ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИИ ДЛЯ ЗНАКОМСТВА СТАРШЕКЛАССНИКОВ С МНОГОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Ключевые слова: метод аналогии, многомерная геометрия, гиперкуб, гипертетраэдр.
Аннотация: в работе рассматриваются возможности использования метода аналогии для знакомства старшеклассников с многомерной геометрией и многомерными фигурами. Предлагаются упражнения для самостоятельного решения.

USING THE ANALOGY METHOD TO INTRODUCE HIGH SCHOOL STUDENTS TO MULTIDIMENSIONAL GEOMETRY

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Keywords: analogy method, multidimensional geometry, hypercube, hypertetrahedron.
Abstract: the paper discusses the possibilities of using the analogy method to introduce high school students to multidimensional geometry and multidimensional figures. Exercises for self-decision are offered.

Многомерные пространства возникают естественным образом в различных задачах математики, физики и многих других наук. Так, например, физические представления о строении Вселенной не разделяют пространство и время и сразу апеллируют к четырёхмерному пространственно-временному континууму.

Изучением многомерных пространств и свойств фигур, расположенных в этих пространствах, занимаются многомерная геометрия, линейная алгебра, функциональный анализ и другие современные науки.

Знакомство старшеклассников с основными понятиями многомерной геометрии позволит им не только узнать, как устроено многомерное пространство, но и лучше понять строение обычного трёхмерного пространства, сформировать необходимые пространственные представления.

В некотором смысле решение задач многомерной геометрии в большей степени по сравнению с решением задач обычной геометрии способствует развитию абстрактного мышления.

В геометрии на плоскости рисунок несёт в себе, как правило, всю информацию о фигуре, что, конечно, помогает найти решение задачи.

В геометрии в пространстве ситуация сложнее. Рисунок уже не вполне отражает свойства рассматриваемой фигуры. Например, прямые, которые изображаются пересекающимися или параллельными, на самом деле могут быть скрещивающимися. Тем не менее решению стереометрических задач могут помочь модели, изготовленные из различных материалов или полученные в компьютерных программах.

В многомерной геометрии изобразить или получить модели для многомерных фигур гораздо сложнее, чем для плоских или пространственных фигур. При этом рисунки или модели многомерных фигур еще в меньшей степени отражает их свойства. При решении задач многомерной геометрии приходится больше опираться на абстрактное мышление, использовать аналогию с соответствующими задачами планиметрии и стереометрии. Поиск таких аналогий, нахождение аналогичных формулировок, проведение аналогичных доказательств и решение задач по аналогии позволяет освоить один из основных методов математики – метод аналогии.

Здесь мы рассмотрим основные понятия многомерной геометрии, определим некоторые фигуры в многомерном пространстве, предложим задачи для самостоятельного решения. Представленный материал можно использовать при изучении стереометрии в старших классах с углублённым изучением математики в рамках обобщающего повторения.

По аналогии с тем, что точки в пространстве однозначно определяются своими координатами (x, y, z), будем считать, что точки A в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ однозначно определяются своими координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, являющимися упорядоченными наборами n действительных чисел.

По аналогии с расстоянием между точками на плоскости и в трёхмерном пространстве, расстоянием между точками $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ будем называть число, обозначаемое $d(A, B)$ и выражаемое формулой

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

Вектор с началом в точке $A(a_1, \ldots, a_n)$ и концом в точке $B(b_1, \ldots, b_n)$ обозначается $\overrightarrow{AB}$. Его координатами является упорядоченный набор чисел $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$.

Вектор с координатами $(0, \ldots, 0)$ называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если равны их координаты.

Суммой векторов $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a} + \vec{b}$, имеющий координаты $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.

Аналогичным образом определяется разность векторов.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ на число t называется вектор, обозначаемый $t\vec{a}$, имеющий координаты $(ta_1, \ldots, ta_n)$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$, Если при этом $t > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными.

Длиной, или модулем, вектора $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ называется число

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$, для которого $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$.

Угол между двумя ненулевыми векторами в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется так же, как и в обычном пространстве. Величина угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется через косинус этого угла по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Она может выражаться в градусах от 0° до 180° и в радианах от 0 до π.

Два ненулевых вектора называются перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $\angle\vec{a}\vec{b}$. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будем также обозначать $\angle BAC$.

Рассмотрим некоторые фигуры в пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. (n-1)-мерная сфера. Напомним, что сферой в трёхмерном пространстве с центром $A(a_1, a_2, a_3)$ и радиусом R называется фигура, состоящая из тех и только тех точек пространства, расстояние от которых до точки A равно R (рис. 1). Она задаётся уравнением

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = R^2.$$

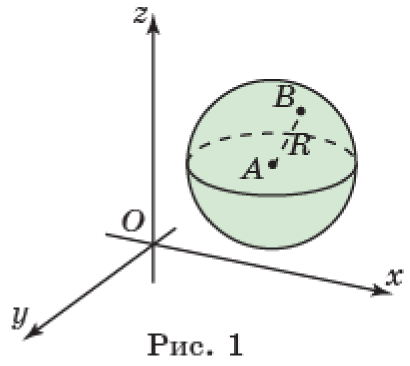

Рис. 1

По аналогии с этим (n-1)-мерной сферой в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром $A(a_1, \ldots, a_n)$ и радиусом R называется фигура, состоящая из тех и только тех точек пространства $\mathbb{R}^n$, расстояние от которых до точки A равно R. Она задаётся уравнением

