В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

2023

Смирнов В. А., Смирнова И. М.

Геометрические места точек: учебное пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: МЦНМО, 2023.

В пособии рассматриваются классические геометрические места точек на плоскости и в пространстве, а также предлагаются задачи на нахождение геометрических мест точек различного уровня трудности. Решением этих задач можно заниматься на основных уроках, при проведении кружков, курсов по выбору, при подготовке к участию в различных турнирах, конкурсах и олимпиадах по математике. В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям. Для моделирования геометрических мест точек показано использование компьютерной программы GeoGebra.

ВВЕДЕНИЕ

Один из основных способов задания фигур на плоскости заключается в указании свойства, которому удовлетворяют точки этой фигуры.

Фигуры, состоящие из тех и только тех точек, которые удовлетворяют заданному свойству, получили особое название «геометрические места точек».

Таким образом, ***геометрическим местом точек*** (ГМТ) называется фигура, состоящая из тех и только тех точек, которые удовлетворяют заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Поясним смысл слов “тех и только тех точек» в этом определении. Они означают, что все точки, принадлежащие фигуре, удовлетворяют заданному свойству, и, наоборот, все точки, удовлетворяющие заданному свойству, принадлежат фигуре. Другими словами, точка принадлежит фигуре в том и только том случае, когда для неё выполняется заданное свойство.

Будем записывать геометрические места точек, используя фигурные скобки и специальные значки, аналогично тому как это делается для множеств

$$\{A \mid \text{Свойство}\},$$

где сначала указывается обозначение точек, а затем – свойство или несколько свойств, которому они удовлетворяют.

Геометрическое место точек является одним из важнейших понятий геометрии. Метод геометрических мест широко используется при решении различных математических задач.

Решение задач на геометрические места точек учит: устанавливать фигуры по заданным свойствам; изображать и моделировать эти фигуры; доказывать, что найденные фигуры являются искомыми ГМТ. Всё это способствует развитию геометрических представлений учащихся, знакомит их с геометрическими фигурами, различными способами их задания и свойствами, формирует навыки исследовательской деятельности.

В середине прошлого века обучению учащихся решению задач на нахождение геометрических мест точек уделялось большое внимание. Было издано несколько сборников задач на геометрические места точек [1-6]. К сожалению, в дальнейшем они не переиздавались.

В настоящем пособии рассматриваются классические геометрические места точек на плоскости и в пространстве, а также предлагаются задачи на нахождение геометрических мест точек различного уровня трудности, решением которых можно заниматься как на основных уроках, так и при проведении кружков, курсов по выбору, а также при подготовке школьников к участию в турнирах, конкурсах и олимпиадах по математике

В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям.

Для моделирования геометрических мест точек показано использование свободно распространяемой компьютерной программы GeoGebra, которую можно бесплатно скачать на официальном сайте **geogebra.org**.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

1. Прямые и окружности

Напомним, что окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из тех и только тех точек, расстояние от которых до данной точки равно данному расстоянию.

Таким образом, ***окружность*** является геометрическим местом точек, расстояние от которых до данной точки равно данному расстоянию. Данная точка является центром окружности, данное расстояние – радиусом окружности (рис. 1.1).

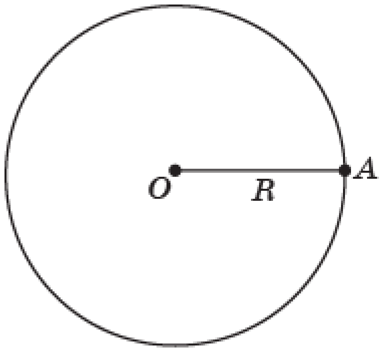


Рис. 1.1

Как было сказано выше, будем записывать геометрические места точек, используя фигурные скобки и специальные значки, аналогично тому, как это делается для множеств

$$\{A \mid \text{Свойства}\},$$

где сначала указывается обозначение точек, а затем – свойство или несколько свойств, которому они удовлетворяют.

Например, окружность с центром в точке O и радиусом R можно записать в виде

$$\{A \mid OA = R\}.$$

Круг является ГМТ, расстояние от которых до данной точки не превосходит данное расстояние. Данная точка является центром круга, данное расстояние – радиусом круга (рис. 1.2).

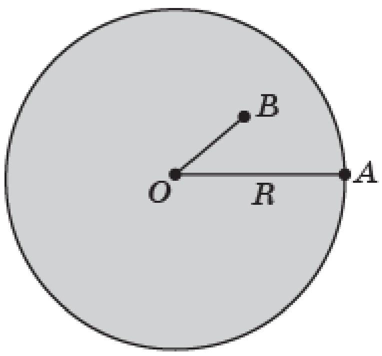


Рис. 1.2

Круг с центром в точке O и радиусом R можно записать в виде

$$\{B \mid OB \leq R\}.$$

Упражнения

1. На прямой c даны две точки A и B. Укажите геометрическое место точек X прямой c, для которых $AX \leq BX$ (рис. 1.3).

Рис. 1.3

2. На прямой c даны три точки A, B и C (рис. 1.4). найдите геометрическое место точек X прямой c, для которых $BX \leq AX \leq CX$.

Рис. 1.4

3. Какая фигура является геометрическим местом точек плоскости, удалённых от данной точки O на данное расстояние R?

4. Какая фигура является геометрическим местом точек плоскости, удалённых от данной точки O на расстояние, не превосходящее данное число $R > 0$?

5. Какая фигура является геометрическим местом точек плоскости, удалённых от данной точки O на расстояние: а) меньшее; б) большее данного числа $R > 0$?

6. Для данных точек A и B (рис. 1.5) изобразите ГМТ: а) $\{C \mid AC \leq AB\}$; б) $\{C \mid AC \leq AB$ и $BC \leq AB\}$; в) $\{C \mid AC \leq AB$ и $BC \geq AB\}$; г) $\{C \mid AC \leq AB$ или $BC \leq AB\}$.

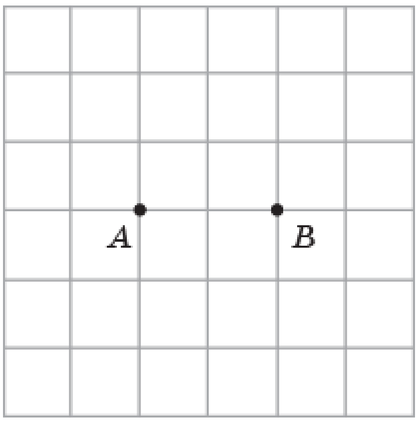


Рис. 1.5

7. Для данных точек A, B, C, расположенных в вершинах правильного треугольника (рис. 1.6) изобразите ГМТ: а) $\{D \mid AD \leq AB$ и $BD \leq AB$ и $CD \leq AB\}$; б) $\{D \mid AD \leq AB$ и $BD \leq AB$ и $CD \geq AB\}$; в) $\{D \mid AD \leq AB$ и $BD \leq AB$ или $CD \leq AB\}$; г) $\{D \mid AD \leq AB$ или $BD \leq AB$ или $CD \leq AB\}$.

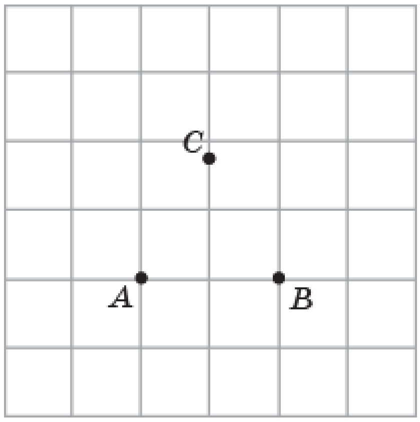


Рис. 1.6

8. Найдите геометрическое место центров окружностей радиусом R, проходящих через данную точку A.

9. Дана прямая a и точка B, находящаяся от неё на расстоянии 2 (рис. 1.7). Укажите ГМТ прямой a, удалённых от точки B на расстояние, не превосходящее 3. Стороны клеток равны 1.

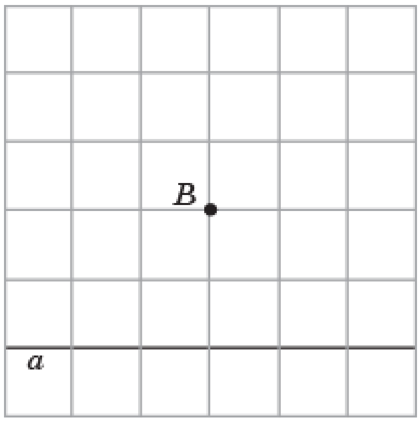


Рис. 1.7

10. Укажите ГМТ, расстояние от которых до окружности с центром O и радиусом 2 равно 1 (рис. 1.8).

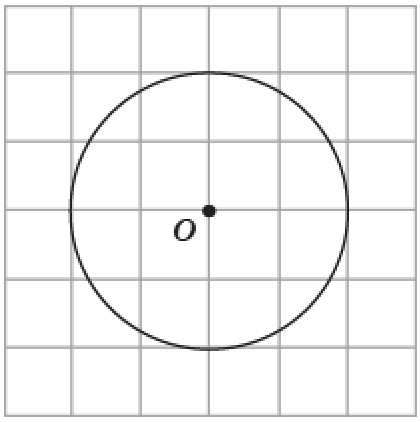


Рис. 1.8

11. Найдите геометрическое место центров окружностей радиусом R_2, касающихся данной окружности с центром O и радиусом R_1. Рассмотрите различные случаи.

12. Для данной точки O на клетчатой бумаге (рис. 1.9) изобразите геометрическое место точек C, $\{C \mid 1 \leq OC \leq 2\}$. Стороны клеток равны 1.

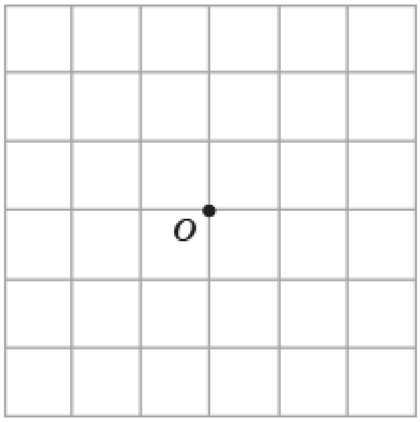


Рис. 1.9

13. Запишите фигуру, закрашенную на рисунке 1.10. Стороны клеток равны 1.

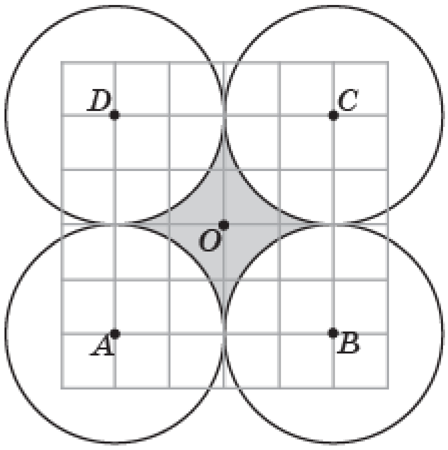


Рис. 1.10

14. Для данной окружности с центром O найдите ГМ середин хорд данной длины (рис. 1.11).

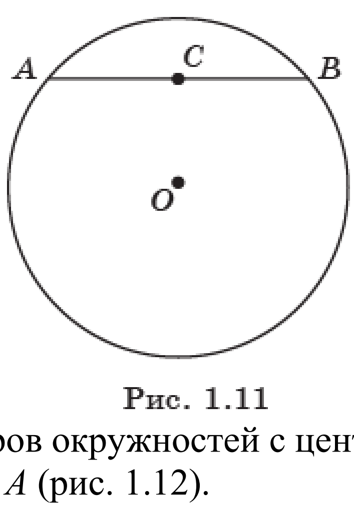


Рис. 1.11

15. Найдите ГМ центров окружностей с центром O, касающихся данной окружности в данной точке A (рис. 1.12).

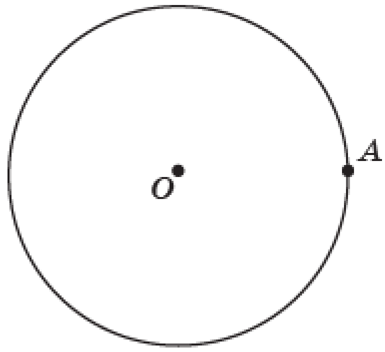


Рис. 1.12

16. Найдите ГМ центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке *A* (рис. 1.13).

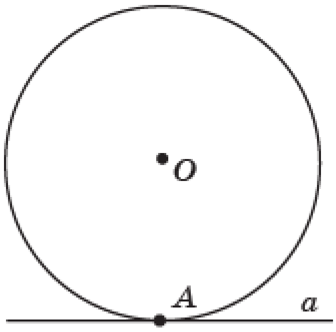


Рис. 1.13

17. Найдите ГМ центров окружностей, касающихся двух данных концентрических окружностей с радиусами *R* и *r* (*R* > *r*) (рис. 1.14).

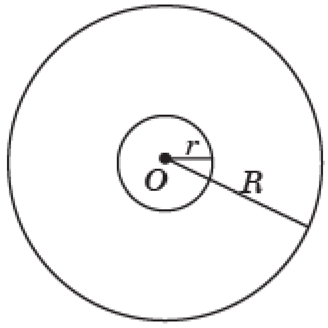


Рис. 1.14

18. Найдите ГМТ *C*, из которых отрезки касательных *CA*, проведённых к данной окружности, равны данному числу *c* (рис. 1.15).

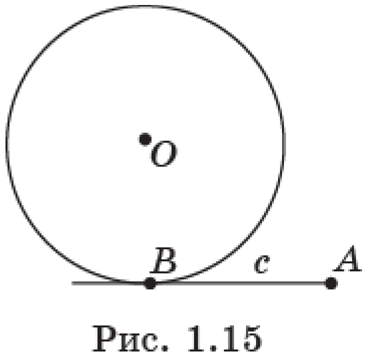


Рис. 1.15

2. Серединный перпендикуляр

Напомним, что ***серединным перпендикуляром*** к заданному отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Теорема 1. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, одинаково удалённых от концов этого отрезка.

Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O – его середина. Докажем, что геометрическим местом точек, одинаково удалённых от точек A и B является серединный перпендикуляр c к отрезку AB (рис. 2.1).

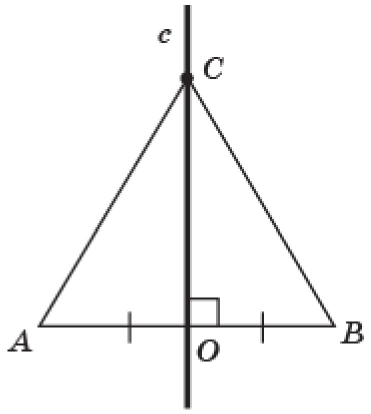


Рис. 2.1

Действительно, точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с точкой O. Тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по двум катетам). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от точек A и B. Обратно, если точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O, то треугольник ABC – равнобедренный, и CO – медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB.

Теорема 2. Геометрическим местом точек, расстояние от которых до данной точки A меньше, чем расстояние до данной точки B, является полуплоскость, содержащая точку A, ограниченная серединным перпендикуляром c к отрезку AB, без этого серединного перпендикуляра.

Доказательство. Пусть A, B – две точки, c – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Рассмотрим полуплоскость, ограниченную этим серединным перпендикуляром, содержащую точку A, без этого серединного перпендикуляра. Пусть точка D принадлежит этой полуплоскости. Если эта точка принадлежит также прямой AB, то $AD < BD$. Если она не принадлежит прямой AB, то проведём отрезки AD и BD (рис. 2.2). Так как точки B и D расположены по разные стороны от прямой c, то отрезок BD пересекает прямую c в некоторой точке C. Воспользуемся неравенством треугольника, применённым к треугольнику ACD. Получим $AD < AC + CD = BC + CD = BD$.

Аналогичным образом доказывается, что для точек E, принадлежащих полуплоскости, содержащей точку B, ограниченной серединным перпендикуляром c, без этого серединного перпендикуляра, выполняется неравенство $BE < AE$.

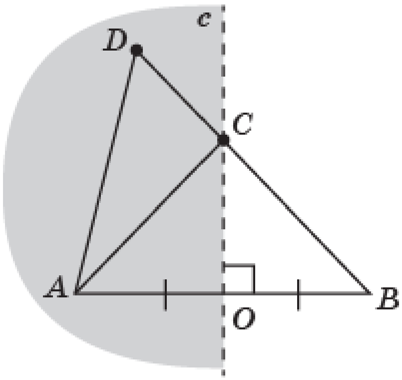


Рис. 2.2

Таким образом, полуплоскость, ограниченная серединным перпендикуляром c, содержащая точку A, без этого серединного перпендикуляра, содержит все точки, расстояние от которых до данной точки A меньше, чем расстояние до данной точки B, т. е. является искомым ГМТ.

Упражнения

1. На клетчатой бумаге изобразите ГМТ, равноудалённых от двух данных точек A и B (рис. 2.3).

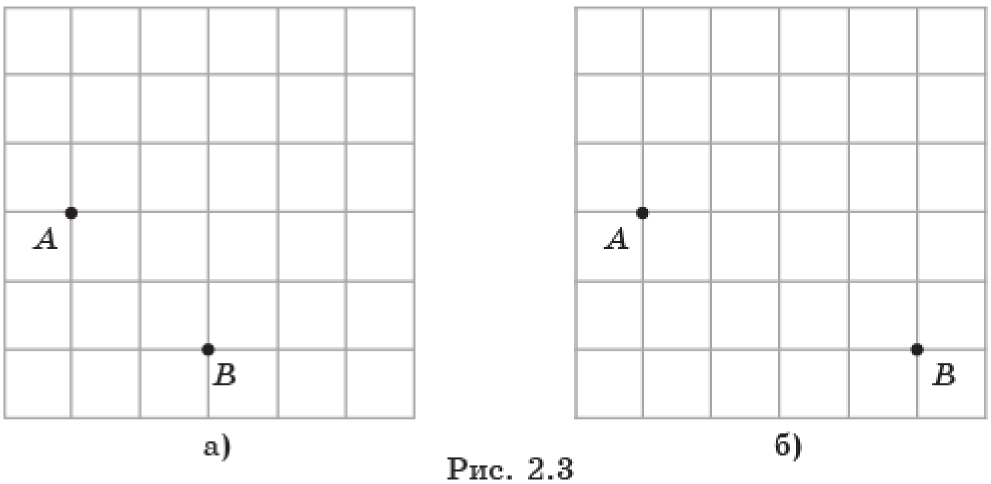
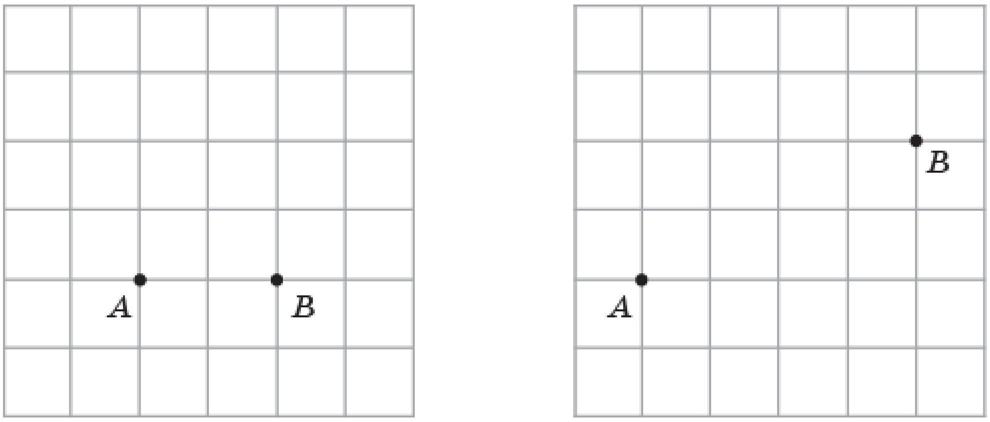


Рис. 2.3

2. Укажите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B (рис. 2.4).

