ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 7 КЛАСС

В.А. Смирнов,
Московский педагогический государственный университет,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov,
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 7 класс

Keywords: extreme geometry problems, 7-th grade

Аннотация: в работе рассматривается задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 7-м классе

Abstract: the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 7-th grade

DOI:

Обычно экстремальные задачи (задачи на нахождение наибольших и наименьших значений) решаются в курсе алгебры и начал математического анализа старших классов с помощью производной. Вместе с тем, имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые можно решать своими методами без помощи производной. Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для её приложений, а с другой стороны, развивают геометрические представления учащихся, формируют необходимые умения и навыки решения экстремальных задач, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал математического анализа.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

Данная статья является первой из серии статей, в которой представлены геометрические задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. При их решении используются свойства и теоремы, которые изучаются в курсе геометрии 7-го класса, среди которых: признаки равенства треугольников; теорема о перпендикуляре и наклонной; неравенство треугольника; соотношение между сторонами и углами треугольника; свойство длины ломаной и др.

Приведённые задачи могут быть использованы при обучении геометрии в 7-м классе как на основных уроках, так и при проведении курсов по выбору, организации исследовательской деятельности учащихся.

В последующих статьях будут рассмотрены аналогичные задачи для 8, 9, 10 и 11 классов.

Обратим внимание на то, что некоторые хорошо известные теоремы геометрии 7 класса можно предлагать учащимся в качестве задач на нахождение наибольших и наименьших значений. Например, теорему о том, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче любой наклонной, проведённой из этой точки к данной прямой, можно переформулировать в виде следующей задачи.

Задача 1. Даны прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. На прямой b найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 1).

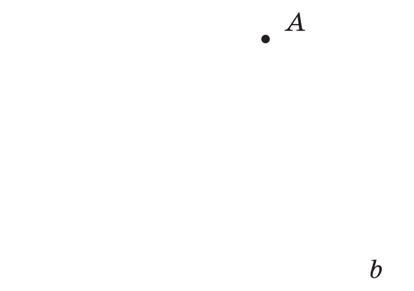


Рис. 1

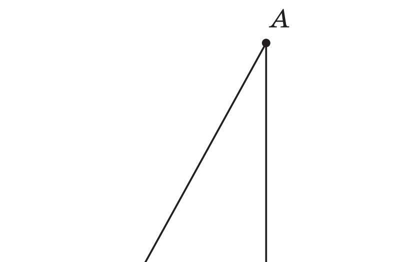


Рис. 2

Р е ш е н и е. Искомой точкой будет точка B – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую b (рис. 2). Для любой другой точки C этой прямой отрезок AC будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB.

Задача 2. Даны прямая b и точка A, не принадлежащая этой прямой. Докажите, что на прямой b не существует точки C, расстояние до которой от точки A наибольшее.

Р е ш е н и е. Докажем, что для любой точки C прямой b найдётся точка D этой прямой, для которой $AD > AC$. Пусть B – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую b. Для произвольной точки C прямой b рассмотрим точку D, лежащую на прямой b по ту же сторону, что и точка C так, что $BD > BC$ (рис. 3).

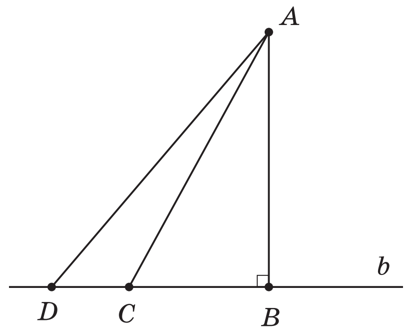


Рис. 3

Тогда $\angle ACD \geq 90°$, следовательно, в треугольнике ACD $\angle C > \angle D$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то отрезок AD будет больше отрезка AC.

Следующие задачи относятся к взаимному расположению точки и окружности, прямой и окружности, двух окружностей.