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = R^2.$$

2. *n*-мерный шар. Шаром в трёхмерном пространстве с центром $A(a_1, a_2, a_3)$ и радиусом R (рис. 1) называется фигура, состоящая из тех и только тех точек пространства, расстояние от которых до точки A меньше или равно R (рис. 1). Он задаётся неравенством

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq R^2.$$

По аналогии с этим n-мерным шаром в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром $A(a_1, \ldots, a_n)$ и радиусом R называется фигура, состоящая из тех и только тех точек пространства, расстояние от которых до точки A меньше или равно R. Он задаётся неравенством

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq R^2.$$

3. (*n*-1)-мерное пространство. Напомним, что в трёхмерном пространстве плоскость (двумерное пространство) задаётся уравнением

$$m_1 x + m_2 y + m_3 z + k = 0,$$

где m_1, m_2, m_3 – числа, одновременно неравные нулю и составляющие координаты вектора $\vec{m}$ нормали к данной плоскости (рис. 2).

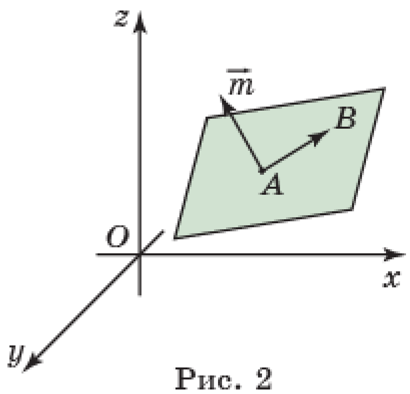

Рис. 2

Если точка $A(a_1, a_2, a_3)$ принадлежит плоскости, то уравнение этой плоскости можно переписать в виде

$$m_1(x - a_1) + m_2(y - a_2) + m_3(x - a_3) = 0.$$

Точка $B(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости, если скалярное произведение векторов $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$ и $\overrightarrow{AB}$ будет равно нулю, т. е. векторы $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ будут перпендикулярны.

По аналогии с этим (n-1)-мерное пространство в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ задаётся уравнением

$$m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n + k = 0,$$

где $m_1, \ldots, m_n$ – числа, одновременно неравные нулю.

Если точка $A(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит (n-1)-мерному пространству, то уравнение этой (n-1)-мерного пространства можно переписать в виде

$$m_1(x_1 - a_1) + \cdots + m_n(x_n - a_n) = 0.$$

Точка $B(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этой (n-1)-мерному пространству, если скалярное произведение векторов $\vec{m}(m_1, \ldots, m_n)$ и $\overrightarrow{AB}$ будет равно нулю, т. е. векторы $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ будут перпендикулярны.

Таким образом, вектор $\vec{m}(m_1, \ldots, m_n)$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в данном (n-1)-мерном пространстве, значит, перпендикулярен самому (n-1)-мерному пространству. Будем называть его вектором нормали к данному (n-1)-мерному пространству.

Углом между двумя (n-1)-мерными пространствами будем называть наименьший из углов между их векторами нормали.

Два (n-1)-мерных пространства называются перпендикулярными, если их векторы нормали перпендикулярны.

4. Прямая. Напомним, что для задания прямой в трёхмерном пространстве достаточно задать точку $A(a_1, a_2, a_3)$ и ненулевой вектор $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$, называемый направляющим вектором. Точка $B(x, y, z)$ будет принадлежать этой прямой, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{l}$ будут коллинеарны (рис. 3), т. е. для некоторого числа t будет выполняться равенство $\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{l}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = a_1 + tl_1, \\ y = a_2 + tl_2, \\ z = a_3 + tl_3. \end{cases}$$

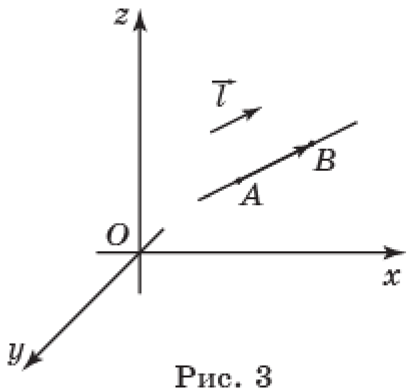

Рис. 3

Прямую можно задавать и двумя точками $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. В этом случае в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Точка $C(x, y, z)$ будет принадлежать этой прямой, если для некоторого числа t выполняются равенства

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2, \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3). \end{cases}$$

По аналогии с этим для задания прямой в n-мерном пространстве достаточно задать точку $A(a_1, \ldots, a_n)$ и ненулевой вектор $\vec{l}(l_1, \ldots, l_n)$, называемый направляющим вектором. Точка $B(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этой прямой, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{l}$ будут коллинеарны, т. е. для некоторого числа t будет выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{l}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tl_1, \\ \quad \ldots, \\ x_n = a_n + tl_n. \end{cases}$$

Прямую можно задавать и двумя точками $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$. В этом случае в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$. Точка $C(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этой прямой, если для некоторого числа t выполняются равенства

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ \quad \ldots, \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n). \end{cases}$$

Углом между двумя прямыми будем называть наименьший из углов между их направляющими векторами.

Две прямые называются перпендикулярными, если их направляющие векторы перпендикулярны.

Прямая называется перпендикулярной $(n$-$1)$-мерному пространству, если она перпендикулярна любой прямой лежащей в этом пространстве.

