунктирной линией, закрученной против часовой стрелки. Для выполнения поворота сначала выделите рисунок. Затем выберите инструмент ***Поворот***, щелкнув по нему левой кнопкой мыши. При этом на экране появится кружок с перекрестием — центр поворота. Его можно переместить, нажав на нем левой кнопкой и, удерживая ее нажатой, перетащить в нужное место. После этого нажмите левую кнопку в каком-нибудь месте экрана и, удерживая ее нажатой, перемещайте указатель вокруг центра поворота. Рисунок будет поворачиваться вслед за указателем. При этом в левом нижнем углу будет указываться величина угла поворота в градусах. Достигнув нужного положения, отпустите кнопку и снимите выделение. Если перед отпусканием кнопки нажать клавишу Alt, то вы также сохраните исходный рисунок.

**Отражение рисунка.** Еще одной возможностью редактора «Adobe Illustrator» является отражение (симметрия) рисунка. Для этого служит инструмент ***Зеркало***. Сначала нужно выделить рисунок. Затем выбрать инструмент ***Зеркало***, щелкнув по нему левой кнопкой. При этом на экране появится кружок с перекрестием — одна из точек оси симметрии. Ее можно переместить, нажав на нем левой кнопкой и, удерживая ее нажатой, перетащить в нужное место. После этого нажмите левую кнопку в каком-нибудь другом месте экрана, где вы хотите, чтобы была вторая точка оси симметрии и, удерживая ее нажатой, сдвиньте указатель. При этом рисунок отразится относительно оси, проходящей через первую и вторую точку. Если, не отпуская кнопку, и дальше перемещать указатель вокруг первой точки, то рисунок будет поворачиваться вокруг этой точки вслед за указателем. Достигнув нужного положения, отпустите кнопку и снимите выделение. Если перед отпусканием кнопки нажать клавишу Alt, то вы также сохраните исходный рисунок.

Таким образом, «Adobe Illustrator» позволяет выполнять все виды движений: параллельный перенос, поворот, центральную и осевую симметрии.

**Изменение размеров рисунка.** Помимо движений, «Adobe Illustrator» позволяет, изменяя размеры рисунка, выполнять гомотетию и подобие. Для этого служит инструмент ***Размер***. Выделите рисунок и выберите инструмент ***Размер***, щелкнув по нему левой кнопкой. При этом на экране появится кружок с перекрестием — центр гомотетии. Так же как при повороте, его можно перенести в любое другое место. Нажмите левую кнопку с указателем в любом месте экрана и перемещайте его ближе или дальше от центра. Размеры рисунка по вертикали и горизонтали будут уменьшаться или увеличиваться в зависимости от направления перемещения указателя. Если при этом держать нажатой клавишу Shift, то изменение размеров по вертикали и горизонтали будет одинаковым, т. е. преобразование рисунка будет гомотетией. Достигнув нужного положения, отпустите кнопку и снимите выделение. Если перед отпусканием кнопки нажать клавишу Alt, то также сохранится и исходный рисунок.

**Удаление рисунка.** Для удаления рисунка нужно выделить рисунок с помощью инструментов ***Выделение***, а затем нажать клавишу Delete.

**Редактирование рисунков.** Для редактирования рисунков или их частей используется инструмент ***Частичное выделение***, расположенный в правом верхнем углу панели инструментов. Выберите инструмент ***Частичное выделение*** и, установив указатель на редактируемом участке контура, щелкните левой кнопкой мыши. При этом участок контура станет синим. Установите указатель на какой-нибудь вершине выделенного участка и, нажав левую кнопку мыши, перемещайте указатель. За ним потянется не только вершина, но и прилегающие к ней стороны участка. Достигнув нужного положения, отпустите левую кнопку. Получите контур с новым расположением вершины. Если указатель мыши установить не на вершине, а на стороне контура, то при перемещении указателя, за ним потянется не только сторона, но и прилегающие к ней две другие стороны контура. Достигнув нужного положения, отпустите левую кнопку. Получите контур с новым расположением стороны. В частности, из прямоугольника легко получить параллелограмм, из параллелограмма — трапецию и т. д.

