О СРЕДНИХ ЛИНИЯХ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Ключевые слова: треугольник, трапеция, средние линии.
Аннотация: в статье рассматриваются различные подходы к доказательствам теорем о средних линиях треугольника и трапеции. Предлагается подход, ориентированный на результаты обучения, приводятся примеры задач.

ABOUT THE MIDDLE LINES OF A TRIANGLE AND TRAPEZOID

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Keywords: triangle, trapezoid, middle lines.
Astract: the paper discusses various approaches to proving theorems on the middle lines of a triangle and trapezoid. An approach oriented on learning outcomes is proposed, examples of tasks are given.

Теоремы о средних линиях треугольника и трапеции являются одними из основных теорем школьного курса геометрии. Они используются при доказательстве других теорем, применяются для решения задач различного уровня трудности, включаемых в ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Обучение доказательствам теорем о средних линиях, умениям применять эти теоремы для решения задач является одной из важных целей обучения геометрии.

Здесь мы рассмотрим различные подходы к изучению этих теорем, предлагаемые в учебниках геометрии [1-3]. Предложим подход, основанный на модульной структуре содержания обучения, предусмотренный ФГОС ООО, ориентированный на результаты обучения.

Не все школьные учебники математики придерживаются модульной структуры. Близкие по содержанию темы могут располагаться в разных частях таких учебников. Так, например, в учебнике [1] теорема о средней линии треугольника расположена в главе VII. «Подобные треугольники», расположенной в конце 8-го класса. Теорема о средней линии трапеции расположена в главе IX. «Векторы», которая расположена в начале 9-го класса. Важная теорема Фалеса помещена в задачи главы V. «Четырёхугольники».

Такое расположение указанных тем сказывается на доказательстве соответствующих теорем, подборе задач и их решениях, результатах обучения.

В частности, доказательство теоремы о средней линии треугольника в учебнике [1] использует признак подобия треугольников. При этом доказательство признаков подобия треугольников использует свойства площади, а определение площади и доказательства её свойств выходят за рамки школьного курса математики. Таким образом, теорема о средней линии треугольника, фактически, остаётся без строгого математического доказательства. Кроме того, основной целью этой главы является обучение учащихся доказательствам признаков подобия треугольников и применению их к решению задач. При этом задачи на среднюю линию треугольника остаются без должного внимания.

Доказательство теоремы о средней линии трапеции проводится векторным методом. Конечно, эту теорему можно доказывать векторным методом, но в этом случае теряется связь между теоремами о средней линии треугольника и средней линией трапеции, которая имеется при классическом (евклидовом) доказательстве. Кроме того, основной целью данной главы является обучение учащихся доказательству свойств векторов и применению их к решению задач. Задачи на среднюю линию трапеции остаются без должного внимания.

Доказательство теоремы Фалеса занимает почти страницу и содержит ссылку на предыдущую задачу, решение которой занимает ещё половину страницы. Конечно, такое доказательство теоремы Фалеса выходит за рамки доступности учащихся. Кроме того, расположение теоремы Фалеса в задачах не даёт возможности полноценно использовать эту теорему для решения задач.

На самом деле, доказательство теоремы Фалеса непосредственно связано с теоремами о средних линиях треугольника и трапеции. Оно непосредственно следует из этих теорем. Расположение указанных взаимосвязанных теорем в отдалённых друг от друга местах учебника, конечно, влияет на результаты обучения.

Для повышения эффективности обучения, улучшения его результатов необходимо, чтобы указанные теоремы располагались в одном месте (модуле), были связаны с предыдущим учебным материалом, следовали от простого к сложному, сопровождались необходимым количеством задач различного уровня трудности на применение этих теорем.

Таким модулем, на наш взгляд, может быть глава «Четырёхугольники», расположенная в начале 8-о класса, состоящая из следующих пунктов.

1. Параллелограмм и его свойства.
2. Признаки параллелограмма.
3. Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат.
4. Средняя линия треугольника.

5. Трапеция.

6. Средняя линия трапеции.

7. Теорема Фалеса.

8*. Теорема о пропорциональных отрезках.

Приведём формулировку и доказательство теоремы о средней линии треугольника, данные в учебниках [2, 3].