В качестве направляющего вектора такой прямой можно выбрать вектор нормали к этому пространству.

Прямая, проходящая через точку $A(a_1, \ldots, a_n)$ и перпендикулярная $(n$-$1)$-мерному пространству, задаваемому уравнением $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0$, будет задаваться уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tm_1, \\ \quad \ldots, \\ x_n = a_n + tm_n. \end{cases}$$

5. Отрезок. Отрезок, соединяющий точки $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ в n-мерном пространстве, задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ \quad \ldots, \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n), \end{cases}$$

где t изменяется от 0 до 1. Если $t = 0$, то получаем точку A, если $t = 1$, то получаем точку B.

6. Расстояние от точки до $(n$-$1)$-мерного пространства. Напомним вывод формулы расстояния от точки до плоскости в трёхмерном пространстве.

Рассмотрим плоскость, заданную уравнением

$$m_1x + m_2y + m_3z + k = 0.$$

Пусть $\vec{m}(m_1,\ m_2,\ m_3)$ - её вектор нормали; $A(a_1, a_2, a_3)$ – точка, не принадлежащая этой плоскости; $C(c_1, c_2, c_3)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на данную плоскость; $B(b_1, b_2, b_3)$ – какая-нибудь другая точка плоскости, (рис. 4).

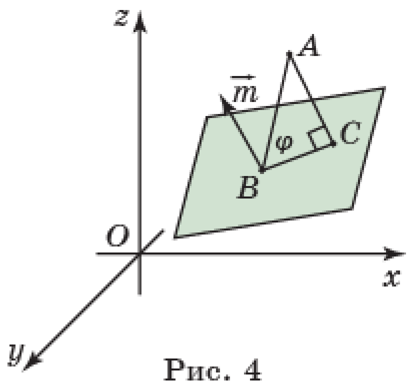

Рис. 4

Косинус угла φ между векторами $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m_1(b_1-a_1)+m_2(b_2-a_2)+m_3(b_3-a_3)}{\sqrt{m_1{}^2+m_2{}^2+m_3{}^2}\cdot|\overrightarrow{AB}|}.$$

Учитывая, что $-m_1a_1 - m_2a_2 - m_3a_3 = k$, и то, что искомое расстояние h равно $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\cos\varphi|$, получаем искомую формулу

$$h = \frac{|m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3+k|}{\sqrt{m_1{}^2+m_2{}^2+m_3{}^2}}.$$

Повторяя этот вывод для точки $A(a_1, \ldots, a_n)$ и (n-1)-мерного пространства $m_1x_1+\cdots+m_nx_n+k=0$ в n-мерном пространстве, получаем следующую формулу расстояния h от данной точки до данного (n-1)-мерного пространства.

$$h = \frac{|m_1a_1+\cdots+m_na_n+k|}{\sqrt{m_1^2+\cdots+m_n^2}}.$$

7. *n*-мерный куб. Куб с ребром a в трёхмерном пространстве (рис. 5) можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le a, \\ 0 \le z \le a. \end{cases}$$

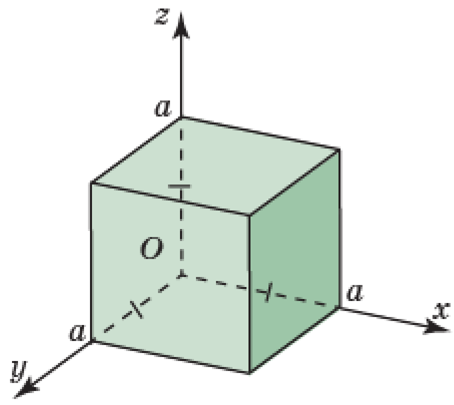

Рис. 5

По аналогии с этим n-мерный куб с ребром a в n-мерном пространстве можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le a, \\ \dots \\ 0 \le x_n \le a. \end{cases}$$

Его вершинами являются точки, каждая координата которых равна 0 или a; рёбра (1-мерные грани) состоят из его точек, каждая координата которых, за исключением одной фиксированной координаты, равна 0 или a; k-мерные грани состоят из его точек, каждая координата которых, за исключением k фиксированных координат, равна 0 или a.

На рисунке 6 изображён четырёхмерный куб в четырёхмерном пространстве.

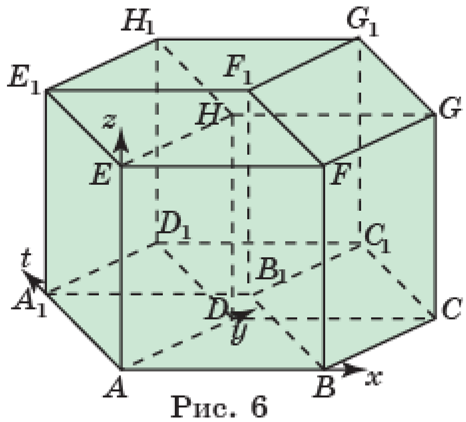

Рис. 6

8. *n*-мерный тетраэдр. Правильный треугольник (рис. 7) можно получить как фигуру в трёхмерном пространстве, образованную всеми точками, координаты x, y, z которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению $x + y + z = a$ ($a > 0$). Стороны этого треугольника будут равны $a\sqrt{2}$.

