И. М. Смирнова

СТАНОВЛЕНИЕ РОССИЙСКОГО УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

Система светского государственного образования стала складываться в России в XVIII веке, во времена правления *Петра I*. В начале своей государственной деятельности, направленной на коренную реорганизацию страны, он столкнулся с отсутствием знающих людей, способных претворить в жизнь новые идеи. Первой реформой, с которой начал царь, была реформа образования. Если проследить дальнейшую историю государства российского, то отчетливо станет видно, что реформы социальных революций, значительных перестроек всегда сопровождались у нас, как правило, реформами образования.

Одной из первых школ нового типа была открытая в 1701 году в Москве знаменитая школа «*математических и навигацких, т.е. мореходно-хитростных наук*». Помещалась она в Сухаревской башне (снесенной в тридцатых годах двадцатого столетия). Среди предметов математического цикла изучались: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия – плоская и сферическая. В качестве учебника по геометрии использовалась историческая книга *«Начала» Евклида*. Ее перевод был сделан *Фарварсоном*. Это англичанин, известный профессор Аббердинского университета, который был приглашен Петром I в навигацкую школу для преподавания математики и морских наук.

Здесь проявилась характерная тенденция, которая определила преподавание геометрии в России приблизительно до конца XVIII века. Во-первых, система преподавания геометрии пришла из Западной Европы, а во-вторых, в качестве учебника фигурировали «Начала» Евклида. Эта книга в то время считалась непревзойденным образцом изложения геометрии, а потому по ней велось обучение в различных школах. Ввиду важности этого произведения и того влияния, которое оно оказала на учебную литературу по геометрии, остановимся на нем более подробно.

Напомним, историки математики считают, что «Начала» были написаны Евклидом около 300 г. до н.э. Они состоят из 13 основных книг. Первые шесть (книги I-VI) посвящены планиметрии; VII-IX – арифметике; X – несоизмеримым отрезкам и XI-XIII – стереометрии. По планиметрии изучаются: учение об отрезках, о сторонах и углах треугольника; построение треугольников, перпендикулярных и параллельных прямых на плоскости; параллелограммы; площади треугольников и параллелограммов; теорема Пифагора. Излагается учение об окружности и круге; о секущих и касательных; об углах, образуемых ими; о вписанных и описанных многоугольниках.

Строятся правильные многоугольники: четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и 15-угольник. Дается понятие подобных фигур. По стереометрии рассматриваются начала параллельности и перпендикулярности в пространстве, определяется отношение объемов пирамид и других тел, причем используется метод исчерпывания, дается теория правильных многогранников.

Это выдающееся произведение положило начало дедуктивному способу изложения, который заключается в том, что прежде всего дается перечень основных понятий и всех аксиом. Затем формулируются теоремы и для каждой из них приводится доказательство, даются определения всех вновь вводимых понятий. Например, первая книга начинается с 23 определений. Среди них:

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Границы линии суть точки.

4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

6. Границы поверхности суть линии.

7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

8. Угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости, но не расположенных на одной прямой.

………………………………………………………………

23. Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются.

Затем идут постулаты.

Требуется:

I. Чтобы из каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую неограниченную прямую можно было продолжать неограниченно.

III. И чтобы из каждой точки, как из центра, можно было произвольным радиусом описать окружность.

IV. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Наконец, аксиомы:

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.

V. И если удвоим равные, то получим равные.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. И совмещающиеся (величины, образы) равны между собой.

VIII. И целое больше части.

IX. И две прямые линии не могут заключить пространства.

Исходя из этого, Евклид развил и представил геометрическую теорию, все доказывая логическим путем, без ссылок на наглядность и очевидность. Эта книга оказала огромное и длительное (почти 2000 лет) влияние на науку и культуру цивилизованных народов. По ней изучали математику *Н. Коперник*, *Г. Галилей*, *Р. Декарт*, *И. Ньютон*, *Г. Лейбниц*, *Л. Эйлер*, *М. В. Ломоносов*, *Н. И. Лобачевский* и многие другие выдающиеся ученые. О значении этой книги можно судить, например, по следующему высказыванию известного итальянского математика XVI века *Д. Кардано*: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ними сравнивать. В них отражается такой свет истины, что, по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

Таким образом, «Начала» определили метод изложения геометрической теории и содержание изучаемых вопросов.

В России в XVIII веке было сделано несколько переводов «Начал» на русский язык. Например, в 1739 году – с латинского; в 1769 году – с французского; в 1784 и 1789 годах – с греческого языков.

Опыт преподавания геометрии по «Началам» Евклида постепенно привел к созданию первых отечественных руководств по геометрии. В развитии школьной учебной литературы прошлого выделим два этапа.

Первый этап охватывает вторую половину XVIII и первую половину XIX веков.

Наиболее значительные учебники геометрии этого периода были написаны следующими авторами: *С. Назаровым* (1772), *Д. Аничковым* (1780), *М. Е. Головиным* (1782), *С. Е. Гурьевым* (1798), *Н. И. Лобачевским* (1823), *Ф. И. Буссе* (1830).

Одним из первых был издан учебник *Степана Назарова* «Теоретическая и практическая геометрия». В нем впервые проявилась яркая отличительная черта российской учебной литературы – включение в содержание практических приложений. В силу важности этой книги для обсуждаемого нами вопроса приведем подробное оглавление учебника:

Часть первая

О геометрии вообще

Книга первая

Глава первая. О лонгиметрии или разделении линий и о начерчении разных геометрических фигур.

Глава вторая. О планиметрии или об измерении и исчислении плоскостей.

Глава третья. О превращении плоскостей.

Глава четвертая. О сложении, вычитании, умножении и делении плоскостей.

Комментарии. Лонгиметрия – это геометрия на прямой. Например, к лонгиметрии относится задача о делении отрезка пополам. Исчисление плоскостей означает нахождение площадей плоских фигур, среди которых прямоугольник (называемый прямоугольным параллелограммом), параллелограмм, трапеция, треугольник, правильные многоугольники, круг, эллипс. Под превращением плоскости имеются в виду равносоставленные плоские фигуры. В частности, превратить треугольник в прямоугольник (прямоугольный параллелограмм) или трапецию в треугольник. Сложить плоскости означает, например, начертить пятиугольник, площадь которого равна сумме площадей данного квадрата и данного круга. Вычесть плоскости – построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов. Произведение плоскостей – начертить треугольник, площадь которого была бы в два раза больше площади данного треугольника. Деление плоскостей – разделить данную трапецию на три части равной площади.

Книга вторая

О стиле геометрии вообще.

Глава первая. О начерчении иррегулярных и регулярных корпусов, как оные из бумаги вырезать и клеить.

Глава вторая. Об измерении и исчислении иррегулярных и сферических корпусов, корпусного содержания и поверхностей оных.

Глава третья. Об исчислении сторон и корпусного содержания пяти регулярных корпусов, описанных в одном глобусе.

Глава четвертая. О превращении, сложении, вычитании, умножении и делении корпусов.