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Доказательство. Рассмотрим треугольник *ABC* и его среднюю линию *DE*, соединяющую середины сторон соответственно *AC* и *BC* (рис. 1).

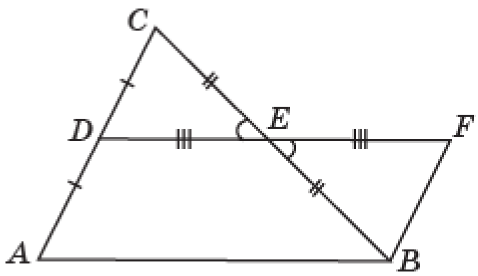

Рис. 1

Докажем, что средняя линия *DE* параллельна стороне *AB* и равна её половине. На продолжении отрезка *DE* отложим отрезок *EF*, равный отрезку *DE*. Соединим отрезком точки *B* и *F*. Треугольники *BEF* и *CED* равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$ по условию, $EF = ED$ по построению, $\angle BEF = \angle CED$ как вертикальные). Следовательно, $BF = CD = AD$. Из равенства углов *FBE* и *DCE* следует, что прямые *BF* и *AC* параллельны. Таким образом, стороны *BF* и *AD* четырёхугольника *ABFD* равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм (по первому признаку параллелограмма). Значит, сторона *AB* параллельна и равна стороне *DF*. Средняя линия *DE* равна половине стороны *DF*, следовательно, равна половине стороны *AB*.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника и параллельна другой его стороне, то она проходит через середину третьей стороны этого треугольника.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину *D* стороны *AC* и параллельна стороне *AB* треугольника *ABC* (рис. 2).

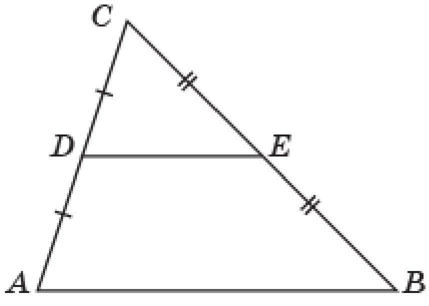

Рис. 2

Так как средняя линия DE также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина E стороны BC принадлежит этой прямой.

Задача 1. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Рассмотрим случай выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Пусть E, F, G, H – середины его соответствующих сторон. Проведём диагонали AC и BD (рис. 3).

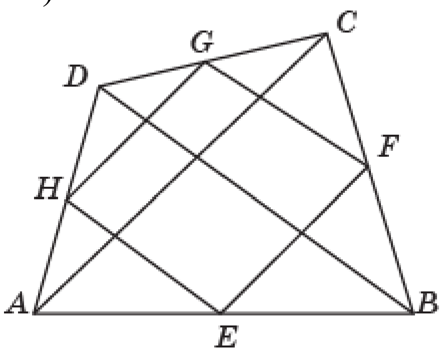

Рис. 3

Отрезок EF является средней линией треугольника ABC. Следовательно, он параллелен диагонали AC и равен её половине. Отрезок HG также параллелен диагонали AC и равен её половине. Следовательно, стороны EF и HG четырёхугольника $EFGH$ равны и параллельны. Значит, этот четырёхугольник – параллелограмм.

Задача 2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника, делят друг друга пополам.

Решение. Пусть E, F, G, H – середины соответствующих сторон четырёхугольника $ABCD$ (рис. 4).

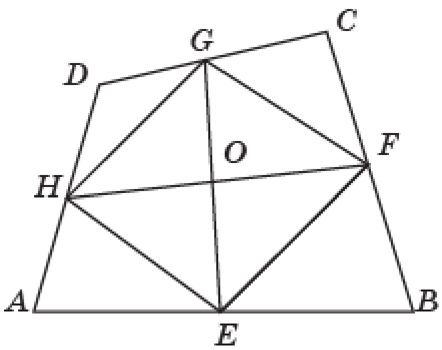

Рис. 4

Четырёхугольник $EFGH$ является параллелограммом. Следовательно, его диагонали делятся в точке пересечения пополам.

