ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 10 КЛАСС

В.А. Смирнов, e-mail: v-a-smirnov@mail.ru; **И.М. Смирнова,** e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru, Московский педагогический государственный университет	**V.A. Smirnov,** e-mail: v-a-smirnov@mail.ru; **I.M. Smirnova,** e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru, Moscow State Pedagogical University

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 10 класс	**Keywords:** extreme geometry problems, 10-th grade

Аннотация: в работе рассматривается задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 10-м классе	**Abstract:** the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 10-th grade

DOI:

Данная статья является продолжением статей, опубликованных в журнале «Математика в школе», в которых были представлены задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7, 8 и 9 классов.

В ней рассматриваются задачи на нахождение наибольших и наименьших значений расстояний и углов в пространстве, площадей сечений многогранников. Большинство из этих задач являются аналогами соответствующих экстремальных задач на плоскости. Они могут быть использованы при обучении в 10-м классе на основных уроках, при проведении обобщающего повторения и курсов по выбору, организации проектной и исследовательской деятельности учащихся.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

В заключительной статье предлагаемой серии будут рассмотрены экстремальные задачи по геометрии для 11 класса.

Начнём с задач, являющихся пространственными аналогами задач о перпендикуляре и наклонной, которые были рассмотрены в первой статье.

Задача 1. Точка A не принадлежит плоскости β. Среди всех точек этой плоскости найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 1).

Р е ш е н и е. Искомой точкой, расстояние от которой до данной точки A является наименьшим, будет основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β (рис. 2). Для любой другой точки B' этой плоскости отрезок AB' будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB.

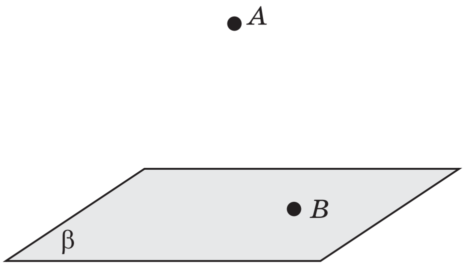


Рис. 1

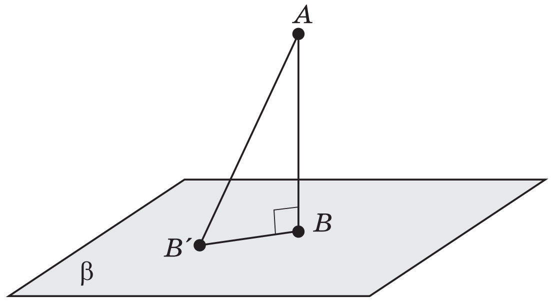


Рис. 2

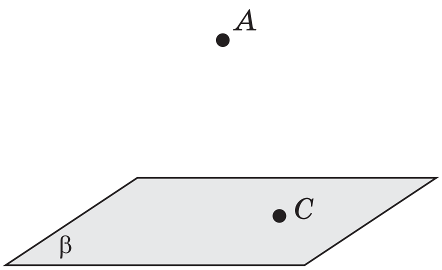


Рис. 3

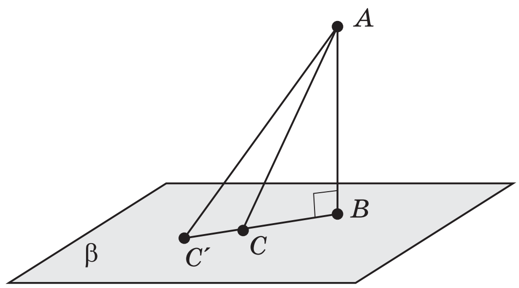


Рис. 4

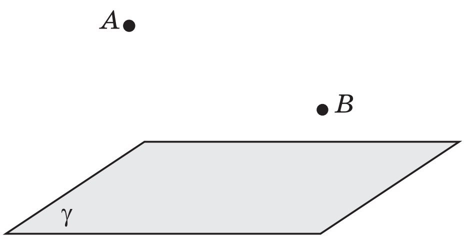


Рис. 5

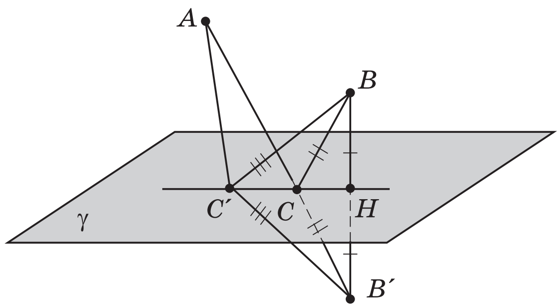


Рис. 6

Задача 2. Точка A не принадлежит плоскости β. Докажите, что не существует точки C на этой плоскости, для которой расстояние AC наибольшее (рис. 3).