Графический редактор «Adobe Illustrator» можно использовать для получения изображений паркетов. Так, например, паркет рисунка 39 был получен следующим образом. Сначала был нарисован квадрат. Затем он был скопирован. Полученная копия передвинута с помощью мышки так, чтобы исходный квадрат и копия соприкасались сторонами. Доставая новые копии квадрата и перемещая их так, чтобы они соприкасались сторонами с предыдущими квадратами, получим искомый паркет. Используя различные цвета заливки квадратов, можно получать разноцветные паркеты.

Паркет на рисунке 49 был получен следующим образом. Сначала был заготовлен правильный восьмиугольник. Копии правильного восьмиугольника перемещались мышкой и располагались так, чтобы они соприкасались или горизонтальными, или вертикальными сторонами. Тогда между ними будут образовываться правильные четырехугольники и все вместе они дадут искомый паркет. Используя заливку, можно получать различные раскраски этого паркета.

Отметим, что четырехугольник $ABCD$, образующий паркет, может быть и невыпуклым. Соответствующий паркет приведен на рисунке 75.

Он был получен следующим образом. Сначала был нарисован четырехугольник. Затем этот четырехугольник был скопирован. Копии четырехугольника перемещались мышкой и располагались так, чтобы они соприкасались вершинами. Между ними будут оставаться четырехугольники, центрально-симметричные исходным, и все вместе они дадут искомый паркет.

На рисунке 76, а, б, представлены паркеты, составленные из звездчатых выпуклых и невыпуклых многоугольников.

Графический редактор «Adobe Illustrator» можно использовать для решения задач на разрезание. Для этого в нем имеются инструменты ***Ножницы*** и ***Нож***.

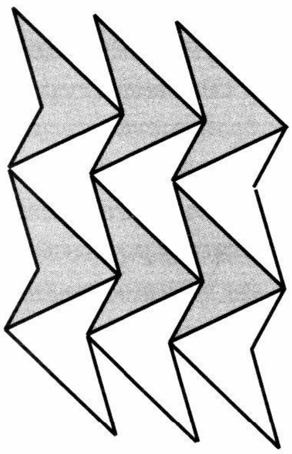


**Рис. 75**

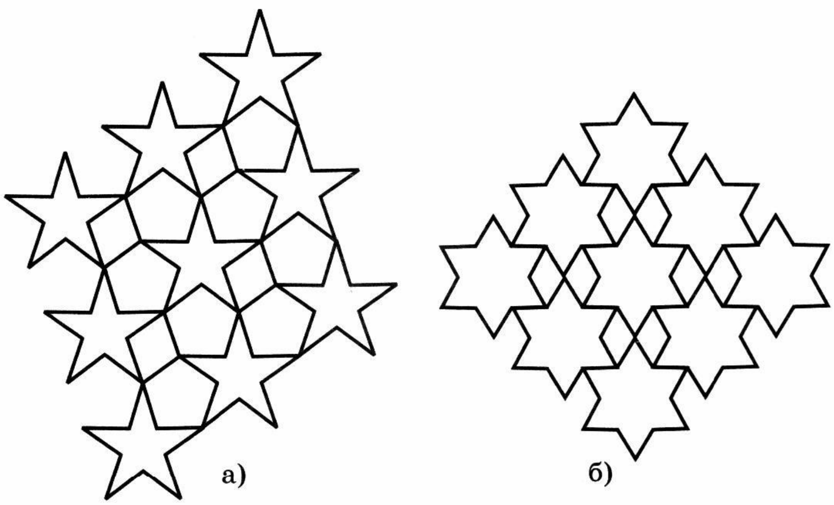



**Рис. 76**

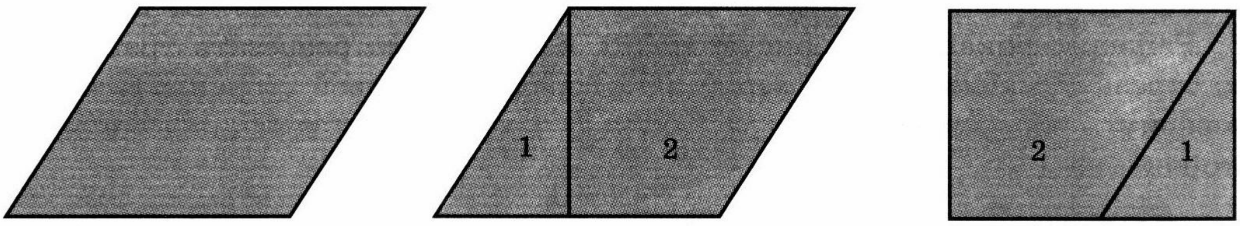
Инструмент ***Ножницы*** позволяет разрезать линию в любой ее точке. Для этого нужно выбрать этот инструмент на панели инструментов и щелкнуть левой кнопкой мыши в той точке, в которой требуется разрезать линию. В результате линия будет разрезана.