Задача 3. Точка A расположена вне окружности с центром в точке O. На этой

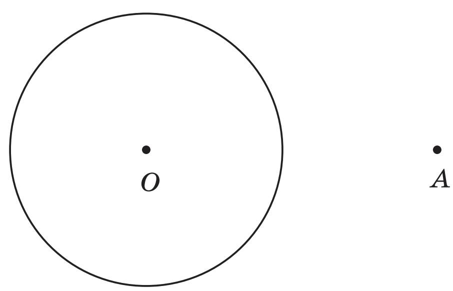
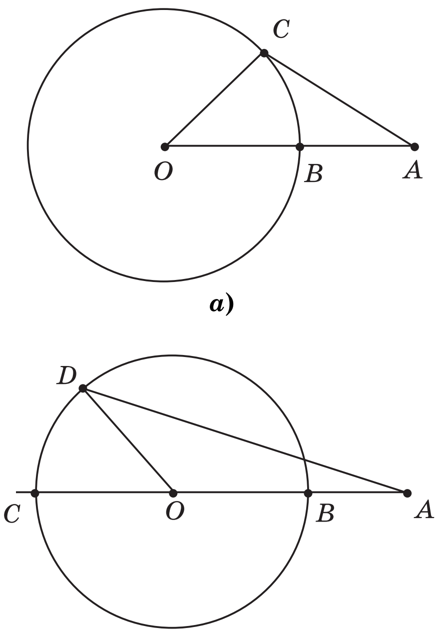


Рис. 4

окружности найдите точку, расстояние до которой от точки A: а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 4).

Р е ш е н и е. а) Искомой точкой является точка B – точка пересечения отрезка OA с окружностью (рис. 5*а*). Для любой другой точки C этой окружности из неравенства треугольника следует неравенство $OA < OC + AC$. Учитывая, что $OA = OB + AB$ и $OB = OC$, получаем неравенство $AB < AC$.



б)

Рис. 5

б) Искомой точкой является точка C – точка пересечения луча AO с окружностью, отличная от точки B (рис. 5*б*). Для любой другой точки D этой окружности из неравенства треугольника следует неравенство $AD < AO + OD$. Учитывая, что $OD = OC$, получаем неравенство $AD < AC$.

Задача 4. Прямая b не имеет общих точек с окружностью с центром в точке O (рис. 6). На этой окружности найдите точку, расстояние от которой до прямой b: а) наименьшее; б) наибольшее.

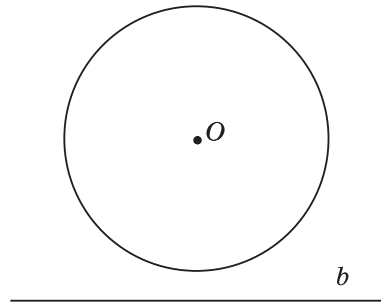
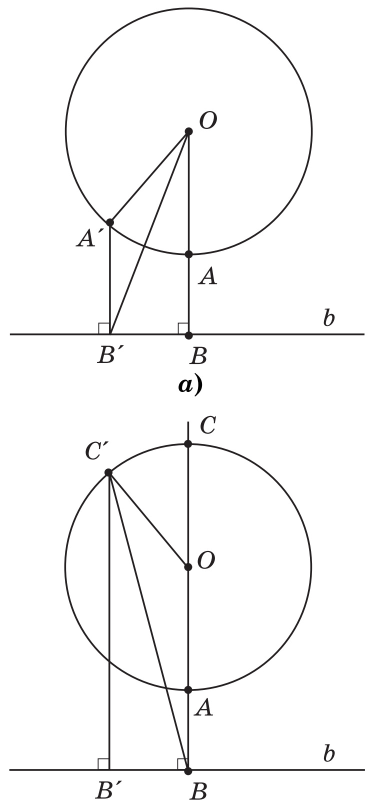


Рис. 6

Р е ш е н и е. а) Искомой точкой является точка A – точка пересечения перпендикуляра OB, опущенного из точки O на прямую b, с окружностью (рис. 7*а*). Для любой другой точки A' этой окружности и перпендикуляра $A'B'$, опущенного на прямую b, выполняются неравенства $A'B' + OA' > OB' > OA + AB$. Учитывая, что $OA' = OA$, получаем неравенство $A'B' > AB$.