Р е ш е н и е. Докажем, что такой точки не существует. Пусть B – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β. Для произвольной точки C этой плоскости рассмотрим точку C', лежащую на прямой BC по ту же сторону от точки B, что и точка C так, что $BC' > BC$ (рис. 4). Так как угол $AC'B$ острый и против большего угла треугольника лежит большая сторона, то сторона AC' треугольника ACC будет больше стороны AC.

Следующая задача является пространственным аналогом задачи Герона.

Задача 3. Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости γ. Найдите такую точку C на этой плоскости, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 5).

Р е ш е н и е. Опустим на плоскость γ перпендикуляр BH и отложим на его продолжении отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка на плоскости γ (рис. 6). Прямоугольные тре-

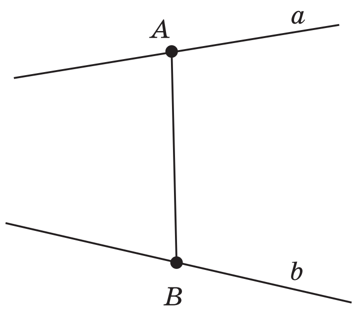


Рис. 7

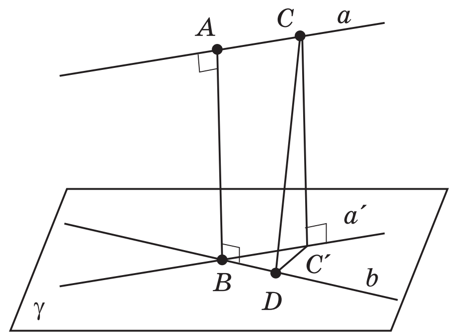


Рис. 8

угольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой, то есть искомая точка C является точкой пересечения прямой AB' с плоскостью γ.

Следующая задача относится к одному из важных свойств общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Задача 4. На данных скрещивающихся прямых a и b найдите точки соответственно A и B, расстояние между которыми наименьшее (рис. 7).

Решение. Искомым отрезком, имеющим наименьшую длину, будет общий перпендикуляр AB к данным прямым a, b (рис. 8). Действительно, пусть C, D – другие точки, принадлежащие этим прямым. Опустим перпендикуляр CC' на прямую a', проходящую через точку B и параллельную прямой a. Прямая CC' будет перпендикулярна плоскости γ, содержащей прямые a' и b. Отрезок CC' будет перпендикуляром к этой плоскости, а отрезок CD – наклонной. Значит, $AB = CC' < CD$.

В следующем важном классе задач представлены задачи на нахождение кратчайших путей по поверхностям многогранников. Общий метод решения этих задач основан на использовании развёрток многогранников.

Задача 5. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$, соединяющего середины рёбер AB и CD (рис. 9).

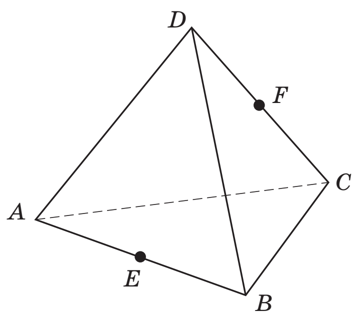
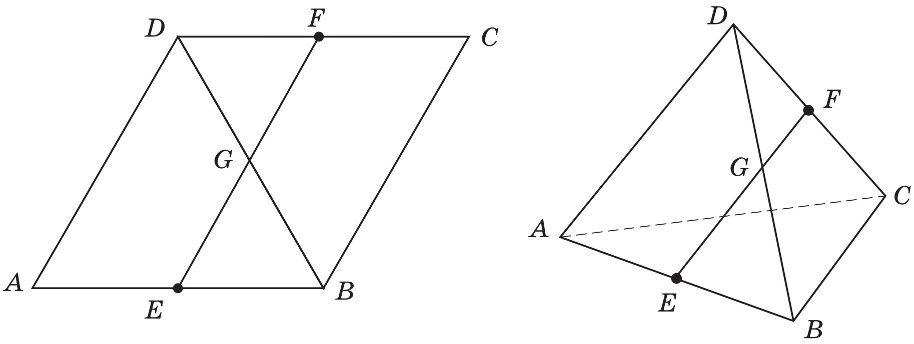


Рис. 9

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображённую на рисунке 10*а*. Соответствующий путь по поверхности данного тетраэдра изображён на рисунке 10*б*. Его длина равна 1.

