И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

Об определении правильного многогранника

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагор и его ученики считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира, придавая форму правильных многогранников элементам первооснов бытия, а именно: огонь – тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 29.1, а); земля - гексаэдр (куб – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 29.1, б); воздух – октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 29.1, в); вода – икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 29.1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 29.1, д).

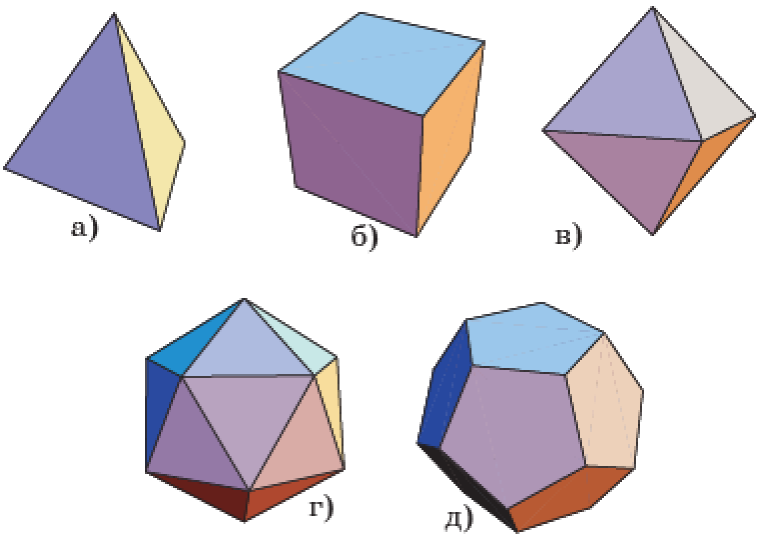

Рис. 29.1

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого языка: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон (429–348 до н. э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона.

Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

Иоганн Кеплер (1571-1630) в своей работе "Тайна мироздания" в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг неё опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера (рис. 29.2).

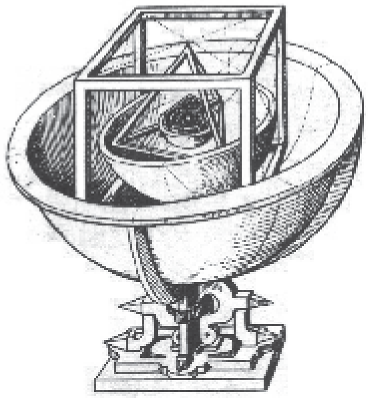

Рис. 29.2

Здесь мы рассмотрим различные подходы к определению понятия правильного многогранника и их методические особенности.

В различных учебниках по стереометрии используются разные определения этого понятия. Так, в учебнике [2] выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер.

В учебнике [5] выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же числе рёбер.

В учебнике [1] правильным называется многогранник, у которого все элементы одного и того же вида равны, т. е. равны все рёбра, углы граней и двугранные углы.

В учебнике [6] многогранник называется правильным, если: 1) он выпуклый; 2) все его грани – равные друг другу правильные многоугольники; 3) в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер; 4) все его двугранные углы равны.

В учебнике [11] многогранник называется правильным, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники, из каждой вершины выходит одинаковое число рёбер и все двугранные углы равны.

В учебнике [10] выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

В учебнике [4] многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

Как видим, во всех перечисленных учебниках даются различные определения понятия правильного многогранника, использующие разные свойства правильного многогранника. Перечислим их.

1. Выпуклость многогранника.
2. Все грани – равные правильные многоугольники.
3. Все грани – правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон.
4. В каждой вершине сходится одинаковое число рёбер.
5. Все многогранные углы имеют одинаковое число граней.
6. Равны все многогранные углы.
7. Равны все двугранные углы.
8. Равны все рёбра многогранника.
9. Равны все плоские углы многогранника.

Какие же свойства следует взять для определения правильного многогранника? Каким методическим требованиям оно должно удовлетворять?

Нам представляется, что для отбора свойств в определении правильного многогранника нужно руководствоваться следующими требованиями.

- *Полнота*, т. е. включение таких свойств, которые полностью определяют данное понятие. Иными словами, любое свойство данного понятия должно быть выводимо из свойств, перечисленных в определении.

- *Экономность*, т. е. определение не должно содержать лишних свойств, которые выводятся из остальных свойств правильного многогранника.

- *Доступность*, означающая, что все понятия, на которые опирается данное определение, известны учащимся, отвечать их возрастным особенностям.

- *Проверяемость*, т. е. возможность установить, является ли многогранник правильным.

- *Определение должно отражать* уже имеющиеся представления учащихся о слове «правильный» (правильный многоугольник, правильная пирамида и т. д.).

- *Педагогическая целесообразность*, т. е. свойства, включённые в него, должны в той или иной степени использоваться при изучении правильных многогранников, нести определённые педагогические функции.

Проанализируем теперь, какое из приведённых выше определений правильного многогранника в наибольшей степени удовлетворяет данным требованиям.

Полнота и экономность

Определения правильного многогранника, данные во всех перечисленных выше учебниках, являются полными по модулю использования теоремы Коши о единственности выпуклого многогранника с данными гранями [3].

Из них только определения, данные в учебниках [6, 11], содержат лишние свойства.

1. Условие выпуклости в определениях, данных в учебниках [2, 5, 10] нельзя отбросить.

Действительно, в этом случае под определение правильного многогранника подходит многогранник, изображённый на рисунке 29.3, получающийся из икосаэдра симметричным отражением одной из пятиугольных пирамид относительно плоскости основания.