б)

Рис. 7

б) Искомой точкой является точка C – точка пересечения луча BO с окружностью, отличная от точки A (рис. 7*б*). Для любой другой точки C' этой окружности и перпендикуляра $C'B'$, опущенного на прямую b, выполняются неравенства $C'B' \le C'B < C'O + OB$. Учитывая, что $C'O = CO$, получаем неравенство $C'B' < CB$.

Задача 5. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга (рис. 8). Найдите точки на этих окружностях, расстояние между которыми: а) наименьшее; б) наибольшее.

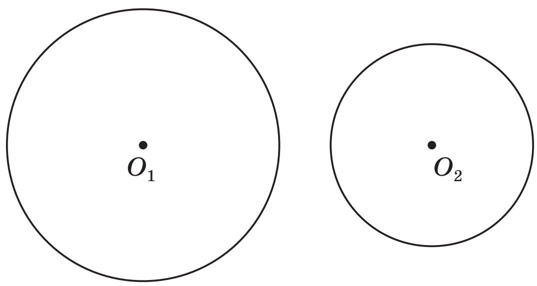


Рис. 8

Р е ш е н и е. а) Искомыми точками являются точки B_1 и B_2 – точки пересечения отрезка O_1O_2 с данными окружностями (рис. 9).

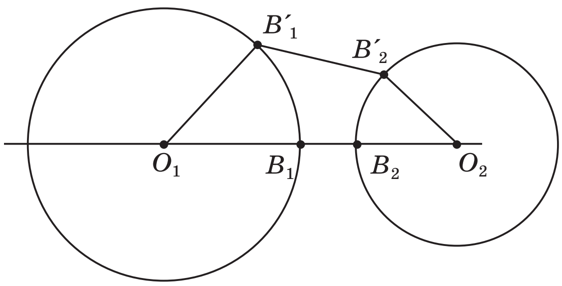


Рис. 9

Пусть B_1', B_2' – другие точки этих окружностей. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $O_1B_1' + B_1'B_2' + B_2'O_2 > O_1O_2 = O_1B_1 + B_1B_2 + B_2O_2$. Так как $O_1B_1' = O_1B_1$ и $B_2'O_2 = B_2O_2$, то будет выполняться неравенство $B_1'B_2' > B_1B_2$.

б) Искомыми являются точки C_1 и C_2 – точки пересечения прямой O_1O_2 с данными окружностями, не принадлежащие отрезку O_1O_2 (рис. 10).

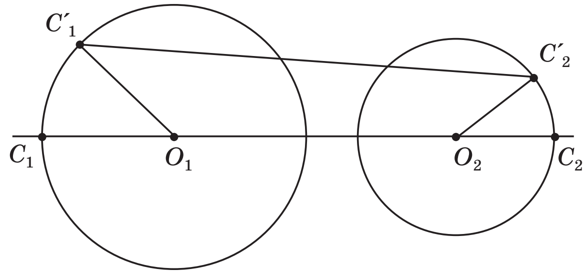


Рис. 10

Пусть C_1', C_2' – другие точки этих окружностей. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $C_1'C_2' < O_1C_1' + O_1O_2 + C_2'O_2 = C_1O_1 + O_1O_2 + O_2C_2 = C_1C_2$.

Рассмотрим теперь классическую задачу Герона.

Задача 6*. (Задача Герона.) Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 11).

Рис. 11

Задачу Герона можно переформулировать, как задачу с практическим содержанием.

Задача об автобусной остановке. Два населённых пункта A и B расположены по одну сторону от прямолинейного участка шоссе c. Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё прямолинейные дорожки до населённых пунктов так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей.

