ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 11 КЛАСС

В.А. Смирнов,
Московский педагогический государственный университет,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov,
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 11 класс

Keywords: extreme geometry problems, 11-th grade

Аннотация: в работе рассматривается задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 11-м классе

Abstract: the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 11-th grade

DOI:

Данная статья завершает серию статей, опубликованных в журнале «Математика в школе», в которых были представлены задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7, 8, 9 и 10 классов. В ней рассматриваются задачи на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), связанные со сферой, цилиндром, конусом, объёмами и площадями поверхностей тел в пространстве. Эти задачи могут быть использованы при обучении в 11-м классе на основных уроках, при проведении обобщающего повторения и курсов по выбору, организации проектной и исследовательской деятельности учащихся.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

Начнём с задач на взаимное расположение сферы и точки, сферы и плоскости, двух сфер, являющихся аналогами соответствующих задач для окружностей, которые были рассмотрены в первой статье.

Задача 1. Точка A, расположена вне сферы с центром в точке O. На этой сфере найдите точку, расстояние до которой от точки A: а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 1).

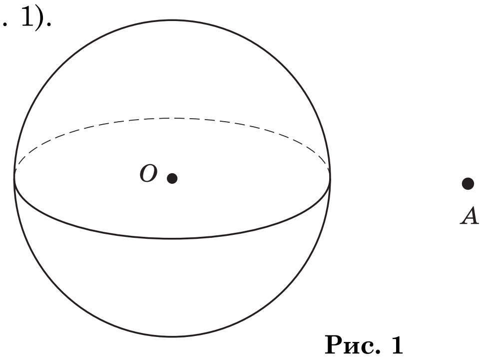


Рис. 1

Р е ш е н и е. а) Искомой точкой является точка B пересечения отрезка AO с данной сферой (рис. 2). Для любой другой точки B' этой сферы из неравенства тре-угольника следует неравенство $OA < OB' + AB'$. Учитывая, что $OA = OB + AB$ и $OB = OB'$, получаем неравенство $AB < AB'$.

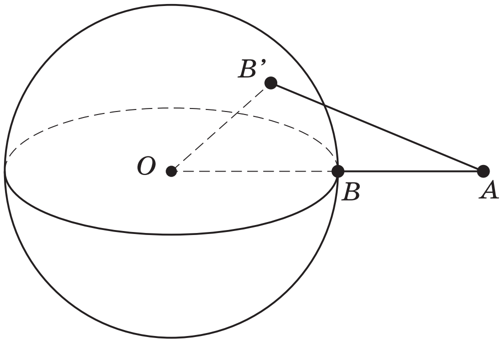


Рис. 2

б) Искомой точкой является точка C пересечения прямой AO с данной сферой, не принадлежащая отрезку AO (рис. 3). Для любой другой точки C' этой сферы из неравенства треугольника следует неравенство $AC' < AO + OC'$. Учитывая, что $OC' = OC$, получаем неравенство $AC' < AC$.

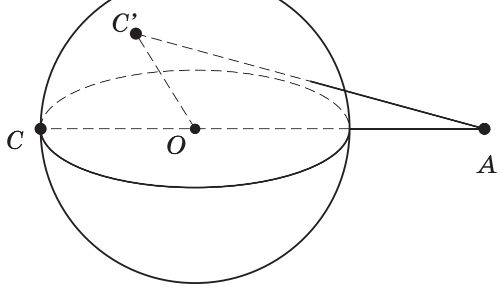


Рис. 3

Задача 2. Плоскость γ не имеет общих точек со сферой с центром в точке O. На этой сфере найдите точку, расстояние от которой до плоскости γ: а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 4).

