В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

2024

Смирнов В. А., Смирнова И. М.

Сферическая геометрия для школьников: учебное пособие для учащихся общеобразовательных учреждений.

Пособие предназначено как для учащихся старших классов, так и для студентов университетов, изучающих высшую геометрию. В нём рассмотрены основные понятия, свойства и теоремы геометрии на сфере, приведены упражнения для самостоятельной работы. Решение этих упражнений поможет не только освоить сферическую геометрию, но и повторить основные разделы геометрии на плоскости. В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям. Для моделирования фигур на сфере показано использование компьютерной программы GeoGebra.

ВВЕДЕНИЕ

Сферическая геометрия, или геометрия на сфере, возникла в связи с мыслями о шарообразности Земли, которые появились в результате астрономических наблюдений в VI-V вв. до н. э. Было замечено, в частности, что при лунных затмениях тень Земли на Луне имеет форму круга. Это объяснили тем, что, встав между Солнцем и Луной, Земля отбрасывает свою тень на Луну. Следовательно, Земля – круглая или шарообразная.

Мысль о шарообразности Земли подтверждали наблюдения мореплавателей за появлением из-за горизонта кораблей: сначала показывалась верхняя часть мачты, а затем, постепенно, по мере приближения корабля, появлялись и остальные его части. Такой эффект объясняли тем, что корабль двигается по дуге шаровой поверхности Земли, и его более высокие части раньше выступают из-за наивысшей точки дуги, расположенной между кораблём и наблюдателем.

Так же, как и евклидова геометрия, сферическая геометрия применялась при решении практических задач, которые были необходимы путешественникам, мореплавателям, которые ориентировались по звёздам и др.

Первые сведения о сферической геометрии относятся к I веку н. э. Так, например, в книге «Сферика» греческого математика Менелая рассматривались сферические треугольники и изучались их свойства.

Большой вклад в сферическую геометрию внёс другой греческий математик Клавдий Птолемей (II в.), который изложил основы сферической геометрии в своей работе «Великое математическое построение астрономии в 13 книгах».

Особую роль в развитии сферической геометрии сыграл Леонард Эйлер (1707-1783), благодаря которому сферическая геометрия приобрела современный вид.

В настоящее время сферическая геометрия находит применение в астрономии, где широко используется вспомогательная небесная сфера, в геодезии, где поверхность Земли в первом приближении представляют в виде сферы, в навигации для прокладки курсов кораблей, самолётов и др., в картографии для составления географических карт и т. д.

Геометрия на сфере имеет много общего с геометрией на плоскости, но есть и свои принципиальные отличия. Знакомство учащихся с геометрией на сфере важно для любого человека, так как оно развивает необходимые пространственные представления, позволяет учащимся лучше понять геометрию и пространство, в котором мы живём.

Данное пособие предназначено как для учащихся старших классов, так и для студентов университетов, изучающих высшую геометрию. В нём рассмотрены основные понятия, свойства и теоремы геометрии на сфере, аналогичные понятиям, свойствам и теоремам планиметрии, приведены упражнения для самостоятельной работы. Решение этих упражнений поможет не только освоить сферическую геометрию, но и повторить основные разделы геометрии на плоскости и в пространстве.

В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям.

Для моделирования фигур на сфере показано использование компьютерной программы GeoGebra.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой сферической геометрии, рекомендуем книги [1-3].

1. Сфера

Напомним, что *сферой* называется фигура в пространстве, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом (рис. 1.1). Радиусом сферы называется также отрезок, соединяющий центр сферы и какую-нибудь её точку.

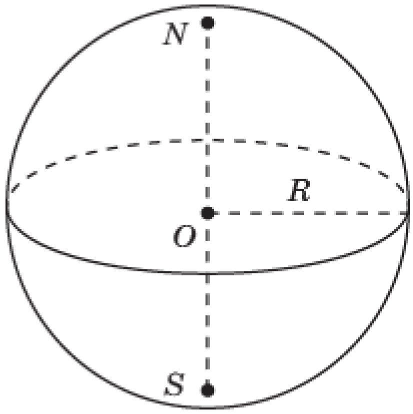

Рис. 1.1

Для изображения сферы на плоскости используют ортогональное проектирование.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведём плоскость α, проходящую через центр сферы *O* и параллельную плоскости проектирования π. Поскольку плоскости α и π параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 1.2).

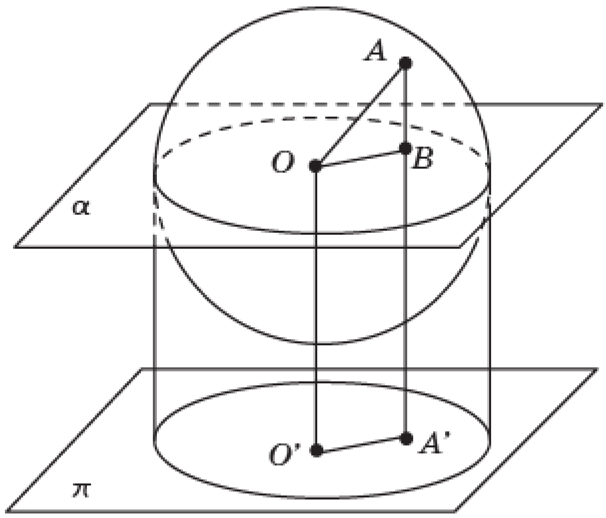

Рис. 1.2

Сечением сферы плоскостью α является окружность радиусом *R*, равного радиусу сферы. Если *A* точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и B её ортогональная проекция на плоскость α, то $OB < OA \leq R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса. ■

Для большей наглядности изображения сферы на ней выделяют *большую окружность* (сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр) и *полюсы* (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется *экватором*.

Выясним, какой фигурой изображается большая окружность. Пусть окружность лежит в плоскости α, образующей угол φ с плоскостью проектирования π. Через центр O данной окружности проведём плоскость β, параллельную плоскости π. Обозначим AB диаметр окружности, лежащий в этой плоскости. Его ортогональной проекцией является отрезок $A'B'$, равный и параллельный отрезку AB (рис. 1.3).

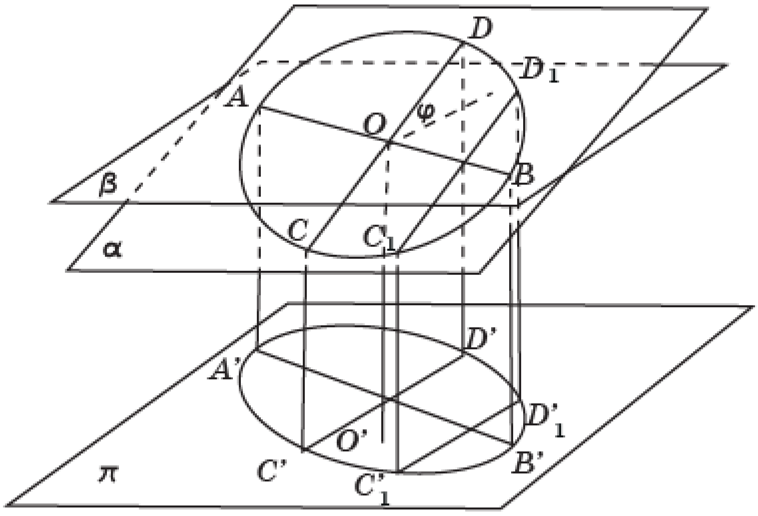

Рис. 1.3

Проведём диаметр CD данной окружности, перпендикулярный диаметру AB. Он образует угол φ с плоскостью проектирования π и проектируется в отрезок $C'D'$, длина которого равна длине диаметра CD, умноженной на cos φ. Если C_1D_1 – хорда данной окружности, параллельная диаметру CD, то её проекцией будет отрезок $C'_1D'_1$, параллельный отрезку $C'D'$, длина которого равна длине хорды C_1D_1, умноженной на cos φ.

Ортогональной проекцией данной окружности на плоскость π является эллипс, получающийся сжатием окружности с диаметром $A'B'$ в направлении перпендикулярного диаметра с коэффициентом cos φ.

Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди, и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось сферы проектируются в перпендикулярные диаметры

C'D' и *S'N'*. Изображение полюсов *N* и *S* на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов *N'* и *S'* на виде сферы слева (рис. 1.4).

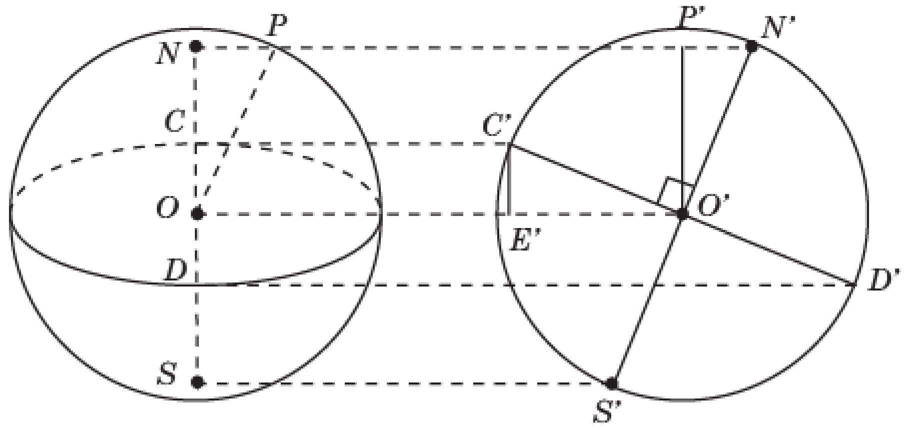

Рис. 1.4

Прямоугольные треугольники *ONP*, *O'P'N'* и *O'E'C'* равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, *NP = P'N' = E'C' = OC*.

Таким образом, полюс *N* должен быть расположен так, чтобы отрезок *NP* был равен малой полуоси *OC* эллипса, изображающего большую окружность сферы. Так же должен быть расположен и полюс *S*.

При изображении сферы иногда изображают не только большую окружность, но и окружности, являющиеся пересечениями сферы с плоскостями, параллельными плоскости большой окружности. Такие окружности называются *параллелями*. Окружности, являющиеся пересечениями сферы с плоскостями, содержащими ось сферы, называются *меридианами*. Параллели и меридианы изображаются эллипсами. На рисунке 1.5 показана сфера вместе с параллелями и меридианами.

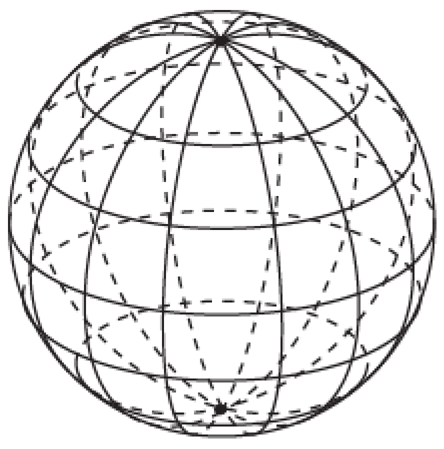

Рис. 1.5

Для моделирования сферы можно использовать свободно распространяемую компьютерную программу GeoGebra. На рисунке 1.6 показано рабочее окно этой программы.

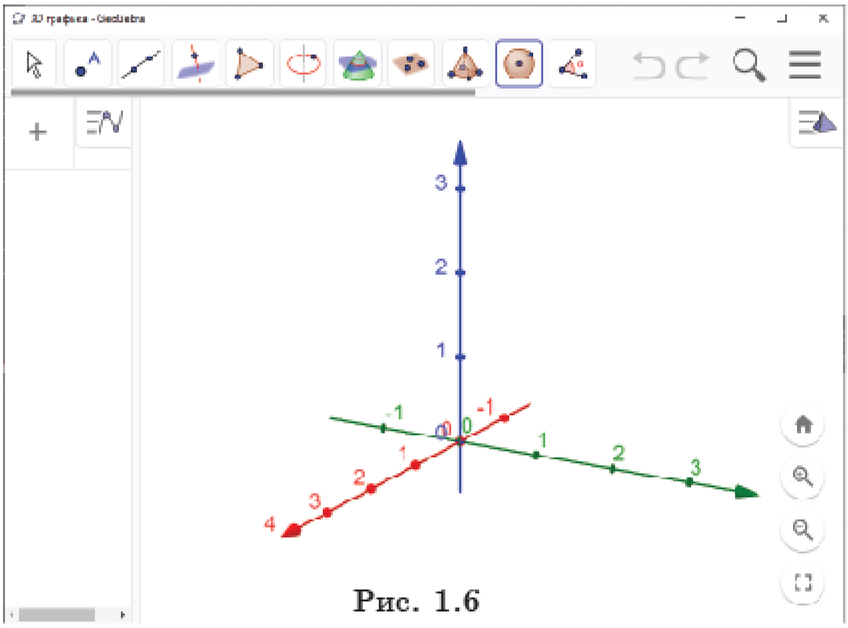

Рис. 1.6

В верхней строке окна расположена панель инструментов. Для получения сферы имеются инструменты: «Сфера по центру и точке», «Сфера по центру и радиусу».

На рисунке 1.7 показана сфера с центром в начале координат и радиусом 1.

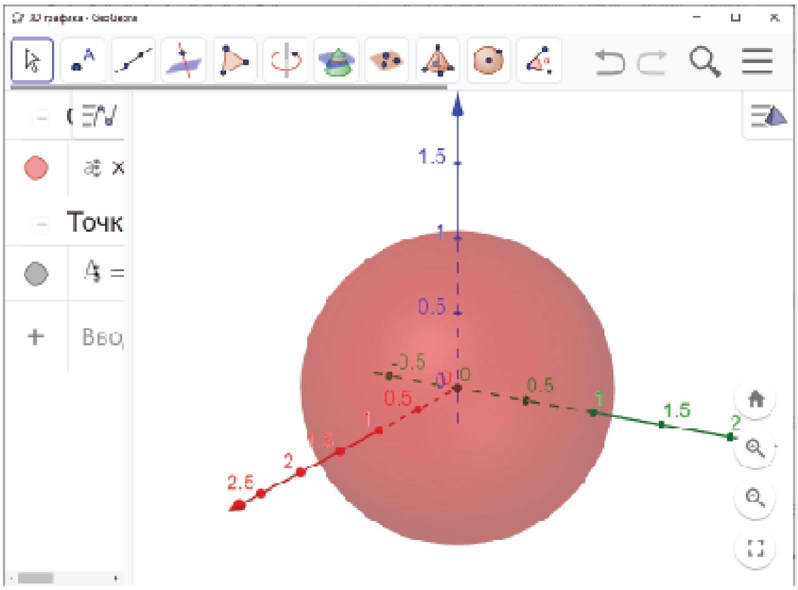

Рис. 1.7

Для получения экватора сделаем следующие шаги.

1. Используя инструмент «Перпендикулярная плоскость», проведём плоскость через начало координат, перпендикулярную оси аппликат.

2. Используя инструмент «Линия пересечения», найдём её линию пересечения со сферой.

3. Уберём плоскость.

В результате получим экватор (рис. 1.8).

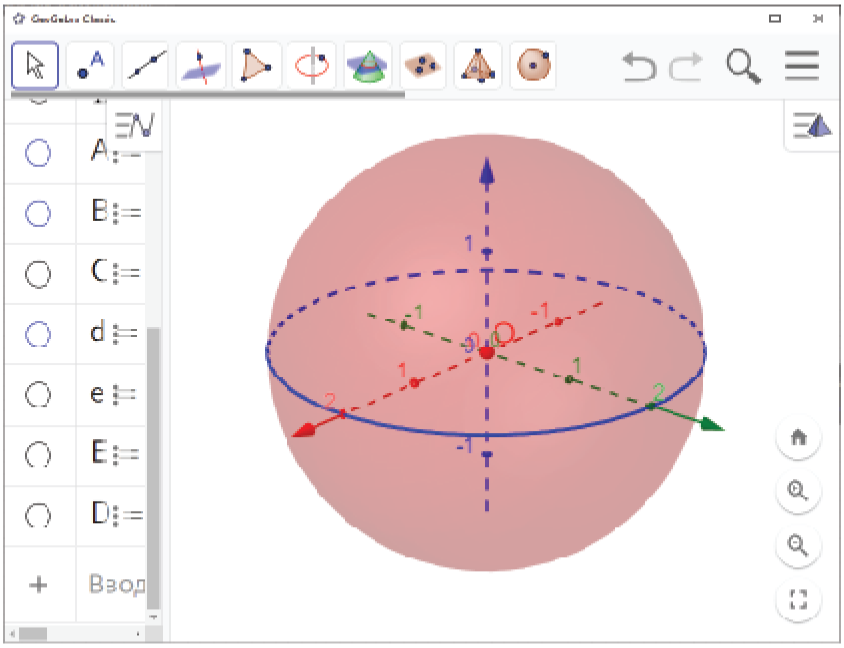

Рис. 1.8

Для получения параллелей делаем аналогичные построения для точек оси аппликат.

Для получения меридианов отмечаем полюс и какую-нибудь точку на экваторе. Через отмеченные точки и начало координат проводим плоскость. Находим её линию пересечения со сферой.

На рисунке 1.9 показаны параллель и два меридиана, полученные таким образом.

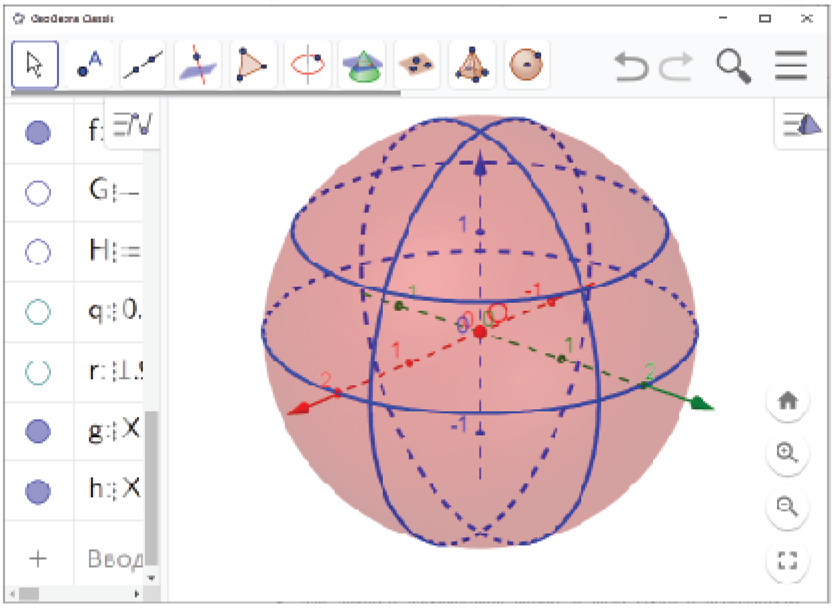

Рис. 1.9

Упражнения

1. Верно ли, что через две точки сферы проходит одна большая окружность?

2. Через какие две точки сферы можно провести несколько больших окружностей?

3. Для данного изображения сферы в виде круга с выделенным эллипсом, изображающим экватор, постройте изображения полюсов (рис. 1.10).

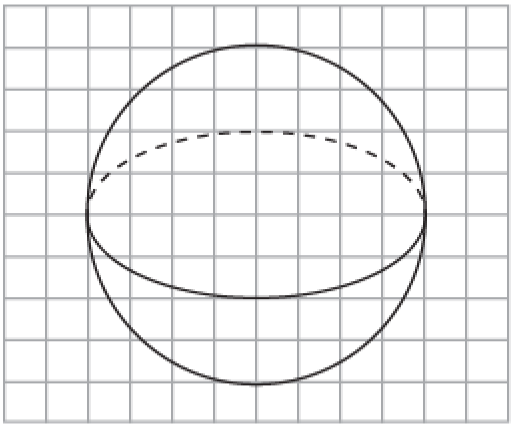

Рис. 1.10

4. Для данного изображения сферы в виде круга с указанными полюсами, изобразите экватор (рис. 1.11).

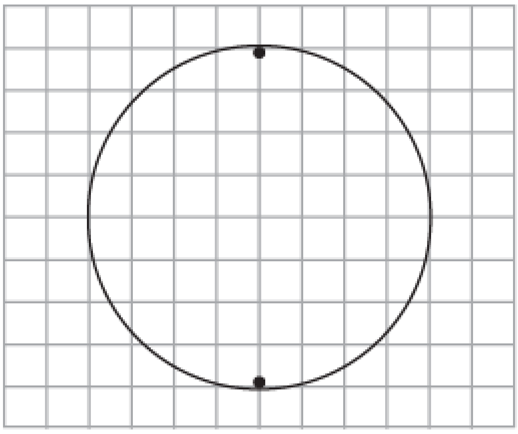

Рис. 1.11

5. Сфера радиусом 5 см пересечена плоскостью, отстоящей от центра сферы на 3 см. Найдите радиус окружности, получившейся в сечении.

6. Сфера радиусом 5 см пересечена плоскостью. Радиус окружности, получившейся в сечении, равен 4 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости сечения.

7. Через середину радиуса сферы проведена плоскость перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса сферы составляет радиус окружности, получившейся в сечении?

8. Радиус сферы равен R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите радиус окружности, получившейся в сечении.

9. Для данного изображения сферы (рис. 1.12) изобразите несколько параллелей и меридианов.

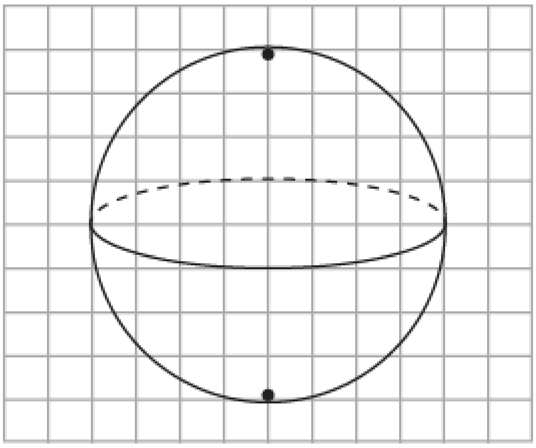

Рис. 1.12

10. В программе GeoGebra получите сферу. Постройте её экватор и полюса. Проведите несколько параллелей и меридианов.

2. Основные понятия сферической геометрии

Рассмотрим сферу с центром O и радиусом 1. Основными понятиями сферической геометрии (геометрии на сфере) будем считать точки и сферические прямые.

Точки на сфере будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, ..., A_1, B_2, C_3, ..., A', B'', C''',... .

Сферическими прямыми будем считать большие окружности, т. е. окружности на сфере, центром которых является центр сферы (рис. 2.1). Такие окружности являются пересечением сферы с плоскостями, проходящими через центр сферы.

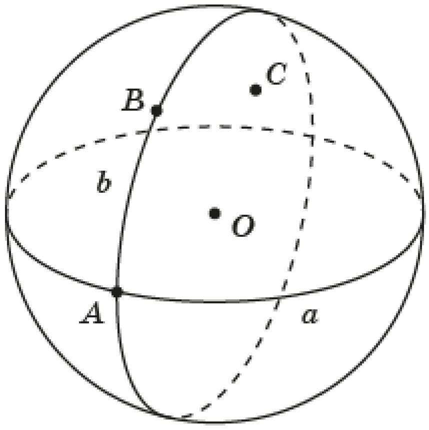

Рис. 2.1

Сферические прямые будем обозначать строчными латинскими буквами a, b, c, ..., a_1, b_2, c_3, ..., a', b'', c''', ...

Так же, как и на плоскости, точка может принадлежать сферической прямой, в этом случае говорят, что сферическая прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что сферическая прямая не проходит через точку.

Сферические прямые можно получить с помощью программы GeoGebra.

Для этого сначала воспользуемся инструментом «Плоскость через три точки». Построим плоскость, проходящую через центр сферы и какие-нибудь две точки на сфере.

С помощью инструмента «Кривая пересечения» построим большую окружность, являющуюся пересечением сферы и плоскости (рис. 2.2).

Для каждой точки A на сфере обозначим $S(A)$ центрально-симметричную точку относительно центра сферы O.

В геометрии на плоскости следующее свойство принимается за аксиому.

Через любые две точки проходит единственная прямая.

В сферической геометрии это свойство не выполняется. Вместо него имеет место следующее свойство.

Через любые две не центрально-симметричные точки проходит единственная прямая.

Прямую, проходящую через точки A и B, где B отлична от $S(A)$, будем обозначать AB.

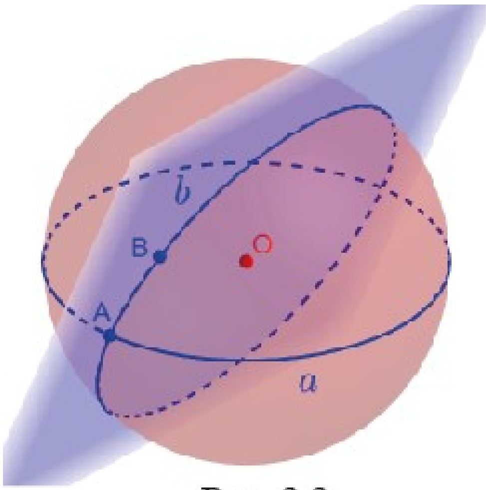

Рис. 2.2

В геометрии на плоскости следующее свойство принимается за аксиому.

Каждая точка прямой разбивает эту прямую на две части. Сама точка не принадлежит этим частям.

В сферической геометрии это свойство не выполняется. Вместо него имеет место следующее свойство.

Для любой сферической прямой a и любой точки A, ей принадлежащей, точки A и $S(A)$ разбивают эту прямую на две части. Сами точки A и $S(A)$ не принадлежат этим частям.

Каждая такая часть сферической прямой вместе с точками A и $S(A)$ называется *сферической полупрямой*. Точки A и $S(A)$ называют концами сферической полупрямой (рис. 2.3).

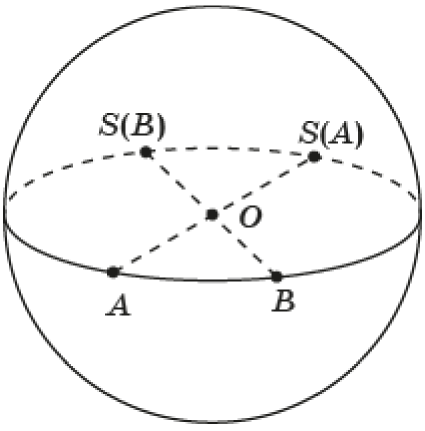

Рис. 2.3

Сферическую полупрямую будем обозначать указанием её концов и какой-нибудь внутренней точки, например, $ABS(A)$ обозначает сферическую полупрямую с концами A, $S(A)$ и внутренней точкой B.

Сферическую полупрямую, в которой выделен один из её концов, будем называть *сферическим лучом*. Выделенный конец будем называть *вершиной* или началом сферического луча. Сферический луч с вершиной в точке A и внутренней точкой B будем обозначать AB.

Для точек A и B, $B \neq S(A)$, рассмотрим сферические полупрямые $ABS(A)$ и $BAS(B)$. Общая часть этих сферических полупрямых представляет собой дугу $\overset{\frown}{AB}$ большой окружности, которую будем называть *сферическим отрезком* и обозначать AB. Точки A и B будем называть концами этого сферического отрезка.

Длиной сферического отрезка AB будем называть длину дуги $\overset{\frown}{AB}$ большой окружности. Она измеряется величиной центрального угла AOB (рис. 2.3).

Сферические отрезки можно получить с помощью программы GeoGebra.

Для этого отметим на сфере две точки A, B и воспользуемся инструментом «Дуга по центру и двум точкам». Получим искомый сферический отрезок AB (рис. 2.4).

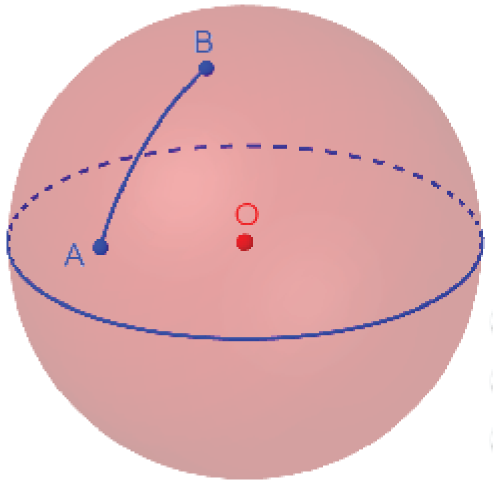

Рис. 2.4

Два сферических отрезка будем называть равными, если равны их длины.

Сферическим расстоянием между точками A и B на сфере будем называть длину сферического отрезка AB. Будем длину сферического отрезка AB также обозначать AB.

В геометрии на плоскости следующее свойство принимается за аксиому.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части так, что если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, *соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если же две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой* (рис. 2.5).

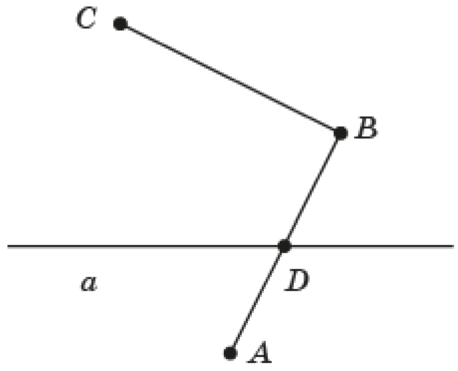

Рис. 2.5

Если точки принадлежат разным частям, то говорят, что они лежат по разные стороны от данной прямой. Если точки принадлежат одной части, то говоря, что они лежат по одну сторону от данной прямой.

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих от неё по одну сторону, называется полуплоскостью, ограниченной данной прямой. Сама прямая называется граничной прямой.

На сфере имеет место следующее аналогичное свойство.

Каждая сферическая прямая на сфере разбивает эту сферу на две части так, что если две точки принадлежат разным частям, то сферический отрезок, соединяющий эти точки, пересекается со сферической прямой. Если же две точки принадлежат одной части, то сферический отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается со сферической прямой (рис. 2.6).

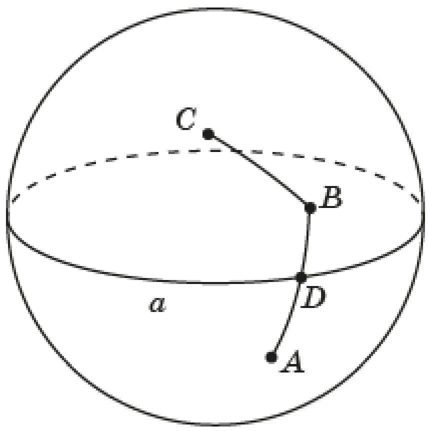

Рис. 2.6

Если точки принадлежат разным частям, то говорят, что ни лежат по разные стороны от данной сферической прямой. Если точки принадлежат одной части, то говоря, что они лежат по одну сторону от данной сферической прямой.

Часть сферы, состоящая из точек данной сферической прямой и точек, лежащих от неё по одну сторону, называется *полусферой*, ограниченной данной сферической прямой. Сама сферическая прямая называется граничной сферической прямой.

Рассмотрим две сферические прямые a и b, пересекающиеся в точках C и $S(C)$. Они разбивают сферу на четыре части (рис. 2.7).

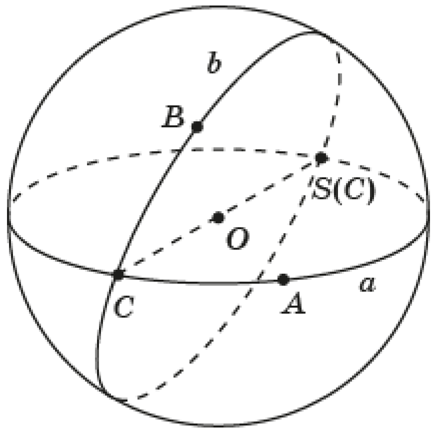

Рис. 2.7

Каждую такую часть вместе с ограничивающими их сферическими полупрямыми будем называть *сферическим двуугольником*. Точки C и $S(C)$ будем называть *вершинами*, а сферические полупрямые – *сторонами* этого сферического двуугольника.

Сферический двуугольник, в котором выделена одна из его вершин, будем называть *сферическим углом*. Выделенную вершину будем называть вершиной сферического угла, а стороны сферического двуугольника – сторонами сферического угла.

Сферический угол с вершиной в точке C, на сторонах которого выбраны точки A и B, будем обозначать ACB.

Величина сферического угла измеряется величиной соответствующего двугранного угла, ребро которого проходит через центр O сферы, а грани содержат стороны данного сферического угла.

Напомним, что двугранный угол измеряется его линейным углом. Следовательно, сферический угол равен углу между касательными к сторонам угла, проведёнными через вершину этого сферического угла.

В программе GeoGebra можно измерить приближённую величину сферического угла. Для этого с помощью инструмента «Касательная» через вершину C сферического угла ACB проведём касательные к сторонам AC и BC этого угла. С помощью инструмента «Угол» найдём его величину (рис. 2.8).

Два сферических угла называются равными, если равны их величины.

Сферический угол называется *развернутым*, если его стороны лежат на одной сферической прямой. Развёрнутый сферический угол равен 180°.

Два сферических угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие лежат на одной сферической прямой.

Два сферических угла называются *вертикальными*, если стороны одного из них дополняют до сферических прямых стороны другого.

Сферический угол, равный своему смежному сферическому углу, называется *прямым*. Прямой сферический угол равен 90°.

Две сферические прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют прямые углы.

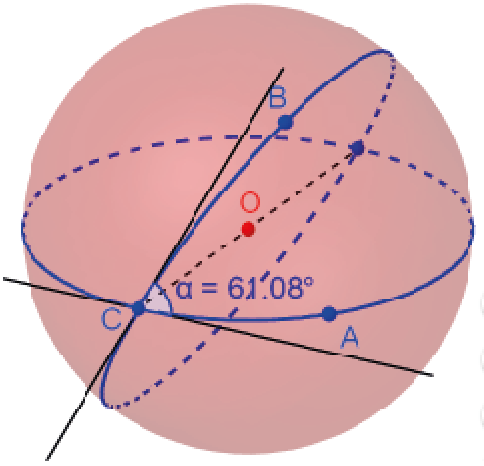

Рис. 2.8

На сфере с центром *O* рассмотрим сферическую прямую *c*. Через точку *O* проведём прямую, перпендикулярную плоскости, в которой лежит сферическая прямая *c*. Точки *C* и *S*(*C*) пересечения этой прямой со сферой называются *полюсами* сферической прямой *c*. Сама сферическая прямая *c* называется *полярой* этих точек.

Теорема. Две сферические прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через полюс другой.

Доказательство. Пусть сферическая прямая *a* проходит через полюс *C* сферической прямой *c* (рис. 2.9).

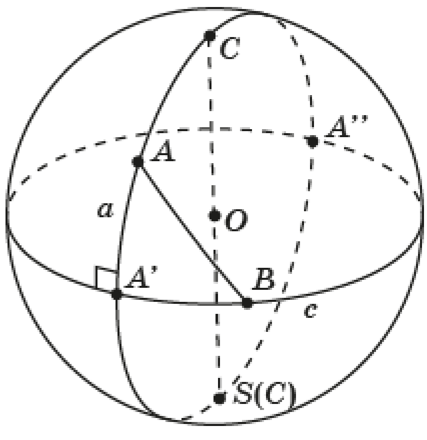

Рис. 2.9

Плоскость этой сферической прямой a содержит прямую OC, перпендикулярную плоскости сферической прямой c. Следовательно, эта плоскость перпендикулярна прямой c. Значит, прямые a и c перпендикулярны.