Задача 6. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, соединяющего вершины A и C_1 (рис. 11).

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней куба, изображённую на рисунке 12*а*. Кратчайшим путём из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответ-



а) *б*)

Рис. 10

ствующий путь по поверхности куба изображён на рисунке 12*б*.

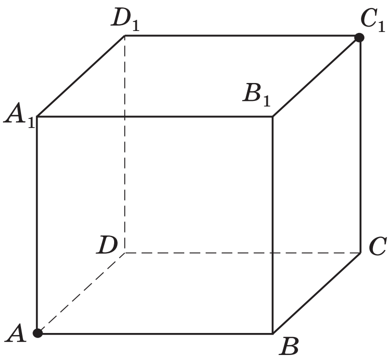


Рис. 11

Заметим, что указанный путь из A в C_1 является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины рёбер BB_1, A_1B_1, A_1D_1, DD_1, CD и BC.

Задача 7. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, соединяющего вершины A и D_1. Все рёбра призмы равны 1 (рис. 13).

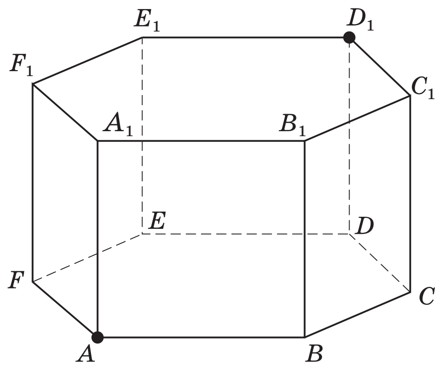
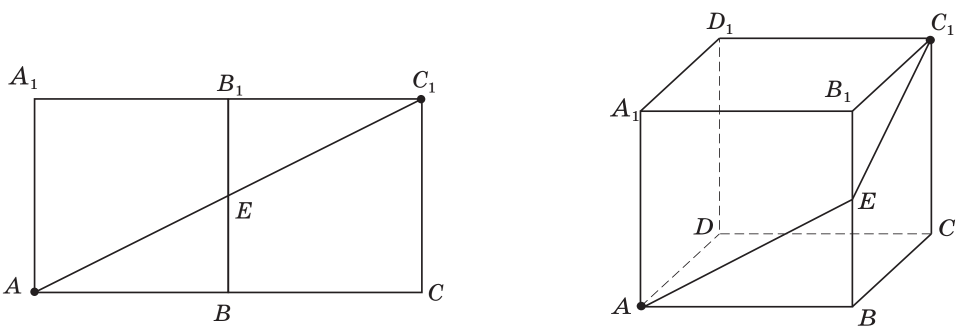


Рис. 13

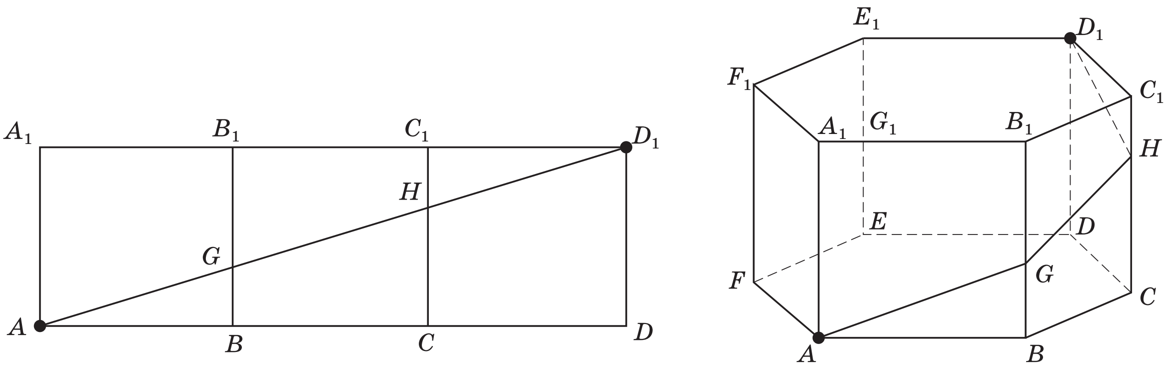
Р е ш е н и е. Рассмотрим развёртку, состоящую из трёх боковых граней призмы, изображённую на рисунке 14*а*.