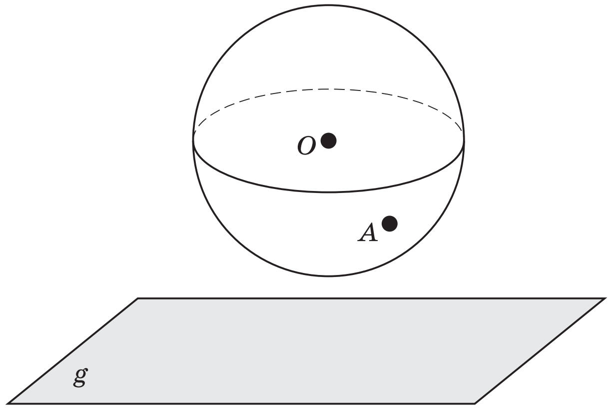


Рис. 4

Р е ш е н и е. а) Искомой точкой является точка A пересечения перпендикуляра OC, опущенного из точки O на плоскость γ, с данной сферой (рис. 5). Для любой другой точки A' этой сферы и перпендикуляра $A'C'$, опущенного на плоскость γ, выполняются неравенства $A'C' + OA' > OC' \geq OA + AC$. Учитывая, что $OA' = OA$, получаем неравенство $A'C' > AC$.

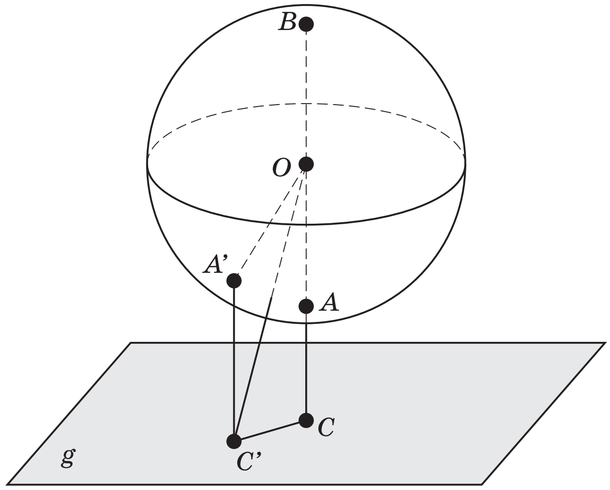


Рис. 5

б) Искомой точкой является точка B пересечения прямой, содержащей перпендикуляр OC, опущенный из точки O на плоскость γ, с данной сферой, не принадлежащая этому перпендикуляру (рис.

б). Для любой другой точки B' этой сферы и перпендикуляра $B'C'$, опущенного на плоскость γ, выполняются неравенства $B'C' \le B'C < B'O + OC$. Учитывая, что $B'O = BO$, получаем неравенство $B'C' < BC$.

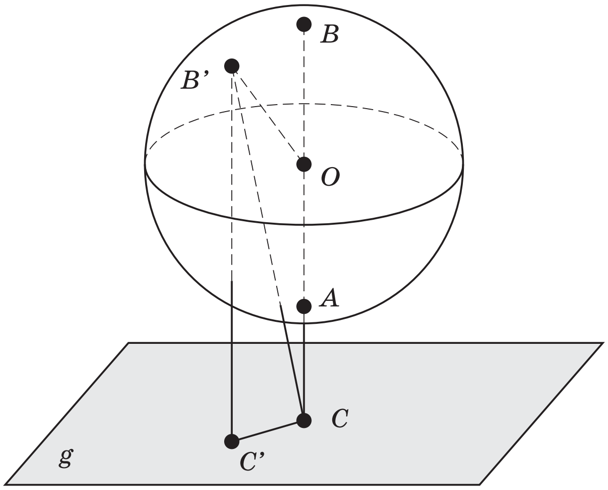


Рис. 6

Задача 3. Две сферы с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки на этих сферах, расстояние между которыми: а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 7).

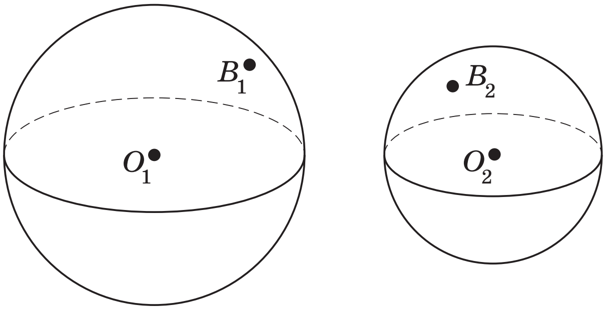


Рис. 7

Р е ш е н и е. А) Искомыми точками являются точки B_1 и B_2 пересечения отрезка O_1O_2 с данными сферами (рис. 8).