Задача 3. Отрезки EF и GH, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, взаимно перпендикулярны. Определите вид четырёхугольника $EFGH$.

Решение. Четырёхугольник $EHFG$ является параллелограммом, у которого диагонали перпендикулярны (рис. 5). Следовательно, этот четырёхугольник является ромбом.

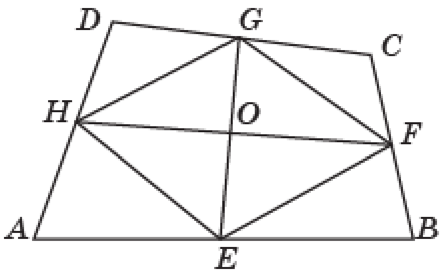

Рис. 5

Задача 4. Отрезки EF, GH, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, равны между собой. Определите вид четырёхугольника $EFGH$.

Решение. Четырёхугольник $EHFG$ является параллелограммом, у которого диагонали равны (рис. 6). Следовательно, этот четырёхугольник является прямоугольником.

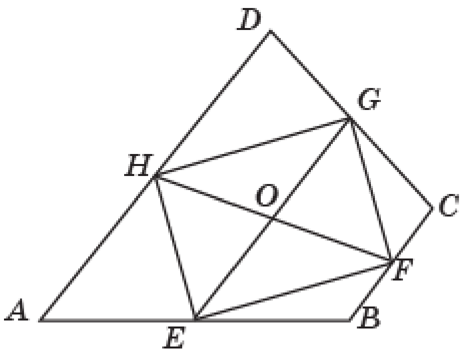

Рис. 6

Задача 5. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Решение. Пусть $ABCD$ – прямоугольник, E, F, G, H – середины его соответствующих сторон. Проведём диагонали AC и BD (рис. 7).

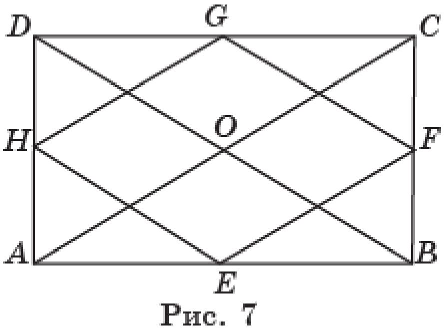

Рис. 7

Отрезок EF является средней линией треугольника ABC, следовательно, он равен половине диагонали AC. Аналогично, остальные стороны четырёхугольника $EFGH$ равны половинам соответствующих диагоналей. Так как диагонали прямоугольника равны, то равны и стороны этого четырёхугольника, т. е. он является ромбом.

Задача 6. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть *ABCD* – ромб, *E*, *F*, *G*, *H* – середины его соответствующих сторон. Проведём диагонали *AC* и *BD* (рис. 8).

Отрезок *EF* является средней линией треугольника *ABC*, следовательно, он параллелен диагонали *AC*. Аналогично, остальные стороны четырёхугольника *EFGH* параллельны соответствующим диагоналям. Так как диагонали ромба перпендикулярны, то перпендикулярны и соседние стороны этого четырёхугольника, т. е. он является прямоугольником.

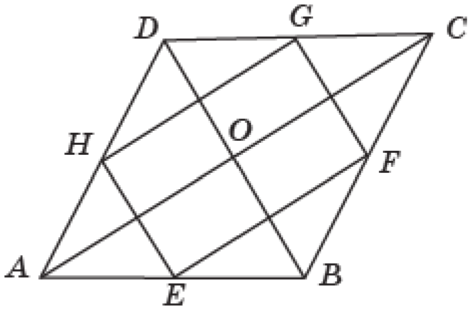

Рис. 8

Задача 7. В параллелограмме *ABCD* точка *E* – середина стороны *CD*. Отрезок *AE* пересекает диагональ *BD* в точке *F* (рис. 9). Найдите отношение *DF* : *FB*.