Комментарии. Корпус, как Вы, наверное, догадались означает тело. Автор определяет его следующим образом: «Корпус, или тело, есть пространство, имеющее в три стороны расширение, то есть в длину, ширину и высоту». Регулярный корпус – это правильный многогранник. Глобус – шар. Превращение – означает построение тела, равного с данным телом объема. Например, превратить цилиндр в конус, который имел бы с цилиндром равные высоты, или превратить цилиндр в четырехугольную призму; треугольную пирамиду превратить в треугольную призму таким образом, чтобы у них были равные базы (основания) и т. п.

Часть вторая

Книга первая. О тригонометрии вообще

Глава 1. О сочинении таблицы обыкновенных синусов, тангенсов и секансов.

Глава 2. О теоретических предложениях, по которым все тригонометрические задачи в выкладках решаются.

Глава 3. Об исчислении прямоугольных треугольников по простым таблицам синусов.

Глава 4. Об употреблении логарифмов, свойства и исчисления по оным прямоугольных треугольников.

Глава 5. Об исчислении по логарифмам остроугольных, тупоугольных треугольников и разных касающихся к фортификации задач.

Глава 6. Об изобретении по логарифмам соответствующих чисел и по оным логарифм, который в таблице не имеется.

Глава 7. Об изобретении логарифмов, соответствующих градусов, минут, секунд и прочего.

Книга вторая. О практике геометрии вообще

Глава 1. Об употреблении разных мер, также о кольях, сажени, веревке и цепи.

Глава 2. О действиях, которые на поле цепью и кольями решаются.

Глава 3. Об астролябии, квадранте, употреблении, сложении и о поправке их.

Глава 4. О действиях, которые по астролябии и квадранту производятся.

Глава 5. О полуденной линии, компасе и об употреблении оных при землемерии.

Глава 6. О вычислении линий и углов крепостного строения.

Глава 7. О мензуле и о сложении оной.

Глава 8. О действиях, которые по мензуле на поле производятся.

Глава 9. О нивелировании или об уравнении земной поверхности, сложении, употреблении и о поправке ватерпаса или уровня.

Глава 10. О действиях, которые по уровню производятся.

Глава 11. О рефракции (преломлении лучей).

Другим практическим руководством была изданная в 1780 году книга *Д. Аничкова* «Теоретическая и практическая геометрия в пользу и употребление не токмо юношества». В теоретической части она в значительной степени подражает «Началам». Отличительной особенностью является то, что материал разбит не на две части (планиметрию и стереометрию), как у Евклида, а на три: лонгиметрию (измерение линий), планиметрию (измерение поверхностей) и стереометрию (измерение тел).

Из таких же разделов состояло «Краткое руководство к геометрии» *М. Е. Головина*. Это первый российский школьный учебник по геометрии, изданный в 1782 году по распоряжению специальной комиссии для народных училищ екатерининского времени.

В состав комиссии вошли видные деятели того времени: П. В. Завадовский (заметим, это будущий первый министр просвещения России, назначенный на свой пост в 1802 году), Ф. И. Эпинус, П. И. Пастухов и Янкович де Мириево (сербский педагог, который прибыл в Россию по приглашению Екатерины II для организации народных училищ). Прежде всего комиссия решила обратить внимание на улучшение качества преподавания за счет совершенствования методов обучения. Основная цель этого заключалась в том, чтобы учитель постоянно владел вниманием всех своих учеников и чтобы учащиеся могли легко понимать и усваивать содержание изучаемых предметов. Для этого были написаны соответствующие школьные учебники. По физико-математическому циклу – учебники по арифметике, геометрии, физике, механике и гражданской архитектуре.

М. Е. Головин принял самое активное участие в написании и издании этих учебников. В предисловии к руководству по геометрии он объяснил основные требования к «Новой методе обучения» следующим образом: «Учитель, проходя геометрию по сей книжке, должен прочитывать каждый период: потом изъяснить оный, тотчас спрашивать, как они истолкованное поняли, а не подаваться далее до тех пор, пока большая часть учеников не уразумела хорошо прочитанного. При задачах, доказательства требующих, надлежит истолковать самое предложение, потом приступить к доказательству. Причем должно напоминать ученикам, в каком случае задачу сию в общежитии употреблять можно».

Таким образом, начинает складываться и методика преподавания геометрии. При этом важно подчеркнуть, что начинают обращать внимание на развитие учащихся, причем не только памяти, а прежде всего их мышления, разума посредством изучения геометрии. Во многом этому способствует рассмотрение практических приложений геометрии. «Сколько знание геометрии – говорит Головин, - полезно и нужно в общежитии, никто спорить не может. Землемерие, архитектура, гражданская и военная, мореплавание, физика, механика и пр., словом все полезнейшие для людей науки служат явным тому доказательством. Самые художества и рукоделие не малую пользу от ней заимствовать могут. Так, живописцу поможет она в исправном рисованье, инструментальщику в делании верных орудий, столяру и плотнику в проведении прямых и горизонтальных линий; каменщику в складывании стен; самому даже хлебопашцу сделает пользу при означении меж в случае споров при разделении полей во время посева, при строении овинов, закромов и пр.».

Итак, учебник состоял их трех названных частей. Лонгиметрия содержала 41 задачу, среди которых задачи на деление отрезка пополам, строение перпендикуляра к прямой, о смежных и вертикальных углах и т. п.

В планиметрии предлагались доказательства теоремы о сумме углов треугольника, об углах при основании равнобедренного треугольника, о равенстве треугольников, о свойствах касательной и секущей окружности и т. д.

В стереометрии основной материал был связан с построением моделей многогранников и фигур вращения и вычислением объемов и площадей поверхности пространственных фигур.

Еще одной характерной особенностью этого учебника является включение в его содержание очень непростых, нестандартных задач. В качестве примера приведем следующую задачу: «Разделить треугольник из данной на линии точки на равные части». В учебнике дается указание и чертеж для решения задачи в случае деления на три равные части. В современной терминологии эта задача звучит следующим образом: «Разделить треугольник прямыми, проведенными из данной на одной из его сторон точки, на три равновеликие части».

Решение. Пусть дан ΔABC и точка D, принадлежащая стороне AC. Требуется из точки D провести прямые, которые разделили бы треугольник ABC на три равновеликие части.

Разделим AC на три равные части: $AE = EF = FC$ и пусть $D \in EF$. Проведем $EG||DB$ и $FH||DB$. DG и DH будут искомыми прямыми, так как площади фигур AGD, $DGBH$ и DHC равны. Действительно, треугольники ABE, EBF и FBC равновелики (у них равны основания и соответствующие высоты). Но $S_{AGD}=S_{ABE}$ ($S_{AGD}=S_{AGE}+S_{EGK}+S_{EKD}$, где $K=BE\cap GD$, $S_{ABE}=S_{AGE}+S_{EGK}+S_{GKB}$, но $S_{EKD}=S_{GKB}$, поскольку $S_{EKD}=S_{EGD}-S_{EGK}$ и $S_{GKB}=S_{EGB}-S_{EGK}$, но $S_{EGD}=S_{EGB}$, у треугольников EGD

и EGB одно основание EG и высоты, опущенные соответственно из вершин D и B, равны, так как $EG||DB$).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что равновелики четырехугольник $DGBH$ и треугольник EBF; треугольники DHC и FBC.

