И.М.Смирнова, В.А.Смирнов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА КАВАЛЬЕРИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Тема «Объем пространственных фигур» является одной из наиболее сложных в курсе геометрии старших классов. Например, доказательство формулы объема прямоугольного параллелепипеда ($V = abc$) в учебниках [1], [2] занимает более страницы текста, тем не менее, оно не является строгим доказательством, поскольку строгих определений понятия объема и произведения действительных чисел в школьном курсе математики не дается. Эти определения, в той или иной степени, используют понятие предела и выходят за рамки школьного курса математики.

Попытки научить школьников воспроизводить «доказательство» формулы объема прямоугольного параллелепипеда могут привести к серьёзным негативным последствиям. В этом случае смешиваются строгие доказательства и нестрогие пояснения, что отрицательно сказывается на развитии логического мышления учащихся. У учеников могут создаться ложные представления о математике и математических доказательствах. Даже у хороших учеников может появиться комплекс неполноценности, связанный с непониманием текста, написанного в учебнике.

Как же поступать в такой ситуации? За ответом на этот вопрос можно обратиться к истории. В Древней Греции вычислением объемов занимались Демокрит, Евдокс, Архимед и мн. др. Им были известны не только формула объема прямоугольного параллелепипеда, но и формулы объема призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара. Произведение действительных чисел появилось значительно позже, примерно через двадцать веков, на основе геометрических представлений об измерении площади и объема.

В современных курсах высшей математики математических факультетов университетов также предпочитают не доказывать формулу объема прямоугольного параллелепипеда, а принимают ее за определение. Далее определяют объем элементарных фигур (фигур, составленных из прямоугольных параллелепипедов) как сумму объемов входящих в нее параллелепипедов. После этого, с использованием верхней и нижней граней или предела, определяют объем (меру Жордана или меру Лебега) для произвольных пространственных фигур.

Таким образом, доказательство формулы объема прямоугольного параллелепипеда не является необходимым ни с исторической, ни с современной точки зрения. Вполне приемлемым является, на наш взгляд, приведение этой формулы без доказательства, или доказательство ее только для случая рациональных a, b, c, со ссылкой на то, что ее строгое доказательство для случая действительных a, b, c выходит за рамки школьного курса математики.

Учащиеся должны понимать, где имеется строгое определение и строгое доказательство, а где этого нет. В курсе геометрии есть несколько таких место, в которых строгие определения и доказательства выходят за рамки школьного курса. Среди них теорема о пропорциональных отрезках, длина окружности, площадь прямоугольника, объем прямоугольного параллелепипеда и др.

С выводом формулы объема прямоугольного параллелепипеда трудности изучения объема пространственных фигур не заканчиваются. Так, для вывода формулы объема призмы в учебнике [1] сначала рассматривается случай прямой призмы, в основании которой прямоугольный треугольник, затем случай прямой призмы, в основании которой произвольный треугольник, затем случай прямой призмы, в основании которой произвольный выпуклый многоугольник. Для вывода формулы объема прямого цилиндра используется предел последовательности, а для вывода формулы объема наклонной призмы используется интеграл. В дальнейшем интеграл используется также для вывода формул объема пирамиды, конуса и шара. В учебнике [2] предел последовательности используется для вывода формул объемов пирамиды, цилиндра и конуса. Для вывода формулы объема шара используется интеграл.

Конечно, строгие определения предела последовательности и интеграла выходят за рамки школьного курса математики, что затрудняет освоение учащимися темы «Объем пространственных фигур.

Здесь мы рассмотрим метод нахождения объемов пространственных фигур, предложенный в учебнике [3] и основанный на использовании принципа Кавальери. Этот метод позволяет вывести все необходимые формулы объемов пространственных фигур без использования предела или интеграла, сократить количество основных теорем и формул, сделать доказательства более наглядными и доступными, развить пространственные представления учащихся.

Принцип Кавальери. Если две фигуры Φ_1 и Φ_2 можно расположить в пространстве так, что в сечениях их плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 1), то объемы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2, составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 1). Так как соответствующие слои имеют одинаковую площадь и толщину, то их объемы равны. Поскольку объемы фигур равны сумме объемов составляющих их слоев, то равны объемы и самих фигур.