Инструмент ***Нож*** позволяет разрезать фигуры вдоль произвольной линии. Для этого нужно выбрать этот инструмент на панели инструментов и, удерживая нажатой левую кнопку мыши, перемещать нож вдоль предполагаемой линии разреза. После того как левая кнопка будет отпущена, фигура будет разрезана.

Рассмотрим примеры задач на разрезание из учебника [6], решенные с помощью графического редактора «Adobe Illustrator».

1. Параллелограмм, изображенный на рисунке 77, а, разрежьте на две части и составьте из них прямоугольник.

Решение показано на рисунках 77, б, в. Сначала нужно разрезать параллелограмм по высоте (рис. 77, б). Затем выделить треугольную часть и перетащить ее мышкой в новое положение (рис. 77, в).

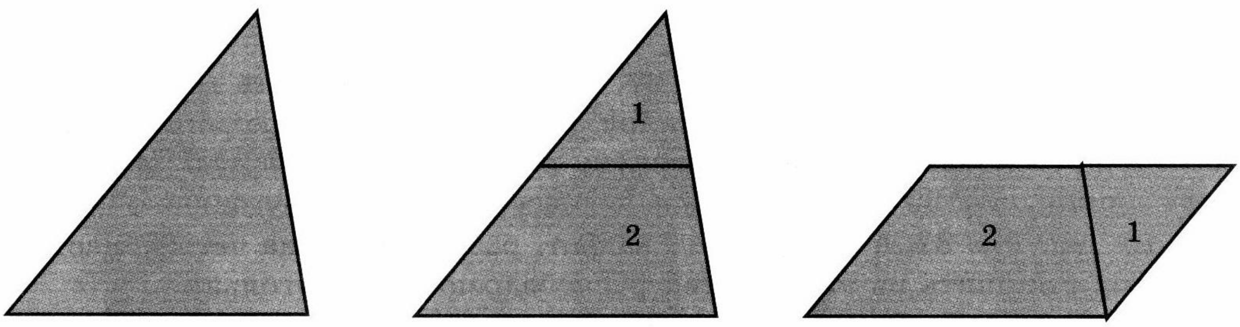



а) б) в)

**Рис. 77**

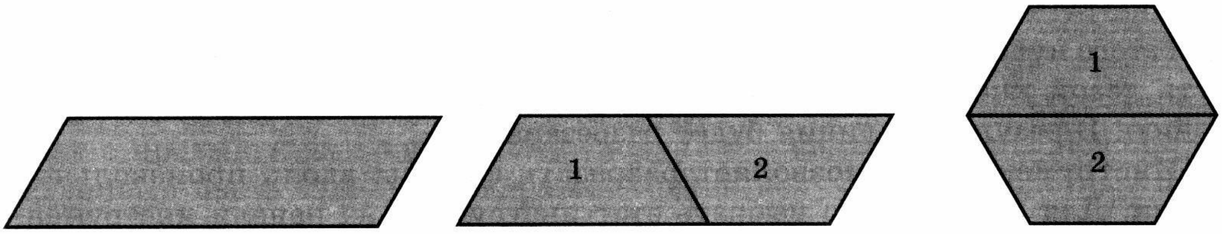
2. Треугольник (рис. 78, а) разрежьте на две части и составьте из них параллелограмм.

Решение показано на рисунках 78, б, в. Нужно разрезать треугольник по средней линии, а затем повернуть образовавшуюся треугольную часть вокруг вершины на 180°.