Другими заметными учебниками рассматриваемого периода были работы *С. Е. Гурьева*. В своем большом труде «Опыт об усовершенствовании элементов геометрии», опубликованном в 1798 году, он изложил свой собственный план построения школьного курса геометрии, отойдя от «Начал» Евклида, которые считал несовершенными с педагогической точки зрения. Главными своими задачами он ставил распределение учебного материала по предметам (в частности, четкое выделение геометрического материала) и изменение порядка его изложения. Из двух способов распределения геометрических вопросов, а именно: а) строго логического, подчиняющегося только дедуктивному построению курса геометрии; б) логически обоснованная систематизация понятий и теорем, которая осуществляется на основе методической целесообразности, - Гурьев выбрал второй и в соответствии с этим предложил свой курс геометрии. При этом он утверждал, что строгость и точность не затрудняют и не обременяют ум, в математике нецелесообразно ставить вопрос о предпочтении точности и удобства. «Совсем напротив, чем вывод строже, тем он ко разумению удобен, ибо строгость состоит в приведении всей целости к началам наипростейшим».

Сказанное С. Е. Гурьев осуществил в своем курсе, разбив его на четыре книги:

1. О сопряжении прямых с прямыми.

Замечание. Сопряжение, говоря современным языком, это пересечение.

2. О сопряжении круга с прямыми.

3. О сопряжении плоскостей с прямыми и плоскостей с плоскостями.

4. О сопряжении трех простейших поверхностей – цилиндра, конуса и шара, - с прямыми и плоскостями.

Первая книга начинается с рассмотрения двух прямых «перпендикулярных и наклонных». Сопряжение трех прямых приводит к треугольникам или к двум параллельным прямым, пересеченным третьей. В нее вошли следующие главы: 1) Об углах. 2) О треугольниках. 3) О параллельных прямых. 4) О параллелограммах, включая теорему Пифагора. 5) О многоугольниках. В последней главе дается учение о подобии и теории пропорций.

Вторая книга разбита на три главы: 1) О сопряжении окружности с прямыми, не замыкающими определенного пространства. 2) О вписанных и описанных многоугольниках. 3) О способе пределов и сравнении круга с треугольником. Две главы третьей книги трактуют о сопряжении плоскостей с прямыми и плоскостями, не порождающими определенного пространства, а также о параллелепипедах, призмах и пирамидах. Последняя, четвертая, книга состоит из трех глав – о цилиндре, конусе и сфере.

Идеи, заложенные в этой первой книге Гурьева по геометрии, нашли воплощение в следующей его работе «Основания геометрии», написанной в 1804 году. Очень содержательно предисловие к этому произведению, в котором автор излагает свои уже сформировавшиеся методические взгляды. Например, интересно следующее его высказывание по поводу преподавания геометрии: «Система элементарной геометрии может быть двоякой: или соображенной с началами, или соображенной с предметами. Откуда рождается вопрос, какая из сих систем есть полезнейшая и превосходнейшая? Для решения оного надлежит, быть может, самих людей разделить на два рода: на способных изобретать новые истины и не более способных токмо понимать уже изобретенные. Первым полезна система, соображенная с началами, а другая – соображенная с предметами». Другими словами, здесь Гурьев говорит о системе преподавания, отвечающей индивидуальным склонностям и запросам самих учеников. К сожалению, он не смог в полной мере осуществить все начатое и задуманное, прожив короткую жизнь (1764-1813). Однако поднятые им вопросы нашли яркое продолжение в работах его учеников. Например, непосредственный его ученик *А. Н. Ильинский*, преподаватель Петербургского горного корпуса, опубликовал в 1825 году «Основания геометрии, составленные по системе императорской Санкт-петербургской Академией наук академика С. Е. Гурьева». В предисловии автор подчеркивает взгляды Гурьева на четкое и ясное построение курса геометрии, на то, что учащиеся должны получить впечатление, что геометрия – это не случайный набор каких-то фактов и теорем, которые нужно заучить, а это стройная система, где теоремы объединены в определенные группы, имеющие свои названия. «Кто же не пленится сими качествами, – говорит Ильинский, - кто не отнесет их к совершенству учебной книги; кто не согласится, что при разборе истин, разбросанных без порядка, учащийся должен почти в одно и то же время заниматься многими и разнообразными предметами, которые, поступая один за другим в память его, или тут же изглаживаются, или смешиваются один с другим так, что сосредоточить понятие о них весьма трудно».

Теперь остановимся кратко на содержании этой книги, так как именно в ней определена последовательность, строгость изложения материала и круг рассматриваемых геометрических вопросов.

Во введении даются пять аксиом:

1. Величины, равные той же или равные суть и взаимно, равны между собой.

2. Целая величина больше своей части или часть меньше целой своей величины.

3. Величина, которая ни больше, ни меньше другой, есть равна сей другой.

4. Если к той же или к равным величинам приложены равные или та же, то и целые равны.

5. Если от той же или от равных величин отнять равные или та же, то и остатки равны.

Основное содержание состоит из четырех частей.

Книга I. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении на плоскости протянутых прямых линий с прямыми линиями. В нее входят отдельные главы об углах (прямых, острых, тупых); треугольниках; параллельных прямых; параллелограммах; многоугольниках; о теории пропорциональных величин; о приложении оной к прямым линиям и образованных ими плоскостям; о подобии многоугольников.

Книга II. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении круговой линии с прямыми. Она имеет четыре главы: собственно о прямых, с круговою линией сопряженных, и углах, ими составленных; о многоугольниках, в круг вписанных и около оного описанных; о теории пределов; о сравнении круга с пространством прямолинейным и взаимном отношении самих кругов и их окружностей.

Книга III. О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении плоскостей с прямыми линиями и плоскостями. В нее входит семь глав, где излагается очень важный раздел курса геометрии – теория многогранников: о линиях и плоскостях, перпендикулярных, параллельных и наклонных; о толстых углах (многогранных); о пирамидах и призмах; о параллелепипедах; о многогранниках вообще; о подобии многогранников. Здесь дается определение толстого угла, отдельно выделяются толстые углы, имеющие три стороны (т. е. трехгранные углы). Для последних предлагаются признаки равенства. Рассматриваются отдельные виды многогранников: пирамиды, призмы, их элементы и частные виды. Весь теоретический материал сопровождается подробными чертежами, чего не было в предыдущих учебниках. Дается общее определение многогранника: «Ежели какие ни есть многоугольники, находящиеся в разных плоскостях, равными сторонами своими взаимно прикасаются так, что ими заключается определенное пространство, то оно вообще многогранником называется; и каждый из сих многоугольников порознь гранью, а все вместе поверхностью именуются; каждая же из прямых, в коих многоугольники взаимно прикасаются, ребром многогранника называется». Это определение является одним из первых определений многогранника в учебной литературе. Оно наглядно и дано после рассмотрения простейших видов многогранников. Дается определение правильного многогранника: «Многогранник, в коем все грани суть совершенно равные правильные многоугольники, и толстые углы, содержимые углами сих многоугольников, также есть совершенно равные, называется правильным, всякий же иной – неправильным». Это определение потом долго переходило из учебника в учебник. Доказывается, что гранями правильных многогранников могут быть только равносторонние треугольники, квадраты и правильные пятиугольники. При доказательстве этого факта используется свойство толстых углов: плоские углы толстого угла, вместе взятые, меньше четырех прямых.

