В.А. Смирнов,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru;
И.М. Смирнова,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru
(МПГУ, Москва)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА КАВАЛЬЕРИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОБЪЁМОВ ТЕЛ

В работе рассматривается вопрос о применении принципа Кавальери для нахождения объёмов тел, среди которых: тор, эллипсоид, параболоид, гиперболоид и др.

DOI: 10.47639/2074-5281_2021_3_3

Тема «Объём пространственных фигур» является одной из наиболее сложных в курсе геометрии старших классов. Например, вывод формул объёмов цилиндра, конуса, шара в учебниках [1], [2] использует понятия предела или интеграла и выходит за рамки школьного курса математики.

В учебнике [3] был предложен метод нахождения объёмов, основанный на принципе Кавальери, который не использует ни понятие предела, ни понятие интеграла и позволяет сделать доказательства более наглядными и доступными, развить пространственные представления учащихся. С помощью этого метода в учебнике [3] были получены формулы для объёмов призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и его частей.

Здесь мы применим принцип Кавальери для нахождения объёмов более сложных тел, ограниченных эллипсоидом, параболоидом, гиперболоидом и другими поверхностями. Предлагаемый материал может быть использован в классах с углублённым изучением математики, для проведения курсов по выбору и индивидуальной работы с учащимися. Для более детального знакомства с кривыми и поверхностями второго порядка рекомендуем книгу [4].

Напомним, что принцип Кавальери утверждает следующее: если два тела Φ_1 и Φ_2 можно расположить в пространстве так, что в сечениях их плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 1), то объёмы исходных пространственных тел равны.

Для обоснования данного принципа предположим, что тела Φ_1 и Φ_2 являются материальными, единичной плотности. Тогда численные значения объёмов этих тел равны численным значениям их масс. Представим эти тела составленными из тонких слоёв одинаковой толщины, которые получаются при пересечении тел Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными не-

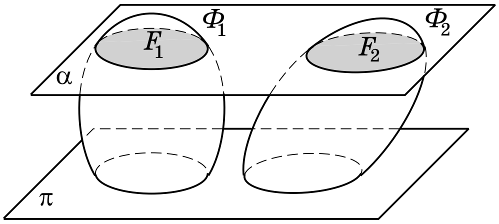


Рис. 1

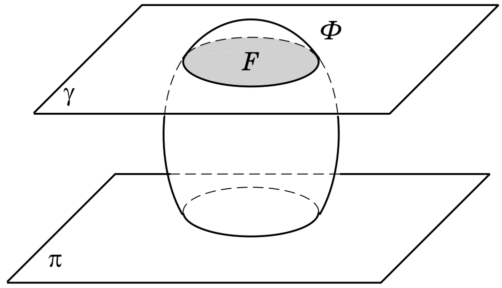


Рис. 2

которой заданной плоскости (рис. 1). Так как соответствующие слои имеют одинаковую площадь и толщину, то их массы равны. Поскольку массы тел равны сумме масс составляющих их слоёв, то равны массы и самих тел. Следовательно, равны и их объёмы.

В некотором смысле принцип Кавальери может служить подготовкой к изучению интегрального исчисления. Действительно, объём тела Φ (рис. 2) с помощью определённого интеграла выражается формулой

$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

где $S(x)$ – площадь сечения тела Φ плоскостью, параллельной некоторой заданной плоскости π, относительно которой тело Φ лежит в одном из полупространств; a и b – наименьшее и наибольшее расстояния от точек тела Φ до плоскости π; x – расстояние от плоскости сечения до плоскости π.

Выражение $S(x)dx$ можно считать объёмом слоя, площадь которого равна $S(x)$, высота равна dx, а интеграл $\int_a^b S(x)dx$ можно считать суммой объёмов таких слоёв.

Таким образом, если для тел Φ_1 и Φ_2 площади $S_1(x)$ и $S_2(x)$ их сечений равны, то равны и соответствующие интегралы. Следовательно, равны и объёмы этих тел.

Применим принцип Кавальери для нахождения объёма пересечения двух цилиндров, задаваемых в координатном пространстве неравенствами

$$x^2 + y^2 \le 1,\ y^2 + z^2 \le 1.$$

Искомое тело изображено на рисунке 3.