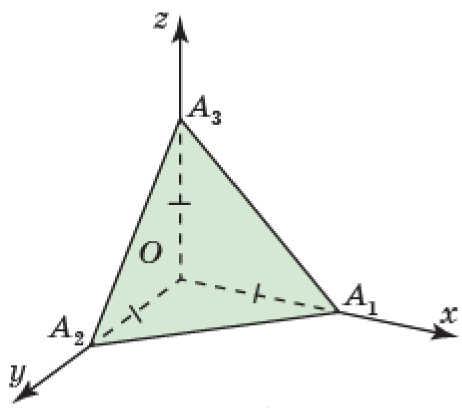

Рис. 7

По аналогии с этим фигура в (n+1)-мерном пространстве, образованная всеми точками, координаты которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = a \; (a > 0),$$

задаёт n-мерный тетраэдр, рёбра которого равны $a\sqrt{2}$.

Его вершинами являются точки, все координаты которых, за исключением одной, равны 0, т. е. точки $A_1(a, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, a)$;

рёбра (1-мерные грани) состоят из его точек, все координаты которых, за исключением двух фиксированных координат, равны 0; k-мерные грани состоят из его точек, все координаты которых, за исключением $k + 1$ фиксированных координат, равны 0.

На рисунке 8 изображён четырёхмерный тетраэдр в пятимерном пространстве.

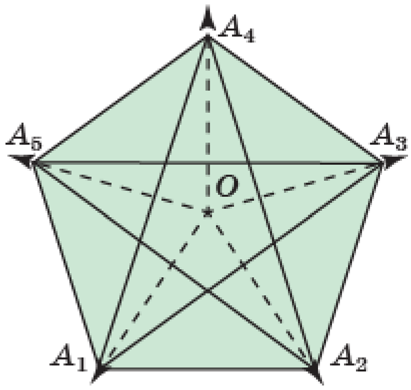

Рис. 8

9. *n*-мерный октаэдр. Выясним, какая фигура в n-мерном пространстве, задаётся неравенством

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1.$$

В случае $n = 2$ искомой фигурой является квадрат (рис. 9).

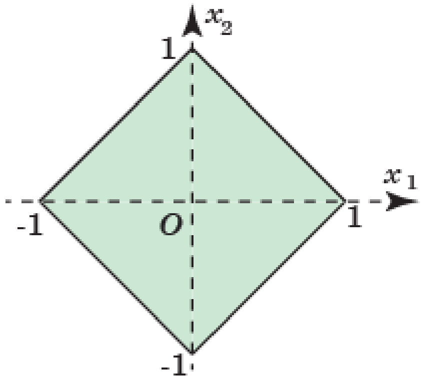

Рис. 9

В случае $n = 3$ искомой фигурой является октаэдр (рис. 10). Его двумерными гранями являются правильные треугольники.

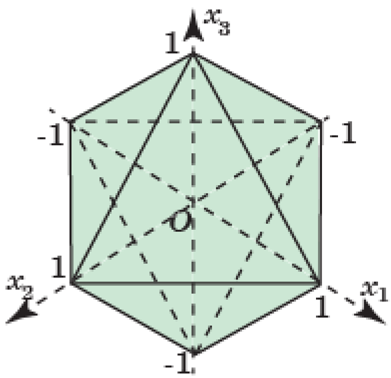

Рис. 10

В случае $n = 4$ искомый 4-мерный многогранник изображён на рисунке (рис. 11). Он называется 4-мерным октаэдром. Его 3-мерными гранями являются тетраэдры.

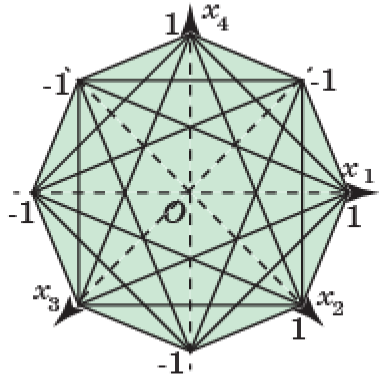

Рис. 11

В общем случае искомый многогранник называется n-мерным октаэдром. Его (n-1)-мерными гранями являются (n-1)-мерные тетраэдры, один из которых образован всеми точками, координаты x_1, …, x_n которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1.$$

Упражнения

1. В n-мерном пространстве найдите расстояние между точками O(0, …, 0) и A(1, …, 1).

Ответ. $\sqrt{n}$.

2. Докажите, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 5 = 0$ задаёт трёхмерную сферу в четырёхмерном пространстве. Найдите её центр и радиус.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 3)^2 + (x_4 - 4)^2 = 25$. Оно задаёт трёхмерную сферу с центром в точке A(-1, 2, -3, 4) и радиусом 5.

3. Напишите уравнение сферы с центром в точке A(1, …, 1), проходящей через точку O(0, …, 0).

Ответ. $(x_1 - 1)^2 + \cdots + (x_n - 1)^2 = n$.

4. Напишите уравнение (n-1)-мерного пространства в n-мерном пространстве, проходящего через точку A(1, 0, …, 0) с вектором нормали $\vec{m}(1, \ldots, 1)$.

Ответ. $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

5. Напишите уравнение (n-1)-мерного пространства в n-мерном пространстве, проходящего через точки (a_1, 0, …, 0), …, (0, …, 0, a_n), где a_1, …, $a_n \neq 0$.