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD_1 и равна $\sqrt{10}$. Соответствующий путь на по-



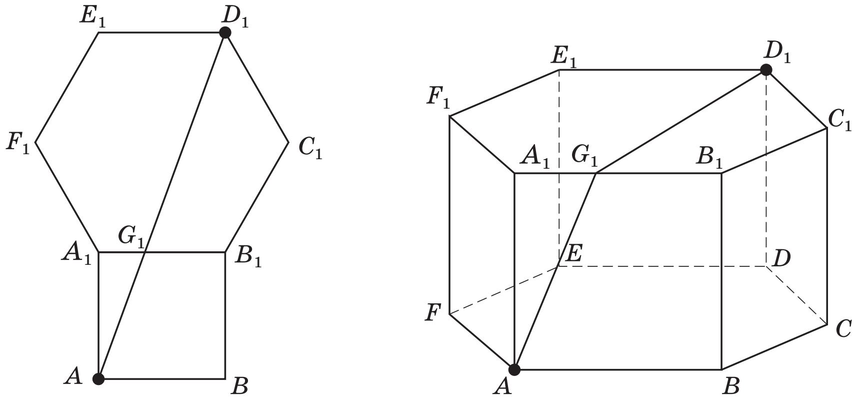
а) *б*)

Рис. 12



а) *б*)

Рис. 14



а) *б*)

Рис. 15

верхности призмы изображён на рисунке 14*б*.

Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развёртка изображена на рисунке 15*а*.

В этом случае кратчайшим путём является отрезок AD_1, длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}} < \sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображён на рисунке 15*б*.

Задача 8. На поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин A, C, B_1 наименьшая (рис. 16). Чему равна эта сумма?

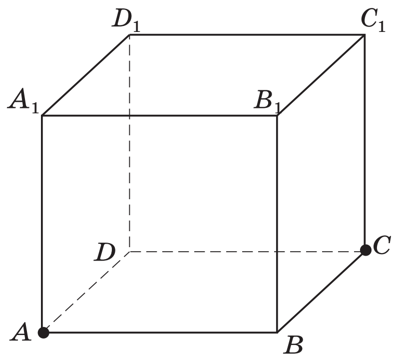
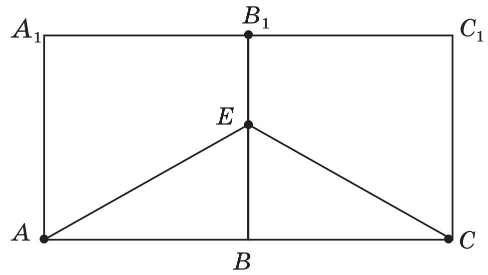


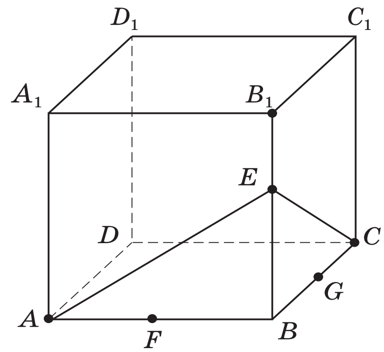
Рис. 16

Р е ш е н и е. Рассмотрим развёртку двух граней куба (рис. 17*а*).

Воспользуемся решением задачи Ферма. Искомой точкой будет такая точка E на ребре BB_1, для которой углы B_1EA и B_1EC равны 120° (рис. 17*б*). Непосредственные вычисления показывают, что



а)



б)

Рис. 17

$BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AE + B_1E + CE = \sqrt{3} + 1$. Аналогичными точками являются точки F и G, для которых $AF = CF = B_1E = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Следующие задачи относятся к нахождению наименьших углов в пространстве. Они аналогичны задачам на нахождение наименьших углов на плоскости, рассмотренным во второй статье.