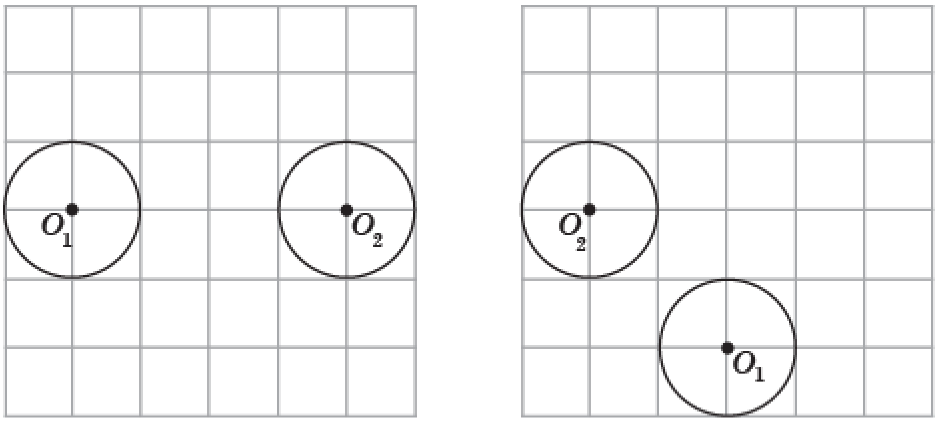


а) б)

Рис. 2.4

3. Укажите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB (рис. 2.4).

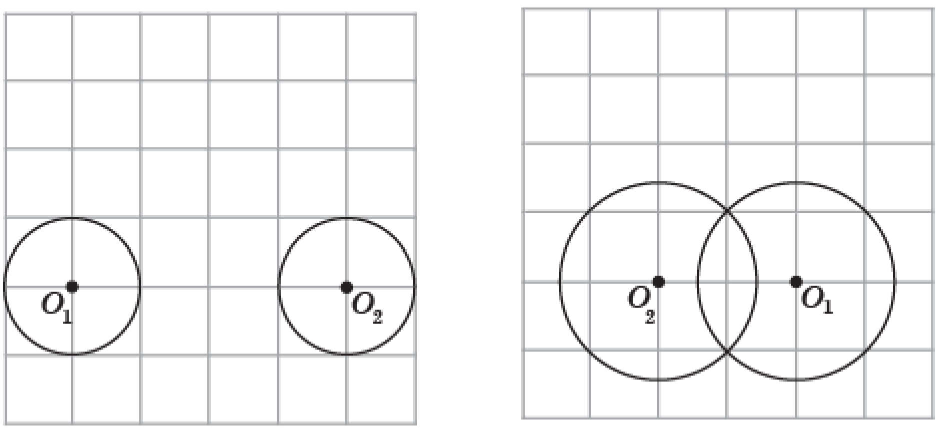
4. Укажите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух равных окружностей с центрами O_1 и O_2 внешним образом (рис. 2.5).



а) б)

Рис. 2.5

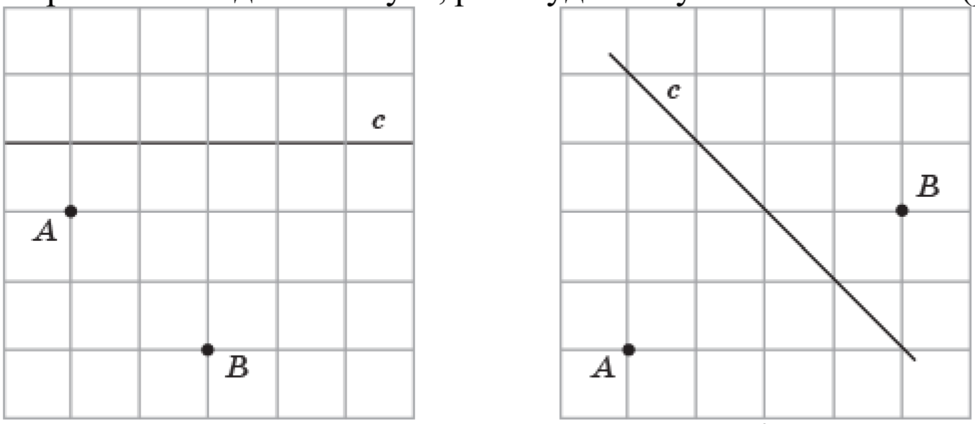
5. Укажите ГМТ, отрезки касательных, проведённых из которых к двум данным окружностям, равны (рис. 2.6).



а) б)

Рис. 2.6

6. На прямой c найдите точку C, равноудалённую от точек A и B (рис. 2.7).

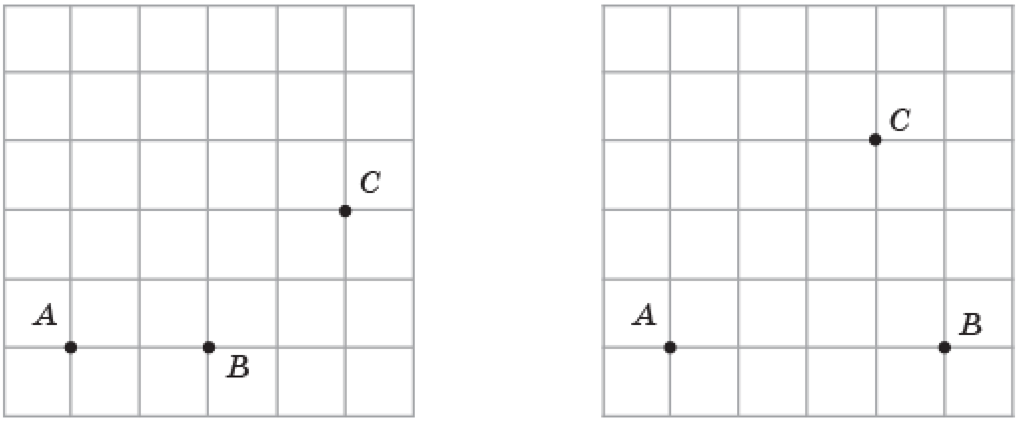


а) б)

Рис. 2.7

7. Даны точки A, B и прямая c (рис. 2.7). Укажите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B.

8. Отметьте точку, равноудалённую от точек A, B и C (рис. 2.8).



а) б)

Рис. 2.8

9. Для данных точек A, B, C (рис. 2.9) изобразите ГМТ: а) $\{D \mid AD \leq BD$ и $BD \geq CD\}$; б) $\{D \mid AD \leq BD$ или $BD \geq CD\}$.

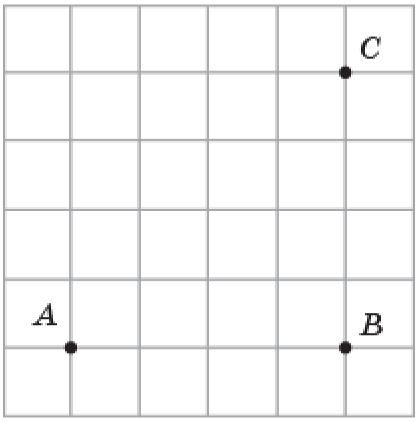


Рис. 2.9

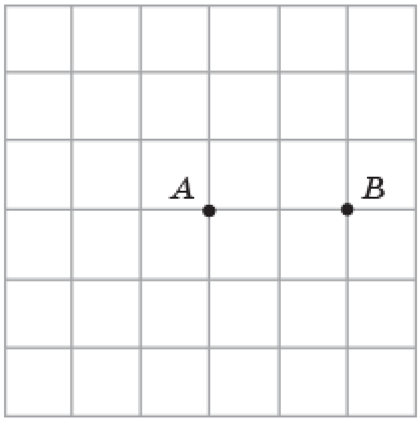


Рис. 2.10

10. Для данных точек A и B (рис. 2.10) изобразите ГМТ: а) $\{C \mid BC \leq AC \leq AB\}$; б) $\{C \mid AC \leq AB$ и $AC \leq BC\}$.

3. Биссектриса

Будем считать углом фигуру, образованную двумя лучами с общей вершиной и частью плоскости, ограниченной этими лучами.

Напомним, что биссектрисой угла называется луч, делящий данный угол на два равных угла.

Точки, принадлежащие углу и не принадлежащие его сторонам, будем называть внутренними точками данного угла.

Фигуру, образованную всеми внутренними точками угла, будем называть внутренностью данного угла.

Здесь мы будем рассматривать углы, меньшие развёрнутого угла.

Теорема. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих данному углу и одинаково удалённых от его сторон.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a, b. Пусть точка C принадлежит этому углу. Опустим из неё перпендикуляры CA и CB на стороны соответственно a и b (рис. 3.1).

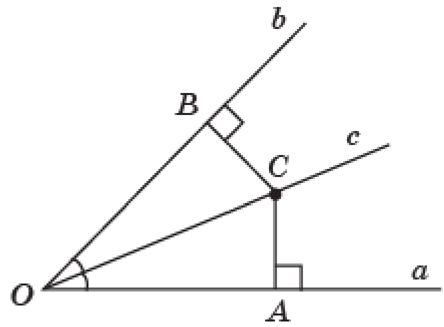


Рис. 3.1

Если точка C принадлежит биссектрисе угла и не совпадает с его вершиной, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла. Обратно, если точка C одинаково удалена от сторон угла, т. е. $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла.

Отметим, что ГМТ, равноудалённых от сторон данного угла, состоит из биссектрисы c данного угла и угла $a'Ob'$, стороны которого a', b' соответственно перпендикулярны сторонам a, b данного угла (рис. 3.2).

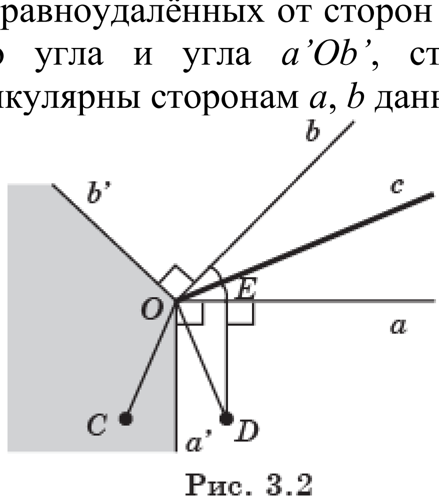


Рис. 3.2

Действительно, расстояния от точек *C*, принадлежащих углу *a'Ob'*, до сторон данного угла *aOb* равны длине отрезка *OC*, следовательно, эти точки равноудалены от сторон угла *aOb*. Расстояния от точек *D*, расположенных внутри угла *aOa'*, до сторон *a*, *b* данного угла *aOb* равны соответственно длинам отрезков *DE* и *DO*, следовательно, различны. Аналогично доказывается, что расстояния от точек, расположенных внутри угла *bOb'*, до сторон *a*, *b* данного угла *aOb* различны.

Упражнения

1. Изобразите ГМТ, одинаково удалённых от сторон угла *aOb* (рис. 3.3).

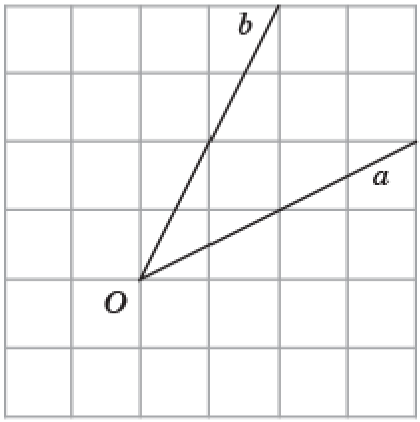


Рис. 3.3

2. На прямой *c*, пересекающей стороны угла *aOb*, укажите точку, одинаково удалённую от его сторон (рис. 3.4).

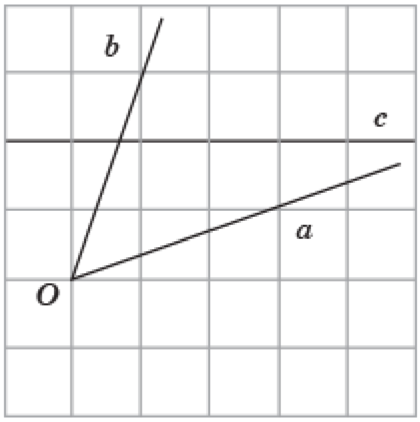


Рис. 3.4

3. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон угла *aOb* (рис. 3.5).

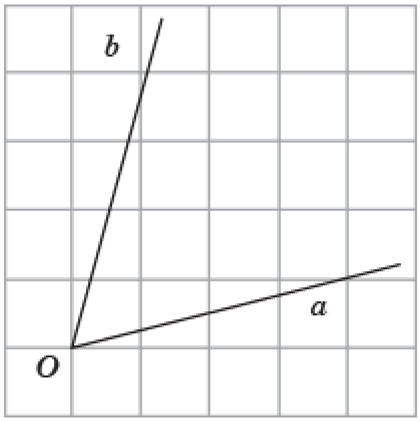


Рис. 3.5

4. Найдите геометрическое место точек, одинаково удалённых от двух прямых *a* и *b*, пересекающихся в точке *C* (рис. 3.6).

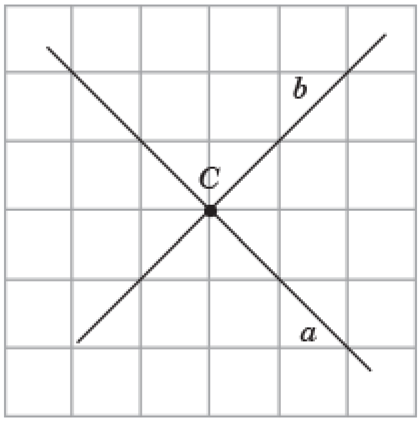


Рис. 3.6

5. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух прямых *a* и *b*, пересекающихся в точке *C* (рис. 3.7).

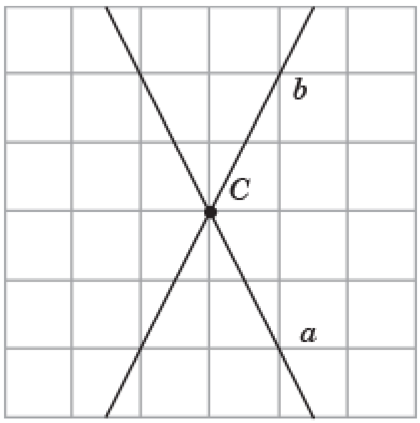


Рис. 3.7

6. Дан угол *aOb* и его биссектриса *c*. Докажите, что ГМТ угла *aOb*, для которых расстояние до стороны *a* меньше расстояния до стороны *b*, является внутренность угла *aOc* (рис. 3.8).

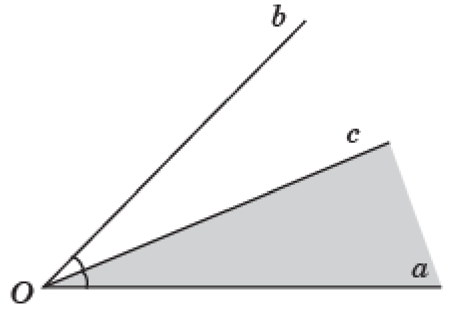


Рис. 3.8

7. Даны две прямые *a* и *b*, пересекающиеся в точке *O*. Найдите ГМТ, для которых расстояние до прямой *a* меньше расстояния до прямой *b* (рис. 3.9).

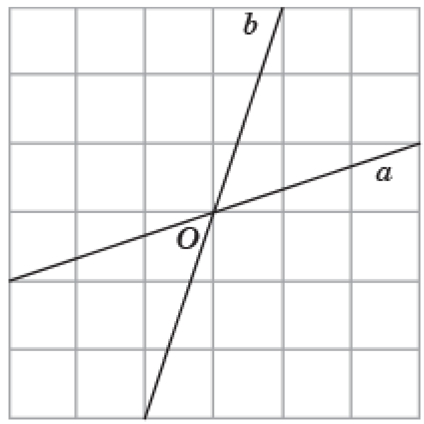


Рис. 3.9

8. Найдите ГМ центров окружностей, отсекающих от сторон данного угла хорды равной длины (рис. 3.10).

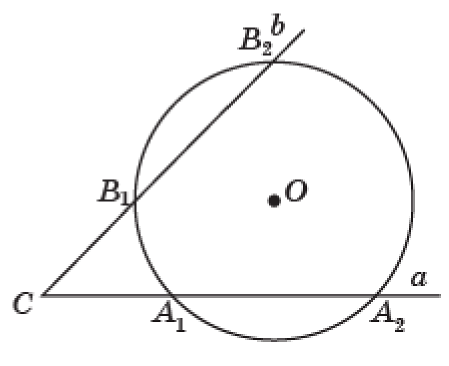


Рис. 3.10

9. Дан угол *aOb* и точки *A*, *B* на его сторонах соответственно *a* и *b*. Внутри угла найдите точку *C*, одинаково удаленную от точек *A*, *B* и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон этого угла (рис. 3.11).

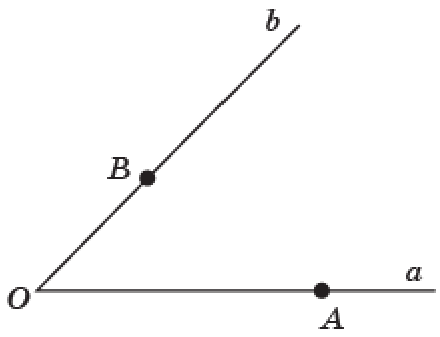


Рис. 3.11

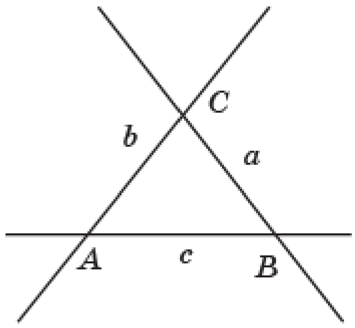


Рис. 3.12

10. Найдите ГМТ, равноудалённых от трёх попарно пересекающихся прямых, не пересекающихся в одной точке (рис. 3.12).

4. Параллельность

Упражнения

1. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных параллельных прямых *a* и *b* (рис. 4.1).

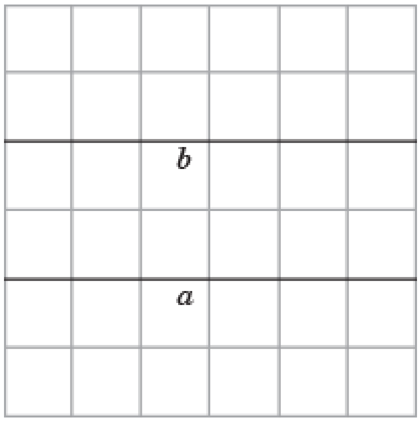


Рис. 4.1

2. Найдите ГМТ, удалённых от данной прямой *c* на данное расстояние $d = 1$. Стороны клеток равны 1 (рис. 4.2).

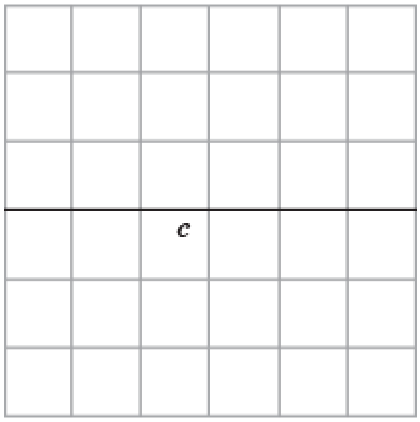


Рис. 4.2

3. Найдите ГМ центров окружностей радиусом $R = 1$, касающихся данной прямой *c*. Стороны клеток равны 1 (рис. 4.3).

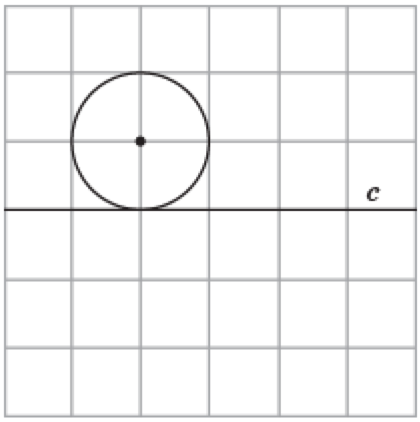


Рис. 4.3

4. Найдите ГМТ, удаленных от данного отрезка на расстояние, равное 2. Стороны клеток равны 1 (рис. 4.4).