Прежде чем решать эту задачу, учащимся можно предложить следующую более простую задачу, подводящую к решению задачи Герона.

Задача 7. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по разные стороны. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 12).

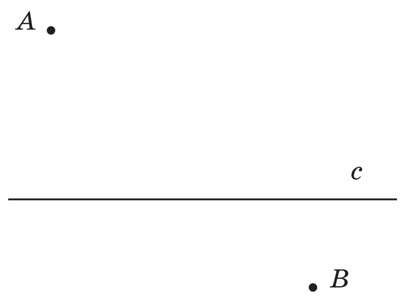


Рис. 12

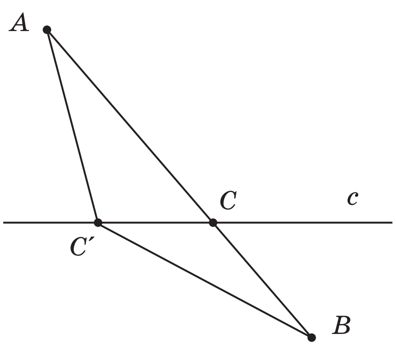


Рис. 13

Р е ш е н и е. Искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и прямой c (рис. 13). Из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' прямой c выполняется неравенство $AC' + C'B > AC + CB$, значит, сумма $AC + CB$ будет наименьшей.

Р е ш е н и е задачи Герона. Сведём решение задачи Герона к решению предыдущей задачи. Из точки B опустим перпендикуляр BH на прямую c и отложим на его продолжении отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка на прямой c (рис. 14).

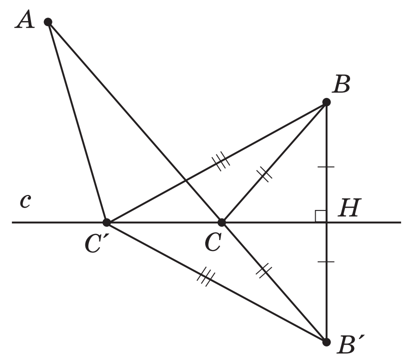
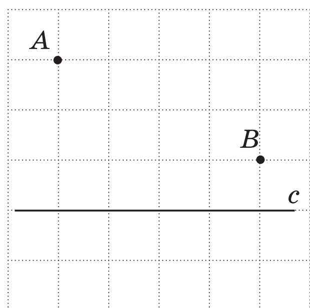


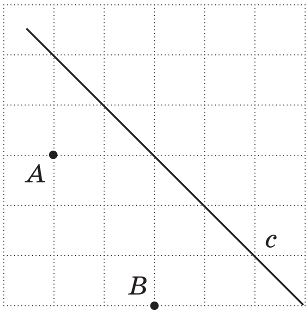
Рис. 14

Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой. Следовательно, искомой точкой является точка C пересечения прямой AB' с прямой c.

Задача 8. На прямой c укажите точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 15).



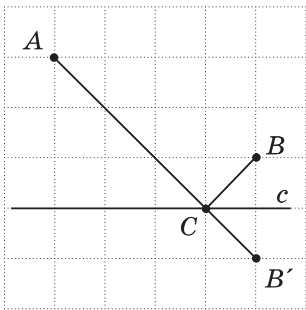
***а*)**



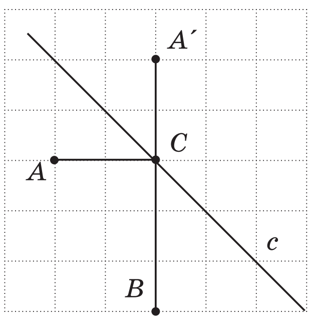
***b*)**

Рис. 15

Р е ш е н и е показано на рисунке 16.



