

## **ПЛЮСЫ И МИНУСЫ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ**

Метод математической индукции является одним из важнейших методов математики, который позволяет доказывать различные свойства из Арифметики, Алгебры, Геометрии, Математического анализа и др.

Изучению метода математической индукции в школьном курсе математики посвящено несколько книг и статей, большинство из которых сейчас доступно в электронном виде на сайтах; [mscme.ru](http://mscme.ru), [math.ru](http://math.ru) и др.

Одна из формулировок метода математической индукции состоит в следующем.

Если некоторое свойство  $P(n)$ , зависящее от натурального  $n$ , верно для  $n = 1$ , и из того, что оно верно для  $n$ , следует, что оно верно для  $n+1$ , то тогда свойство  $P(n)$  верно для любого  $n$ .

Используя метод математической индукции, докажем, что для любого натурального  $n$  верно равенство:

$$1) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Действительно, при  $n = 1$  имеем равенство

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Предположим, что верно равенство  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , и докажем, что верно равенство  $1 + 2 + \dots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . Имеем,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n + 1) &= 1 + 1 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается, что для любого натурального  $n$  верны следующие равенства:

- 2)  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ;
- 3)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ;
- 4)  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ;
- 5)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$ .

Наряду с достоинствами, доказательства по индукции имеют и свои методические недостатки. Отметим некоторые из них.

1. Запись некоторых свойств, доказываемых по индукции, имеет условный характер и требует дополнительных разъяснений. Так, при подстановке в равенство  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  значения  $n=1$ , получаем равенство:  $1 + 2 + \dots + 1 = \frac{1 \cdot 2}{1}$ , которое непонятно что означает. Аналогичная ситуация имеется и с равенствами 2) – 5).

2. Обоснование справедливости метода математической индукции уходит в основания арифметики, аксиоматику Пеано натуральных чисел, что, конечно, выходит за рамки школьного курса математики.

3. Доказательство по индукции носит, довольно, формальный характер, не всегда понятный школьникам. Так, например, при доказательстве равенства (1) ученики не понимают, почему мы предполагаем, что верно равенство  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , которое нам и нужно доказать, а если все-таки мы предположили, что оно верно, то зачем мы дальше что-то доказываем.

4. При доказательстве по индукции предполагается известным доказываемое свойство, а во многих задачах то или иное свойство требуется найти самому ученику. Например, найти сумму натуральных чисел от 1 до 100; найти сумму нечетных натуральных чисел от 1 до 99 и т. д.

Мы считаем, что успешное освоение метода математической индукции возможно в случае, если ему предшествует подготовительная работа, носящая неформальный, исследовательский характер, по нахождению и доказательству различных арифметических, алгебраических и геометрических свойств и формул, зависящих от натурального  $n$ .

Приведем несколько примеров таких задач, подводящих к методу математической индукции, решение которых будет полезно также в том случае, если в дальнейшем не предполагается изучение этого метода.

Учащимся 5-6 классов можно предложить следующую простую задачу.

Задача 1. Найдите сумму  $1 + 2 + \dots + 9 + 10$ .

Непосредственный подсчет показывает, что искомая сумма равна 55.

После этого задачу можно усложнить.

Задача 1'. Найдите сумму  $1 + 2 + \dots + 99 + 100$ .

Здесь уже непосредственный подсчет довольно утомителен. Учащимся можно предложить придумать метод нахождения этой суммы, не проводя непосредственного суммирования. Один из таких методов заключается в следующем. Перепишем эту сумму в обратном порядке и расположим ее слагаемые под соответствующими слагаемыми данной суммы

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + 99 + 100 \\ 100 + 99 + \dots + 2 + 1 \end{array}$$

Заметим, что суммы чисел, стоящих в столбцах, равны 101, а число столбцов равно 100. Следовательно, сумма всех чисел, стоящих в первой и второй строках, равна  $100 \cdot 101 = 10100$ . Так как суммы чисел в первой и второй строках равны, то искомая сумма натуральных чисел от 1 до 100 равна  $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$ .

Закреплению этого метода служит следующая задача.

Задача 2. Найдите сумму нечетных чисел  $1 + 3 + \dots + 99$ .

Для ее решения так же, как и в предыдущей задаче перепишем данную сумму в обратном порядке и расположим ее слагаемые под соответствующими слагаемыми данной суммы

$$\begin{array}{r} 1 + 3 + \dots + 99 \\ 99 + 97 + \dots + 1 \end{array}$$

Суммы чисел, стоящих в столбцах, равны 100. Вопрос только в том, сколько столбцов? Для ответа на него можно рассмотреть четные числа 2, 4, ..., 100, и заметить, что их столько же, сколько нечетных чисел 1, 3, ..., 99. Действительно, четные числа получаются из нечетных прибавлением 1. Поскольку всего имеется 100 чисел, то число нечетных чисел равно числу четных и равно 50. Таким образом, сумма всех чисел, стоящих в первой и второй строках, равна  $50 \cdot 100 = 5000$ , а искомая сумма нечетных чисел от 1 до 99 равна  $\frac{50 \cdot 100}{2} = 2500$ .