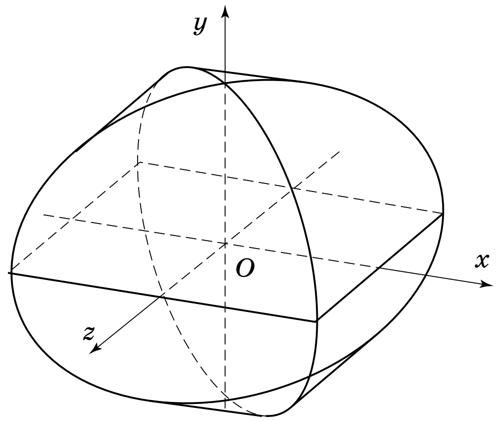
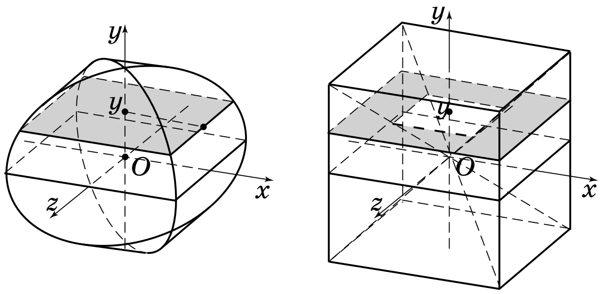


Рис. 3

Для нахождения объёма этого тела рассмотрим куб, рёбра которого параллельны осям координат и равны 2, а диагонали пересекаются в начале координат O. Впишем в него две правильные четырёхугольные пирамиды с общей вершиной O, основаниями которых являются грани куба, параллельные координатной плоскости Oxz (рис. 4б).

Сравним объём искомого тела Φ_1 и тела Φ_2, полученного из куба вырезанием двух указанных пирамид.



а) б)

Рис. 4а,б

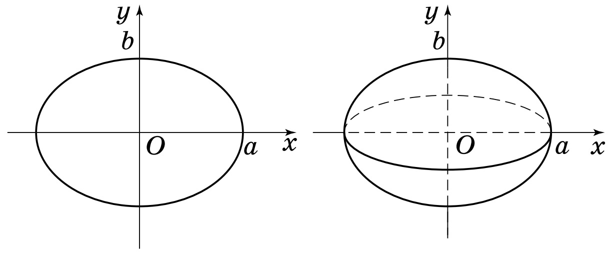
Через точку оси ординат с ординатой y ($-1 < y < 1$) проведём плоскость, перпендикулярную оси ординат. Сечением тела Φ_1 этой плоскостью является квадрат, площадь которого равна $4 - 4y^2$ (см. рис. 4а). Сечение тела Φ_2 этой плоскостью показано на рисунке 4б. Оно представляет собой разность двух квадратов, и его площадь также равна $4 - 4y^2$.

В силу принципа Кавальери, тела Φ_1 и Φ_2 имеют равные объёмы. Объём тела Φ_2 равен $5\frac{1}{3}$. Значит, объём тела Φ_1 также равен $5\frac{1}{3}$.

По аналогии с выводом формулы объёма шара [3], выведем формулу объёма тела, ограниченного эллипсоидом вращения.

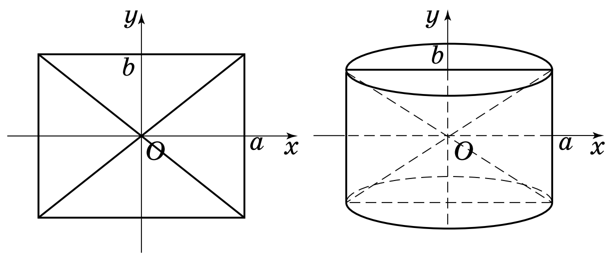
В координатном пространстве рассмотрим эллипс, который в плоскости Oxy задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 5а). Эллипсоид вращения получается вращением данного эллипса вокруг оси ординат (рис. 5б).

Для нахождения объёма тела, ограниченного этим эллипсоидом вращения, рассмотрим цилиндр, полученный вращением вокруг оси ординат прямоугольника (рис. 6а), стороны которого параллельны осям координат и равны $2a$ и $2b$ соответственно, а диагонали пересекаются в начале координат O (рис. 6б).