Завершается учебник книгой IV «О свойствах, которые имеют место при взаимном сопряжении трех кругов, образованных поверхностями с прямыми линиями и плоскостями». В нее входят две главы: о конусе и цилиндре; о сфере и шаре.

В заключение еще раз подчеркнем, что этот учебник отличается наличием подробных наглядных иллюстраций и чертежей.

Далее необходимо отметить «Курс математики» *Т. Ф. Осиповского*. Он состоял из трех томов:

I. Частная и общая арифметика (вышел в 1802 году).

II. Геометрия (1801).

III. Теория аналитических функций (1820).

Как видим, сначала вышла «Геометрия». Она содержит традиционные для этого периода части: лонгиметрию, планиметрию, штереометрию (стереометрию). Но эта книга имела и нетрадиционные дополнительные статьи из «криволинейной геометрии», по теории кривых, среди которых рассматривались эллипс, парабола, гипербола, циссоида Диоклеса, спираль Архимеда. Таким образом, этот учебник предлагает обязательный учебный материал и необязательный для тех, кто интересуется геометрией, хочет узнать о ней больше.

Следующим значительным учебным руководством по геометрии этого периода была книга *Н. И. Лобачевского* «Геометрия», написанная им в 1823 году, т. е. до величайшего открытия неевклидовой геометрии. Эта книга предназначалась для тех, кто интересуется геометрией. В ней Лобачевский представлял свой способ изложения геометрии – достаточно строгое и систематическое, соответствующее возрасту учащихся. Планиметрия и стереометрия излагались параллельно, совместно. Здесь впервые в истории была предпринята попытка нарушить школьную последовательность изложения геометрии по Евклиду – от планиметрии к стереометрии. Идея слитного изучения нескольких предметов, в частности планиметрии и стереометрии, позже была названа фузионизмом. Более подробно фузионистский учебник Лобачевского представлен во втором параграфе настоящей главы.

Заметными произведениями рассматриваемого исторического периода стали «Руководство к геометрии для уездных училищ» (1831) и «Руководство к геометрии для гимназий» (1844) *Ф. И. Буссе*. Особенностями этих произведений является то, что автор отошел от излишней теоретизации и при доказательстве многих теорем предлагал убедиться учащимся в их справедливости на наглядных примерах. А во второй – отказался от традиционного по тем временам деления геометрии на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию. В его учебнике только два раздела: планиметрия и стереометрия. Такое деление геометрии очень понравилось и закрепилось в учебниках последующих поколений.

Таким образом, первый этап становления и развития российского учебника геометрии характеризуется тем, что была:

1) признана нецелесообразность использования «Начал» Евклида в качестве школьного учебника по геометрии;

2) обоснована необходимость строго дедуктивного метода ее изложения;

3) определена структура и последовательность предлагаемого учебного геометрического материала;

4) предложен круг вопросов по методике преподавания геометрии, в частности, сделан серьезный вывод о том, что учебник геометрии не может быть простым сборником научных статей по геометрии, изложение должно быть доступным для понимания учеников и соответствовать их индивидуальным и возрастным особенностям, уровню развития и целям преподавания.

Второй этап развития российского учебника геометрии охватывает период со второй половины XIX века до 1917 года. Этот период особенно богат учебной литературой. Было издано свыше 60 учебников по геометрии, в том числе таких известных авторов, как М. Е. Ващенко-Захарченко, М. В. Остроградский, А. Ф. Малинин, А. Н. Глаголев, А. Ю. Давидов, А. П. Киселев и мн. др. Формировались традиции российского учебника по элементарной геометрии. Например, в ряде учебников начали появляться сведения по истории геометрии. Одним из первых авторов ввел в свои учебники исторический материал *М. Е. Ващенко-Захарченко*. Ему же принадлежит и отдельная книга – «Исторический очерк развития геометрии» (1883). Эта работа была очень важна, так как в ней была систематизирована история геометрии по основным периодам, а именно:

I. Греки. Школы: 1) Ионийская. 2) Пифагорейская. 3) Платоновская. 4) Александрийские (первая и вторая школы). 5) Афинская и византийская школы.

II. Римляне.

III. Средние века.

IV. Арабы.

В этой работе автор подчеркивает, что геометрия, как одна из важнейших областей математики, возникла эмпирически из опытов и наблюдений и первоначально имела чисто практический характер. Возводя различные сооружения, человек мог получать представления о различных геометрических фигурах. Таким образом, возникали понятия о различных треугольниках, четырехугольниках, разных телах, например призме, цилиндре, пирамиде и т. д. Автор специально обращает внимание читателя на тесную связь между геометрией и архитектурой, строительством, астрономией и искусством измерения Земли. Постепенно, накапливая сведения о свойствах геометрических фигур, человек научился обобщать полученные знания. Впоследствии, с течением времени, он находил известные свойства, которые принимал за правила.

Сведения из истории начинают появляться и в других учебниках геометрии, например, в работах *А. Мерчинского*. Первый его учебник вышел в 1870 году (второй – в 1897). В этой книге уже во введение включены вопросы истории. В частности, очень подробно рассказывается о последней XIII книге «Начал», посвященной правильным многогранникам. Характерной особенностью геометрии Мерчинского является то, что он уделил много внимания геометрии пространства, считая, что геометрия на плоскости – это лишь вспомогательный материал для изучения свойств пространственных фигур. Приведем краткий обзор материала по стереометрии.

Глава I. Прямые и плоскости

§ 1. Параллельные прямые.

§ 2. Прямые, взаимно пересекающиеся.

§ 3. Параллельные плоскости.

§ 4. Прямые, параллельные плоскости.

§ 5. Плоскости, параллельные прямой.

§ 6. Прямые, пересекающие плоскость.

§ 7. Параллельные прямые, пересеченные плоскостью.

§ 8. Прямая, пересеченная параллельными между собой плоскостями.

§ 9. Перпендикуляр и наклонная к плоскости и обратно.

Глава II. Плоскостные углы

§ 1. Двугранные углы.

§ 2. Свойство двугранных углов, происходящих от пересечения двух плоскостей между собой.

§ 3. Двугранные углы, образуемые параллельными между собой плоскостями с секущей их плоскостью.

§ 4. Многогранный угол.

§ 5. Трехгранный угол.

Глава III. Плоскостные геометрические фигуры

§ 1. Понятие о многогранниках.

§ 2. Призма.

§ 3. Пирамида.