Обратно, если сферическая прямая a перпендикулярна сферической прямой c, то плоскости этих сферических прямых перпендикулярны. Следовательно, плоскость сферической прямой a содержит прямую OC, перпендикулярную плоскости сферической прямой c. Значит, сферическая прямая a проходит через точку C. ■

Для точки A, не принадлежащей сферической прямой c, проведём сферическую прямую a, перпендикулярную прямой c. Обозначим A' и A'' точки пересечения сферических прямых a и c. Наименьший из сферических отрезков AA' и AA'' называется *перпендикуляром*, опущенным из точки A на сферическую прямую c. Конец перпендикуляра, отличный от точки A, называется *основанием* перпендикуляра. Длина этого перпендикуляра называется *сферическим расстоянием* от точки A до сферической прямой c. Если точка A не совпадает полюсом сферической прямой c, то сферический отрезок, соединяющий точку A с точкой B прямой c, отличной от основания A' перпендикуляра, называется *наклонной* (рис. 2.9).

Упражнения

1. В геометрии на плоскости следующее свойство принимается за аксиому: через любые две точки проходит единственная прямая. Верно ли это свойство в сферической геометрии?

2. В каком случае через две точки проходит единственная сферическая прямая?

3. Сколько сферических прямых проходит через две центрально-симметричные точки?

4. В планиметрии две прямые могут не иметь общих точек (не пересекаться), а могут иметь только одну общую точку (пересекаться). Верно ли это для сферических прямых на сфере?

5. В программе GeoGebra изобразите сферу с центром O и прямую AB, проходящую через две данные точки.

6. В программе GeoGebra изобразите сферу с центром O и отрезок AB. Найдите приближённую длину этого сферического отрезка.

7. На сколько частей разбивают сферическую прямую: а) три; б) четыре; в) n точек?

8. Чему равна длина сферической полупрямой?

9. Докажите, что сферические отрезки AB и $S(A)S(B)$ равны.

10. В программе GeoGebra изобразите сферу с центром O и сферический угол ACB.

11. На какое наибольшее число частей могут разбивать сферу: а) две; б) три; в)* n сферических прямых?

12. Докажите, что вертикальные сферические углы равны.

13. Сформулируйте определение: а) острого; б) тупого сферического угла.

14. В программе GeoGebra через данную точку B проведите сферическую прямую, перпендикулярную данной сферической прямой a.

15. Верно ли, что перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную сферическую прямую, единственен.

16. Найдите сферическое расстояние от точки до её поляры.

17. В программе GeoGebra изобразите полюса C и $S(C)$ сферической прямой c.

18. В программе GeoGebra изобразите точку C и её поляру c.

19. Пусть A и B полюсы сферических прямых соответственно a и b, пересекающихся в точках C и $S(C)$. Докажите, что сферическая прямая AB является полярой точки C (рис. 2.10).

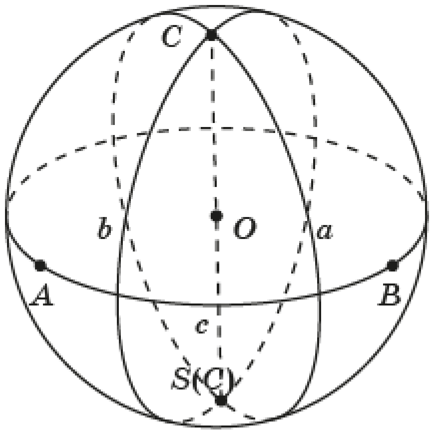

Рис. 2.10

20. Дан сферический угол с вершиной C и сторонами a, b. Поляра c точки C пересекает стороны a и b соответственно в точках A и B (рис. 2.11). Докажите, что радианная величина сферического угла ACB равна длине сферического отрезка AB сферической прямой c.

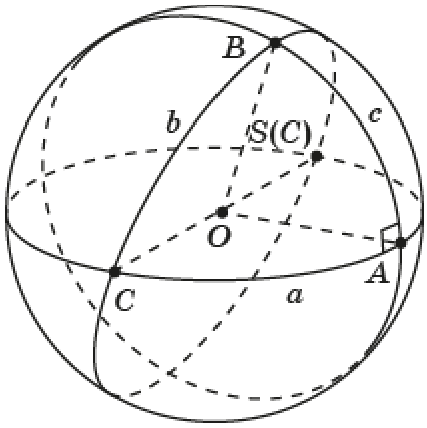

Рис. 2.11

3. Сферические треугольники

Несмотря на то, что, в отличие от евклидовой геометрии, в сферической геометрии не через любые две точки проходит единственная сферическая прямая, а любые две сферические прямые пересекаются, тем не менее, в сферической геометрии выполняются многие свойства и теоремы планиметрии.

Рассмотрим три точки A, B, C на сфере, не принадлежащие одной сферической прямой, и три сферические прямые BC, AC, AB.

Сферическим треугольником называется общая часть трёх полусфер, ограниченных сферическими прямыми BC, AC, AB, и содержащих соответственно точки A, B, C (рис. 3.1).

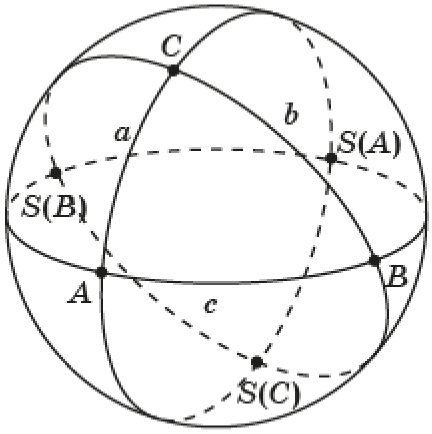

Рис. 3.1

Точки A, B, C называются *вершинами*, а отрезки BC, AC, AB *сторонами* сферического треугольника. Сферические углы CAB, ABC, BCA называются *углами* сферического треугольника.

Для получения сферического треугольника в программе GeoGebra достаточно отметить на сфере три точки A, B, C, не принадлежащие одной сферической прямой, и соединить их дугами (рис. 3.2).

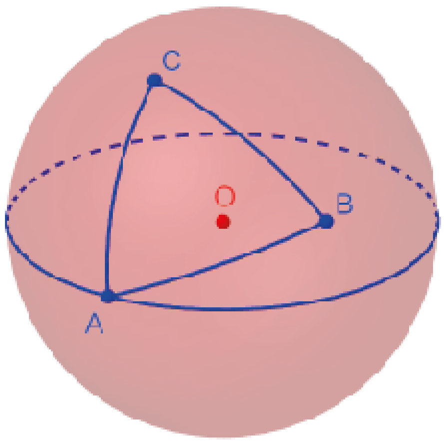

Рис. 3.2

Сферический треугольник называется *прямоугольным*, если у него имеется прямой угол.

Сферический треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием*.

Сферический треугольник называется *равносторонним*, если у него все стороны равны.

Сферический треугольник называется *правильным*, если у него равны все стороны и равны все углы.

В дальнейшем мы докажем, что равносторонний сферический треугольник является правильным

Два сферических треугольника называются *равными*, если у них равны соответствующие стороны и равны соответствующие углы.

Таким образом, если в сферических треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то эти треугольники равны и их равенство будем обозначать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Для треугольников на плоскости имеет место следующая аксиома [4].

От любого луча в заданную сторону можно отложить треугольник, равный данному.

Это означает, что каковы бы ни были треугольник ABC и луч с вершиной A_1 на плоскости, существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному, у которого вершина B_1 принадлежит лучу, а вершина C_1 расположена в заданной полуплоскости относительно этого луча (рис. 3.3).

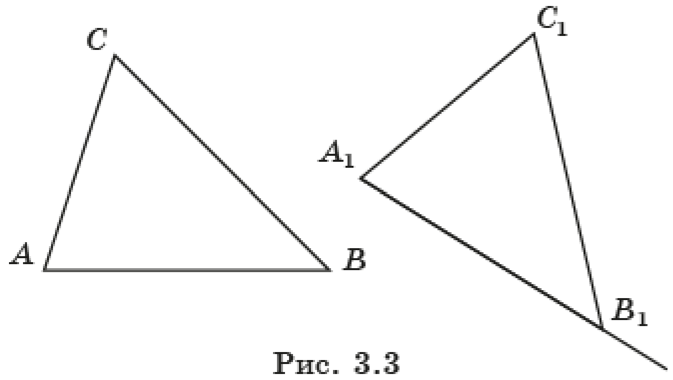

Рис. 3.3

Для сферических треугольников имеет место аналогичное свойство.

Каковы бы ни были сферический треугольник ABC и сферический луч с вершиной A_1 на сфере, существует сферический треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному, у которого вершина B_1 принадлежит сферическому лучу, а вершина C_1 расположена в заданной полусфере относительно этого сферического луча (рис. 3.4).

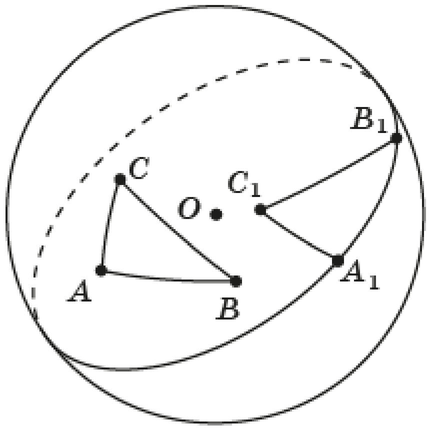

Рис. 3.4

Для сферических треугольников имеют следующие признаки равенства, аналогичные обычным признакам равенства треугольников, доказательства которых просто повторяют обычные доказательства.

Признак 1. Если две стороны и угол между ними одного сферического треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого сферического треугольника, то такие сферические треугольники равны.

Признак 2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного сферического треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого сферического треугольника, то такие сферические треугольники равны.

Признак 3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Для равнобедренных сферических треугольников имеют место обычные свойство и признак равнобедренного треугольника, доказательства которых также повторяют обычные доказательства.

Свойство. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Признак. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Рассмотрим применение признаков равенства треугольников для доказательства других свойств сферических треугольников.

Теорема. Если в сферическом треугольнике ABC угол C прямой, то угол A будет острым, прямым или тупым, смотря потому, будет ли противолежащая сторона BC соответственно меньше, равна или больше сферической полупрямой, и обратно.

Доказательство. Обозначим D полюс окружности, на которой лежит сторона AC. Рассмотрим сферический треугольник ACD, в котором углы A и C прямые, а стороны AD и CD равны сферической полупрямой. Если сторона CB_1 треугольника AB_1C меньше сферической полупрямой, то угол CAB_1 является частью угла CAD. Следовательно, угол CAB_1 острый. Если сторона CB_2 сферического треугольника AB_2C больше сферической полупрямой, то угол CAD является частью угла CAB_2. Следовательно, угол CAB_2 тупой. Верно и обратное (рис. 3.5). ■

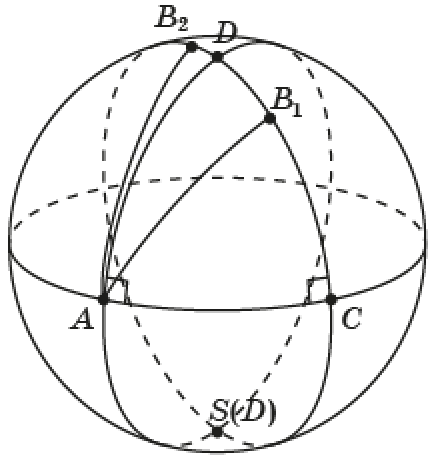

Рис. 3.5

Теорема. Сумма углов прямоугольного сферического треугольника больше 180°.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай прямоугольного сферического треугольника *ABC*, у которого один прямой угол *C*, а два другие угла острые. Обозначим *D* полюс окружности, на которой лежит сторона *AC*. Через середину *E* гипотенузы *AB* проведём сферическую прямую, перпендикулярную стороне *AC*. Она пройдёт через полюс *D*. Обозначим *F* точку пересечения этой сферической прямой со стороной *AC*. Из точки *B* опустим перпендикуляр *BG* на сферическую прямую *DE*. Прямоугольные сферические треугольники *AEF* и *BEG* равны по гипотенузе и прилежащему углу. Следовательно, равны сферические углы *FAE* и *GBE*. В прямоугольном сферическом треугольнике *BDG* катет *DG* меньше полупрямой. Следовательно, сферический угол *DBG* острый. Значит, сферический угол *GBC* тупой. Этот сферический угол равен сумме углов *A* и *B* треугольника *ABC*. Следовательно, сумма всех углов сферического треугольника *ABC* больше 180° (рис. 3.6). ■

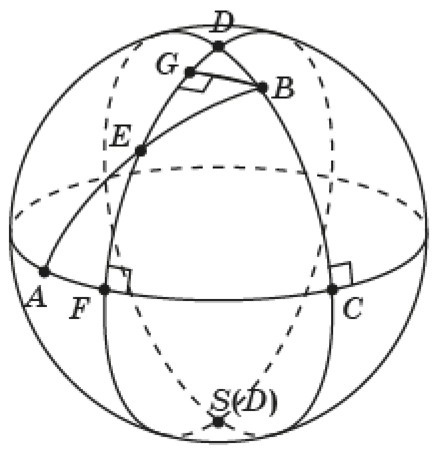

Рис. 3.6

Теорема. Сумма углов произвольного сферического треугольника больше 180^o.

Доказательство следует из того, что любой сферический треугольник можно разбить на два прямоугольных сферических треугольника.

Следствие. Внешний угол сферического треугольника меньше суммы двух внутренних углов, не смежных с ним.

Два сферических треугольника будем называть *полярными*, если вершины и сферические прямые сторон одного соответственно полярны сферическим прямым сторон и вершинам другого сферического треугольника.

Теорема. Для любого сферического треугольника существует полярный ему сферический треугольник.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник *ABC*. Построим поляры его вершин и обозначаем через *A'*, пересечение поляр вершин *B* и *C*, через *B'* – пересечение поляр вершин *A* и *C*, через *C'* – пересечение поляр вершин *A* и *B*. Тогда точки *A'*, *B'*, *C'* будут полюсами сферических прямых соответственно *BC*, *AC*, *AB*. Следовательно, сферический треугольник *A'B'C'* будет искомым (рис. 3.7). ■

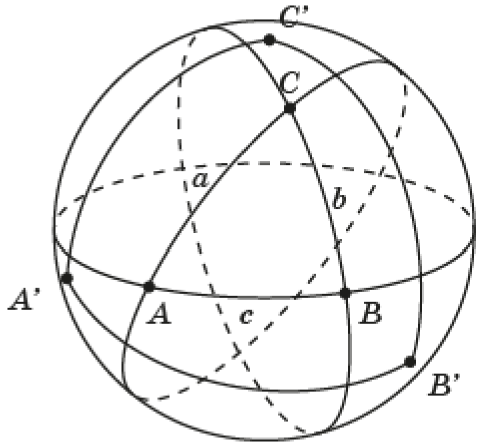

Рис. 3.7

Теорема. Если стороны *BC*, *AC*, *AB* сферического треугольника *ABC* равны соответственно a, b, c, а углы *A*, *B*, *C*, измеряемые в радианах, равны соответственно α, β, γ, то стороны a', b', c' полярного сферического треугольника *A'B'C'* равны соответственно $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, а углы α', β', γ', равны соответственно $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$,

Доказательство. Обозначим B_1 и C_1 соответственно точки пересечения сферических лучей *AB* и *AC* с полярой точки *A* (рис. 3.8). Имеем, $B_1C_1 = \alpha$, $C'C_1 = C'B_1 - B_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $B'B_1 = B'C_1 - B_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Следовательно, $B'C' = B'B_1 + B_1C_1 + C_1C' = \pi - \alpha$, т. е. $a' = \pi - \alpha$. Аналогично доказывается, что $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$.

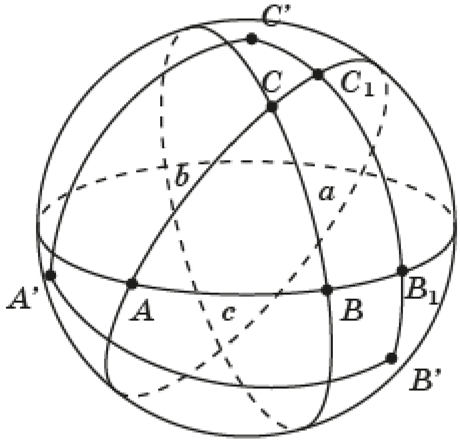

Рис. 3.8

Таким образом, стороны полярного сферического треугольника выражаются через углы исходного сферического треугольника по требуемым формулам. Рассматривая сферический треугольник ABC как полярный сферическому треугольнику $A'B'C'$, получаем искомые равенства для углов: $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$, $\gamma' = \pi - c$. ■

Следствие 1. Если у двух сферических треугольников равны соответствующие углы, то у полярных к ним сферических треугольников равны соответствующие стороны.

Следствие 2. (Признак равенства треугольников.) Если углы одного сферического треугольника соответственно равны углам другого сферического треугольника, то такие сферические треугольники равны.

Теорема. (Неравенство треугольника.) Каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC, для которого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Обозначим $S(A)$ точку, центрально-симметричную точке A. В сферическом треугольнике $S(A)BC$ выполняются равенства $BC = a$, $S(A)C = \pi - b$, $S(A)B = \pi - c$. Углы сферического треугольника, полярного к треугольнику $S(A)BC$ равны соответственно $\pi - a$, b, c. Сумма этих углов больше π. Следовательно, имеет место неравенство $a < b + c$ (рис. 3.9). ■

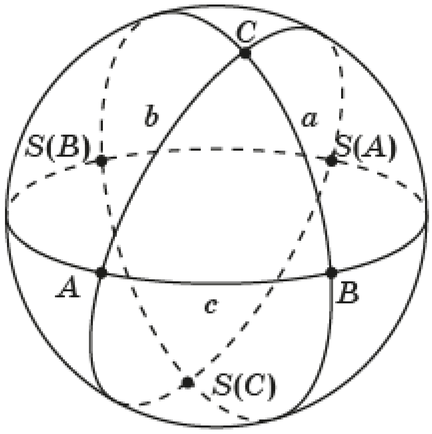

Рис. 3.9

Найдём выражение для площади сферического треугольника. Напомним, что площадь сферы единичного радиуса равна 4π. Рассмотрим сферический треугольник ABC с углами $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ (рис. 3.10).

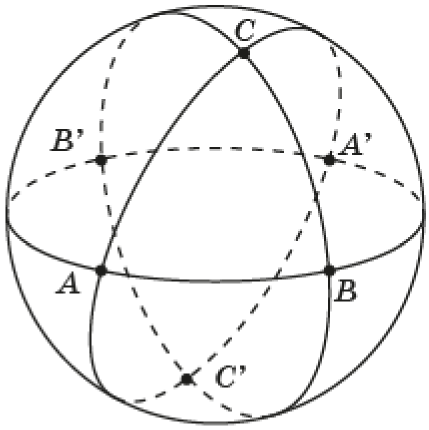

Рис. 3.10

Так как площадь сферы равна 4π, то площади сферических двуугольников, с углами соответственно α, β, γ, равны соответственно 2α, 2β, 2γ. Сферу можно представить как объединение шести попарно равных сферических двуугольников. При этом сферический треугольник ABC и равный ему сферический треугольник $A'B'C'$ покрываются этими сферическими двуугольниками по три раза. Следовательно, сумма площадей шести сферических двуугольников равна площади сферы плюс четыре площади сферического треугольника ABC. Значит, имеет место равенство $4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4S_{ABC}$, из которого получаем следующую формулу

$$S_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, называется *избыточностью* сферического треугольника. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Площадь сферического треугольника равна его избыточности, т. е. имеет место формула

$$S_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

где α, β, γ – величины углов сферического треугольника.

Упражнения

1. В программе GeoGebra изобразите равнобедренный сферический треугольник на сфере.

2. В программе GeoGebra изобразите равносторонний сферический треугольник на сфере. Найдите приближённое значение его сторон и углов.

3. В программе GeoGebra изобразите прямоугольный сферический треугольник на сфере.

4. Может ли у сферического треугольника быть: а) два; б) три прямых угла?

5. Может ли у прямоугольного сферического треугольника быть: а) один тупой угол; б) два тупых угла?

6. Может ли гипотенуза прямоугольного сферического треугольника быть: а) равна катету; б) меньше катета?

7. Может ли сумма углов сферического треугольника быть больше: а) 270°; б) 360°; в) 540°?

8. Могут ли углы правильного сферического треугольника быть равными: а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) 150°?

9. Докажите, что точка C принадлежит сферическому отрезку AB тогда и только тогда, когда $AC + CB = AB$.

10. Докажите, что каждая сторона сферического треугольника больше разности двух других сторон.

11. Докажите, что для сторон a, b, c сферического треугольника ABC выполняется неравенство $a + b + c < 2\pi$.

12. Докажите, что против большего угла сферического треугольника лежит большая сторона.

13. Докажите, что против большей стороны сферического треугольника лежит больший угол.

14. В геометрии на плоскости верно утверждение о том, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с этим углом. Докажите, что аналогичное утверждение верно для сферических треугольников, стороны которых меньше половины полупрямых. Верно ли, это утверждение для произвольных сферических треугольников?

15. Пусть точка A не принадлежит сферической прямой a и не совпадает с её полюсом. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки A на сферическую прямую a, короче любой наклонной, проведённой из этой точки к данной сферической прямой.

16. Сферические прямые, содержащие стороны сферического треугольника ABC, разбивают сферу на восемь попарно равных треугольников (рис. 3.10). Найдите площади всех этих сферических треугольников, если углы данного сферического треугольника ABC равны соответственно α, β, γ.

17. Найдите площадь сферического треугольника, углы которого равны 90°.

18. Найдите углы равностороннего сферического треугольника, площадь которого равна π.

19. Стороны правильного сферического треугольника равны $\frac{\pi}{3}$. Найдите площадь полярного ему сферического треугольника.

20. В программе GeoGebra постройте сферический треугольник, полярный данному.

21. Верен ли следующий признак равенства прямоугольных сферических треугольников, аналогичный признаку равенства прямоугольных треугольников на плоскости: если гипотенуза и один из прилежащих к ней углов одного сферического прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и прилежащему к ней углу другого сферического треугольника, то такие сферические треугольники равны?

22. Верен ли следующий признак равенства прямоугольных сферических треугольников, аналогичный признаку равенства прямоугольных треугольников на плоскости: если гипотенуза и катет одного сферического прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого сферического треугольника, то такие сферические треугольники равны?

4. Сферическая тригонометрия

Для сферических треугольников рассмотрим аналог теоремы косинусов.

Напомним, что теорема косинусов утверждает, что для треугольника ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c, имеет место равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Для сферических треугольников имеет место следующая теорема.

Теорема. Для сферического треугольника ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c, а углы A, B, C равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу с центром O и сферический треугольник ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c. Предположим, что $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$. Через вершину C проведём касательные к большим окружностям, содержащим стороны AC и BC сферического треугольника ABC (рис. 4.1).

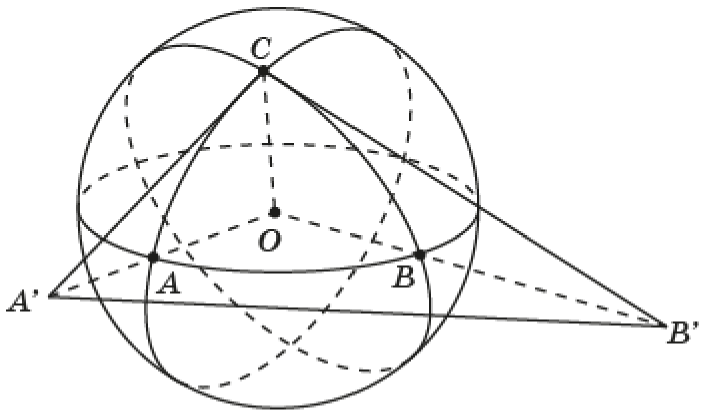

Рис. 4.1

Обозначим A', B' точки пересечения этих касательных с прямыми соответственно OA, OB.

В треугольнике $OA'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = b$, $A'C = \operatorname{tg} b$, $OA' = \frac{1}{\cos b}$.

В треугольнике $OB'C$ имеем: $OC = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle O = a$ $B'C = \operatorname{tg} a$, $OB' = \frac{1}{\cos a}$.

В треугольнике $A'B'C$ угол $A'CB'$ равен углу ACB сферического треугольника ABC.

Применим теорему косинусов к треугольнику $A'B'C$. Получим равенство

$$(A'B')^2 = (\operatorname{tg} a)^2 + (\operatorname{tg} b)^2 - 2\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos \gamma.$$

В треугольнике $A'B'O$ угол $A'OB$ равен c. Применим к этому треугольнику теорему косинусов. Получим равенство

$$(A'B')^2 = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{\cos b} \cdot \cos c.$$

Приравнивая правые части полученных равенств для $(A'B')^2$ и используя равенство $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \mathrm{tg}^2 a$, получим искомое равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Хотя мы предположили, что $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$, можно доказать, что это равенство остаётся верным и для произвольного сферического треугольника. ■

Аналогичным образом доказывается, что имеют место равенства

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta,$$
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$

Эти равенства позволяют по известным двум сторонам и углу между ними сферического треугольника находить его третью сторону, а также по известным сторонам сферического треугольника находить его углы.

Применим теорему косинусов к сферическому треугольнику *A’B’C’*, полярному сферическому треугольнику *ABC*, стороны *BC*, *AC*, *AB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а углы *A*, *B*, *C* равны соответственно α, β, γ.

Стороны *a’*, *b’*, *c’* полярного сферического треугольника *A’B’C’* равны соответственно $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, а углы α', β', γ', равны $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$.

Для этого сферического треугольника имеет место равенство

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma'.$$

Подставляя вместо *a’*, *b’*, *c’*, γ' их выражения, получим равенство

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.$$

Аналогичным образом доказывается, что имеют место равенства

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos b,$$
$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a.$$

Эти равенства позволяют по стороне и двум прилежащим к ней углам сферического треугольника находить его третий угол, а также по известным углам сферического треугольника находить его стороны.

Рассмотрим теперь аналог теоремы синусов.

Напомним, что теорема синусов утверждает, что для треугольника *ABC*, стороны *BC*, *AC*, *AB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а углы *A*, *B*, *C* равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Для сферических треугольников имеет место следующая теорема.

Теорема. Для сферического треугольника *ABC*, стороны *BC*, *AC*, *AB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а углы *A*, *B*, *C* равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу с центром O и остроугольный сферический треугольник ABC, стороны BC, AC, AB которого соответственно равны a, b, c (рис. 4.2).

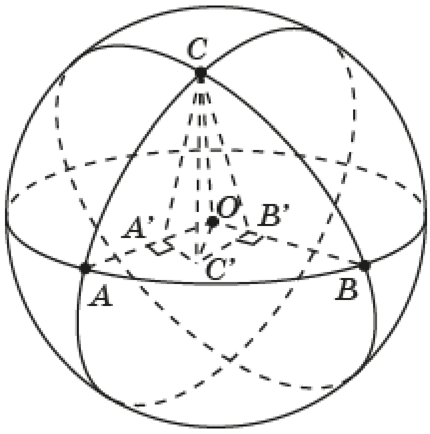

Рис. 4.2

Из точки C опустим перпендикуляр CC' на плоскость OAB. Из точки C' опустим перпендикуляры $C'A'$ и $C'B'$ на прямые соответственно OA и OB. Углы $CA'C'$ и $CB'C'$ являются линейными углами двугранных углов соответственно с рёбрами OA и OB. Значит, они равны углам α и β сферического треугольника ABC. Имеем равенства

$$CC' = CA' \cdot \sin\alpha = CO \cdot \sin b \cdot \sin\alpha = \sin b \cdot \sin\alpha,$$
$$CC' = CB' \cdot \sin\beta = CO \cdot \sin a \cdot \sin\beta = \sin a \cdot \sin\beta.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получим равенство

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Хотя мы предположили, что сферический треугольник ABC остроугольный, можно доказать, что эти равенства остаются верными и для произвольного сферического треугольника. Они позволяют по известным стороне и двум углам сферического треугольника находить его другую сторону. ■

Доказанная теорема позволяет по известным двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой из данных сторон, а также по известным двум углам и стороне, противолежащей одному из этих углов, находить сторону, противолежащую другому из данных углов,

В качестве примера применения доказанных теорем получим формулу, выражающую катет прямоугольного сферического треугольника через другой его катет и противолежащий угол.

Рассмотрим прямоугольный сферический треугольник ABC, в котором катеты BC и AC равны соответственно a и b, угол C прямой, а угол A равен α. Докажем, что имеет место равенство $\operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Воспользуемся равенством $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$. В случае прямоугольного сферического треугольника оно превращается в равенство $\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos a$. Используя теорему синусов, выразим $\sin\beta$. Получим равенство $\cos\alpha = \frac{\sin b \cdot \sin\alpha \cdot \cos a}{\sin a}$, из которого непосредственно следует искомое равенство.

Упражнения

1. Две стороны сферического треугольника равны $\frac{\pi}{4}$. Угол между ними равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°. Найдите приближённое значение третьей стороны.

2. Два угла сферического треугольника равны 45°. Прилежащая к ним сторона равна: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$. Найдите приближённое значение третьего угла.

3. Найдите выражение гипотенузы прямоугольного сферического треугольника через его катеты.

4. Катеты равнобедренного прямоугольного сферического треугольника равны $\frac{\pi}{4}$. Найдите его гипотенузу.

5. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного сферического треугольника равна $\frac{\pi}{4}$. Найдите выражение для его катетов. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите их приближённые значения.

6. Найдите выражение катета прямоугольного сферического треугольника через его гипотенузу и противолежащий этому катету угол.

7. Гипотенуза прямоугольного сферического треугольника равна $\frac{\pi}{6}$. Один из углов равен 45°. Найдите приближённое значение противолежащего этому углу катета.

8. Докажите, что для прямоугольного сферического треугольника с катетами a, b и противолежащими углами соответственно α, β имеют место равенства $\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos a$, $\cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos b$.

9. Острые углы прямоугольного сферического треугольника равны 45° и 60°. Найдите катет, противолежащий углу 60°.

10. Докажите, что для прямоугольного сферического треугольника с гипотенузой c и острыми углами α, β имеет место равенство $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

11. Острые углы равнобедренного прямоугольного сферического треугольника равны 60°. Найдите выражение для его гипотенузы. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите её приближённое значение.

12. Докажите, что для правильного сферического треугольника со сторонами a и углами α имеет место равенство $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

13. Найдите стороны правильного сферического треугольника, углы которого равны: а) 70°; б) 80°; в) 90°.

14. Найдите приближённое значение углов правильного сферического треугольника, стороны которого равны: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

15. Найдите приближённое значение площади правильного сферического треугольника, стороны которого равны: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

16. Найдите приближённое значение площади равнобедренного прямоугольного сферического треугольника, гипотенуза которого равна: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$.

17. Докажите, что биссектриса CD сферического треугольника ABC делит сторону AB на части, синусы которых относятся как синусы прилежащих сторон AC и BC.

18. Докажите, что медиана CD сферического треугольника ABC делит угол C на части, синусы которых относятся как синусы прилежащих сторон AC и BC.

5. Сферические ломаные и сферические многоугольники

Фигура, образованная конечным набором сферических отрезков на сфере, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т. д., называется *сферической ломаной* (рис. 5.1). Сферические отрезки называются *сторонами* сферической ломаной, концы сферических отрезков называются *вершинами* сферической ломаной.

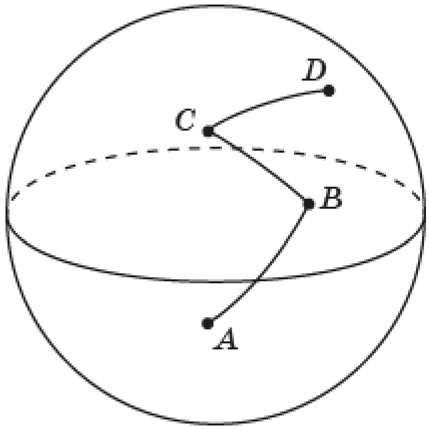

Рис. 5.1

Сферическая ломаная называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Сферическая ломаная называется *замкнутой*, если начало первого её сферического отрезка совпадает с концом последнего.

Замкнутую сферическую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой.

Сферическая ломаная обозначается последовательным указанием её вершин. Например, сферическая ломаная $ABCD$, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

Длиной сферической ломаной называется сумма длин её сторон.

Теорема. Длина сферической ломаной не превосходит сферического расстояния между её концами.

Доказательство. Рассмотрим, например, ломаную $ABCD$ (рис. 5.2).

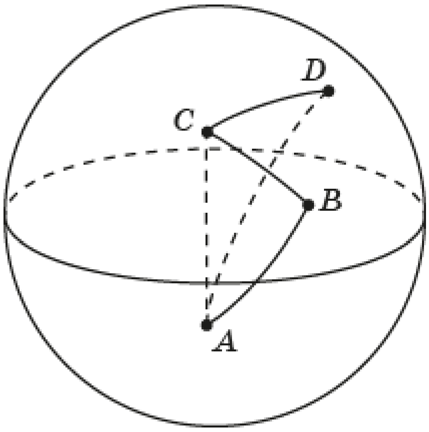

Рис. 5.2

Воспользуемся неравенством треугольника. Получим неравенства $AB + BC + CD \geq AC + CD \geq AD$. Равенство достигается в случае, если точки принадлежат одной прямой. Аналогичным образом искомое неравенство доказывается и в общем случае. ■

Оказывается, что кратчайшим путём на сфере, соединяющим точки A и B, является сферический отрезок AB. Доказательство этого, как и доказательство аналогичного утверждения на плоскости, выходит за рамки школьного курса математики. Здесь мы приведём нестрогие рассуждения.

Рассмотрим какую-нибудь кривую на сфере, соединяющую точки A и B (рис. 5.3).

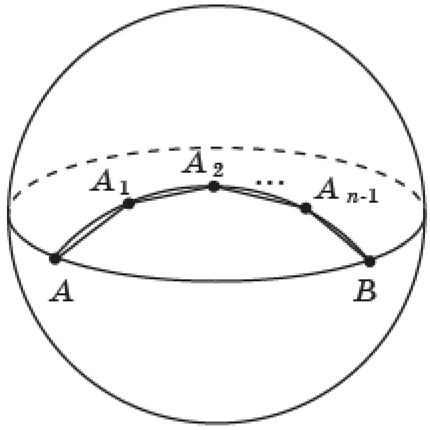

Рис. 5.3

Рассмотрим сферическую ломаную $AA_1\ldots A_{n-1}B$, вписанную в данную кривую. Увеличивая n, ломаную можно приближать к данной кривой. При этом её длина будет приближаться к длине кривой. Так как длина каждой такой сферической ломаной не будет превосходить длины сферического отрезка AB, то и длина кривой не будет превосходить длины сферического отрезка AB. Следовательно, сферический отрезок AB является кратчайшим путём, соединяющим точки A и B на сфере

Каждая простая замкнутая сферическая ломаная разбивает сферу на две области. Фигура, образованная простой замкнутой сферической ломаной и частью сферы, ограниченной этой сферической ломаной, называется *сферическим многоугольником*. Вершины сферической ломаной называются *вершинами* сферического многоугольника, а стороны сферической ломаной – *сторонами* сферического многоугольника (рис. 5.4).

Сферический многоугольник обозначается последовательным указанием его вершин. Например, сферический многоугольник $ABCDE$, сферический многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$.

