Использование программы GeoGebra при изучении теорем[1]

Теоремы и их доказательства составляют основу геометрии. Трудности, возникающие при их изучении, связаны с неочевидностью утверждений многих теорем и высокой долей абстракции их доказательств.

Нередко обучающиеся просто выучивают формулировки теорем и доказательства, не понимая их по существу. По прошествии времени учащиеся забывают не только доказательства, но даже и формулировки теорем.

Для решения проблемы повышения эффективности обучения геометрии, в начале прошлого века были предложены подходы к обучению, основанные на опытных и лабораторных работах [1, 2].

Так в книге [1] в основу обучения геометрии положен индуктивный метод, согласно которому учащиеся сначала должны сами при помощи опыта, на отдельных конкретных случаях, подметить искомую зависимость, и только после этого даётся логическое доказательство.

В предисловии к книге [2] указывается, что она составлена с целью так расположить геометрический материал, чтобы у изучающих его вырабатывалось уменье выполнять нужные в жизни измерения и построения, развивалась наблюдательность, практическая сметка, ясность мыли и доверие к выводам её.

Современные компьютерные средства, в частности программа GeoGebra, которую свободно можно скачать с официального сайта www.geogebra.org, позволяют по-новому взглянуть на эти подходы.

Здесь мы рассмотрим возможности использования программы GeoGebra для проведения геометрических опытов, иллюстраций формул и теорем, установления зависимостей между геометрическими величинами и т. п.

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 10.1.

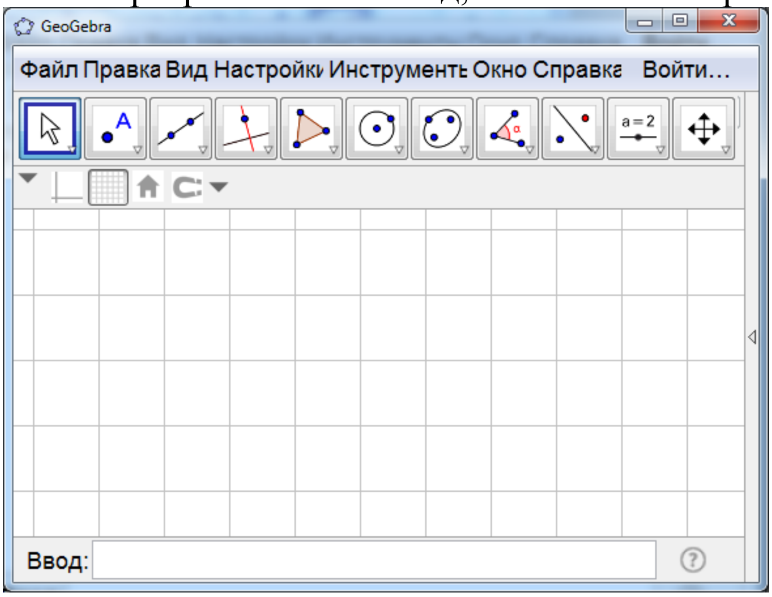


Рис. 10.1

[1] Математика в школе, – 2017. – № 3. – С. 34-39.

В верхней части рабочего окна имеется панель инструментов - строка с окошками с изображением инструментов.

С помощью этих инструментов можно:

- изображать точки;
- изображать отрезки, лучи и прямые, проходящие через данные точки;
- проводить прямые, параллельные или перпендикулярные данной прямой;
- строить угол заданной градусной величины;
- строить середину отрезка и биссектрису угла;
- изображать многоугольники, указанием их вершин;
- изображать правильные многоугольники, указанием двух их соседних вершин;
- изображать окружности с данным центром и данным радиусом или с тремя её точками;
- проводить касательные прямые к окружности;
- строить фигуру, симметричную данной относительно: а) точки; б) прямой;
- поворачивать фигуру вокруг данной точки на данный угол;
- находить длины отрезков, периметры многоугольников, величины углов, площади фигур;
- изменять стиль, толщину, цвет линий и многое другое.