а) б)

Рис. 5а,б



а) б)

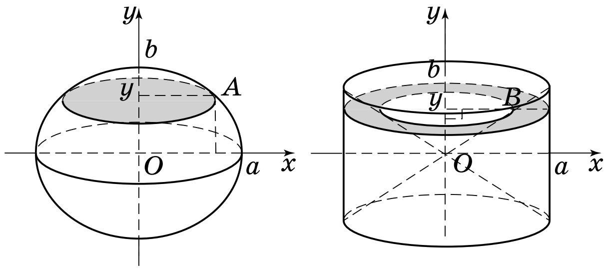
Рис. 6а,б

В цилиндр впишем два конуса с общей вершиной O, основаниями которых являются основания цилиндра.

Сравним объём эллипсоида Φ_1 и объём тела Φ_2, полученного из цилиндра вырезанием этих двух конусов.

Через точку оси ординат с ординатой y ($-b < y < b$) проведём плоскость, перпендикулярную оси ординат. Сечением эллипсоида Φ_1 этой плоскостью является круг, квадрат радиуса которого равен $a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$ (рис. 7а). Его площадь равна $\pi\left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right)$.

Сечением тела Φ_2 данной плоскостью является кольцо (рис. 7б), больший радиус которого равен a, а меньший радиус равен $\frac{a}{b}y$. Площадь этого кольца равна



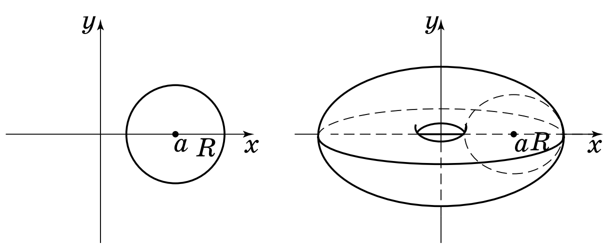
а) б)

Рис. 7а,б

$\pi a^2 - \pi \dfrac{a^2}{b^2} y^2$. Она равна площади сечения эллипсоида. Используя принцип Кавальери, получаем, что объёмы тел Φ_1 и Φ_2 равны.

Так как объём цилиндра равен $2\pi a^2 b$, а объём двух конусов равен $\dfrac{2}{3}\pi a^2 b$, получаем, что объём эллипсоида вращения, полуоси которого равны a и b, есть величина $\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

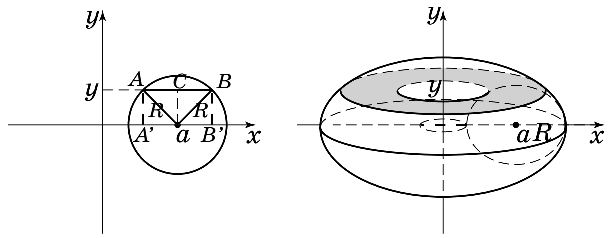
Применим принцип Кавальери для нахождения объёма тора. Для этого на координатной плоскости Oxy рассмотрим круг с центром в точке с координатами $(a,\ 0)$, $a > 0$, и радиусом $R < a$ (рис. 8а), а также тор Φ_1 (рис. 8б), полученный вращением этого круга вокруг оси ординат.



а) б)

Рис. 8а,б

Через точку оси ординат с ординатой y $(-R < y < R)$ проведём плоскость, перпендикулярную оси ординат. Сечением тора Φ_1 этой плоскостью является кольцо (рис. 9б), полученное вращением отрезка AB (рис. 9а) вокруг оси ординат, где



а) б)

Рис. 9а,б

$$A(a - \sqrt{R^2 - y^2}; y), \quad B(a + \sqrt{R^2 - y^2}; y).$$

Больший радиус этого кольца равен $a + \sqrt{R^2 - y^2}$, а меньший радиус равен $a - \sqrt{R^2 - y^2}$. Поэтому площадь кольца равна

$$\pi(a + \sqrt{R^2 - y^2})^2 -$$

$$-\pi(a - \sqrt{R^2 - y^2})^2 = 4\pi a\sqrt{R^2 - y^2}.$$

В координатном пространстве $Oxyz$ рассмотрим цилиндр, основанием которого является круг, лежащий в плоскости Oxy, с центром в начале координат O и радиусом R, а образующие равны $2\pi a$ (рис. 10).