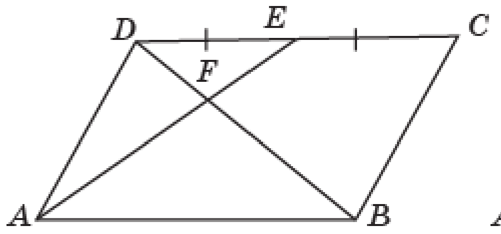

Рис. 9

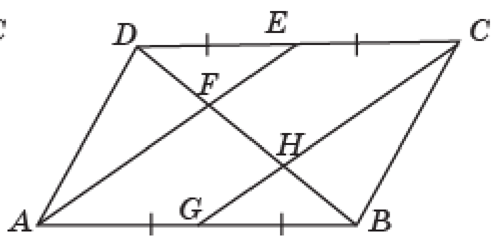

Рис. 10

Решение. Через точку *C* и середину *G* стороны *AB* проведём прямую. Обозначим *H* её точку пересечения с прямой *BD* (рис. 10). Четырёхугольник *AGCE* – параллелограмм. Следовательно, прямые *AE* и *CG* параллельны. *GH* – средняя линия треугольника *ABF*, значит, *FH* = *HB*. *EF* – средняя линия треугольника *DCH*, значит, *DF* = *FH*. Следовательно, *DF* = *FH* = *HB*. Значит, *DF* : *FB* = 1 : 2.

Задача 8. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон *AB* и *CD*. Найдите угол, образованный продолжениями сторон *AD* и *BC*.

Решение. Пусть *E*, *G*, – середины соответствующих сторон *AB* и *CD* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, *F*, *H* – середины его диагоналей соответственно *BD* и *AC* (рис. 11).

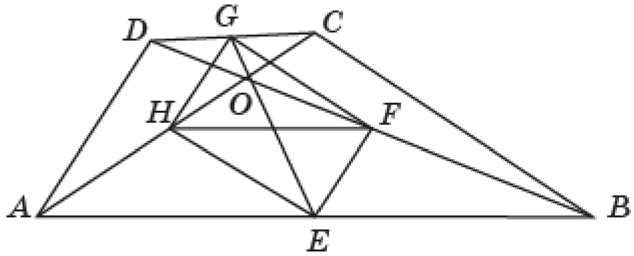

Рис. 11

Четырёхугольник $EFGH$ является прямоугольником. Следовательно, $\angle FGH = 90°$. Отрезки HF и FG являются средними линиями треугольников соответственно BCD и ACD. Значит, прямые AD и BC перпендикулярны. Искомый угол равен 90°.

Задача 9*. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE = 4$. Середины F и G, H и I сторон соответственно AB и CD, BC и ED соединены отрезками. Середины P и Q этих отрезков снова соединены отрезком (рис. 12). Найдите длину отрезка PQ.

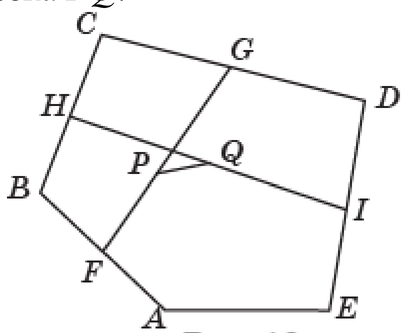

Рис. 12

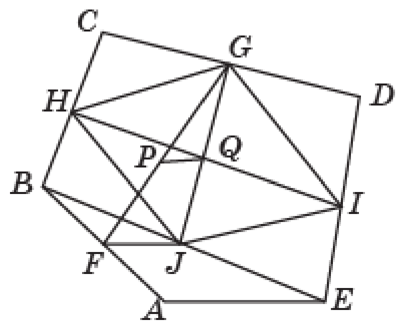

Рис. 13

Решение. Проведём отрезок BE. Обозначим J его середину (рис. 13).

Четырёхугольник $IGHJ$ – параллелограмм, следовательно, его диагональ JG проходит через точку Q. PQ – средняя линия треугольника FGJ, следовательно, $PQ = \frac{1}{2}FJ$. FJ – средняя линия треугольника ABE, следовательно, $FJ = \frac{1}{2}AE$. Значит, $PQ = 1$.

Приведём формулировку и доказательство теоремы о средней линии трапеции, данные в учебниках [2, 3].

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и её среднюю линию EF. Проведём прямую DF. Обозначим G её точку пересечения с прямой AB (рис. 14).