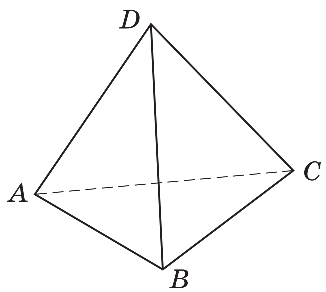


Рис. 18

Задача 9. На поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ найдите такие точки E, из которых ребро AB видно под наименьшим углом, то есть угол AEB наименьший (рис. 18). Чему равен этот угол?

Р е ш е н и е. Искомыми точками являются вершины C и D данного тетраэдра. Углы, под которыми из этих точек видно ребро AB, равны 60°. Докажем, что для других точек E угол AEB будет больше. Если точка E принадлежит грани ABC и отлична от её вершин (рис. 19*а*), то она лежит внутри окружности, описанной около этой грани. Следовательно, угол AEB будет больше угла ACB. Аналогично, доказывается, что для точек E грани ABD, отличных от её вершин, угол AEB будет больше угла ADB.

Если точка E принадлежит ребру CD и отлична от вершин C, D, то стороны AE,

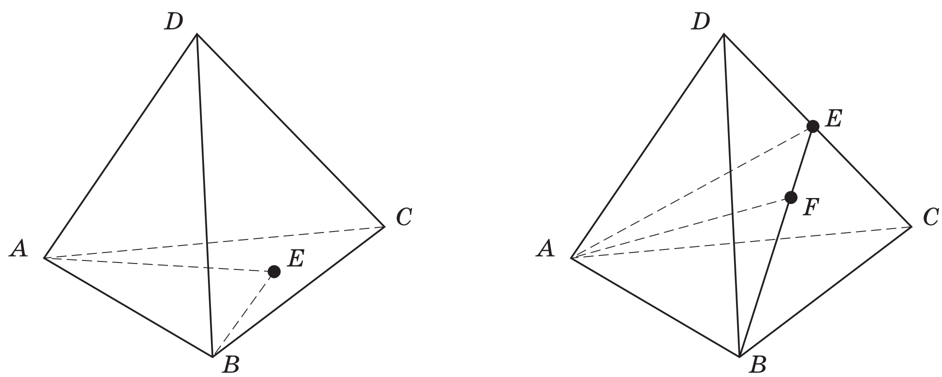


Рис. 19

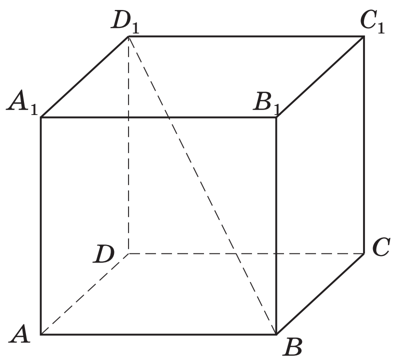


Рис. 20

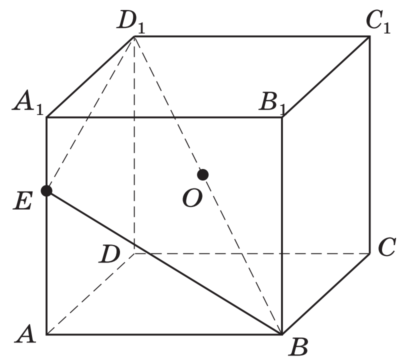


Рис. 21

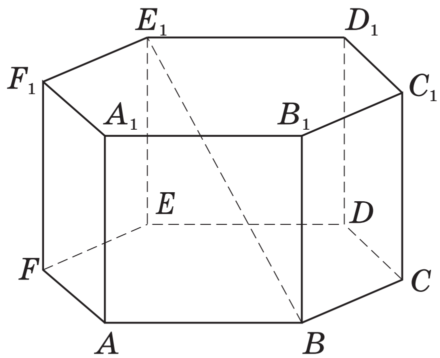


Рис. 22

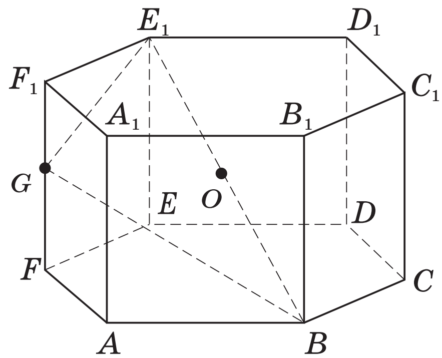


Рис. 23

BE равнобедренного треугольника ABE будут меньше сторон AC, BC треугольника ABC. Следовательно, угол AEB будет больше угла ACB. Если точка F принадлежит стороне BE или стороне AE тре-угольника ABE, то угол AFB будет больше угла AEB, следовательно, больше угла ACB.