В сечении этого цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси ординат и отстоящей от начала координат на расстояние $|y|$, получается прямоугольник со сторонами $2\sqrt{R^2 - y^2}$ и $2\pi a$. Его площадь равна $4\pi a\sqrt{R^2 - y^2}$, то есть равна площади кольца. В силу принципа Кавальери, объём тора равен объёму этого цилиндра. Таким образом, получаем следующую формулу объёма V тора

$$V = 2\pi^2 R^2 a.$$

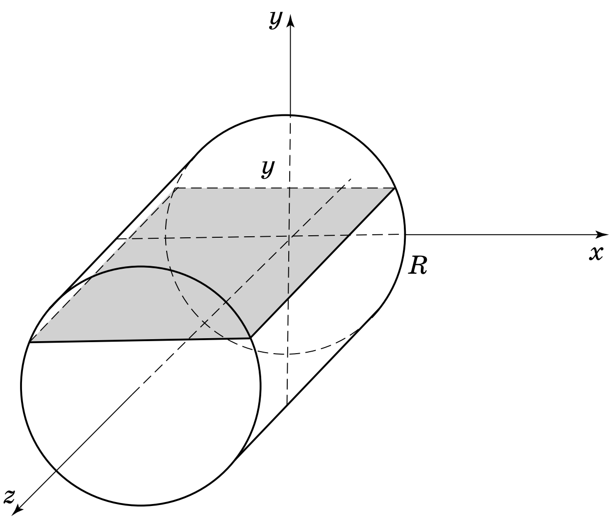
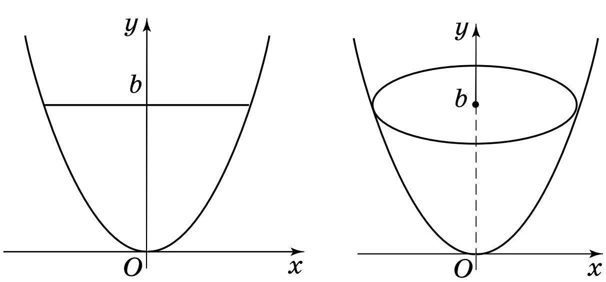


Рис. 10

Выведем формулу объёма параболического сегмента. А именно, пусть парабола, заданная уравнением $y = ax^2$ $(a > 0)$ вращается вокруг оси Oy (рис. 11а).

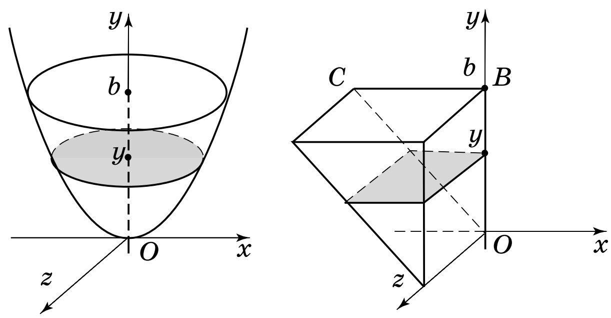
Рассмотрим тело в пространстве, ограниченное параболоидом вращения и плоскостью, перпендикулярной оси Oy и проходящей на расстоянии b от точки O (рис. 11б). Такое тело в пространстве будем называть параболическим сегментом.



а) б)

Рис. 11а,б

Сравним объём параболического сегмента (рис. 12а) с объёмом прямой треугольной призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник OBC, для которого $O(0, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(-b, b, 0)$, а боковое ребро равно $\dfrac{\pi}{a}$ (рис. 12б).



а) б)

Рис. 12а,б

Покажем, что параболический сегмент и призма удовлетворяют условиям принципа Кавальери и найдём объём параболического сегмента.