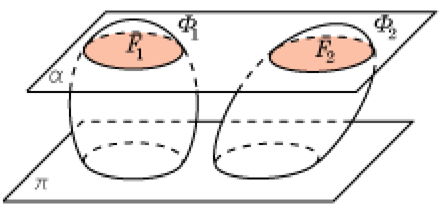

Рис. 1

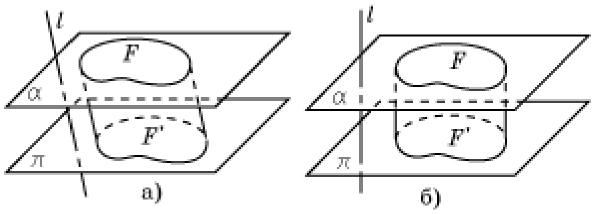

Рис. 2

Для нахождения объемов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью дадим определение обобщенного цилиндра.

Пусть α и π - две параллельные плоскости, l - пересекающая эти плоскости прямая; F – фигура на одной из этих плоскостей, F' – ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l (рис. 2, а). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть обобщенным цилиндром. Фигуры F и F' называются основаниями, а расстояние между плоскостями оснований называют высотой обобщенного цилиндра.

В случае, если в определении обобщенного цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям α и π, то обобщенный цилиндр называется прямым (рис. 2, б). В противном случае обобщенный цилиндр называется наклонным.

Заметим, что частным случаем обобщенного цилиндра является призма.

В случае, если основание F обобщенного цилиндра является кругом, то обобщенный цилиндр называется круговым.

Теорема 1. Объем обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство. Пусть Φ – обобщенный цилиндр, площади основания S и высотой h. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, для ребер a, b, c которого выполняются равенства: $ab = S$, $c = h$, и прямоугольник со сторонами a, b расположен в плоскости π основания обобщенного цилиндра (рис. 3). В сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью α, параллельной плоскости π, получается прямоугольник со сторонами a, b. В сечении этой плоскостью обобщенного цилиндра получается фигура, равная основанию. Таким образом, площади сечений равны и, значит, равны объемы прямоугольного параллелепипеда и обобщенного цилиндра, т.е. для объема обобщенного цилиндра имеет место формула

$$V = S \cdot h.$$

В частности, объем кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 h.$$

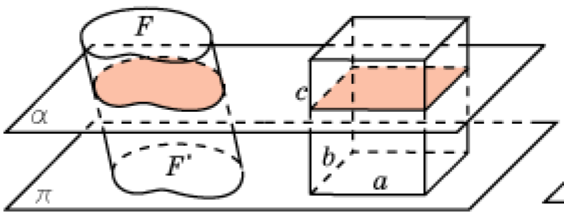

Рис. 3

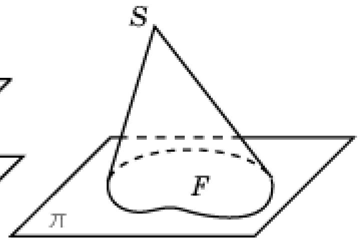

Рис. 4

По аналогии с определением обобщенного цилиндра дадим определение обобщенного конуса, позволяющее объединить в один класс пирамиды и круговые конусы.

Пусть F - фигура на плоскости π, и S - точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть обобщенным конусом (рис. 4). Фигура F называется основанием, точка S - вершиной обобщенного конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины обобщенного конуса на плоскость основания, называется высотой обобщенного конуса.

В случае, если F является кругом, обобщенный конус называется круговым. Если высота кругового конуса проходит через центр основания, то такой конус называется прямым круговым. Заметим, что частным случаем обобщенного конуса является также пирамида.

Используя принцип Кавальери, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если два обобщенных конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.

Доказательство. Пусть обобщенные конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости π (рис. 5). Проведем плоскость, параллельную плоскости π, на расстоянии x от нее, $0 \le x \le h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x):h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2S$, $S_2 = k^2S$ и, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы обобщенных конусов Φ_1 и Φ_2 равны.

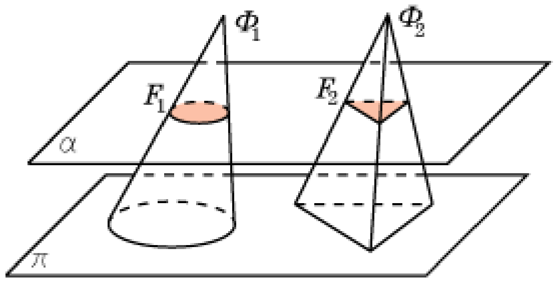

Рис. 5

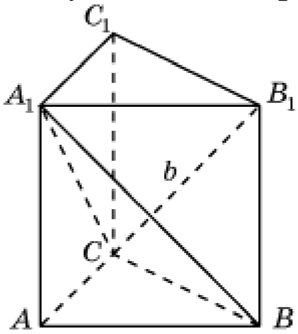

Рис. 6

Применим доказанную теорему для вывода формулы объема треугольной пирамиды.

