Ещё одно доказательство теоремы Пифагора[1]

Знаменитая теорема Пифагора имеет несколько сотен доказательств. Некоторые из них рассмотрены в книгах [1] и [2]. В учебниках геометрии [1, 4, 5, 6] используются различные методы доказательства этой теоремы. Например, в учебнике [1] доказательство теоремы Пифагора использует понятие площади, её свойства и формулы площади треугольника и квадрата. В учебнике [4] используются тригонометрические функции острых углов прямоугольного треугольника. В учебнике [6] используется понятие подобия и признаки подобия треугольников. В учебнике [5] приводится два способа доказательства теоремы Пифагора, использующие понятия подобия и площади.

Все эти доказательства содержат пробелы, связанные с тем, что строгое обоснование понятий подобия, тригонометрических функций и площади выходит за рамки школьного курса математики.

Итак, можно ли, находясь в рамках школьного курса математики, доказать теорему Пифагора, т. е. доказать, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов, без использования подобия, тригонометрических функций или площади?

Конечно, в случае произвольных прямоугольных треугольников этого сделать нельзя, однако в случае, когда стороны прямоугольных треугольников выражаются натуральными числами, оказывается, это сделать можно.

Докажем, например, что гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, равна 5.

Рассмотрим сетку на плоскости, состоящую из единичных квадратов, и точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, расположенные так, как показано на рисунке 18.1.

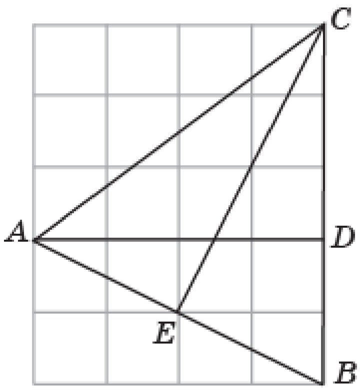

Рис. 18.1

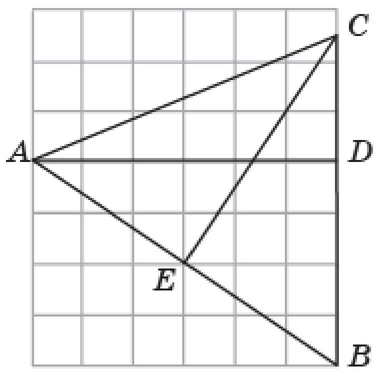

Рис. 18.2

Прямая *CE* является серединным перпендикуляром к отрезку *AB*. Следовательно, равны отрезки *AC* и *BC*. В прямоугольном треугольнике *ACD* имеем: $AD = 4$, $CD = 3$, $AC = BC = 5$.

---

[1] Математика. – 2013. – № 10. – С. 17, 18.

Как легко видеть, приведённое доказательство использует только признаки равенства треугольников, свойство серединного перпендикуляра к отрезку и не использует понятия подобия и площади.

Аналогичным образом докажем, что гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 6 и 2,5, равна 6,5.

Рассмотрим сетку на плоскости, состоящую из единичных квадратов, и точки A, B, C, D, E, расположенные так, как показано на рисунке 18.2.

Прямая CE является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Следовательно, равны отрезки AC и BC. В прямоугольном треугольнике ACD имеем $AD = 6$, $CD = 2{,}5$, $AC = BC = 6{,}5$.

Если рассмотреть треугольник со сторонами в 2 раз больше соответствующих сторон треугольника ACD, то получим прямоугольный треугольник, в котором катеты равны 12 и 5, а гипотенуза равна 13.

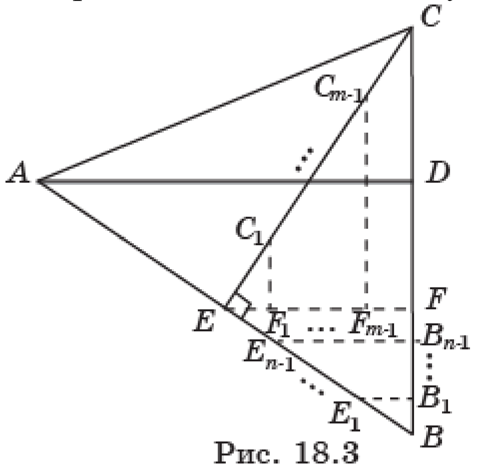

Рис. 18.3

Рассмотрим теперь наиболее общий случай, представленный на рисунке 18.3, где $AD = 2m$, $BD = 2n$, точка E – середина AB, точка F – середина BD.

Прямая CE перпендикулярна прямой AB. Прямая AD перпендикулярна прямой BC. Точки B_1, …, B_{n-1} делят отрезок BF, длина которого равна n, на n равных частей. Точки F_1, …, F_{m-1} делят отрезок EF, длина которого равна m, на m равных частей. Точки E_1, …, E_{n-1} делят отрезок BE на n равных частей. Точки C_1, …, C_{m-1} делят отрезок EC на m равных частей.

Из теорем о средних линиях треугольника и трапеции следует, что длина отрезка B_1E_1 равна $\frac{m}{n}$. Прямоугольные треугольники BB_1E_1 и EF_1C_1 равны по катету ($BB_1 = EF_1 = 1$) и острому углу ($\angle B = \angle E$). Следовательно, $F_1C_1 = \frac{m}{n}$. Значит, длина отрезка FC равна $\frac{m^2}{n}$ Таким образом, в прямоугольном треугольнике ACD имеем:

$$AD = 2m,\ CD = \frac{m^2}{n} - n = \frac{m^2-n^2}{n}.\ AC = BC = \frac{m^2}{n} + n = \frac{m^2+n^2}{n}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника ACD равен сумме квадратов катетов.

Если рассмотреть треугольник со сторонами в n раз больше соответствующих сторон треугольника ACD, то получим прямоугольный треугольник, в котором катеты равны $2mn$ и $m^2 - n^2$, а гипотенуза равна $m^2 + n^2$. В частности, если $m = 2$, $n = 1$, получаем прямоугольный треугольник со сторонами 4, 3, 5. Если $m = 3$, $n = 2$, получаем прямоугольный треугольник со сторонами 12, 5, 13.

Числа $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$ образуют, так называемые, пифагоровы тройки, которые исчерпывают все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах.

Литература

1. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.
2. Волошинов А. В. Пифагор. – М.: Просвещение, 1993.
3. Литцман В. Теорема Пифагора. – М.: Физматлит, 1960.
4. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2011.
5. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2014.
6. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2014.