а) б) в)

**Рис. 78**




а) б) в)

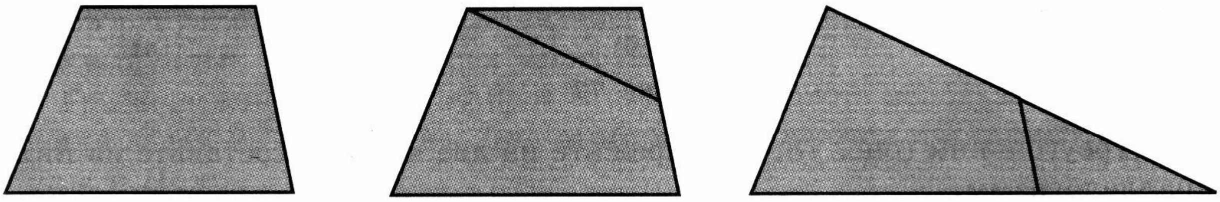
**Рис. 79**

3. Разрежьте параллелограмм, у которого одна сторона в три раза больше другой и острый угол равен 60° (рис. 79, а), на две части и составьте из них правильный шестиугольник.

Решение показано на рисунках 79, б, в. Здесь также части шестиугольника получаются из соответствующих частей параллелограмма параллельным переносом.

4. Трапецию (рис. 80, а) разрежьте на две части и составьте из них треугольник.

Решение показано на рисунках 80, б, в. Нужно разрезать трапецию по отрезку, соединяющему вершину и середину боковой стороны, а затем повернуть образовавшуюся треугольную часть вокруг середины боковой стороны на 180°.



а) б) в)

**Рис. 80**

5. Треугольник (рис. 81, а) разрежьте на три части и составьте из них прямоугольник.

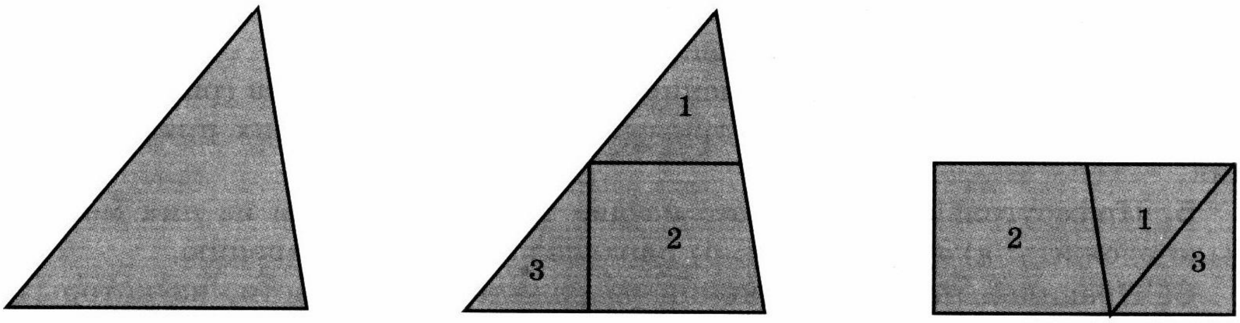
Решение показано на рисунках 81, б, в. Нужно разрезать треугольник по средней линии и по перпендикуляру, опущенному из середины боковой стороны на основание. Затем повернуть верхнюю треугольную часть вокруг вершины на 180° и параллельно перенести вторую треугольную часть.

6. На рисунке 82, а изображен квадрат, разрезанный на четыре части. Требуется составить из этих частей равнобедренный треугольник.

Решение показано на рисунках 82, б, в.