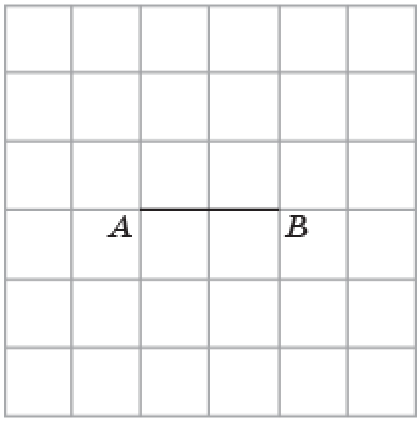


Рис. 4.4

5. Найдите ГМТ, удалённых от данного квадрата *ABCD* на расстояние, равное 1 (рис. 4.5). Стороны клеток равны 1.

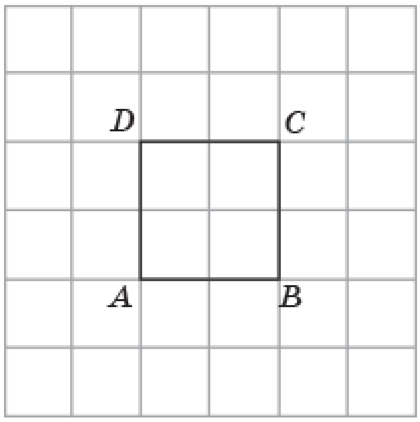


Рис. 4.5

6. Найдите ГМТ, удалённых от данного треугольника *ABC* на расстояние, равное 1 (рис. 4.6). Стороны клеток равны 1.

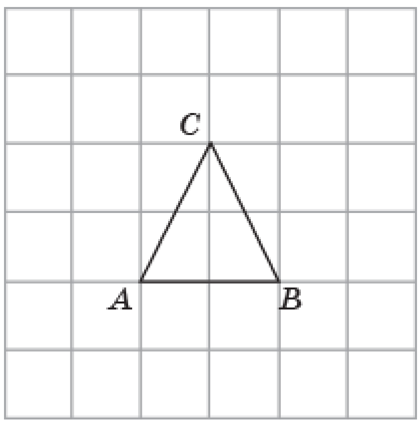


Рис. 4.6

7. Найдите ГМ середин отрезков, соединяющих данную точку A с точками данной прямой b (рис. 4.7).

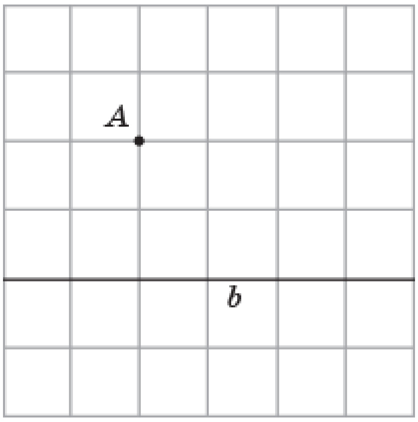


Рис. 4.7

8. Найдите ГМ середин отрезков AB, концы которых принадлежат двум данным параллельным прямым соответственно a и b (рис. 4.8).

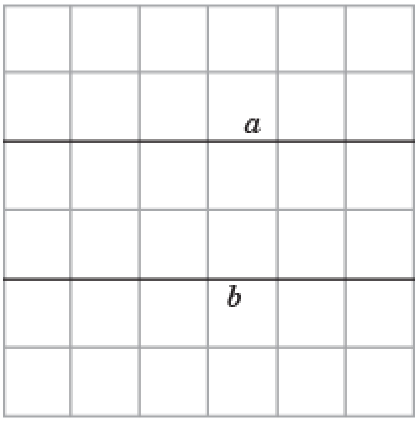


Рис. 4.8

9. Найдите ГМТ, симметричных данной точке A относительно точек B прямой b, не содержащей точку A (рис. 4.9).

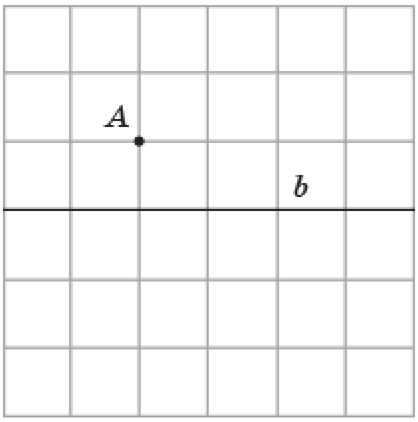


Рис. 4.9

5. Парабола

Пусть на плоскости задана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от прямой d и точки F, называется ***параболой***. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F - ***фокусом*** параболы (рис. 5.1).

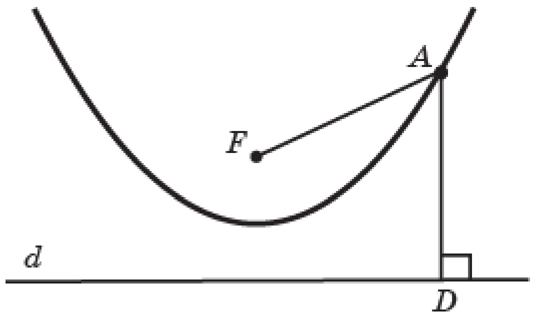


Рис. 5.1

Прямая, имеющая с параболой только одну общую точку и не перпендикулярная её директрисе, называется ***касательной*** к параболе. Общая точка называется ***точкой касания***.

Теорема. Пусть A – точка на параболе с фокусом F и директрисой d, AD – перпендикуляр, опущенный на директрису (рис. 5.2). Тогда касательной к параболе, проходящей через точку A, будет прямая, содержащая биссектрису угла FAD.

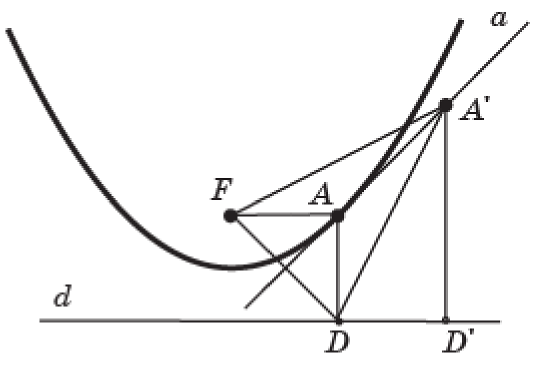


Рис. 5.2

Доказательство. Пусть прямая a проходит через точку A параболы и содержит биссектрису угла FAD. Ясно, что она не перпендикулярна директрисе. Докажем, что никакая другая точка A' этой прямой не принадлежит параболе. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, опустим перпендикуляр $A'D'$ на прямую d. Так как треугольник FAD равнобедренный, и прямая a содержит биссектрису угла A, то она является серединным перпендикуляром к отрезку DF. Следовательно, для точки A' будет выполняться равенство $A'F = A'D$. Так как перпендикуляр, опущенный из точки на прямую короче наклонной, проведённой из той же точки к той же прямой, то для точки A' будет выполняться неравенство $A'D > A'D'$, Следовательно, для точки A' будет выполняться неравенство $A'F > A'D'$, т. е.

расстояние от точки A' до фокуса больше расстояния до директрисы. Значит, точка A' не принадлежит параболе. Следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с параболой, т. е. является касательной.

Фокальное свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то лучи, отразившись от параболы, пойдут в одном направлении, перпендикулярном директрисе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F параболы, a – касательная, AD – прямая, перпендикулярная директрисе (рис. 5.3).

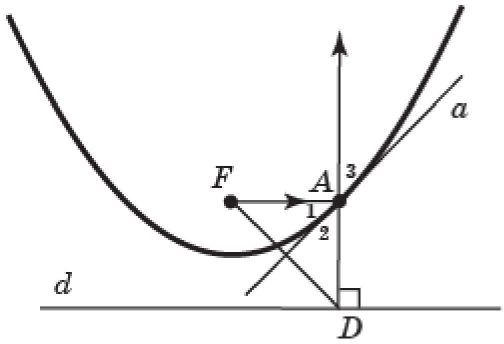


Рис. 5.3

Углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла FAD. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные углы. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 1, то угол отражения будет равен углу 3, т. е. направление отражённого луча будет перпендикулярно директрисе.

Фокальное свойство параболы используется при изготовлении отражающих поверхностей прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, телескопов, параболических антенн и т. д.

Покажем, как параболу можно построить в программе GeoGebra.

1. В качестве директрисы возьмём ось абсцисс.

2. Отметим точку $F(0, 2)$.

3. Создадим «ползунок» a, изменяющийся от 0 до 8.

4. В строке «Ввод» напишем: y=a и нажмём “Enter”. Получим прямую.

5. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром F и радиусом a.

6. С помощью инструмента «Пересечение» найдём точки пересечения построенных прямой и окружности.

7. В настройках для этих точек пересечения выберем строчку «Оставлять след».

8. Будем изменять значения a ползунка. Точки пересечения будут оставлять след в форме параболы (рис. 5.4).

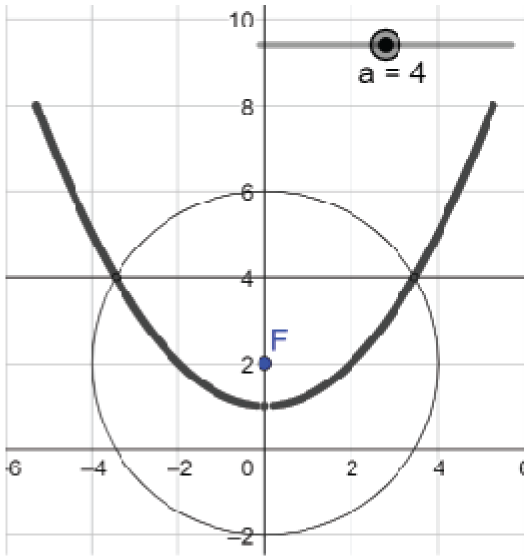


Рис. 5.4

Для получения параболы в программе GeoGebra можно также воспользоваться и инструментом «Парабола». Для этого нужно выбрать данный инструмент, указать точку (фокус), прямую (директрису) и нажать “Enter”. В результате на экране появится парабола с данными фокусом и директрисой (рис. 5.5).

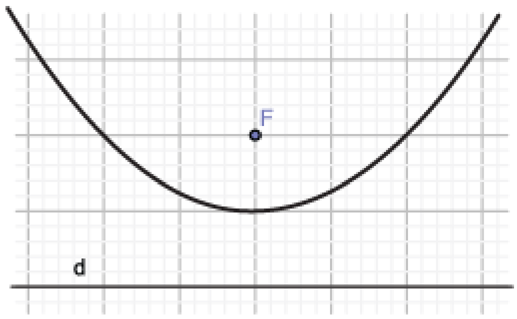


Рис. 5.5

Упражнения

1. На клетчатой бумаге постройте с помощью циркуля точки параболы, удалённые от фокуса F и директрисы d на расстояния: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Изобразите параболу, соединив эти точки плавной кривой (рис. 5.6).

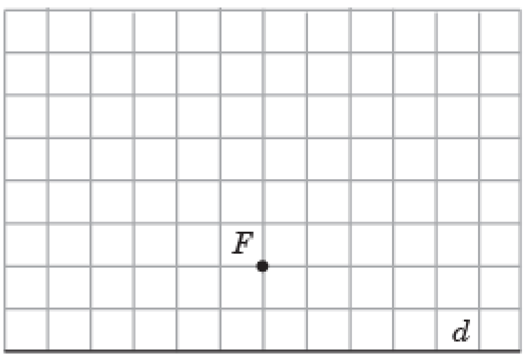


Рис. 5.6

2. Получите параболу в программе GeoGebra.

3. Что будет происходить с параболой, если фокус: а) удаляется от директрисы; б) приближается к директрисе?

4. Для точки F, не принадлежащей прямой d, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки F: а) меньше; б) больше расстояния до прямой d.

5. Для параболы с заданными фокусом и директрисой (рис. 5.7) с помощью циркуля и линейки проведите касательную, проходящую через данную точку.

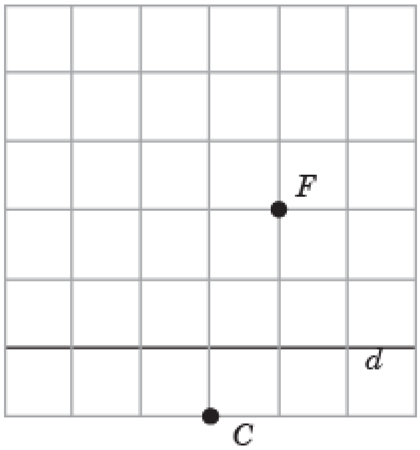


Рис. 5.7

6. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола видна под: а) прямым; б) острым; в) тупым углом (рис. 5.8).

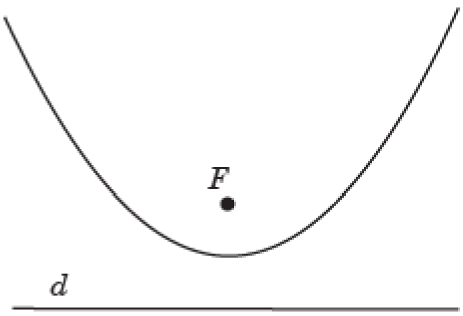


Рис. 5.8

7. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой и проходящих через данную точку, не принадлежащую этой прямой (рис. 5.9).

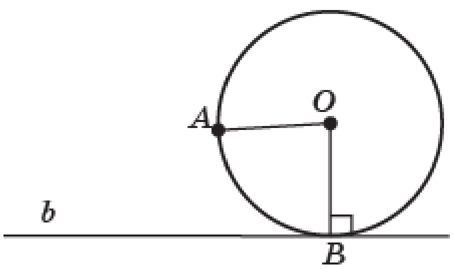


Рис. 5.9

8. Дана прямая c и окружность, не имеющая общих точек с этой прямой (рис. 5.10). Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой и данной окружности: а) внешним; б) внутренним образом.

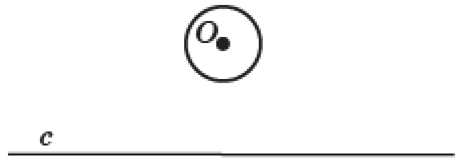


Рис. 5.10

9. Найдите геометрическое место фокусов парабол с данной директрисой d, проходящих через данную точку A (рис. 5.11).

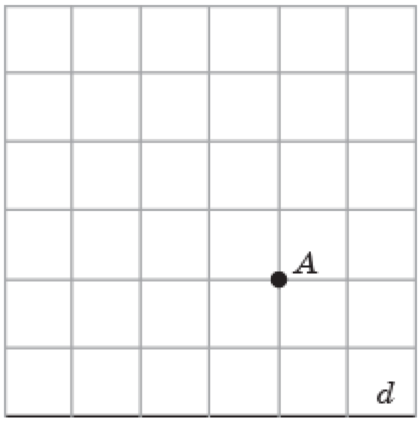


Рис. 5.11

10. Найдите геометрическое место фокусов парабол с данной директрисой d и касательной прямой a (рис. 5.12).

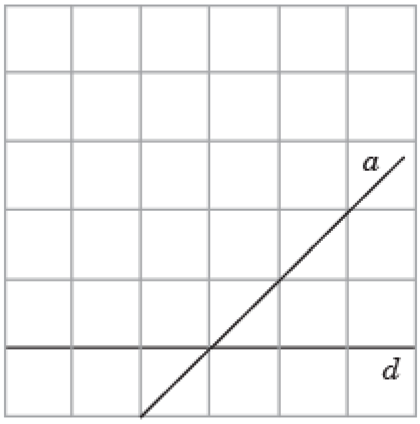


Рис. 5.12

6. Эллипс

Пусть на плоскости заданы две точки F_1, F_2 и число c, большее длины отрезка F_1F_2. Геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до данных точек F_1, F_2 равно данному числу c, большему расстояния между этими точками, называется ***эллипсом***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса (рис. 6.1).

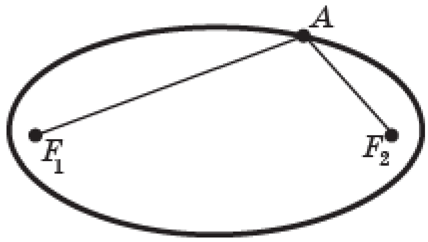


Рис. 6.1

Таким образом, эллипс с фокусами F_1, F_2 и числом c можно записать в виде

$$\{A | AF_1 + AF_2 = c\}.$$

Ещё И. Кеплер обнаружил, что планеты Солнечной системы движутся вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причём, Солнце находится в фокусах этих эллипсов. Луна, искусственные спутники Земли также движутся вокруг Земли по эллипсам.

Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку. Общая точка называется ***точкой касания***.

Теорема. Пусть A - произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Пусть прямая a проходит через точку A эллипса и содержит биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2. Докажем, что никакая другая точка этой прямой не принадлежит эллипсу (рис. 6.2).

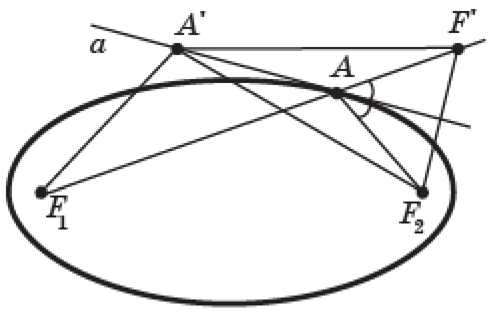


Рис. 6.2

Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F', \ A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = F_1A + AF_2 = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу. Следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т. е. является касательной.

Фокальное свойство. Если источник света поместить в один из фокусов эллипса, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся в другом его фокусе.

Воспользуемся тем, что угол падения света равен углу отражения и тем, что от кривой свет отражается так же, как от касательной, проведённой в точку падения.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 эллипса, a – касательная (рис. 6.3).

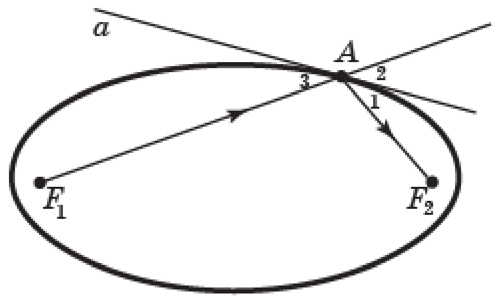


Рис. 6.3

Углы 1 и 2 равны, так как касательная a является биссектрисой угла F_2AF'. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света, после отражения в точке A, пойдёт в направлении AF_2.

Покажем, как эллипс можно построить в программе GeoGebra.

1. Создадим ползунки d, c, a.

2. Отметим две точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно d.

3. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром F_1 и радиусом a.

4. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром F_2 и радиусом $c - a$.

5. С помощью инструмента «Пересечение» найдём точки пересечения A и B построенных окружностей.

6. В настройках для этих точек пересечения выберем строчку «Оставлять след».

7. Будем изменять значения a ползунка. Точки пересечения будут оставлять след в форме эллипса (рис. 6.4).

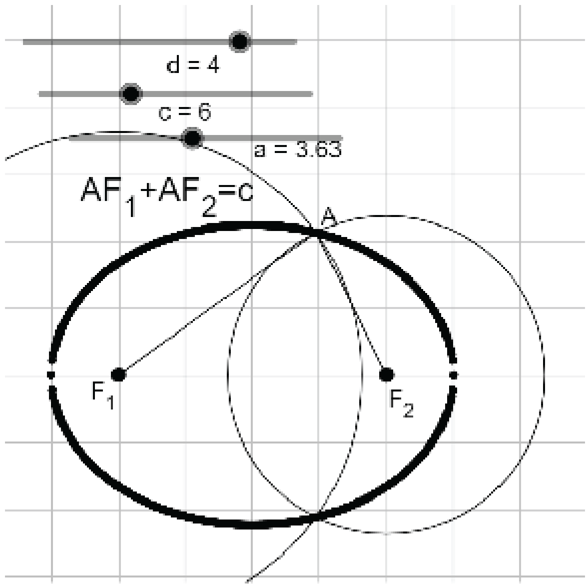


Рис. 6.4

Эллипс в программе GeoGebra можно получить с помощью инструмента «Эллипс». Для этого нужно выбрать данный инструмент, указать две точки (фокусы) и точку на эллипсе и нажать “Enter”. В результате на экране появится эллипс с данными фокусами, проходящий через данную точку (рис. 6.5).

