О РАЗВИТИИ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
Ключевые слова: критическое мышление, геометрия.
Аннотация: в работе рассматриваются возможности школьного курса геометрии для развития критического мышления учащихся.

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova
Moscow state pedagogical university
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
Keywords: critical thinking, geometry.
Annotation: the paper discusses the possibilities of the school geometry course for the development of critical thinking of students.

Под критическим мышлением будем понимать способ мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения, использует методы познания, которые отличаются контролируемостью, обоснованностью и целенаправленностью [1].

Это согласуется с высказываниями великого французского философа и математика Рене Декарта, который считал, что только принцип «Сомневайся во всём» в состоянии помочь нам познать мир.

Сегодня критическое мышление необходимо каждому человеку в связи с огромным потоком информации, распространяемым через средства массовой информации, интернет и т. п.

Задача развития критического мышления учащихся является одной из важных задач обучения, в частности математике. К сожалению, в школе этому вопросу уделяется крайне мало внимания.

В то же время, задачи, использующие критическое мышление, предлагаются на основном государственном экзамене (ОГЭ) и на едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике.

Отметим, что в середине прошлого века было издано несколько замечательных книг, посвящённых: ошибкам в математических рассуждениях, например [2], [3]; зрительным иллюзиям [4]; софизмам [5] и др.

Мы предлагаем включать в обучение геометрии задачи из этих книг, а также другие задачи на формирование следующих умений учащихся, которые, на наш взгляд, будут способствовать развитию их критического мышления.

1. Распознавать конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям.

2. Избегать ошибок в оценке геометрических величин.

3. Устанавливать некорректность формулировок, истинность и ложность утверждений.

4. Понимать, на какие аксиомы, свойства и теоремы опирается доказательство данного утверждения.

5. Находить ошибки в формулировках и доказательствах.

6. Приводить контрпримеры.

Приведём примеры таких задач, распределённые по классам.

7 класс

1. Не используя линейку, скажите, какие две линии a и b или a и c на рисунке 1 изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

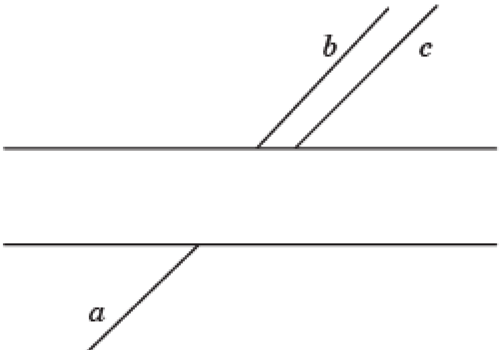


Рис. 1

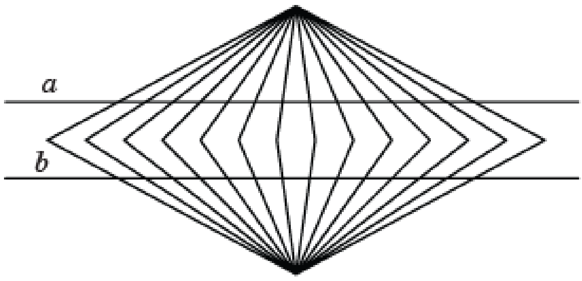


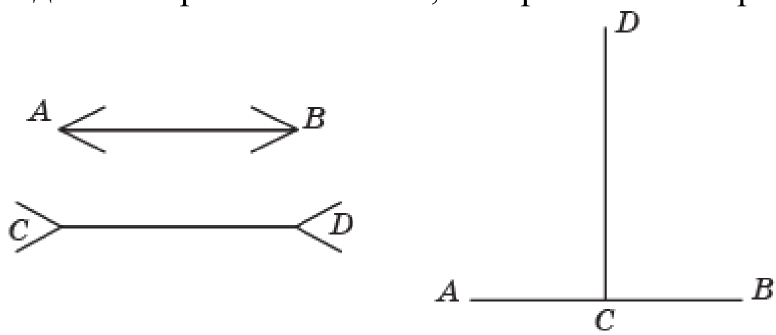
Рис. 2

Ответ. Линии a и c изображают одну и ту же прямую.

2. Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b, изображённые на рисунке 2, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

Ответ. Линии a и b являются прямыми.

3. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 3.



а) б)

Рис. 3

Ответ. а), б) Длины отрезков AB и CD равны.

4. Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения.

Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

«Доказательство». Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 4).

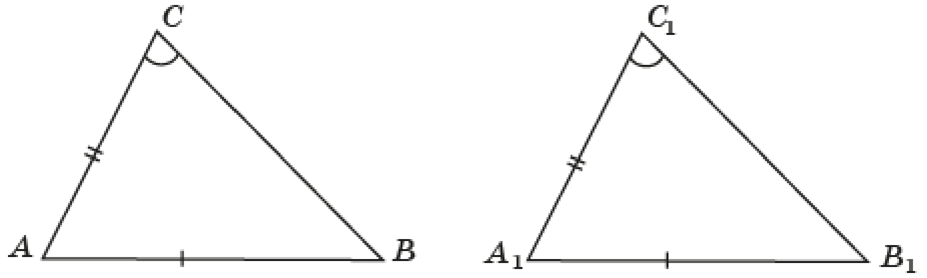


Рис. 4

Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 5).

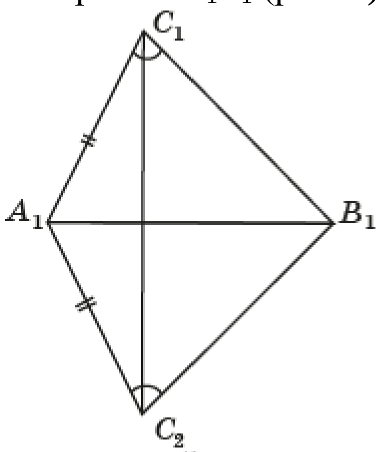


Рис. 5

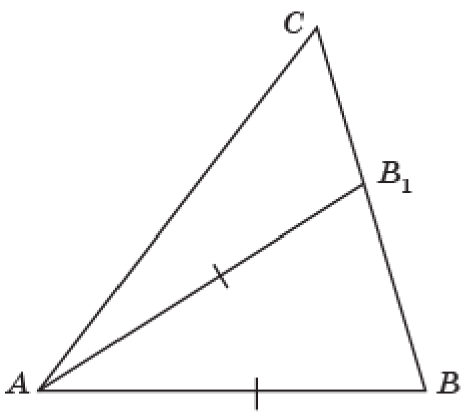


Рис. 6

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2$ и $B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

На самом деле, это утверждение неверно. Пример приведён на рисунке 6. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них $AB = AB_1$, AC – общая сторона, угол C общий.

5. Верно ли, что если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой из их общей вершины другого треугольника, то такие треугольники равны?

Решение. Нет, неверно. Пример приведён на рисунке 7. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них AC – общая сторона, $BC = B_1C$, CH – общая высота.

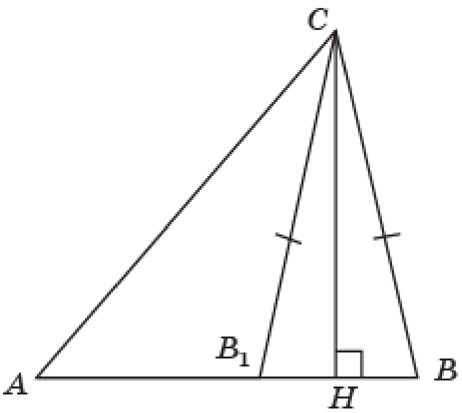


Рис. 7

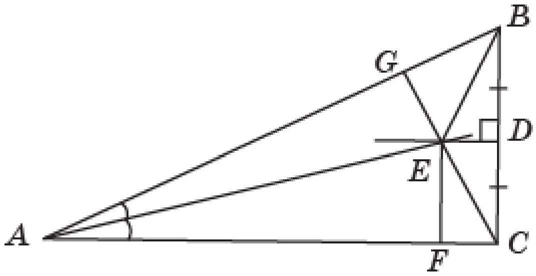


Рис. 8

6. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.