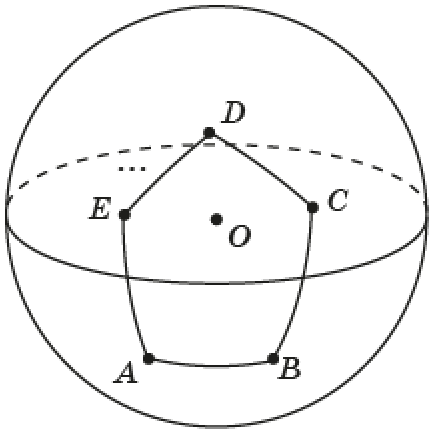

Рис. 5.4

Сферический многоугольник называется *выпуклым*, если для любых его соседних вершин сам сферический многоугольник лежит по одну сторону от сферической прямой, проходящей через данные соседние вершины.

Сферический многоугольник, ограниченный выпуклой простой замкнутой сферической ломаной, является *выпуклым*.

Сферический многоугольник называется *правильным*, если у него равны все стороны и равны все углы.

Правильный сферический четырёхугольник называется *сферическим квадратом*.

На рисунке 5.5 показан сферический квадрат $ABCD$, полученный в программе GeoGebra следующим образом.

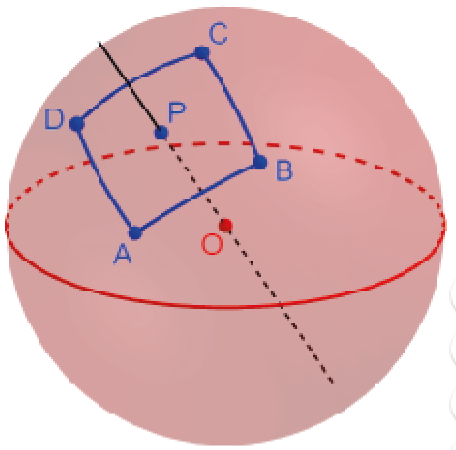

Рис. 5.5

На сфере с центром O отметим точки P и A. Проведём прямую OP. С помощью инструмента «Вращать объект вокруг прямой» повернём точку A вокруг прямой OP на угол 90°. Получим точку B. Аналогичным образом получим точки C и D. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» проведём дуги с центром O, соединяющие точки A и B, B и C, C и D, D и A. Получим сферический квадрат $ABCD$.

Теорема. Сумма углов выпуклого сферического n-угольника больше $180^\circ(n-2)$.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый сферический n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Из вершины A_1 проведём все диагонали (рис. 5.6).

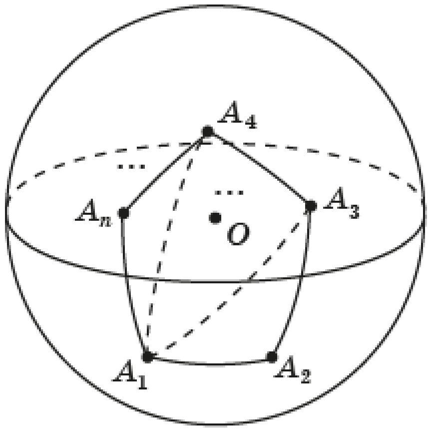

Рис. 5.6

Они разбивают этот сферический многоугольник на $n-2$ сферических треугольника, углы которых составляют углы сферического многоугольника. Так как сумма углов каждого такого сферического треугольника больше 180°, то сумма углов выпуклого сферического n-угольника будет больше $180^\circ(n-2)$. ■

Для выпуклых сферических многоугольников имеет место следующая теорема.

Теорема. Для площади S выпуклого сферического n-угольника имеет место формула

$$S = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - \pi(n-2),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – величины углов сферического n-угольника.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый сферический n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Из вершины A_1 проведём все диагонали (рис. 5.6). Они разбивают этот сферический многоугольник на $n-2$ сферических треугольника, углы которых составляют углы сферического многоугольника. Площадь каждого такого сферического треугольника равна сумме его углов минус π. Складывая эти площади и учитывая, что сумма этих площадей равна площади данного сферического многоугольника, получаем искомое равенство. ■

Упражнения

1. В программе GeoGebra изобразите какой-нибудь сферический четырёхугольник.

2. В программе GeoGebra изобразите правильный сферический: а) пятиугольник; б) шестиугольник.

3. Могут ли углы сферического квадрата быть равными: а) 90°; б) 120°; в) 135°; г) 150°?

4. Какое неравенство выполняется для углов правильного сферического: а) треугольника; б) четырёхугольника; в) пятиугольника; г) шестиугольника; д) n-угольника?

5. Какое неравенство выполняется для суммы внешних углов выпуклого сферического многоугольника, взятых по одному при каждой вершине?

6. Докажите, что диагонали сферического квадрата: а) делят углы пополам; б) перпендикулярны; в) делятся точкой пересечения пополам.

7. Докажите, что для сферического квадрата со сторонами a и углами α имеет место равенство $\cos a = \mathrm{ctg}^2\, \frac{\alpha}{2}$.

8. Найдите приближённое значение сторон сферического квадрата, углы которого равны: а) 120°; б) 140°; в) 160°.

9. Найдите приближённое значение углов сферического квадрата, стороны которого равны: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$.

10. Найдите формулу, выражающую диагональ d сферического квадрата через его сторону a.

11. Найдите площадь сферического S квадрата, углы которого равны: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{6}$.

12. Найдите приближённое значение площади S сферического квадрата, стороны которого, равны: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$.

13. *Сферическим ромбом* будем называть сферический четырёхугольник, у которого равны все стороны. Докажите, что у сферического ромба: а) противолежащие углы равны; б) диагонали делят углы пополам; в) диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

14. Докажите следующий признак сферического ромба. Если в диагонали сферического четырёхугольника перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот сферический четырёхугольник является ромбом.

15. В программе GeoGebra изобразите какой-нибудь сферический ромб, отличный от сферического квадрата.

16. Найдите формулу, связывающую сторону a сферического ромба и два прилежащих к ней угла α и β.

17. Найдите площадь сферического ромба, углы которого, прилежащие к одной стороне, равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

18. Сферическим аналогом прямоугольника можно считать четырёхугольник, у которого все углы равны. Будем называть его *равноугольным* сферическим четырёхугольником. Докажите, что у равноугольного сферического четырёхугольника: а) противолежащие стороны равны; б) диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам.

19. Докажите следующий признак равноугольного сферического четырёхугольника. Если диагонали сферического четырёхугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то этот сферический четырёхугольник является равноугольным.

20. В программе GeoGebra изобразите какой-нибудь равноугольный сферический четырёхугольник, отличный от сферического квадрата.

21. Докажите, что середины сторон сферического ромба являются вершинами равноугольного сферического четырёхугольника.

22. Докажите, что середины сторон равноугольного сферического четырёхугольника являются вершинами сферического ромба.

23. Докажите, что середины сторон сферического квадрата являются вершинами сферического квадрата.

24. По аналогии с определением сферического треугольника, полярного данному сферическому треугольнику, определите понятие сферического многоугольника, полярного данному сферическому многоугольнику.

25. Найдите стороны и углы сферического n-угольника, полярного сферическому n-угольнику, стороны которого равны a_1, …, a_n, а соответствующие углы равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

26. Докажите, что у сферического четырёхугольника, полярного сферическому ромбу, равны все углы.

27. В программе GeoGebra постройте сферический четырёхугольник, полярный сферическому ромбу.

28. Докажите, сферический четырёхугольник, полярный сферическому четырёхугольнику с равными углами, является сферическим ромбом.

29. В программе GeoGebra постройте сферический четырёхугольник, полярный сферическому четырёхугольнику с равными углами.

30. Докажите, что сферический многоугольник, полярный правильному сферическому многоугольнику, является правильным.

6. Геометрические места точек. Замечательные линии

Напомним, что геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Рассмотрим примеры геометрических мест точек на сфере.

1. Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к сферическому отрезку называется сферическая прямая, перпендикулярная этому сферическому отрезку и проходящая через его середину.

Теорема. Серединный перпендикуляр к сферическому отрезку на сфере является геометрическим местом точек сферы, одинаково удалённых от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть дан сферический отрезок AB на сфере, точка D – его середина. Покажем, что геометрическим местом точек сферы, одинаково удалённых от точек A и B является серединный перпендикуляр к сферическому отрезку AB (рис. 6.1).

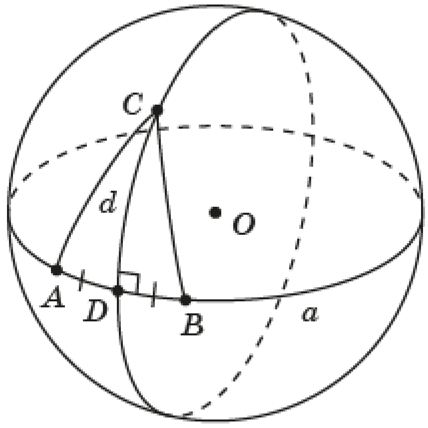

Рис. 6.1

Действительно, очевидно, точка D одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Если точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O, то сферический треугольник ABC – равнобедренный, CD – медиана. По свойству равнобедренного сферического треугольника, медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру. Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с точкой D, тогда прямоугольные сферические треугольники ADC и BDC равны (по катетам). Следовательно, $AC = BC$. ■

2. Биссектриса

Биссектрисой сферического угла называется сферический луч, делящий этот сферический угол на два равных сферических угла.

Теорема. Биссектриса сферического угла является геометрическим местом внутренних точек сферического угла, одинаково удалённых от его сторон.

Доказательство. Рассмотрим сферический угол с вершиной в точке D и сторонами a, b. Пусть точка C лежит внутри данного сферического угла. Опустим из неё перпендикуляры CA и CB на стороны a и b соответственно (рис. 6.2). Если $CA = CB$, то прямоугольные сферические треугольники ADC и BDC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, сферические углы ADC и BDC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе сферического угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе сферического угла, то прямоугольные сферические треугольники ADC и BDC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного сферического угла. ■

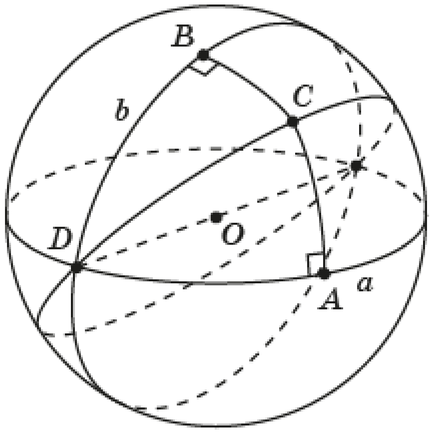

Рис. 6.2

3. Сферическая окружность

Сферической окружностью называется геометрическое место точек сферы, удалённых от данной точки P на данное сферическое расстояние $R < \frac{\pi}{2}$. Точка P называется *центром* сферической окружности, сферическое расстояние R – *радиусом* сферической окружности. На рисунке 6.3 изображена сферическая окружность a с центром P и радиусом $PA = R$.

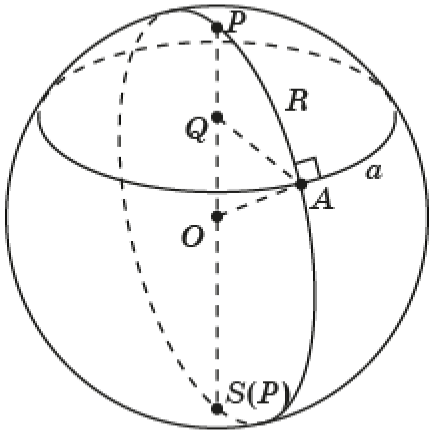

Рис. 6.3

Теорема. Сферической окружностью является линия пересечения сферы и плоскости, не проходящей через центр сферы.

Доказательство. Для данной точки P на сфере с центром O и положительного числа $R < \frac{\pi}{2}$ рассмотрим плоскость, перпендикулярную прямой OP и находящуюся на расстоянии $OQ = \cos R$ от центра O сферы. Линия пересечения этой плоскости со сферой будет состоять из всех точек сферы, для которых сферическое расстояние до точки P равно R, т. е. являться сферической окружностью. ■

Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника пересекаются в двух центрально-симметричных точках.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC. Проведём серединные перпендикуляры a и b к его сторонам соответственно BC и AC. Их точки пересечения P и $S(P)$ будут равноудалены от всех вершин сферического треугольника ABC. Из равноудалённости точек P и $S(P)$ от вершин A и B следует, что они принадлежат серединному перпендикуляру к стороне AB. Значит, все три серединных перпендикуляра пересекаются в точках P и $S(P)$ (рис. 6.4). ■

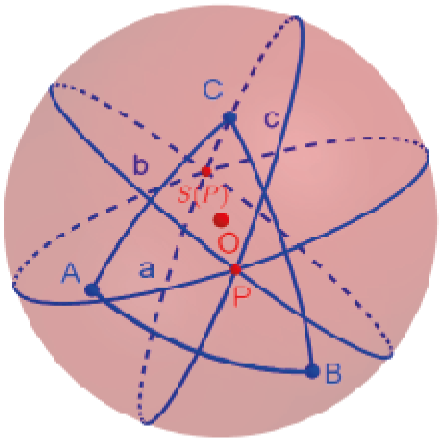

Рис. 6.4

По аналогии с определением биссектрисы треугольника определим биссектрису сферического треугольника как часть биссектрисы угла сферического треугольника, содержащаяся внутри этого сферического треугольника.

Теорема. Биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC и из его вершин A и B проведём биссектрисы AA_1 и BB_1 (рис. 6.5). Обозначим P их точку пересечения. Так как биссектриса угла сферического треугольника является геометрическим местом внутренних точек угла, равноудалённых от его сторон, то точка P будет равноудалена от сторон AB и AC, AB и BC. Значит, она будет равноудалена от сторон AC и BC. Следовательно, точка P будет принадлежать биссектрисе CC_1. ■

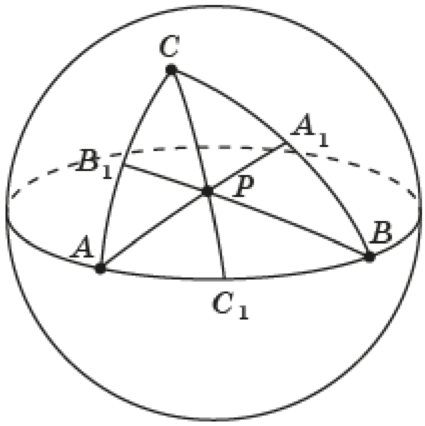

Рис. 6.5

По аналогии с определением средней линии треугольника определим *среднюю линию* сферического треугольника как сферический отрезок, соединяющий середины двух сторон этого сферического треугольника (рис. 6.6).

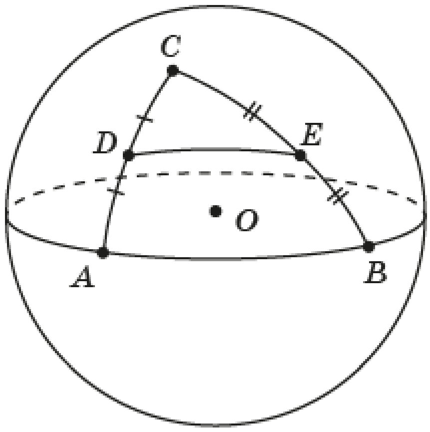

Рис. 6.6

Рассмотрим аналоги теорем о средней линии треугольника.

Теорема. Средняя линия сферического треугольника, соединяющая середины двух его сторон, перпендикулярна серединному перпендикуляру к третьей стороне этого сферического треугольника.

Доказательство. На сфере с центром O рассмотрим сферический треугольник ABC. Пусть DE – средняя линия, соединяющая середины его сторон AC и BC. Серединным перпендикуляром к стороне AB будет сферическая прямая, проходящая через середину F стороны AB и полюс N сферической прямой, содержащей эту сторону (рис. 6.7).

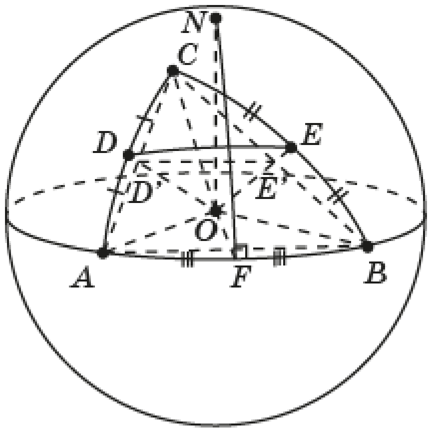

Рис. 6.7

Рассмотрим плоский треугольник с вершинами *A*, *B*, *C*. Обозначим *D'*, *E'* точки пересечения соответственно сторон *AC* и *BC* этого треугольника с биссектрисами *OD* и *OE* углов *AOC* и *BOC*. Так как треугольники *AOC* и *BOC* равнобедренные, то точки *D'* и *E'* являются серединами сторон соответственно *AC* и *BC*. Следовательно, отрезок *D'E'* является средней линией треугольника *ABC*. Значит, он параллелен стороне *AB*. Так как прямая *AB* перпендикулярна плоскости *OFN*, то и прямая *D'E'* перпендикулярна этой плоскости. Плоскость *OD'E'* содержит прямую *D'E'*, перпендикулярную плоскости *OFN*, следовательно, плоскость *OD'E'* перпендикулярна плоскости *OFN*. Значит, сферическая прямая *DE* перпендикулярна серединному перпендикуляру *FN*. ■

Теорема. Если сферическая прямая проходит через середину одной стороны сферического треугольника и перпендикулярна серединному перпендикуляру другой стороны, то она проходит через середину третьей стороны этого сферического треугольника.

Доказательство. Пусть сферическая прямая *c* проходит через середину *D* стороны *AC* сферического треугольника *ABC* и перпендикулярна серединному перпендикуляру к стороне *AB*. Так как средняя линия *DE* также перпендикулярна этому серединному перпендикуляру, а точка *D* не совпадает с его полюсом, то она должна принадлежать сферической прямой *c*. Следовательно, середина *E* стороны *BC* принадлежит этой прямой. ■

По аналогии с определением высоты треугольника определим *высоту* сферического треугольника как перпендикуляр, опущенный из вершины сферического треугольника на сферическую прямую, содержащую противолежащую сторону.

Заметим, что если вершина сферического треугольника является полюсом сферической прямой, содержащей противолежащую сторону, то каждый сферический отрезок, соединяющий эту вершину с точкой данной сферической прямой, является высотой этого сферического треугольника. Для того чтобы высота сферического треугольника, проведённая из его вершины, определялась однозначно, нужно, чтобы эта вершина не являлась полюсом сферической прямой, содержащей противолежащую сторону.

Теорема. Для сферического треугольника, вершины которого не являются полюсами сферических прямых, содержащих противолежащие стороны, высоты или их продолжения пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC, вершины которого не являются полюсами сферических прямых противолежащих сторон. Обозначим AA_1, BB_1 CC_1 его высоты. Построим сферический треугольник $A'B'C'$, серединные перпендикуляры к сторонам которого содержат эти высоты (рис. 6.8).

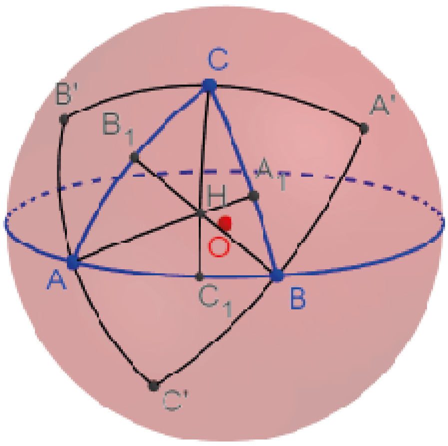

Рис. 6.8

Для этого через вершины B и C проведём сферические прямые, перпендикулярные соответственно высотам BB_1 и CC_1. Обозначим A' их точку пересечения. На продолжении сферических отрезков $A'B$ и $A'C$ отложим сферические отрезки BC' и CB', соответственно равные сферическим отрезкам $A'B$ и $A'C$. Проведём сферический отрезок $B'C'$. Получим сферический треугольник $A'B'C'$. Сторона BC сферического треугольника ABC будет средней линией сферического треугольника $A'B'C'$. Следовательно, она будет перпендикулярна сферической прямой AA'. Обозначим A'' точку пересечения сферического отрезка $B'C'$ и сферической прямой AB. Сферический отрезок $A''B$ будет средней линией сферического треугольника $A'B'C'$. Следовательно, точка A'' является серединой стороны $A'B'$. Аналогично, обозначим A''' точку пересечения сферического отрезка $B'C'$ и сферической прямой AC. Сферический отрезок $A'''C$ будет средней линией сферического треугольника $A'B'C'$. Следовательно, точка A''' является серединой стороны $A'B'$. Значит, точки A', A'', A''' совпадают. Таким образом, высоты сферического треугольника ABC будут лежать на серединных перпендикулярах к сторонам сферического треугольника $A'B'C'$. Из теоремы о серединных перпендикулярах к сторонам сферического треугольника будет следовать искомое утверждение. ■

По аналогии с определением медианы треугольника определим медиану сферического треугольника как сферический отрезок, соединяющий вершину с серединой противолежащей стороны этого сферического треугольника.

Теорема. Медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. На сфере с центром O рассмотрим сферический треугольник ABC. Проведём его медианы AA_1, BB_1, CC_1 и отрезки OA, OB, OC, OA_1, OB_1, OC_1, AB, BC, AC (рис. 6.9).

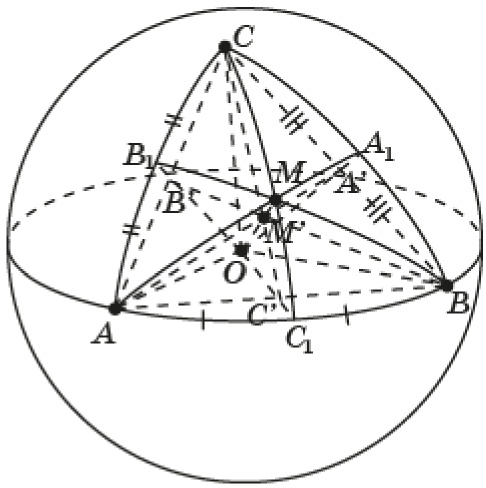

Рис. 6.9

Обозначим A', B', C' точки пересечения отрезков соответственно OA_1 и BC, OB_1 и AC, OC_1 и AB. Эти точки являются серединами отрезков соответственно BC, AC, AB. Плоскости OAA_1, OBB_1, OCC_1 пересекают плоский треугольник ABC по медианам соответственно AA', BB', CC', а сферический треугольник ABC – по сферическим отрезкам соответственно AA_1, BB_1, CC_1. Обозначим M' точку пересечения медиан AA', BB', CC'. Тогда прямая OM' будет линией пересечения плоскостей OAA_1, OBB_1, OCC_1. Обозначим M точку пересечения прямой OM' со сферой. Эта точка будет искомой точкой пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1. ■

Сферическая парабола. Напомним определения параболы на плоскости.

Параболой называется геометрическое место точек (ГМТ) A плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через эту точку, Точка F называется фокусом, а прямая d – директрисой параболы (рис. 6.10).

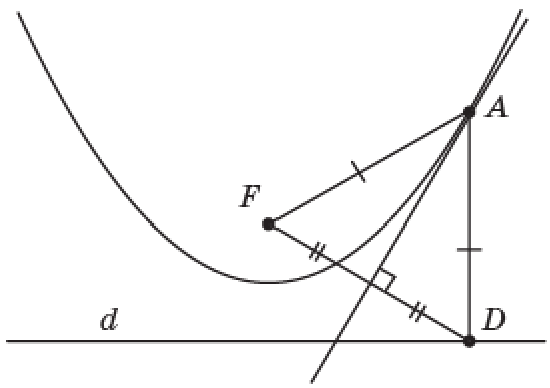

Рис. 6.10

Пусть теперь на сфере задана точка F и сферическая прямая d, не проходящая через эту точку. Обозначим N и S полюса сферы, расположенные на прямой, перпендикулярной плоскости данной сферической прямой. Найдём сферический аналог параболы, т. е. ГМТ A на сфере, равноудалённых от точки F и сферической прямой d (рис. 6.11).

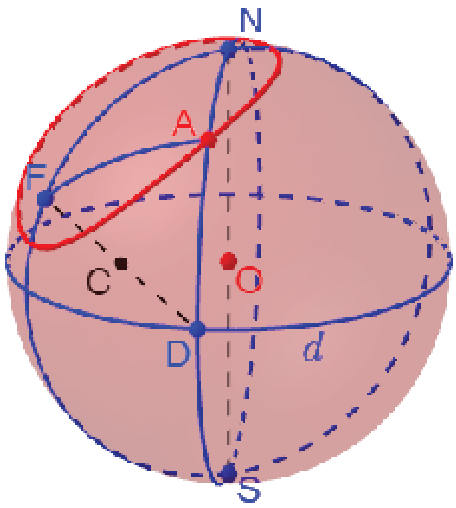

Рис. 6.11

Рассмотрим какую-нибудь точку D на сферической прямой d. Соединим её отрезком с точкой F. Обозначим C середину отрезка FD. Через точку C проведём плоскость, перпендикулярную прямой FD. Линия пересечения этой плоскости со сферой и будет геометрическим местом точек, равноудалённых от точек F и D. Через точку D и полюса сферы проведём большую окружность. Точка A пересечения этой окружности и построенной линии будет равноудалена от точки F и сферической прямой d. При изменении положения точки D на окружности d точка A будет описывать искомое ГМТ. Будем называть его сферической параболой, а сферическую прямую d – директрисой.

Указанное построение точки A можно провести в компьютерной программе GeoGebra. Если для полученной точки A выбрать опцию «Оставлять след», то при перемещении точки D по сферической прямой d точка A будет описывать искомую сферическую параболу.

Сферический эллипс. По аналогии с определением параболы определим эллипс на плоскости. Для этого вместо прямой d возьмём окружность. А именно, пусть точка F расположена внутри окружности d с центром O и не совпадает с этим центром (рис. 6.12).

Тогда геометрическим местом точек, равноудалённых от точки F и окружности, будет эллипс, фокусами которого являются точки F и O, а сумма расстояний от точки A' эллипса до фокусов будет равна радиусу окружности.

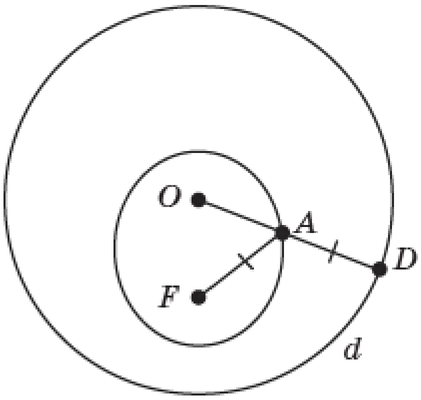

Рис. 6.12

В случае сферы рассмотрим точку F и окружность d, не проходящую через эту точку. Обозначим N и S полюса сферы, расположенные на прямой, перпендикулярной плоскости данной окружности. Найдём сферический аналог эллипса, т. е. геометрическое место точек A на сфере, равноудалённых от точки F и окружности d.

Рассмотрим какую-нибудь точку D на окружности d. Указанное выше построение даёт геометрическое место точек A, сумма расстояний от которых до точки F и окружности d равна длине дуги $\overset{\frown}{DN}$, т. е. равна сферическому расстоянию от точки N до окружности d, значит, не зависит от положения точки D на окружности d (рис. 6.13).

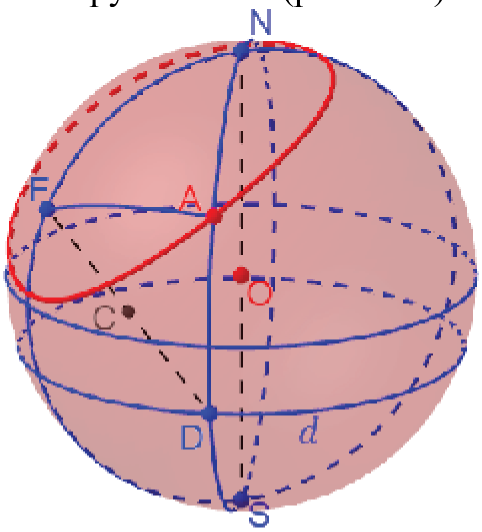

Рис. 6.13

Следовательно, построенное ГМТ на сфере можно также рассматривать как аналог эллипса на плоскости. Будем называть это геометрическое место точек сферическим эллипсом.

Сферическая гипербола. По аналогии с определением параболы определим гиперболу на плоскости. Для этого вместо прямой d возьмём окружность. А именно, пусть точка F расположена вне окружности d с центром O. Геометрическим местом точек, равноудалённых от точки F и окружности, будет ветвь гиперболы, фокусами которой являются точки F и O, а разность расстояний от точки A гиперболы до фокусов равна радиусу окружности (рис. 6.14).

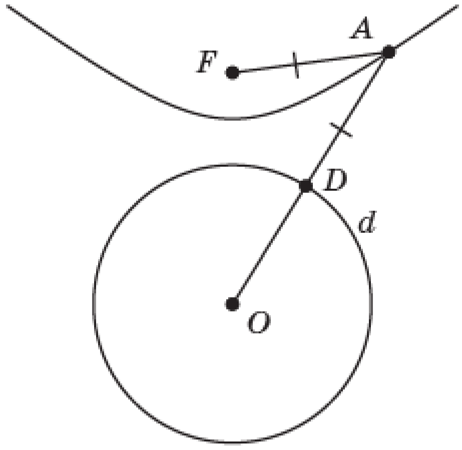

Рис. 6.14

Воспользуемся построением сферического эллипса. Из равенства дуг $\overset{\frown}{AF}$ и $\overset{\frown}{AD}$ следует, что разность длин дуг $\overset{\frown}{AS}$ и $\overset{\frown}{AF}$ равна длине дуги $\overset{\frown}{DS}$, т. е. не зависит от положения точки D на окружности d. Следовательно, построенное ГМТ на сфере можно рассматривать как аналог ветви гиперболы на плоскости, фокусами которой являются точки F и S.

Вторая ветвь этой гиперболы центрально-симметрична данной ветви относительно центра O сферы (рис. 6.15).

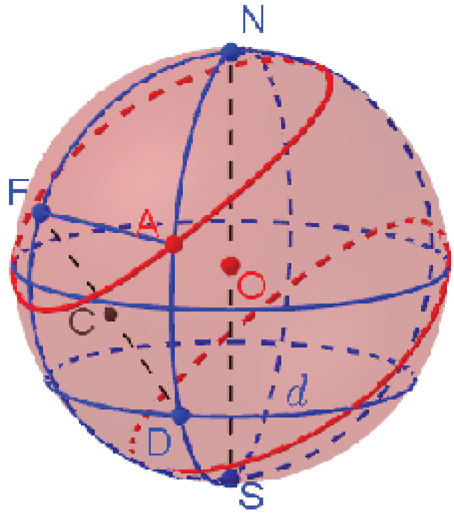

Рис. 6.15

Упражнения

1. В программе GeoGebra постройте серединный перпендикуляр к данному сферическому отрезку на сфере.

2. В программе GeoGebra постройте биссектрису данного сферического угла на сфере.

3. В программе GeoGebra постройте сферическую окружность, радиус которой равен $\frac{\pi}{4}$.

4. Сколько сферических окружностей проходит через две данные точки?

5. Найдите геометрическое место центров сферических окружностей, проходящих через две данные точки A и B.

6. Найдите геометрическое место точек, расстояние от которых до данной точки A меньше или равно расстоянию до данной точки B.

7. Найдите геометрическое место точек, расстояние от которых до данной прямой a меньше или равно расстоянию до данной прямой b.

8. В программе GeoGebra постройте сферический треугольник и точку пересечения его биссектрис.

9. В программе GeoGebra постройте сферический треугольник и его средние линии.

10. В программе GeoGebra постройте сферический треугольник и точку пересечения его высот.

11. В программе GeoGebra постройте сферический треугольник и точку пересечения его медиан.

12. Найдите радиус сферической окружности, полученной пересечением сферы и плоскости, удалённой от центра сферы на расстояние 0,5.

13. Найдите ГМТ на сфере, удалённых от данной сферической прямой на данное расстояние.

14. Дан сферический треугольник ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Найдите выражение для средней линии $A_1B_1 = c_1$, соединяющей середины сторон AC и BC.

15. Найдите выражение для высоты h правильного сферического треугольника, стороны которого равны a.

16. Найдите приближённое значение высоты правильного сферического треугольника, стороны которого равны $\frac{\pi}{3}$.

17. Докажите, что биссектриса угла сферического треугольника делит противолежащую сторону на части, синусы которых пропорциональны синусам прилежащих сторон.

18. Докажите, что медиана сферического треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми он заключена.

19. Докажите, что медиана сферического треугольника делит угол, из которого она выходит, на части, синусы которых пропорциональны синусам сторон, прилежащих к этому углу.

20. Найдите выражение медианы CC_1 сферического треугольника ABC через его стороны $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

21. В сферическом треугольнике ABC $AB = c = \frac{\pi}{3}$, $AC = b = \frac{\pi}{4}$, $BC = a = \frac{\pi}{6}$. Найдите медиану $CC_1 = m$.

22. В программе GeoGebra постройте: а) сферическую параболу; сферический эллипс; в) сферическую гиперболу.

7. Вписанные и описанные сферические окружности

Сферическая окружность называется *описанной* около сферического треугольника, если все вершины этого сферического треугольника принадлежат данной сферической окружности. Сам сферический треугольник называется *вписанным* в сферическую окружность.

Теорема. Около любого сферического треугольника можно описать сферическую окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого сферического треугольника.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC. Как было доказано в предыдущем пункте, серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка P будет равноудалена от вершин данного сферического треугольника. Следовательно, она будет центром описанной сферической окружности (рис. 7.1). ■

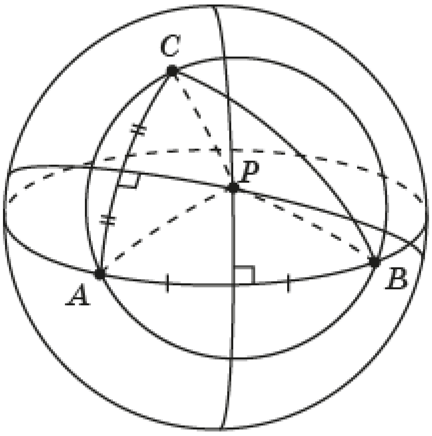

Рис. 7.1

По аналогии с определением касательной к окружности на плоскости определим понятие касательной к сферической окружности.

Сферическая прямая называется *касательной* к сферической окружности, если она имеет с этой сферической окружностью одну общую точку. Эта точка называется точкой касания.

На рисунке 7.2 показана сферическая прямая c, касающаяся сферической окружности a в точке A.

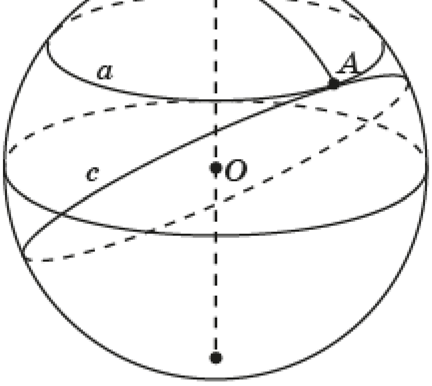

Рис. 7.2

Теорема. Касательной к сферической окружности является сферическая прямая, проходящая через точку этой сферической окружности и перпендикулярная сферическому радиусу, проведённому в эту точку.

Доказательство. Рассмотрим сферическую окружность с центром *P*. Пусть точка *A* принадлежит этой сферической окружности. Сферическая прямая *c* проходит через точку *A* и перпендикулярна сферическому радиусу *PA* (рис. 7.3).