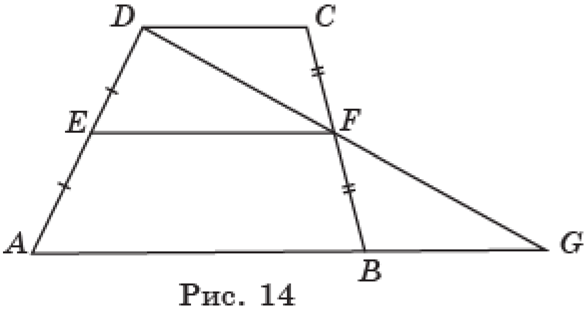

Рис. 14

Треугольники BFG и CFD равны по второму признаку равенства треугольников ($BF = CF$, $\angle BFG = \angle CFD$ как вертикальные, $\angle GBF = \angle DCF$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, CD и секущей BC). Из равенства этих треугольников следует, что равны отрезки GF и DF. Значит, EF – средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника получаем, что отрезок EF параллелен стороне AG и равен её половине. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок EF будет параллелен обоим основаниям данной трапеции. Так как отрезок AG равен сумме оснований трапеции, то отрезок EF будет равен полусумме оснований трапеции.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной боковой стороны и параллельна основанию трапеции, то она проходит через середину второй боковой стороны этой трапеции.

Доказательство. Пусть прямая EG проходит через середину E стороны AD и параллельна стороне AB трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) (рис. 15).

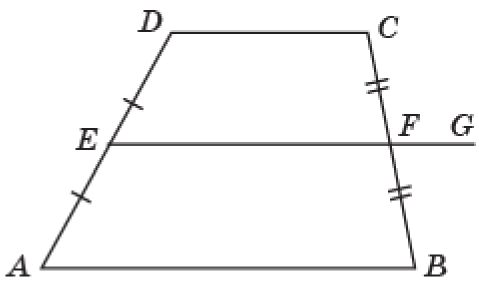

Рис. 15

Так как средняя линия EF также параллельна стороне AB, то она должна лежать на прямой EG. Следовательно, середина F стороны BC принадлежит этой прямой.

Задача 10. Основания трапеции $ABCD$ равны 6 и 4. Найдите отрезки, на которые диагонали этой трапеции делят её среднюю линию EF.

Ответ. 2, 1, 2.

Задача 11. Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри трапеции.

Ответ. 18 см и 16 см.

Задача 12. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

Решение. Пусть EF – средняя линия трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), G и H – её точки пересечения с диагоналями (рис. 16).

Отрезок EH является средней линией треугольника ABD, следовательно, равен половине отрезка AB. Отрезок EG является средней линией треугольника ACD, следовательно, равен половине отрезка CD. Отрезок GH равен разности отрезков EH и EG, следовательно, параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности.

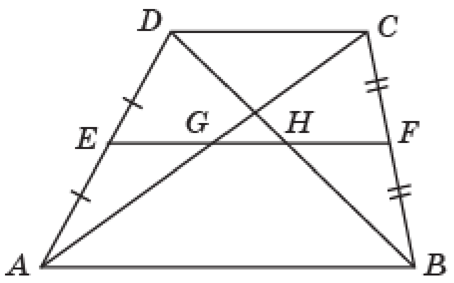

Рис. 16

Приведём формулировку и доказательство теоремы Фалеса из учебника [3].

Теорема (Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Рассмотрим угол со сторонами a, b и вершиной C. Пусть две параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 (рис. 17).

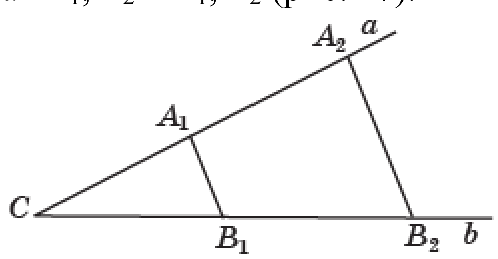

Рис. 17

Если отрезки CA_1 и A_1A_2 равны, то A_1B_1 – средняя линия треугольника CA_2B_2. Следовательно, равны и отрезки CB_1 и B_1B_2.