Задача 10. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите такие точки E, из которых диагональ BD_1 видна под наименьшим углом (рис. 20), то есть угол BED_1 наименьший. Чему равен этот угол?

Р е ш е н и е. Искомыми точками являются вершины A, C, D, A_1, B_1, C_1 данного куба. Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BD_1, равны 90° . Докажем, что для других точек E угол BED_1 будет больше. Рассмотрим сферу с диаметром BD_1. Все вершины куба принадлежат этой сфере, а остальные точки E лежат внутри неё. Следовательно, эти точки лежат внутри соответствующей большой окружности сферы. Значит, угол BED_1 больше 90° (рис. 21).

Задача 11. На поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1.C_1D_1E_1F_1$ найдите такие точки G, из которых диагональ BE_1 видна под наименьшим углом (рис. 22), то есть угол BGE_1 наименьший. Чему равен этот угол?

Р е ш е н и е. Искомыми точками являются вершины A, C, D, E, F, A_1, B_1, C_1, D_1, F_1 данной призмы. Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BE_1, равны 90° . Докажем, что для других точек G угол BGE_1 будет больше. Рассмотрим сферу с диаметром BE_1. Все вершины призмы принадлежат этой сфере, а остальные точки G лежат внутри неё. Следовательно, эти точки лежат внутри соответствующей большой окружности сферы. Значит, угол BGE_1 больше 90° (рис. 23).

Следующие задачи на нахождение наибольших и наименьших значений относятся к теме «Построение сечений многогранников».

Задача 12. Найдите сечение правильного единичного тетраэдра, пересекающее все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 24). Чему равен этот периметр?

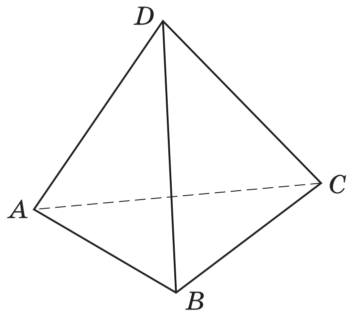
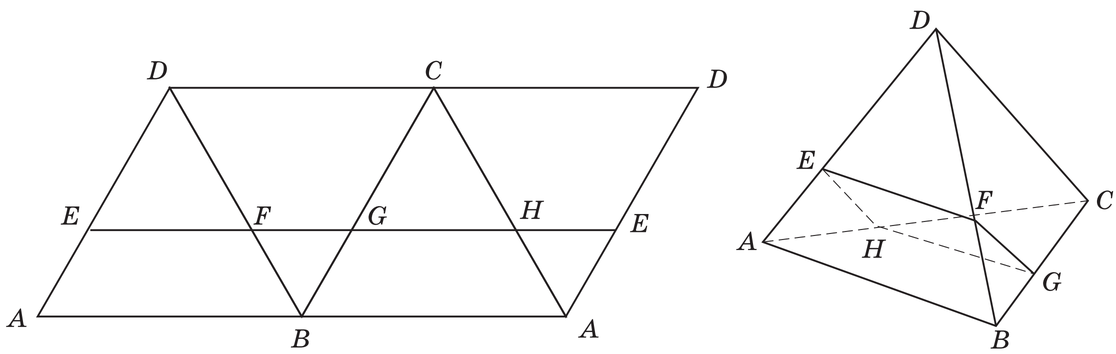


Рис. 24

Р е ш е н и е. Рассмотрим развёртку тетраэдра (рис. 25*а*). Стороны четырёхугольника $EFGH$, являющегося сечением тетраэдра (рис. 25*б*), образуют на этой развёртке ломаную. Длина этой ломаной будет наименьшей, если все её вершины принадлежат одной прямой. Это будет, если стороны четырёхугольника $EFGH$ параллельны соответствующим рёбрам тетраэдра. Периметры таких сечений равны 2.