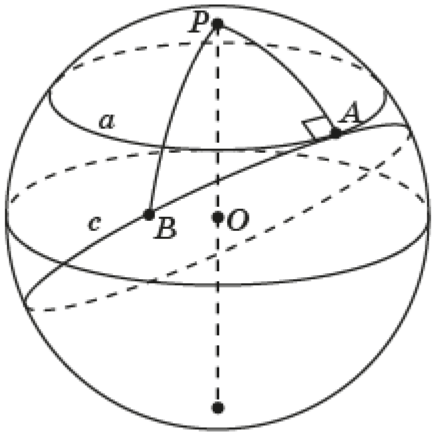

Рис. 7.3

Для любой точки *B* сферической прямой *c*, отличной от точки *A*, сферический отрезок *PB* будет наклонной к этой сферической прямой. Он будет больше перпендикуляра *PA*, опущенного на эту сферическую прямую. Следовательно, точка *B* не принадлежит данной сферической окружности. Значит, точка *A* является единственной точкой сферической прямой *c*, принадлежащей сферической окружности *a*, т. е. эта сферическая прямая является касательной. ■

Сферическая окружность называется *вписанной* в сферический треугольник, если она касается всех сторон этого сферического треугольника. Сам сферический треугольник называется *описанным* около этой сферической окружности.

Теорема. В любой сферический треугольник можно вписать сферическую окружность. Её центром будет точка пересечения биссектрис этого сферического треугольника.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник *ABC*. Как было доказано в предыдущем пункте, точка *P* пересечения его биссектрис одинаково удалена от его сторон. Следовательно, сферическая окружность с центром в точке *P* и радиусом, равным расстоянию от этой точки до сторон сферического треугольника, будет искомой вписанной сферической окружностью (рис. 7.3). ■

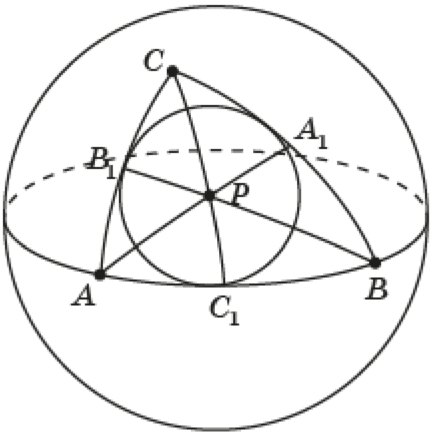

Рис. 7.3

В геометрии на плоскости доказывались теоремы о том, что около прямоугольника можно описать окружность, а в ромб можно вписать окружность. В сферической геометрии имеются аналогичные теоремы.

Теорема. Около любого сферического четырёхугольника, все углы которого равны, можно описать сферическую окружность. Её центром будет точка пересечения диагоналей этого сферического четырёхугольника, а радиусом будет половина диагонали.

Доказательство. Как было доказано ранее, диагонали такого четырёхугольника равны и точкой пересечения делятся пополам (рис. 7.4).

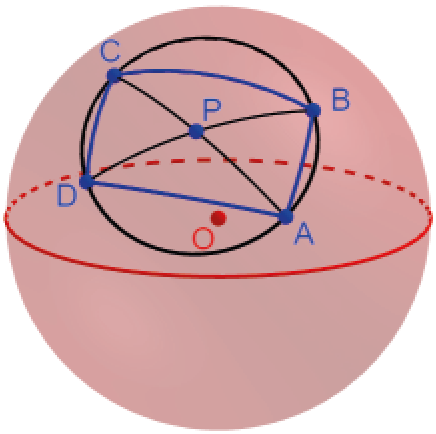

Рис. 7.4

Следовательно, сферическая окружность с центром P и радиусом, равным половине диагонали, будет искомой описанной сферической окружностью. ■

Теорема. В любой сферический ромб можно вписать сферическую окружность. Её центром будет точка пересечения диагоналей этого сферического ромба, а радиусом будет половина высоты.

Доказательство. Рассмотрим сферический ромб $ABCD$. Проведём его диагонали. Обозначим P точку их пересечения. Из точки P опустим перпендикуляры PE, PF, PG, PH на стороны соответственно AB, BC, CD, AD. Как было доказано ранее, треугольники, на которые сферический ромб разбивается своими диагоналями, равны. Следовательно, равны и их высоты, проведённые из точки P. Кроме того, высоты PE, PG, и PF, PH составляют сферические отрезки соответственно EG и FH, являющиеся высотами данного сферического ромба. Следовательно, сферическая окружность с центром P и радиусом, равным половине высоты сферического ромба, будет искомой вписанной сферической окружностью (рис. 7.5). ■

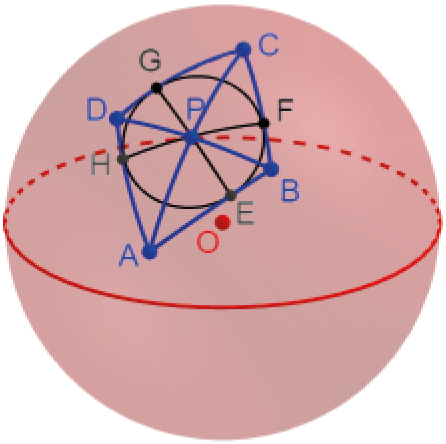

Рис. 7.5

Упражнения

1. В программе GeoGebra постройте правильный сферический треугольник, вписанный в сферическую окружность.

2. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического треугольника, стороны которого равны a.

3. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического треугольника, стороны которого равны $\frac{\pi}{3}$.

4. Выясните, сколько касательных к данной сферической окружности проходит через данную точку на сфере в зависимости от расположения данной точки по отношению к данной сферической окружности. В программе GeoGebra постройте касательную к данной сферической окружности, проходящую через данную точку.

5. Из одной точки проведены две касательные к сферической окружности. Докажите, что сферические отрезки, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

6. В программе GeoGebra постройте правильный сферический треугольник, описанный около сферической окружности.

7. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, вписанной в правильный сферический треугольник, стороны которого равны a.

8. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, вписанной в правильный сферический треугольник, стороны которого равны $\frac{\pi}{3}$.

9. Где расположен центр сферической окружности, описанной около прямоугольного сферического треугольника?

10. Найдите условие на углы сферического треугольника, при котором центр описанной сферической окружности расположен: а) внутри; б) на стороне; в) вне этого сферического треугольника.

11. Сферический угол называется *вписанным* в сферическую окружность, если его вершина принадлежит сферической окружности, а стороны пересекают эту сферическую окружность. *Центральным* сферическим углом называется сферический угол, вершиной которого является центр данной сферической окружности. В программе GeoGebra постройте сферический угол, вписанный в сферическую окружность. Докажите, что если вписанный сферический угол содержит центр сферической окружности, то он больше половины центрального сферического угла, опирающегося на ту же дугу сферической окружности.

12. В программе GeoGebra постройте сферический квадрат, вписанный в сферическую окружность.

13. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, описанной около сферического квадрата, стороны которого равны a.

14. Найдите значение радиуса сферической окружности, описанной около сферического квадрата, стороны которого равны $\frac{\pi}{4}$.

15. Докажите, что если около сферического четырёхугольника можно описать сферическую окружность, то суммы противолежащих углов этого сферического четырёхугольника равны.

16. В программе GeoGebra постройте сферический квадрат, описанный около сферической окружности.

17. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, вписанной в сферический квадрат, стороны которого равны a.

18. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, вписанной в сферический квадрат, стороны которого равны $\frac{\pi}{4}$.

19. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, вписанной в сферический ромб, стороны которого равны a, а один из углов равен α.

20. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, вписанной в сферический ромб, стороны которого равны $\frac{\pi}{4}$, а один из углов равен $\frac{\pi}{3}$.

21. Докажите, что если в сферический четырёхугольник можно вписать сферическую окружность, то суммы противолежащих сторон этого сферического четырёхугольника равны.

22. В программе GeoGebra постройте правильный сферический шестиугольник, вписанный в сферическую окружность.

23. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического шестиугольника, стороны которого равны a.

24. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического шестиугольника, стороны которого равны $\frac{\pi}{4}$.

25. В программе GeoGebra постройте правильный сферический шестиугольник, описанный около сферической окружности.

26. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, вписанной в правильный сферический шестиугольник, стороны которого равны a.

27. Найдите приближённое значение радиуса сферической окружности, вписанной в правильный сферический шестиугольник, стороны которого равны $\frac{\pi}{4}$.

28. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического n-угольника, стороны которого равны a.

29. Найдите выражение для радиуса сферической окружности, описанной около правильного сферического n-угольника, стороны которого равны a.

30. Докажите, что для правильного сферического n-угольника со сторонами a и углами α имеет место равенство $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi}{n}$.

8. Движения сферы. Симметрия

По аналогии с определением движения на плоскости определим движение на сфере, как преобразование сферы, сохраняющее сферическое расстояние между точками, т. е. если точки A, B сферы переводятся в точки A', B' соответственно, то $AB = A'B'$.

Две фигуры на сфере называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'.

Рассмотрим некоторые свойства движения.

Свойство 1. Движение переводит сферические прямые в сферические прямые, сферические лучи в сферические лучи и сферические отрезки в сферические отрезки.

Доказательство. Пусть точка B принадлежит сферическому отрезку AC и движение переводит эти точки в точки A', B', C' соответственно (рис. 8.1).

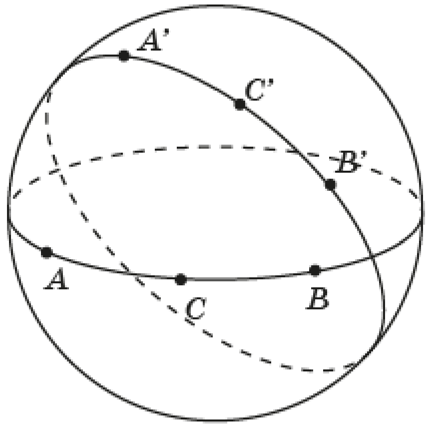

Рис. 8.1

Тогда $AB + BC = AC$. Поскольку при движении расстояние между точками не изменяются, то для точек A', B', C' будет иметь место равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Следовательно, точка C', лежит между точками A' и B' сферической прямой $A'B'$. Значит, сферический отрезок AB переводится в сферический отрезок $A'B'$.

Аналогичным образом доказывается, что сферический луч AB переводится в сферический луч $A'B'$ и вся сферическая прямая AB переходит в сферическую прямую $A'B'$. ■

Свойство 2. При движении сохраняются сферические углы.

Доказательство. Пусть дан сферический угол с вершиной в точке C и точками A, B на его сторонах. Предположим, что движением эти точки переводятся в точки C', A', B' соответственно (рис. 8.2). Поскольку при движении расстояние между точками не изменяются, то сферический треугольник ABC будет равен сферическому треугольнику $A'B'C'$ (по третьему признаку равенства сферических треугольников), следовательно, $\angle ACB = \angle A'C'B'$. ■

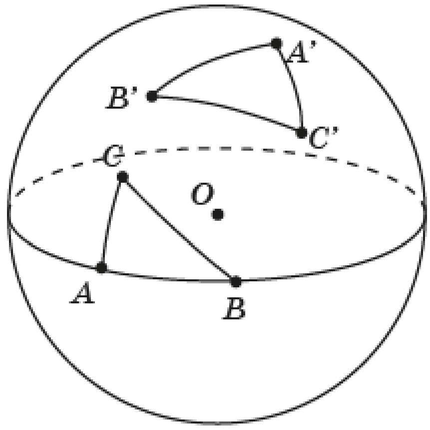

Рис. 8.2

Рассмотрим примеры движений на сфере.

1. Центральная симметрия. Точки A и A' на сфере называются симметричными относительно точки P, если P является серединой сферического отрезка AA'. Точка P считается симметричной сама себе (рис. 8.3).

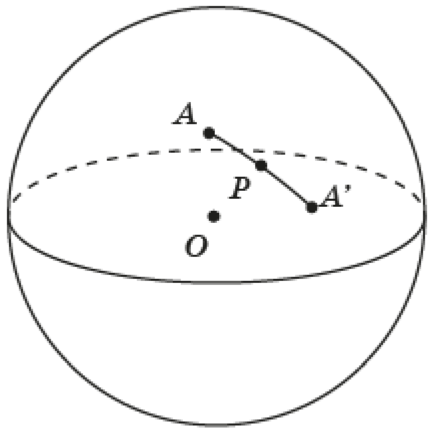

Рис. 8.3

Преобразование сферы, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки P точка A', называется центральной симметрией. Точка P при этом называется центром симметрии.

Две фигуры F и F' на сфере называются центрально-симметричными относительно точки P, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется центрально-симметричной относительно точки P, если она симметрична сама себе.

Теорема. Центральная симметрия сохраняет сферическое расстояние между точками, следовательно, является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B соответственно (рис. 8.4). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ равны (по первому признаку равенства треугольников) и, следовательно, $AB = A'B'$. ■

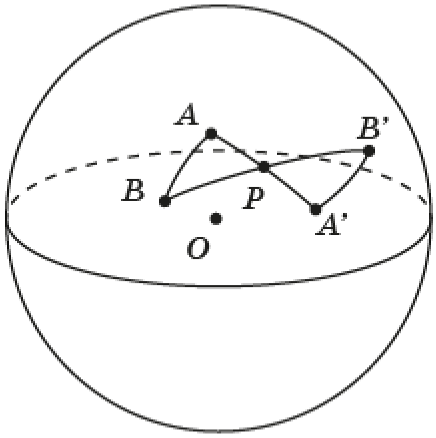

Рис. 8.4

2. Поворот. Симметрия *n*–го порядка. Говорят, что точка A' сферы получается из точки A поворотом вокруг точки P на угол φ, если $PA' = PA$ и $\angle APA' = \varphi$ (рис. 8.5).

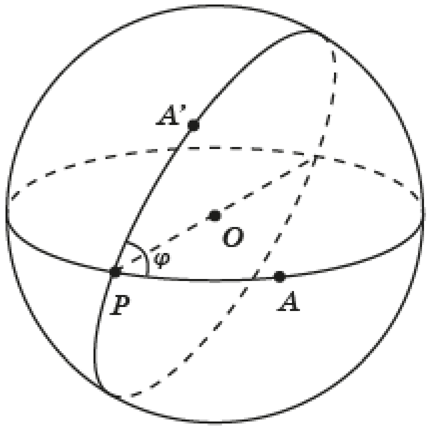

Рис. 8.5

Преобразование сферы, при котором данная точка P остается на месте, а все остальные точки сферы поворачиваются вокруг точки P в одном и том же направлении на заданный угол φ, называется *поворотом* вокруг точки P.

Говорят, что фигура F' получается *поворотом* фигуры F вокруг точки P, если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки P на угол φ.

Точка P называется *центром симметрии n - го порядка* фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки P на угол $\frac{360°}{n}$ фигура F совмещается сама с собой.

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Теорема. Поворот сохраняет расстояние между точками, следовательно, является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены поворотом вокруг точки P точек A, B соответственно (рис. 8.6).

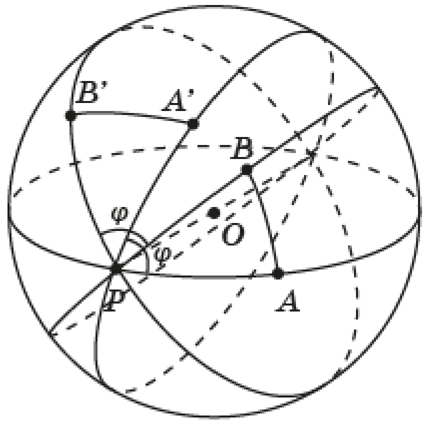

Рис. 8.6

Тогда сферические треугольники APB и $A'PB'$ равны (по первому признаку равенства сферических треугольников) и, следовательно, $AB = A'B'$. ■

3. Осевая симметрия. Две точки A и A' сферы называются *симметричными* относительно сферической прямой c, если эта сферическая прямая проходит через середину сферического отрезка AA' и перпендикулярна к нему (рис. 8.7). Каждая точка сферической прямой c считается симметричной самой себе.

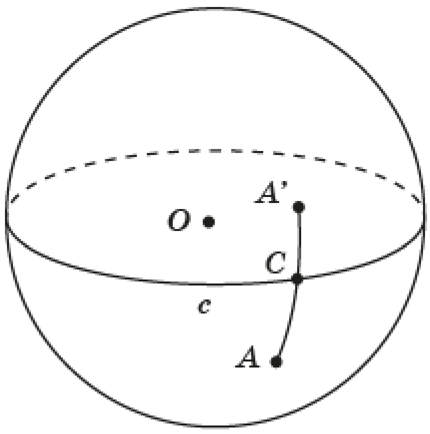

Рис. 8.7

Преобразование сферы, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно сферической прямой c точка A', называется *осевой симметрией*. Сферическая прямая c при этом называется *осью симметрии*.

Две фигуры F и F' называются симметричными относительно оси c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется симметричной относительно оси c, если она симметрична сама себе.

Теорема. Осевая симметрия сохраняет расстояние между точками, следовательно, является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены симметрией относительно оси c из точек A, B соответственно. Предположим, что точки A, B лежат по одну сторону от c (рис. 8.8).

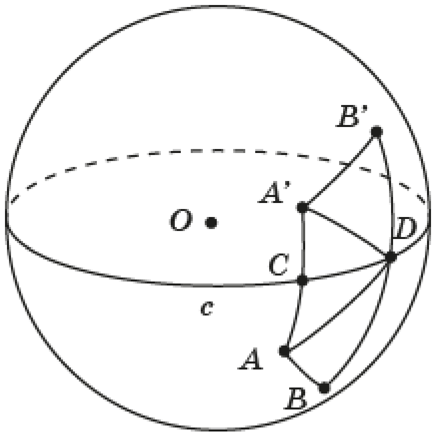

Рис. 8.8

Обозначим через C, D точки пересечения сферических прямых соответственно AA', BB' со сферической прямой c. Прямоугольные сферические треугольники ACD и $A'CD$ равны (по двум катетам). Следовательно, $\angle ADC = \angle A'DC$ и $AD = A'D$. Сферические треугольники ADB и $A'DB'$ равны (по первому признаку равенства сферических треугольников). Следовательно, $AB = A'B'$.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда точки A, B лежат по разные стороны от сферической прямой c. ■

Упражнения

1. Какие сферические прямые при центральной симметрии относительно точки P переходят в себя?

2. Относительно каких точек P центральная симметрия переводит данную сферическую прямую a в себя.

3. Расстояние от точки P до сферической прямой a равно α. Найдите угол между сферической прямой a и центрально-симметричной ей сферической прямой a' относительно точки P.

4. Докажите, что в пространстве осевая симметрия относительно прямой OP переводит сферу с центром O и радиусом OP саму в себя и задаёт на этой сфере центральную симметрию относительно точки P.

5. Используя программу GeoGebra, постройте точку A', симметричную данной точке A относительно точки P.

6. Используя программу GeoGebra, постройте сферическую прямую *a'*, симметричную данной сферической прямой *a* относительно точки *P*, не принадлежащей этой сферической прямой.

7. Докажите, что в пространстве поворот вокруг прямой *OP* на угол φ переводит сферу с центром *O* и радиусом *OP* саму в себя и задаёт на этой сфере поворот вокруг точки *P* на угол φ.

8. Используя программу GeoGebra, постройте точки, в которые переходит заданная точка *A* при повороте вокруг заданной точки *P* на углы: 30°, 45°; 60°, 90°.

9. Используя программу GeoGebra, постройте сферические прямые, в которые переходит заданная сферическая прямая *a* при повороте вокруг заданной точки *P* на углы: 30°, 45°; 60°, 90°.

10. Для прямых на плоскости верно следующее утверждение: если прямая *a'* получена из прямой *a* поворотом вокруг точки *P* на угол φ, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то угол между прямыми *a* и *a'* равен φ. Верно ли это для сферических прямых на сфере?

11. В каком случае сферическая прямая при осевой симметрии переходит сама в себя?

12. Докажите, что в пространстве зеркальная симметрия относительно плоскости, проходящей через центр *O* сферы, переводит сферу саму в себя и задаёт на этой сфере осевую симметрию относительно линии пересечения сферы и этой плоскости.

13. Используя программу GeoGebra, постройте точку *A'*, симметричную данной точке *A* относительно данной оси *c*.

14. Используя программу GeoGebra, постройте сферическую прямую *a'*, симметричную данной сферической прямой *a* относительно данной оси *c*.

15. Имеет ли центр симметрии сферический: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат?

16. Имеет ли правильный сферический *n*-угольник центр симметрии?

17. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный сферический *n*-угольник вокруг центра описанной сферической окружности, чтобы он совместился сам с собой?

18. Симметрией какого порядка обладают правильные сферические *n*-угольники?

19. Имеет ли оси симметрии сферический: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) квадрат? Если имеет, то сколько?

20. Имеет ли правильный сферический *n*-угольник оси симметрии? Если имеет, то сколько?

9. Многогранные углы

Рассмотрим связь сферических многоугольников с многогранными углами в пространстве.

Начнём с двугранных углов. Напомним, что двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями (рис. 9.1). Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

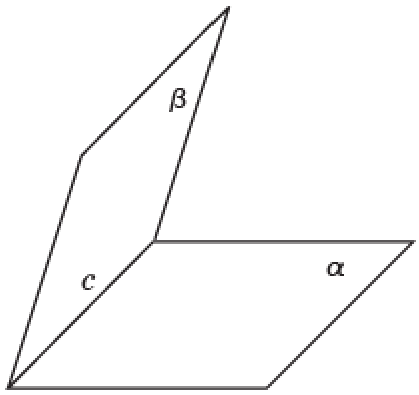

Рис. 9.1

Пусть α и β - полуплоскости с общей граничной прямой c (рис. 9.2). Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии её пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется линейным углом данного двугранного угла.

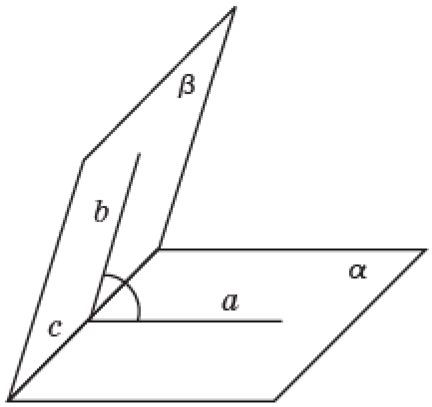

Рис. 9.2

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла. Двугранный угол называется прямым, если его линейный угол - прямой.

Для данного двугранного угла с ребром c рассмотрим сферу с центром O, принадлежащим прямой c, и радиусом 1. В пересечении этой сферы и двугранного угла получим сферический двуугольник с вершинами A, B и сторонами a, b (рис. 9.3).

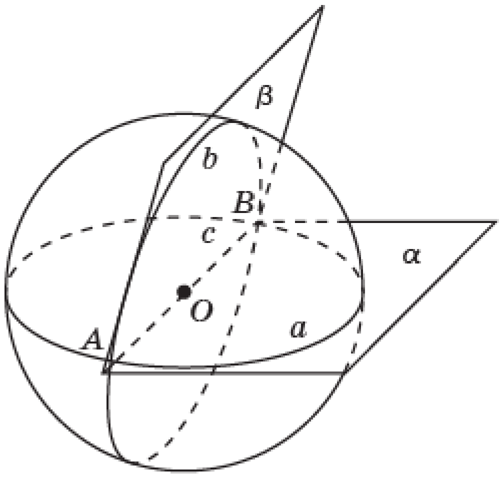

Рис. 9.3

Величина угла этого сферического двуугольника равна величине исходного двугранного угла.

Заметим, что площадь сферического двуугольника равна удвоенной величине двугранного угла, измеряемого в радианах. Так, например, площадь прямоугольного сферического двуугольника равна π, а его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Перейдём теперь к многогранным углам.

Многогранной поверхностью в пространстве будем называть поверхность, образованную конечным набором плоских углов A_1OA_2, A_2OA_3, …, $A_{n\text{-}1}OA_n$, A_nOA_1 с общей вершиной O, в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины (рис. 9.4).

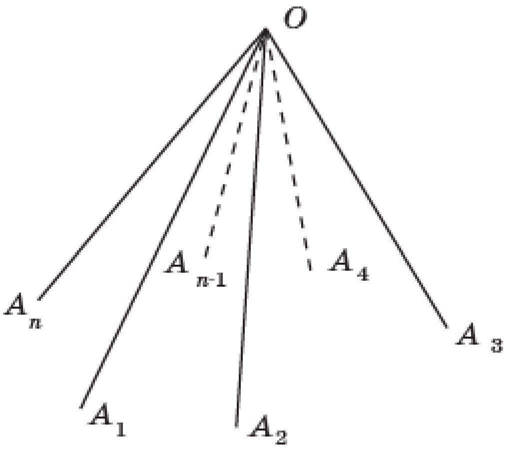

Рис. 9.4

Фигура, образованная многогранной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется *многогранным углом*. Общая вершина S называется *вершиной* многогранного угла. Лучи OA_1, …, OA_n называются *рёбрами* многогранного угла, а сами плоские углы A_1OA_2, A_2OA_3, …, $A_{n\text{-}1}OA_n$, A_nOA_1 – *гранями* многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $OA_1 \dots A_n$, указывающими вершину и точки на его рёбрах.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трёхгранными (рис. 9.5, а), четырёхгранными (рис. 9.5, б), пятигранными (рис. 9.5, в) и т. д.

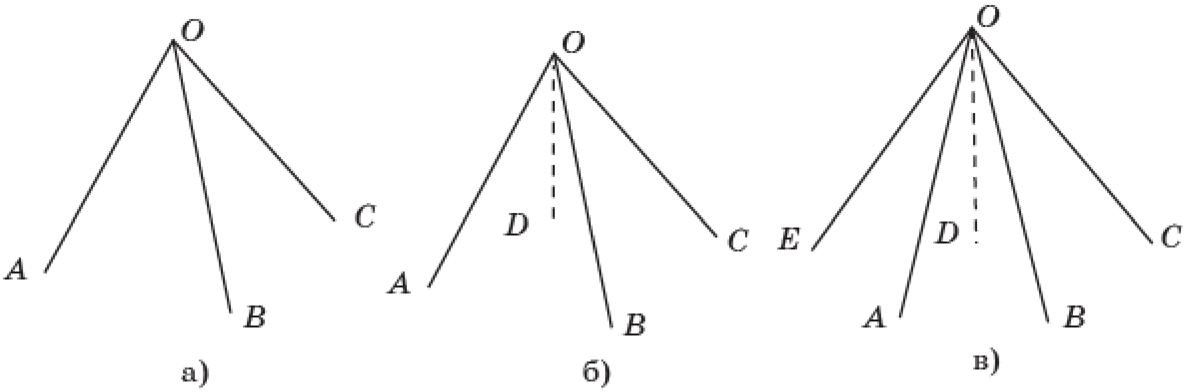

Рис. 9.5

Многогранный угол называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

На рисунке 9.6 приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.

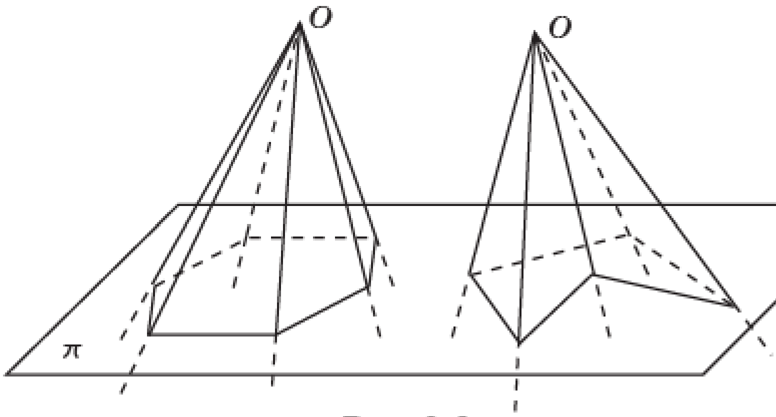

Рис. 9.6

Многогранный угол называется правильным, если у него равны все двугранные углы и равны все плоские углы.

Для данного многогранного угла $OA_1 \dots A_n$ рассмотрим сферу с центром O и радиусом 1. В пересечении этой сферы и многогранного угла получим сферический многоугольник $A_1 \dots A_n$ (рис. 9.7).

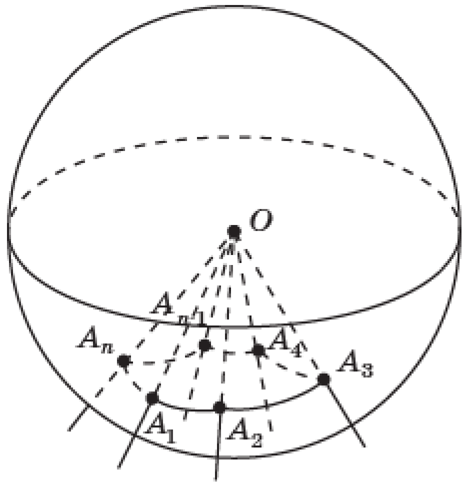

Рис. 9.7

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между сферическими многоугольниками и многогранными углами. Вершинам сферического многоугольника соответствуют рёбра многогранного угла. Сторонам сферического многоугольника соответствуют плоские углы многогранного угла.

Выпуклым сферическим многоугольникам соответствуют выпуклые многогранные углы. Правильным сферическим многоугольникам соответствуют правильные многогранные углы.

Величины сторон этого сферического многоугольника равны величинам плоских углов многогранного угла. Углам сферического многоугольника соответствуют двугранные углы, образованные соседними гранями многогранного угла. Величины углов сферического многоугольника равны величинам соответствующих двугранных углов. Величину самого многогранного угла можно измерять в градусах и радианах.

Для измерения многогранного угла в градусах будем считать, что всё пространство составляет 360°. Градусная величина многогранного угла показывает, какую часть пространства занимает этот многогранный угол. Например, трёхгранный угол, плоские углы которого равны 90°, занимает одну восьмую часть пространства. Его градусная величина равна 45°.

Для измерения многогранного угла в радианах напомним, что площадь сферы единичного радиуса равна 4π. Величина многогранного угла измеряется половиной величины площади сферического многоугольника, соответствующего этому многогранному углу. Например, величина трёхгранного угла, плоские углы которого равны 90°, измеряемая в радианах, равна $\frac{\pi}{4}$.

Указанное выше соответствие между сферическими многоугольниками и многогранными углами позволяет перенести теоремы и свойства о сферических многоугольниках на многогранные углы. Сформулируем некоторые из них.

Теорема. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Теорема. Сумма двугранных углов произвольного трёхгранного угла больше 180°. Более того, если двугранные углы трёхгранного угла равны α, β, γ, то для величины δ_{OABC} трёхгранного угла *OABC* имеет место формула

$$\delta_{OABC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Теорема. Сумма углов выпуклого *n*-гранного угла больше 180°(*n* – 2). Более того, если двугранные углы *n*-гранного угла равны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то для величины $\delta_{OA_1 \dots A_n}$ данного *n*-гранного угла имеет место формула

$$\delta_{OA_1 \dots A_n} = \frac{1}{2} S_{A_1 \dots A_n} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - \pi(n - 2)).$$

Для трёхгранных углов имеют место следующие теоремы косинусов и синусов, аналогичные теоремам косинусов и синусов для сферических треугольников.

Теорема. Для трёхгранного угла *SABC*, плоские углы которого *BSC*, *ASC*, *ASB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а двугранные углы *SA*, *SB*, *SC* равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Эта теорема позволяет по двум известным плоским углам трёхгранного угла и двугранному углу, заключённому между ними, находить его третий плоский угол, а также по известным плоским углам трёхгранного угла находить его двугранные углы.

Теорема. Для трёхгранного угла *SABC*, плоские углы которого *BSC*, *ASC*, *ASB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а двугранные углы *SA*, *SB*, *SC* равны соответственно α, β, γ, имеет место равенство

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \mathrm{c}.$$

Эта теорема позволяет по известному плоскому углу трёхгранного угла и двум прилежащим двугранным углам находить его третий двугранный угол, а также по известным двугранным углам трёхгранного угла находить его плоские углы.

Теорема. Для трёхгранного угла *SABC*, плоские углы которого *BSC*, *ASC*, *ASB* которого соответственно равны *a*, *b*, *c*, а двугранные углы *SA*, *SB*, *SC* равны соответственно α, β, γ, имеют место равенства

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Эта теорема позволяет по известным двум плоским углам и двугранному углу, противолежащему одному из этих плоских углов, находить двугранный угол, противолежащий другому плоскому углу, а также по известным двум двугранным углам и плоскому углу, противолежащему одному из этих двугранных углов, находить плоский угол, противолежащий другому двугранному углу,

По аналогии с определениями многоугольника, вписанного в окружность, и многоугольника, описанного около окружности, определим понятия многогранного угла, вписанного в коническую поверхность, и многогранного угла, описанного около конической поверхности.

Напомним, что *коническая поверхность* получается вращением луча OA вокруг прямой c, проходящей через точку O и образующей острый угол лучом OA (рис. 9.8). Точка O называется *вершиной* конической поверхности, лучи, получающиеся вращением луча OA, – *образующими* конической поверхности.

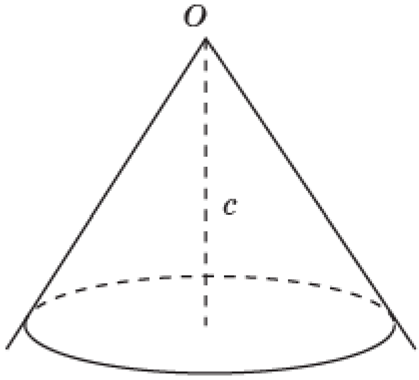

Рис. 9.8

Многогранный угол будем называть *вписанным* в коническую поверхность, если вершина многогранного угла совпадает с вершиной конической поверхности, а рёбра многогранного угла являются образующими конической поверхности. Сама коническая поверхность называется описанной около многогранного угла (рис. 9.9).

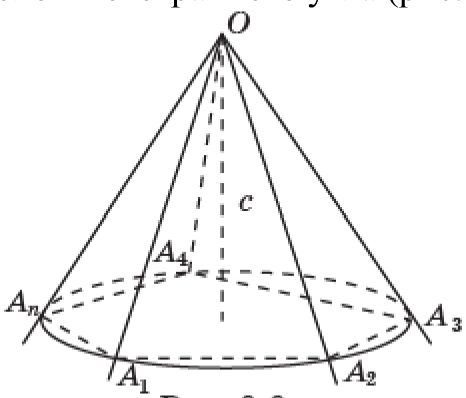

Рис. 9.9

Многогранный угол будем называть *описанным* около конической поверхности, если все его грани касаются конической поверхности. Саму коническую поверхность при этом будем называть *вписанной* в многогранный угол (рис. 9.10).

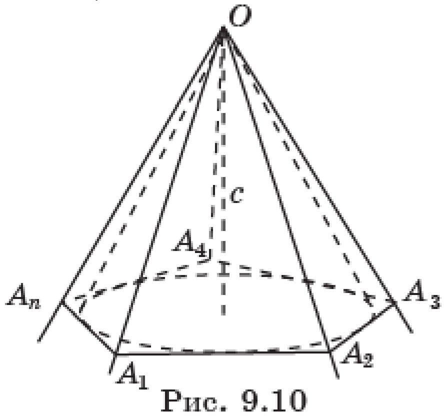

Рис. 9.10

Сформулируем теоремы, аналогичные теоремам о вписанном и описанном сферических треугольниках.

Теорема. Около всякого трёхгранного угла можно описать коническую поверхность.

Теорема. В любой трёхгранный угол можно вписать коническую поверхность.