§ 4. Правильные многогранники.

Глава IV. Геометрические прикладные числа

§ 1. Пропорциональность прямых и углов в пространстве.

§ 2. Подобные многогранники.

§ 3. Измерение площади поверхности многогранников.

§ 4. Измерение объема многогранников.

Глава V. Круговые тела

§ 1. Цилиндр.

§ 2. Конус.

§ 3. Шар.

Этот учебник содержит богатый материал, рассмотрены многие свойства. Например, во второй главе во втором параграфе представлены следующие свойства:

1. Для всякого двугранного угла его угол наклонения имеет величину постоянную. Углы наклонения равных двугранных углов равны между собой.

2. Двугранные углы, каждый отдельно и вместе взятые, имеют углы наклонения соответственно одноименные. Поэтому свойства двугранных углов те же самые, как и их углов наклонения.

3. Сумма двугранных углов, составленных плоскостями, проходящими через одну и ту же прямую, есть величина постоянная.

4. Сумма смежных двугранных углов равна двум прямым двугранным углам.

5. Вертикальные двугранные углы равны.

6. Плоскость, проведенная через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

7. Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, опущенной из точки, взятой на другой плоскости, лежит весь в этой плоскости.

8. Плоскость, перпендикулярная к прямой пересечения нескольких плоскостей, перпендикулярна к каждой из них.

9. Через данную точку к двум пересекающимся плоскостям можно провести одну перпендикулярную плоскость.

10. Плоскость, перпендикулярная к прямой, лежащей на другой плоскости, перпендикулярна к этой последней.

11. Через перпендикуляр к плоскости можно провести к этой последней множество перпендикулярных плоскостей.

В этом учебнике дается определение многогранного угла: «Пространство, заключающееся между несколькими пересекающимися плоскостями, прямые пересечения которых сходятся в одной и той же точке, называется многогранным углом». Рассматриваются только выпуклые многогранные углы. Это углы, которые все лежат с одной стороны плоскости, проведенной через каждую из его граней. Аналогично рассматриваются только выпуклые многогранники. Это многогранники, которые лежат все с одной стороны от плоскости каждой своей грани.

Заметим, что плоскостными геометрическими фигурами автор называет многогранники, так как в учебнике дается следующее определение многогранника: «Многогранником называется геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскостями». После общего определения идут частные виды: призма (прямая, правильная, усеченная, наклонная), выделяется параллелепипед (прямой, прямоугольный, куб); пирамида (правильная, усеченная); правильные многогранники (все пять типов выпуклых правильных многогранников).

По мнению автора, метод геометрии состоит из трех частей: наблюдения, проверки и обобщения. Исходя из этого, он старался соответствующим образом изложить предлагаемый материал.

Особенностью учебников данного периода стало стремление авторов, при соблюдении требования логической строгости, сделать изложение школьного курса геометрии более понятным и доступным для учащихся. С этой целью они включали в содержание задачи практического (на построение, конструктивные, на вычисление) и прикладного (из области строительной, землемерной, морской техники) характера.

Например, в 1844 году *П. С. Гурьев* (родной сын С. Е. Гурьева, о котором речь шла выше) составил и издал «Практические упражнения в геометрии». В предисловии к этой книге, объясняя основные цели и задачи своей работы, он писал: «Цель предлежащей книги состоит в том, чтобы без нарушения общепринятого способа преподавания геометрии дать ученикам возможность чаще возбуждать в себе самодеятельность, пытать свои силы в применении общих законов к частным случаям и, наконец, в преодолении затруднений собственным усиленным напряжением ума находить истинное удовольствие». Эта книга ценна тем, что содержит систему планиметрических задач на построение и вычисление. Причем задачи расположены по степени увеличения их трудности (от легких к трудным).

В связи с этим отметим также «Руководство начальной геометрии» (в трех томах) *М. В. Остроградского*. Известно, что его, как научные, так и педагогические произведения, отличались оригинальностью расположения учебного материала, строгостью изложения, новизной доказательств теорем и выводов формул, практическими приложениями. Например, в своих школьных учебниках он уделил большое внимание тригонометрии. Причем особое место отвел решению прямоугольных треугольников. Перед ними дается определение «тригонометрических линий» как отношение сторон рассматриваемых треугольников (длина гипотенузы принимается за единицу). Затем идет решение косоугольных треугольников, теорема синусов (она доказывается из рассмотрения диаметра окружности, описанной около треугольника). Даются приложения геометрии к инженерной геодезии.

В предисловии («предуведомлении») к «Руководству…» М. В. Остроградский пишет: «Сочинение это отличается от других руководств по той же науке развитием начал, порядком теорем и способом доказательств. Автор имеет в виду приблизить изложение истин начальной геометрии к способам, употребляемым в других частях математики, а потому разместил предложения в порядке, который ему показался наиболее соответствующим поставленной цели. Однако же он не посмел в первой попытке войти в решительное состязание с изложением, которому Евклид представил образец и которое употребляется более 20 веков. Теперь же только некоторые предложения доказаны способом аналитическим и без подобия фигур, т. е. дан алгебраический характер только некоторым частям геометрического изложения. Что касается до подробностей в объяснении предмета и оснований науки, предложений, на которых она основана и начальных ее истин, то некоторые из этих подробностей, а может быть и все, могут показаться бесполезными. Автор имел в виду избежать недостатка противного, т. е. неполноты объяснений. Он полагает, что составители курсов начальной геометрии по примеру Евклида сократили этот важный предмет и тем самым могли породить неясность в идеях и неправильные взгляды на начала науки».

Заметим, что современники критиковали Остроградского за то, что он недооценивал, с их точки зрения, роли наглядности при изложении геометрии. Вот как отозвался о «Руководстве…» известный российский математик *А. Н. Крылов*: «Учебником для средних школ оно служить не может, но не как учебник, а как обязательное пособие в педагогических техникумах сочинение было бы в высшей степени полезным, ибо это есть «Начальная геометрия» для взрослых, а не для мальчиков и девочек». Остроградский стремился полностью избежать наглядности. Это делалось сознательно, чтобы избежать доказательств, как говорил автор, «заимствованных от показания чувств».

Вместе с тем, наряду с авторами, которые стремились к увеличению строгости изложения, были другие, считавшие геометрию наглядным предметом, и в соответствии с этим ее излагавшие. Так, например, построен учебник *А. Ф. Малинина* «Курс наглядной геометрии и собрание геометрических задач» (1873), в котором каждое определение поясняется на реальных предметах. Приведем оглавление этого учебника:

Введение

1. Об углах.
2. О линиях, перпендикулярных и косвенных.
3. О линиях, параллельных.
4. О треугольниках.
5. О многоугольниках.
6. Об окружности.
7. Подобие фигур.
8. О площадях.
9. О линиях и плоскостях в пространстве.
10. О телах.
11. Измерение поверхности тела.
12. Измерение объема тела.

Например, в пункте «О телах» сказано, что тела могут быть ограничены плоскостями, тут же пример – обыкновенная комната, в которой находятся ученики, ящик. В учебнике помещены развертки, которые названы сетями, прямоугольного параллелепипеда, куба.

