О ПУТЯХ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЧЯ ГЕОМЕТРИИ В СТАРШИХ КЛАССАХ

В. А. Смирнов, доктор физ.-мат. наук, профессор
Московский педагогический государственный университет
(*Россия*, *Москва*)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
И. М. Смирнова, доктор пед. наук, профессор
Московский педагогический государственный университет
(*Россия*, *Москва*)
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются причины низкого качества обучения геометрии в старших классах; формулируются результаты обучения стереометрии; предлагаются пути для их достижения и повышения качества обучения геометрии в старших классах.

***Ключевые слова*:** стереометрия, результаты обучения.

ON WAYS TO IMPROVE THE QUALITY OF LEARNING GEOMETRY IN HIGH SCHOOL

V. A. Smirnov, doctor of mathematical sciences, full professor
Московский педагогический государственный университет
(*Россия*, *Москва*)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
I. M. Smirnova, doctor of pedagogical sciences, full professor
Moscow state pedagogical university
(*Russia*, *Moscow*)
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Astract. The paper examines the reasons for the poor quality of geometry teaching in high school; the results of teaching stereometry are formulated; ways to achieve them and to improve the quality of geometry education in high school are proposed.

***Keywords*:** stereometry, results in teaching.

Результаты обучения стереометрии в школе оставляют желать лучшего. Так, например, в 2023 году стереометрическую задачу № 13 ЕГЭ по математике полностью решило около 1% учащихся, сдававших ЕГЭ на профильном уровне.

В демоверсии ЕГЭ по математике профильного уровня 2023 года помещена следующая задача.

Задача. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны. Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Авторы этой задачи предлагают следующее решение.

Решение. а) Пусть точка H — середина AC (рис. 1). Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

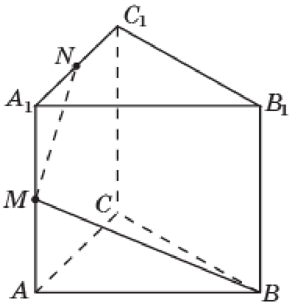

Рис. 1

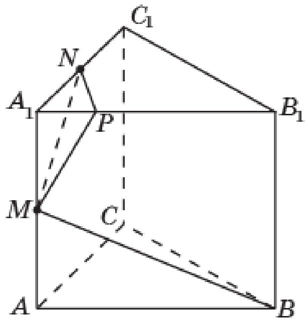

Рис. 2

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 (рис. 2). Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1. Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла. Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Отметим, что авторы слишком усложнили решение. На самом деле, решение этой задачи почти устное. Оно не использует теорему Пифагора и занимает несколько строчек. Приведём это решение.

Решение 2. Ортогональная проекция MP наклонной MN на плоскость ABB_1 перпендикулярна прямой BM (следует из того, что $A_1P = \frac{1}{4}A_1B_1$). Следовательно, прямой BM перпендикулярна сама наклонная MN. Угол NMP является линейным углом между плоскостями BMN и ABB_1. Отрезок NP равен половине высоты основания призмы. Отрезок NM равен половине диагонали боковой грани. Значит, синус искомого угла равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

В данной статья мы рассмотрим причины низких результатов решения стереометрической задачи ЕГЭ, предложим пути для их улучшения.

Сформулируем умения, которыми должны обладать учащиеся, после обучения стереометрии в 10-м классе. Учащиеся должны уметь:

- изображать и моделировать основные пространственные фигуры (куб, параллелепипед, призму пирамиду) в компьютерных программах;

- распознавать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве;

- используя признаки параллельности и перпендикулярности, доказывать параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей;

- находить углы между прямыми и плоскостями;

- находить расстояния: от точки до прямой; от точки до плоскости; между скрещивающимися прямыми; между параллельными прямыми и плоскостями;

- строить сечения многогранников и находить их площади.

Выясним, в какой мере на достижение этих умений нацелены учебник [1] и Федеральная рабочая программа среднего общего образования по математике (углублённый уровень) [2].

В данном учебнике и тематическом планировании, представленном в данной программе, предлагается следующий порядок прохождения разделов стереометрии 10-го класса.

1. Введение в стереометрию (23 часа).
2. Взаимное расположение прямых в пространстве (6 часов).
3. Параллельность прямых и плоскостей (8 часов).
4. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве (25 часов).
5. Углы и расстояния (16 часов).
6. Многогранники (7 часов).
7. Векторы в пространстве (12 часов)
8. Обобщающее повторение и систематизация знаний (5 часов).

Таким образом, раздел «Многогранники», в котором вводится понятие многогранника, определяются понятия призмы и пирамиды, рассматриваются их виды, доказывается теорема Эйлера для выпуклых многогранников, расположен после изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Учитывая, что для углублённого уровня на геометрию отводится 3 часа в неделю, получаем, что 26 недель стереометрия изучается без использования призмы и пирамиды, а на сами призмы и пирамиды отводится около 4-ч часов в четвёртой четверти десятого класса.

Конечно, при таком подходе, не имея призмы и пирамиды, трудно научить решать задачи на установление взаимного расположения и доказательство параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, нахождение расстояний и углов, построение сечений призм и пирамид, которые необходимы для подготовки к ЕГЭ. При этом нельзя просто переставить темы и определить призму и пирамиду в начале изучения стереометрии, поскольку их определения в учебнике [2] используют параллельность плоскостей, перпендикулярность прямой и плоскости и др.

Выходом из такой ситуации является подход к определению основных многогранников, предложенный в учебнике [3], и реализованный в учебнике [4], в котором основные многогранники определяются с самого начала изучения стереометрии, а затем используются для иллюстрации взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, доказательства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, решения задач на нахождение расстояний и углов, построения сечений. Приведём эти определения.

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.

Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, называется *прямоугольным*.

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых *основаниями* призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых *боковыми гранями* призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются *боковыми рёбрами* призмы.

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной*.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной*.

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого *основанием* пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых *боковыми гранями* пирамиды. Общая вершина боковых граней называется *вершиной* пирамиды. Рёбра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются *боковыми рёбрами*.

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые рёбра которой равны, называется *правильной*.

Для лучшего развития пространственных представлений учащихся можно воспользоваться компьютерной программой GeoGebra [5], в которой можно моделировать плоские и пространственные фигуры, проводить дополнительные построения, строить сечения многогранников.

Список литературы

1. Атанасян Л. С. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс. Геометрия: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – М.: Просвещение, 2022.
2. https://fgosreestr.ru/uploads/files/8f0b775c02a844a0bd0cf8bd06b1d4fb.pdf
3. Киселёв А. П. Геометрия / под ред. Н. А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс. Геометрия: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2020.
5. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.