***a*)**

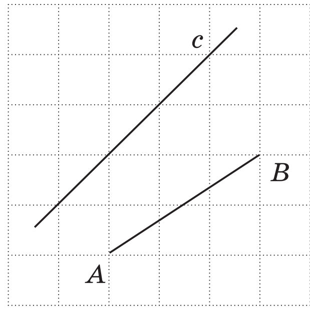


***b*)**

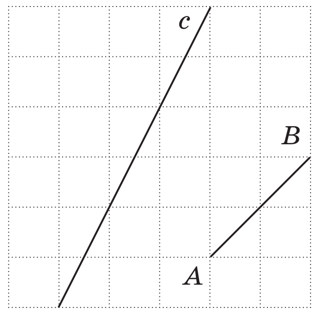
Рис. 16

Задача 9. Даны отрезок AB и прямая c (рис. 17). На прямой c найдите точку C, для которой периметр треугольника ABC наименьший. Чему равен этот периметр, если стороны клеток равны 1.

Р е ш е н и е. Построение искомой точки C показано на рисунке 18. Периметр треугольника ABC равен: а) 5; б) 6.

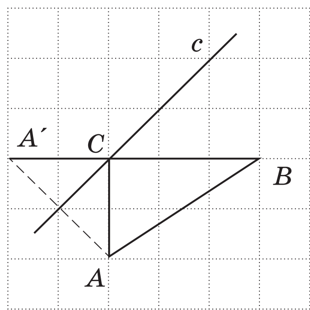


***a*)**

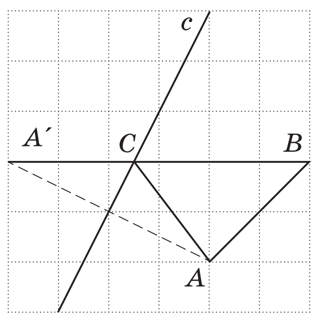


***b*)**

Рис. 17



***a*)**



***b*)**

Рис. 18

Задача 10. Даны прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону (рис. 19). На этой прямой найдите такую точку C, для которой разность расстояний $AC - CB$ наибольшая.

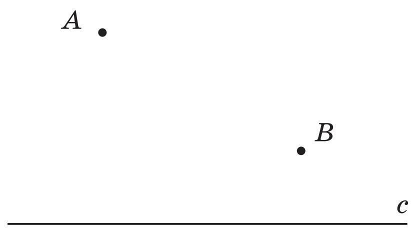


Рис. 19

Р е ш е н и е. Искомой точкой C является точка пересечения прямой AB и прямой c (рис. 20). Действительно, разность $AC - CB$ равна AB.Для любой другой точки C' прямой c из неравенства треугольника следует, что выполняется неравенство $AC' - C'B < AB$.

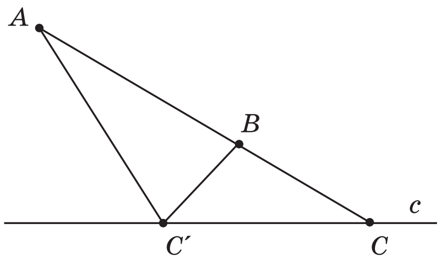


Рис. 20

Задача 11.Даны прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по разные стороны (рис. 21). На этой прямой найдите такую точку C, для которой разность расстояний $AC - CB$ наибольшая.

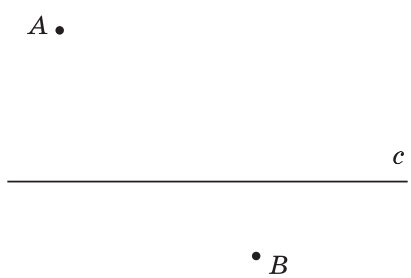


Рис. 21

Р е ш е н и е. Из точки B опустим на прямую c перпендикуляр BH и на его продолжении отложим отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка на прямой c (рис. 22). Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Поэтому разность $AC' - C'B$ будет наибольшей тогда и только тогда, когда наибольшей будет равная ей разность $AC' - C'B'$. Ясно, что последняя разность является наибольшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой. Следовательно, искомой точкой является точка C пересечения прямой AB' с прямой c.