Следующие теоремы являются аналогами теорем о вписанном и описанном сферических четырёхугольниках.

Теорема. Если около четырёхгранного угла можно описать коническую поверхность, то суммы его противолежащих двугранных углов равны.

Теорема. Если в четырёхгранный угол можно вписать коническую поверхность, то суммы его противолежащих плоских углов равны.

Имеют место теоремы, аналогичные теоремам о вписанных и описанных правильных сферических многоугольниках.

Теорема. Около любого правильного многогранного угла можно описать коническую поверхность.

Теорема. В любой правильный многогранный угол можно вписать коническую поверхность.

Доказательства всех этих теорем непосредственно следуют из соответствующих теорем и задач для сферических многоугольников.

Упражнения

1. Может ли быть трёхгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

2. Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трёхгранные; б) четырёхгранные; в) пятигранные углы.

3. Два плоских угла трёхгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

4. Докажите, что всякий плоский угол трёхгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

5. Докажите, что если в трёхгранном угле два плоских угла прямые, то и противолежащие им двугранные углы прямые.

6. Плоские углы трёхгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

7. В трёхгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

8. Плоские углы трёхгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его рёбрах от вершины отложены равные отрезки *OA, OB, OC.* Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью *ABC*.

9. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60°. На одном из его рёбер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

10. Найдите геометрическое место внутренних точек трёхгранного угла, равноудалённых от его граней.

11. Найдите геометрическое место внутренних точек трёхгранного угла, равноудаленных от его рёбер.

12. Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трёхгранного угла и перпендикулярные этим граням, все три пересекаются по одной прямой.

13. Докажите, что плоскости, проходящие через рёбра трехгранного угла и через биссектрисы его противолежащих граней, все три пересекаются по одной прямой.

14. Существует ли выпуклый многогранный угол, имеющий плоские углы: а) 80°, 130°, 70°, 100°; б) 10°, 20°, 80°, 160°?

15. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с центром O найдите градусную величину четырёхгранного угла $OABCD$.

16. Докажите, что для правильного n-гранного угла имеет место равенство $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi}{n}$, где α и a – величины соответственно двугранных и плоских данного правильного n-гранного угла.

17. Найдите приближённую градусную величину двугранных углов правильного: а) трёхгранного; б) четырёхгранного; в) пятигранного угла, плоские углы которого равны 60°.

18. Найдите приближённую градусную величину плоских углов правильного: а) трёхгранного; б) четырёхгранного; в) пятигранного угла, двугранные углы которого равны 120°.

19. Найдите выражение для угла Υ между образующей и осью конической поверхности, описанной около правильного трёхгранного угла, плоские углы которого равны α.

20. Найдите приближённое значение угла Υ между образующей и осью конической поверхности, описанной около правильного трёхгранного угла, плоские углы которого равны $\frac{\pi}{2}$.

21. Найдите выражение для угла γ между образующей и осью конической поверхности, вписанной в правильный трёхгранный угол, плоские углы которого равны α.

22. Найдите приближённое значение угла γ между образующей и осью конической поверхности, вписанной в правильный трёхгранный угол, плоские углы которого равны $\frac{\pi}{2}$.

23. Найдите выражение для угла Υ между образующей и осью конической поверхности, описанной около правильного четырёхгранного угла, плоские углы которого равны α.

24. Найдите приближённое значение угла Υ между образующей и осью конической поверхности, описанной около правильного четырёхгранного угла, плоские углы которого равны $\frac{\pi}{3}$.

25. Найдите выражение для угла γ между образующей и осью конической поверхности, вписанной в правильный четырёхгранный угол, плоские углы которого равны α.

26. Найдите приближённое значение угла γ между образующей и осью конической поверхности, вписанной в правильный четырёхгранный угол, плоские углы которого равны $\frac{\pi}{3}$.

10. Паркеты на сфере

Мы будем рассматривать паркеты на единичной сфере, состоящие из сферических многоугольников.

Паркетом на сфере будем называть такое заполнение сферы сферическими многоугольниками, при котором любые два сферических многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Каждому паркету на сфере, состоящему из правильных сферических многоугольников, можно сопоставить многогранник, вершинами которого будут вершины этого паркета.

Наоборот, каждому многограннику, около которого можно описать сферу, можно сопоставить паркет на сфере, состоящий из сферических многоугольников, вершинами которых являются вершины данного многогранника.

Паркет на сфере называется **правильным**, если он состоит из равных правильных сферических многоугольников. Имеется пять типов правильных паркетов, соответствующих правильным многогранникам.

1. Паркет из правильных сферических треугольников, соответствующий правильному тетраэдру. Он состоит из четырёх правильных сферических треугольников (рис. 10.1).

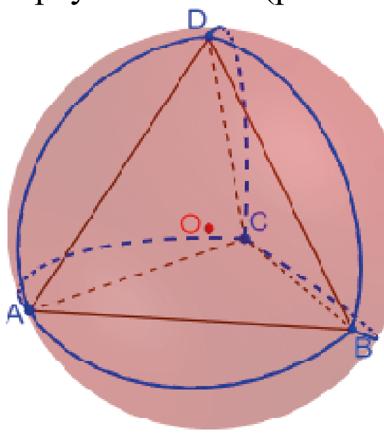

Рис. 10.1

2. Паркет из сферических квадратов, соответствующий кубу. Он состоит из шести сферических квадратов (рис. 10.2).

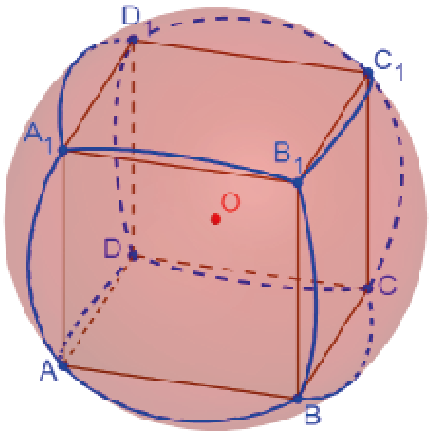

Рис. 10.2

3. Паркет из правильных сферических треугольников, соответствующий октаэдру. Он состоит из восьми правильных сферических треугольников (рис. 10.3).

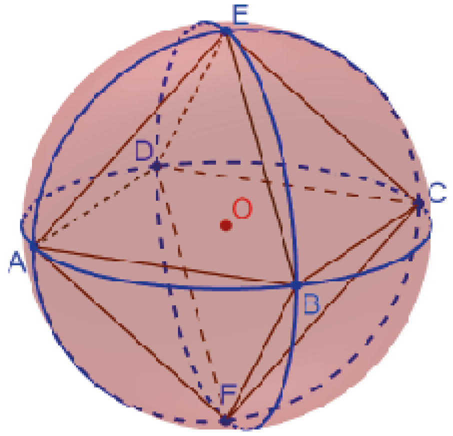

Рис. 10.3

4. Паркет из правильных сферических треугольников, соответствующий икосаэдру. Он состоит из двадцати правильных сферических треугольников (рис. 10.4).

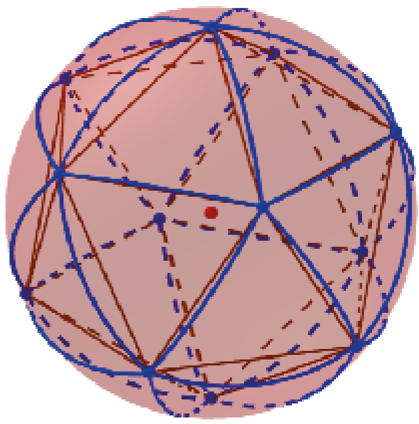

Рис. 10.4

5. Паркет из правильных сферических пятиугольников, соответствующий додекаэдру. Он состоит из двенадцати правильных сферических пятиугольников (рис. 10.5).

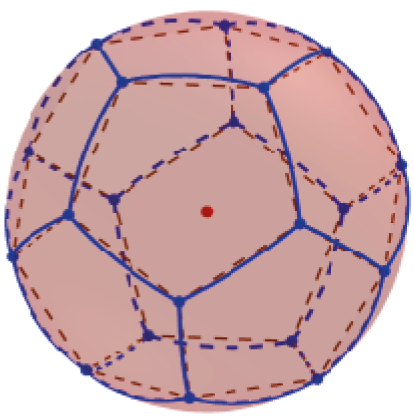

Рис. 10.5

Представим также паркет из правильных сферических пятиугольников и шестиугольников. В форме этого паркета изготавливают поверхность некоторых футбольных мячей (рис. 10.6).

Рис. 10.6

Воспользуемся теоремой о сумме углов выпуклого сферического многоугольника для доказательства следующей теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого сферического паркета, состоящего из выпуклых сферических многоугольников, имеет место равенство

$$В – Р + Г = 2,$$

где В – общее число вершин, Р – общее число сторон, Г – общее число сферических многоугольников.

Доказательство. Обозначим M_1, …, M_m сферические многоугольники, образующие паркет на единичной сфере; n_1, …, n_m – числа сторон; $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ – суммы углов; S_1, …, S_m – площади соответствующих сферических многоугольников.

Воспользуемся тем, что для площади S выпуклого сферического n-угольника имеет место равенство

$$S = \Sigma - \pi(n-2),$$

где Σ – сумма углов сферического n-угольника.

Применяя эти равенства к сферическим многоугольникам M_1, …, M_m, получим равенства

$$S_1 = \Sigma_1 - \pi(n_1 - 2), ,,,, S_m = \Sigma_m - \pi(n_m - 2).$$

Складывая эти равенства, получим равенство

$$S_1 + \cdots + S_m = \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_m - \pi(n_1 + \cdots + n_m - 2m).$$

Заметим, что имеют место равенства

$$S_1 + \cdots + S_m = 4\pi, \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_m = 2\pi \cdot В, n_1 + \cdots + n_m = 2Р, m = Г.$$

Подставляя эти выражения в полученное равенство, придём к равенству

$$4\pi = 2\pi \cdot В - \pi(2Р - 2Г).$$

Сокращая обе части этого равенства на 2π, получим искомое равенство

$$В – Р + Г = 2. \blacksquare$$

Упражнения

1. Найдите углы правильных сферических треугольников, составляющих паркет на сфере, соответствующий: а) тетраэдру; б) кубу; в) октаэдру; г) икосаэдру.

2. Найдите стороны *a* правильных сферических треугольников, составляющих паркет на единичной сфере, соответствующий: а) тетраэдру; б) октаэдру.

3. Найдите углы сферических квадратов, составляющих паркет на сфере, соответствующий кубу.

4. Найдите стороны *a* сферических квадратов, составляющих паркет на единичной сфере, соответствующий кубу.

5. Найдите углы правильных сферических пятиугольников, составляющих паркет на сфере, соответствующий додекаэдру.

6. Докажите, что на сфере не существует других правильных паркетов, кроме пяти правильных паркетов, указанных выше.

7. В программе GeoGebra получите паркет на единичной сфере, соответствующий правильной шестиугольной призме, все рёбра которой равны. Является ли он правильным? Найдите его стороны.

8. Докажите, что не существует паркета на сфере из сферических треугольников, в каждой вершине которого сходится шесть сферических треугольников.

9. Докажите, что не существует паркета на сфере из сферических четырёхугольников, в каждой вершине которого сходится четыре сферических четырёхугольника.

10. Докажите, что не существует паркета на сфере из сферических шестиугольников, в каждой вершине которого сходится три сферических шестиугольника.

11. Докажите, что любой паркет на сфере должен содержать сферический треугольник, или сферический четырёхугольник, или сферический пятиугольник.

12. Докажите, что любой паркет на сфере должен содержать вершины, в которых сходится три, или четыре, или пять сферических многоугольников.

13. В программе GeoGebra постройте правильный тетраэдр, вписанный в сферу. Через центр сферы и рёбра тетраэдра проведите плоскости. Найдите их линии пересечения со сферой. Эти линии образуют паркет на сфере. Сколько и каких сферических многоугольников в этом паркете? Сколько и каких вершин в этом паркете?

14. В программе GeoGebra постройте куб, вписанный в сферу. Через центр сферы и рёбра куба проведите плоскости. Найдите их линии пересечения со сферой. Эти линии образуют паркет на сфере. Сколько и каких сферических многоугольников в этом паркете? Сколько и каких вершин в этом паркете?

15. Сколько сферических пятиугольников в паркете, изображённом на рисунке 10.7, в котором участвуют сферические пятиугольники и шестиугольники, а в каждой вершине сходится три сферических многоугольника?

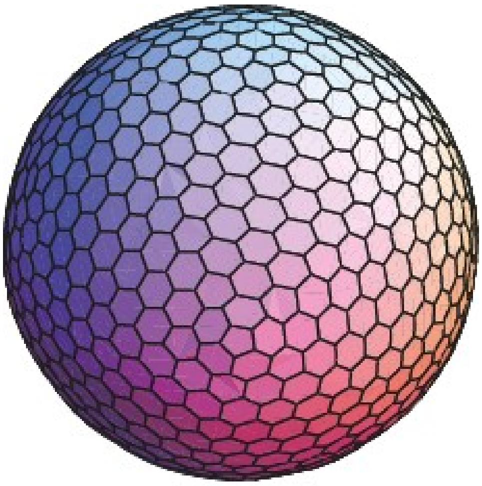

Рис. 10.7

16. В каждой вершине паркета, изображённом на рисунке 10.8, сходится пять или шесть сферических треугольников. Сколько в нём имеется вершин, в которых сходится пять сферических треугольников?

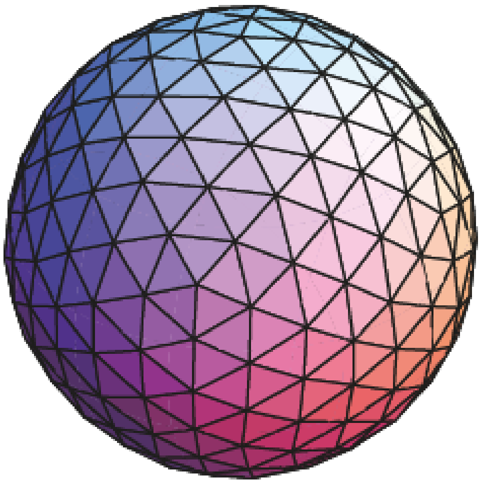

Рис. 10.8

11. Сферические координаты в пространстве

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолёта, корабля и т. д., в астрономии при определении положения звёзд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

Для определения сферических координат рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку *A* (рис. 11.1).

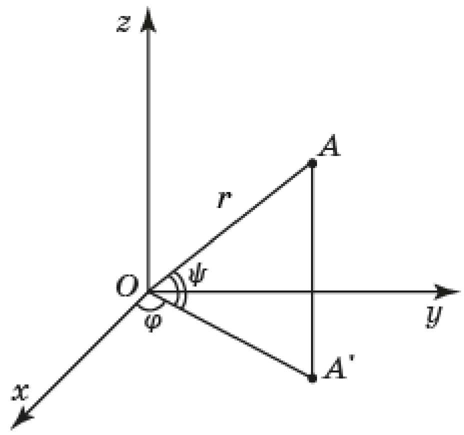

Рис. 11.1

Ортогональную проекцию точки *A* на плоскость *Oxy* обозначим *A'*, а длину вектора *OA* - через *r*. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к плоскости *Oxy* обозначим ψ, причём, будем считать его изменяющимся от -90° до +90°. Если точка *A* расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью *Ox* обозначим φ. Тройка (*r*; φ; ψ) называется сферическими координатами точки *A* в пространстве.

Для того чтобы отличать сферические координаты от декартовых, сферические координаты будем писать через точку с запятой, а декартовы – через запятую.

Точки, заданные сферическими координатами, можно получать в программе GeoGebra. Для этого в строке «Ввод» нужно набрать

A=(r; φ; ψ)

и нажать “Enter”.

В результате получим точку A с такими сферическими координатами.

Поверхность в пространстве можно задавать уравнением в сферических координатах $r = r(\varphi;\psi)$. Для того чтобы получить такую поверхность в программе GeoGebra, в строке «Ввод» нужно набрать

Поверхность((*r*(u,v);u;v),u,a,b,v,c,d)

и нажать “Enter”.

В результате получим поверхность, в которой a, b – границы изменения параметра u; c, d – границы изменения параметра v.

Например, если набрать

Поверхность((1;u;v),u,0,Pi/2,v,0,Pi/2),

то получим поверхность, являющуюся частью сферы с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 11.2).

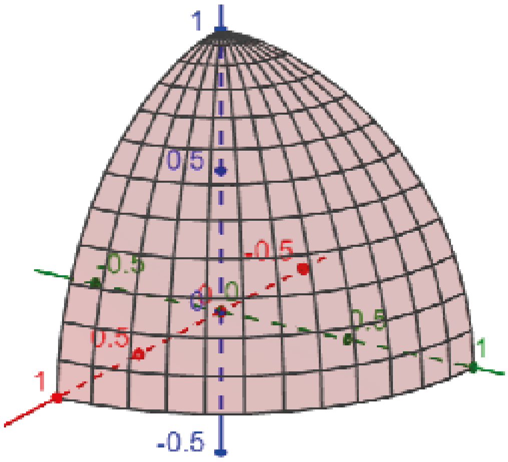

Рис. 11.2

Кривую в пространстве можно задавать параметрическими уравнениями в сферических координатах

$$\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \\ \psi = \psi(t). \end{cases}$$

Для того чтобы получить такую кривую в программе GeoGebra, в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая((r(t);u(t);v(t)),t,a,b)

и нажать “Enter”.

В результате получим кривую, в которой a, b – границы изменения параметра t.

Например, если набрать

Кривая((1;t;t/20),t,0,10Pi),

то получим винтовую линию на единичной сфере (рис. 11.3).

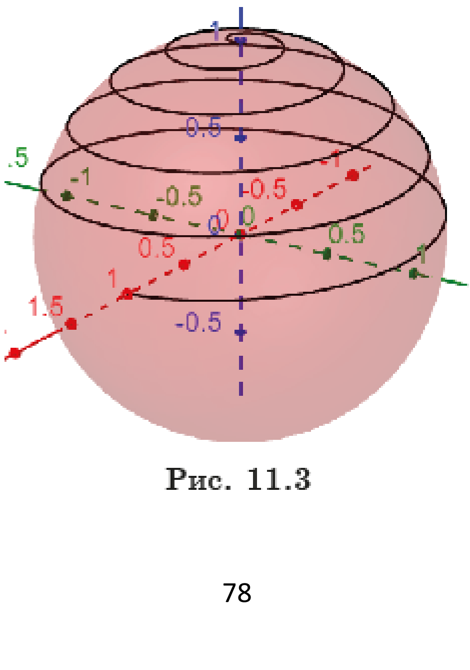

Рис. 11.3

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz выбирается проходящей через северный полюс, а ось Ox так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат O, то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами $(\varphi;\ \psi)$. При указании этих координат на поверхности Земли для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова "восточной долготы", а для отрицательных φ от нуля до -180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова "западной долготы". Аналогично, для положительных ψ от нуля до 90° добавляют слова "северной широты", а для отрицательных ψ от нуля до –90° берут абсолютную величину ψ и добавляют слова "южной широты". Например, город Москва имеет координаты: 37°35' восточной долготы и 55°45' северной широты. Санкт-Петербург имеет координаты: 30°19′ в. д., 59°57′ с. ш. Владивосток имеет координаты: 131°54′ в. д., 43°07′ с. ш.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую *меридианом*. Точки, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется *параллелью*.

Как было показано ранее, кратчайшим путём на сфере, соединяющим две точки, является сферический отрезок (дуга большой окружности). Такой путь называют *ортодромией*, что в переводе с греческого языка означает "прямой бег".

Рассмотрим точки $A_1(1;\ \varphi_1;\ \psi_1)$ и $A_2(1;\ \varphi_2;\ \psi_2)$ на единичной сфере с центром O и северным полюсом N. Найдём длину кратчайшего пути, соединяющего эти точки, которая равна радианной величине γ угла A_1OA_2 (рис. 11.4)

В сферическом треугольнике NA_1B_1, стороны NA_1, NB_1 равны соответственно $\frac{\pi}{2}-\psi_1$, $\frac{\pi}{2}-\psi_2$, а угол между ними равен $\varphi_2-\varphi_1$. По теореме косинусов получим равенство

$$\cos\gamma = \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2 + \cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

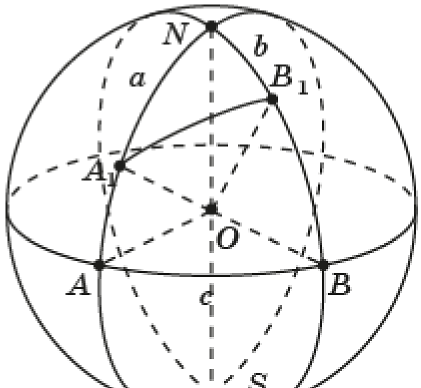

Рис. 11.4

В частности, если точки A_1, B_1 расположены на противолежащих меридианах, то кратчайшим путём на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через северный или южный полюс, в зависимости от того, в каких полушариях, северном или южном, лежат эти точки. Например, кратчайший путь, соединяющий точки $A_1(R; 0°; 45°)$, $A_2(R; 180°; 45°)$, проходит через северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиусом $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\pi R\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути (рис. 11.5).

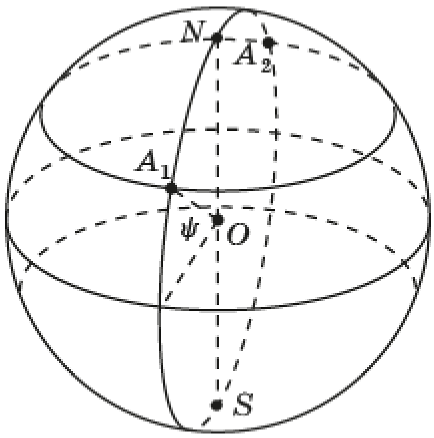

Рис. 11.5

Рассмотрим точки $A_1(1; \varphi_1; \psi_1)$, $A_2(1; \varphi_2; \psi_2)$ на единичной сфере. Найдём уравнение плоскости в декартовых координатах, проходящей через эти точки и начало координат O (рис. 11.6). На пересечении этой плоскости со сферой лежит сферический отрезок, соединяющий точки A_1 и A_2.

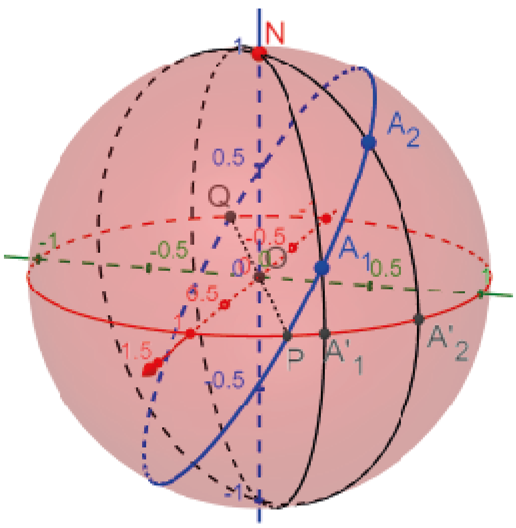

Рис. 11.6

Общее уравнение плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид $z = ax + by$. Наша задача состоит в нахождении коэффициентов a и b. Точки $A'_1(1;\ \varphi_1;\ 0)$ $A'_2(1;\ \varphi_2;\ 0)$ имеют декартовы координаты соответственно $(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1, 0)$, $(\cos\varphi_2, \sin\varphi_1, 0)$. Значения z в этих точках равны соответственно $tg\ \psi_1$ и $tg\ \psi_2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1 = tg\ \psi_1, \\ a\cos\varphi_2 + b\sin\varphi_2 = tg\ \psi_2, \end{cases}$$

находим

$$a = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 \sin\varphi_2 - \operatorname{tg}\psi_2 \sin\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)},\ b = \frac{\operatorname{tg}\psi_2 \cos\varphi_1 - \operatorname{tg}\psi_1 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Используя это уравнение плоскости, найдём параметрические уравнения сферического отрезка, соединяющего точки A_1 и A_2. Для точки $A(1;\ \varphi;\ \psi)$, принадлежащей этому сферическому отрезку, рассмотрим точку $A'(1;\ \varphi;\ 0)$ (рис. 11.7).

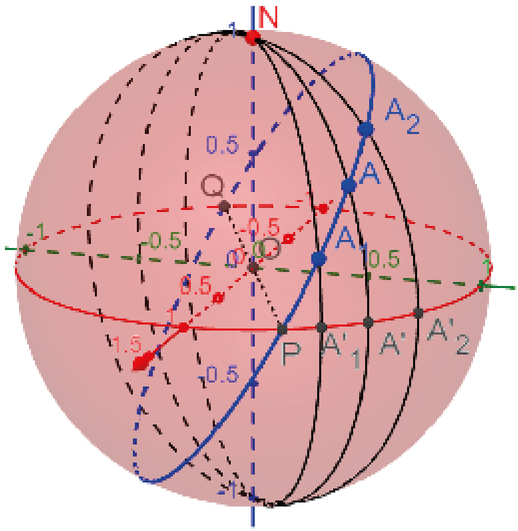

Рис. 11.7

Она имеет декартовы координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Значение z в этой точке равно $a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi$. Следовательно, для точки A выполняется равенство $\operatorname{tg}\psi = a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi$.

Таким образом, параметрические уравнения сферического отрезка, соединяющего точки A_1 и A_2, имеют вид

$$\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \operatorname{arctg}(a \cdot \cos t + b \cdot \sin t), \end{cases} \quad \varphi_1 \le t \le \varphi_2.$$

Хотя сферический отрезок (ортодромия) и является кратчайшим путём на поверхности Земли, тем не менее самолёты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом движения является кривая, образующая равные углы с разными меридианами. Эта кривая называется *локсодромия*, что в переводе с греческого языка означает "косой бег". Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоянный курс, используется компас, указывающий направления меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием компьютеров.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако, если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении друг от друга начала и конца пути. В этом случае весь путь разбивается на меньшие участки, движение по которым осуществляется с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс меняется.

Упражнения

1. Найдите формулы, выражающие декартовы координаты точки через её сферические координаты.

2. Найдите формулы, выражающие сферические координаты точки через её декартовы координаты.

3. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: (1; 45°; 120°), (2; -30°; -90°), (1; 90°; 60°).

4. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: A(1, 1, 1), B(-1, 0, 1), C(0, 0, 2).

5. Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

6. Точка A имеет сферические координаты (r; φ; ψ). Найдите сферические координаты точки, симметричной данной, относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

7. Пункт A находится на параллели 60° северной широты. Какой длины путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли примите равным 6000 км.

8. Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при её продолжении в обе стороны?

9. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.

10. Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами: а) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$; б) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; в) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$?

11. Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}$; 45°; 0°), B(2; 0°; 60°).

12. Напишите параметрические уравнения параллели на единичной сфере, для точек A которой координата ψ равна 45° (рис. 11.8).

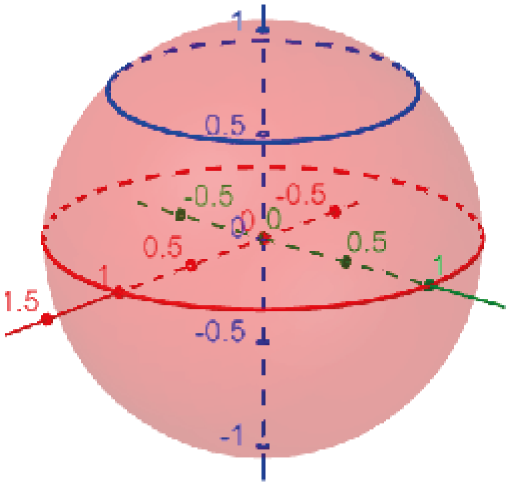

Рис. 11.8

13. Напишите параметрические уравнения меридиана на единичной сфере, для точек A которого координата φ равна 45° (рис. 11.9).

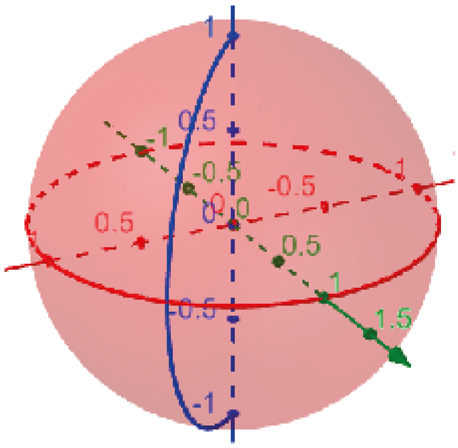

Рис. 11.9

14. В программе GeoGebra получите единичную сферу, задав её в сферических координатах.

15. В программе GeoGebra получите поверхность, заданную уравнение в сферических координатах $r = \frac{1}{\cos v}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{3}$. Определите её вид.

16. В программе GeoGebra получите поверхность, заданную уравнением $r = \cos v$, $0 \leq v \leq \pi$.

17. Какая поверхность задаётся уравнением $r = \sin v$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$?

18. Какая поверхность задаётся уравнением $r = \frac{\operatorname{tg} v}{\cos v}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{3}$?

19. Москва расположена на параллели примерно 56° северной широты. Сравните длины путей из Москвы (M) в диаметрально-противоположную точку M' по параллели и по меридиану через северный полюс (рис. 11.10). Примите длину экватора приближённо равной 40 000 км.

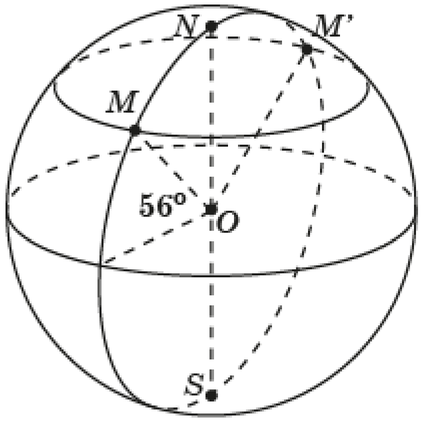

Рис. 11.10

20. Для точек $A_1(1; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6})$, $A_2(1; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$ найдите: а) уравнение плоскости, проходящей через эти точки и начало координат; б) параметрические уравнения ортодромии, соединяющей эти точки.

21. В программе GeoGebra отметьте на единичной сфере точки M, V с координатами Москвы и Владивостока. Постройте кратчайший путь между этими точками. Используя инструмент «Угол», найдите длину кратчайшего пути от Москвы до Владивостока. Примите длину экватора приближённо равной 40 000 км.

22. Пусть сфера имеет единичный радиус, а её центр расположен в начале координат. Точка F на сфере имеет сферические координаты $(1; 0; \gamma)$. Точка D имеет сферические координаты $(1; u; \delta)$. Найдите параметрические уравнения сферического эллипса, фокусами которого являются точка F и полюс $N(1; 0; \frac{\pi}{2})$, а константа c равна длине дуги $\overset{\frown}{ND}$.

Ответы и указания

1

1. Нет. **2.** Центрально-симметричные. **3.** Искомые полюса изображены на рисунке О1.1.

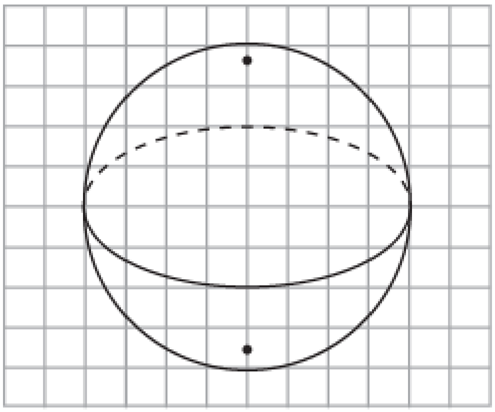

Рис. О1.1

4. Искомый экватор изображён на рисунке О1.2.

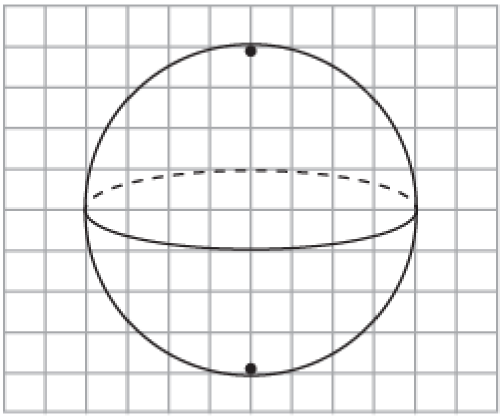

Рис. О1.2

5. 4 см. **6.** 3 см. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\frac{R}{2}$. **9.** Примеры параллелей и меридианов показаны на рисунке О1.3.

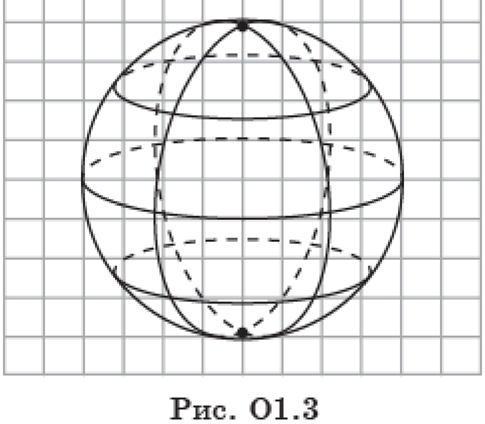

Рис. О1.3

10. На рисунке O1.4 показана сфера с полюсами, параллелями и меридианами, полученная в программе GeoGebra/

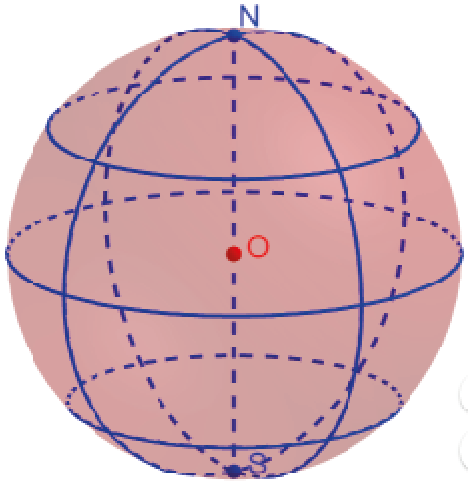

Рис. O1.4

2

1. Нет. **2.** Если две точки A и B не являются центрально-симметричными относительно центра O. В этом случае точки A, B, O не принадлежат одной прямой. Следовательно, через них проходит единственная плоскость в пространстве. Значит, имеется единственная сферическая прямая, проходящая через точки A и B. **3.** Если две точки A и B являются центрально-симметричными, относительно центра O, то они принадлежат одной прямой. Следовательно, через них проходит бесконечно много плоскостей в пространстве. Значит, в этом случае имеется бесконечно много сферических прямых, проходящих через точки A и B. **4.** Нет. Плоскости, определяющие две данные сферические прямые имеют общую точку O. Следовательно, они пересекаются по прямой. Эта прямая пересекает сферу в двух центрально-симметричных точках, которые будут принадлежать обеим данным сферическим прямым. Значит, любые две сферические прямые пересекаются. Их общими точками являются две центрально-симметричные точки (рис. O2.1).

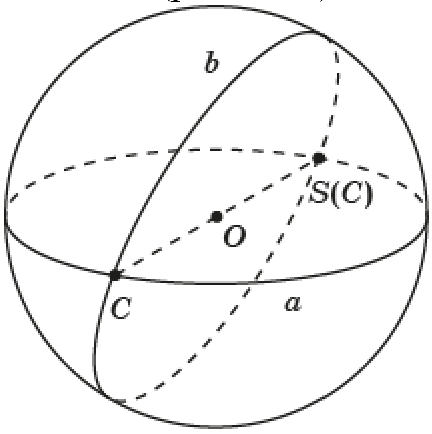

Рис. O2.1

5. На сфере с центром O отметим две точки A и B. Через точки O, A, B проведём плоскость. Найдём её линию пересечения со сферой. Она и будет искомой сферической прямой (рис. О2.2).

