ОБ УРАВНЕНИИ ПРЯМОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: уравнение прямой, школьный курс геометрии.

Аннотация: в статье рассматривается различные способы вывода уравнения прямой на плоскости, используемые в школьных учебниках геометрии. Предлагается способ, позволяющий решать задачи на установление взаимного расположения двух прямых, на нахождение угла между двумя пересекающимися прямыми и расстояния от точки до прямой.

ABOUT THE EQUATION OF A STRAIGHT LINE IN A SCHOOL GEOMETRY COURSE

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Keywords: equation of straight line, school geometry course.

Astract: the paper considers various ways of deriving the equation of a straight line on a plane used in school textbooks of geometry. A method is proposed that allows solving the problems of establishing the relative position of two straight lines, finding the angle between two intersecting straight lines and the distance from a point to a straight line.

Уравнение прямой составляет основу изучения элементов аналитической геометрии. Задание прямой на координатной плоскости её уравнением позволяет свести многие геометрические задачи к алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Оно также позволяет моделировать прямые в компьютерных программах, что повышает наглядность обучения.

Среди результатов обучения, которые хотелось бы получить при изучении этой темы, отметим следующие умения учащихся:

- составлять уравнение прямой, проходящей через две точки;
- составлять уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным вектором нормали;
- распознавать взаимное расположение прямых по их уравнениям, устанавливать параллельность и перпендикулярность прямых;
- находить точку пересечения двух данных пересекающихся прямых;
- находить угол между двумя пересекающимися прямыми;
- находить расстояние от точки до прямой;

- находить расстояние между двумя параллельными прямыми;

- моделировать прямые в компьютерных программах.

Здесь мы рассмотрим различные способы вывода уравнения прямой на плоскости, используемые в школьных учебниках геометрии [1-4] и установим их соответствие указанным результатам обучения.

Вывод уравнения прямой в учебниках [1-3] использует понятие серединного перпендикуляра к отрезку и его свойства. А именно, для вывода уравнения прямой l отмечаются две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 1).

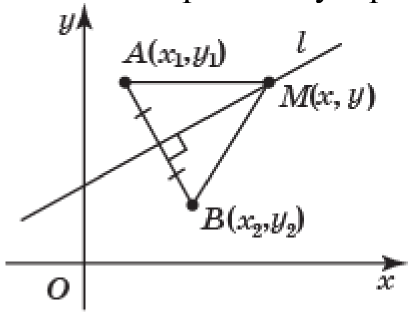

Рис. 1

Если точка $M(x, y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Если точка $M(x, y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, данное уравнение является уравнением прямой l.

После возведения выражений в скобках в квадрат и приведения подобных членов уравнение принимает вид

$$ax + by + c = 0,$$

где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$.

Аналогичный вывод уравнения прямой предлагается в учебниках [2, 3].

Такой метод вывода уравнения прямой имеет существенные недостатки.

1. Не раскрывается геометрический смысл коэффициентов a, b в уравнении прямой. Эти коэффициенты являются координатами вектора нормали к прямой, но об этом не говорится, так как к этому времени отсутствует понятие угла между векторами.

2. Не приводится уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами. Каждый раз для нахождения уравнения прямой приходится решать систему из двух линейных уравнений.

3. Не устанавливается взаимное расположение двух прямых по их уравнениям.

4. Не приводится формула нахождения угла между двумя пересекающимися прямыми. В стереометрии нужен будет аналог этой формулы для нахождения угла между пересекающимися плоскостями.

5. Не приводится формула нахождения расстояния от точки до прямой. В стереометрии нужен будет аналог этой формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.

Это связано с тем, что данная тема расположена до введения понятий угла между векторами и скалярного произведения векторов.

Мы предлагаем расположить вывод уравнения прямой после того, как будет рассмотрено скалярное произведение векторов и его свойства.

Рассмотрим различные способы задания прямой на плоскости.

1. Выведем уравнение прямой l, проходящей через данную точку $A_0(x_0,\ y_0)$ и перпендикулярную данному вектору $\vec{n}(a, b)$, называемому вектором нормали (рис. 2).

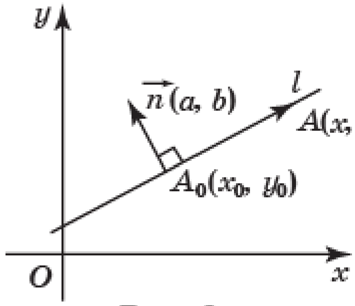

Рис. 2

Точка $A(x, y)$ будет принадлежать этой прямой, если вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0)$ будет перпендикулярен вектору нормали $\vec{n}(a, b)$, т. е., если скалярное произведение этих векторов будет равно нулю.

Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Обозначая $-ax_0 - by_0 = c$, данное уравнение можно переписать в виде

$$ax + by + c = 0.$$

Оно является искомым уравнением прямой l.

2. Выведем уравнение прямой с данным направляющим вектором $\vec{m}(a,\ b)$, проходящей через данную точку $A_0(x_0, y_0)$ (рис. 3).