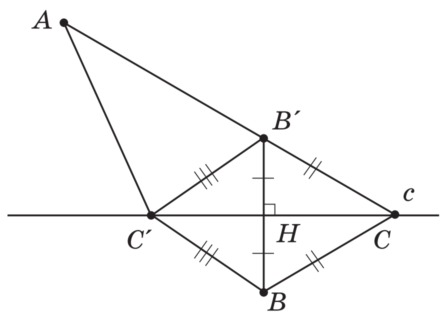
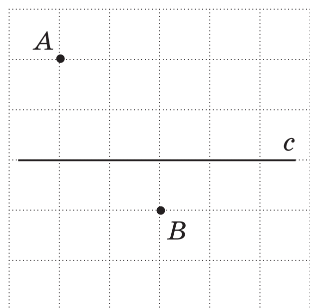


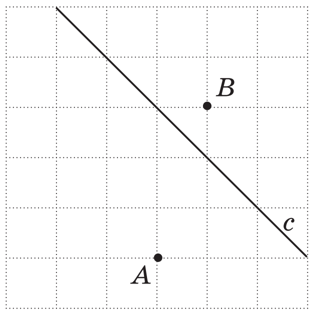
Рис. 22

Задача 12.Даны прямая c и две точки A и B. На прямой cукажите точку C, для которой разность $AC - CB$ наибольшая (рис. 23).

Р е ш е н и е. Построение искомой точки C показано на рисунке 24.

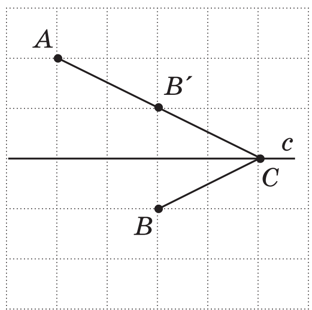


***а*)**

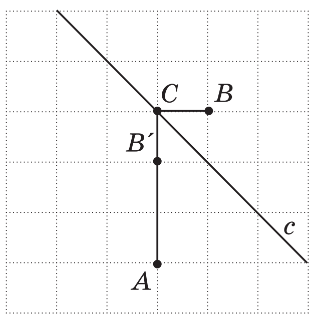


***b*)**

Рис. 23



***a*)**



***b*)**

Рис. 24

Задача 13. Точка C расположена внутри острого угла aOb. На сторонах a и b этого угла найдите точки A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший (рис. 25).

Р е ш е н и е. Из точки C опустим перпендикуляры CH' и CH'' соответственно на стороны a и b.Отложим на их продолжениях отрезки $H'C'$, $H''C''$, равные CH' и CH'' (рис. 26). Пусть A', B' – произвольные точки на сторонах угла a и b соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников $CA'H'$ и $C'A'H'$, $CB'H''$ и $C''B'H''$ соответственно следует равенство отрезков $CA' = C'A'$, $CB' = C''B'$. Периметр треугольника $CA'B'$ будет наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшей будет длина ломаной $C'A'B'C''$. Ясно, что она является наименьшей в случае, если точки C', A', B', C'' принадлежат одной прямой. Таким образом, искомыми точками A и B, для которых периметр треугольника ABC наименьший, являются точки пересечения отрезка $C'C''$ со сторонами угла.