Пусть три параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 (рис. 18).

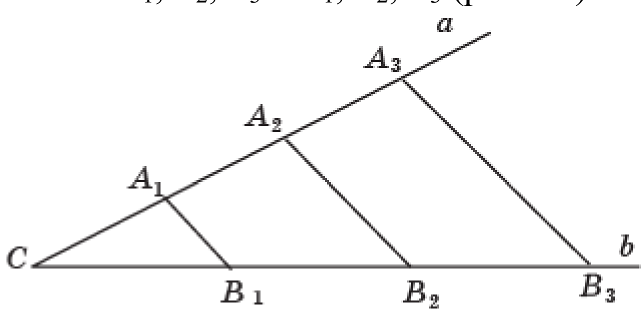

Рис. 18

Если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то A_2B_2 – средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$. Следовательно, равны и отрезки B_1B_2 и B_2B_3.

Теорему Фалеса можно использовать для обоснования следующей важной теоремы о пропорциональных отрезках. Её строгое доказательство выходит за рамки школьного курса математики.

Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Обоснование. Рассмотрим угол со сторонами a, b и вершиной C. Пусть две параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 (рис. 19).

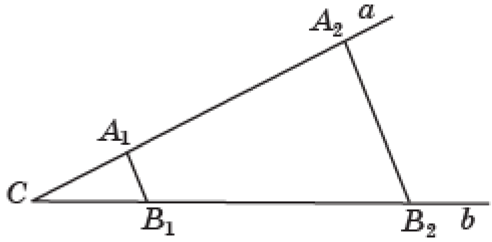

Рис. 19

Покажем, что имеет место равенство отношений $\frac{A_1A_2}{CA_1} = \frac{B_1B_2}{CB_1}$. Отношение $\frac{CD}{AB}$ отрезков CD и AB определим на основе измерения длины отрезка. А именно, отношением $\frac{CD}{AB}$ будем называть число, показывающее, сколько раз отрезок AB и его части целиком укладываются в отрезке CD. Это число может быть натуральным, конечной или бесконечной десятичной дробью.

Будем откладывать отрезок CA_1 и его части на отрезке A_1A_2. Через соответствующие точки деления отрезков CA_1 и A_1A_2 проведём прямые, параллельные прямой A_1B_1 (рис. 20).

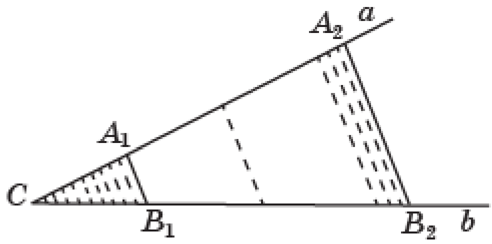

Рис. 20

Эти прямые переводят равные отрезки на луче a в равные отрезки на луче b. Одной десятой части отрезка CA_1 соответствует одна десятая часть отрезка CB_1 и т. д. Таким образом, если отрезок CA_1 и его части укладываются в отрезке A_1A_2 k раз, то отрезок CB_1 и его части будут укладываться в отрезке B_1B_2 также k раз, т. е. $\frac{A_1A_2}{CA_1} = \frac{B_1B_2}{CB_1}$.

Из доказанного равенства отношений следует равенство отношений $\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{CB_2}{CB_1}$. Действительно,

$$\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{CA_1 + A_1A_2}{CA_1} = 1 + \frac{A_1A_2}{CA_1} = 1 + \frac{B_1B_2}{CB_1} = \frac{CB_1 + B_1B_2}{CB_1} = \frac{CB_2}{CB_1}.$$

Приведём несколько теорем и задач на применение теоремы о пропорциональных отрезках.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершин.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и медианы AA_1, CC_1, пересекающиеся в точке M. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 21).