Ответ. Непосредственная проверка показывает, что искомое (n-1)-мерное пространство, задаётся уравнением

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1.$$

6. Найдите косинус угла между (n-1)-мерными пространствами в n-мерном пространстве, заданными уравнениями $x_1 + \dots + x_n = 1$ и $x_1 = 0$.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Найдите задание прямой, проходящей через точку $O(0, \dots, 0)$ и перпендикулярной (n-1)-мерному пространству, заданному уравнением $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Ответ. $\begin{cases} x_1 = t, \\ \quad \dots, \\ x_n = t. \end{cases}$

8. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$ в n-мерном пространстве.

Ответ. $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

9. Найдите расстояние от точки $O(0, \dots, 0)$ в n-мерном пространстве до (n-1)-мерного пространства, задаваемого уравнением $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

10. Установите взаимное расположение в n-мерном пространстве (n-1)-мерной сферы, заданной уравнением ${x_1}^2 + \dots + {x_n}^2 = 1$, и ($n$-1)-мерного пространства, заданного уравнением $x_1 + \dots + x_n = a$. Для каких чисел a эти (n-1)-сфера и (n-1)-пространство: а) пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек?

Ответ: а) $|a| < \sqrt{n}$; б) $|a| = \sqrt{n}$; в) $|a| > \sqrt{n}$.

11. Докажите, что пересечением (n-1)-мерной сферы, заданной уравнением ${x_1}^2 + \dots + {x_n}^2 = 1$, и ($n$-1)-мерного пространства, заданного уравнением $x_1 + \dots + x_n = 1$, является (n-2)-мерная сфера. Найдите её центр и радиус.

Решение. Обозначим P основание перпендикуляра, опущенного из точки $O(0, \dots, 0)$ на данное (n-1)-мерное пространство (рис. 12).

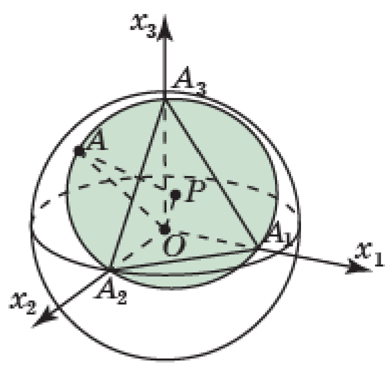

Рис. 12

Точка P имеет координаты $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$. Для точки A, принадлежащей пересечению (n-1)-мерной сферы и (n-1)-мерного пространства, рассмотрим прямоугольный треугольник OAP, в котором гипотенуза OA равна 1, катет OP равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$. По теореме Пифагора находим $AP = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Следовательно, точка A принадлежит (n-2)-мерной сфере с центром P и радиусом $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Таким образом, пересечением данных (n-1)-мерных сферы и (n-1)-мерного пространства является (n-2)-мерная сфера с центром P и радиусом $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

12. Сколько у n-мерного куба: а) вершин; б) рёбер; в)* k-мерных граней?

Решение. Для подсчёта количества k-мерных граней нужно зафиксировать k координат. Это можно сделать C_n^k способами. Каждая из оставшихся $n - k$ координат равна 0 или a. Число способов расстановки чисел 0, a в этих координатах равно 2^{n-k}. Следовательно, число k-мерных граней у n-мерного куба равно $C_n^k 2^{n-k}$. В частности, число вершин равно 2^n, число рёбер равно $n2^{n-1}$.

13. Сколько у n-мерного тетраэдра: а) вершин; б) рёбер; в)* k-мерных граней?

Решение. Для подсчёта количества k-мерных граней нужно зафиксировать $k + 1$ координат. Это можно сделать C_{n+1}^{k+1} способами. Следовательно, число k-мерных граней у n-мерного тетраэдра равно C_{n+1}^{k+1}. В частности, число вершин равно n+1, число рёбер равно $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$.

14. Найдите длину диагонали (расстояние между противоположными вершинами n-мерного единичного куба.

Решение. Длина диагонали равна расстоянию между вершинами (0, …, 0) и (1, …, 1) n-мерного единичного куба. Это расстояние равно $\sqrt{n}$.

15. Найдите косинус угла, образованного диагональю n-мерного единичного куба, и ребром, имеющим с этой диагональю общую вершину.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

16. Для единичного четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 4) найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AG}$ и: а) $\overrightarrow{BD_1}$; б) $\overrightarrow{BG_1}$; в) $\overrightarrow{BE_1}$; г) $\overrightarrow{BH}$.

Решение. Имеем: A(0, 0, 0, 0), B(1, 0, 0, 0), G(1, 1, 1, 0), D_1(0, 1, 0, 1), G_1(1, 1, 1, 1), E_1(0, 0, 1, 1), H(0, 1, 1, 0); $\overrightarrow{AG}(1,1,1,0)$, $\overrightarrow{BD_1}(-1,1,0,1)$, $\overrightarrow{BG_1}(0,1,1,1)$, $\overrightarrow{BE_1}(-1,0,1,1)$, $\overrightarrow{BH}(-1,1,1,0)$, Следовательно, косинусы искомых углов равны: а), в) 0; б) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$.

17. Докажите, что для любой вершины C единичного n-мерного куба, отличной от вершин $A(0, \ldots, 0)$ и $B(1, \ldots, 1)$, угол ACB равен 90°.

Решение. Пусть для вершины C координаты с номерами $i_1, \ldots, i_k$ равны 0, а координаты с остальными номерами равны 1. Тогда для вектора $\overrightarrow{AC}$ имеет такие же координаты, а для вектора $\overrightarrow{BC}$ координаты с номерами $i_1, \ldots, i_k$ равны 1, а координаты с остальными номерами равны 0. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны нулю. Следовательно, $\angle ACB = 90°$.