Пусть B_1', B_2' – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $O_1B_1' + B_1'B_2' + B_2'O_2 > O_1O_2 = O_1B_1 + B_1B_2 + B_2O_2$. Так как $O_1B_1' = O_1B_1$ и $B_2'O_2 = B_2O_2$, то будет выполняться неравенство $B_1'B_2' > B_1B_2$.

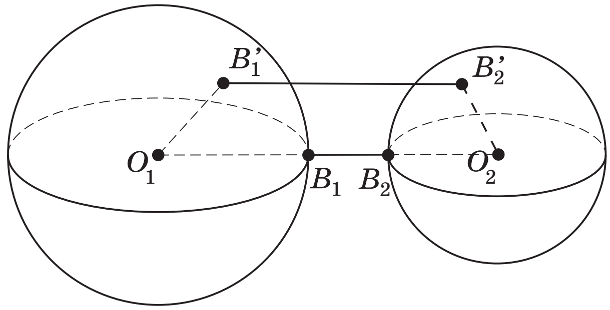


Рис. 8

б) Искомыми точками являются точки C_1 и C_2 пересечения прямой O_1O_2 с данными сферами, не принадлежащие отрезку O_1O_2 (рис. 9).

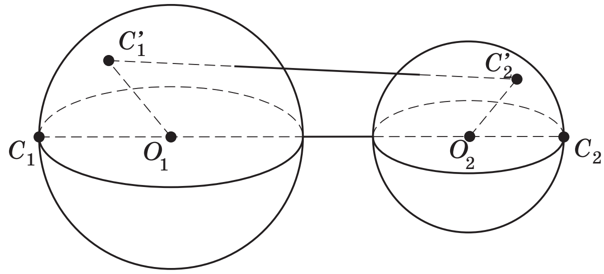


Рис. 9

Пусть C_1', C_2' – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $C_1'C_2' < O_1C_1' + O_1O_2 + C_2'O_2 = C_1O_1 + O_1O_2 + O_2C_2 = C_1C_2$.

В следующих задачах требуется найти кратчайшие пути по поверхностям цилиндра и конуса. Они аналогичны задачам на нахождение кратчайших путей по поверхностям многогранников, рассмотренным в предыдущей статье, и решаются с использованием развёрток поверхностей этих тел.

Задача 4. Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки A и B относительно центра симметрии цилиндра (рис. 10).

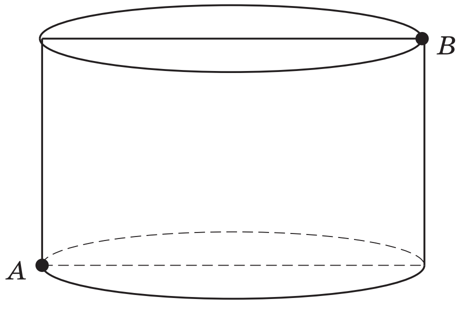
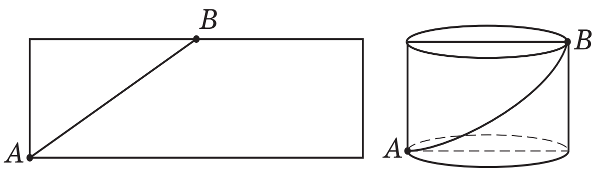


Рис. 10

Р е ш е н и е. Развёрткой боковой поверхности этого цилиндра является прямоугольник со сторонами 2π и 1, изображённый на рисунке 11*а*.



а) ***б)***

Рис. 11

Кратчайшим путём из точки A в точку B является отрезок AB, длина которого равна $\sqrt{\pi^2+1}$. Соответствующий путь по поверхности цилиндра изображён на рисунке 11*б*.