Теорема 3. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.

Доказательство. Пусть A_1ABC треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 6). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

Выведем теперь формулу объема обобщенного конуса.

Теорема 4. Объем обобщенного конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного обобщенного конуса с основанием площади S и высотой h рассмотрим какую-нибудь треугольную пирамиду с теми же площадью основания и высотой (рис. 5). Тогда эти пирамида и обобщенный конус имеют равные объемы. Но для объема пирамиды имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

Следовательно, она имеет место и для объема произвольного обобщенного конуса.

В частности, для кругового конуса, в основании которого – круг радиуса R, и высота которого равна h, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объема шара.

Теорема 5. Объем шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Доказательство. Пусть дан полушар радиуса R, большой круг которого расположено на плоскости α. Рассмотрим цилиндр, основание которого - круг радиуса R, расположенный в той же плоскости, и высота которого равна R (рис. 7). В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной - центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что фигура, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объемы.

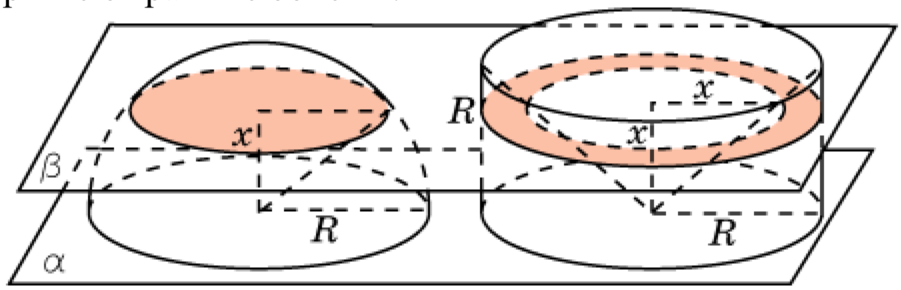

Рис. 7

Проведем плоскость β, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \le x \le R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего - R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т.е.

$$V = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Используя принцип Кавальери, самостоятельно выведите формулу объема шарового сегмента.

Применим принцип Кавальери для нахождения объемов более сложных пространственных фигур.

Объем тора. Рассмотрим тор (рис. 8, а) – фигуру, полученную вращением круга с центром в точке O, радиуса R относительно прямой a, лежащей в плоскости круга и не пересекающей его (рис. 8, б). Q - основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую a, и пусть $OQ=d$.

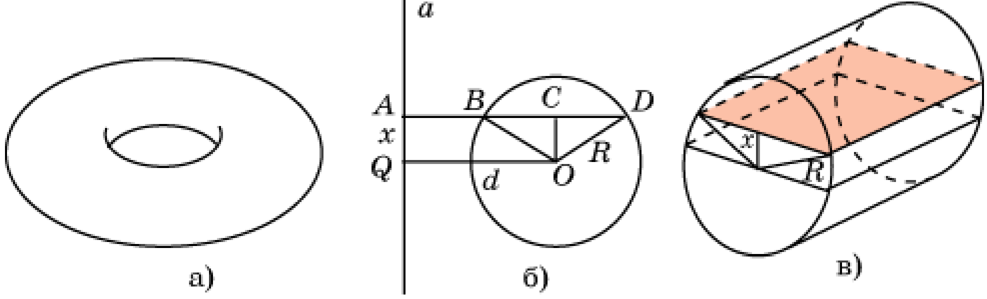

Рис. 8

Проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, на расстоянии x от точки Q ($0 \le x < R$). Тогда в сечении тора этой плоскостью получим кольцо, радиус внешнего круга которого равен $d+\sqrt{R^2-x^2}$ (на рисунке 8, б) $AD=AC+CD$, CD - катет прямоугольного треугольника OCD, $CD=\sqrt{R^2-x^2}$), а внутреннего равен $d-\sqrt{R^2-x^2}$ ($AB=AC-BC$). Поэтому площадь кольца равна

$$\pi(d+\sqrt{R^2-x^2})^2-\pi(d-\sqrt{R^2-x^2})^2=4\pi d\sqrt{R^2-x^2}.$$

Рассмотрим цилиндр (рис. 8, в), осью которого является прямая OQ, радиус основания равен R, и высота равна $2\pi d$. Покажем, что тор и цилиндр удовлетворяют условиям Кавальери.