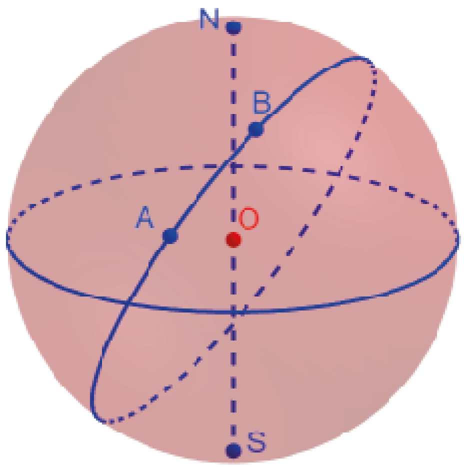

Рис. О2.2

6. Для построения сферического отрезка можно воспользоваться инструментом «Дуга по центру и двум точкам». Для нахождения его длины можно воспользоваться инструментом «Угол». На рисунке О2.3 показан сферический отрезок AB, длина которого равна 0,86.

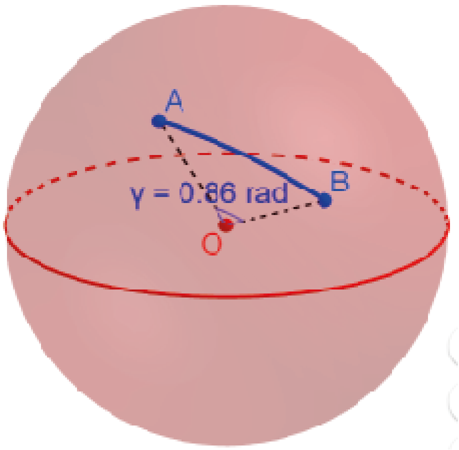

Рис. О2.3

7. а) 3; б) 4; в) n частей. **8.** π. **9.** Сферические отрезки AB и $S(A)S(B)$ равны, так как равны вертикальные сферические углы AOB и $S(A)OS(B)$. **10.** Для сферы с центром O отмечаем две центрально-симметричные точки C, $S(C)$ и какие-нибудь точки A, B. Стороны a и b сферического угла ACB можно получить с помощью инструмента «Дуга по трём точкам». В качестве точек выбираем соответственно точки C, A, $S(C)$ и C, B, $S(C)$ (рис. О2.4).

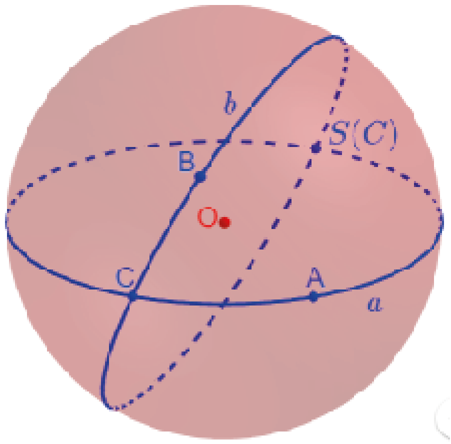

Рис. О2.4

11. а) 4; б) 8; в) наибольшее число частей получается, если никакие три сферические прямые не пересекаются в общих точках. В этом случае при добавлении n-й сферической прямой к имеющимся n – 1 сферической прямой она пересечёт эти сферические прямые в 2(n – 1) точке и разобьётся этими точками на 2(n – 1) частей. Каждая такая часть разобьёт части сферы, образованные n – 1 сферической прямой, на две части. Следовательно, при добавлении n-ой сферической прямой число частей сферы увеличивается на 2(n – 1). Общее число частей, на которые сферу разбивают n сферических прямых, выражается суммой $2 + 2 + \cdots + 2(n-1) = 2 + (n-1)n$. **12.** Пусть *AOC* и *BOD* – вертикальные сферические углы (рис. О2.5).

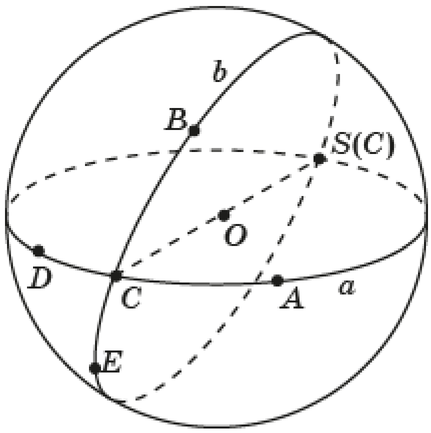

Рис. О2.5

Стороны *CD* и *CE* сферического угла *DCE* дополняют до сферических прямых стороны соответственно *CA* и *CB* сферического угла *ACB*. Тогда сферические углы *ACB* и *BCD* составляют в сумме развёрнутый сферический угол. Сферические углы *DCE* и *BCD* также составляют в сумме развёрнутый сферический угол. Следовательно, $\angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle BCD$, получаем требуемое равенство $\angle ACB = \angle DCE$. **13.** а) Сферический угол, меньший прямого сферического угла, называется *острым*; б) сферический угол, больший прямого, но меньший развернутого сферического угла, называется *тупым*. **14.** Для сферы с центром O проводим сферическую прямую a. Отмечаем точку B. Через точку O проводим сферическую прямую, перпендикулярную плоскости сферической прямой a. Находим её точку C пересечения со сферой. Если точка B не совпадает с точкой C, то через точки O, B, C проводим плоскость. Находим линию пересечения этой плоскости со сферой. Она и будет искомой сферической прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной сферической прямой a (рис. О2.6).

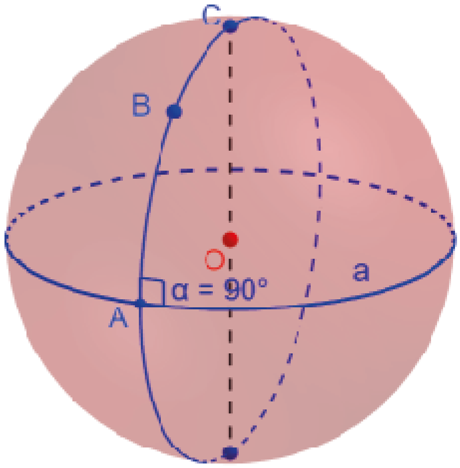

Рис. О2.6

Если точка B совпадает с точкой C, то отметим на сфере какую-нибудь другую точку D. Через точки O, B, D проводим плоскость. Найдём линию пересечения этой плоскости со сферой. Она будет сферической прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной сферической прямой a. Заметим, что в этом случае таких сферических прямых бесконечно много. **15.** Нет. Если точка A является полюсом сферической прямой a, то имеется бесконечно много перпендикуляров, опущенных их точки A на сферическую прямую a. **16.** $\frac{\pi}{2}$. **17.** Для сферы с центром O и сферической прямой c проводим сферическую прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную плоскости сферической прямой c. Её точки C и $S(C)$ пересечения со сферой будут искомыми полюсами сферической прямой c (рис. О2.7). **18.** Для сферы с центром O и точки C проводим плоскость, проходящую через точку O и перпендикулярную плоскости прямой OC. Её линия пересечения со сферой будет искомой полярой точки C (рис. О2.7).

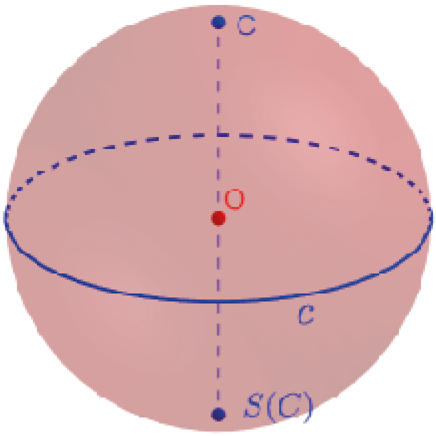

Рис. О2.7

19. Так как точки A и B – полюсы сферических прямых соответственно a и b, то сферическая прямая AB будет перпендикулярна сферическим прямым a и b. Следовательно, точка C пересечения сферических прямых a и b является полюсом сферической прямой AB (рис. О2.8). Значит, сферическая прямая AB является полярой точки C.

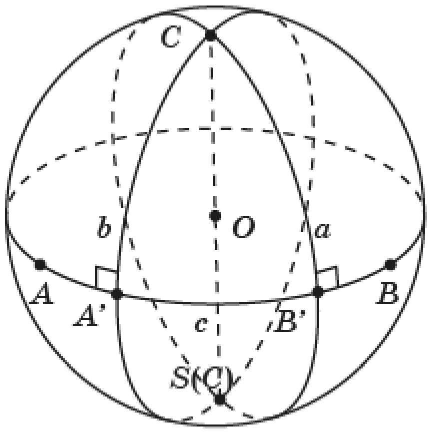

Рис. О2.8

20. Пусть O – центр сферы (рис. О2.9). Плоскость, содержащая поляру c, перпендикулярна прямой OC. Следовательно, угол AOB – линейный угол двугранного угла. Значит, длина сферического отрезка AB (длина дуги $\overset{\frown}{AB}$) равна радианной величине угла ACB.

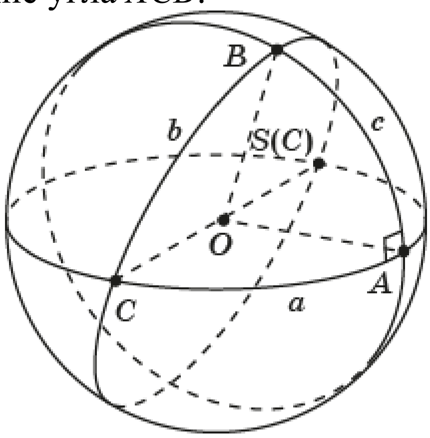

Рис. О2.9

3

1. Отметим какие-нибудь две точки A и B на сфере с центром O. Проведём дугу $\overset{\frown}{AB}$ и отрезок AB. Проведём биссектрису угла AOB. Найдём её точку пересечения D с дугой $\overset{\frown}{AB}$. Через точку D проведём плоскость, перпендикулярную отрезку AB. Найдём её окружность пересечения со сферой. Отметим какую-нибудь точку C на этой окружности. Проведём дуги $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$. Сферический треугольник ABC будет искомым равнобедренным сферическим треугольником (рис. O3.1). Действительно, прямоугольные сферические треугольники ACD и BCD равны по двум катетам. Следовательно, $AC = BC$.

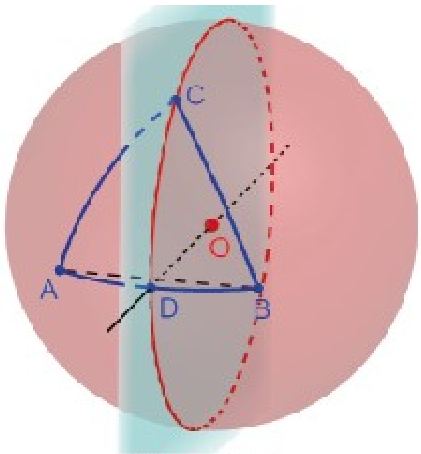

Рис. O3.1

2. На сфере с центром O отметим точки P и A. Проведём прямую OP. С помощью инструмента «Вращать объект вокруг прямой» повернём точку A вокруг прямой OP на угол 120°. Получим точку B. Аналогичным образом повернём точку B. Получим точку C. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» проведём дуги с центром O, соединяющие точки A и B, B и C, C и A. Получим правильный сферический треугольник ABC (рис. O3.2).

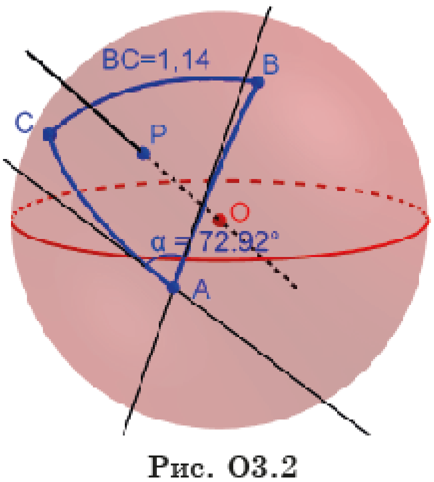

Рис. O3.2

С помощью инструмента «Угол» найдём приближённую величину угла *BOC* в радианах. Она будет равна длине стороны *BC*. На рисунке О3.2 она равна 1,14. С помощью инструмента «Касательная» через точку *A* проведём касательные к сторонам *AB* и *AC*. Используя инструмент «Угол» найдём приближённое значение угла между ними в градусах. Оно будет равно углу *A* сферического треугольника *ABC*. На рисунке О3.2 приближённое значение этого угла равно 72,92°. **3.** Через центр *O* сферы проведём какую-нибудь плоскость и найдём её линию пересечения со сферой. На ней выберем какие-нибудь точки *A* и *C*. Через точку *O* проведём прямую, перпендикулярную построенной плоскости и найдём её точки *D*, *E* пересечения со сферой. Проведём дугу *CD* и отметим на ней какую-нибудь точку *B*. Проведём дугу *AB*. Сферический треугольник *ABC* будет искомым прямоугольным сферическим треугольником (рис. О3.3).

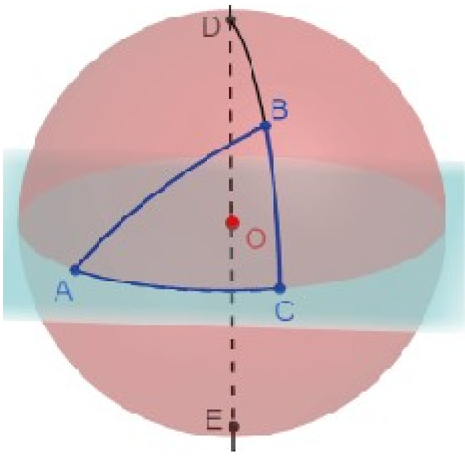

Рис. О3.3

4. а), б) Да. **5.** а), б) Да. **6.** а), б) Да. **7.** а), б) Да; в) нет. **8.** а) Нет; б), в), г) Да. **9.** Если точка *C* принадлежит сферическому отрезку *AB*, то выполняется равенство $AC + CB = AB$. Если точка *C* не принадлежит сферической прямой *AB*, то в силу неравенства треугольника выполняется неравенство $AC + CB > AB$. Если точка *C* принадлежит сферической прямой *AB*, но не принадлежит сферическому отрезку *AB*, то также выполняется неравенство $AC + CB > AB$. Следовательно, в этих случаях не выполняется равенство $AC + CB = AB$. **10.** Для сторон *a*, *b*, *c* сферического треугольника выполняется неравенство $a < b + c$, из которого следует искомое неравенство $a - b < c$. **11.** Как было доказано, углы сферического треугольника *A'B'C'*, полярного сферическому треугольнику *ABC*, равны $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. Так как сумма углов сферического треугольника больше π, то выполняется неравенство $\pi - a + \pi - b + \pi - c > \pi$, из которого следует искомое неравенство $a + b + c < 2\pi$. **12.** Рассмотрим сферический треугольник *ABC*, у которого $\angle A > \angle B$. Докажем, что $BC > AC$ (рис. О3.4).

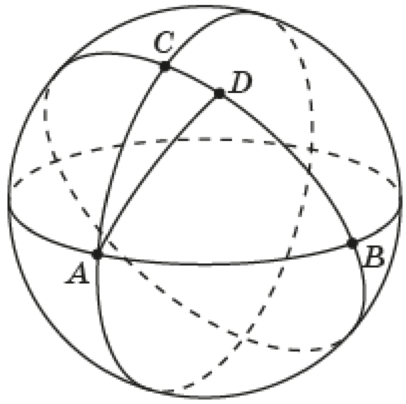

Рис. О3.4

Проведём сферический луч с вершиной A, образующий со сферической прямой AB угол, равный углу ABC. Так как $\angle A > \angle B$, то этот сферический луч будет лежать внутри сферического угла BAC. Обозначим D пересечение этого сферического луча со стороной BC. В сферическом треугольнике ABD $\angle A > \angle B$. Следовательно, этот сферический треугольник равнобедренный, $AD = BD$. В силу неравенства треугольника, применённому к сферическому треугольник ADC, выполняется неравенство $AD + DC > AC$. Так как $AD + DC = BC$, то получаем искомое неравенство $BC > AC$. **13.** Рассмотрим сферический треугольник ABC, у которого $AC < BC$. Докажем, что $\angle A > \angle B$. Действительно, сферический угол A не может равняться сферическому углу B, так как в этом случае сферический треугольник ABC был бы равнобедренным ($AC = BC$). Сферический угол A не может быть меньше сферического угла B, так как в этом случае выполнялось бы неравенство $AC > BC$. Таким образом, для сферических углов A и B остаётся одна возможность $\angle A > \angle B$. **14.** Доказательство аналогично доказательству для обычных треугольников. Пусть стороны сферического треугольника ABC меньше половины полупрямой (рис. О3.5).

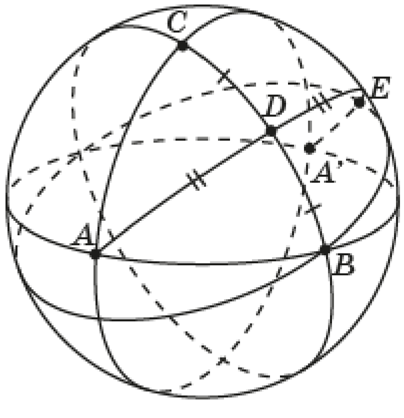

Рис. О3.5

Докажем, что внешний угол при вершине B больше угла C. Через вершину A и середину D стороны BC проведём сферическую полупрямую и отложим на ней сферический отрезок DE, равный AD. Так как сферический отрезок *AD* меньше половины полупрямой, то сферический отрезок *AE* будет меньше полупрямой. Следовательно, точка *E* будет принадлежать полусфере, определяемой сферической прямой *AB* и точкой *C*. Проведём сферический отрезок *BE*. Сферические треугольники *ADC* и *EDB* равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, угол *DBE* равен углу *DCA*. Но угол *DBE* составляет только часть внешнего угла при вершине *B*. Следовательно, внешний угол при вершине *B* больше угла *C* сферического треугольника *ABC*. Для произвольных сферических треугольников это неверно. Пример приведён на рисунке O3.6.

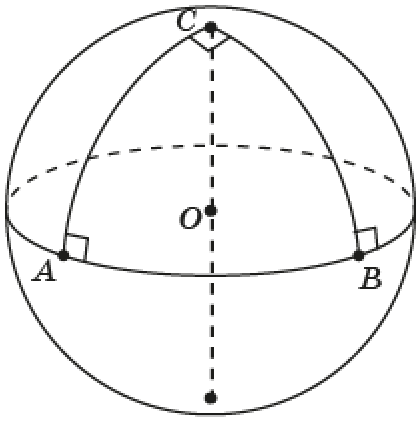

Рис. O3.6

15. Пусть точка *A* не принадлежит сферической прямой *a* и не совпадает с её полюсом *C*. *AA'* – перпендикуляр, опущенный из точки *A* на сферическую прямую *a*, *AB* – наклонная, проведённая к этой сферической прямой (рис. O3.7).

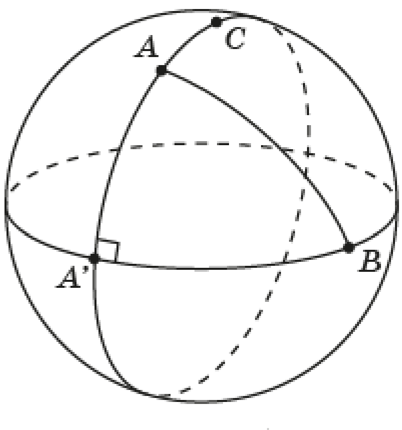

Рис. O3.7

Тогда в сферическом треугольнике *A'AB* угол *A'* прямой, а угол *B* острый. Так как против большего угла сферического треугольника лежит большая сторона, то будет выполняться неравенство *AA'* < *AB*, т. е. перпендикуляр *AA'* короче наклонной *AB*. **16.** $S_{ABC} = S_{A'B'C'} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, $S_{A'BC} = S_{AB'C'} = \alpha - \beta - \gamma + \pi$, $S_{AB'C} = S_{A'BC'} = \beta - \alpha - \gamma - \pi$, $S_{A'B'C} = S_{ABC'} = \gamma - \alpha - \beta + \pi$ (рис. O3.8).

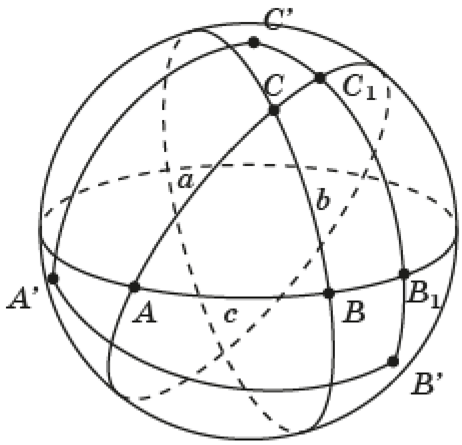

Рис. О3.8

17. $\frac{\pi}{2}$. **18.** 120°. **19.** π. **20.** Для данного сферического треугольника *ABC* через центр *O* сферы проведём прямую, перпендикулярную плоскости *OBC*. Найдём её точку *A'* пересечения со сферой. Она будет полюсом сферической прямой *BC*. Аналогичным образом строим полюсы *B'*, *C'* сферических прямых *AC*, *AB*. Соединяя полученные полюсы дугами окружности, получим сферический треугольник *A'B'C'*, полярный данному сферическому треугольнику *ABC* (рис. О3.9).

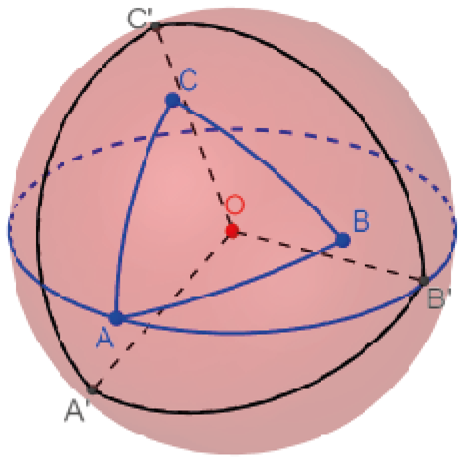

Рис. О3.9

21. Этот признак верен при дополнительном условии: прилежащий к гипотенузе угол не является прямым. В случае, если прилежащий угол прямой, сферические треугольники могут быть неравны. На рисунке О3.10 показаны такие сферические треугольники *ABC* и *ABD*.

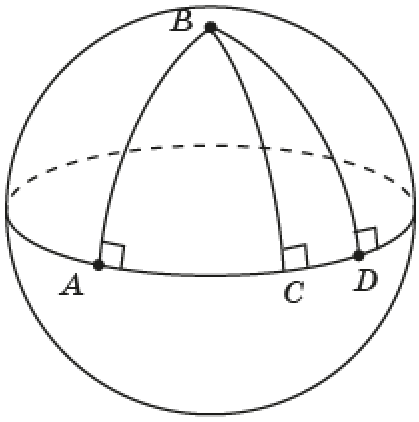

Рис. О3.10

22, Нет. На рисунке О3.10 показаны такие сферические треугольники *ABC* и *ABD*.

4

1. Воспользуемся теоремой косинусов, $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$. Если $a = b = \frac{\pi}{4}$, то $\cos c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \gamma$. Подставляя указанные в условии значения угла γ, получим: а) $\cos c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}93$, $c \approx 0{,}37$; б) $\cos c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}85$, $c \approx 0{,}554$; в) $\cos c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$, $c \approx 0{,}72$. **2.** Воспользуемся теоремой косинусов, $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$. Если $\alpha = \beta = 45°$, то $\cos \gamma = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos c$. Подставляя указанные в условии значения c, получим: а) $\cos \gamma = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0{,}07$, $\gamma \approx 94°$; б) $\cos \gamma = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \approx -0{,}07$, $\gamma \approx 98°$; в) $\cos \gamma = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -0{,}25$, $\gamma \approx 105°$. **3.** $\cos c = \cos a \cdot \cos b$. **4.** $\frac{\pi}{3}$. **5.** $\cos a = \cos b = \sqrt[4]{0{,}5} \approx 0{,}84$, $a = b \approx 0{,}57$. **6.** $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$, где a – катет, c – гипотенуза, α – противолежащий катету острый угол. **7.** $a \approx 0{,}36$. **8.** Искомые равенства получаются из равенств $\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$, $\cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos b$, в которых $\cos \gamma = 0$. **9.** $\frac{\pi}{4}$. **10.** Воспользуемся формулой $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$. В случае прямоугольного сферического треугольника $\cos \gamma = 0$. Разделив обе части равенства $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$ на $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, получим требуемое равенство $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$. **11.** $\cos c = \frac{1}{3}$, $c \approx 1{,}23$. **12.** Воспользуемся формулой $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$. В случае правильного сферического треугольника со стороной a и углом α эта формула принимает вид $\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \alpha$. Воспользуемся равенствами $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2}$, $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Подставляя эти равенства и делая необходимые преобразования, получим равенство $\sin a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{a}{2}$. Воспользуемся равенством $\sin a = 2\sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}$. Получим искомое равенство $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$. **13.** Воспользуемся равенством $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$. а) $\cos\frac{a}{2}\approx 0{,}88$, $a\approx 0{,}98$; б) $\cos\frac{a}{2}\approx 0{,}78$, $a\approx 1{,}35$; в) $\frac{\pi}{2}$. **14.** Воспользуемся равенством $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$. а) $\sin\frac{\alpha}{2}\approx 0{,}52$, $\alpha\approx$ 62°; б) $\sin\frac{\alpha}{2}\approx 0{,}58$, $\alpha\approx$ 70°; в) $\sin\frac{\alpha}{2}\approx 0{,}71$, $\alpha\approx$ 90°. **15.** Воспользуемся результатами предыдущей задачи. а) 0,14; б) 0,52; в) $\frac{\pi}{2}$. **16.** Воспользуемся формулой $\cos c=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. а) $\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $S\approx$0,07; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S\approx$0,17; в) $\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{2}$, $S\approx$0,35.

5

2. На рисунке О5.1 показан правильный сферический пятиугольник *ABCDE*, полученный в программе GeoGebra следующим образом.

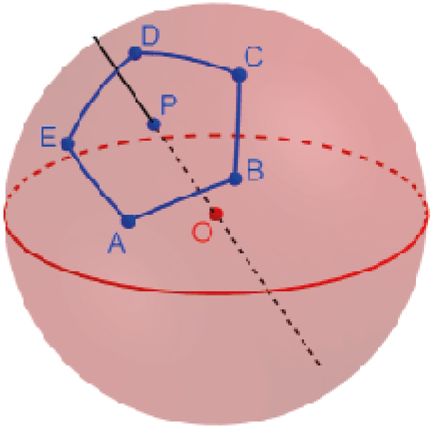

Рис. О5.1

На сфере с центром *O* отметим точки *P* и *A*. Проведём прямую *OP*. С помощью инструмента «Вращать объект вокруг прямой» повернём точку *A* вокруг прямой *OP* на угол 72°. Получим точку *B*. Аналогичным образом получим точки *C*, *D*, *E*. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» проведём дуги с центром *O*, соединяющие точки *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *D*, *D* и *E*, *E* и *A*. Получим правильный сферический пятиугольник *ABCDE*. Аналогичным образом получается правильный сферический шестиугольник. **3.** а) Нет; б), в), г) да. **4.** Для величин углов α правильного сферического n-угольника выполняется неравенство $\alpha_n>\frac{180°(n-2)}{n}$. В частности, $\alpha_3>60°$, $\alpha_4>90°$, $\alpha_5>108°$, $\alpha_6>120°$. **5.** Сумма внешних углов выпуклого сферического многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, меньше 360°. **6.** Пусть *ABCD* – сферический квадрат. Проведём диагонали *AC* и *BD* (рис. О5.2). Равнобедренные сферические треугольники *ABC* и *ADC* равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle BAC=\angle DAC$, $\angle BCA=\angle DCA$. Аналогично доказывается равенство углов *ABD* и *CBD*, *ADB* и *CDB*. В равнобедренном сферическом треугольнике *ABD AP* – биссектриса, следовательно, медиана и высота. Значит, *DP* = *BP* и *AC* перпендикулярна *BD*.

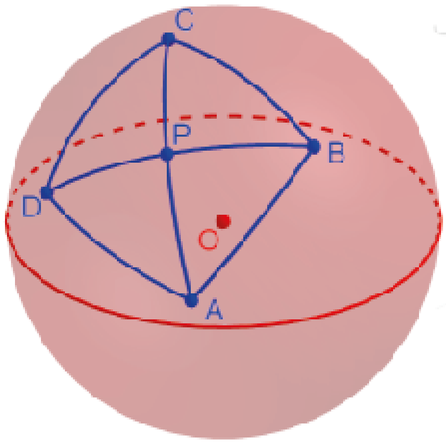

Рис. О5.2

7. Пусть сторона сферического квадрата $ABCD$ равна a, а углы равны α. Диагонали разбивают сферический квадрат на равнобедренные прямоугольные сферические треугольники (рис. О5.2). Воспользуемся соотношением $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.между гипотенузой c прямоугольного сферического треугольника и его острыми углами α, β. Применим её для равнобедренного сферического треугольника ABP, в котором гипотенуза AB равна a, а острые углы равны $\frac{\alpha}{2}$. Получим искомое равенство $\cos a = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **8.** а) $\cos a = \frac{1}{3}$, a ≈1,23; б) $\cos a \approx 0{,}123$, $a \approx 1{,}44$; в) $\cos a \approx 0{,}03$, $a \approx 1{,}54$. **9.** а) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}93$, $\alpha \approx 94^\circ$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}84$, $\alpha \approx 100^\circ$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \approx 0{,}71$ ≈109°. **10.** $\cos d = \cos^2 a$. **11.** а) $S = \frac{2\pi}{3}$; б) $S = \pi$; в) $S = \frac{4\pi}{3}$. **12.** Воспользуемся формулой, связывающей стороны и углы сферического квадрата $\cos a = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. а) $\alpha \approx 94°, S \approx 0{,}28$; б) $\alpha \approx 100°, S \approx 0{,}7$; в) $\alpha \approx 110°, S \approx 1{,}4$. **13.** Доказательство аналогично доказательству для сферического квадрата. **14.** Пусть в сферическом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и в точке пересечения P делятся пополам. Тогда прямоугольные сферические треугольники ABP, ADP, CBP, CDP равны по двум катетам. Следовательно, равны их гипотенузы, т. е. равны стороны сферического четырёхугольника $ABCD$. Значит, этот сферический четырёхугольник – сферический ромб. **15.** На сфере с центром O отметим точки P, A и B. Проведём прямую OP. С помощью инструмента «Вращать объект вокруг прямой» повернём точки A и B вокруг прямой OP на угол 180°. Получим точки C и D. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» проведём дуги с центром O, соединяющие точки A и B, B и C, C и D, D и A. Получим сферический ромб $ABCD$ (рис. О5.3).

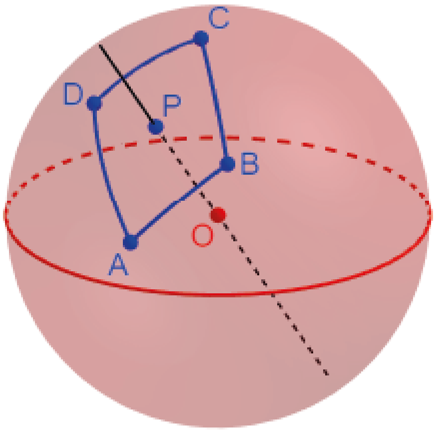

Рис. О5.3

16. Пусть в сферическом ромбе $ABCD$ $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$, сторона AB равна a. Обозначим P точку пересечения диагоналей. Воспользуемся формулой для прямоугольного сферического треугольника, применённой к сферическому треугольнику ABP. Получим искомую формулу $\cos a = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. **17.** $\frac{\pi}{3}$.
18. а) Рассмотрим равноугольный сферический четырёхугольник $ABCD$ (рис. О5.4). Докажем, что у него равны стороны AB и CD. Обозначим E точку пересечения сферических прямых AB и CD. Из равенства углов A и D данного сферического четырёхугольника следует, что в сферическом треугольнике ADE равны углы A и D. Значит, этот сферический треугольник равнобедренный, $AE = DE$. Из равенства сферических углов ABC и BCD следует, что в сферическом треугольнике BCE равны углы B и C. Значит, этот сферический треугольник равнобедренный, $BE = CE$. Из полученных двух равенств следует равенство сторон AB и CD. Аналогично доказывается равенство сторон AD и BC.

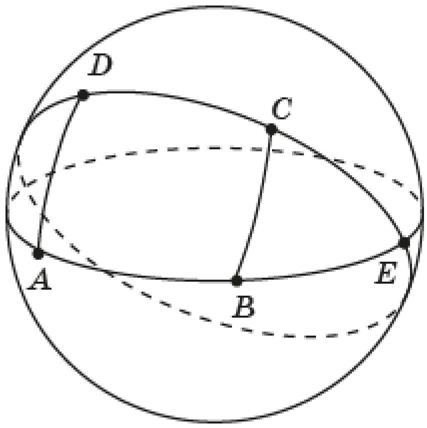

Рис. О5.4

б) Рассмотрим равноугольный сферический четырёхугольник $ABCD$ (рис. О5.5). Докажем, что у него равны диагонали и в точке E их пересечения делятся пополам. Из равенства противолежащих сторон этого сферического четырёхугольника следует равенство сферических треугольников ABC и BAD. Значит, равны их соответствующие стороны AC и BD и равны соответствующие углы BAC и ABD. Равенство сторон означает равенство диагоналей. Из равенства углов следует, что сферический треугольник ABE равнобедренный, $AE = BE$. Аналогично доказывается $BE = CE$. Следовательно, диагонали AC и BD в точке пересечения делятся пополам.

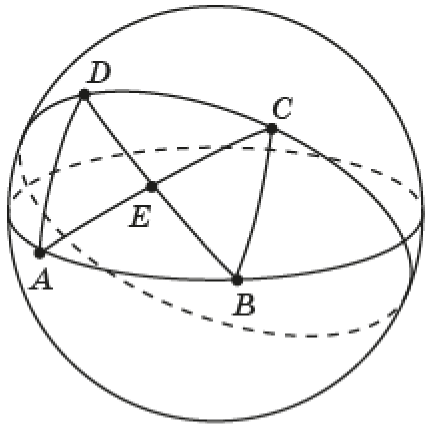

Рис. O5.5

19. Рассмотрим сферический четырёхугольник $ABCD$, у которого диагонали равны и в точке E их пересечения делятся пополам (рис. O5.5). Равнобедренные сферические треугольники ABE и CDE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны их углы, прилежащие к основаниям AB и CD. Равнобедренные сферические треугольники ADE и BCE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны их углы, прилежащие к основаниям AD и BC. Из этого вытекает равенство всех углов сферического четырёхугольника $ABCD$. **20.** На сфере с центром O отметим точки P и A. Проведём прямую OP. С помощью инструмента «Вращать объект вокруг прямой» повернём точку A вокруг прямой OP на какой-нибудь угол $\alpha < 90^\circ$. Повернём точки A и B вокруг прямой OP на 180°. Получим точки соответственно C и D. С помощью инструмента «Дуга по центру и двум точкам» проведём дуги с центром O, соединяющие точки A и B, B и C, C и D, D и A. Получим сферический четырёхугольник $ABCD$, у которого диагонали равны и в точке P их пересечения делятся пополам (рис O5.6). Следовательно, в этом сферическом четырёхугольнике равны все углы.