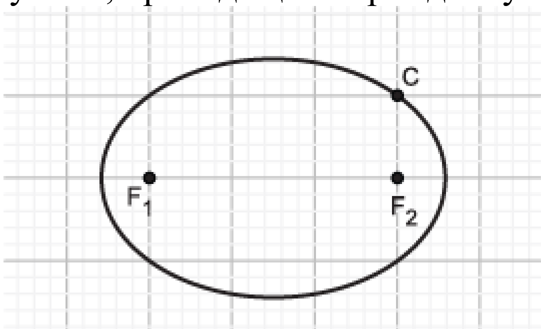


Рис. 6.5

Упражнения

1. На клетчатой бумаге постройте с помощью циркуля несколько точек эллипса, сумма расстояний от которых до данных точек F_1, F_2 равно 6 (рис. 6.6). Получите эллипс, соединив построенные точки плавной кривой. Стороны клеток равны 1.

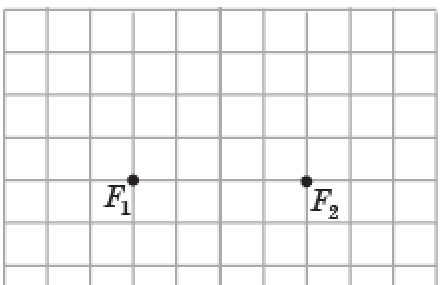


Рис. 6.6

2. Получите эллипс в программе GeoGebra.

3. Для эллипса с фокусами F_1, F_2 и константой c найдите наибольшее расстояние между его точками.

4. Что будет происходить с эллипсом, если при фиксированном числе c фокусы: а) удаляются друг от друга; б) приближаются друг к другу?

5. Для данных точек F_1, F_2 найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до этих точек: а) меньше c; б) больше c.

6. Для эллипса с заданными фокусами и числом c (рис. 6.7) с помощью циркуля и линейки проведите касательную, проходящую через данную точку.

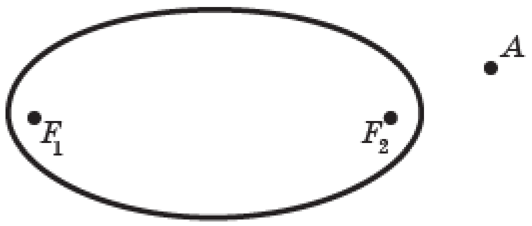


Рис. 6.7

7. На клетчатой бумаге через точку A проведите касательные к эллипсу с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c (рис. 6.8).

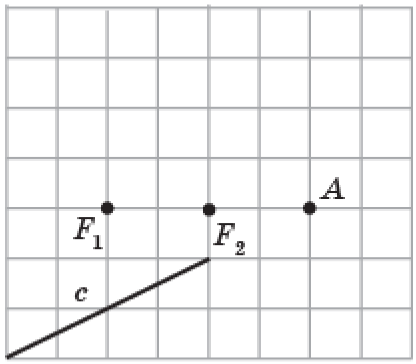


Рис. 6.8

8. Для заданных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых периметр треугольника ABC равен постоянной величине c = 6 (рис. 6.9). Стороны клеток равны 1.

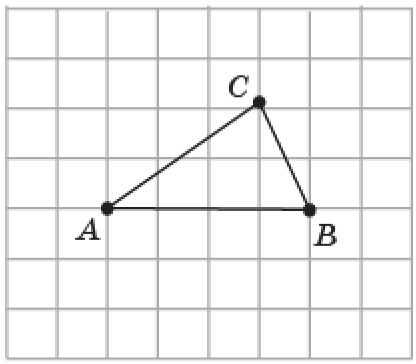


Рис. 6.9

9. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от данной окружности с центром O и точки P, расположенной внутри этой окружности (рис. 6.10).

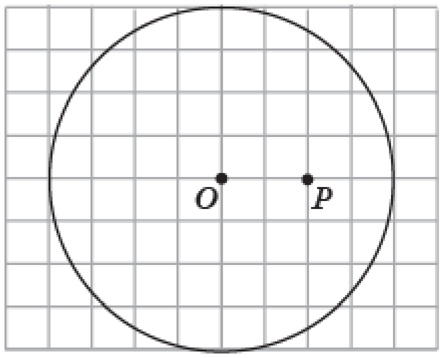


Рис. 6.10

10. Найдите геометрическое место центров O окружностей, касающихся двух данных окружностей с центрами O_1, O_2, одна из которых расположена внутри другой (рис. 6.11).

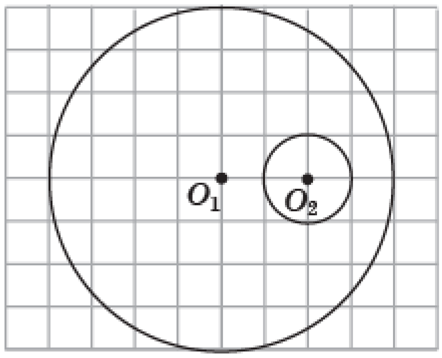


Рис. 6.11

11. Найдите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна данному числу $c > 0$ (рис. 6.12).

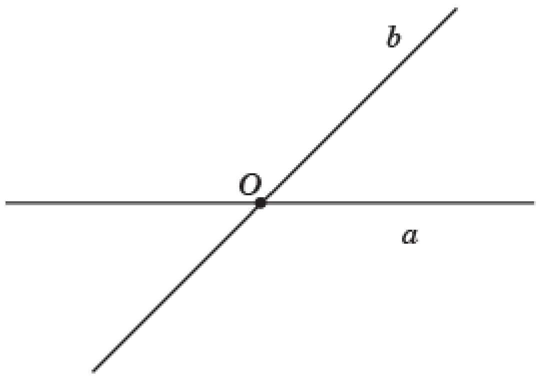


Рис. 6.12

7. Гипербола

Геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 равен заданному положительному числу c, меньшему расстояния между этими точками, называется ***гиперболой***. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** гиперболы (рис. 7.1).

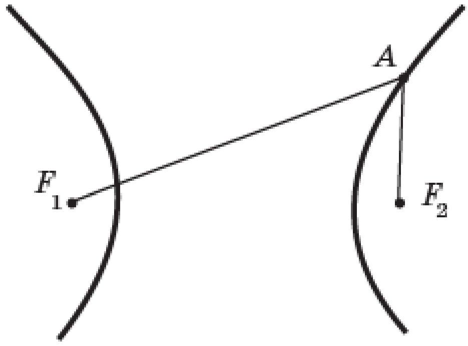


Рис. 7.1

Таким образом, гиперболу с фокусами F_1 и F_2 и числом c можно записать в виде

$$\{A|\ |AF_1 - AF_2| = c\}.$$

Гипербола состоит из двух ветвей, для точек которых выполняется соответственно одно из равенств: $AF_1 - AF_2 = c$, $AF_2 – AF_1 = c$.

Каждая ветвь гиперболы разбивает плоскость на две области – внешнюю и внутреннюю. Для ветви гиперболы, точки A которой удовлетворяют равенству $AF_1 - AF_2 = c$, внешняя область состоит из точек A', для которых выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 < c$. Внутренняя область состоит из точек A'', для которых выполняется неравенство $A'F_1 – A'F_2 > c$. Аналогичные неравенства выполняются для внешней и внутренней областей, определяемых другой ветвью гиперболы.

Прямая, проходящая через точку A гиперболы, остальные точки A' которой принадлежат внешней области, называется ***касательной*** к гиперболе. Точка A называется ***точкой касания***.

Теорема. Пусть A - точка гиперболы с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к гиперболе, проходящей через точку A, является прямая, содержащая биссектрису угла F_1AF_2.

Доказательство. Пусть прямая a содержит биссектрису угла F_1AF_2 и проходит через точку A ветви гиперболы, для точек которой выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = c$. Докажем, что остальные точки A' этой прямой будут принадлежать внешней области, т. е. для них будет выполняться неравенство $A'F_1 – A'F_2 < c$ (рис. 7.2).

Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда треугольник $AF'F_2$ будет равнобедренным. Значит, прямая a, содержащая биссектрису угла A этого треугольника, будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'.

Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F',\ A'F_1 - A'F_2 = A'F_1 - A'F' < F_1F' = AF_1 - AF_2 = c.$$

Следовательно, для точки A' выполняется неравенство $A'F_1 - A'F_2 < c$. Значит, прямая a является касательной.

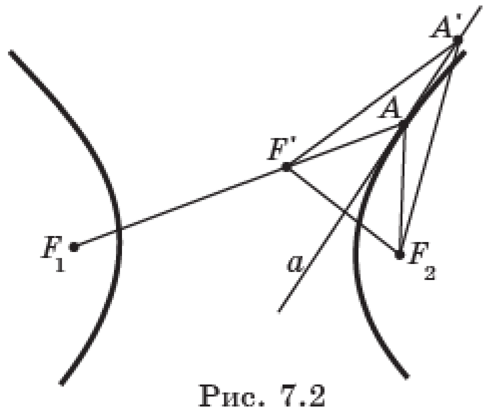


Рис. 7.2

Фокальное свойство гиперболы. Если источник света поместить в один из фокусов гиперболы, то лучи, отразившись от неё, пойдут так, как будто бы они исходят из другого фокуса.

Пусть A – точка падения луча, исходящего из фокуса F_1 гиперболы, a – касательная (рис. 7.3).

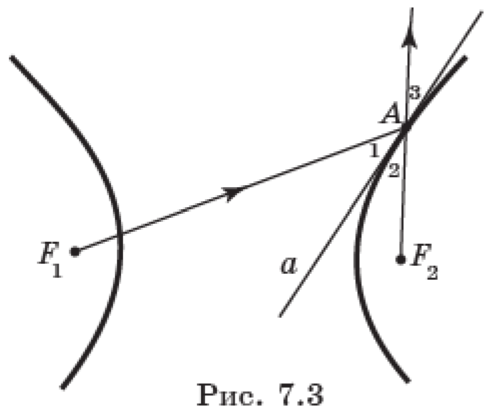


Рис. 7.3

Тогда углы 1 и 2 равны, так как касательная a содержит биссектрису угла F_1AF_2. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные. Следовательно, углы 1 и 3 равны. Поскольку угол падения луча света в точке A равен углу 3, то угол отражения будет равен углу 1, т. е. луч света после отражения в точке A пойдёт в направлении AF_2.

Покажем, как гиперболу можно построить в программе GeoGebra.

1. Создадим ползунки d, c, a.

2. Отметим две точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно d.

3. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром F_1 и радиусом a.

4. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построим окружность с центром F_2 и радиусом $a - c$.

5. С помощью инструмента «Пересечение» найдём точки пересечения *A* и *B* построенных окружностей.

6. В настройках для этих точек пересечения выберем строчку «Оставлять след».

7. Будем изменять значения *a* ползунка. Точки пересечения будут оставлять след в форме ветви гиперболы (рис. 7.4).

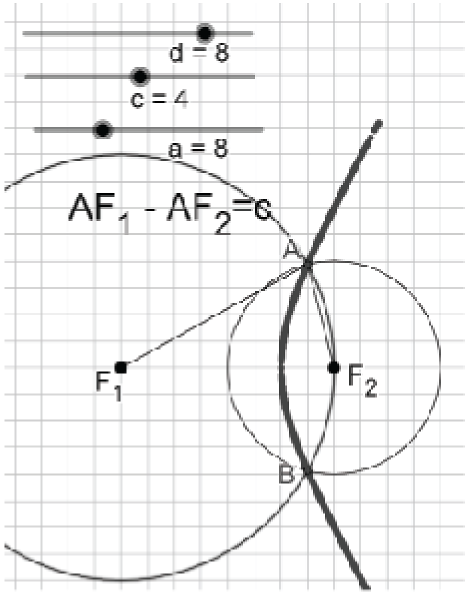


Рис. 7.4

Гиперболу в программе GeoGebra можно получить с помощью инструмента «Гипербола». Для этого нужно выбрать этот инструмент, указать две точки (фокусы) и точку на гиперболе и нажать "Enter". В результате на экране появится гипербола с данными фокусами, проходящая через данную точку (рис. 7.5).

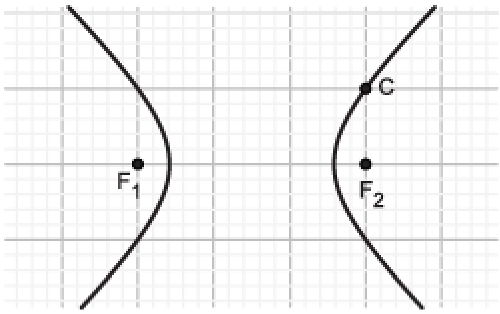


Рис. 7.5

Упражнения

1. На клетчатой бумаге постройте с помощью циркуля несколько точек гиперболы, модуль разности расстояний от которых до данных точек F_1, F_2 равен 2 (рис. 7.6). Получите гиперболу, соединив построенные точки плавной кривой. Стороны клеток равны 1.

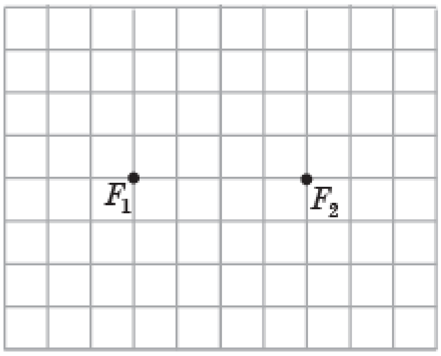


Рис. 7.6

2. Получите гиперболу в программе GeoGebra.

3. Для гиперболы с фокусами F_1, F_2 и константой c найдите наименьшее расстояние между точками, принадлежащими разным ветвям гиперболы.

4. Что будет происходить с ветвями гиперболы, если при фиксированном числе c фокусы: а) удаляются друг от друга; б) приближаются друг к другу?

5. Для данных точек F_1, F_2 укажите геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до этих точек: а) меньше c; б) больше c.

6. Для гиперболы с заданными фокусами и числом c (рис. 7.7) с помощью циркуля и линейки проведите касательные, проходящие через данную точку.

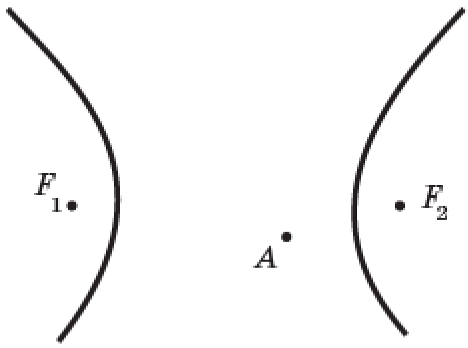


Рис. 7.7

7. На клетчатой бумаге через точку A проведите касательные к гиперболе с заданными фокусами F_1, F_2 и константой c (рис. 7.8).

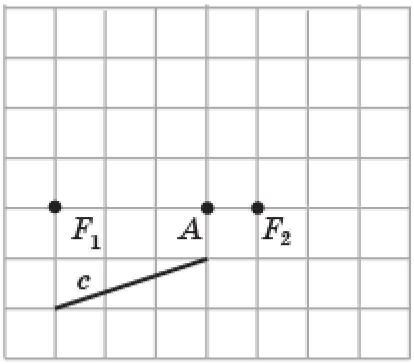


Рис. 7.8

8. Найдите геометрическое место центров O окружностей, касающихся двух данных окружностей с центрами O_1, O_2: а) внешним; б) внутренним образом (рис. 7.9).

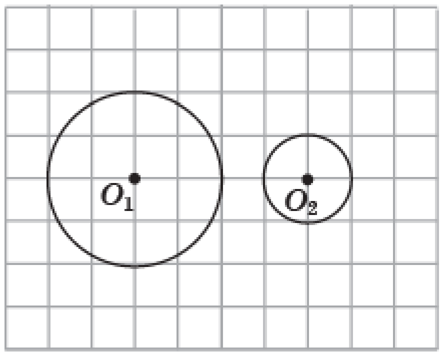


Рис. 7.9

9. Докажите, что эллипс и гипербола с общими фокусами в точках пересечения имеют перпендикулярные касательные (рис. 7.10).

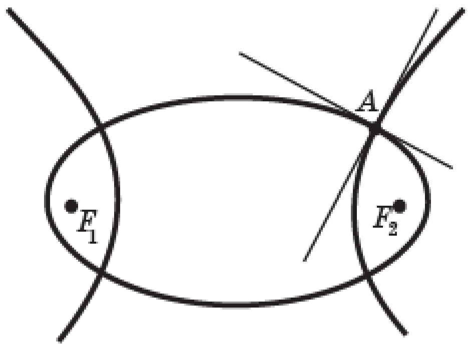


Рис. 7.10

10. Найдите ГМТ, модуль разности расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равен данному числу $c > 0$ (рис. 7.11).

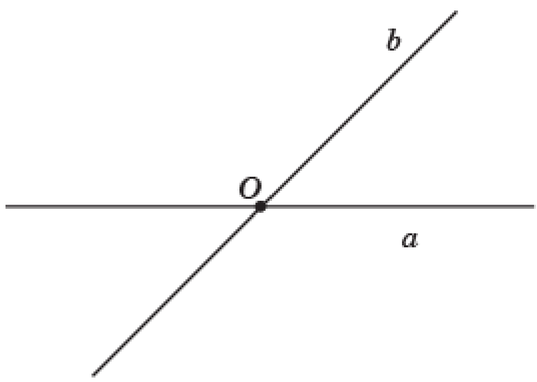


Рис. 7.11

8. Замечательные кривые

Рассмотрим несколько примеров замечательных кривых, образуемых как геометрические места точек.

Конхоида Никомеда. Проведём прямую c. Отметим точку P на расстоянии d от этой прямой. Для произвольной точки C прямой c проведём прямую PC (рис. 8.1). Отложим на ней отрезки $AC = BC = l$. Геометрическое место точек A и B, полученных для всевозможных точек C прямой c, называется конхоидой Никомеда.

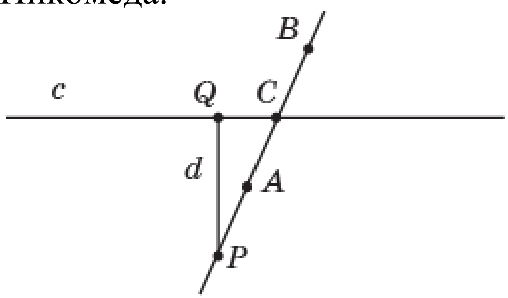


Рис. 8.1

В зависимости от соотношения между d и l конхоида будет иметь разный вид.

Конхоиду Никомеда можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунки d и l.
2. Провести прямую c.
3. На расстоянии d от этой прямой отметить точку P.
4. Выбрать точку C на прямой c.
5. Через точки P и C провести прямую.
6. На этой прямой отметить точки A и B, для которых $AC = BC = l$.
7. В свойствах этих точек выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении точки C по прямой c точки A и B будут оставлять след в виде конхоиды Никомеда. Меняя значения ползунков d и l можно получать конхоиды разного вида.

Улитка Паскаля. Проведём окружность с радиусом R. Отметим на ней точку P. Для произвольной точки C этой окружности проведём прямую PC (рис. 8.2). Отложим на ней отрезки $AC = BC = l$. Геометрическое место точек A и B, полученных для всевозможных точек C, называется улиткой Паскаля.

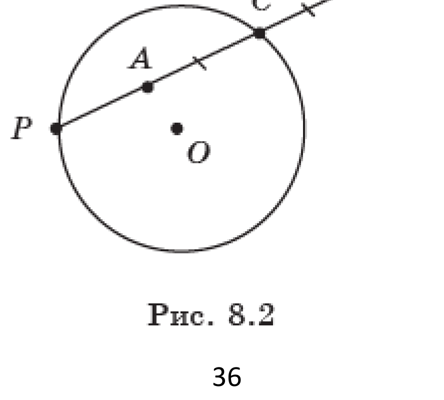


Рис. 8.2

В зависимости от соотношения между R и l улитка Паскаля будет иметь разный вид.

Улитку Паскаля можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунки R и l.
2. Провести окружность с центром O и радиусом R.
3. Отметить на этой окружности точку P.
4. Выбрать на окружности точку C.
5. Через точки P и C провести прямую.
6. На этой прямой отметить точки A и B, для которых $AC = BC = l$.
7. В свойствах этих точек выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении точки C по окружности точки A и B будут оставлять след в виде улитки Паскаля. Меняя значения ползунков R и l можно получать улитки разного вида.