Задача 13. Найдите сечение правильного единичного тетраэдра $ABCD$, параллельное двум противолежащим рёбрам DA и BC, наибольшей площади (рис. 26). Чему равна его площадь?

Р е ш е н и е. В сечениях правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостями, параллельными прямым AD и BC, получаются прямоугольники $EFGH$ с фиксированным периметром, равным сумме рёбер AD и BC. Из таких прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат, получаю-



***а*)** ***б*)**

Рис. 25

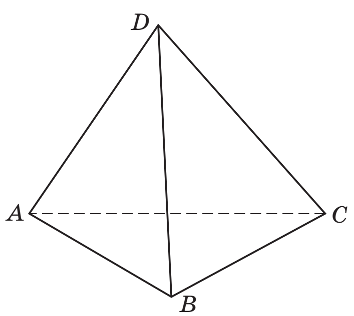


Рис. 26

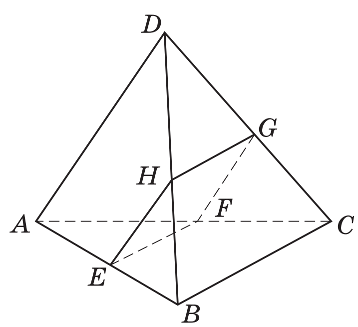


Рис. 27

щийся в сечении, проходящим через середину ребра AB (рис. 27). Его площадь равна $\frac{1}{4}$.

Задача 14. Найдите сечение правильного тетраэдра $ABCD$, проходящее через середины двух противолежащих рёбер, наименьшей площади (рис. 28).

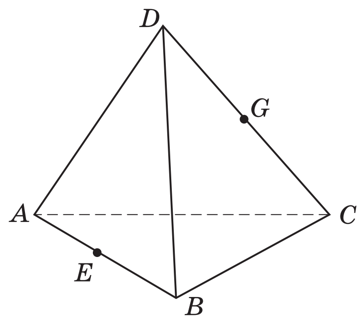


Рис. 28

Решение. Рассмотрим сечение $EFGH$ правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины E, G соответственно рёбер AB и CD. Проведём диагональ EG и опустим на неё перпендикуляры FF' и HH' (рис. 29*а*). Площадь четырёхугольника $EFGH$ равна

$$\frac{1}{2}EG(FF' + HH').$$

Она будет наименьшей, если наименьшей будет сумма $FF' + HH'$. Эта сумма будет наименьшей, если отрезки FF', HH' будут наименьшими, то есть будут общими перпендикулярами соответственно AC и EG, BD и EG. Это будет, если точки F и H являются серединами этих рёбер. Искомым четырёхугольником наименьшей площади является квадрат $EFGH$ (рис. 29*б*).

Задача 15. Найдите сечение единичного куба, пересекающее все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 30). Чему равен этот периметр?

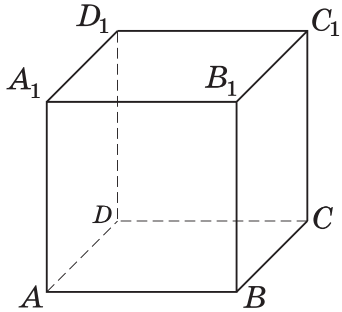


Рис. 30

Решение. Рассмотрим развёртку куба (рис. 31*а*). Стороны шестиугольника $EFGHIJ$, являющегося сечением куба (рис. 31*б*), образуют на этой развёртке ломаную. Длина этой ломаной будет наименьшей, если все её вершины принадлежат одной прямой. Это будет, если сечение перпендикулярно диагонали куба. Периметры таких сечений равны $3\sqrt{2}$.