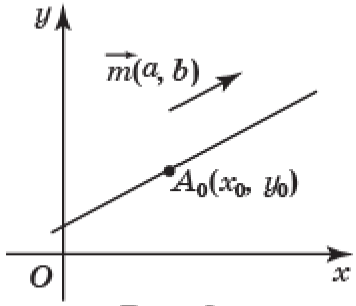

Рис. 3

Направляющим вектором прямой называется вектор, параллельный или лежащий на данной прямой.

Непосредственные вычисления показывают, что в этом случае вектором нормали к данной прямой будет вектор $\vec{n}(b,\ -a)$. Следовательно, искомым уравнением прямой будет уравнение

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

3. Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. В этом случае в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. В качестве точки A_0, принадлежащей данной прямой, возьмём точку $A_1(x_1, y_1)$. Подставляя координаты направляющего вектора и точки A_1 в уравнение прямой, получим уравнение прямой

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Используя понятие определителя, полученное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Выясним взаимное расположение прямых на плоскости, в зависимости от их уравнений.

Две прямые на плоскости будут параллельны, если их векторы нормали будут $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ коллинеарны, т. е. для некоторого числа t будет выполняться равенство $\overrightarrow{n_1} = t\cdot \overrightarrow{n_2}$.

Отсюда следует, что прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, будут параллельны, если для некоторого числа t будут выполняться равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$ и неравенство $c_2 \neq tc_1$. Если же выполняются все три равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2=tc_1$, то данные уравнения определяют одну и ту же прямую.

В случае, если две прямые пересекаются, то угол φ между ними можно вычислить через формулу скалярного произведения их векторов нормали. А именно,

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

В частности, прямые будут перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Выведем формулу расстояния от данной точки $A_0(x_0, y_0)$ до данной прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$ (рис. 4).

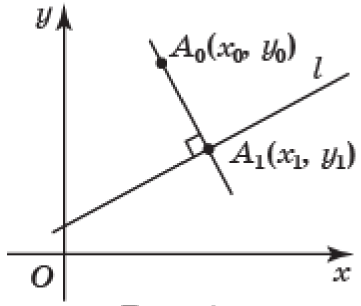

Рис. 4

Уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной данной прямой, имеет вид $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.
Решая систему уравнений

$$\begin{cases} b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

находим координаты точки A_1 пересечения этой прямой с данной прямой l

$$x_1 = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2},\ y_1 = \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2}.$$

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем искомую формулу расстояния h от точки до прямой

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Рассмотрим ещё один важный способ задания прямой, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0)$, с данным направляющим вектором $\vec{m}(a,\ b)$,

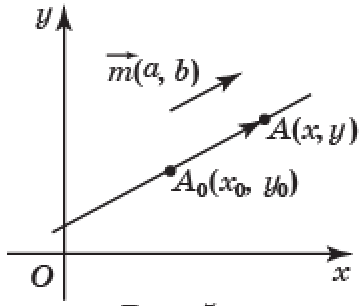

Рис. 5

Точка $A(x,\ y)$ принадлежит указанной прямой, если вектор $\overrightarrow{A_0A}$ коллинеарен вектору $\vec{m}(a,\ b)$, Это выполняется, если для некоторого числа t выполняются равенства $x - x_0 = at$, $y - y_0 = bt$. Следовательно, данная прямая задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases}$$

в которых t называется параметром, а сами уравнения называются параметрическими уравнениями прямой.

Если параметр t считать временем, то параметрические уравнения прямой можно использовать для задания прямолинейного и равномерного движения точки на координатной плоскости.

Найдём выражение для скорости этого движения. За время от t_1 до t_2 точка пройдёт путь от точки $A_1(x_0+at_1,\ y_0+bt_1)$ до точки $A_2(x_0+at_2,\ y_0+bt_2)$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ будет иметь координаты $(a(t_2 - t_1),\ b(t_2 - t_1))$. Его длина равна $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot |t_2 - t_1|$. Разделив длину пройдённого пути на время, получим искомое выражение для скорости v.

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, с физической точки зрения направляющий вектор $\vec{m}(a,\ b)$ является вектором скорости движения точки по прямой.

Параметрические уравнения используются не только для задания прямой, но и для задания кривых на плоскости. В этом случае параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – функции от t.

Рассмотренные способы задания прямой на плоскости, а также формулы для нахождения углов и расстояний могут быть перенесены на задание плоскости в пространстве. А именно, плоскость в пространстве можно задавать следующими способами.

1. Плоскость в пространстве, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с вектором нормали $\vec{n}(a, b, c)$ задаётся уравнением

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2. Плоскость в пространстве, проходящая через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, не принадлежащие одной прямой, задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Косинус угла между пересекающимися плоскостями, с заданными векторами нормалей $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$, выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

Расстояние h от точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, выражается формулой

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Прямая в пространстве, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\vec{m}(a, b, c)$) задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

При этом, направляющий вектор $\vec{m}(a, b, c)$ является вектором скорости движения точки по прямой в пространстве.

Кривые в пространстве можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – функции от t.

Литература

1. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.

2. Мерзляк А. Г. и др. Геометрия. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. – М.: Вентана-Граф, 2015.

3. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2022.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.