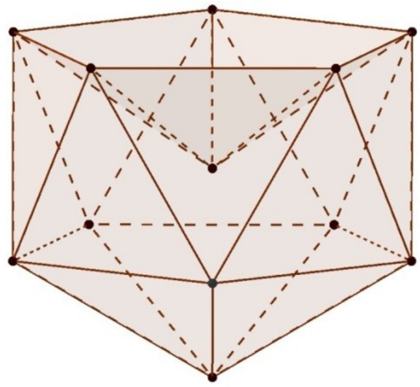

Рис. 29.3

2. Свойства 2 и 3 эквивалентны.

Действительно, пусть все грани многогранника – правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон. Тогда соседние многоугольники, т. е. многоугольники, имеющие общую сторону, равны. Поскольку любые две грани многогранника можно соединить цепочкой соседних многоугольников, получаем, что любые два правильных многоугольника, являющиеся гранями данного многогранника, равны. Обратное очевидно.

3. Свойства 4 и 5 следуют из свойства 6.

4. Свойства 2, 3 не следуют из свойств 4-7.

Действительно, прямоугольный параллелепипед, отличный от куба, удовлетворяет свойствам 4-7, но не удовлетворяет свойствам 2, 3. Поэтому свойство 2 в определении правильного многогранника или эквивалентное ему свойство 3 нельзя отбросить, исключить из определения правильного многогранника.

5. Свойство 7 не следует из свойства 6.

Действительно, отсечём от каждого угла куба равные правильные пирамиды (рис. 29.4). Полученный многогранник имеет равные многогранные углы и двугранные углы двух типов: прямые, образованные гранями куба, и тупые, образованные гранью куба и отсекающей плоскостью.

На самом деле, свойство 7 следует не из свойства 6, а из свойств 1 и 2. Однако доказательство этого факта опирается на более глубокие результаты теории многогранников (см. [3]) и поэтому не может быть использовано в школьном курсе геометрии. Аналогично, свойство 7 следует из свойств 1, 2. Однако, поскольку доказать это довольно сложно, включение свойства 7, наряду со свойствами 1, 2, 4, в определение правильного многогранника, как это сделано в учебнике [6], педагогически оправдано.

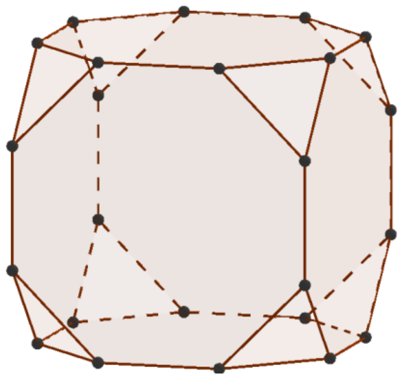

Рис. 29.4

Доступность

Правильные многогранники входят в Примерные программы по математике основного [7] и среднего [8] общего образования.

Поскольку понятия двугранного и многогранного углов рассматриваются в старших классах, то определения правильного многогранника, данные в учебниках [1, 4, 6, 11], могут быть рассмотрены только в старших классах после изучения данных понятий.

Определения правильного многогранника, данные в учебниках [2, 5, 10], могут быть рассмотрены в основной школе и даже в 5-6 классах в рамках раздела «Наглядная геометрия».

Проверяемость

Определения правильного многогранника, данные в учебниках [2, 5, 10], легко проверяются.

Определения правильного многогранника, данные в учебниках [1, 4, 6, 11], используют понятие двугранного угла. Следовательно, для установления того, является ли данный многогранник правильным, нужно проверять равенство двугранных углов этого многогранника, что не всегда является простым делом.

Определение правильного многогранника, данное в учебнике [4], использует понятие многогранного угла. Следовательно, для установления того, является ли данный многогранник правильным, нужно проверять равенство многогранных углов, что ещё труднее, так как предполагает использование понятия движения.

Выясним теперь, какие из перечисленных выше свойств правильных многогранников являются пространственными аналогами свойств правильных многоугольников.

Напомним, что многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны, т. е. равны все элементы одного и того же вида. В этом смысле определение правильного многогранника, данное в учебнике [1], является пространственным аналогом определения правильного многоугольника.

С другой стороны, поскольку многоугольник в пространстве можно считать пространственным аналогом отрезка, то равенство граней правильного многогранника (свойство 2) можно считать пространственным аналогом равенства сторон правильного многоугольника. Пространственным аналогом плоского угла можно считать или двугранный угол, или многогранный угол. Поэтому пространственным аналогом равенства углов правильного многоугольника можно считать или равенство двугранных углов (свойство 7), или равенство многогранных углов (свойство 6).

Таким образом, пространственным аналогом определения правильного многоугольника можно считать определения правильного многогранника, данные в учебниках [2. 4, 5, 6].

В зависимости от целей обучения следует выбирать и соответствующее им определение.

Мы отдаём предпочтение, определениям правильного многогранника, данным в учебниках [2, 5, 10], в которых не используется равенство двугранных или многогранных углов и с которыми можно начинать знакомить учащихся уже с 5-6-х классов.

Литература

1. Александров А. Д. и др. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Просвещение, 2014.

2. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Просвещение, 2014.

3. Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников. – М.: МЦНМО, 2000.

4. Киселёв А. П. Геометрия: учебник для 9-10 классов средней школы. Часть вторая. Стереометрия / под ред. Н. А. Глаголева. – 26-е изд. – М.: Учпедгиз, 1965.

5. Погорелов А. В. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Просвещение, 2014.

6. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (углублённый уровень). – М.: Дрофа, 2014.

7. Примерные программы основного общего образования. Математика. – М.: Просвещение, 2009.

8. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика, алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. – М.: Вентана-Граф, 2012.

9. Смирнова И. М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995. – С. 52-73.

10. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс: учебник (базовый и углублённый уровни) – М.: Мнемозина, 2014.

11. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень). – М.: Дрофа, 2014.