Строфоида. Проведём прямую c. Отметим точку P на расстоянии d от этой прямой. Опустим перпендикуляр PQ на прямую c. Для произвольной точки C прямой c проведём прямую PC (рис. 8.3). Отложим на ней отрезки $CA = CB = CQ$. Геометрическое место таких точек A и B для всевозможных точек C прямой c, называется строфоидой.

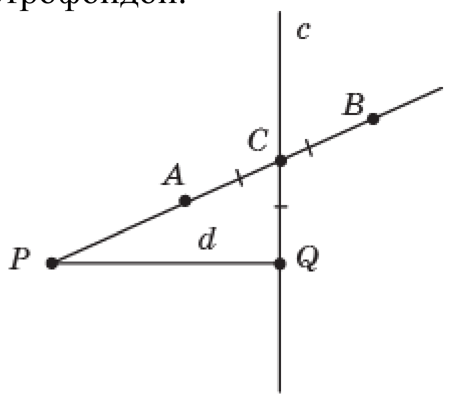


Рис. 8.3

Строфоиду можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунок d.
2. Провести прямую c.
3. Отметить на этой прямой точку Q.
4. Через точку Q провести прямую, перпендикулярную прямой c, и отметить на ней точку P, для которой $PQ = d$.
5. Выбрать на прямой c точку C.
6. Через точки P и C провести прямую.
7. На этой прямой отметить точки A и B, для которых $AC = BC = QC$.
8. В свойствах этих точек выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении точки C по прямой c точки A и B будут оставлять след в виде строфоиды.

Циссоида Диоклеса. Проведём окружность с центром O и диаметром PQ. Через точку Q проведём прямую c, перпендикулярную прямой PQ. Для произвольной точки C прямой c проведём прямую PC. Обозначим B точку пересечения этой прямой и окружности (рис. 8.4). От точки P на луче PC отложим отрезок $PA = BC$. Геометрическое место таких точек A и B для всевозможных точек C прямой c, называется циссоидой Диоклеса.

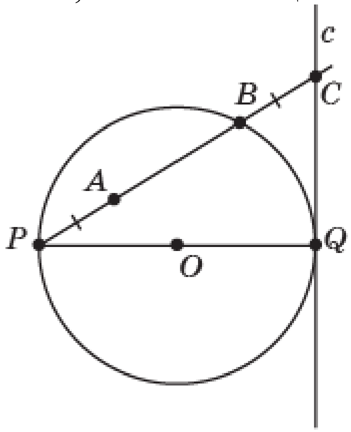


Рис. 8.4

Циссоиду Диоклеса можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. Провести окружность с центром O.
2. Провести диаметр PQ этой окружности.
3. Через точку Q провести прямую c, перпендикулярную прямой PQ.
4. Выбрать на прямой c точку C.
5. Через точки P и C провести прямую.
6. Найти точку B пересечения прямой c и окружности.
6. На прямой c отметить точку A, для которой $PA = BC$.
7. В свойствах этой точки выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении точки C по прямой c точка A будет оставлять след в виде циссоиды Диоклеса.

Каппа представляет собой геометрическое место точек, полученных следующим образом. Проведём прямую a. Отметим на ней точку A. Для произвольной точки O на прямой a проведём окружность с центром O и фиксированным радиусом R. Из точки A проведем касательные к этой окружности и точки касания обозначим B_1, B_2 (рис. 8.5). Геометрическое место таких точек B_1, B_2, соответствующих различным расположениям центров O окружности на прямой a и дает искомое ГМТ.

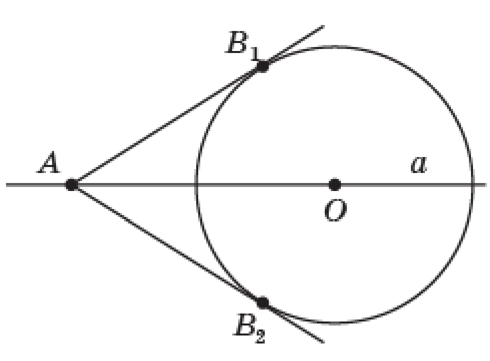


Рис. 8.5

Каппу можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунок R.
2. Провести прямую a.
3. Отметить на ней точки A и O.
4. С центром в точке O провести окружность радиусом R.
5. Через точку A провести касательные к этой окружности.
6. Найти точки B_1, B_2 пересечения касательных и окружности.
7. В свойствах этих точек выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении точки O по прямой a точки B_1, B_2 будут оставлять след в виде каппы.

Упражнения

1. Изобразите конхоиду Никомеда, для которой $d = 1$, $l = 4$ (рис. 8.6).

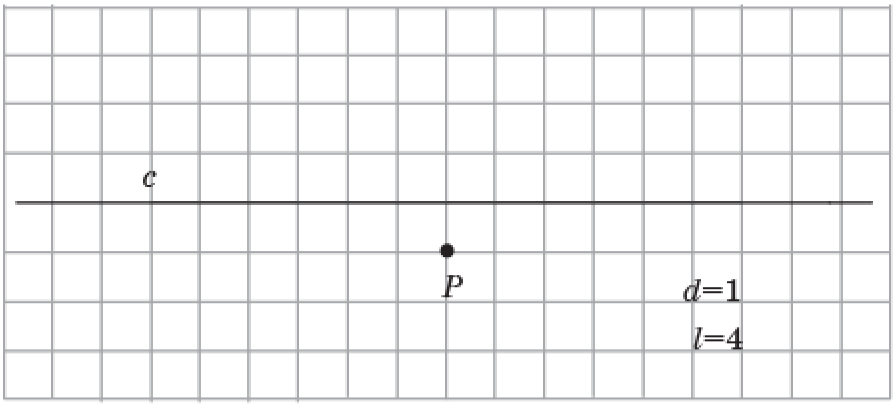


Рис. 8.6

2. Изобразите конхоиду Никомеда, для которой $d = l = 2$ (рис. 8.7).

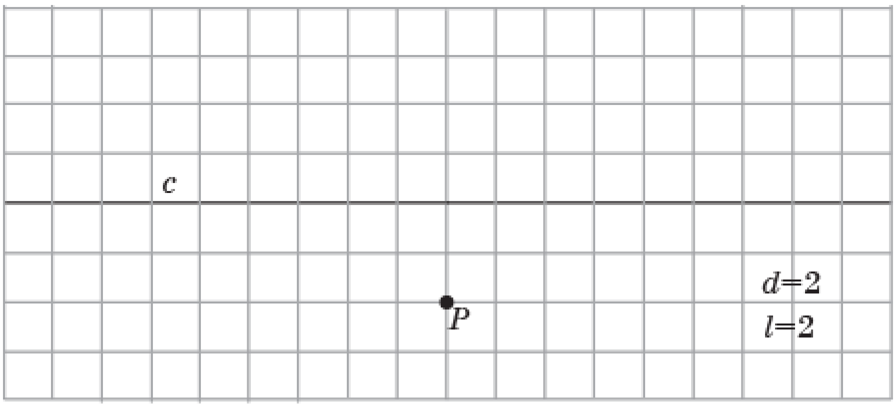


Рис. 8.7

3. Изобразите конхоиду Никомеда, для которой $d = 3$, $l = 2$ (рис. 8.8).

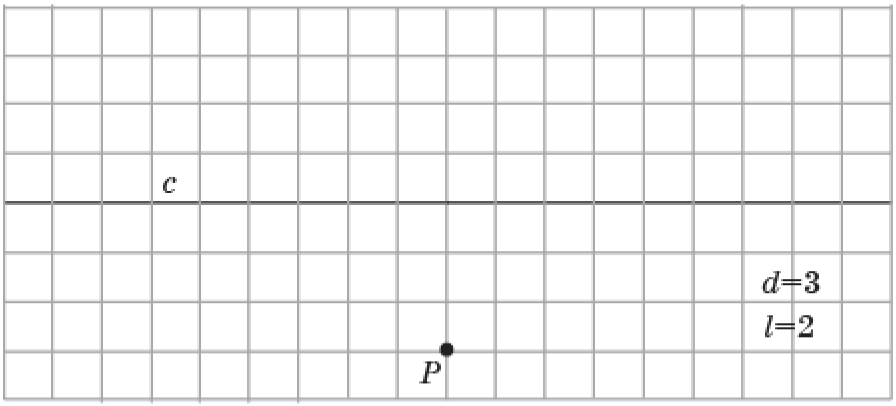


Рис. 8.8

4. Получите конхоиду Никомеда в компьютерной программе GeoGebra.
5. Изобразите улитку Паскаля, для которой $R = 2$, $l = 2$ (рис. 8.9).

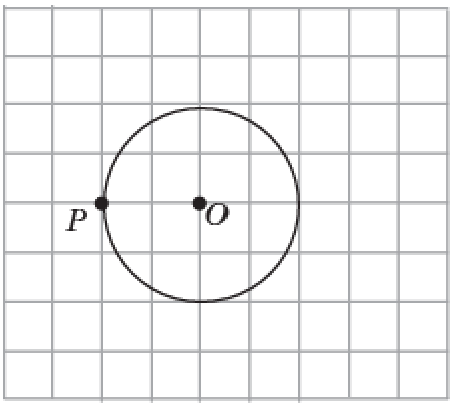


Рис. 8.9

6. Изобразите улитку Паскаля, для которой $R = 1{,}5$, $l = 3$ (рис. 8.10).

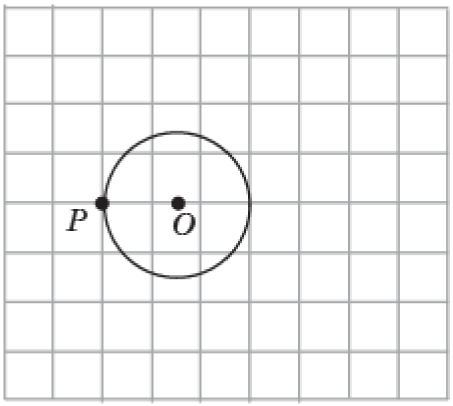


Рис. 8.10

7. Изобразите улитку Паскаля, для которой $R = 1$, $l = 3$ (рис. 8.11).

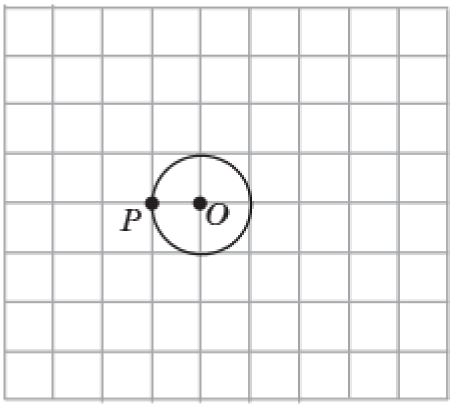


Рис. 8.11

8. Получите улитку Паскаля в компьютерной программе GeoGebra.
9. Изобразите строфоиду (рис. 8.12).

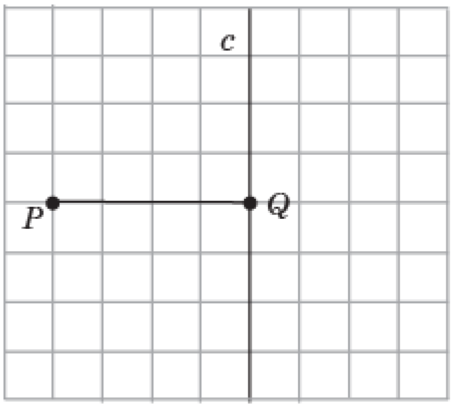


Рис. 8.12

10. Изобразите циссоиду Диоклеса (рис. 8.13).

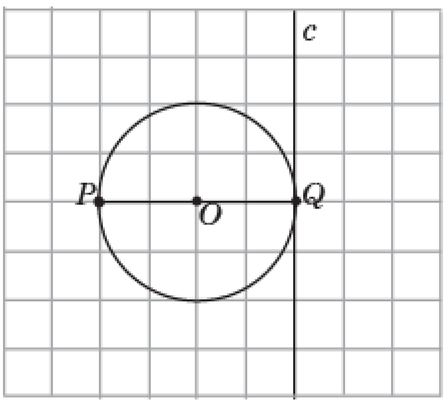


Рис. 8.13

11. Получите строфоиду в компьютерной программе GeoGebra.
12. Получите циссоиду Диоклеса в компьютерной программе GeoGebra.

13. Изобразите каппу (рис. 8.14).

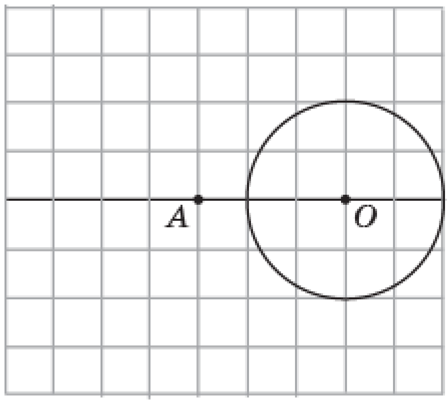


Рис. 8.14

14. Получите каппу в компьютерной программе GeoGebra.

9. Углы, связанные с окружностью

Напомним несколько теорем об углах, связанных с окружностью, и следствия из них.

Теорема 1. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается (рис. 9.1).

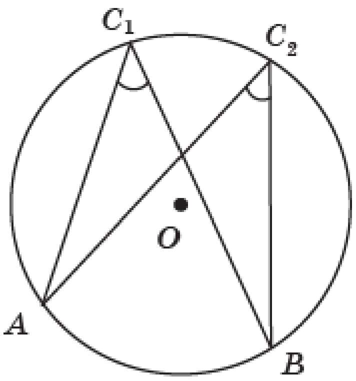


Рис. 9.1

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

Теорема 2. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол (рис. 9.2).

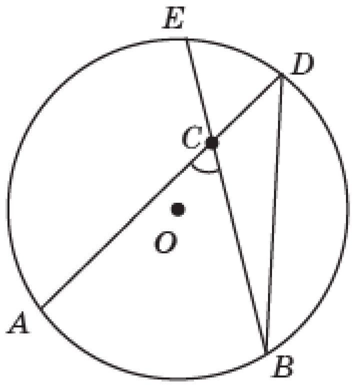


Рис. 9.2

Следствие 2. Угол с вершиной внутри окружности больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.

Теорема 3. Угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри этого угла (рис. 9.3).

Следствие 3. Угол с вершиной вне окружности больше вписанного угла, опирающегося большую дугу, заключённую внутри этого угла.

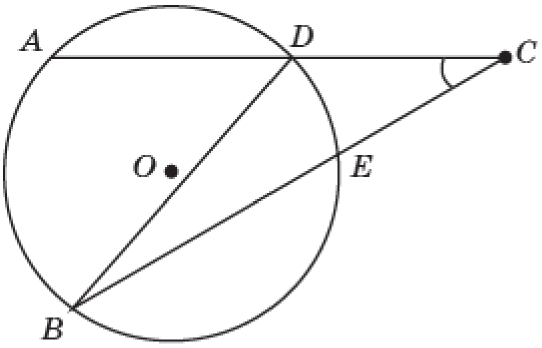


Рис. 9.3

Упражнения

1. Найдите геометрическое место вершин *C* прямоугольных треугольников *ABC* с данной гипотенузой *AB* (рис. 9.4).

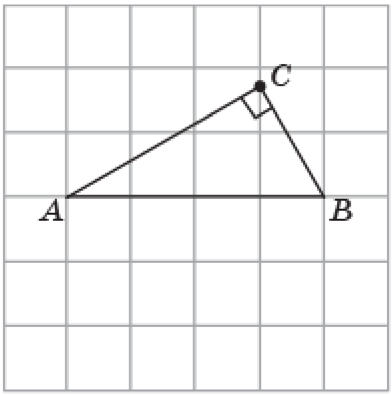


Рис. 9.4

2. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки *A* на прямые, проходящие через другую данную точку *B* (рис. 9.5).

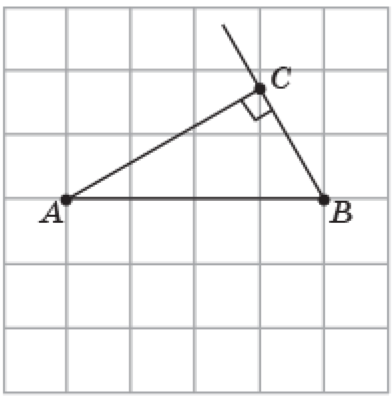


Рис. 9.5

3. Для данных точек *A* и *B* найдите геометрическое место точек *C*, для которых угол *ACB*: а) острый; б) тупой (рис. 9.6).

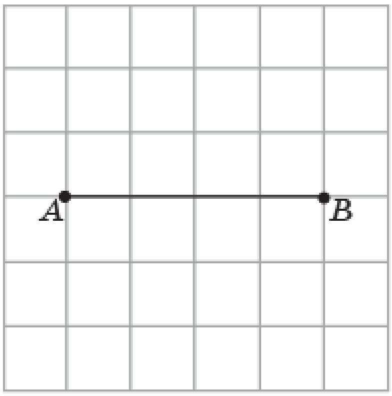


Рис. 9.6

4. Изобразите геометрическое место точек C, из которых отрезок AB виден под углом 45° (рис. 9.7).

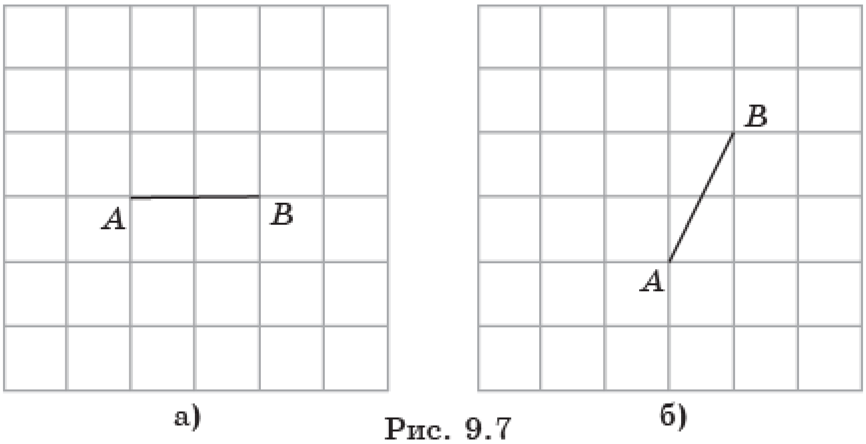


Рис. 9.7

5. На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 9.8). Найдите величину этого угла.

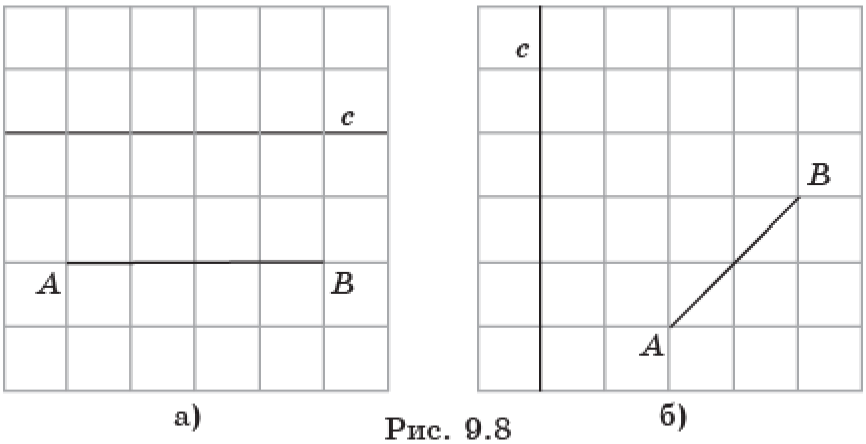


Рис. 9.8

6. Для треугольника ABC, углы которого меньше 120° (рис. 9.9) постройте точку, из которой стороны этого треугольника видны под углом 120° (***точка Торричелли***).

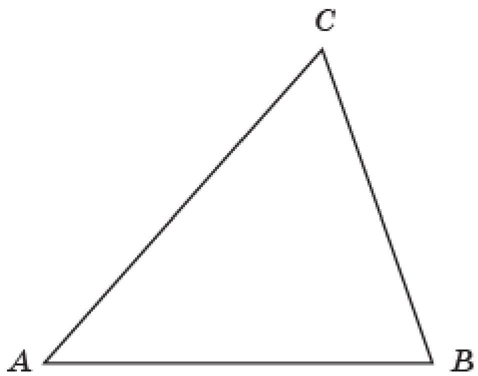


Рис. 9.9

7. Найдите ГМ середин хорд, проведённых в данной окружности с центром *O* через данную точку *A*, расположенную внутри этой окружности (рис. 9.10).