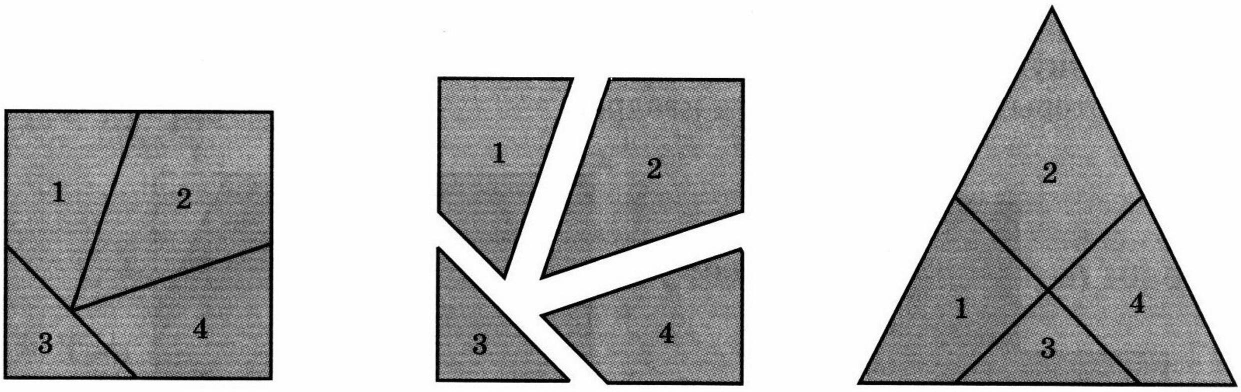
7. На рисунке 83, а изображен греческий крест. Требуется разрезать его двумя разрезами и составить из полученных частей квадрат.

Решение показано на рисунках 83, б, в, г. Части квадрата получаются из соответствующих частей греческого креста параллельным переносом.



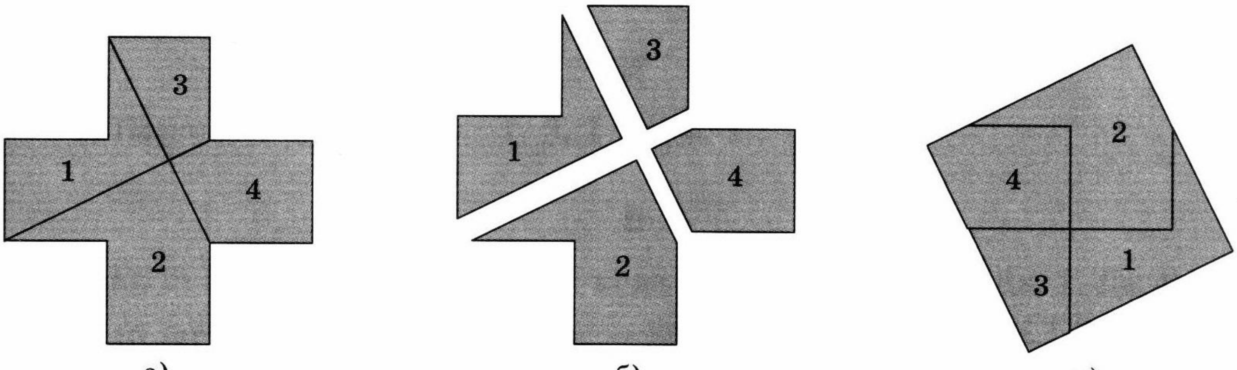

а) б) в)

**Рис. 81**




а) б) в)

**Рис. 82**




а) б) в)

**Рис. 83**

## Задачи

**1.** Получите паркеты, изображенные на рисунках 39—49.

**2.** Докажите, что с помощью центрально-симметричных шестиугольников произвольной формы (даже невыпуклых) можно заполнить плоскость. Приведите пример соответствующего паркета.