18. (n-1)-мерная сфера называется вписанной в n-мерный куб, если она касается всех его (n-1)-мерных граней. Сам n-мерный куб называется описанным около (n-1)-мерной сферы. Найдите радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный куб.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

19. n-мерный куб называется вписанным в (n-1)-мерную сферу, если все его вершины принадлежат этой (n-1)-мерной сфере. Сама (n-1)-мерная сфера называется описанной около n-мерного куба. Найдите радиус (n -1)-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного куба.

Ответ. $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Заметим, что Радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный куб, при увеличении n не меняется, а радиус описанной (n-1)-мерной сферы увеличивается и стремится к бесконечности при n стремящемся к бесконечности.

Таким образом, хотя размеры единичного n-мерного куба стремятся к бесконечности при n стремящемся к бесконечности, тем не менее, его объём остаётся равным 1.

20. n-мерный тетраэдр называется вписанным в (n-1)-мерную сферу, если все его вершины принадлежат этой (n-1)-мерной сфере. Сама (n-1)-мерная сфера называется описанной около n-мерного тетраэдра. На рисунке 13 показан 2-мерный тетраэдр (треугольник), вписанный в 1-мерную сферу (окружность). Найдите радиус n-1-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного тетраэдра.

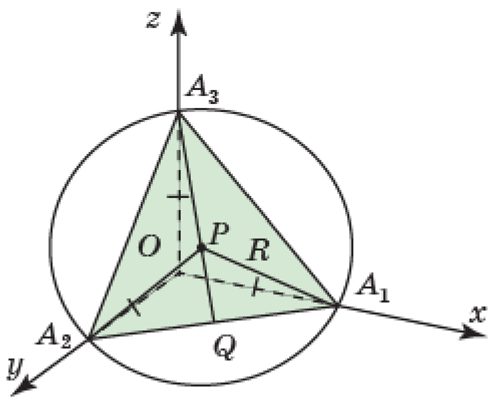

Рис. 13

Решение. Рассмотрим n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$. Непосредственная проверка показывает, что точка $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$ одинаково удалена от всех вершин данного n-мерного тетраэдра. Следовательно, она является центром описанной (n-1)-мерной сферы. Радиус этой (n-1)-мерной сферы равен расстоянию между точками $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$ и $A_1(1, 0, \dots, 0)$, т. е. равен $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Искомый радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного тетраэдра, равен $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

21. (n-1)-мерная сфера называется вписанной в n-мерный тетраэдр, если она касается всех его (n-1)-мерных граней. Сам n-мерный тетраэдр называется описанным около (n-1)-мерной сферы. На рисунке 14 показана 1-мерная сфера (окружность), вписанная в 2-мерный тетраэдр (треугольник). Найдите радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный тетраэдр.

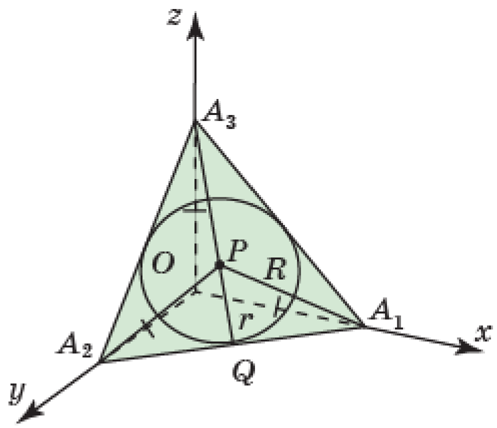

Рис. 14

Решение. Рассмотрим n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$, а рёбра равны $\sqrt{2}$. Заметим, что точка $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$, равноудалённая от вершин n-мерного тетраэдра, будет равноудалена и от его граней. Следовательно, она будет центром вписанной (n-1)-мерной сферы. Обозначим $Q\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0\right)$ центр (n-2)-мерной сферы, описанной около (n-1)-мерного тетраэдра, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_n(0, \dots, 1, 0)$. Радиус ($n$-1)-мерной сферы, вписанной в рассмотренный n-мерный тетраэдр, равен расстоянию между точками P и Q. Найдём его, используя теорему Пифагора, применённую к прямоугольному треугольнику A_1PQ, в котором

$A_1P = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $A_1Q = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Получим $PQ = \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}$. Искомый радиус ($n$-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный тетраэдр, равен $\sqrt{\frac{1}{2n(n+1)}}$.

Заметим, что радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного тетраэдра, при увеличении n остаётся меньшим $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а радиус вписанной (n-1)-мерной сферы уменьшается и стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

22. Найдите угол, образованный соседними (n-1)-мерными гранями n-мерного тетраэдра.

Решение. Напомним, как находится угол, образованный соседними гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ трёхмерного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Обозначим P середину их общего ребра A_1A_2 (рис. 15). Прямые A_3P и A_4P будут перпендикулярны ребру A_1A_2. Искомый угол φ равен линейному углу A_3PA_4. Его косинус можно найти, используя теорему косинусов, применённую к треугольнику A_3PA_4. Он равен $\frac{1}{3}$.