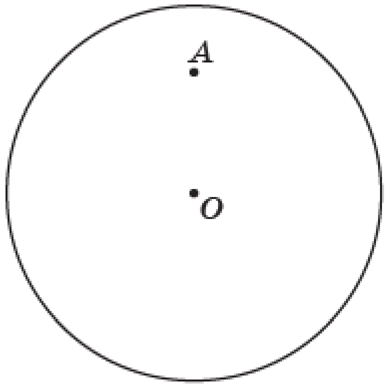


Рис. 9.10

8. Найдите ГМ середин хорд, проведённых в данной окружности с центром *O* через данную точку *A*, расположенную на этой окружности (рис. 9.11).

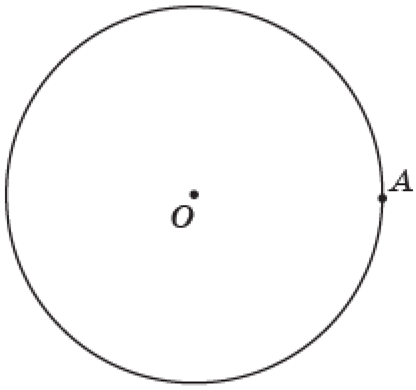


Рис. 9.11

9. Найдите ГМ середин хорд, окружности с центром *O*, образованных секущими, проведёнными через данную точку *A*, расположенную вне этой окружности (рис. 9.12).

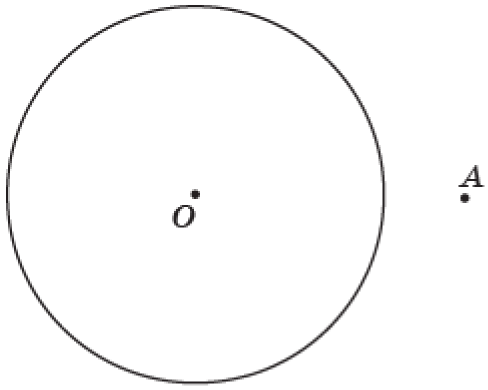


Рис. 9.12

10. Найдите ГМТ C, из которых данная окружность с центром O и радиусом 1 видна под углом 60° (рис. 9.13).

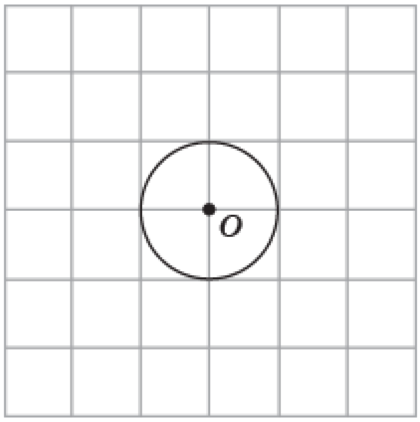


Рис. 9.13

10. Замечательные точки и линии треугольника

К числу замечательных линий треугольника отнесём:

1) медианы;

2) биссектрисы;

3) высоты.

К числу замечательных точек треугольника отнесём:

1) точку пересечения медиан (центроид);

2) точку пересечения биссектрис (центр вписанной окружности;

3) точку пересечения высот или их продолжений (ортоцентр);

4) точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (центр описанной окружности).

Упражнения

1. Найдите ГМ оснований медиан треугольников ABC, проведённых из вершины A, у которых дана сторона AB, а вершина C принадлежит данной прямой c, параллельной прямой AB (рис. 10.1).

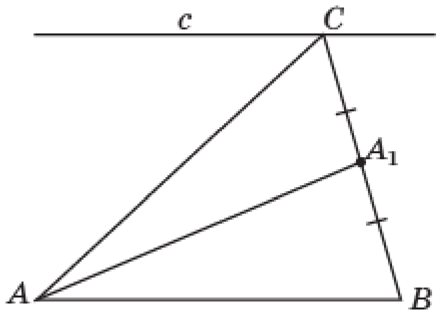


Рис. 10.1

2. Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников ABC, у которых дана сторона AB, а вершина C принадлежит данной прямой c, параллельной прямой AB (рис. 10.2).

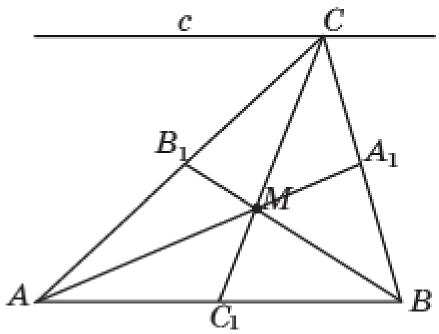


Рис. 10.2

3. Найдите ГМ оснований медиан треугольников ABC, проведённых из вершины A, у которых дана сторона AB, а вершина C принадлежит описанной окружности (рис. 10.3).

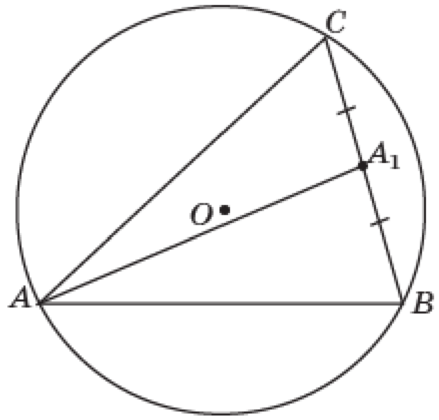


Рис. 10.3

4. Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников *ABC* с данными стороной *AB* и радиусом описанной окружности (рис. 10.4).

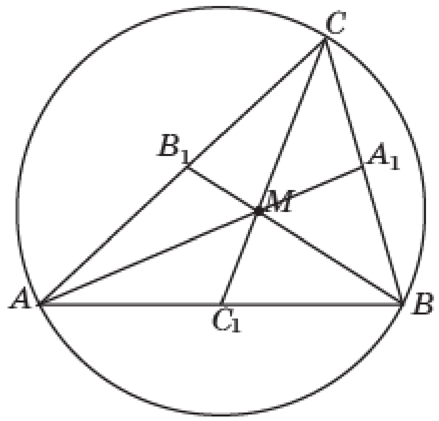


Рис. 10.4

Это ГМТ можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построить окружность.
2. С помощью инструмента «Многоугольник» построить треугольник *ABC*, вписанный в эту окружность.
3. С помощью инструмента «Середина или центр» отметить середины сторон этого треугольника.
4. С помощью инструмента «Отрезок» провести медианы.
5. С помощью инструмента «Пересечение» получить точку пересечения этих медиан.
6. В свойствах этой точки выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении вершины *C* этого треугольника по окружности точка пересечения медиан будет перемещаться, и её след даст искомое ГМТ.

5. Даны две перпендикулярные прямые *a* и *b* (рис. 10.5). Найдите ГМ середин *C* отрезков *AB* заданной длины *c*, концы *A* и *B* которых принадлежат соответственно прямым *a* и *b*.

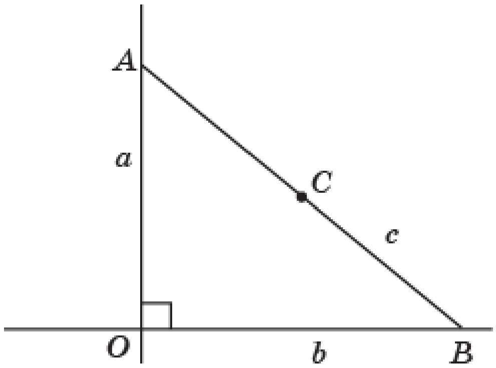


Рис. 10.5

6. Найдите ГМ оснований высот треугольников ABC, проведённых из вершины A, у которых дана сторона AB, а вершина C принадлежит данной прямой c, параллельной прямой AB (рис. 10.6).

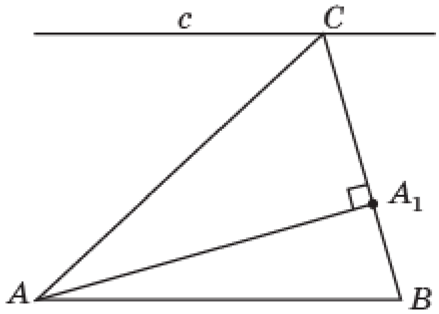


Рис. 10.6

7. Найдите ГМ оснований высот треугольников ABC, проведённых из вершины A, у которых дана сторона AB, а вершина C принадлежит описанной окружности (рис. 10.7).

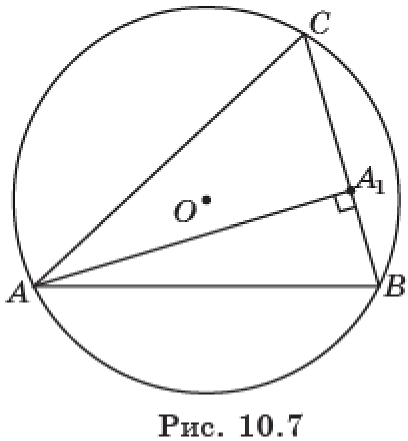


Рис. 10.7

8. Найдите ГМТ пересечения высот или их продолжений треугольников ABC с данными стороной AB и радиусом описанной окружности (рис. 10.8).

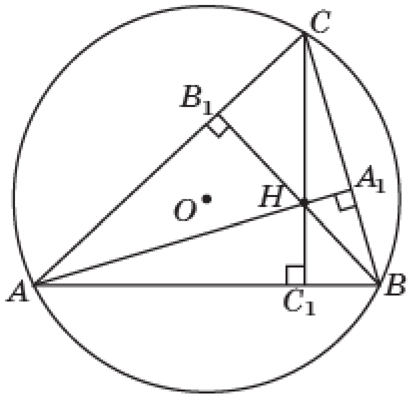


Рис. 10.8

Это ГМТ можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построить окружность.

2. С помощью инструмента «Многоугольник» построить треугольник *ABC*, вписанный в эту окружность.

3. С помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» провести прямые, перпендикулярные сторонам этого треугольника.

4. С помощью инструмента «Пересечение» получить точку пересечения высот или их продолжений этого треугольника.

5. В свойствах этой точки выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении вершины *C* этого треугольника по окружности точка пересечения высот или их продолжений будет перемещаться, и её след даст искомое ГМТ.

9. Найдите ГМТ пересечения биссектрис треугольников *ABC* с данными стороной *AB* и радиусом описанной окружности (рис. 10.9).

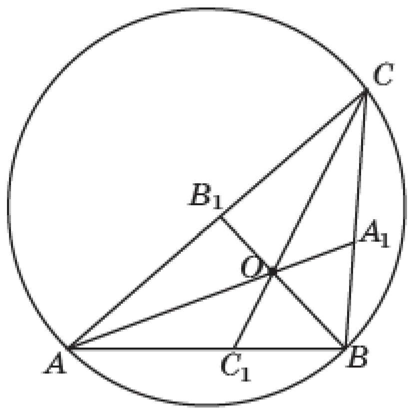


Рис. 10.9

Это ГМТ можно получить в компьютерной программе GeoGebra. Для этого нужно сделать следующее.

1. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построить окружность.

2. С помощью инструмента «Многоугольник» построить треугольник *ABC*, вписанный в эту окружность.

3. С помощью инструмента «Биссектриса угла» провести биссектрисы этого треугольника.

4. С помощью инструмента «Пересечение» получить точку пересечения этих биссектрис.

5. В свойствах этой точки выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении вершины *C* этого треугольника по окружности точка пересечения биссектрис будет перемещаться, и её след даст искомое ГМТ.

11. Координаты на плоскости

Прямая. Напомним, что прямая l на координатной плоскости задаётся уравнением $ax + by + c = 0$, где a, b, c - некоторые числа, причём, a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}(a, b)$, перпендикулярного этой прямой и называемого ***вектором нормали*** (рис. 11.1).

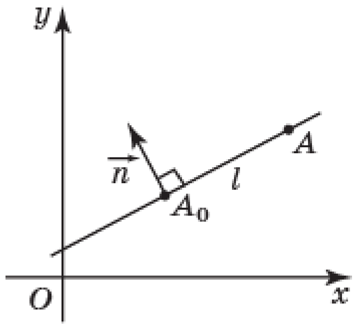


Рис. 11.1

Полуплоскости, ограниченные прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, задаются одним из неравенств $ax + by + c \geq 0$ или $ax + by + c \leq 0$ (рис. 11.2).

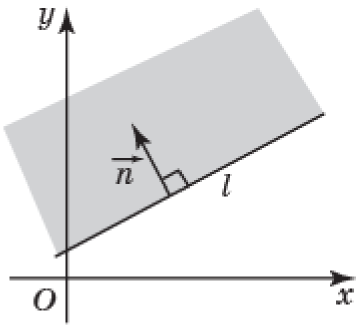


Рис. 11.2

Окружность. Окружность с центром $P(x_0, y_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \text{ (рис. 11.3).}$$

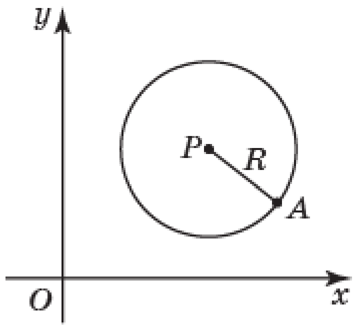


Рис. 11.3

Круг с центром $P(x_0, y_0)$ и радиусом R задаётся неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$$ (рис. 11.4).

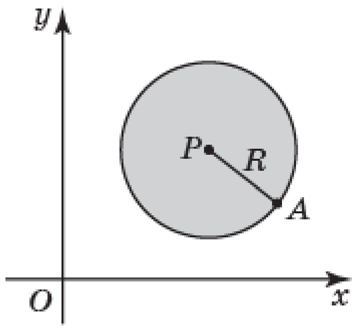


Рис. 11.4

Парабола. Выведем уравнение, задающее параболу с фокусом F и директрисой d на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с её директрисой d через G. Длину отрезка FG обозначим через $2a$ (рис. 11.5).

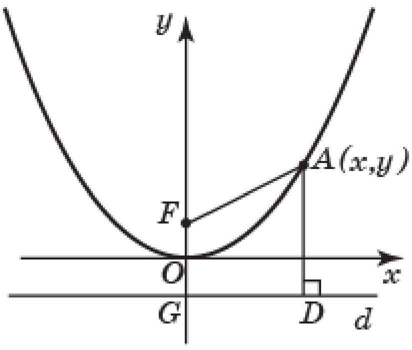


Рис. 11.5

Введём систему координат, считая началом координат середину O отрезка FG, осью абсцисс – прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат - ось параболы. Тогда фокус F будет иметь координаты $(0, a)$. Директриса будет иметь уравнение $y = -a$.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от неё до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ и $|y + a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство $\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|$.

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь уравнение

$$4ay = x^2,$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

В программе GeoGebra параболу можно получить, используя её уравнение. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунок a.
2. В строке «Ввод» написать: $4ay = x$^2.

В результате на экране получим параболу (рис. 11.6).

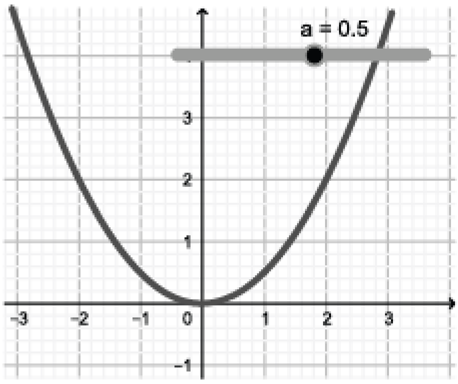


Рис. 11.6

Эллипс. Выведем уравнение эллипса с фокусами F_1, F_2 и константой $2a$ на координатной плоскости. Введём систему координат, считая началом координат середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс - прямую F_1F_2, осью ординат - прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (рис. 11.7). Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

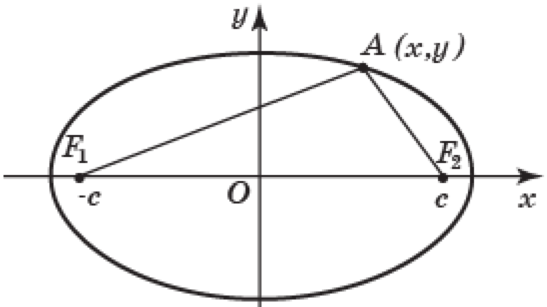


Рис. 11.7

Пусть $A(x, y)$ – точка плоскости. Расстояния от неё до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

где a – некоторое фиксированное число ($a > c$).

Перенесём второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведём обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Приведём подобные члены, получим уравнение

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Ещё раз возведём в квадрат и приведём подобные члены, получим уравнение

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^4-a^2c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

В программе GeoGebra эллипс можно получить, используя его уравнение. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунки a и b.
2. В строке «Ввод» написать: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.

В результате на экране получим эллипс (рис. 11.8).

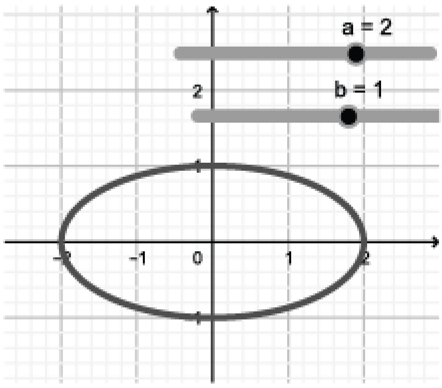


Рис. 11.8

Гипербола. Выведем уравнение гиперболы с фокусами F_1, F_2 и константой $2a$. Введём систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox и делящую отрезок F_1F_2 пополам (рис. 11.9).

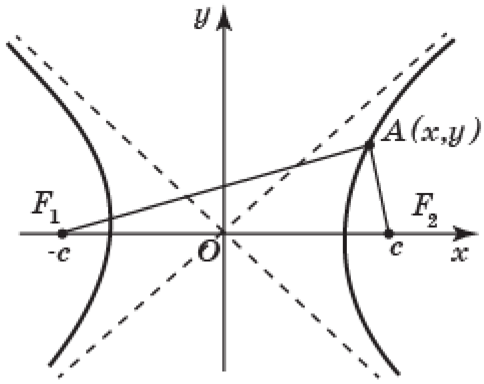


Рис. 11.9

Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Точка $A(x,\ y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = \pm 2a$, где a – некоторое фиксированное число, $0 < a < c$.

Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесём второй корень в правую часть и возведём обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Обозначим $b^2=c^2-a^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое и будет искомым уравнением гиперболы.

В программе GeoGebra гиперболу можно получить, используя её уравнение. Для этого нужно сделать следующее.

1. Создать ползунки a и b.
2. В строке «Ввод» написать: *x*^2/a^2 – y^2/b^2 = 1.

В результате на экране получим гиперболу (рис. 11.10).

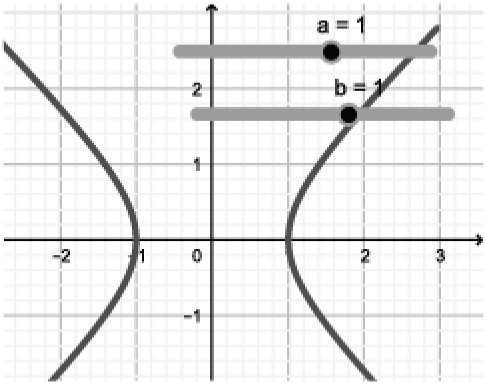


Рис. 11.10

Упражнения

1. На клетчатой бумаге постройте несколько точек C, расстояние от которых до данной точки A в два раза больше расстояния до данной точки B (рис. 11.11). Используя координаты, докажите, что ГМТ C, для которых $AC = kBC$ ($k > 0$, $k \neq 1$) является окружность. Она называется ***окружностью Аполлония.***

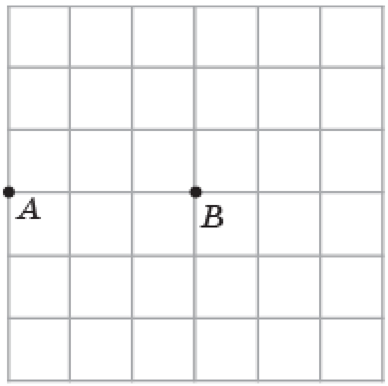


Рис. 11.11

2. Изобразите ГМТ $C(x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению: а) $|x| + |y| = 2$; б) $|x| + 2|y| = 2$ (рис. 11.12).