После такого изложения теории идут вопросы для учащихся. В частности, после указанного пункта даны следующие вопросы: «Что называется телом? Укажите несколько тел. Сколько измерений имеет тело? Укажите измерения комнаты, книги, мячика. Какое тело называется многогранником? Укажите несколько многогранников».

Таким образом, усвоение материала учащимися идет через ответы на вопросы и решение задач.

Эти особенности сделали учебники А. Ф. Малинина весьма популярными. Заметим, что помимо геометрии, им были написаны руководства по прямолинейной тригонометрии, арифметике, алгебре. Они имели большой успех, и среди российских преподавателей математики XIX века было немало последователей этого направления. Более подробно курсы наглядной геометрии представлены в третьем параграфе настоящей главы.

Одним из самых известных учебников геометрии рассматриваемого периода является учебник *А. Ю. Давидова* «Элементарная геометрия», который выдержал 39 изданий, первое – в 1864 году и последнее – в 1922 году.

Во введении автор представляет важные термины, основные понятия, чего не было в других учебниках. Например, математика толкуется им как учение о величинах, геометрия – отдел математики, содержащий учение о протяжении. «Геометрия рассматривает тела только относительно пространства, ими занимаемого, не обращая внимания на другие их свойства, и вследствие этого геометрическим телом, или просто телом, называют в геометрии пространство, со всех сторон ограниченное, независимо от вещества, его наполняющего. Граница тела называется поверхностью, граница поверхности – линиею, граница линии – точкою. Тела имеют три измерения: длину, ширину и высоту; поверхности – два измерения: длину и ширину; линии – одно измерение: длину, а точка не имеет никакого измерения».

Далее дается представление о линиях прямых и кривых, ломаной, суждении (мысль, в которой мы что-либо утверждаем или отрицаем), доказательстве (оправдание суждения посредством рассуждений), аксиоме (суждение, которое устанавливается без доказательства), теореме (суждение, которое устанавливается посредством доказательства), проблеме или задаче (вопрос, ответ на который основывается на доказанных предложениях), лемме (теорема, которая вводится для доказательства другой более важной теоремы или для решения задачи).

Книга состоит из двух частей.

Часть I. Планиметрия

Глава I. О прямых линиях и углах.

Глава II. О фигурах. О фигурах вообще. – Равенство треугольников. – Свойство перпендикуляра и наклонных.

Глава III. Параллельные линии. Теория параллельных линий. – Некоторые следствия ее. – О параллелограммах и трапециях.

Глава IV. Пропорциональные линии. Общая мера двух линий. – Пропорциональные линии. – Отношение линий.

Глава V. Подобие прямолинейных фигур. Подобие треугольников. – Подобие многоугольников. – Гармоническое деление.

Глава VI. Об окружности круга. Хорды и касательные. – Измерение углов. – Пропорциональные линии в круге. – Вписанные и описанные многоугольники. – Относительное положение двух окружностей. – Четыре замечательные точки треугольника. – Взаимные точки. – Поляры.

Глава VII. О правильных многоугольниках. Правильные многоугольники вписанные и описанные.

Глава VIII. Измерение площадей. Измерение площадей прямолинейных фигур. – Некоторые предложения о треугольниках, четырехугольниках и правильных многоугольниках. – Съемка плана.

Глава IX. Определение окружности и площади круга. О пределах. – Определение окружности и площади круга. – Квадратура круга. – Гиппократова луночка. – Определение площади криволинейных фигур.

Часть II. Стереометрия

Глава I. О линиях и плоскостях в пространстве. Определение положения плоскости. – Линии, перпендикулярные к плоскости. – Линии, параллельные между собой. – Линии, параллельные плоскости. – Плоскости, параллельные между собой.

Глава II. Об углах, образуемых плоскостями. Угол двух линий и угол линии с плоскостью. – Углы двугранные. – Углы многогранные. – Равенство и симметрия трехгранных углов.

Глава III. О многогранниках. Призмы, параллелепипеды и пирамиды. – Равенство призм и пирамид. – Симметричные многогранники. – Подобие многогранников.

Глава IV. Измерение объемов тела. Объем параллелепипеда, призмы и пирамиды. – Объемы подобных многогранников.

Глава V. О телах круглых. О цилиндре и конусе. – О шаре. – О сферическом треугольнике. – Подобие круглых тел. – Конические сечения.

Каждая глава завершается рубрикой «Задачи», к которым в конце учебника приведены указания для решения и ответы. Необходимо отметить, что данный учебник напечатан двумя шрифтами: крупным – обязательный для всех учащихся материал, а мелким – дополнительный, для тех, кто заинтересуется геометрией. Например, в первой части (планиметрии) к необязательному материалу отнесены некоторые предложения о треугольнике: «Сумма квадратов двух сторон AB и BC треугольника ABC равняется двойному квадрату отрезка BD, соединяющего вершину треугольника с серединой основания, сложенному с двойным квадратом половины основания, т. е.: $AB^2+BC^2=2BD^2+2AD^2$».

«Если через какую-нибудь внутреннюю точку O треугольника ABC проведем прямые AA_1, BB_1, и CC_1, разделяющие каждую сторону треугольника на два отрезка, то произведение трех отрезков, не имеющих общей вершины треугольника, равняется произведению трех других отрезков: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$».

«Если вершину B треугольника ABC соединим с произвольною точкой D противоположной стороны, то $AB^2 \cdot CD+BC^2 \cdot AD-BD^2 \cdot AC=AC \cdot AD \cdot DC$».

Далее четыре замечательные точки треугольника (точка пересечения высот, точка пересечения медиан треугольника, центр вписанной и центр описанной около треугольника окружности); квадратура круга; луночки Гиппократа и мн. др.

Все теоремы и задачи снабжены соответствующими подробными доказательствами и решениями. В стереометрии к такому материалу отнесены следующие вопросы: равенство и симметрия трехгранных углов; теоремы о равенстве двух призм или двух пирамид; симметричные многогранники; подобие многогранников; объемы подобных многогранников; сферические треугольники и др.

Следующим значительным учебником этого времени является «Сборник геометрических задач на построение и краткий курс элементарной геометрии» *А. Н. Глаголева*, изданный в 1890 году. К несомненным достоинствам этой книги относится четкость изложения, удачно подобранные иллюстрации, новизна содержания. В качестве примера приведем содержание одной из центральных тем курса - «Многогранники». В нее включен материал по комбинаторным свойствам многогранников. Доказывается теорема о том, что число плоских углов, образуемых ребрами многогранника на поверхности, вдвое больше числа его ребер, из чего, как следствие, вытекает, что число плоских углов многогранника всегда четно. Далее рассматривается и доказывается теорема Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Здесь впервые эта теорема введена в содержание основного курса геометрии и используется для построения теории правильных многогранников. Вводится несколько новых типов многогранников: призматоид – многогранник, ограниченный с двух сторон двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями, а с боков – пересекающимися плоскостями. Если в основаниях многоугольники с одинаковым числом сторон, а боковые грани – трапеции, призматоид является обелиском. Если в основаниях обелиска лежат прямоугольники, то он называется понтоном. Клин – многогранник, верхнее основание которого есть прямая линия, нижнее, ей параллельно, и боковые грани – треугольники и трапеции.