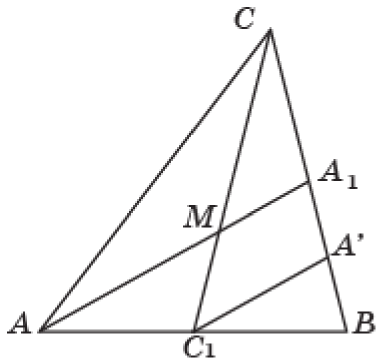

Рис. 21

Тогда C_1A' – средняя линия треугольника ABA_1. Следовательно, $BA' = A'A_1$. Так как $BA_1 = A_1C$, то $A_1C = 2A'A_1$. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $CM = 2MC_1$, т. е. $\frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$. Аналогичным образом доказывается, что медиана, проведённая из вершины B пересекает медиану CC_1 в точке, делящей отрезок CC_1 в отношении 2:1. Следовательно, эта точка совпадает с точкой M. Так же доказывается, что точка M делит медианы AA_1 и BB_1 в отношении 2:1, считая от вершин. Значит, все три медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершин.

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Доказательство. Пусть CD биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $AD : DB = AC : BC$. Через точку B проведём прямую, параллельную CD. Обозначим E точку пересечения проведённой прямой и прямой AC (рис. 22).

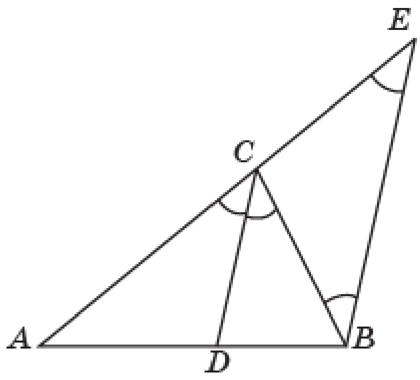

Рис. 22

В треугольнике BEC угол B равен углу E. Следовательно, $BC = EC$. По теореме о пропорциональных отрезках, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE} = \frac{AC}{BC}$.

Задача 13*. В треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, AA_1 – биссектриса, CC_1 – медиана, O – их точка пересечения. Найдите отношение $\frac{CO}{OC_1}$.

Решение. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 23).

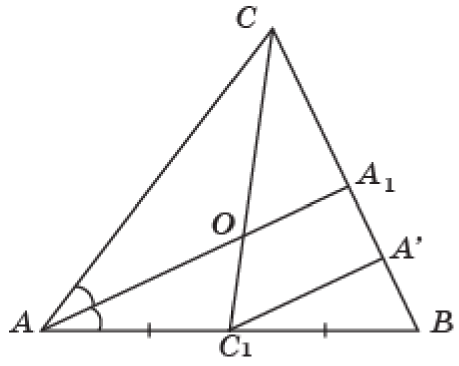

Рис. 23

Отрезок C_1A' является средней линией треугольника ABA_1. Следовательно, $A_1A' = A'B$. По свойству биссектрисы треугольника точка A_1 делит отрезок BC в отношении $CA_1 : A_1B = b : c$. Значит, $CA_1 : A_1A' = 2b : c$. По теореме о пропорциональных отрезках получаем равенство $\frac{CO}{OC_1} = \frac{2b}{c}$.

Задача 14*. В треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы, O – их точка пересечения. Найдите отношение $\frac{CO}{OC_1}$.

Решение. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 24).

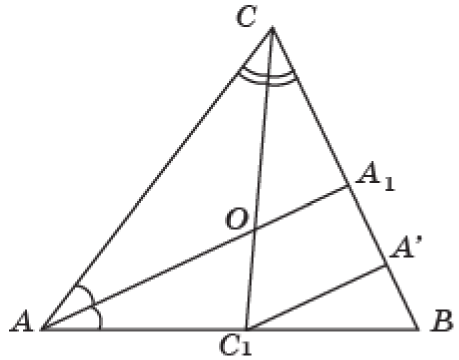

Рис. 24

Так как $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}$, то $\frac{A_1A'}{A'B} = \frac{b}{a}$. Пусть $A_1A' = bx$, $A'B = ax$, $CA_1 = by$, $A_1B = cy$. Так как $(a + b)x = cy$, то $\frac{y}{x} = \frac{a+b}{c}$. Следовательно, $\frac{CA_1}{A_1A'} = \frac{a+b}{c}$. Значит, $\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$.

Литература

1. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.

2. Киселев А. П. Геометрия / под ред. Н. А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

3. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.