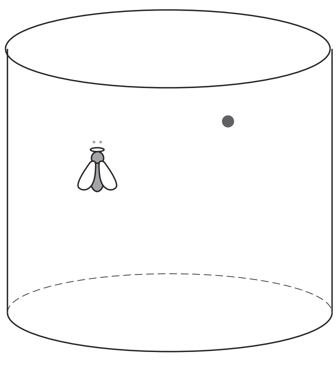
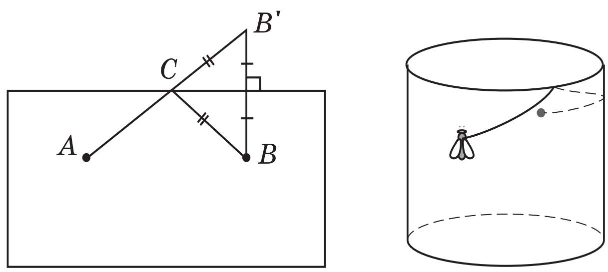


Рис. 12

Задача 5. На внутренней стенке цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края висит капля мёда, а на наружной стенке, в диаметрально-противоположной точке сидит муха (рис. 12). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до мёда. Радиус основания банки равен 10 см.

Р е ш е н и е. Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. 13*а*). Кратчайшим путём между точками A и B, в которых соответственно находятся муха и капля мёда, является отрезок AB. Однако, чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке C.



а) ***б)***

Рис. 13

Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно стороны прямоугольника. В качестве точки C возьмём точку пересечения отрезка AB' со стороной прямоугольника. Тогда отрезки BC и $B'C$ будут равны. Следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка AB'. Она равна $2\sqrt{25\pi^2+9}$. Соответствующий путь по поверхности банки изображён на рисунке 13*б*.

Задача 6. Осевое сечение конуса – правильный треугольник SAB со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку C – середину образующей SB (рис. 14).

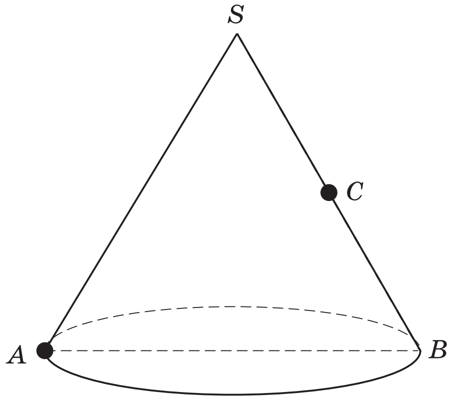
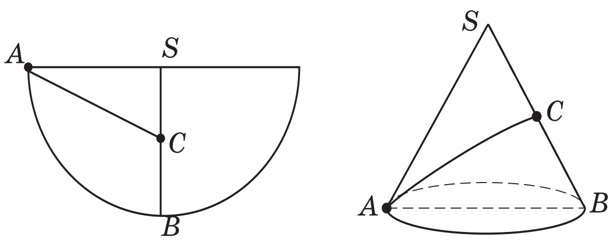


Рис. 14

Р е ш е н и е. Развёрткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиусом 1 (рис. 15*а*). Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке 15*б*.



***а*)** ***б*)**

Рис. 15

Задача 7. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC со стороной основания 1 и боковой стороной 2. Найдите длину кратчайшей петли по поверхности этого конуса с началом и концом в точке A (рис. 16).

Р е ш е н и е. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 90°. Кратчайшим путём является отрезок $A'A''$, длина которого равна $2\sqrt{2}$ (рис. 17*а*). Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке 17*б*.

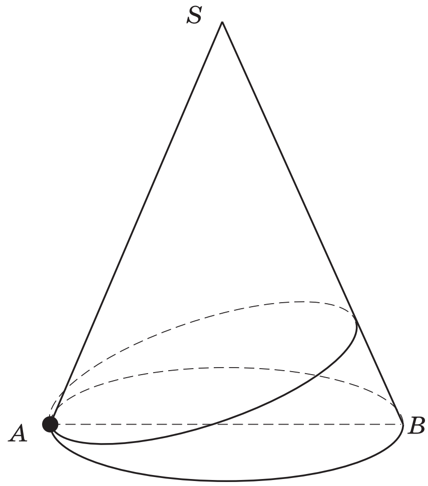
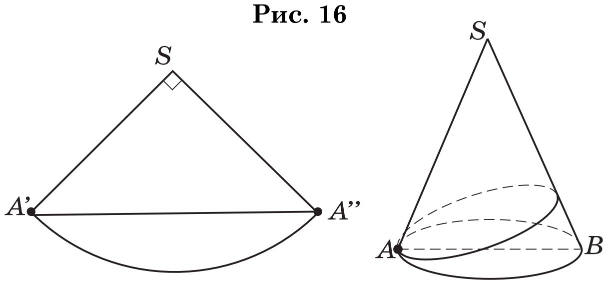


Рис. 16



***а*)** ***б*)**

Рис. 17

Рассмотрим задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, относящиеся к понятию объёма тела. Часть из них сформулирована в виде задач с практическим содержанием.