Пусть *ABC* – прямоугольный треугольник (угол *C* – прямой) (рис. 8). Докажем, что гипотенуза *AB* равна катету *AC*.

Проведём биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к стороне *BC*. Обозначим через *E* их точку пересечения. Соединим отрезками точку *E* с вершинами *B* и *C*. Из точки *E* опустим перпендикуляры *EF* и *EG* соответственно на стороны *AC* и *AB* треугольника *ABC*. Так как точка *E* принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку *BC*, то отрезки *BE* и *CE* равны. Так как точка *E* принадлежит биссектрисе угла *A*, то отрезки *EF* и *EG* равны. Прямоугольные треугольники *BEG* и *CEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *BG* и *CF* равны. Прямоугольные треугольники *AEG* и *AEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *AG* и *AF* равны. Складывая отрезки *AG* и *BG, AF* и *CF*, получаем равенство гипотенузы *AB* и катета *AC*.

Решение. Найти ошибку поможет программа GeoGebra, о которой рассказывалось в работе [6]. В ней можно построить прямоугольный треугольник *ABC*, провести биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к отрезку *BC*, найти их точку пересечения *E*, опустить из неё перпендикуляры на прямые, содержащие стороны *AC* и *AB* (рис. 9).

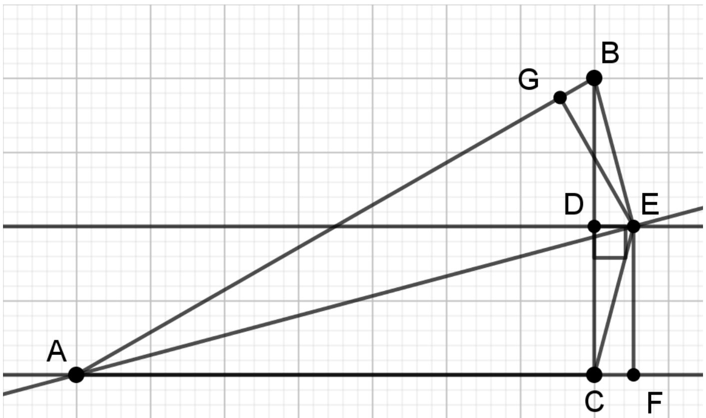


Рис. 9

На этом рисунке видно, что точка E расположена вне треугольника ABC, причём, основание F перпендикуляра, опущенного из неё на прямую AC, принадлежит продолжению стороны AC, а основание G перпендикуляра, опущенного на прямую AB, принадлежит стороне AB.

Так как сторона AB равна сумме отрезков AG и BG, а сторона AC равна разности отрезков AF и FC, то из равенства отрезков $AG = AF$ и $BG = CF$ не следует равенство сторон AB и AC треугольника ABC.

Установим указанное расположение точки E, не опираясь на рисунок. Для этого с центром в точке A и радиусом AB проведём окружность. Обозначим H её точку пересечения с лучом AC. Проведём отрезок BH (рис. 10).

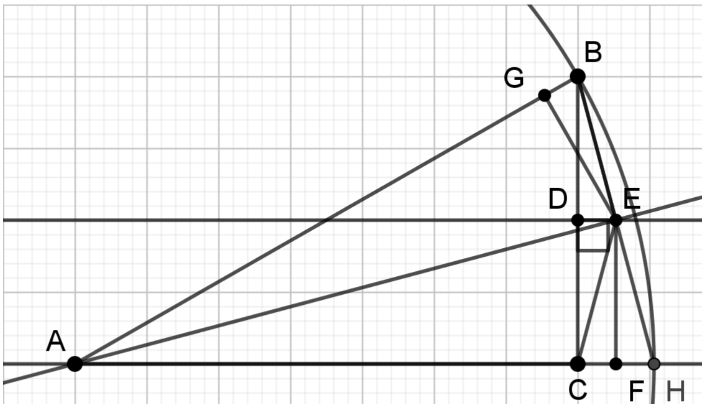


Рис. 10

В треугольнике ABH $AB = AH$. Следовательно, биссектриса угла A пересечёт отрезок BH в его середине E, которая расположена вне треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BC содержит среднюю линию треугольника BCH, следовательно, пересекает отрезок BH в точке E. Таким образом, точка E является точкой пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к отрезку BC. Так как точка E расположена вне треугольника ABC, то основание F перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC, будет принадлежать продолжению стороны AC, а так как отрезок AE меньше отрезка AB, то основание G перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AB, будет принадлежать стороне AB.

7. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что прямой угол равен тупому углу.

Пусть $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 11), в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$,

$\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов *ADC* и *BCD*, т. е. получаем, что прямой угол *ADC* равен тупому углу *BCD*.

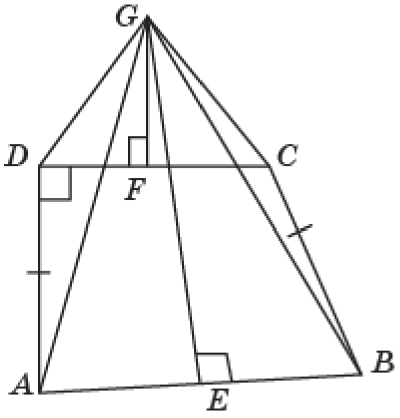


Рис. 11

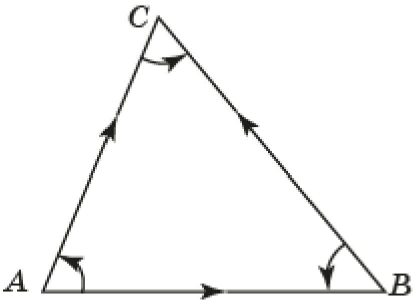


Рис. 12

Решение аналогично решению задачи 6.

8. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма углов треугольника равна 180°.

Рассмотрим треугольник *ABC* (рис. 12). Зададим на прямой *AB* направление (указано стрелкой). Повернём прямую *AB* вокруг точки *A* на угол *A*. Она перейдёт в прямую *AC*. Повернём прямую *AC* вокруг точки *C* на угол *C*. Она перейдёт в прямую *BC*. Повернём прямую *BC* вокруг точки *B* на угол *B*. Она перейдёт в прямую *BA* с направлением, противоположным начальному направлению прямой *AB*. Таким образом, прямая *AB* повернулась на 180°. С другой стороны, этот поворот на 180° складывается из поворотов на углы *A*, *B* и *C*. Следовательно, сумма углов *A*, *B* и *C* треугольника *ABC* равна 180°.

Решение. Ошибка в этом «доказательстве» связана с тем, что оно не использует аксиому параллельных, а без этого данное утверждение неверно. Например, оно неверно в геометрии Лобачевского.

8 класс

9. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то две другие стороны параллельны.

Пусть *ABCD* – четырёхугольник, у которого равны стороны *AD* и *BC* (рис. 13).

Проведём серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *CD*. Если они параллельны, то стороны *AB* и *CD* параллельны, так как они будут перпендикулярны параллельным прямым. Если эти серединные перпендикулярны не параллельны, то обозначим через *G* их общую точку. Прямоугольные треугольники *AEG* и *BEG* равны по двум катетам.

Следовательно, $AG = BG$, $\angle AGE = \angle BGE$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle DGF = \angle CGF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle AGD = \angle BGC$. Так как сумма всех рассмотренных углов равна 360°, то из равенства их пар следует, что сумма углов AGE, AGD и DGF равна 180°. Значит, серединные перпендикуляры совпадают. В этом случае стороны AB и CD будут перпендикулярны одной прямой, следовательно, параллельны.