Через точку оси ординат с ординатой y $(0 < y \le b)$ проведём плоскость, перпендикулярную оси ординат. В сечении параболоида вращения получим круг радиуса $\sqrt{\dfrac{y}{a}}$ и площади $\dfrac{\pi y}{a}$ (рис. 12а). В сечении призмы получим прямоугольник со сторонами y и $\dfrac{\pi}{a}$ (рис. 9б). Его площадь также равна $\dfrac{\pi y}{a}$. В силу принципа Кавальери, объём V параболического сегмента равен объёму призмы, то есть имеет место формула

$$V = \frac{\pi b^2}{2a}.$$

Выведем формулу объёма гиперболического сегмента. А именно, пусть гипербола в плоскости Oxy, заданная уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 13а), вращается вокруг оси ординат (рис. 13б). Тело, ограниченное этой поверхностью и плоскостями, заданными уравнениями $y = 0$, $y = c$ $(c > 0)$,

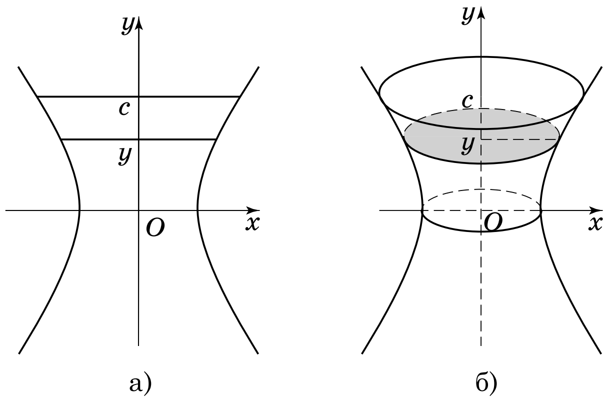


Рис. 13а,б

будем называть гиперболическим сегментом.

Через точку оси ординат с ординатой y $(0 < y \le c)$ проведём плоскость, перпендикулярную оси ординат. Сечением гиперболического сегмента Φ_1 этой плоскостью является круг, квадрат радиуса которого равен $a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2$. Его площадь равна $\pi\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right)$.

Рассмотрим пространственную фигуру Φ_2, составленную из цилиндра и конуса (рис. 14). Основанием цилиндра является круг с центром в точке O, лежащий в плоскости Oxz. Радиус основания цилиндра равен a, образующая цилиндра равна c. Основанием конуса является круг, радиусом $\frac{ac}{b}$. Вершина конуса принадлежит оси Ox, а высота параллельна оси Oy и равна c.

Сечением пространственной фигуры Φ_2 плоскостью, проходящей через точку оси ординат с ординатой y $(0 < y \le c)$ и перпендикулярной оси ординат, является фигура, состоящая из двух кругов радиусами a и $\frac{ay}{b}$. Его площадь равна

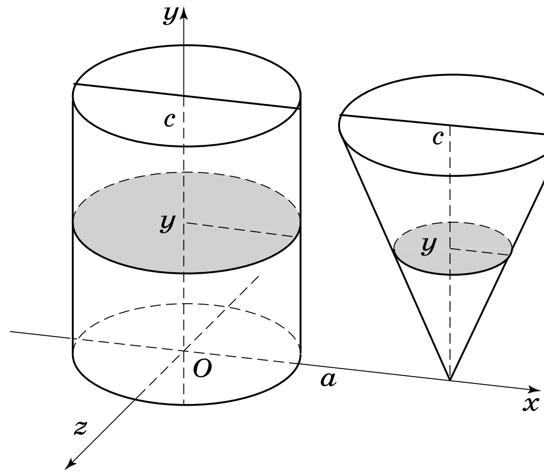


Рис. 14

$\pi\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right)$, то есть равна площади соответствующего сечения гиперболического сегмента.

На основании принципа Кавальери из этого следует, что объёмы пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 равны.

Так как объём цилиндра равен $\pi a^2 c$, а объём конуса равен $\frac{\pi a^2 c^3}{3b^2}$, то получаем, что для объёма V гиперболического сегмента имеет место формула

$$V = \pi a^2 c + \frac{\pi a^2 c^3}{3b^2}.$$

Заметим, что тот же гиперболоид вращения получается вращением прямой, скрещивающейся с осью вращения и не перпендикулярной этой оси. А именно, пусть прямая скрещивается с осью Oy. Расстояние между ними равно a, а угол между ними равен $\varphi < 90°$. Тогда при вращении этой прямой вокруг оси Oy получается поверхность, которую можно также получить вращением гиперболы [3], [4], задаваемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2\operatorname{tg}^2\varphi}{a^2}=1.$$

Последнее представляет собой уравнение гиперболы, в котором $\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}=b^2$ (рис. 15).