Задача 16. Найдите сечение куба

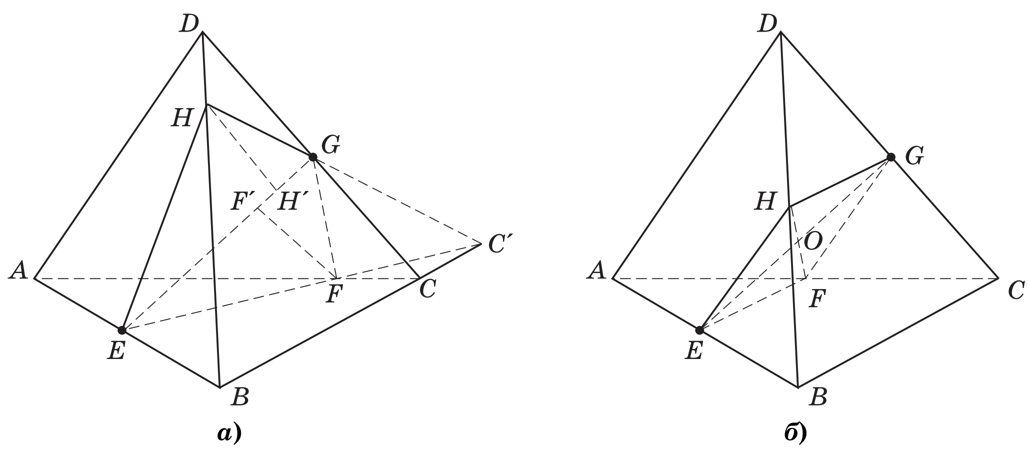
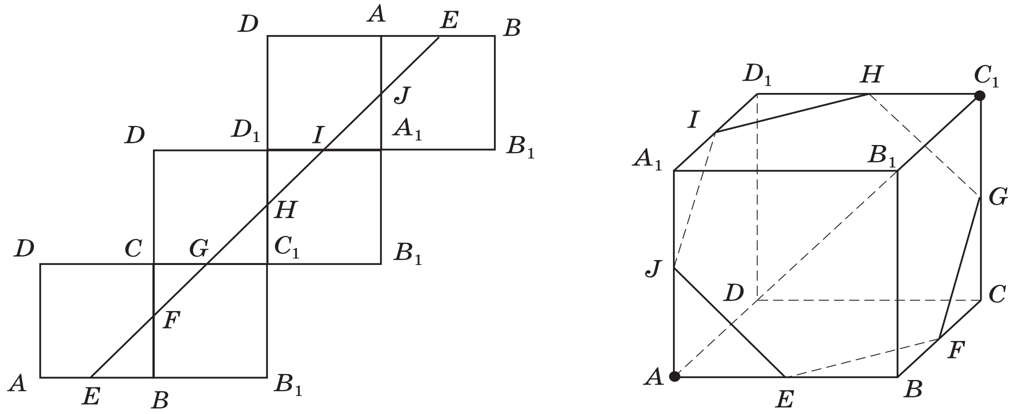


Рис. 29



а) *б*)

Рис. 31

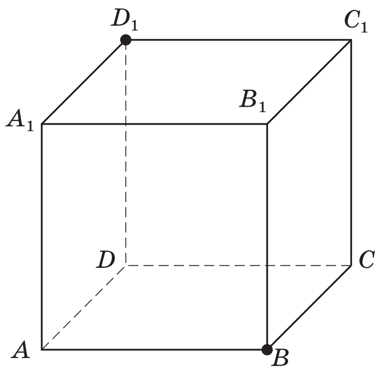


Рис. 32

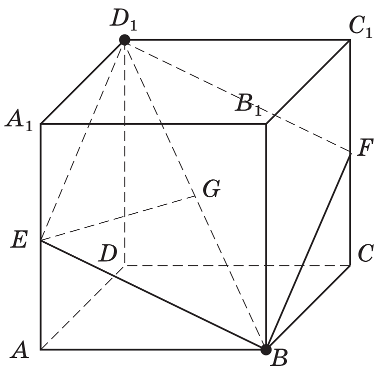


Рис. 33

$ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через две противолежащие вершины B и D_1, наименьшей площади (рис. 32). Найдите эту площадь для единичного куба.

Р е ш е н и е. Сечением куба $ABCDA_1B_1$-C_1D_1 плоскостью, проходящей через вершины B, D_1 и точку E на ребре AA_1, будет параллелограмм BFD_1E. Из точки E опустим перпендикуляр EG на прямую BD_1. Площадь сечения равна $BD_1 \cdot EG$. Она будет наименьшей, если наименьшим будет отрезок EG, то есть если этот отрезок будет общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BD_1. Это будет, если точка E является серединой ребра AA_1. Таким образом, искомым сечением наименьшей площади является ромб BFD_1E (рис. 33). Для единичного куба его площадь равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Литература

1. *Возняк Г.М. Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. *Нагибин Ф.Ф.* Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.

5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.