Решение этой и предыдущей задач позволяет продемонстрировать учащимся 5-6 классов мощь математических методов, с помощью которых удается находить простые решения для, казалось бы, сложных задач, показывает, что перед тем как приступить к решению той или иной задачи нужно подумать, тем самым формирует навыки исследовательской деятельности учащихся.

По аналогии с решением этих задач, можно найти и доказать формулы для сумм:  $1 + 2 + \dots + n$  и  $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ .

Задача 3. Найдите сумму  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ .

Решение. Представим слагаемые этой суммы в виде разностей:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \dots \quad \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

Тогда данную сумму можно переписать в виде

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

Нетрудно видеть, что все промежуточные слагаемые этой алгебраической суммы сокращаются, и остаются только первое и последнее слагаемые. В результате получаем:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99.$$

По аналогии с решением этой задачи, можно найти и доказать формулы для сумм:

а)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ ;

б)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ;

в)  $1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ ;

г)  $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ .

Задача 4. Докажите, что для любого действительного числа  $a$ , отличного от 1, и любых натуральных чисел  $n$  выполняется равенство:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Умножим левую часть данного равенства на  $a - 1$ . Получим  $(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(a - 1) = a - 1 + a^2 - a + a^3 - a^2 + \dots + a^{n+1} - a^n$ .

Нетрудно видеть, что в полученной алгебраической сумме сокращаются все слагаемые, кроме  $a^{n+1}$  и  $-1$ . Таким образом, имеет место равенство  $(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(a - 1) = a^{n+1} - 1$ . Так как  $a$  не равно 1, то имеет место и требуемое равенство.

В частности, при  $a = 2$  получаем равенство

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

При  $a = \frac{1}{2}$  получаем равенство, из которого легко следует равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

Задача 5. Докажите, что для любого действительного числа  $a$ , отличного от  $-1$ , и любых натуральных чисел  $n$  выполняется равенство:

$$1 - a + a^2 - \dots + a^{2n} = \frac{a^{2n+1} + 1}{a + 1}.$$

Умножим левую часть данного равенства на  $a + 1$ . Получим  $(1 - a + a^2 - \dots + a^{2n})(a + 1) = a + 1 - a^2 - a + a^3 + a^2 - \dots + a^{2n+1} + a^{2n}$ .

Нетрудно видеть, что в полученной алгебраической сумме сокращаются все слагаемые, кроме  $a^{2n+1}$  и 1. Таким образом, имеет место равенство  $(1 - a + a^2 - \dots + a^{2n})(a + 1) = a^{2n+1} + 1$ . Так как  $a$  не равно  $-1$ , то имеет место и требуемое равенство.

Отметим, что приведенные выше решения позволяют осуществить плавный переход от конкретных значений  $n$  к общему случаю, что важно на начальных этапах знакомства с методом математической индукции. Кроме того, они носят исследовательский характер, позволяют лучше запомнить окончательную формулу, а при необходимости и восстановить ее вывод.

Приведем несколько примеров геометрических задач, включающих свойства, зависящие от натурального  $n$ , и позволяющих, постепенно увеличивая конкретные значения  $n$ , переходить к общему случаю.

Задача 6. На сколько частей разбивается прямая: а) одной точкой; б) двумя точками; в) тремя точками; г) четырьмя точками; д)  $n$  точками, принадлежащими этой прямой?

Ответ: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д)  $n+1$  (рис. 1).

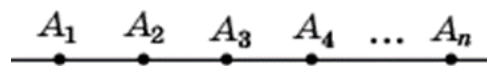


Рис. 1

Задача 7. На сколько частей разбивается окружность: а) одной точкой; б) двумя точками; в) тремя точками; г) четырьмя точками; д)  $n$  точками, принадлежащими этой окружности?

Ответ: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д)  $n$  (рис. 2).

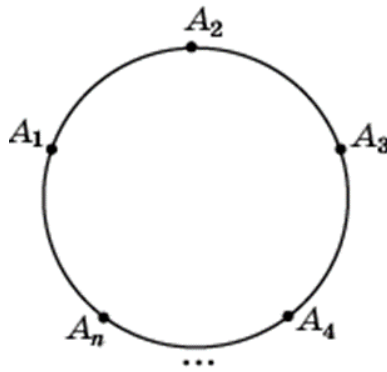


Рис. 2

Задача 8. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) двух точек; б) трех точек; в) четырех точек; г) пяти точек; д)\*  $n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

Ответ: а) 1; б) 3; в) 6; г) 10.