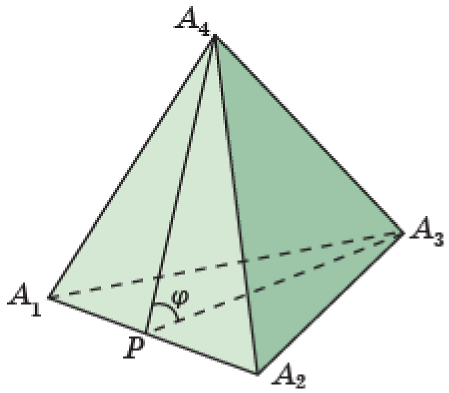

Рис. 15

Рассмотрим теперь n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots , 0)$, … , $A_{n+1}(0, \dots , 0, 1)$. В качестве его (n-1)-мерных граней возьмём грани, вершинами которых являются точки A_1, … , A_n и A_1, …, A_{n-1}, A_{n+1}. Их общей (n-2)-мерной гранью является (n-2)-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки A_1, … , A_{n-1}. Обозначим P центр (n-3)-мерной сферы, описанной около этого (n-2)-мерного тетраэдра. Как было доказано ранее, он имеет координаты $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0, 0\right)$. Прямые A_nP и $A_{n+1}P$ будут перпендикулярны общей (n-2)-мерной грани. Искомый угол φ равен углу между векторами $\overrightarrow{PA_n}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 1, 0\right)$ и $\overrightarrow{PA_{n+1}}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 0, 1\right)$. Воспользуемся формулой $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{PA_n}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}}{|\overrightarrow{PA_n}|\cdot|\overrightarrow{PA_{n+1}}|}$. Получим $\cos\varphi = \frac{1}{n}$.

Заметим, что косинус угла между соседними (n-1)-мерными гранями n-мерного тетраэдра при увеличении n стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности. Следовательно, угол стремиться к 90°.

Можно доказать, что объём единичного n-мерного тетраэдра стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

23. Какие (n-1)-мерные многогранники являются (n-1)-мерными гранями n-мерного октаэдра, задаваемого неравенством $|x_1|+\cdots+|x_n| \leq 1$?

Ответ. (n-1)-мерные тетраэдры.

24. Сколько k-мерных граней имеет n-мерный октаэдр?

Решение. Для подсчёта количества k-мерных граней нужно зафиксировать $k + 1$ координату. Это можно сделать C_n^{k+1} способами. Каждая из них может равняться -1 или 1. Следовательно, число k-мерных граней у (n-1)-мерного октаэдра равно $2^{k+1}C_n^{k+1}$. В частности, число вершин равно $2n$, число рёбер равно $4C_n^2 = 2n(n-1)$.

25. Найдите угол, образованный соседними (n-1)-мерными гранями n-мерного октаэдра.

Решение. Напомним, как находится угол, образованный соседними гранями трёхмерного октаэдра. Обозначим C середину общего ребра соседних граней октаэдра. Обозначим A и B – противолежащие вершины этих граней. (рис. 16). Искомый угол φ равен линейному углу ACB. Его косинус можно найти, используя теорему косинусов, применённую к треугольнику ACB. Он равен $-\frac{1}{3}$.

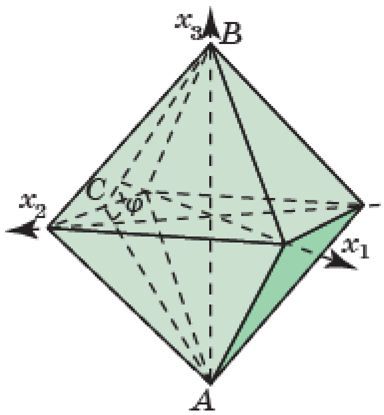

Рис. 16

Рассмотрим теперь n-мерный октаэдр, который задаётся неравенством $|x_1|+\cdots+|x_n| \leq 1$. В качестве его ($n$-1)-мерных граней возьмём (n-1)-мерные тетраэдры, вершинами которых являются точки с координатами (1, 0, …, 0), …, (0, …, 0, 1) и (1, 0, …, 0), …, (0, …, 1, 0), (0, …, 0, -1). Их общей (n-2)-мерной гранью является (n-2)-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки с координатами (1, 0, …, 0), …, (0, …, 1, 0), Обозначим C центр (n-3)-мерной сферы, описанной около этого (n-2)-мерного тетраэдра. Как было доказано ранее, он имеет координаты $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0\right)$. Обозначим

A и B точки с координатами соответственно (0, …, 0, 1) и (0, …, 0, -1). Искомый угол φ равен углу между векторами. $\overrightarrow{CA}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 1\right)$ и $\overrightarrow{CB}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, -1\right)$. Косинус этого угла равен $\frac{2-n}{n}$.

Заметим, что косинус угла между соседними (n-1)-мерными гранями n-мерного октаэдра при увеличении n стремится к -1 при n стремящемся к бесконечности. Следовательно, угол стремиться к 180°.

26. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около n-мерного октаэдр, заданного неравенством $|x_1| + \dots + |x_n| \le 1$.

Решение. Центром искомой описанной (n-1)-мерной сферы является точка O(0, …, 0). Радиус этой сферы равен расстоянию от точки O до вершины с координатами (1, 0, …, 0). Этот радиус равен 1.

27. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в n-мерный октаэдр, заданный неравенством $|x_1| + \dots + |x_n| \le 1$.