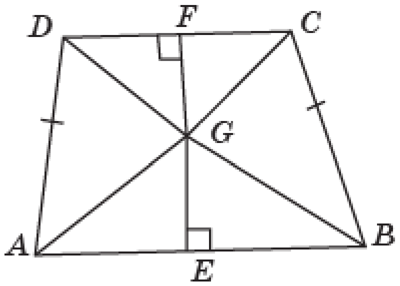


Рис. 13

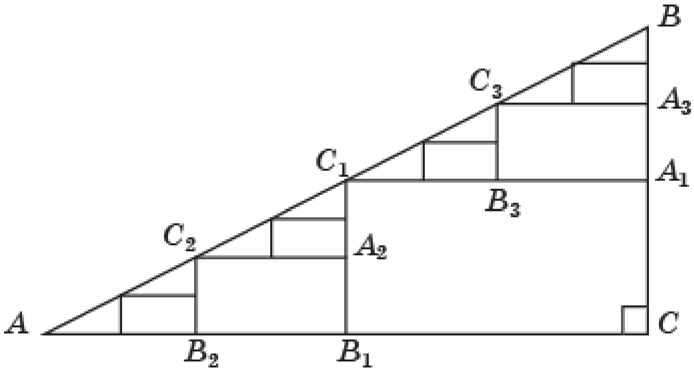


Рис. 14

Решение аналогично решению задачи 7.

9 класс

10. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна длине его гипотенузе.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C – прямой) (рис. 14). Из середины C_1 гипотенузы AB опустим перпендикуляры C_1A_1 и C_1B_1 соответственно на катеты BC и AC. Длина ломаной $AB_1C_1A_1B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Из середин C_2, C_3 отрезков соответственно AC_1, C_1B опустим перпендикуляры C_2A_2, C_2B_2, C_3A_3, C_3B_3 на соответствующие катеты прямоугольных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B. Длина ломаной $AB_2C_2A_2C_1B_3C_3A_3B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Продолжая этот процесс, будем получать ломаные, приближающиеся к гипотенузе. Длины этих ломаных будут стремиться к длине гипотенузы. Так как длины этих ломаных остаются равными сумме длин катетов AC и BC, то длина гипотенуза AB будет равна сумме длин катетов AC и BC.

Этот метод «доказательства», на первый взгляд, аналогичен тому, как определяется длина окружности. Разница состоит в том, что в определении длины окружности берутся правильные многоугольники, вписанные в окружность, т. е. все их вершины принадлежат окружности, а в предложенном «доказательстве» ломаные не являются вписанными в гипотенузу. Именно это и даёт неверный результат.

11. Одна сторона треугольника равна 5. Синус угла, прилежащего к этой стороне, равен 0,6. Высота, проведённая из вершины этого угла, равна 4, Найдите сторону треугольника, противолежащую этому углу.

Трудность в решении этой задачи состоит в том, что для указанных данных возможны два треугольника *ABC* и ABC_1, изображённые на рисунке 15. Для них *AB* = 5, sin *A* = 0,6, высоты *AC* и *AG* равны 4.

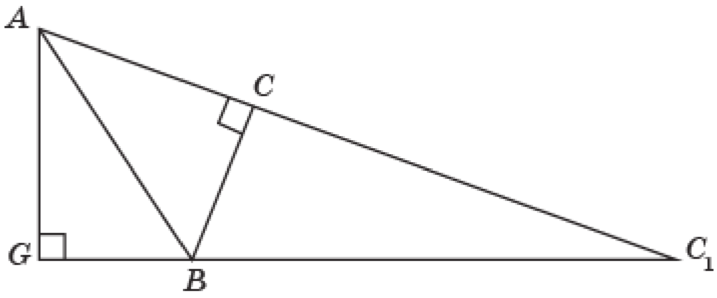


Рис. 15

Легко видеть, что для треугольника *ABC BC* = 3. Обозначим через *x* сторону BC_1 треугольника ABC_1. Из подобия треугольников BCC_1 и AGC_1 получаем равенство $\frac{BC_1}{BC} = \frac{AC_1}{AG}$. Следовательно, имеем уравнение $\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{4}$. Решая его, находим $x = 10\frac{5}{7}$. Значит, $BC_1 = 10\frac{5}{7}$.

Ответ. Сторона треугольника равна или 3, или $10\frac{5}{7}$.

12. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что «64 = 65».

Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. разрежем его на части, как показано на рисунке 16, а. Сложим из этих частей прямоугольник (рис. 16, б). Его площадь равна 65. Следовательно, «64 = 65».

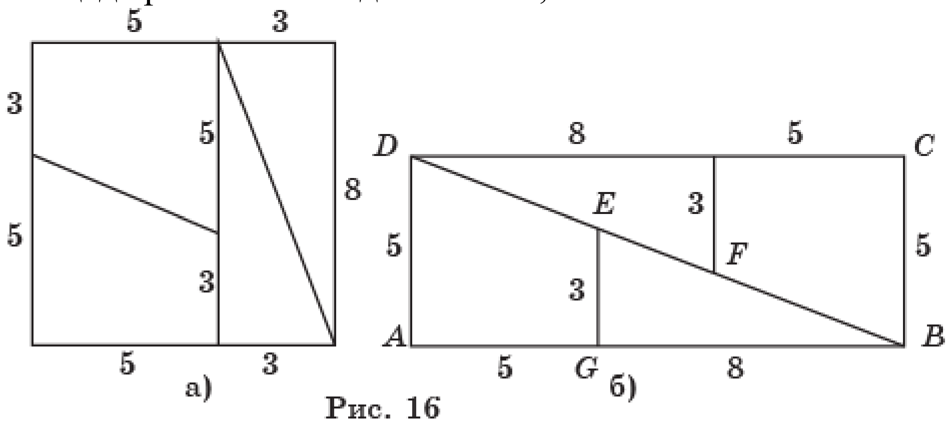


Рис. 16

На самом деле, точки *D, E, F, B* (рис. 16, б) не принадлежат одной прямой. Если бы это было так, то треугольники *ABD* и *GBE* были бы подобны. Следовательно, выполнялось бы равенство $\frac{AD}{AB} = \frac{GE}{GB}$, которое не выполняется, т. к. $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$. Четырёхугольник *DEBF* является параллелограммом, площадь которого равна 1.

10 класс

13. Как в пространстве расположены прямые *DE* и *FG* (рис. 17)?

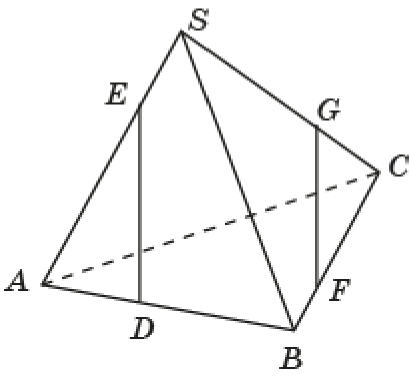


Рис. 17

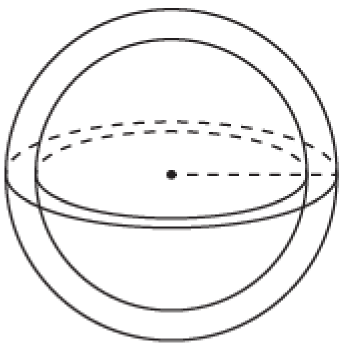


Рис. 18

Ответ. Скрещиваются.

11 класс

14. Толщина кожуры апельсина составляет одну пятую его радиуса (рис. 18). Оцените, какую часть объёма апельсина занимает его кожура.

Решение. Мякоть апельсина имеет форму шара, радиус которого равен $\frac{4}{5}$ радиуса апельсина. Следовательно, объём мякоти составляет $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \approx 0{,}5$ апельсина. Значит, объём кожуры также составляет половину объёма апельсина.

Литература

1. Халперн Д. Психология критического мышления. – М. –СПб.: Питер, 2000.
2. Брадис В.М. и др. Ошибки в математических рассуждениях. – М.: Учпедгиз, 1959.
3. Уемов А.И. Логические ошибки. – М.: Госполитиздат, 1958.
4. Литцман В. Где ошибка? – М.: Физматлит, 1962.
5. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.
6. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Как сделать изучение теорем геометрии более эффективным? // Математика в школе. – 2017. – № 3. – С. 34-39.