д)\* Решение. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  —  $n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой (рис. 3). Выясним, сколько прямых проходит через точку  $A_1$  и одну из оставшихся точек. Так как число оставшихся точек равно  $n - 1$  и через каждую из них и точку  $A_1$  проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно  $n - 1$ . Заметим, что рассуждения, проведенные для точки  $A_1$ , справедливы для любой точки. Поскольку всего точек  $n$  и через каждую из них проходит  $n - 1$  прямая, то число подсчитанных прямых будет равно  $n(n - 1)$ . Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при  $n = 3$  получаем  $n(n - 1) = 6$ , а число прямых, на самом деле, равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчете мы каждую прямую подсчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из  $n$  данных точек, равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

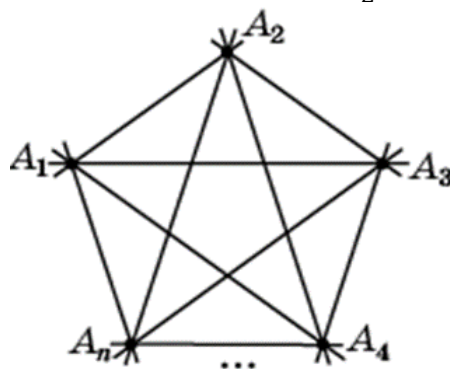


Рис. 3

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем она будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается

двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из  $n$  элементов. При этом не имеет значения, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из  $n$  элементов по два и обозначается  $C_n^2$ . Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно  $C_{20}^2 = 190$ .

Задача 9. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две прямые; б) три прямые; в) четыре прямые; г) пять прямых; д)\*  $n$  прямых?

Ответ: а) 1; б) 3; в) 6; г) 10 (рис. 4).

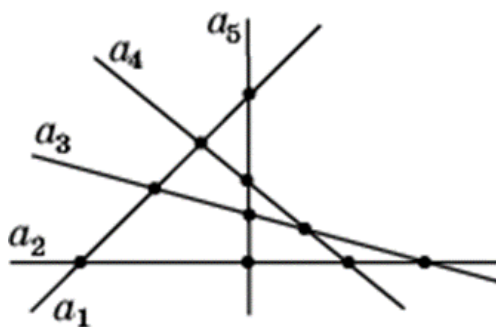


Рис. 4

д)\* Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке (рис. 4). В этом случае количество точек попарных пересечений равно количеству пар прямых из данной совокупности  $n$  прямых. Как мы знаем, это число равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Приведем еще одно решение этой задачи. Выясним, какое наибольшее число точек пересечения может добавиться к уже имеющимся, при добавлении новой прямой. Пусть две прямые имеют одну общую точку. При добавлении третьей прямой может появиться не более двух новых точек, поскольку имеется только две прямые, с которыми может пересекаться третья прямая, и две точки появляются, если новая прямая пересекает каждую из двух имеющихся прямых в точках, отличных от точки их пересечения. Аналогично, при добавлении  $n$ -ой прямой может появиться не более  $n-1$  новых точек пересечения, поскольку имеется  $n-1$  прямая, с которыми может пересекаться  $n$ -я прямая, и  $n-1$  точка появляется, если новая прямая пересекает каждую из имеющихся  $n-1$  прямых в точках, отличных от точек пересечения  $n-1$  имеющихся прямых. Таким образом, наибольшее число точек попарных пересечений  $n$  прямых равно  $1 + 2 + \dots + (n-1)$ . Как мы знаем, эта сумма равна  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Задача 10. На какое наибольшее число частей разбивается плоскость: а) одной прямой; б) двумя прямыми; в) тремя прямыми; г) четырьмя прямыми; д)\*  $n$  прямыми?

Ответ: а) 2; б) 4; в) 7; г) 11 (рис. 5).

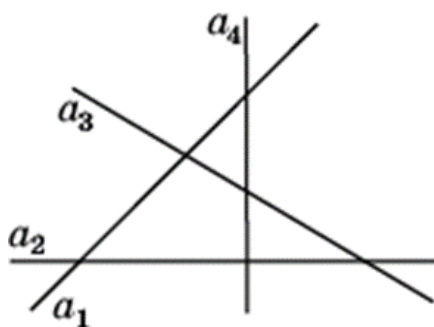


Рис. 5

д)\* Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырех частей плоскости разбиваются на две части, и общее число образованных частей равно  $7 = 4 + 3$ . Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку  $n$ -я прямая пересекается с  $n - 1$  прямой, то она разбивается на  $n$  частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на  $n$ . Таким образом, общее число частей, на которые  $n$  прямых разбивают плоскость, равно  $4 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2} + 1$ .

Аналогичным образом решаются следующие две задачи.

Задача 11. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности; г) пять окружностей; д)\*  $n$  окружностей?