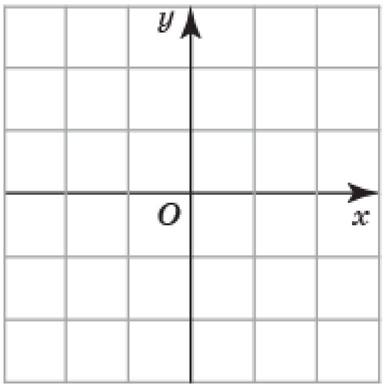


Рис. 11.12

3. Изобразите ГМТ $C(x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x + y| + |x - y| = 4$.

4. Изобразите ГМТ $C(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3, \\ x + y \leq 4. \end{cases}$$

5. Изобразите ГМТ $C(x,\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |y - 4| = 2$.

6. Используя координаты, найдите ГМТ C, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная d^2.

7. Используя координаты, найдите ГМТ C, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная d^2.

8. Сторона AB треугольника ABC фиксирована, а вершина C перемещается по прямой c, параллельной прямой AB. Выясните, какую траекторию будет описывать точка H пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 или их продолжений (рис. 11.13).

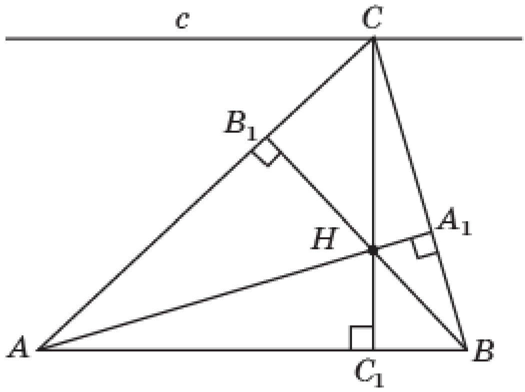


Рис. 11.13

9. Докажите, что ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является параболой. Найдите координаты её фокуса и уравнение директрисы.

10. Докажите, что ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$, где a и c положительны и различны, $e < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, является эллипсом.

11. Докажите, что ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax^2 + bx - cy^2 - dy + e = 0$, где a и c положительны и различны, $e \neq \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}$, является гиперболой.

12. Расстояние от данной точки A до данной прямой b равно a. Какой фигурой является ГМТ плоскости, для которых расстояние до точки A равно расстоянию до прямой b, умноженному на k, $k > 0$.

13. Найдите ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до данной точки и данной прямой, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная.

14. Найдите ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до данной точки и данной прямой, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная.

15. Найдите уравнение ГМТ, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 равно a^2, где $2a$ – расстояние между F_1 и F_2. Это ГМТ называется ***лемнискатой Бернулли.*** Изобразите это ГМТ, используя компьютерную программу GeoGebra.

16. Изобразите ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Это ГМТ называется ***декартовым листом.*** Воспользуйтесь компьютерной программой GeoGebra.

17. Найдите уравнение конхоиды Никомеда (см. пункт 8). Используя это уравнение, получите конхоиду Никомеда в программе GeoGebra.

18. Найдите уравнение улитки Паскаля (см. пункт 8). Используя это уравнение, получите улитку Паскаля в программе GeoGebra.

19. Найдите уравнение строфоиды (см. пункт 8). Используя это уравнение, получите строфоиду в программе GeoGebra.

20. Найдите уравнение циссоиды Диоклеса (см. пункт 8). Используя это уравнение получите циссоиду Диоклеса в программе GeoGebra.

21. Найдите уравнение каппы (см. пункт 8). Используя это уравнение получите каппу в программе GeoGebra.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

12. Прямые и плоскости

Упражнения

1. Найдите ГМТ, удалённых от данной плоскости γ на данное расстояние *d* (рис. 12.1).

Рис. 12.1

2. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных параллельных плоскостей α и β (рис. 12.2).

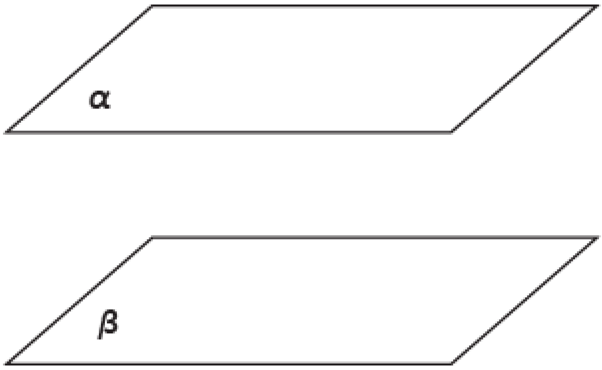


Рис. 12.2

3. Найдите ГМ середин *C* отрезков *AB*, соединяющих данную точку *A*, не принадлежащую данной плоскости β, с точками *B* этой плоскости (рис. 12.3).

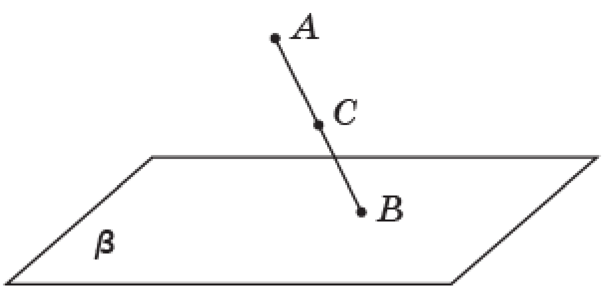


Рис. 12.3

4. Найдите ГМ середин *C* отрезков *AB*, концы которых принадлежат двум данным параллельным плоскостям соответственно α и β (рис. 12.4).

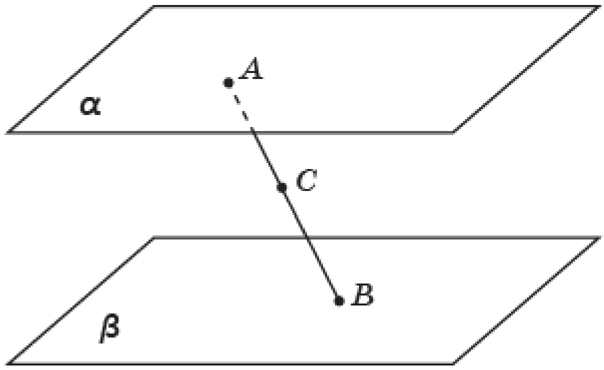


Рис. 12.4

5. Найдите ГМТ, симметричных данной точке A, не принадлежащей данной плоскости β, относительно точек этой плоскости (рис. 12.5).

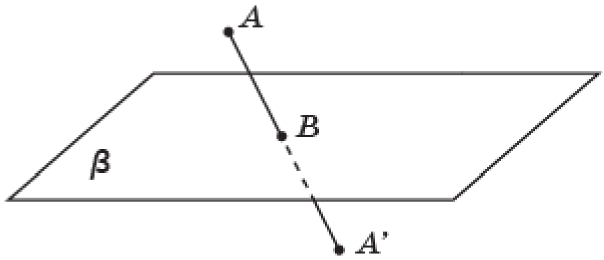


Рис. 12.5

6. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных точек A и B (рис. 12.6).

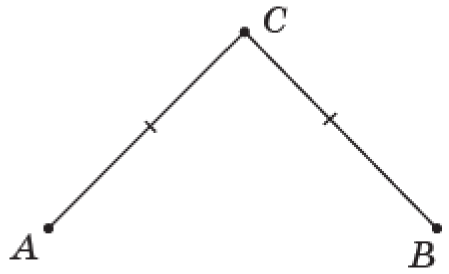


Рис. 12.6

7. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных параллельных прямых a и b (рис. 12.7).

Рис. 12.7

8. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых *a* и *b* (рис. 12.8).

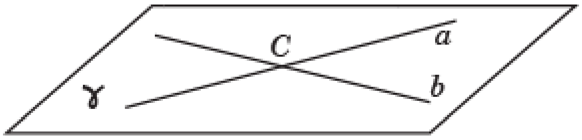


Рис. 12.8

9. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух данных пересекающихся плоскостей α и β (рис. 12.9).

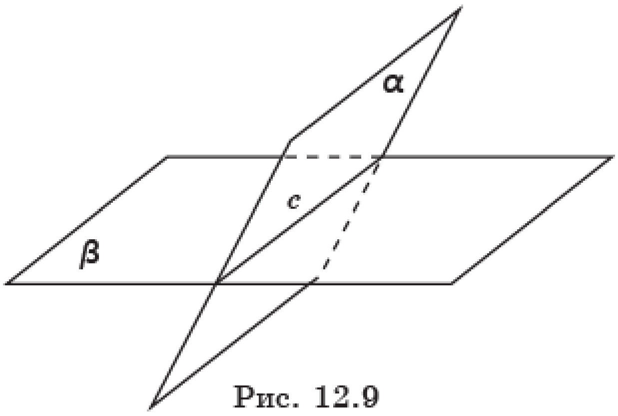


Рис. 12.9

10. Найдите ГМТ, равноудалённых от трёх точек *A*, *B*, *C*, не принадлежащих одной прямой (рис. 12.10).

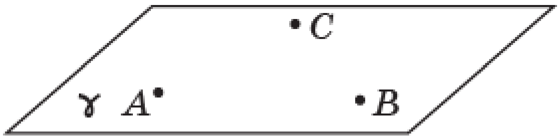


Рис. 12.10

11. Найдите ГМТ, равноудалённых от сторон треугольника *ABC* (рис. 12.11).

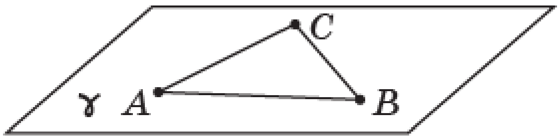


Рис. 12.11

Напомним, что трёхгранным углом называется фигура, образованная тремя лучами с общей вершиной, не лежащими в одной плоскости, тремя плоскими углами, сторонами которых являются данные лучи, и частью пространства, ограниченного этими плоскими углами. Общая вершина называется вершиной трёхгранного угла. Лучи называются рёбрами, а плоские углы – гранями трёхгранного угла.

Трёхгранный угол обозначается указанием его вершины и рёбер. Например, *Oabc*.

12. Найдите ГМТ трёхгранного угла *Oabc*, равноудалённых от его рёбер (рис. 12.12).

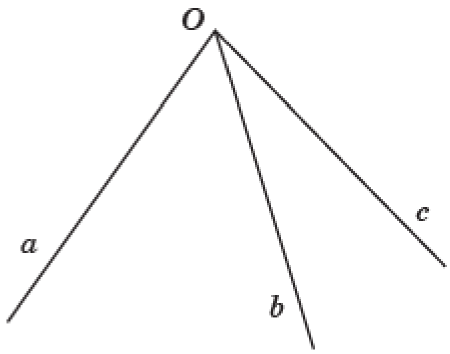


Рис. 12.12

13. Найдите ГМТ трёхгранного угла *Oabc*, равноудалённых от его граней (рис. 12.12).

14. Даны две параллельные плоскости α и β. Найдите ГМТ, расстояние от которых до плоскости α меньше или равно расстоянию до плоскости β (рис. 12.13).

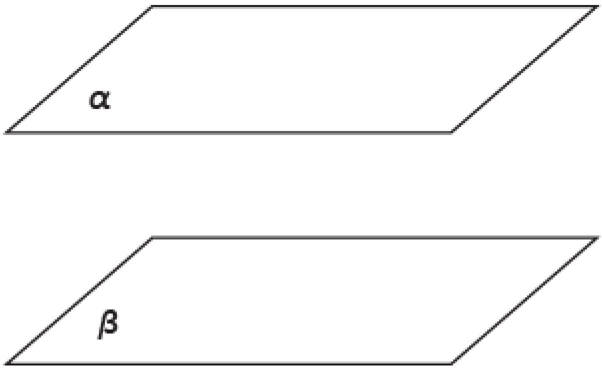


Рис. 12.13

15. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Найдите ГМТ, расстояние от которых до прямой *a* меньше или равно расстоянию до прямой *b* (рис. 12.14).

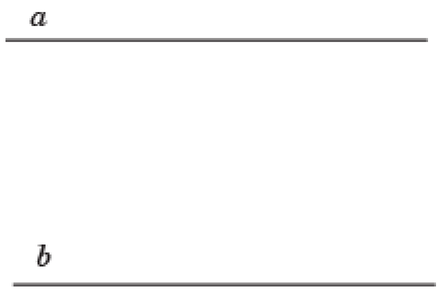


Рис. 12.14

16. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Найдите ГМТ, расстояние от которых до прямой a меньше или равно расстоянию до прямой b (рис. 12.15).

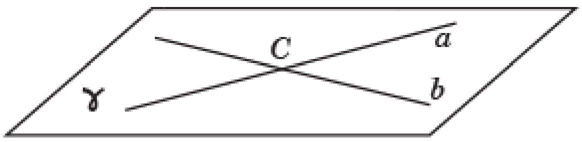


Рис. 12.15

17. Даны две пересекающиеся плоскости α и β. Найдите ГМТ, расстояние от которых до плоскости α меньше или равно расстоянию до плоскости β (рис. 12.16).

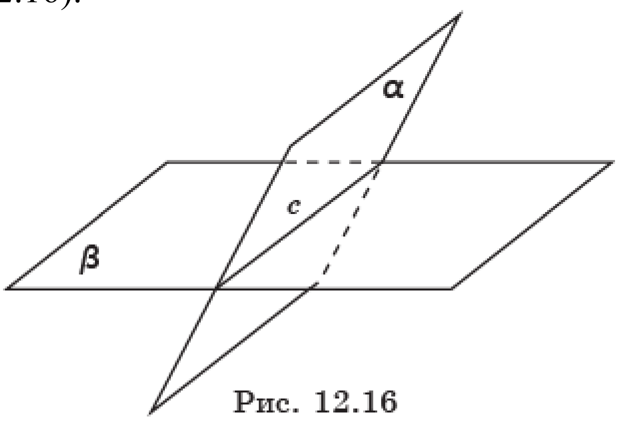


Рис. 12.16

18. Даны две точки A и B. Найдите ГМТ, расстояние от которых до точки A меньше или равно расстоянию до точки b (рис. 12.17).

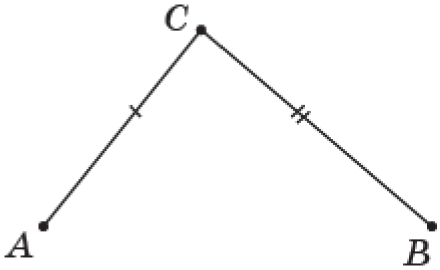


Рис. 12.17

19. Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 12.18), расстояние между которыми равно h. Найдите ГМ середин C отрезков AB заданной длины $c > h$, концы A и B которых принадлежат соответственно прямым a и b.

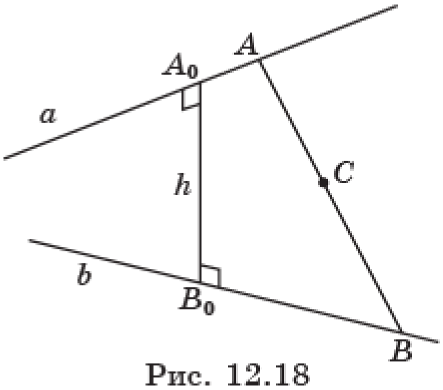


Рис. 12.18

13. Сфера и шар

1. Сформулируйте определение сферы с центром O и радиусом R, используя понятие ГМТ (рис. 13.1).

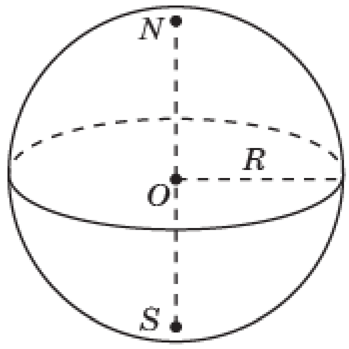


Рис. 13.1

2. Сформулируйте определение шара с центром O и радиусом R, используя понятие ГМТ (рис. 13.2).

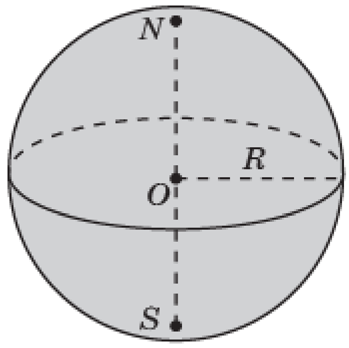


Рис. 13.2

3. Какая фигура является геометрическим местом точек пространства, удалённых от данной точки O на расстояние: а) меньшее; б) большее данного числа $R > 0$?

4. Найдите ГМ центров сфер радиусом R, касающихся данной плоскости γ (рис. 13.3).

Рис. 13.3

5. Найдите ГМ центров сфер, касающихся двух данных параллельных плоскостей α и β (рис. 13.4).

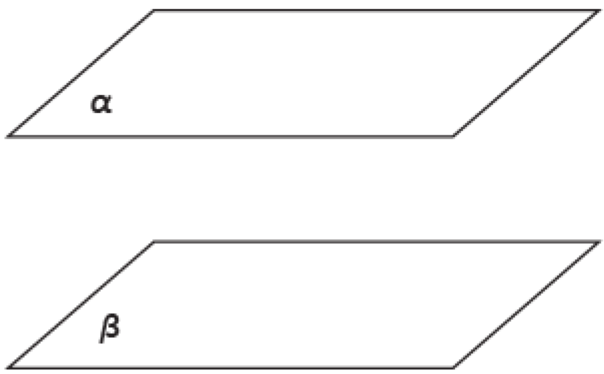


Рис. 13.4

6. Найдите ГМ центров сфер, касающихся двух данных пересекающихся плоскостей α и β (рис. 13.5).

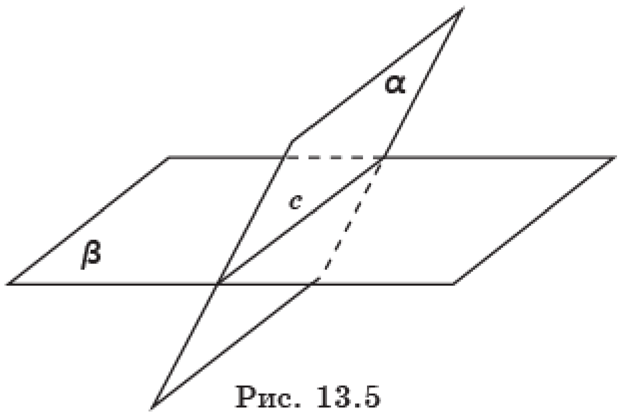


Рис. 13.5

7. Найдите геометрическое место центров сфер радиусом R, проходящих через данную точку A (рис. 13.6).

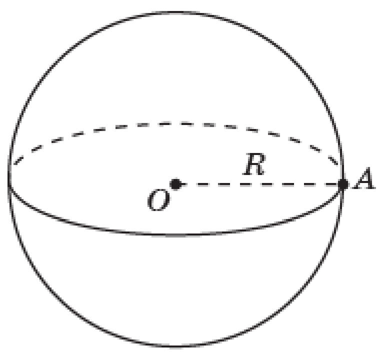


Рис. 13.6

8. Укажите ГМТ, расстояние от которых до сферы с центром O и радиусом R_1 равно R_2 (рис. 13.7). Рассмотрите различные случаи.

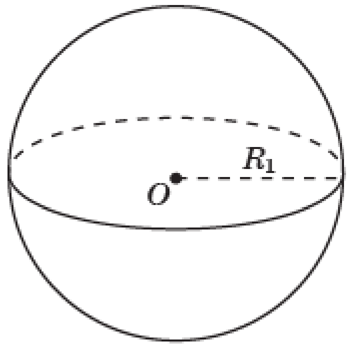


Рис. 13.7

9. Найдите геометрическое место центров сфер радиусом R_2, касающихся данной сферы с центром O и радиусом R_1 (рис. 13.7). Рассмотрите различные случаи.

10. Для данной сферы с центром O найдите ГМ середин C хорд AB данной длины (рис. 13.8).