В сечении цилиндра плоскостью α получается прямоугольник со сторонами $2\sqrt{R^2-x^2}$ и $2\pi d$. Поэтому площадь прямоугольника равна $4\pi d\sqrt{R^2-x^2}$, т.е. равна площади кольца. В силу принципа Кавальери, объем тора равен объему цилиндра. Таким образом, получаем следующую формулу объема тора

$$V=2\pi^2R^2d.$$

Объем параболического сегмента. Выведем формулу объема параболического сегмента. Пусть парабола $y=ax^2$ вращается вокруг оси Oy (рис. 9, а). Рассмотрим фигуру в пространстве, ограниченную параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной оси Oy и проходящей на расстоянии h от точки O. Такая фигура в пространстве называется параболическим сегментом.

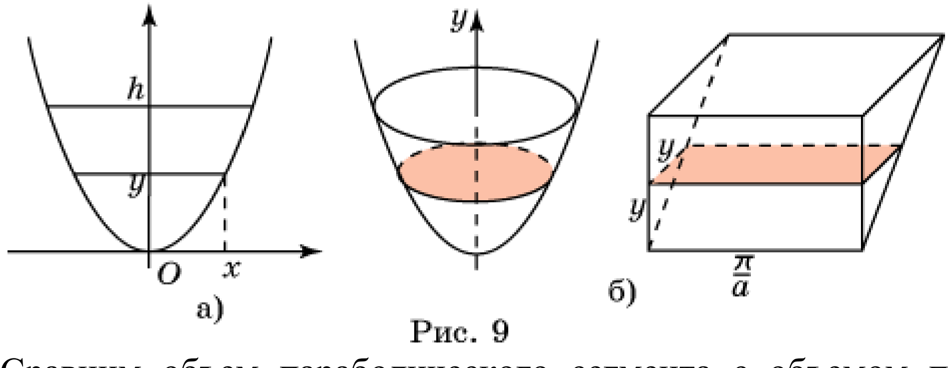

Рис. 9

Сравним объем параболического сегмента с объемом прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ высоты $\frac{\pi}{a}$, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами, равными h (рис. 9, б).

Покажем, что параболический сегмент и призма удовлетворяют условиям принципа Кавальери и найдем объем параболического сегмента.

Проведем плоскость α, перпендикулярную оси Oy, на расстоянии y от точки O. В сечении параболоида вращения получим круг радиуса x и площади πx^2. В сечении призмы получим прямоугольник со сторонами y и $\frac{\pi}{a}y=\pi x^2$. В силу принципа Кавальери, объем параболического сегмента равен объему призмы, т.е. имеем формулу

$$V=\frac{\pi}{a}h^2.$$

Объем тела вращения. Выведем формулу объема фигуры, ограниченной поверхностью вращения прямой, скрещивающейся с осью вращения (гиперболоид вращения) и двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения (рис. 10). Пусть теперь прямая a вращается вокруг прямой c, скрещивающейся с a. Угол между прямыми a и c равен φ; длина их общего перпендикуляра – d; расстояния от секущих плоскостей до общего перпендикуляра прямых a и c равны c' и c'' соответственно.

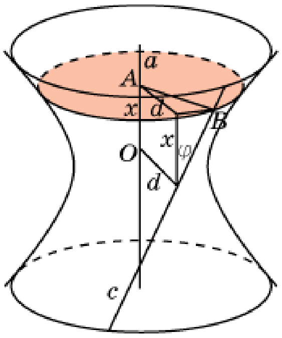

Рис. 10

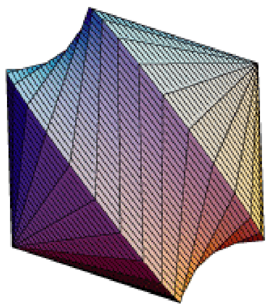
Рис. 11

Проведем плоскость, перпендикулярную оси c на расстоянии x от точки O. Радиус AB соответствующего круга равен $\sqrt{d^2+x^2tg^2\varphi}$, а его площадь равна $\pi(d^2+x^2\mathrm{tg}^2\varphi)$. По принципу Кавальери, искомый объем V тела будет равен сумме объемов цилиндра с радиусом основания d и высотой $c'+c''$ и двух конусов с радиусами оснований $c'\mathrm{tg}\varphi$, $c''\mathrm{tg}\varphi$ и высотами c' и c'' соответственно. Таким образом,

$$V=\pi d^2(c'+c'')+\frac{1}{3}\pi(c')^3\mathrm{tg}^2\varphi+\frac{1}{3}\pi(c'')^3\mathrm{tg}^2\varphi.$$

Используя эту формулу, самостоятельно найдите объем тела, полученного вращением единичного куба вокруг его диагонали (рис. 11).

Литература

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений, 9-е изд. – М.: Просвещение, 2000.

2. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2000.

3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2003.