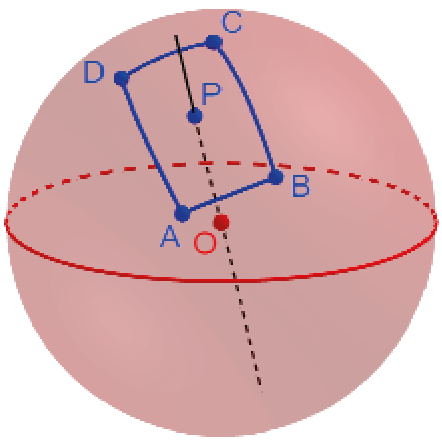

Рис. O5.6

21. Рассмотрим сферический ромб *ABCD*. Отметим середины *E*, *F*, *G*, *H* его сторон (рис. O5.7).

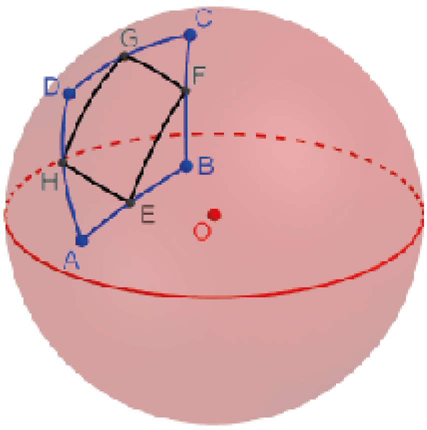

Рис. O5.7

Докажем, что сферический четырёхугольник *EFGH* является равноугольным. Так как у сферического ромба равны стороны и равны противолежащие углы, то сферические треугольники *AEH* и *CFG* равны. Следовательно, равны сферические углы *AEH* и *CFG*. Так как сферический треугольник *BEF* равнобедренный, то равны сферические углы *BEF* и *BFE*. Из равенства этих пар сферических углов следует равенство углов *E* и *F* сферического четырёхугольника *AFGH*. Аналогично доказывается равенство остальных углов сферического четырёхугольника *EFGH*. **22.** Рассмотрим равноугольный сферический четырёхугольник *ABCD*. Отметим середины *E*, *F*, *G*, *H* его сторон (рис. O5.8). Докажем, что сферический четырёхугольник *EFGH* является сферическим ромбом. Так как у равноугольного сферического четырёхугольника равны углы и равны противолежащие стороны, то сферические треугольники *AEH* и *BEF* равны. Следовательно, равны стороны *EH* и *EF*. Аналогично доказывается равенство остальных сторон сферического четырёхугольника *EFGH*.

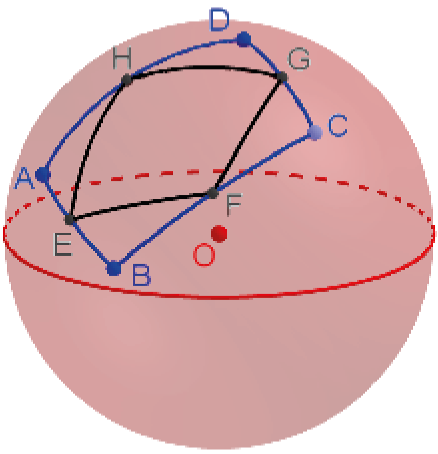

Рис. O5.8

23. Следует из решения двух предыдущих задач. **24.** Сферический многоугольник называется *полярным* данному сферическому многоугольнику, если его вершины и сферические прямые сторон соответственно полярны сферическим прямым сторон и вершинам данного сферического многоугольника. **25.** Аналогично тому, как это доказывалось для сферического треугольника, полярного данному, доказывается, что для сторон и углов сферического n-угольника, полярного данному, имеют место равенства: $a'_1 = \pi - \alpha_1, \ldots, a'_n = \pi - \alpha_n$; $\alpha'_1 = \pi - a_1, \ldots, \alpha'_n = \pi - a_n$. **26.** Из равенства сторон сферического ромба следует равенство углов полярного ему сферического четырёхугольника. **27.** На сфере с центром *O* рассмотрим сферический ромб *ABCD*. Проведём прямые *OA*, *OB*, *OC*, *OD*. Через точку *O* проведём плоскости, перпендикулярные построенным прямым. Найдём их линии пересечения со сферой. Найдём точки *E*, *F*, *G*, *H* пересечения этих линий. Соединим дугами точки *E* и *F*, *F* и *G*, *G* и *H*, *H* и *E*. Получим сферический четырёхугольник *EFGH*, полярный сферическому ромбу *ABCD* (рис. О5.9).

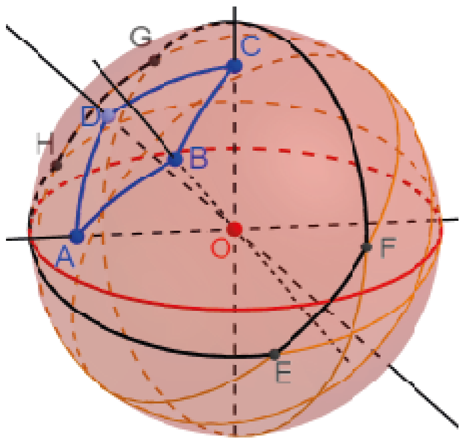

Рис. О5.9

28. Из равенства углов сферического четырёхугольника следует равенство сторон полярного ему сферического четырёхугольника. **29.** На сфере с центром *O* рассмотрим сферический четырёхугольник *ABCD* с равными углами. Проведём прямые *OA*, *OB*, *OC*, *OD*. Через точку *O* проведём плоскости, перпендикулярные построенным прямым. Найдём их линии пересечения со сферой. Найдём точки *E*, *F*, *G*, *H* пересечения этих линий. Соединим дугами точки *E* и *F*, *F* и *G*, *G* и *H*, *H* и *E*. Получим сферический четырёхугольник *EFGH*, полярный сферическому четырёхугольнику *ABCD* (рис. О5.10).

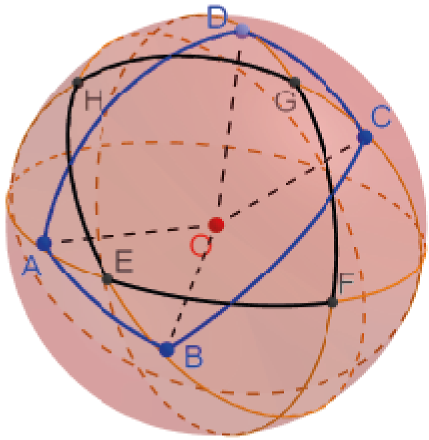

Рис. О5.10

30. Это следует из формул для сторон и углов полярного сферического многоугольника.

6

1. Рассмотрим сферический отрезок *AB* на сфере с центром *O*. Проведём прямую *AB*. С помощью инструмента «Перпендикулярная плоскость» проведём плоскость через точку *O*, перпендикулярную прямой *AB*. Найдём её линию пересечения со сферой. Она и будет искомым серединным перпендикуляром к сферическому отрезку *AB* (рис. О6.1).

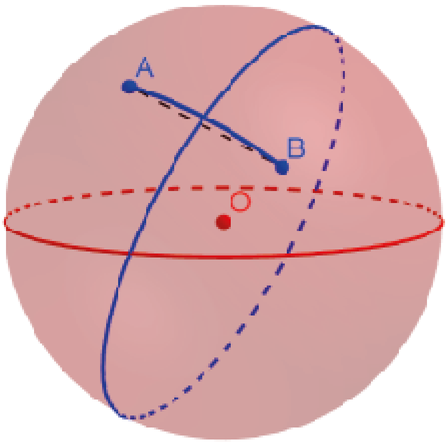

Рис. О6.1

2. На сфере с центром *O* рассмотрим сферический угол с вершиной *C* и сторонами *a*, *b*. Проведём прямую *OC*. С помощью инструмента «Перпендикулярная плоскость» проведём плоскость через точку *O*, перпендикулярную прямой *OC*. Найдём её линию пересечения со сферой. Обозначим *A* и *B* её точки пересечения соответственно со сторонами *a* и *b*. Проведём биссектрису угла *AOB*. Обозначим *E* её точку пересечения с дугой *AB*. Через точки *O*, *C*, *E* проведём плоскость. Найдём её линию пересечения со сферой. Она даст искомую биссектрису *c* сферического угла (рис. О6.2).

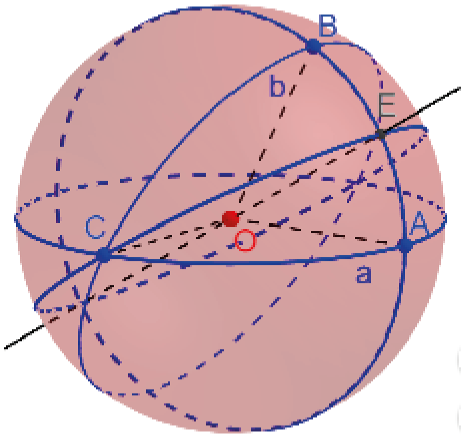

Рис. O6.2

3. На сфере с центром O отметим какую-нибудь точку P. Проведём прямую OP. Через точку O проведём плоскость, перпендикулярную прямой OP. Найдём её линию пересечения со сферой. Выберем на этой линии какую-нибудь точку Q. Построим биссектрису угла QOP. Обозначим A её точку пересечения со сферой. С помощью инструмента «Окружность по точке и оси» построим окружность по точке A и оси OP. Она и будет искомой сферической окружностью с центром P и радиусом $\frac{\pi}{4}$.

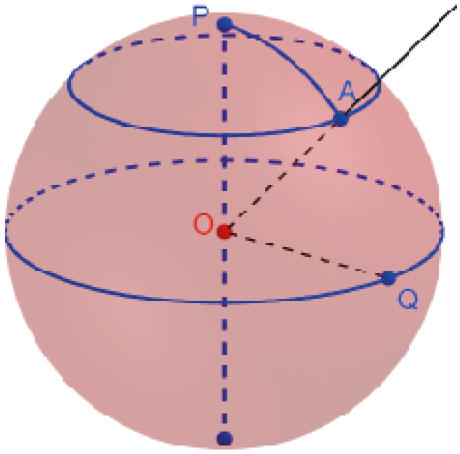

Рис. O6.3

4. Если две точки не являются центрально-симметричными, то через них проходит бесконечно много сферических окружностей. Если две точки являются центрально-симметричными, то через них не проходит ни одной окружности. **5.** Сферическая полупрямая CD без её концов, являющая частью серединного перпендикуляра к сферическому отрезку AB (рис. O6.4).

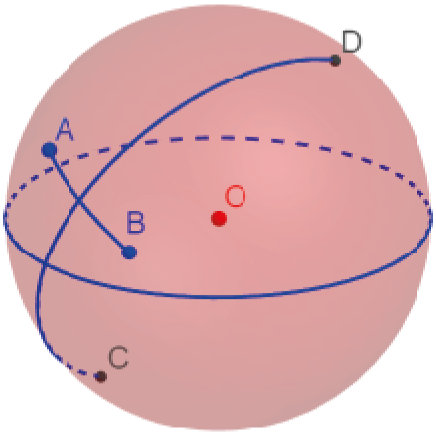

Рис. О6.4

6. Для точек A и B, не являющихся центрально-симметричными, искомым геометрическим местом точек является полусфера, ограниченная серединным перпендикуляром к сферическому отрезку AB, содержащая точку A. **7.** Искомым геометрическим местом точек являются два вертикальных сферических угла, сторонами которых являются биссектрисы углов, образованных данными прямыми, объединение которых содержит сферическую прямую a (рис. О6.5).

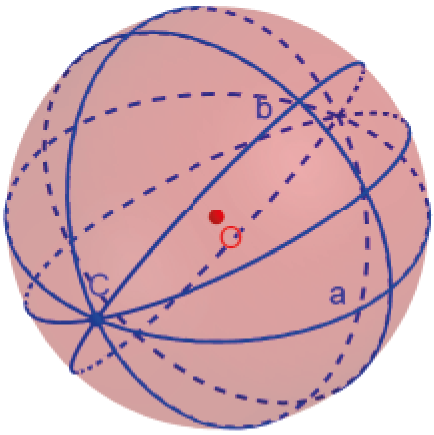

Рис. О6.5

8. На сфере с центром O рассмотрим сферический треугольник ABC. Через точку A проведём касательные к сторонам AB и AC. Проведём биссектрису угла между этими касательными. Через точку O и эту биссектрису проведём плоскость. Найдём её точку пересечения со стороной AB. Обозначим эту точку A_1. Проведём дугу, соединяющую точки A и A_1. Она будет биссектрисой сферического треугольника ABC. Аналогичным образом строим биссектрисы BB_1 и CC_1 (рис. О6.6)

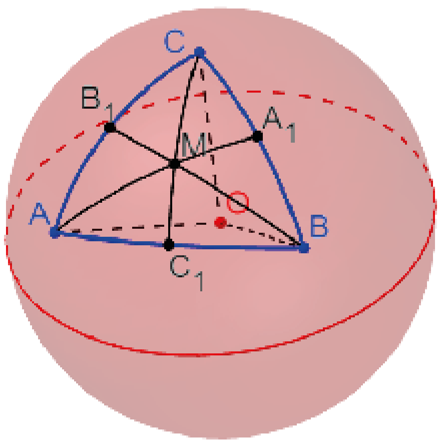

Рис. О6.6

9. На сфере с центром O рассмотрим сферический треугольник ABC. Проведём биссектрисы углов AOB, AOC, BOC. Обозначим C_1, B_1, A_1 их точки пересечения соответственно со сторонами AB, AC, BC. Проведём дуги, соединяющие точки A_1 и B_1, B_1 и C_1, A_1 и C_1. Они и будут искомыми средними линиями сферического треугольника ABC (рис. О6.7).

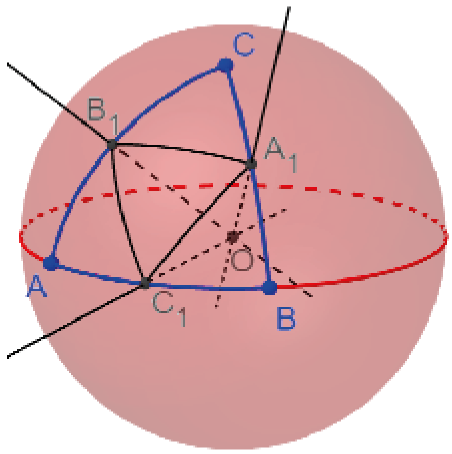

Рис. О6.7

10. На сфере с центром O рассмотрим сферический треугольник ABC. Проведём плоскости OAB, OAC, OBC. Через точку O проведём прямые, перпендикулярные этим плоскостям, и найдём их точки пересечения соответственно C', B', A' со сферой (рис. О6.8).

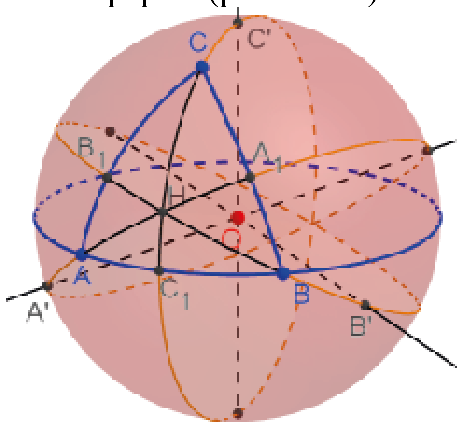

Рис. О6.8

Проведём плоскости *OAA'*, *OBB'*, *OCC'* и найдём их линии пересечения соответственно AA_1, BB_1, CC_1 со сферой. Они будут содержать искомые высоты AA_1, BB_1, CC_1 сферического треугольника *ABC*. **11** На сфере с центром *O* рассмотрим сферический треугольник *ABC*. Проведём биссектрисы углов *AOB*, *AOC*, *BOC*. Обозначим C_1, B_1, A_1 их точки пересечения соответственно со сторонами *AB*, *AC*, *BC*. Проведём дуги, соединяющие точки *A* и A_1, *B* и B_1, *C* и C_1. Они и будут искомыми медианами сферического треугольника *ABC* (рис. О6.9).

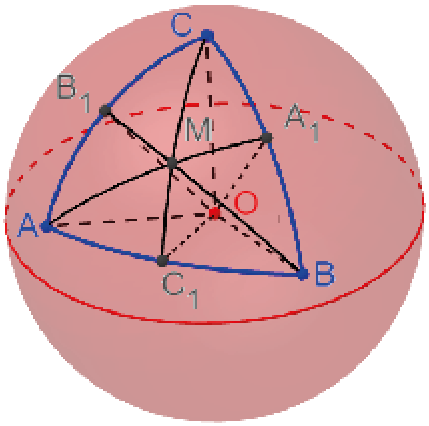

Рис. О6.9

12. $\frac{\pi}{3}$. **13.** Две окружности с центрами в полюсах данной сферической прямой. **14.** $\cos c_1 = \cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos\gamma$. **15.** $\cos h = \frac{\cos a}{\cos\frac{a}{2}}$. **16.** $\cos h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $h \approx 0{,}96$. **17.** Рассмотрим сферический треугольник *ABC* и биссектрису CC_1 (рис. О6.10).

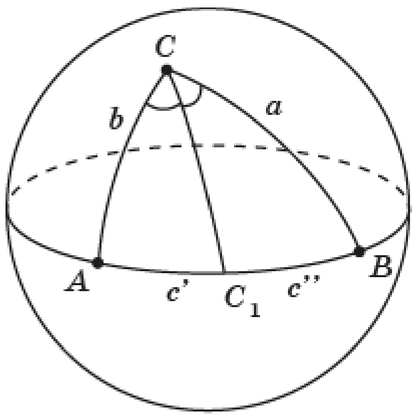

Рис. О6.10

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AC_1 = c'$, $BC_1 = c''$, $\angle ACB = \gamma, \angle AC_1C = \delta'$, $\angle BC_1C = \delta''$. Докажем, что $\frac{\sin c'}{\sin c''} = \frac{\sin b}{\sin a}$. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к сферическим треугольникам ACC_1 и BCC_1. Получим $\frac{\sin c'}{\sin\frac{\gamma}{2}} =$

$\frac{\sin b}{\sin \delta\prime}$, $\frac{\sin c\prime\prime}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin a}{\sin \delta\prime\prime}$. Учитывая, что $\sin \delta' = \sin \delta''$, получаем искомое равенство $\frac{\sin c\prime}{\sin c\prime\prime} = \frac{\sin b}{\sin a}$. **18.** Пусть ABC – сферический треугольник, *CD* – медиана (рис. О6.11). Докажем, что $CD < \frac{1}{2}(AC + BC)$. На продолжении медианы отложим сферический отрезок *DE*, равный *CD*. Сферические треугольники ADE и BDC равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны их соответствующие стороны *AE* и *BC*. Воспользуемся неравенством треугольника, применённым к сферическому треугольнику *ACE*. Получим неравенство *CE* < *AC* + *AE*, из которого следует искомое неравенство.

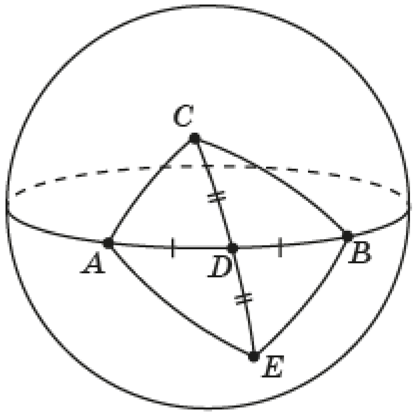

Рис. О6.11

19. Рассмотрим сферический треугольник *ABC* и медиану CC_1 (рис. О6.12). Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle ACC_1 = \gamma'$, $\angle BBC_1 = \gamma''$, $\angle AC_1C = \delta'$, $\angle BC_1C = \delta''$. Докажем, что $\frac{\sin \gamma\prime}{\sin \gamma\prime\prime} = \frac{\sin b}{\sin a}$. Воспользуемся теоремой синусов, применённой к сферическим треугольникам ACC_1 и BCC_1. Получим $\frac{\sin \gamma\prime}{\sin \frac{c}{2}} = \frac{\sin b}{\sin \delta\prime}$, $\frac{\sin \gamma\prime\prime}{\sin \frac{c}{2}} = \frac{\sin a}{\sin \delta\prime\prime}$. Учитывая, что $\sin \delta' = \sin \delta''$, получаем искомое равенство $\frac{\sin \gamma\prime}{\sin \gamma\prime\prime} = \frac{\sin b}{\sin a}$.

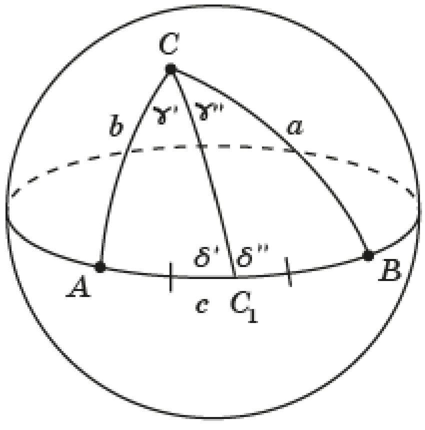

Рис. О6.12

20. Рассмотрим сферический треугольник ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, медиана CC_1 равна m. Применим теорему косинусов к сферическому треугольнику ABC. Получим $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$. Применим теорему косинусов к треугольнику ACC_1. Получим $\cos m = \cos b \cdot cos\ \frac{c}{2} + \sin b \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha$. Из первого равенства $\cos \alpha$ выражается через стороны сферического треугольника. Из второго равенства $\cos m$ выражается через стороны сферического треугольника и $\cos \alpha$. Следовательно, $\cos m$ выражается через стороны сферического треугольника. **21.** Подставим данные стороны сферического треугольника в выражение для медианы, полученное в предыдущей задаче. После преобразований получим $\cos m = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$, $m \approx 0{,}436$.

7

1. Правильный сферический треугольник, вписанный в сферическую окружность, показан на рисунке О7.1.

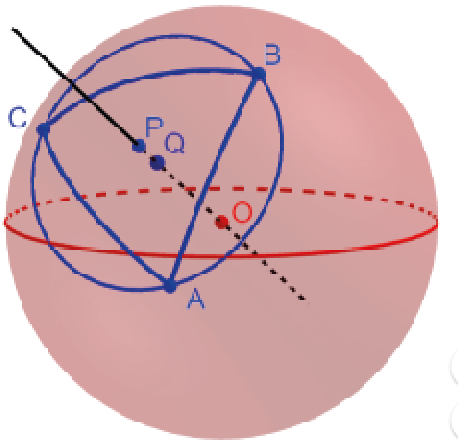

Рис. О7.1

2. $\sin R = \frac{2\sqrt{3}\sin\frac{a}{2}}{3}$. **3.** $\sin R = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $R \approx 0{,}62$. **4.** Если точка A расположена внутри данной сферической окружности a с центром P или внутри сферической окружности a' центрально-симметричной данной, то через неё не проходит ни одной касательной. Если точка A принадлежит данной сферической окружности a или сферической окружности a' центрально-симметричной данной, то через неё проходит единственная касательная. Построим эту касательную. Через точку A проведём касательную прямую к данной сферической окружности. Через центр O сферы и касательную прямую проведём плоскость. Линия пересечения этой плоскости со сферой будет искомой сферической прямой, касающейся данной сферической окружности в точке A (рис. О7.2).

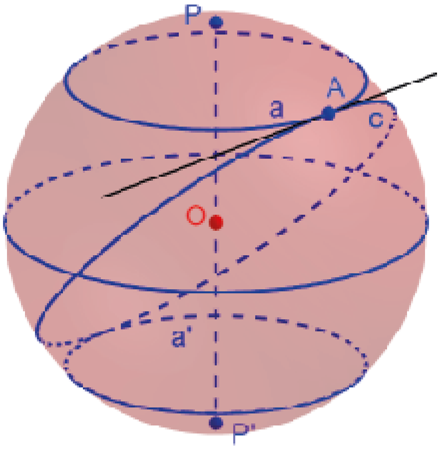

Рис. О7.2

Для остальных точек B сферы имеется две касательные. Построим их. Проведём прямую OB. Построим плоскость, проходящую через центр P, и перпендикулярную этой прямой. Найдём её линию b пересечения со сферой. Обозначим A_1, A_2 точки пересечения этой линии с данной сферической окружностью. Искомые касательные сферические прямые, проходящие через точку B, будут касаться данной сферической окружности в точках A_1, A_2. Они проводятся так же, как и в предыдущем случае (рис. О7.3).

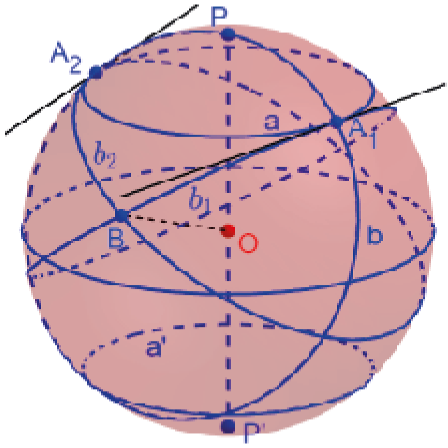

Рис. О7.3

5. Пусть из точки B к сферической окружности a проведены две касательные c_1 и c_2. Обозначим A_1, A_2 их точки касания. Докажем, что сферические отрезки BA_1, BA_2 этих касательных равны (рис. О7.4).

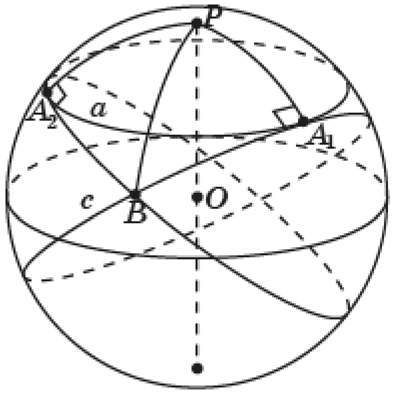

Рис. О7.4

Проведём сферический отрезок BP. Прямоугольные сферические треугольники BPA_1 и BPA_2 равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их катеты BA_1 и BA_2, т. е. равны отрезки касательных, проведённых из точки B к данной окружности a. **6.** Правильный сферический треугольник, описанный около сферической окружности, показан на рисунке О7.5.

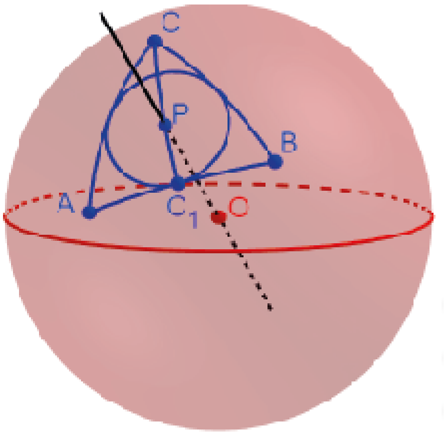

Рис. О7.5

7. $\cos r = \frac{\cos R}{\cos\frac{a}{2}}$, где R – радиус описанной сферической окружности. **8.** $r \approx 0{,}34$. **9.** Докажем, что центр P описанной сферической окружности расположен внутри прямоугольного сферического треугольника ABC (рис О7.6). Через середины D, F катетов AC, BC проведём серединные перпендикуляры к этим катетам. В случае острых углов A и B обозначим E, G их точки пересечения с гипотенузой. Проведём сферические отрезки CE и CG. Из равенства сферических отрезков AE и CE следует равенство сферических углов ACE и CAE.

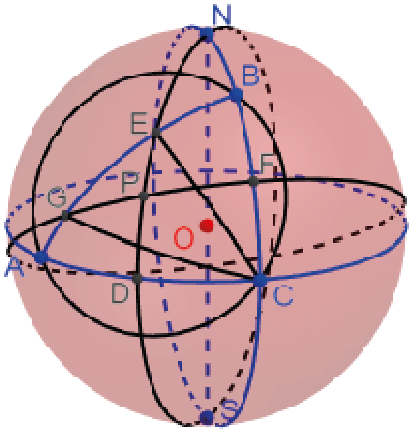

Рис. O7.6

Из равенства сферических отрезков BG и CG следует равенство сферических углов CBG и BCG. Так как сумма сферических углов CAB и CBG больше 90°, то $AG < AE$. Следовательно, сферические отрезки DE и FG пересекаются во внутренней точке P сферического треугольника ABC, которая является центром описанной сферической окружности. Если один из углов A или B сферического треугольника ABC прямой, то серединный перпендикуляр к прилежащему этому углу катета проходит через противолежащую вершину. В этом случае серединные перпендикуляры также пересекаются во внутренней точке P – центре описанной сферической окружности (рис. O7.7).

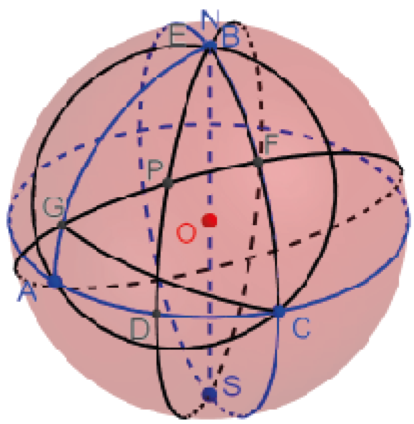

Рис. O7.7

Если один из углов A или B сферического треугольника ABC тупой, то серединный перпендикуляр к прилежащему этому углу катета проходит через другой катет. В этом случае серединные перпендикуляры также пересекаются во внутренней точке P – центре описанной сферической окружности (рис. O7.8).

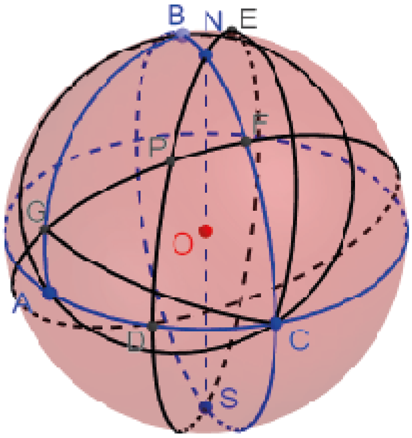

Рис. О7.8

10. Если каждый угол сферического треугольника меньше суммы двух других углов, то центр описанной сферической окружности расположен внутри этого сферического треугольника. Если один из углов равен сумме двух других углов, то центр описанной сферической окружности расположен на стороне, противолежащей этому углу (рис. О7.9).

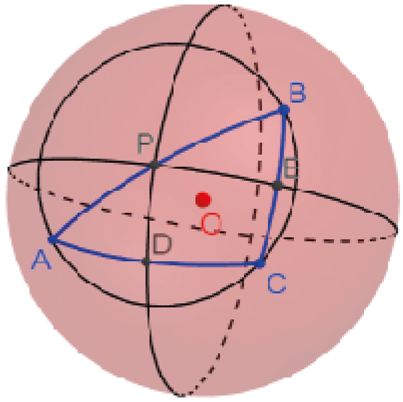

Рис. О7.9

Если один из углов больше суммы двух других углов, то центр описанной сферической окружности расположен вне этого сферического треугольника (рис. О7.10).

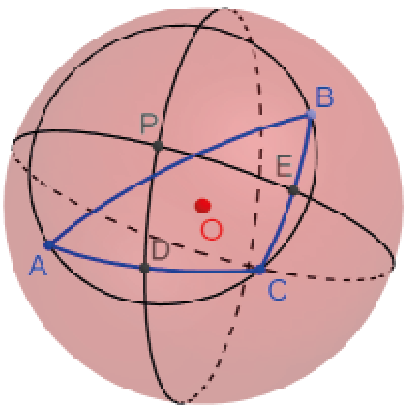

Рис. О7.10

11. Сферический угол APB, вписанный в сферическую окружность с центром Q, изображён на рисунке О7.11.

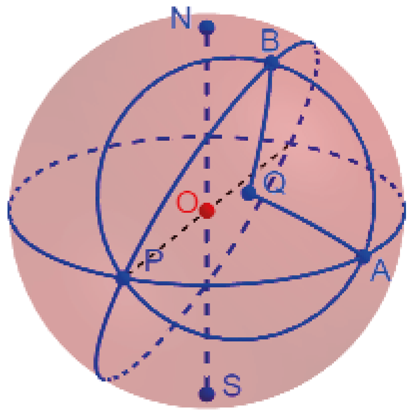

Рис. О7.11

Доказательство того, что этот сферический угол больше половины центрального сферического угла AQB аналогично доказательству соответствующего утверждения геометрии на плоскости и использует то, что внешний угол сферического треугольника меньше суммы двух внутренних сферических углов этого треугольника, не смежных с данным.

12. Сферический квадрат, вписанный в сферическую окружность, показан на рисунке О7.12.

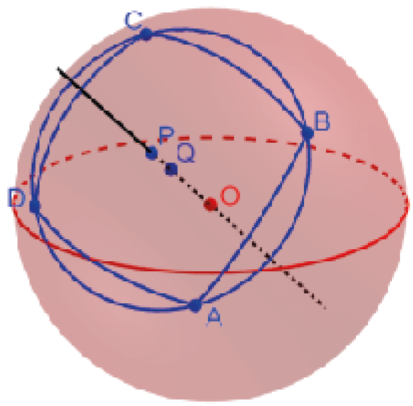

Рис. О7.12

13. $\cos^2 R = \cos a$. **14.** $R \approx 0{,}57$. **15.** Рассмотрим сферический четырёхугольник $ABCD$, вписанный в сферическую окружность с центром P (рис. О7.13). Соединим вершины этого сферического четырёхугольника сферическими отрезками с центром P сферической окружности. Обозначим E, F, G, H середины сторон соответственно AB, BC, CD, AD сферического четырёхугольника $ABCD$. Заметим, что точка P является точкой пересечения серединных перпендикуляров к этим сторонам. Прямоугольные сферические треугольники APE и BPE равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их углы PAE и PBE. Аналогично

доказывается равенство углов PBF и PCF, PCG и PDG, PAH и PDH. Из равенства этих углов следует равенство
сумм противолежащих углов A и C, B и D сферического четырёхугольника $ABCD$.

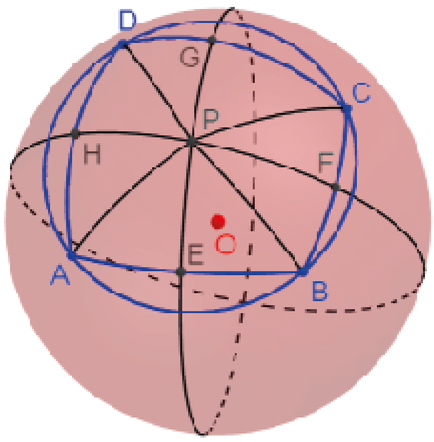

Рис. О7.13

16. Сферический квадрат, описанный около сферической окружности, показан на рисунке О7.14.