Задача 8. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой рёбер найдите параллелепипед наибольшего объёма (рис. 18).

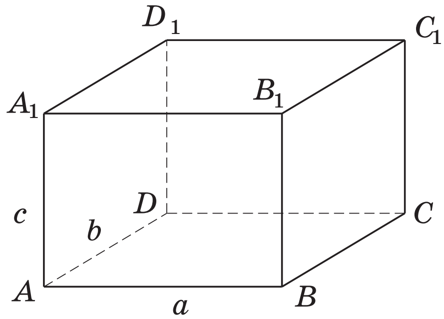


Рис. 18

Р е ш е н и е. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c. По условию сумма $a + b + c$ фиксирована. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб. Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $a = b = c$. Из него следует неравенство $V \le \frac{(a+b+c)^3}{27}$, равенство в котором достигается, если $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед – куб.

Задача 9. Какие размеры должен иметь аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда без одной грани, чтобы при данной площади поверхности S в него вмещался наибольший объём воды (рис. 19)?

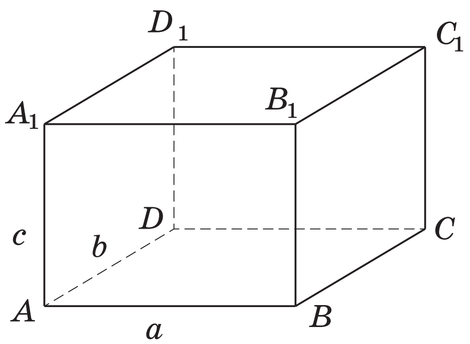


Рис. 19

Р е ш е н и е. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. По условию $ab + 2ac + 2bc = S$. Воспользуемся неравенством Коши

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3},$$

равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = ab$, $y = 2ac$, $z = 2bc$. Получим неравенство

$$\sqrt[3]{4a^2b^2c^2} \le \frac{S}{3}.$$

Из него следует неравенство

$$2V \le \left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

равенство в котором достигается, если $ab = 2ac = 2bc$, то есть в случае

$$a = b = 2c = \sqrt{\frac{S}{3}}.$$

Задача 10. Из прямоугольного листа жести требуется изготовить открытую сверху коробку. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и затем загибают получившиеся края (рис. 20). Найдите стороны вырезаемых квадратов, при которых получившаяся коробка имеет наибольший объём.

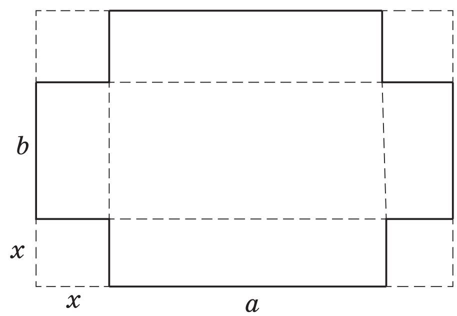


Рис. 20

Р е ш е н и е. Обозначим стороны прямоугольника a и b, а стороны вырезаемых квадратов x. Тогда объём коробки с открытым верхом будет равен $(a - 2x)(b - 2x)x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $12x^2 - 4(a + b)x + ab$. Производная обращается в ноль, если

$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Она меняет знак с плюса на минус при переходе через точку

$$x = \frac{a+b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Следовательно, это значение x является искомым.

Задача 11. Какие размеры должен иметь открытый цилиндрический сосуд, чтобы при данной площади поверхности S в него вмещался наибольший объём воды (рис. 21)?