**3.** Получите паркет, составленный из греческих крестов (рис. 55).

**4.** Трапецию разрежьте на три части и составьте из них прямоугольник.

**5.** Прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.

**6.** Правильный шестиугольник разрежьте на две части, из которых можно составить параллелограмм.

**7.** Прямоугольник со сторонами 4 и 9 разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

**8.** Разрежьте изображенную на рисунке 84 фигуру, составленную из трех квадратов, на четыре равные части.

**9.** Шестиугольник, изображенный на рисунке 85, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.

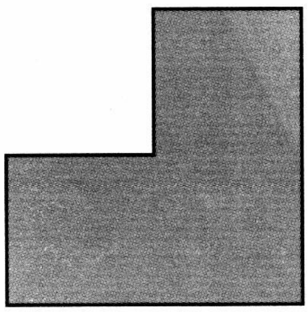


Рис. 84

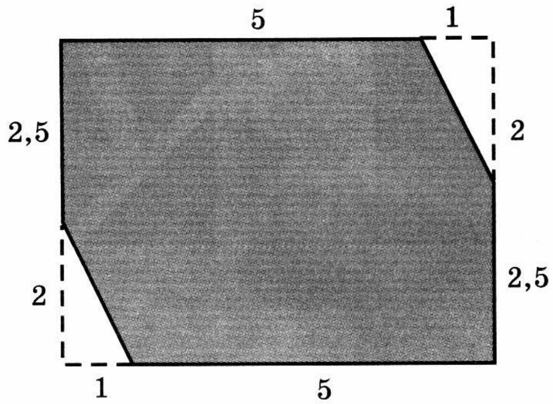



Рис. 85

# ОТВЕТЫ

## 1

**1.** 9. **2.** 20. **3.** 1, 2, 3, 5, 7. **6.** Внутри лежат точки $B$, $D$ и $F$, снаружи — $A$, $C$ и $E$. **9.** Многоугольники изображены на рисунках б) и г). **10.** Число вершин равно числу сторон. **11.** г) $n - 2$. **12.** а) 9; б)* $\frac{n(n-3)}{2}$. **13.** а), в) Нет; б) да. **14.** а) Да, пятиугольник; б) да, четырехугольник; в) да, многоугольник с числом сторон, большим пяти. **15*.** а) Одна; б) пять; в) $\frac{n(n-3)}{2}$. **17*.** Да. **18*.** Нет.

## 2

**1.** $\frac{\beta - \alpha}{2}$. **2.** $\beta - \alpha$. **4.** 70°. **5.** 36°, 72°, 108°, 144°. **6.** Семь. **7.** а) 10; б) 15. **9.** Три. **11.** а), б) 180°. **12.** а) −5; б) −7.

## 3

**1.** Нет. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Да. **5.** а) На гипотенузе; б) внутри треугольника; в) вне треугольника. **6.** Нет. **8.** К большей. **9.** Лежащей против большей стороны. **10.** К большей. **11.** 140° и 20°. **17.** 92°.

## 4

**1.** Пополам. **2.** 2 : 3 и 9 : 1. **3.** 1 : 4. **4.** 1 : 2. **5.** $\frac{4}{7}$.

## 5

**1.** а), в) Нет; б) да. **3.** а), б) Нет; в) да. **4.** Ромб. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** Да. **9.** 30° и 60°. **10.** 90°. **11.** 36°, 36°, 108°. **13*.** $e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$, $f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$. **14*.** $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $180° - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $180° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $180° + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

## 6

**7.** 0. **8.** а), б) Да. **9.** а) Да; б) нет. **10.** а) В = 4, Г = 3; б) В = 8, Г = 5; в) В = 10, Г = 6.

## 7

**1.** 3. **2.** 3, если $n$ четно и 4, если $n$ нечетно. **4.** Да. **7.** $\frac{n^2}{2}$, если $n$ четно и $\frac{n^2+n}{2}$, если $n$ нечетно. **8.** Нет. **10.** Три краски.

## 8

**1.** а), в) Нет; б) да. **2.** а), б) Да; в) нет. **3.** Да. **4.** Да. **6.** Да.

## 9

**13.** $\frac{1}{nm+1}$.

## 10

**2.** Системой неравенств. **3.** а), б) Первой; в) второй. **4.** Прямоугольник. **6.** $3x + 2y - 9 \geqslant 0$; $2x - y - 6 \leqslant 0$; $x + 3y - 10 \leqslant 0$. **8.** 3,5. **9.** –2. **10.** 60, 60.

# ЛИТЕРАТУРА

**1.** *Б. Делоне, О. Житомирский.* Задачник по геометрии. — М. — Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

**2.** *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. — М. : Учпедгиз, 1962.

**3.** *Коксетер Г. С. М.* Введение в геометрию. — М. : Наука, 1966.

**4.** *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М. : Наука, 1978.

**5.** *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. I, II. — М. : Наука, 1986.

**6.** *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия. Учебник для 7—9 классов общеобразовательных учреждений. — М. : Мнемозина, 2005.

**7.** *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Компьютер помогает геометрии. — М. : Дрофа, 2003.

**8.** *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Нестандартные и исследовательские задачи по геометрии. — М. : Мнемозина, 2004.

**9.** *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2. Геометрия (Планиметрия). — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.

## СОДЕРЖАНИЕ

ISBN 5-346-00605-2
9785346006053