Самым популярным и долголетним учебником этого периода была знаменитая «Элементарная геометрия» *А. П. Киселева*. Уже в первом издании 1892 года учебник имел большой содержательный материал, высокое педагогическое мастерство изложения. Учебник состоял из двух частей: планиметрии и стереометрии. В первую были включены следующие вопросы: прямая линия, окружность, подобные фигуры, правильные многоугольники и вычисление длины окружности, измерение площадей, определение длины окружности и площади круга на основании аксиомы непрерывности.

Стереометрия состояла из четырех следующих отделов: прямые и плоскости; начала проекционного черчения; многогранники; круглые тела. Вопросы вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных фигур не выделены в отдельную главу, а рассматриваются при изучении конкретных многогранников и круглых тел, причем внесены новые элементы, а именно, аксиоматическое определение понятия объема и принцип Кавальери. Этот учебник отличается оригинальной подборкой задач. Причем они помещены после изучения каждой темы и разделены по рубрикам «Найти геометрические места», «Задачи на доказательство», «Задачи на вычисление» и «Задачи на построение».

Заметим, что первые учебники данного исторического периода содержали в основном теоретический материал, но постепенно авторы стали включать в свои учебники и систему тренировочных задач и упражнений. К таким учебникам относятся три последних представленных учебника А. Ю. Давидова, А. Н. Глаголева и А. П. Киселева.

В конце XIX века стали появляться отдельно издававшиеся от учебников сборники задач по геометрии. Например, отметим «Сборник геометрических задач» *В. П. Минина*, пятнадцатое издание которого вышло в 1913 году. Автор – учитель одной из московских гимназий, который предложил задачи из собственной практики работы. Таким образом, в пособие вошли разнообразные задачи для практических упражнений учеников в классе и дома, причем задачи, как на вычисление, так и на доказательство, а также задачи для «письменных переводных и окончательных испытаний учащихся».

В предисловии автор говорит, что его книга, прежде всего, адресована ученикам, а потому он старался сделать ее удобной для работы: избегал «больших числовых данных, только затрудняющих ход вычислений, а для геометрии не имеющих значения» и заботился «о выборе таких условий, которые приводили бы к результатам, по возможности, простым, имея в виду знакомить учащихся главным образом с приемами решений».

Сборник состоит из следующих двенадцати отделов и трех прибавлений.

Отделы

1. Прямая линия. Углы. Треугольники. Параллельные линии.

2. Окружность круга. Измерение углов.

3. Пропорциональность прямых линий. Подобие прямолинейных фигур. Пропорциональные линии в круге.

4. Правильные многоугольники.

5. Площади прямолинейных фигур.

6. Длина окружности. Площадь круга.

7. Прямые линии и плоскости в пространстве.

8. Тела многогранные.

9. Круглые тела.

10. Общий, несистематический. Задачи, относящиеся к различным отделам стереометрии.

11. Примеры задач на наибольшие и наименьшие величины (*maximum* и *minimum*).

12. Приложение алгебры к геометрии.

Прибавления

I. Собрание задач, решаемых совместным применением геометрии и тригонометрии.

II. Некоторые теоремы, относящиеся: а) к учению о поверхностях и телах вращения; б) к учению о проекциях. Задачи, решаемые при помощи этих теорем.

III. Список задач, служащих геометрическими темами на испытаниях зрелости во всех учебных округах России.

Приведем несколько примеров задач из данного сборника.

Задача № 229 (отдел 5). На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отложены части $AR=\frac{2}{3}AB$ и $AE=\frac{1}{3}AD$, точки R и E соединены прямой RE. Найти отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника ARE. (Ответ: 9).

Задача № 334 (отдел 8). Радиус круга, описанного около основания правильного тетраэдра, равен ρ. На каком расстоянии от вершины тетраэдра нужно провести плоскость, параллельную основанию тетраэдра, для того чтобы она разделила последний на две равновеликие части? (Ответ. $\rho\sqrt[6]{2}$.)

Автор стремился вызвать интерес у школьников, включая практические вопросы, которые решаются на основании геометрических соображений.

Например, задача № 541 (отдел 10). Из шара, составленного из железного и медного полушарий и весящего P килограммов, выпиливается куб, диагональ которого равна диаметру шара. Определить вес опилок. (Ответ. $P(\frac{3\pi-2\sqrt{3}}{3\pi})$.)

В заключение приведем пример экзаменационной геометрической задачи на аттестат зрелости для учащихся Московского учебного округа (испытания 1873 года).

Задача № 877 (прибавление III). Сторона десятиугольного основания правильной пирамиды равна 0,93 арш., апофема пирамиды равна $25\frac{5}{8}$ арш. Определить поверхность и объем описанного около пирамиды конуса, усеченного параллельно основанию, при этом дано, что сечение сделано на расстоянии $\frac{7}{9}$ высоты от основания. (Напомним, что 1 аршин = 71,1 см.)

Еще отметим «Систематический сборник геометрических задач на вычисление» *Б. Магалифа*, состоящий из двух томов. Первый посвящен планиметрии (7-е изд., 1914), второй – стереометрии (4-е изд., 1914).

В предисловии автор следующим образом объясняет причины составления подобного сборника геометрических задач:

1) На уроках геометрии достаточно времени для того чтобы «на геометрических данных повторить с учащимися задачи на различные соотношения между числами, например, нахождение чисел по их сумме и разности, по сумме или разности и отношению и т.п.». Автор считает, что в курсе геометрии подобные задачи могут быть разобраны на наглядных примерах и не решаться механически, как это происходит в курсах арифметики и алгебры.

2) Учебники геометрии содержат «более крупные теоремы, рассматривают более, так сказать, выпуклые свойства фигур и существеннейшие соотношения между их элементами». Задачи в систематическом сборнике подробно знакомят учащихся с более простыми теоремами, следствиями теорем, свойствами различных фигур.

3) Большое значение придается устным упражнениям, которые специально выделены в тексте пособия мелким шрифтом и имеют свою нумерацию. «Неприятно, тяжело видеть – говорит автор, - как юноша при решении простенькой численной задачи берется за письменные принадлежности и без них чувствует себя беспомощным».

4) При поиске любой предлагаемой задачи на первое место ставятся геометрические соображения. Отчасти поэтому в различные места сборника вставлены задачи на перегибание и разрезание фигур.

5) В сборник включены задачи с несколькими способами решениями, способствующие формированию исследовательских навыков учащихся.

Приведем несколько примеров названных задач из первого тома – планиметрии.

Задача № 51 (устная задача). Периметр прямоугольного треугольника равен 7 м, радиус вписанного круга содержит 6 дм. Определить гипотенузу. (Ответ. 29 дм.)