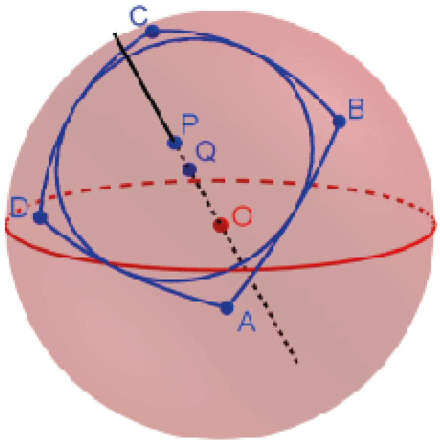

Рис. О7.14

17. $\cos r = \frac{\cos R}{\cos\frac{a}{2}}$. **18.** $r \approx 0{,}35$. **19.** $\sin h = \sin a \cdot \sin \alpha$, где h – высота, a – сторона, α – угол сферического ромба. $r = \frac{h}{2}$. **20.** $\sin h = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $h \approx 0{,}67$, $r \approx 0{,}34$. **21.** Рассмотрим сферический четырёхугольник $ABCD$, описанный около сферической окружности с центром P (рис. О7.15). Соединим вершины этого сферического четырёхугольника сферическими отрезками с центром P сферической окружности. Обозначим E, F, G, H точки касания сторон соответственно AB, BC, CD, AD сферического четырёхугольника $ABCD$. Заметим, что точка P является точкой пересечения серединных биссектрис углов этого сферического четырёхугольника. Прямоугольные сферические треугольники APE и APH равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, равны их катеты AE и AH. Аналогично доказывается равенство сферических отрезков *BE* и *BF*, *CF* и *CG*, *DG* и *DH*. Из равенства этих отрезков следует равенство сумм противолежащих сторон *AB* и *CD*, *BC* и *AD* сферического четырёхугольника *ABCD*.

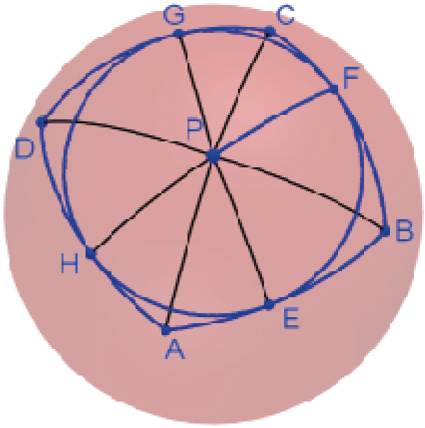

Рис. О7.15

22. Правильный сферический шестиугольник, вписанный в сферическую окружность, показан на рисунке О7.16.

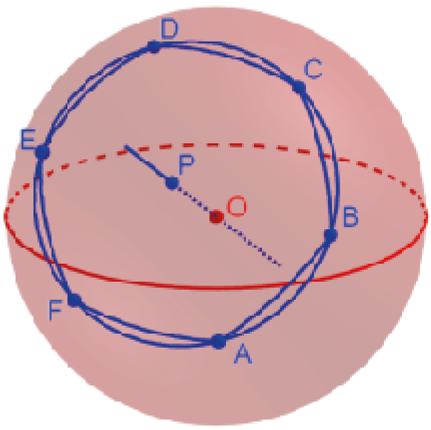

Рис. О7.16

23. $\sin R = 2\sin\frac{a}{2}$. **24.** $R \approx 0{,}87$. **25.** Правильный сферический шестиугольник, описанный около сферической окружности, показан на рисунке О7.17.

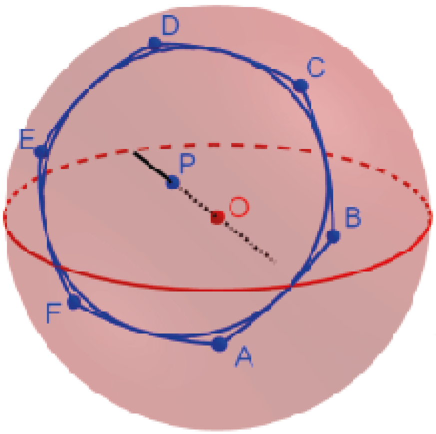

Рис. О7.17

26. $\cos r = \frac{\cos R}{\cos\frac{a}{2}}$, где R – радиус описанной сферической окружности. **27.** $r \approx 0{,}71$. **28.** $\sin R = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{180°}{n}}$. **29.** $\cos r = \frac{\cos R}{\cos\frac{a}{2}}$, **30.** Рассмотрим правильный сферический n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ со сторонами a и углами α (рис. О7.18).

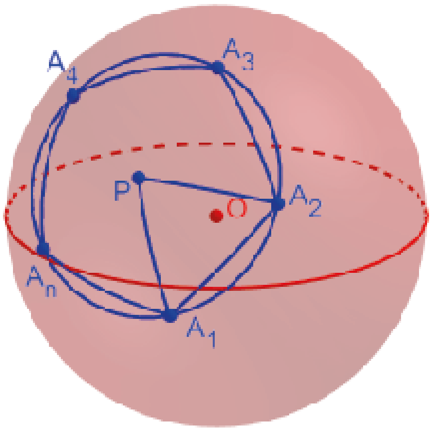

Рис. О7.18

Опишем около него окружность с центром P. В треугольнике A_1A_2P $A_1A_2 = a$, $\angle A_2A_1P = \angle A_2A_1P = \frac{\alpha}{2}$, $\angle A_1PA_2 = \frac{2\pi}{n}$. Применим теорему косинусов, к треугольнику A_1A_2P. Получим равенство $\cos\frac{2\pi}{n} = -\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos a$. Воспользуемся равенствами $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{n} + 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{n}$, $\cos a + 1 = 2\cos^2\frac{a}{2}$. Подставляя их в полученное равенство, будем иметь равенство $2\cos^2\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{a}{2}$. Сокращая на 2 и извлекая квадратный корень, получим искомое равенство $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2} = \cos\frac{\pi}{n}$.

8

1. Сферические прямые, проходящие через точку P, а также поляра точки P. **2.** Точки P, принадлежащих сферической прямой a, а также полюсы прямой a. **3.** Если $\alpha \le \frac{\pi}{4}$, то угол равен 2α; если $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то угол равен $\pi - \alpha$; если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то сферические прямые совпадают. **4.** Так как осевая симметрия в пространстве сохраняет расстояние между точками и углы между прямыми, то для любой точки A сферы с центром O и радиусом OP для точки A', симметричной точке A относительно прямой OP, выполняются равенства: $OA' = OA = OP$; $\angle AOP = \angle A'OP$. Следовательно, осевая симметрия в пространстве переводит данную сферу в себя, и имеет место равенство дуг $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{A'P}$ большой окружности (рис. О8.1). Значит, равны сферические расстояния $AP = A'P$. Следовательно, полученное преобразование сферы является центральной симметрией относительно точки P. **5.** На сфере с центром O отметим точки A и P. Проведём прямую OP. Используя инструмент «Отражение относительно прямой», построим точку A', симметричную точке A относительно прямой OP (рис. O8.1). Она будет искомой точкой на сфере, симметричной точке A относительно точки P.

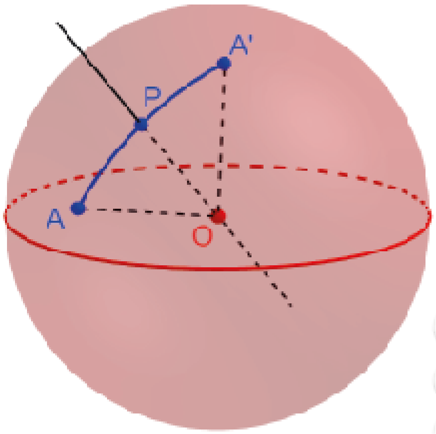

Рис. O8.1

6. На сфере проведём сферическую прямую a. Отметим точку P. Проведём прямую OP. Используя инструмент «Отражение относительно прямой», построим сферическую прямую a', симметричную сферической прямой a относительно прямой OP (рис. O8.2). Она определяет искомую сферическую прямую a' на сфере, симметричную сферической прямой a относительно точки P.

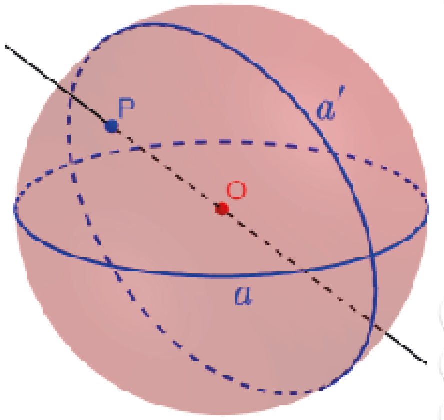

Рис. O8.2

7. Так как поворот в пространстве сохраняет расстояние между точками и двугранные углы, то для любой точки A сферы с центром O и радиусом OP для точки A', полученной поворотом точки A вокруг прямой OP на угол φ, выполняются равенства: $OA' = OA = OP$; двугранный угол с ребром OP и гранями AOP, $A'OP$ равен φ. Следовательно, поворот в пространстве переводит данную сферу в себя, и угол между дугами $\overset{\frown}{AP}, \overset{\frown}{A'P}$ большой окружности равен φ. Значит, сферический угол APA' равен φ. Следовательно, полученное преобразование сферы является поворотом вокруг точки P на угол φ. **8.** На сфере с центром O отметим точки A и P.

Проведём прямую OP. Используя инструмент «Вращать объект вокруг прямой», построим точку A' поворотом точки A вокруг прямой OP на данный угол. Она будет искомой точкой на сфере. На рисунке О8.3 показана точка A', полученная из точки A поворотом на 90°.

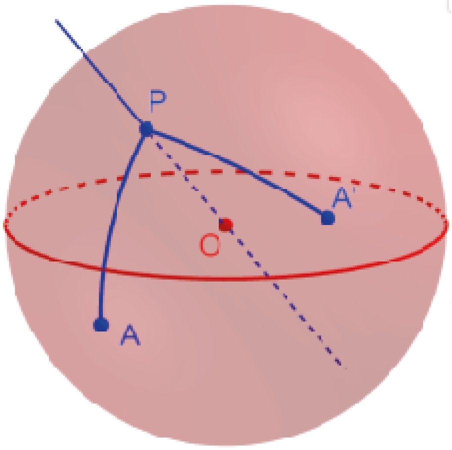

Рис. О8.3

9. На сфере проведём сферическую прямую a. Отметим точку P. Проведём прямую OP. Используя инструмент «Вращать объект вокруг прямой», построим сферическую a' поворотом сферической прямой a вокруг прямой OP на данный угол. Она будет искомой сферической прямой. На рисунке О8.4 показана сферическая прямая a', полученная из сферической прямой a поворотом на 90°.

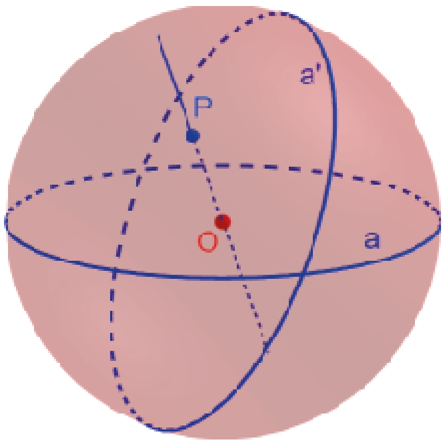

Рис. О8.4

10. Нет. Это можно продемонстрировать в программе GeoGebra. Угол между сферическими прямыми a и a' на сфере зависит от положения точки P (рис. О8.4). **11.** Если ось симметрии совпадает с данной сферической прямой или перпендикулярна ей. **12.** Рассмотрим плоскость π, проходящую через центр O сферы и пересекающую сферу по сферической прямой c (рис. О8.5).

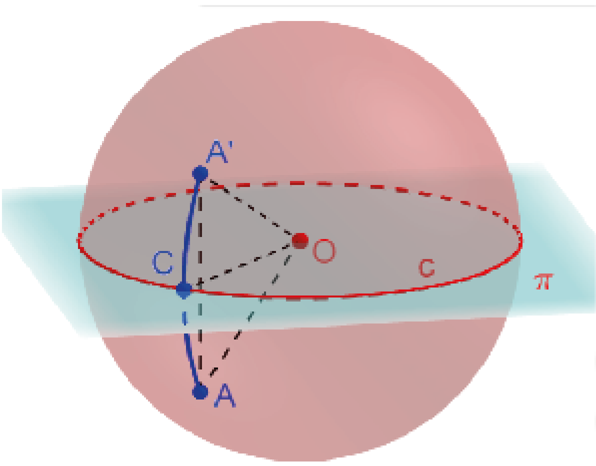

Рис. О8.5

Так как зеркальная симметрия в пространстве сохраняет расстояние между точками и углы между прямыми, то для любой точки A сферы для точки A', симметричной точке A относительно плоскости π, выполняются равенства: $OA' = OA$; $\angle AOP = \angle A'OP$. Следовательно, осевая симметрия в пространстве переводит данную сферу в себя, и имеет место равенство дуг $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{A'P}$ большой окружности. Значит, равны сферические расстояния $AP = A'P$. Кроме того, из перпендикулярности прямой AA' плоскости π вытекает перпендикулярность плоскости OAA' плоскости π. Сферическая прямая AA' перпендикулярна сферической прямой c. Значит, полученное преобразование сферы является зеркальной симметрией относительно прямой c. **13.** Воспользуемся инструментом «Отражение относительно плоскости» (рис. О8.5). **14.** Искомая сферическая прямая a', симметричная сферической прямой a относительно оси c, показана на рисунке О8.6. Она получена с помощью инструмента «Отражение относительно плоскости», применённого к плоскости, в которой лежит окружность c, и сферической прямой a.

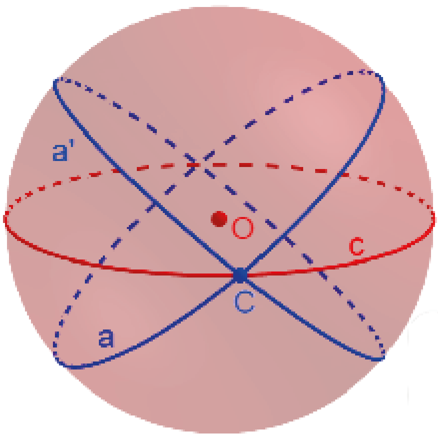

Рис. О8.6

15. а), б), в), г) Да. **16.** Если n чётно, то имеет, если n нечётно, то не имеет. **17.** $\frac{360°}{n}$. **18.** n-го порядка. **19.** а) Если сферический параллелограмм отличен от сферического ромба и сферического прямоугольника, то он не имеет осей симметрии; б) если сферический прямоугольник отличен от сферического квадрата, то он имеет две оси симметрии; в) если сферический ромб отличен от сферического квадрата, то он имеет две оси симметрии; г) сферический квадрат имеет четыре оси симметрии. **20.** Правильный сферический n-угольник имеет n осей симметрии.

9

1. а), б) Нет; в) да. **2**. а) Тетраэдр, куб, додекаэдр; б) октаэдр; в) икосаэдр. **3**. $10° < \varphi < 150°$. **6**. 90°. **7**. 60°. **8**. 90°. **9**. $\sqrt{6}$ см. **10**. Луч, вершиной которого является вершина трёхгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, делящих двугранные углы пополам. **11**. Луч, вершиной которого является вершина трёхгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов. **14.** а), б) Нет. **15.** 60°. **16.** Искомое равенство непосредственно следует из соответствующего равенства для правильных сферических n-угольников $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi}{n}$, где α и a – величины соответственно его углов и сторон. **17.** а) $\alpha\approx 70°$; б) $\alpha\approx 109°$; в) $\alpha\approx 139°$. **18.** а) $a\approx 110°$; б) $\alpha\approx 71°$; в) $\alpha\approx 41°$. **19.** Величина угла ϒ, выражаемая в радианах, равна радиусу сферической окружности, описанной около соответствующего правильного сферического треугольника, стороны которого равны α. Используя соответствующее выражение для радиуса описанной сферической окружности, получаем искомое выражение $\sin\Upsilon=\frac{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{3}$. **20.** $\sin\Upsilon=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\Upsilon\approx 55°$. **21.** Величина угла γ, выражаемая в радианах, равна радиусу сферической окружности, вписанной соответствующий правильный сферический треугольник, стороны которого равны α. Используя соответствующее выражение для радиуса вписанной сферической окружности, получаем искомое выражение $\cos\gamma=\frac{\cos\Upsilon}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, где ϒ – соответствующий угол описанной конической поверхности. **22.** $\gamma\approx 35°$. **23.** $\cos^2\Upsilon=\cos\alpha$. **24.** $\Upsilon=45°$. **25.** $\cos\gamma=\frac{\cos\Upsilon}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **26.** $\gamma\approx 35°$, где ϒ – соответствующий угол описанной конической поверхности.

10

1. а) 120°; б) 120°; в) 90°; г) 72°. **2.** а) $\cos a=-\frac{1}{3}$; б) $a=\frac{\pi}{2}$. **3.** 120°. **4.** $\cos a=\frac{1}{3}$ **5.** 120°. **6.** Так как углы правильного сферического треугольника больше 60°, то в вершине правильного паркета не может сходиться более пяти правильных сферических треугольников. Аналогично, в вершине правильного паркета не может сходиться более трёх сферических квадратов, или более трёх правильных сферических пятиугольников. Также в вершине правильного паркета не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон большим пяти. **7.** Искомый паркет показан на рисунке O10.1. Он не является правильным. Для его сторон a имеют место равенства $\cos a = \frac{3}{5}$.

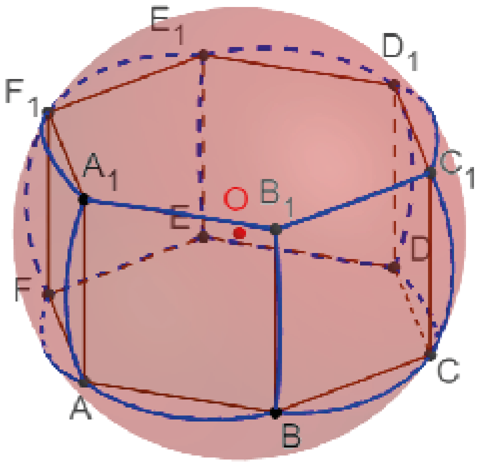

Рис. O10.1

8. Предположим, что паркет, состоящий из сферических треугольников, в каждой вершине которого сходится шесть сферических треугольников, существует. Тогда для числа его вершин (В), сторон (Р), сферических треугольников (Г) имеют место равенства 6В = 2Р, 3Г = 2Р. Следовательно, выполняется равенство 6В – 6Р + 6Г = 0, которое противоречит равенству Эйлера. Полученное противоречие показывает, что такого паркета нет. **9.** Предположим, что паркет, состоящий из сферических четырёхугольников, в каждой вершине которого сходится четыре сферических четырёхугольника, существует. Тогда для числа его вершин (В), сторон (Р), сферических треугольников (Г) имеют место равенства 4В = 2Р, 4Г = 2Р. Следовательно, выполняется равенство 4В – 4Р + 4Г = 0, которое противоречит равенству Эйлера. Полученное противоречие показывает, что такого паркета нет. **10.** Предположим, что паркет, состоящий из сферических шестиугольников, в каждой вершине которого сходится три сферических шестиугольника, существует. Тогда для числа его вершин (В), сторон (Р), сферических треугольников (Г) имеют место равенства 3В = 2Р, 6Г = 2Р. Следовательно, выполняется равенство 6В – 6Р + 6Г = 0, которое противоречит равенству Эйлера. Полученное противоречие показывает, что такого паркета нет. **11.** Предположим, что в паркете нет сферических треугольников, четырёхугольников и пятиугольников. Обозначим $Г_6$, $Г_7$, … соответственно количества шестиугольных, семиугольных и т. д. сферических многоугольников паркета. Для общего числа Г сферических многоугольников паркета имеют место равенства $6Г = 6Г_6 + 6Г_7 + \ldots$, $6Г_6 + 7Г_7 + \ldots = 2Р$. Кроме этого, так как в каждой вершине паркета сходится, по крайней мере, три сферических многоугольника, то имеет место неравенство 3В ≤ 2Р. Из этих равенств и неравенства следует неравенство 6В – 6Р + 6Г ≤ 0, которое противоречит равенству Эйлера. Полученное противоречие показывает, что такого паркета нет. **12.** Предположим, что в паркете нет вершин, в которых сходится три, четыре, или пять сферических многоугольников. Обозначим $В_6$, $В_7$, … соответственно количества вершин, в которых сходятся шесть, семь и т. д. сферических многоугольников паркета. Для общего числа В вершин паркета имеют место равенства 6В = $6В_6 + 6В_7 + \ldots$, $6В_6 + 7В_7 + \ldots = 2Р$. Кроме этого, так как каждый сферических многоугольник паркета имеет, по крайней мере, три стороны, то имеет место неравенство 3Г ≤ 2Р. Из этих равенств и неравенства следует неравенство 6В – 6Р + 6Г ≤ 0, которое противоречит равенству Эйлера. Полученное противоречие показывает, что такого паркета нет. **13.** Искомый паркет изображён на рисунке О10.2.

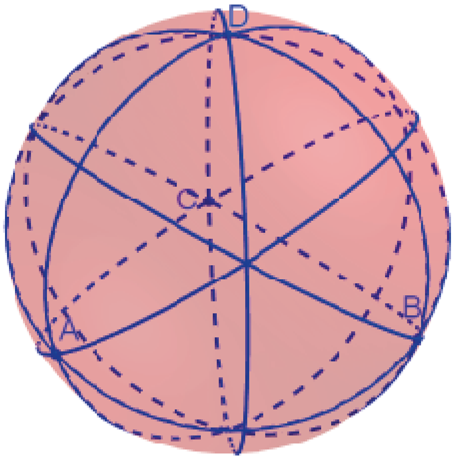

Рис. О10.2

Он состоит из двадцати четырёх равных равнобедренных прямоугольных сферических треугольников. У него 8 вершин, в которых сходится 6 сферических треугольников, и 6 вершин, в которых сходится 4 сферических треугольника. **14.** Искомый паркет изображён на рисунке О10.2.

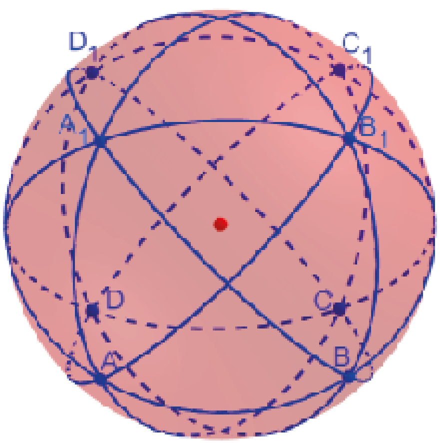

Рис. О10.3

Он состоит из двадцати четырёх равных равнобедренных прямоугольных сферических треугольников. У него 8 вершин, в которых сходится 6 сферических треугольников, и 6 вершин, в которых сходится 4 сферических треугольника. **15.** Обозначим $Г_5$ и $Г_6$ соответственно количества пятиугольных и шестиугольных сферических многоугольников. Тогда Г = $Г_5 + Г_6$. Имеют место равенства 3В = 2Р, $5Г_5 + 6Г_6$ = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство 6В – 6Р + 6Г = 12. Вместо 6Р подставим 4Р, вместо 2Р подставим $5Г_5 + 6Г_6$, а вместо 6Г подставим $6Г_5 + 6Г_6$. После сокращения получим равенство $Г_5 = 12$. Значит, количество сферических пятиугольников равно 12. **16.** Обозначим $В_5$ и $В_6$ соответственно количества вершин, в которых сходится пять и шесть сферических многоугольников. Тогда В = $В_5 + В_6$. Имеют место равенства 3Г = 2Р, $5В_5 + 6В_6$ = 2Р. В силу теоремы Эйлера имеет место равенство 6В – 6Р + 6Г = 12. Вместо 6Р подставим 4Р, вместо 2Р подставим $5В_5 + 6В_6$, а вместо 6В подставим $6В_5 + 6В_6$. После сокращения получим равенство $В_5 = 12$. Значит, количество вершин, в которых сходится пять сферических многоугольников, равно 12.

11

1. Декартовы координаты (x, y, z) точки в пространстве выражаются через её сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi\,, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi\,, \\ z = r\sin\psi\,. \end{cases}$$

2. Сферические координаты точки выражаются через сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

3. $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0, -\sqrt{3}, -1)$, (0,0,1). **4.** A: $r = \sqrt{3}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $B(\sqrt{2}$; 180°; 45°); C(2; 0°; 90°). **5.** (0; 0°; 0°); (1; 0°; 0°); ($\sqrt{2}$; 45°; 0°); (1; 90°; 0°); (1; 0°; 90°); ($\sqrt{2}$; 0°; 45°); ($\sqrt{3}$; φ; ψ), $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ($\sqrt{2}$; 90°; 45°). **6.** а) ($r$; φ; $-\psi$), (r; $180° - \varphi$; ψ), (r; $-\varphi$; ψ); б) (r; -φ; -ψ), (r; 180°-φ; -ψ), (r; $180° + \varphi$; ψ); в) (r; $180° + \varphi$; $-\psi$). **7.** ≈785 км. **8.** На полюсах. **9.** а) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость. **10**. а), б) Полушар; в) четверть шара. **11**. 2. **12.** $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$. **13.** $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \\ \psi = t, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. **14.** В строке «Ввод» нужно набрать: Поверхность((1;u;v),u,0,2Pi,v,0,Pi) и нажать “Enter”. В результате получим поверхность, изображённую на рисунке О11.1.

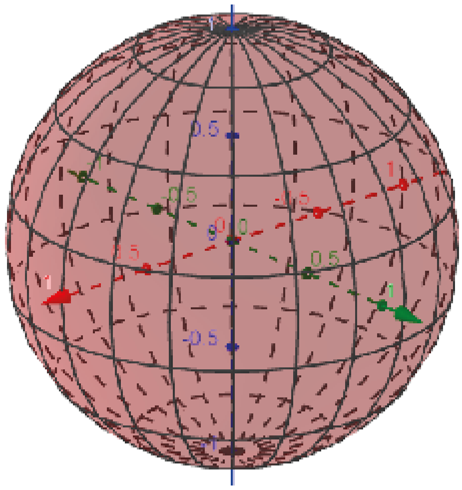

Рис. О11.1

15. В строке «Ввод» нужно набрать: Поверхность((1/cos(v);u;v),u,0,2Pi,v,0,Pi/3) и нажать “Enter”. В результате получим поверхность, изображённую на рисунке О11.2. Это часть цилиндрической поверхности.

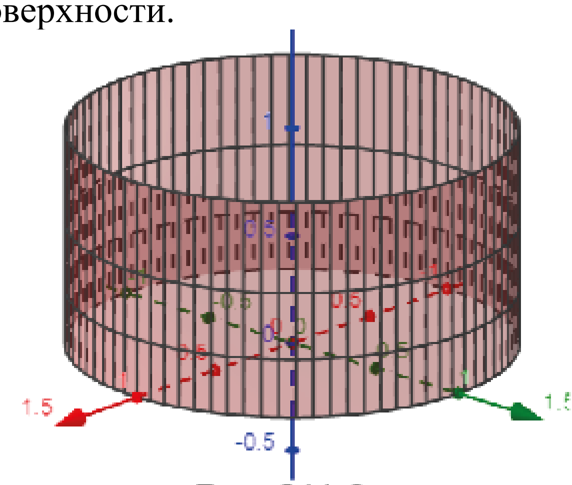

Рис. О11.2

16. В строке «Ввод» нужно набрать: Поверхность((|cos(v);u;v),u,0,2Pi,v,0,Pi) и нажать “Enter”. В результате получим поверхность, изображённую на рисунке О11.3.

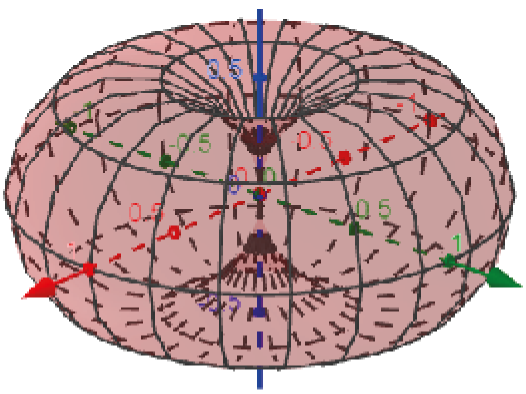

Рис. О11.3

17. Сфера с центром в точке (0, 0, 1) и радиусом 1 (рис. О11.4).

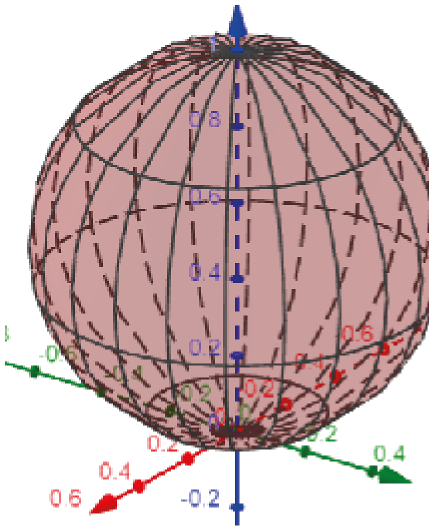

Рис. О11.4

18. Параболоид вращения (рис. О11.5).

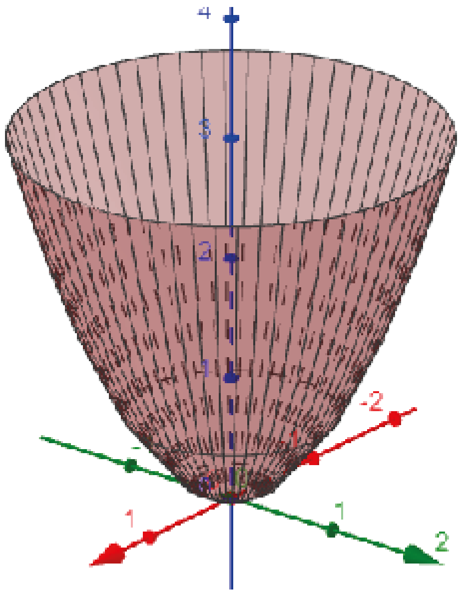

Рис. О11.5

19. Длина пути по параллели приближённо равна 11 200 км; длина пути по меридиану приближённо равна 7 555 км. **20.** а) Уравнение плоскости имеет вид $z = ax + by$, где $a = 1 - \sqrt{3}$, $b = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) параметрические уравнения ортодромии имеют вид $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \operatorname{arctg}(a \cdot \cos t + b \cdot \sin t), \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$. **21.** Искомый путь показан на рисунке О.11.6. Его длина приближённо равна 6417 км.

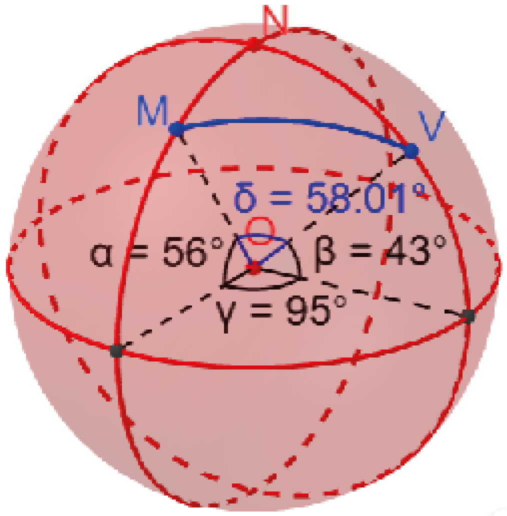

Рис. О11.6

22. Точка F имеет сферические координаты $(1; 0; \gamma)$. Её декартовы координаты имеют вид $(\cos\gamma, 0, \sin\gamma)$. Точка A имеет сферические координаты $(1; \varphi;\ \psi)$. Точка D имеет сферические координаты $(1; \varphi;\ \delta)$. Её декартовы координаты имеют вид $(\cos\delta \cdot \cos u, \cos\delta \cdot \sin u, \sin\delta)$.

Для нахождения длины дуги $\breve{AF}$ воспользуемся теоремой косинусов сферического треугольника [3], применённой к треугольнику AFN. Его стороны FN и AN равны соответственно $\frac{\pi}{2} - \gamma$ и $\frac{\pi}{2} - \psi$. Угол N равен φ. Получим равенство

$$\cos\breve{AF} = \sin\psi \cdot \sin\gamma + \cos\psi \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varphi.$$

Длина дуги $\breve{AD}$ находится из равенства

$$\cos\breve{AD} = \cos(\psi - \delta) = \cos\psi \cdot \cos\delta + \sin\psi \cdot \sin\delta.$$

Следовательно, для точек A сферического эллипса имеет место равенство

$$\sin\psi \cdot \sin\gamma + \cos\psi \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varphi = \cos\psi \cdot \cos\delta + \sin\psi \cdot \sin\delta,$$

которое можно переписать в виде

$$tg\,\psi = \frac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos\varphi}{\sin\gamma - \sin\delta}.$$

Параметрические уравнения сферического эллипса в полярных координатах будут иметь вид

$$\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \operatorname{arctg} \dfrac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos t}{\sin\gamma - \sin\delta}, \end{cases}$$

где t – параметр, изменяющийся от 0 до 2π.

Для получения сферического эллипса в компьютерной программе GeoGebra достаточно в строке «Ввод» набрать

Кривая((1; t; arctan((cos(δ) − cos(γ) ∗ cos(t))/(sin(γ) − sin(δ)))), t, 0, 2π) и нажать «Enter».

В результате на экране появится искомый сферический эллипс (рис. О11.7).

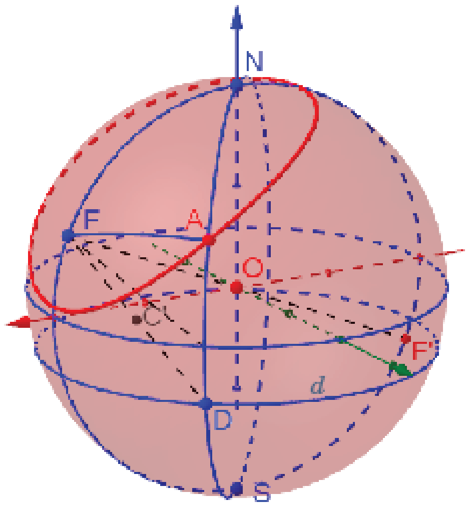

Рис. О11.7

Найдём параметрические уравнения сферического эллипса в декартовых координатах.

Имеем

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{tg^2\psi + 1}}, \sin\psi = tg\ \psi \cdot \cos\psi.$$

Обозначим

$$f(t) = \frac{\cos\delta - \cos\gamma \cdot \cos t}{\sin\gamma - \sin\delta}.\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{f^2(t) + 1}}.$$

Подставляя эти функции в выражения декартовых координат, получим искомые параметрические уравнения сферического эллипса.

$$\begin{cases} x = g(t) \cdot \cos t, \\ y = g(t) \cdot \sin t, \\ z = f(t) \cdot g(t), \end{cases}$$

где t – параметр, изменяющийся от 0 до 2π.

Используя эти параметрические уравнения, сферический эллипс можно получить в компьютерной программе GeoGebra.

Для этого в строке «Ввод» нужно последовательно набрать

$f(t) = (\cos(\delta) - \cos(\gamma) * \cos(t)) / (\sin(\gamma) - \sin(\delta))$

$g(t) = 1/\mathrm{sqrt}(f(t)^2 + 1)$

Кривая(($g(t) * \cos(t)$, $g(t) * \sin(t)$, $f(t) * g(t)$),t,0,2π)

Таблица приближённых значений тригонометрических функций

A	sin *A*	tg *A*	*A*	sin *A*	tg *A*	*A*	sin *A*	tg *A*
30'	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Литература

1. Абрамов А. М. и др. Избранные вопросы математики. 10 класс: Факультативный курс. – М.: Просвещение, 1980.
2. Богомолов С. А. Введение в неевклидову геометрию Римана. – М-Л.: ОНТИ, 1934.
3. Вентцель М. К. Сферическая тригонометрия. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.
4. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.

ОГЛАВЛЕНИЕ