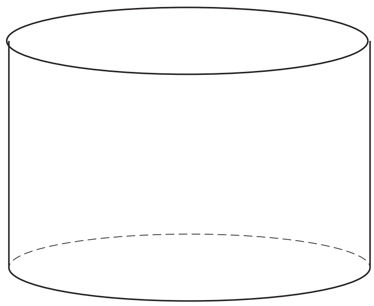


Рис. 21

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а его высота равна y. Тогда $\pi x^2 + 2\pi xy = S$. Откуда

$$y = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{Sx - \pi x^3}{2}.$$

Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна

$$\frac{S - 2\pi x^2}{2}.$$

Производная обращается в ноль, если

$$x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Отсюда находим

$$y = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

Таким образом, искомым цилиндром наибольшего объёма является цилиндр, осевым сечением которого является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой.

Задача 12. Из всех конусов с данной площадью поверхности S найдите конус наибольшего объёма (рис. 22).

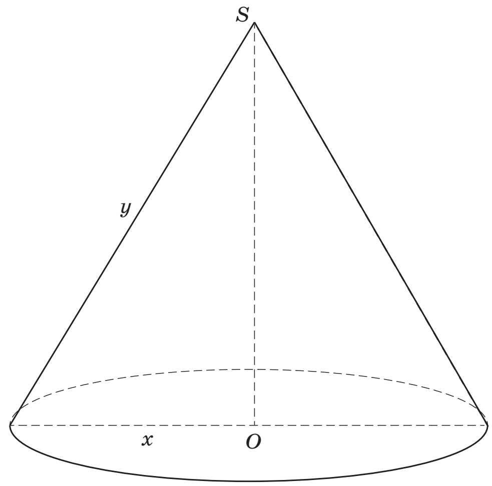


Рис. 22

Решение. Пусть радиус основания конуса равен x, а его образующая равна y. Тогда $\pi x^2 + \pi xy = S$. Откуда

$$y = \frac{S - \pi x^2}{\pi x}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}.$$

Отметим, что объём V будет наибольшим, если наибольшим будет квадрат V^2 этого объёма. Имеем,

$$V^2 = \frac{\pi^2 x^4 (y^2 - x^2)}{9} = \frac{S(Sx^2 - 2\pi x^4)}{9}.$$

Его наибольшее значение принимается, если $x^2 = \dfrac{S}{4\pi}$. Значит, $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. Из формулы $y = \dfrac{S - \pi x^2}{\pi x}$ находим $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. Таким образом, искомым конусом наибольшего объёма является конус, у которого образующая в три раза больше радиуса основания.

Задача 13. Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу диаметром d, найдите параллелепипед наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 23)?

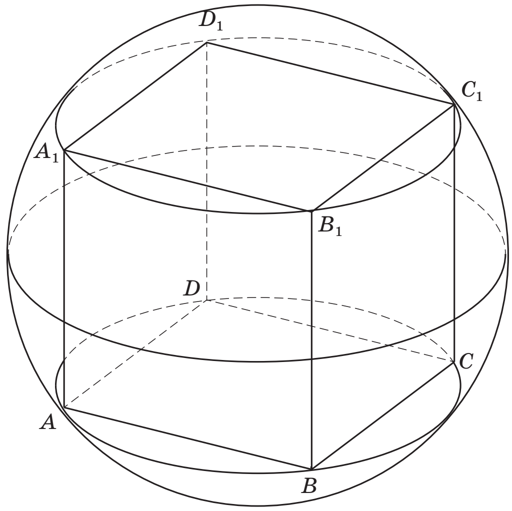


Рис. 23

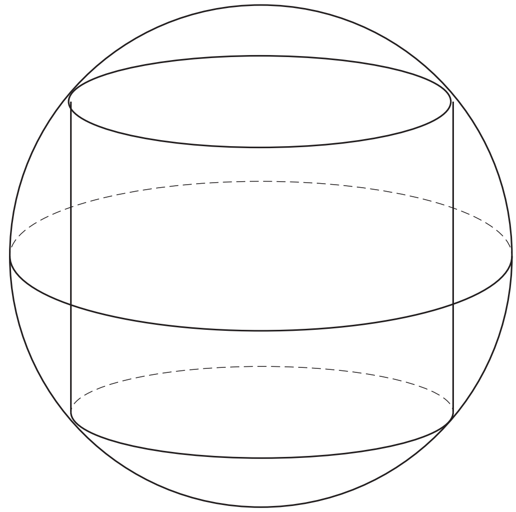


Рис. 24

Р е ш е н и е. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c. По условию $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб (рис. 23). Воспользуемся неравенством Коши