Начнём с одной из основных теорем геометрии о сумме углов треугольника.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить треугольник, с помощью транспортира измерить его углы и найти их сумму. При этом одним учащимся можно предложить изобразить остроугольный треугольник, другим – прямоугольный, третьим – тупоугольный треугольник. В качестве ответов у учащихся могут получаться значения, близкие к 180°, что объясняется погрешностью измерений.

Для более точных построений и измерений углов можно воспользоваться программой GeoGebra. В ней можно изобразить произвольный треугольник, указав его вершины, найти величины его углов и их сумму. На рисунке 10.2 показан результат таких действий.

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но сумма углов этого треугольника будет оставаться равной 180°.

Конечно, проведённая проверка не заменяет доказательства. Она лишь подкрепляет его собственными опытами и наглядными представлениями.

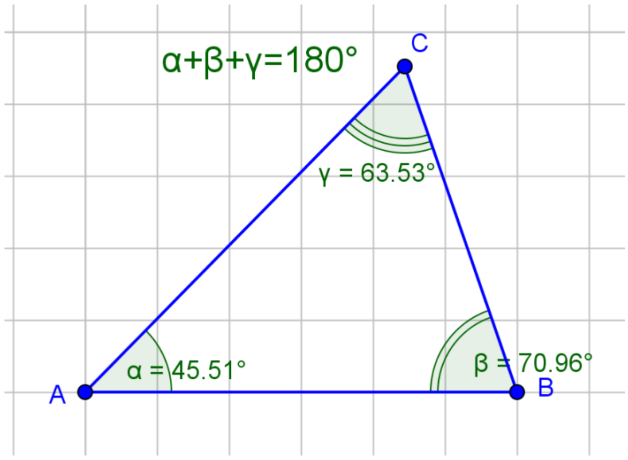


Рис. 10.2

Для проведения доказательства также можно воспользоваться программой GeoGebra. А именно, изобразим треугольник *ABC* и через его вершину *C* проведём прямую *c*, параллельную прямой *AB* (рис. 103).

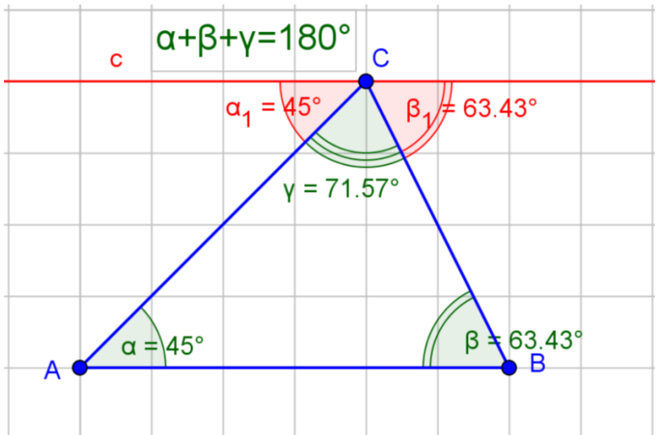


Рис. 10.3

Внутренние накрест лежащие углы α и α_1 при параллельных прямых *AB*, *c* и секущей *AC* равны, по ранее изученной теореме. В равенстве этих углов можно дополнительно убедиться, найдя их величину. Аналогично, внутренние накрест лежащие углы β и β_1 при параллельных прямых *AB*, *c* и секущей *BC* равны. Перемещая вершину *C*, форму треугольника *ABC* можно менять, но указанные внутренние накрест лежащие углы будут оставаться равными.

Углы α_1, γ, β_1 в сумме составляют развёрнутый угол, величина которого равна 180°. Следовательно, и сумма углов треугольника *ABC* равна 180°.

Одними из важных теорем геометрии являются теоремы о средних линиях треугольника и трапеции.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить треугольник, *ABC*; отметить середины *D*, *E* его сторон *AC*, *BC* соответственно; провести среднюю линию *DE*; с помощью линейки измерить её и сторону *AB* треугольника; убедиться в том, что средняя линия *DE* равна половине стороны *AB*.