Задача № 52 (устная задача). Стороны треугольника содержат 8 см, 7 см и 5 см. Требуется меньшую сторону переломить на две части так, чтобы получился четырехугольник, в который можно вписать круг. (Ответ. 3 см и 2 см.)

Задача № 206 (письменная задача). Описанный угол содержит 49°. Определить дуги, заключенные между точками касания (двумя способами). (Ответ. 131° и 229°.)

Задача № 710 (письменная задача). Прямоугольник, разрезанный пополам, образует части, подобные целому прямоугольнику. Определить отношение его сторон. (Ответ. $\sqrt{2}$.)

Самыми популярными были задачники *Н. А. Рыбкина*. По геометрии это: «Собрание стереометрических задач, требующих применения тригонометрии» (1892), «Сборник геометрических задач на вычисление» (Часть I. - Планиметрия. Часть II. – Стереометрия; 1905). Эти пособия много раз переиздавались.

Первая названная книга начинается с введения, в котором учащимся представляются некоторые теоремы, формулы и преобразования, которые потребуются для решения задач сборника. Всего дано 23 таких пункта. Например: пункт V. Для определения высоты треугольника иногда удобно пользоваться двояким выражением его площади; пункт VIII. Если треугольник или многоугольник проектируется на плоскость, то площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла с плоскостью проекции; пункт XIX. Хорда равна диаметру, умноженному на синус половины дуги; пункт XXIII. Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Далее во введении приведены еще двенадцать задач, «решенных сполна – с целью указать некоторые приемы, которые понадобятся далее».

Задача № 1. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проходит плоскость, наклоненная к катетам под углами α и β. Какой угол она составляет с плоскостью треугольника? (Ответ. $\sin \varphi = \sqrt{sin^2 \alpha + sin^2 \beta}$.)

Задача № 12. Определить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают. (Ответ. 45°.)

В сборник по планиметрии включены следующие разделы: Прямая линия. Углы. Треугольники и многоугольники. Перпендикуляры и наклонные. Параллельные линии. Сумма углов треугольника и многоугольника. Параллелограммы и трапеции. Окружность. Измерение углов с помощью дуг. Описанная и вписанная окружности. Относительное положение окружностей. Пропорциональность прямых линий. Свойство биссектрисы угла в треугольнике. Подобие треугольников и многоугольников. Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырехугольников. Пропорциональные линии в круге. Правильные многоугольники. Площади прямолинейных фигур. Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей. Смешанный отдел. Ответы.

Приведем несколько примеров из последнего смешанного отдела.

Задача № 772. Данного круга касаются два меньших – один изнутри, другой извне, причем дуга между токами касания содержит 60°. Определить расстояние между центрами меньших кругов, если их радиус равен r, а радиус большего круга равен R. (Ответ. $\frac{\sqrt{7R^2+9r^2}}{2}$.)

Задача № 828*. Определить площадь треугольника по трем его медианам l, m и n. (Ответ. $\frac{4}{3}\sqrt{q(q-l)(q-m)(q-n)}$, где $q=\frac{l+m+n}{2}$.)

Задачи, отмеченные звездочкой, по существу, повышенной трудности, они имеют не только ответ, но и указание для решения.

Задача № 839*. Точка, взятая внутри угла в 60°, удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти ее расстояние от вершины угла. (Ответ: $2\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)}$).

В стереометрию вошли такие разделы: Прямые, перпендикулярные и наклонные к плоскости. Параллельные прямые и плоскости. Угол прямой линии с плоскостью. Углы двугранные и многогранные. Параллелепипеды и призмы. Пирамида. Усеченная пирамида. Усеченная призма. Цилиндр, конус и усеченный конус. Шар и его части. Смешанный отдел. Ответы.

Приведем примеры из последнего отдела.

Задача № 507. В равносторонний цилиндр вписан правильный октаэдр, а в него вписан шар. Как относится полная поверхность цилиндра к поверхности шара? (Ответ. 9:2.)

Задача № 515. Луночка, ограниченная полуокружностью и дугой в 120^{o}, вращается около линии, соединяющей середины ее дуг. Определить поверхность и объем полученного тела, если хорда луночки равна a. (Ответ. $\frac{5}{6}\pi a^2$; $\frac{\pi a^3}{216}(18-5\sqrt{3})$.)

Задача № 563. Дан бесконечный ряд правильных тетраэдров, из которых каждый следующий имеет вершины в центрах граней предыдущего. Как относится предел суммы объемов всех тетраэдров к объему большего из них? (Ответ. 27:26.)

Таким образом, в конце XIX – начале XX веков российская учебная литература по геометрии была весьма разнообразна и представляла для учителя возможность богатого выбора. Для выделенного нами исторического периода были характерны следующие черты:

1. Выделилось два основных направления изложения курса геометрии: строго дедуктивное и с привлечением большей наглядности.

2. Стал складываться определенный круг вопросов по курсам планиметрии и стереометрии. Вместе с тем учебники отличаются строгостью и стилем изложения, степенью использования наглядных иллюстраций, объемом содержания и т. п.

3. В учебниках появляются предисловия, в которых авторы подробно объясняют свои позиции, точки зрения на предмет геометрии и обращают внимание на методику ее преподавания.

4. Выделяются методические проблемы преподавания школьного курса геометрии, среди них разработка нового содержания, включение элементов истории геометрии, ее практических и прикладных аспектов, вспомогательного материала для лучшего восприятия и усвоения учащимися предлагаемых тем, дополнительного материала повышенной трудности для школьников, интересующихся геометрией.

5. В учебниках, помимо теоретических вопросов, стал появляться задачный материал. Начинают издаваться отдельные сборники задач.

6. Разрабатываются следующие классификации геометрических задач: устные и письменные; задачи на доказательство, на вычисление и на построение.

7. Авторы стремятся давать доказательства теорем, решения задач, обоснование изучаемых фактов, исходя из геометрических соображений. При этом особо выделяются задачи, которые решаются с помощью применения сведений из тригонометрии.

8. Появляются новые требования к оформлению учебной литературы, например выделение дополнительного материала (различные шрифты, звездочки), предлагаются подробные примеры оформления решения некоторых основных, важных для курса задач, даются ответы, а к задачам повышенной трудности, помимо ответов, предлагаются и указания для поиска решения и т.п. Это направлено на то, чтобы учебник или задачник были удобны для работы, как учителя, так и ученика.

Этот исторический период имел огромное значение, так как фактически был создан свой российский учебник геометрии. Поэтому после 1917 года были переизданы лучшие дореволюционные учебники и задачники, в частности А. Ю. Давидова, А. П. Киселева, Н. А. Рыбкина. Последние две названные книги (после доработки) стали стабильными действующими руководствами по геометрии для средней школы почти до конца 60-х годов XX века.

Представленные учебники и задачники по геометрии оказали огромное влияние на преподавание геометрии в российской школе. Они явились образцом для авторов многих последующих периодов. Лучшие их традиции дошли и до настоящего времени, и наша задача не разрушить их, а сохранить, приумножить и передать следующим за нами поколениям.