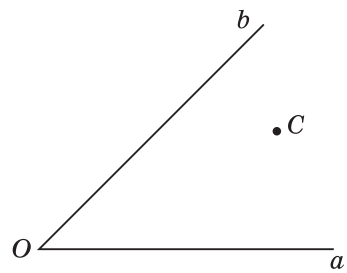


Рис. 25

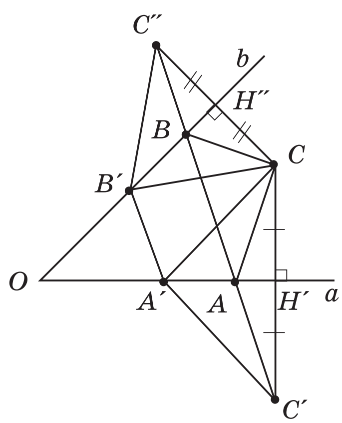
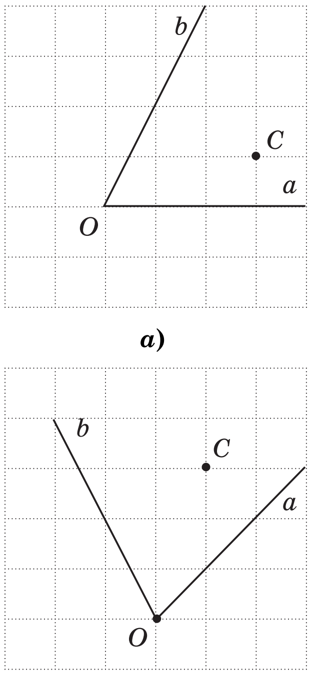


Рис. 26

Задача 14. Для данной точки C внутри острого угла aOb на его сторонах a и b укажите точки A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший (рис. 27).

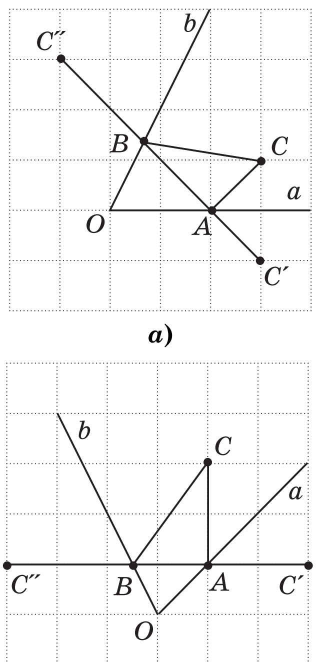


***a*)**

***b*)**

Рис. 27

Р е ш е н и е показано на рисунке 28.



***a*)**

***b*)**

Рис. 28

Задача 15*. (Задача Фаньяно.) Дан остроугольный треугольник ABC. На его сторонах BC, AC, AB найдите точки A_1, B_1, C_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (рис. 29).

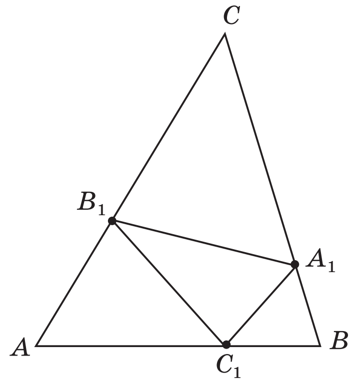


Рис. 29

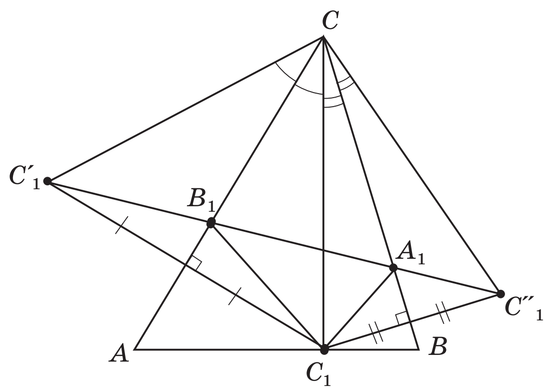


Рис. 30

Р е ш е н и е. На стороне AB зафиксируем точку C_1. На сторонах BC и AC найдём точки A_1 и B_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший. На рисунке 30 показано построение этих точек.