Ответ: а) 2; б) 6; в) 12; г) 20; д)\*  $n(n - 1)$  (рис. 6).

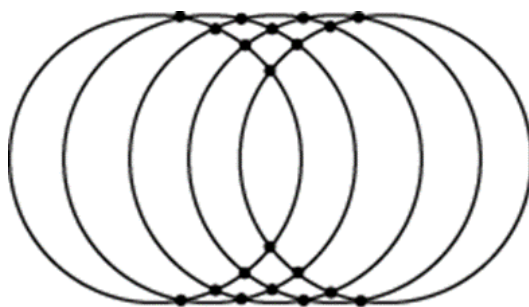


Рис. 6

Задача 12. На какое наибольшее число частей разбивается плоскость: а) одной окружностью; б) двумя окружностями; в) тремя окружностями; г) четырьмя окружностями; д)\*  $n$  окружностями?

Ответ: а) 2; б) 4; в) 8; г) 14; д)\*  $n(n - 1) + 2$  (рис. 7).

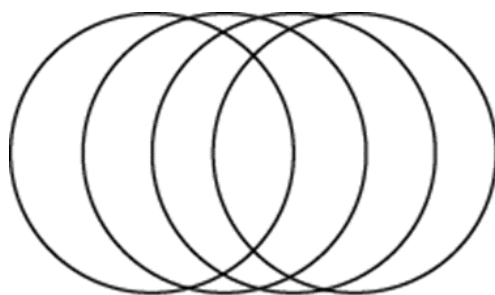


Рис. 7

Задача 13. Сколько диагоналей имеет: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д)\*  $n$ -угольник?

Ответ: а) 0; б) 2; в) 5; г) 9.

д)\* Решение. Зафиксируем какую-нибудь вершину  $n$ -угольника. Учитывая, что диагональю является отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника, получаем, что через данную вершину проходит  $n - 3$  диагонали (рис. 8). Поскольку общее число вершин равно  $n$ , через каждую из них проходит  $n - 3$  диагонали, и при таком подсчете каждая диагональ считается дважды, получаем, что общее число диагоналей равно  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

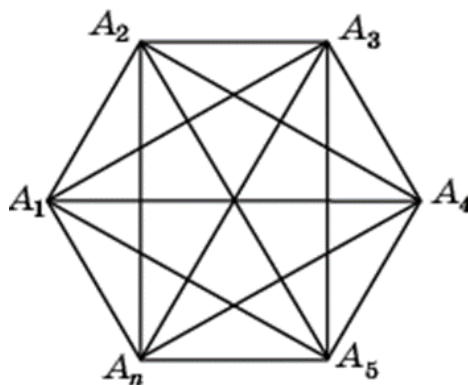


Рис. 8

Задача 14. Докажите, что все возможные карты на плоскости, образованные прямыми, могут быть правильно раскрашены в два цвета, т.е. таким образом, чтобы соседние области были окрашены в разные цвета. Соседними считаются области, имеющие в качестве общей границы отрезок, луч или прямую.

Решение. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно правильно раскрасить в два цвета (рис. 9, а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, правильно раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой также может быть



раскрашена в два цвета (рис. 9, б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрасненные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой ее области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 9, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть правильно раскрашена в два цвета.

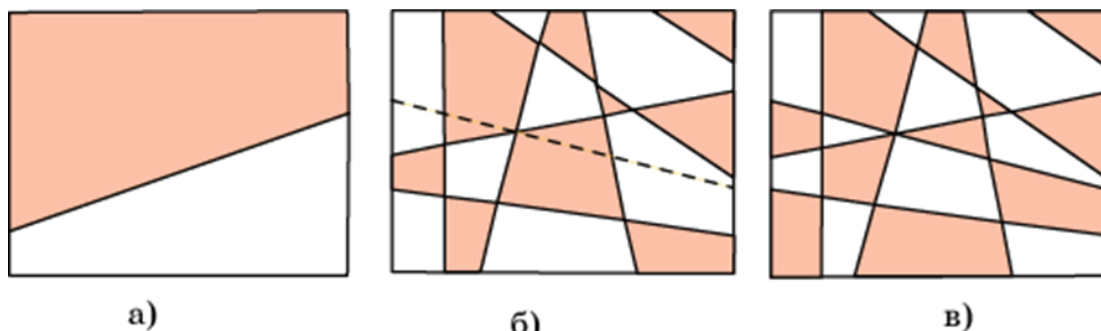


Рис. 9

Аналогичным образом решается следующая задача.

Задача 15. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть правильно раскрашены в два цвета.

### Литература

1. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976.
2. Демман И.Я. Метод математической индукции. – М.: Учпедгиз, 1957.
3. Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. – М.: Наука, 1967.
4. Шень А. Математическая индукция. – М.: МЦНМО, 2004.