Для того чтобы убедиться в параллельности средней линии *DE* стороне *AB*, учащимся можно предложить измерить с помощью транспортира углы, образованные прямыми *AB*, *DE* и секущей *AC*; убедиться, что углы *CAB* и *CDE* равны. Следовательно, средняя линия *DE* параллельна стороне *AB*.

Все эти построения и измерения можно провести в программе GeoGebra (рис. 10.4).

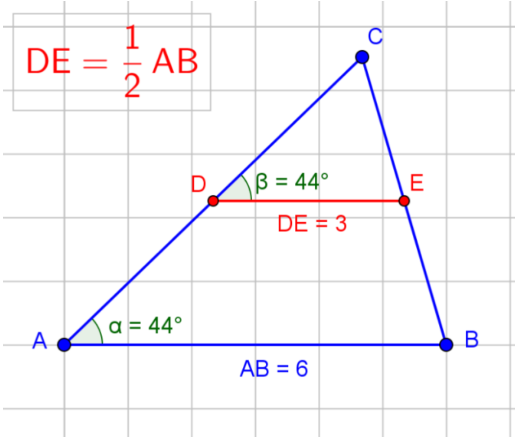


Рис. 10.4

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но средняя линия треугольника будет оставаться параллельной одной из его сторон и равна её половине.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Прежде чем представлять формулировку теоремы и её доказательство, учащимся можно предложить изобразить трапецию *ABCD* (*AB* || *CD*); отметить середины *E*, *F* боковых сторон *AD*, *BC* соответственно; провести среднюю линию *EF*; с помощью линейки измерить её и основания *AB*, *CD*; убедиться, что средняя линия *EF* равна их полусумме.

Для того чтобы убедиться в параллельности средней линии *EF* основанию *AB*, учащимся можно предложить измерить с помощью транспортира углы, образованные прямыми *AB*, *EF* и секущей *AD*; убедиться, что углы *DAB* и *DEF* равны. Следовательно, средняя линия *EF* параллельна основанию *AB*, значит, и основанию *CD*.

Все эти построения и измерения можно провести в программе GeoGebra (рис. 10.5).

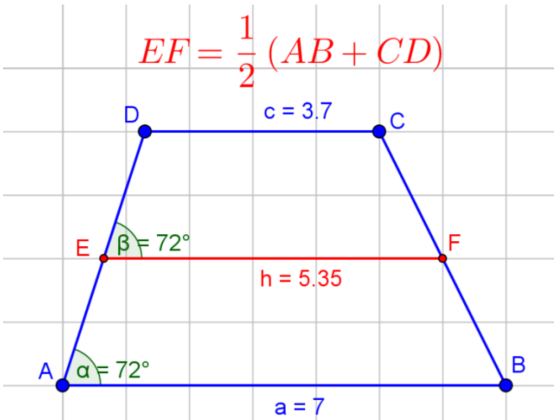


Рис. 10.5

Перемещая вершины, форму трапеции можно изменять, но её средняя линия будет оставаться параллельной основаниям и равна их полусумме.

Рассмотрим ещё одну важную теорему об углах, вписанных в окружность.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Учащимся можно предложить изобразить окружность, вписанный в неё угол ACB и центральный угол AOB, опирающийся на ту же дугу; с помощью транспортира измерить эти углы и убедиться в справедливости теоремы.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.6).

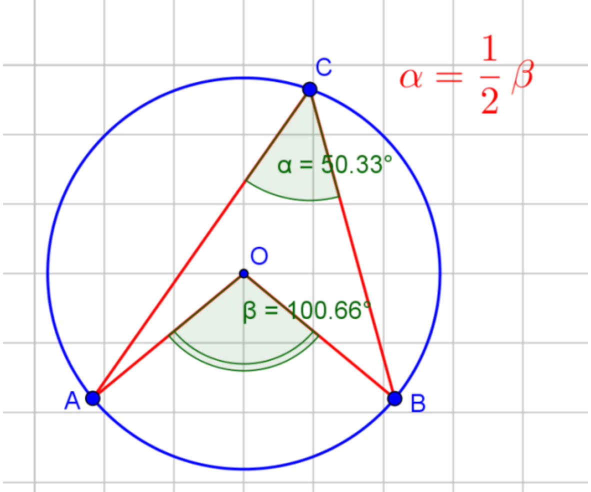


Рис. 10.6

Перемещая точки A, B, C, вписанный и центральный углы можно изменять, но при этом величина вписанного угла будет оставаться равной половине величины соответствующего центрального угла.