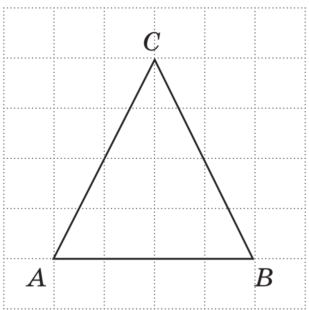
Будем теперь менять положение точки C_1 на стороне AB и искать такое положение, при котором периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

Рассмотрим треугольник $CC_1'C_1''$. Он является равнобедренным ($CC_1' = CC_1'' = CC_1$). Его основание $C'_1C''_1$ равно периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Его угол при вершине C равен удвоенному углу ACB, следовательно, не зависит от положения точки C_1.

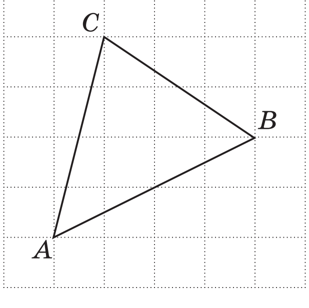
Основание этого равнобедренного треугольника будет наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшей будет его боковая сторона (поясните, почему), равная CC_1. Отрезок CC_1 будет наименьшим, если C_1 – основание высоты треугольника ABC. Аналогично, доказывается, что точки A_1, B_1 – основания высот треугольника ABC.

Таким образом, искомым треугольником является треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот данного треугольника ABC. Такой треугольник называется ортотреугольником.

Задача 16. На сторонах BC, AC, AB данного треугольника ABC укажите точки A_1, B_1, C_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (рис. 31).

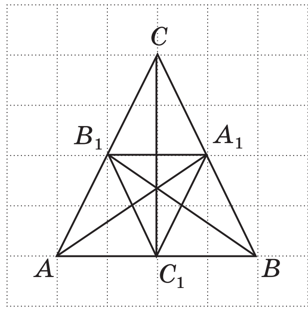


***a*)**

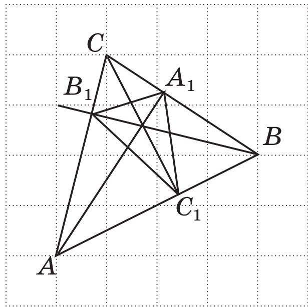


***b*)**
Рис. 31

Р е ш е н и е показано на рисунке 32.



***a*)**



***b*)**
Рис. 32

Задача 17. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин этого четырёхугольника будет наименьшей (рис. 33).

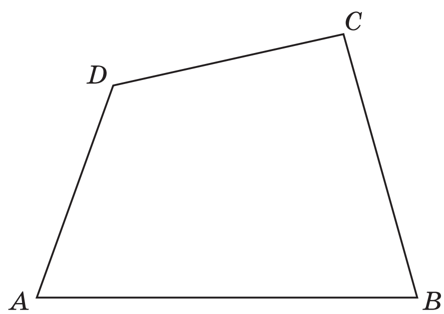


Рис. 33

Эту задачу можно переформулировать, как задачу с практическим содержанием.

Задача о колодце. Четыре соседа в садовом товариществе решили построить общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей. В каком месте следует расположить колодец?

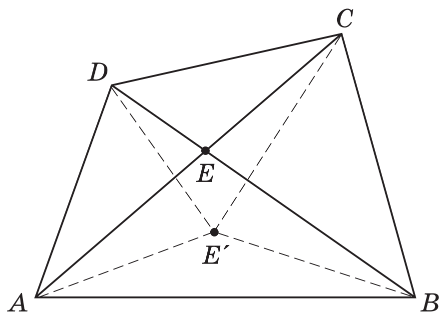


Рис. 34

Р е ш е н и е. Искомой точкой E является точка пересечения диагоналей данного четырёхугольника (рис. 34). Из неравенства треугольника следует, что сумма расстояний от любой другой точки E' до вершин данного четырёхугольника будет больше.

Литература

1. *Возняк Г.М. Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. *Нагибин Ф.Ф.* Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.

5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.