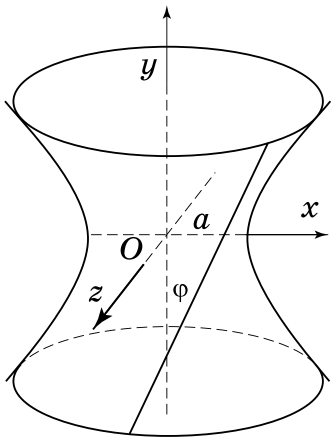


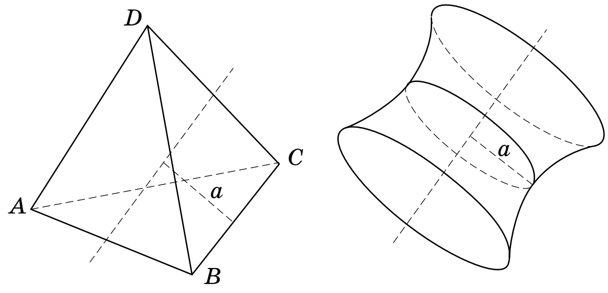
Рис. 15

Приведём два примера нахождения объёмов тел, ограниченных гиперболоидами вращения.

Пример 1. Найдём объём тела вращения единичного тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой c, проходящей через середины противоположных рёбер AB и CD (рис. 16а).

Р е ш е н и е. Искомое тело ограничено двумя кругами, получающимися при вращении рёбер AB и CD вокруг прямой c, и гиперболоидом вращения, полученным при вращении прямой BC вокруг прямой c (рис. 16б). Расстояние a между этими прямыми равно $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, угол φ между ними равен 45°. Половину объёма этого тела можно найти по выведенной ранее формуле

$$V=\pi a^2c+\frac{\pi a^2c^3}{3b^2},$$

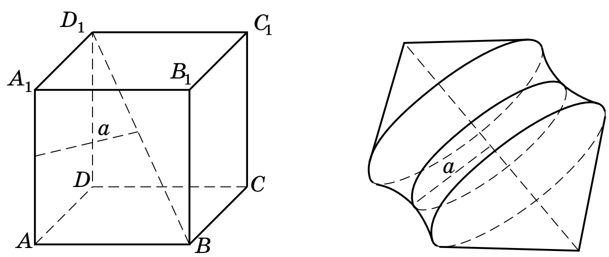


а) б)

Рис. 16а,б

где $a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi=1$. Следовательно, $V=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{24}$, а искомый объём всего тела равен $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

Пример 2. Найдём объём тела вращения единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой, содержащей его диагональ BD_1 (рис. 17а).



а) б)

Рис. 17а,б

Р е ш е н и е. Искомое тело (рис. 17б) состоит из двух равных конусов, полученных вращением вокруг прямой BD_1 рёбер куба, выходящих из вершин B и D_1, и тела, ограниченного гиперболоидом вращения, полученного вращением прямой AA_1 вокруг прямой BD_1. Радиусы оснований конусов равны $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, высоты равны $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, объёмы конусов равны $\frac{\pi 2\sqrt{3}}{27}$. Половину объёма части тела, ограниченного гиперболоидом вращения, можно найти по выведенной ранее формуле

$$V = \pi a^2 c + \frac{\pi a^2 c^3}{3b^2},$$

где $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\varphi = \sqrt{2}$. Этот объём равен $\frac{\pi 5\sqrt{3}}{54}$. Объём всей части, ограниченной гиперболоидом вращения, равен $\frac{\pi 5\sqrt{3}}{27}$, а искомый объём всего тела вращения равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Литература

1. *Атанасян Л.С.* и др. Геометрия. Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2011.

2. *Погорелов А.В.* Геометрия. Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2011.

3. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс : учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2014.

4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия: учеб. для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.