Теорема. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

Учащимся можно предложить изобразить окружность; выбрать какую-нибудь точку вне этой окружности; провести из неё касательные к окружности и отметить точки касания; измерить отрезки касательных от выбранной точки до точек касания; убедиться в равенстве этих отрезков.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.7).

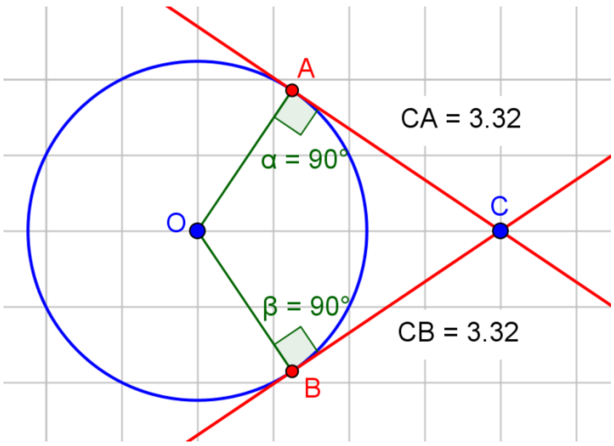


Рис. 10.7

Положение точки C можно изменять, но отрезки касательных будут оставаться равными.

Теорема. Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

Учащимся можно предложить изобразить окружность; построить четырёхугольник, описанный около этой окружности; измерить его стороны и убедиться в том, что суммы противоположных сторон равны.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.8).

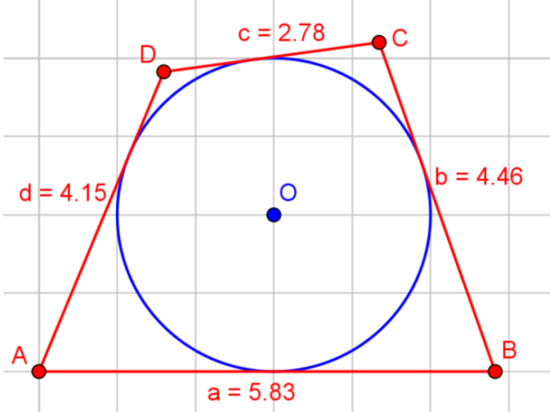


Рис. 10.8

А именно, сначала построим окружность. Затем отметим какую-нибудь точку A вне этой окружности и проведём через неё касательные. Отметим на этих касательных точки B, D и проведём через них касательные к окружности. Найдём точку C их пересечения. Сделаем касательные невидимыми. Построим четырёхугольник $ABCD$ и измерим его стороны.

Перемещая точки A, B, D, форму четырёхугольника $ABCD$ можно изменять, но суммы его противолежащих сторон будут оставаться равными.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центроиде) и делятся в ней в отношении 2:1, считая от его вершин.

Учащимся можно предложить изобразить треугольник, провести в нём медианы и убедиться, что они пересекаются в одной точке. С помощью линейки измерить расстояние от вершины треугольника до точки пересечения медиан и от неё до основания этой медианы. Убедиться в том, что первое расстояние в два раза больше второго.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.9).