Решение. Центром искомой вписанной (n-1)-мерной сферы является точка O(0, …, 0). Радиус этой сферы равен расстоянию от точки O до (n-1)-го пространства, заданного уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Это расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Следовательно, радиус вписанной (n-1)-мерной сферы равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Заметим, что этот радиус стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

28. Докажите, что центры (n-1)-мерных граней n-мерного куба являются вершинами n-мерного октаэдра. Найдите его ребро, если ребро n-мерного куба равно 1.

Решение. На рисунке 17 показан куб в трёхмерном пространстве, центрами граней которого является октаэдр.

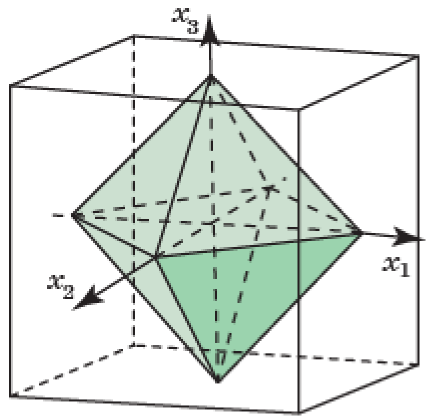

Рис. 17

Рассмотрим n-мерный куб, заданный системой неравенств

$$\begin{cases} -1 \le x_1 \le 1, \\ \quad\dots \\ -1 \le x_n \le 1. \end{cases}$$

Его рёбра равны $\sqrt{2}$, а (n-1)-мерные грани состоят из точек n-мерного куба, одна из фиксированных координат которых, равна 1 или -1. Число таких (n-1)-мерных граней равно $2n$. Их центрами являются точки, все координаты которых, за исключением одной фиксированной координаты, равны 0, а эта фиксированная координата равна 1 или -1. Такие точки являются вершинами n-мерного октаэдра, рёбра которого равны $\sqrt{2}$. Если ребро n-мерного куба равно 1, то ребро соответствующего n-мерного октаэдра будет равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

29. Докажите, что центры (n-1)-мерных граней n-мерного октаэдра, являются вершинами n-мерного куба. Найдите его ребро, если ребро n-мерного октаэдра равно 1.

Решение. На рисунке 18 показан октаэдр в трёхмерном пространстве, центрами граней которого является куб.

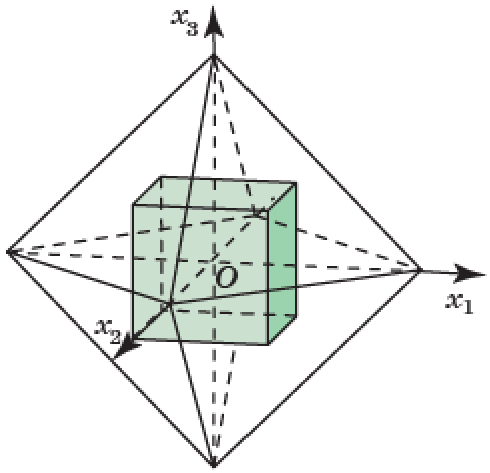

Рис. 18

Рассмотрим n-мерный октаэдр, заданный неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$. Его рёбра равны $\sqrt{2}$. Центрами его граней являются точки, каждая координата которых равна $\frac{1}{n}$ или $-\frac{1}{n}$. Эти точки являются вершинами n-мерного куба, рёбра которого равны $\frac{2}{n}$. Значит, для n-мерного октаэдра, рёбра которого равны 1, рёбра соответствующего n-мерного куба будут равны $\frac{\sqrt{2}}{n}$,

Свойства, рассмотренные в задачах 28 и 29, означают, что n-мерный куб и n-мерный октаэдр являются взаимно двойственными.

30. Докажите, что центры (n-1)-мерных граней n-мерного тетраэдра, являются вершинами n-мерного тетраэдра. Найдите его ребро, если ребро исходного n-мерного тетраэдра равно 1.

Решение. Рассмотрим n-мерный тетраэдр, в (n+1)-мерном пространстве, образованная всеми точками, координаты которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1,$$

Его вершинами являются точки, все координаты которых, за исключением одной, равны 0, т. е. точки $A_1(1, 0, \ldots , 0), \ldots , A_{n+1}(0, \ldots , 0, 1)$, а рёбра равны $\sqrt{2}$ (рис. 19).

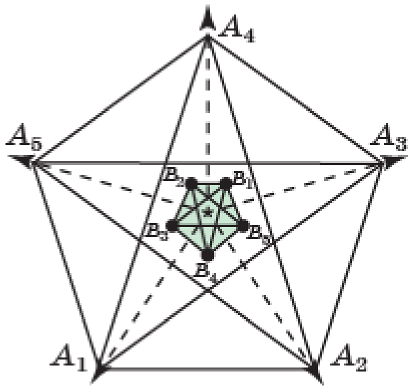

Рис. 19

Центрами его граней являются точки $B_1\left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, …, $B_n\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0\right)$. Расстояния между любыми двумя такими точками равно $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Следовательно, эти точки являются вершинами n-мерного тетраэдра, рёбра которого равны $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Значит, для n-мерного тетраэдра, рёбра которого равны 1, рёбра соответствующего n-мерного тетраэдра будут равны $\frac{1}{n}$,

Это свойство означает, что n-мерный тетраэдр двойственен сам себе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин Г. А. Многомерный куб. – М.: МЦНМО, 2015.

2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966.

3. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Аналитическая геометрия для школьников. – М.: МЦНМО, 2022.

4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Четырёхмерная геометрия. – М.: МЦНМО, 2010.