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3},$$

равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$. Получим неравенство

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \frac{d^2}{3}.$$

Из него следует неравенство

$$V \le \frac{d^3}{3\sqrt{3}},$$

равенство в котором достигается, если $a^2 = b^2 = c^2$, то есть в случае $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед – куб, объём которого равен

$$\frac{\sqrt{3}d^3}{9}.$$

Задача 14. Из всех цилиндров, вписанных в сферу радиусом R, найдите цилиндр наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 24)?

Р е ш е н и е. Пусть высота цилиндра равна $2x$. Тогда радиус r основания равен

$$\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Объём V цилиндра равен $\pi(R^2 - x^2) \cdot 2x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $2\pi R^2 - 6\pi x^2$. Производная обращается в ноль, если

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, высота искомого цилиндра равна

$$\frac{2\sqrt{3}R}{3},$$

радиус основания равен

$$\frac{\sqrt{6}R}{3}.$$

Объём этого цилиндра равен

$$\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}.$$

Задача 15. Из всех конусов, вписанных в сферу радиусом R, найдите конус наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 25)?

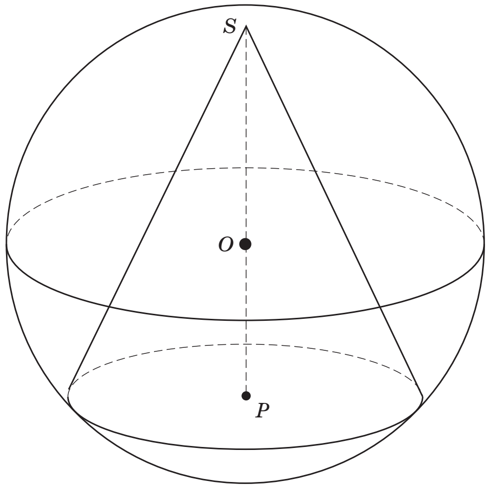


Рис. 25

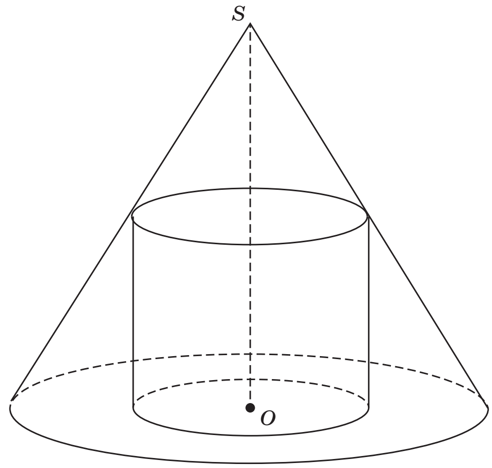


Рис. 26

Решение. Пусть высота конуса равна x. Тогда квадрат радиуса основания равен $R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2$. Объём конуса V равен $\frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2)\cdot x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{4}{3}\pi Rx - \pi x^2$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{4R}{3}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, высота искомого конуса равна $\frac{4R}{3}$, радиус основания равен $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$. Объём этого конуса равен $\frac{32\pi R^3}{81}$.

Задача 16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найдите цилиндр наибольшего объёма (рис. 26).

Решение. Пусть радиус основания данного конуса равен R, а высота равна h. Обозначим радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в данный конус, соответственно x и y. Тогда $\frac{R-x}{R} = \frac{y}{h}$. Следовательно, $y = \frac{h(R-x)}{R}$. Объём цилиндра равен $\pi x^2 y = \frac{\pi x^2 h(R-x)}{R}$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{\pi h}{R}(2Rx - 3x^2)$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{2R}{3}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, радиус основания искомого цилиндра равен $\frac{2}{3}R$.

Литература

1. *Возняк Г.М. Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. *Нагибин Ф.Ф.* Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.

5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. *Шклярский Д.О., Ченцов Н Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970