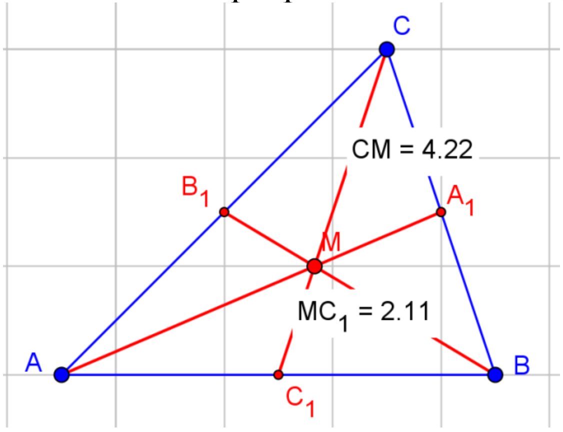


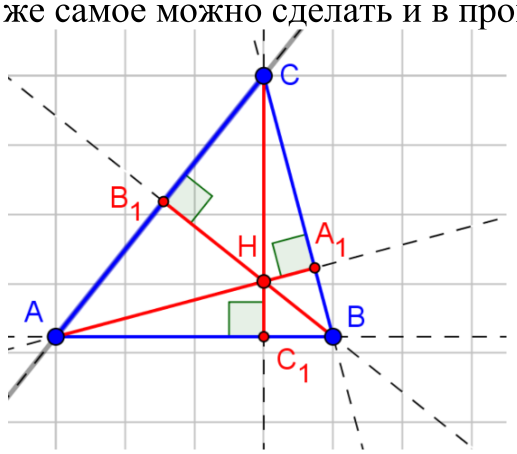
Рис. 10.9

Перемещая вершины, форму треугольника можно изменять, но его медианы будут пересекаться в одной точке, сохраняя отношение 2:1.

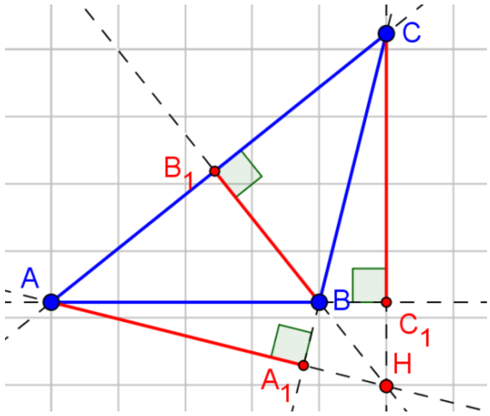
Теорема. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре).

Учащимся можно предложить изобразить: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный треугольник. Затем провести в них высоты или их продолжения; выяснить, в каком случае высоты пересекаются в одной точке, а в каком – их продолжения.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.10).



а)



б)

Рис. 10.10

Аналогичным образом можно поступить и с точкой пересечения биссектрис (центр вписанной окружности), точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (центр описанной окружности).

Теорема (Пифагора). В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Прежде чем доказывать эту теорему, учащимся можно предложить изобразить прямоугольный треугольник; измерить его катеты и гипотенузу; убедиться в том, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

То же самое можно сделать и в программе GeoGebra (рис. 10.11).

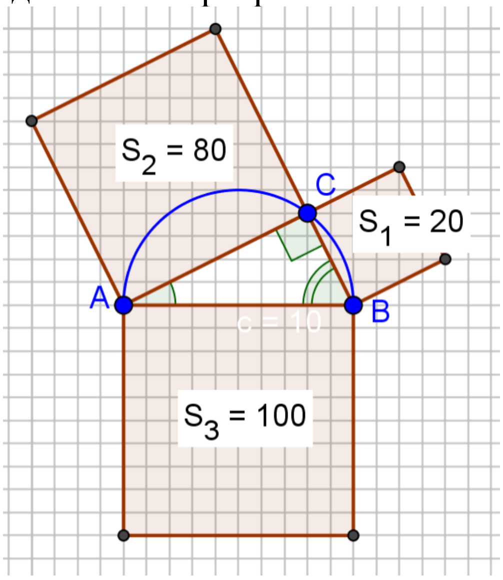


Рис. 10.11

Для этого сначала строим отрезок AB. Затем на нём, как на диаметре, строим окружность. Выбираем на окружности какую-нибудь точку C и строим прямоугольный треугольник ABC. На сторонах этого треугольника строим квадраты и находим их площади. Убеждаемся, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Перемещая вершину C по окружности, форму треугольника можно изменять, но площадь квадрата, построенного на гипотенузе, будет оставаться равной сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Литература

1. Астряб А. М. Курс опытной геометрии. Индуктивно-лабораторный метод изложения. – 14-е изд. – М.-Л.: 1928.
2. Иовлев М. Н. Практическая геометрия. – М.: Государственное издательство, 1922.