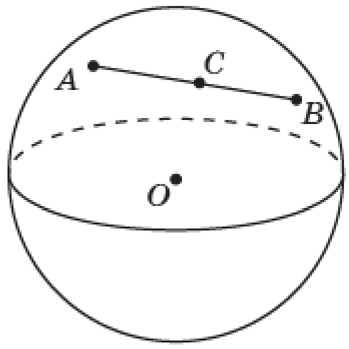


Рис. 13.8

11. Найдите геометрическое место центров сфер радиусом R, проходящих через две данные точки A и B ($R > AB$) (рис. 13.9).

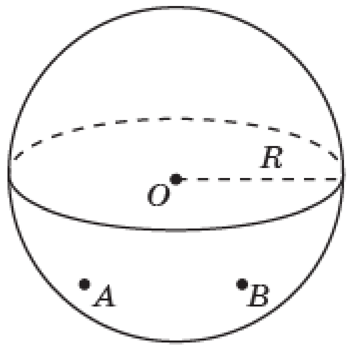


Рис. 13.9

12. Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через две данные точки A и B (рис. 13.10).

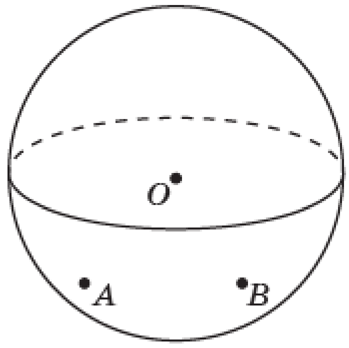


Рис. 13.10

13. Найдите геометрическое место центров сфер радиусом R, касающихся двух данных параллельных прямых a и b (R больше расстояния между этими прямыми) (рис. 13.11).

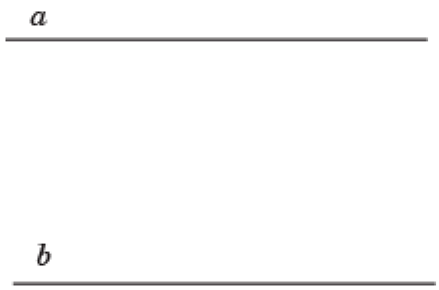


Рис. 13.11

14. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных параллельных прямых a и b (рис. 13.11).

15. Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через вершины данного треугольника ABC (рис. 13.12).

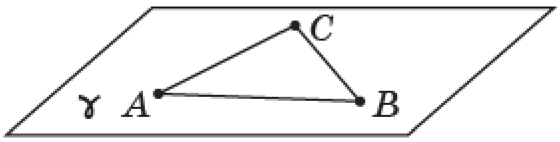


Рис. 13.12

16. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся: а) внешним; б) внутренним образом двух данных сфер с центрами O_1, O_2 и радиусом R ($2R < O_1O_2$) (рис. 13.13).

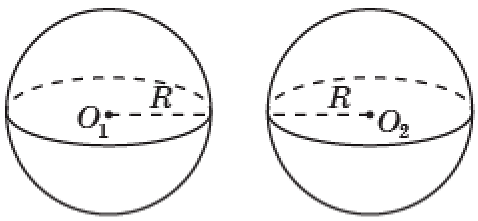


Рис. 13.13

14. Поверхности

Цилиндрическая поверхность – фигура, получающаяся вращением данной прямой a вокруг другой прямой b, параллельной данной (рис. 14.1).

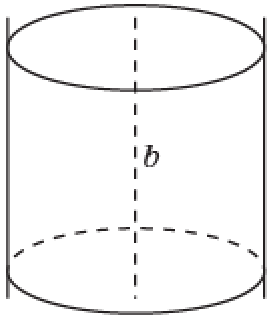


Рис. 14.1

Коническая поверхность – фигура, получающаяся вращением данной прямой a вокруг другой прямой b, пересекающей данную прямую и не перпендикулярную ей (рис. 14.2).

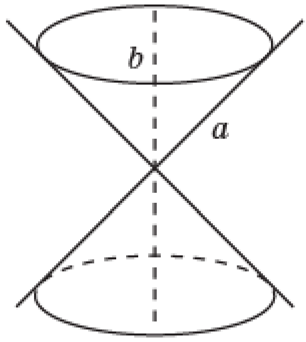


Рис. 14.2

Упражнения

1. Найдите ГМТ A, удалённых от данной прямой b на данное расстояние R (рис. 14.3).

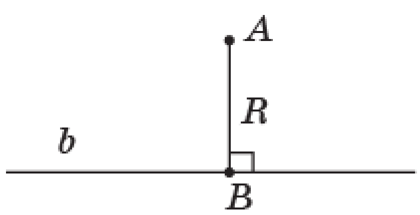


Рис. 14.3

2. Для данной прямой b найдите ГМТ A, расстояния от которых до этой прямой: а) меньше; б) больше данного расстояния R (рис. 14.3).

3. Найдите ГМТ, равноудалённых от данной плоскости β и данной прямой *a*, перпендикулярной этой плоскости (рис. 14.4).

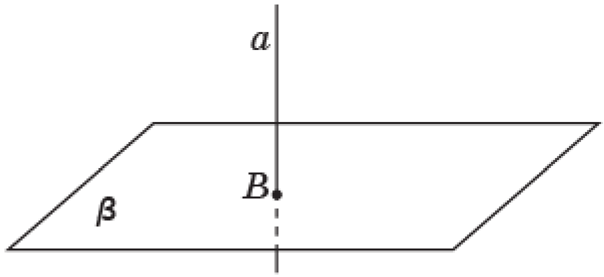


Рис. 14.4

4. Для данной плоскости β и данной прямой *a*, перпендикулярной этой плоскости, найдите ГМТ, расстояния от которых до этой прямой: а) меньше; б) больше расстояния до плоскости β (рис. 14.4).

5. Найдите ГМТ, равноудалённых от данной точки *F* и данной плоскости δ, не проходящей через эту точку (рис. 14.5).

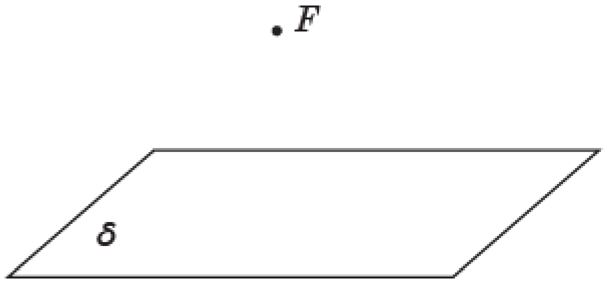


Рис. 14.5

6. Для точки *F*, не принадлежащей плоскости δ, найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до точки *F*: а) меньше; б) больше расстояния до плоскости δ (рис. 14.5).

7. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся плоскости δ и проходящих через данную точку *F*, не принадлежащую этой плоскости (рис. 14.6).

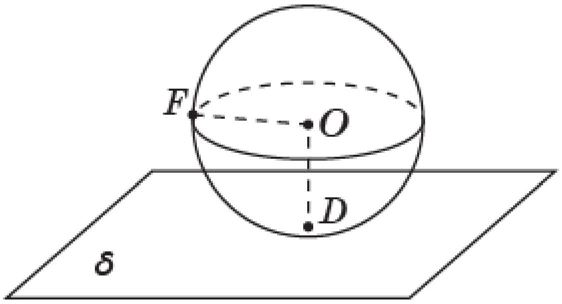


Рис. 14.6

8. Дана плоскость δ и сфера с центром O, не имеющая общих точек с этой плоскостью. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся данной плоскости и данной сферы: а) внешним; б) внутренним образом (рис. 14.7).

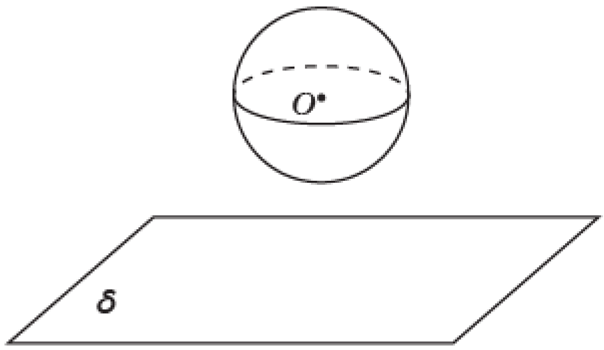


Рис. 14.7

9. Найдите геометрическое место точек A, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна $c > F_1F_2$ (рис. 14.8).

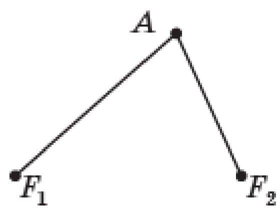


Рис. 14.8

10. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от данной сферы с центром O и точки P, расположенной внутри этой сферы (рис. 14.9).

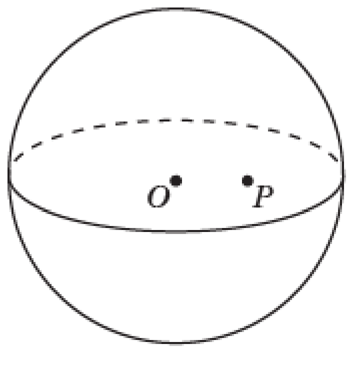


Рис. 14.9

11. Найдите геометрическое место центров O сфер, касающихся двух данных сфер с центрами O_1, O_2, одна из которых расположена внутри другой (рис. 14.10).

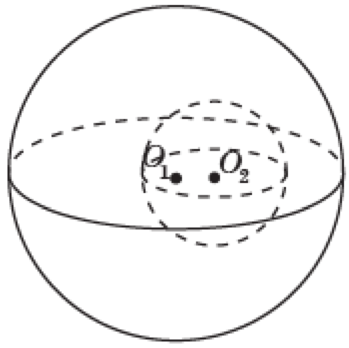


Рис. 14.10

12. Найдите геометрическое место точек A, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 постоянен и равен $c < F_1F_2$ (рис. 14.11).

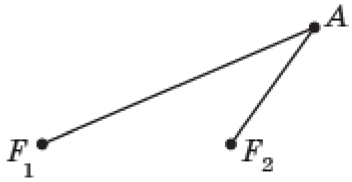


Рис. 14.11

13. Найдите геометрическое место центров O сфер, касающихся двух данных сфер с центрами O_1, O_2, одна из которых расположена вне другой: а) внешним; б) внутренним образом (рис. 14.12).

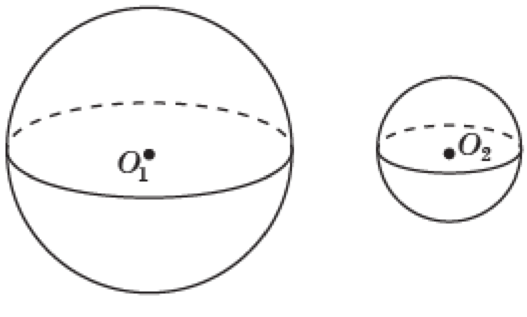


Рис. 14.12

14. Найдите ГМТ C, из которых данный отрезок AB виден под данным углом φ (рис. 14.13).

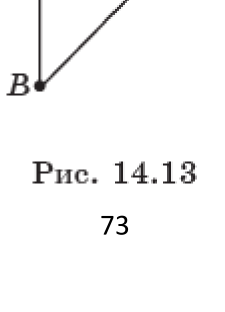


Рис. 14.13

15. Дана прямая a и перпендикулярная ей плоскость β (рис. 14.14). Найдите ГМ середин C отрезков AB заданной длины c, концы A и B которых принадлежат соответственно прямой a и плоскости β.

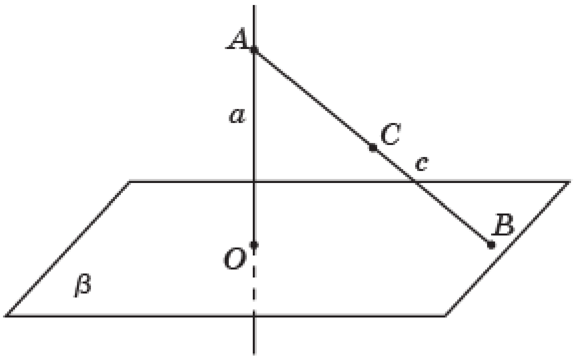


Рис. 14.14

15. Координаты в пространстве

Плоскость. Напомним, что плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d - действительные числа, из которых a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора нормали (рис. 15.1).

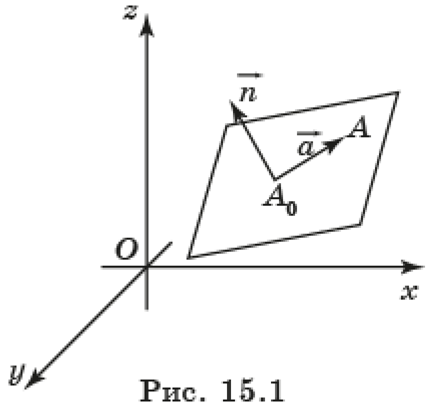


Рис. 15.1

Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство, задаются неравенствами

$$ax + by + cz + d \geq 0, ax + by + cz + d \leq 0.$$

Для того чтобы определить, какому из двух полупространств относительно заданной плоскости принадлежит точка $A(x, y, z)$, достаточно подставить её координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Сфера. Сфера с центром $P(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \text{ (рис. 15.2).}$$

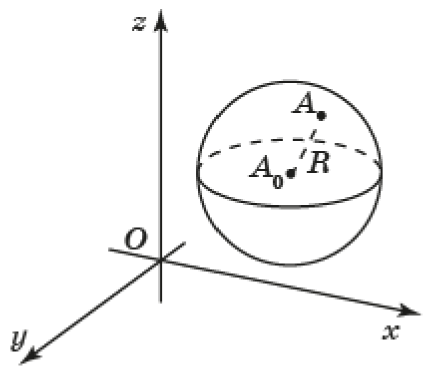


Рис. 15.2

Шар с центром $P(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задаётся неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2 \text{ (рис. 15.3).}$$

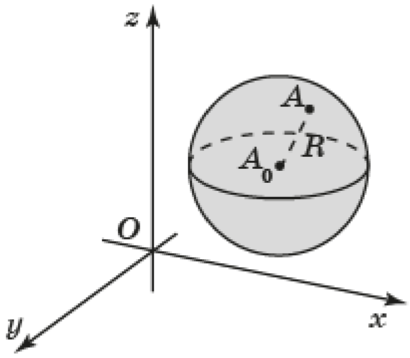


Рис. 15.3

Если кривая в плоскости Oxz задаётся уравнением $f(x, z) = 0$ ($x \geq 0$), то поверхность в пространстве $Oxyz$, получающаяся вращением этой кривой вокруг оси Oz, задаётся уравнением $f\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$ (рис. 15.4).

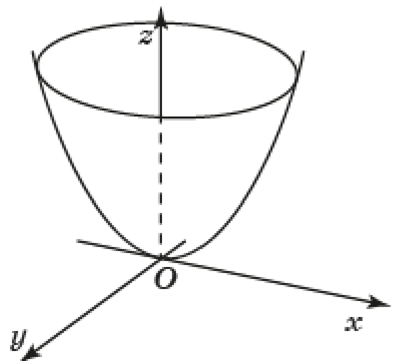


Рис. 15.4

Упражнения

1. Изобразите ГМТ $C(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| + |z| \leq a$ ($a > 0$).

2. Изобразите ГМТ $C(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0 \leq z \leq 3, \\ x + y + z \leq 4. \end{cases}$$

3. В плоскости Oxz парабола задаётся уравнением $4az = x^2$. Напишите уравнение параболоида вращения – поверхности в пространстве $Oxyz$, полученной вращением этой параболы вокруг оси Oz (рис. 15.5).

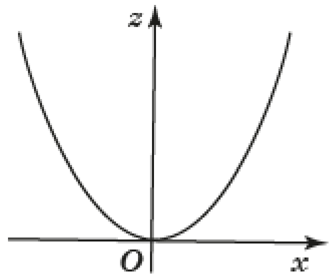


Рис. 15.5

4. В плоскости *Oxz* эллипс задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. Напишите уравнение эллипсоида вращения – поверхности в пространстве *Oxyz*, полученной вращением этого эллипса вокруг оси *Ox*.

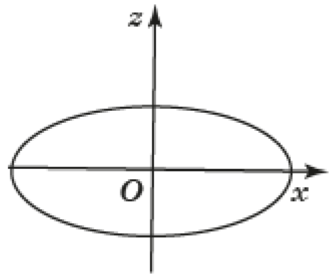


Рис. 15.6

5. В плоскости *Oxz* гипербола задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. Напишите уравнение гиперболоида вращения – поверхности в пространстве *Oxyz*, полученной вращением этой гиперболы вокруг оси *Ox* (рис. 15.7).

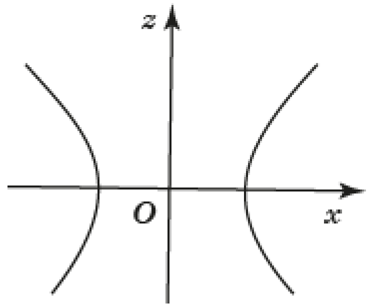


Рис. 15.7

6. Используя координаты, найдите ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек *A* и *B* есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.8).

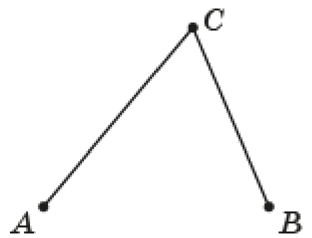


Рис. 15.8

7. Используя координаты, найдите ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек *A* и *B* есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.8).

8. Найдите уравнение, задающее ГМТ, удалённых от прямой, задаваемой уравнениями $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ на расстояние R (рис. 15.9).

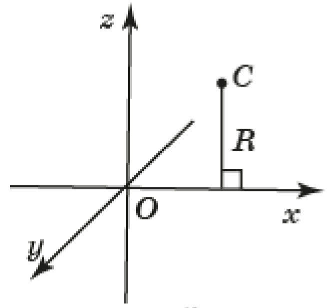


Рис. 15.9

9. Найдите уравнение, задающее ГМТ, равноудалённых от прямой, задаваемой уравнениями $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ и плоскости, задаваемой уравнением $z = 0$ (рис. 15.10).

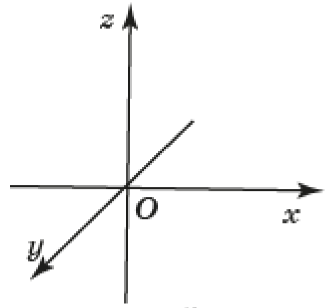


Рис. 15.10

10. Данs точка $F(0, 0, a)$ и прямая b, задаваемая уравнениями $\begin{cases} y = 0, \\ z = -a. \end{cases}$ Найдите уравнение, задающее ГМТ, равноудалённых от данной точки и данной прямой (рис. 15.11).

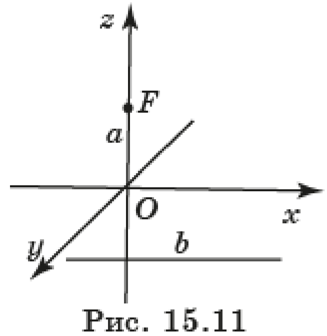


Рис. 15.11

11. Используя координаты, найдите ГМТ, равноудалённых от двух скрещивающихся перпендикулярных прямых a и b (рис. 15.12).

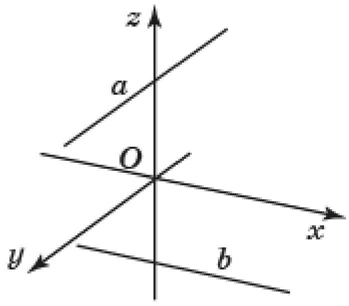


Рис. 15.12

12. Найдите ГМТ, расстояние от которых до точки $F(0, 0, a)$ равно расстоянию до плоскости Oxy, умноженному на k, $k > 0$ (рис. 15.13).

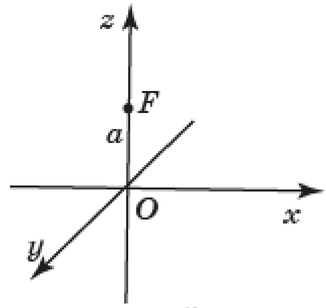


Рис. 15.13

13. Найдите ГМТ C, разность квадратов расстояний от которых до данной точки A и данной прямой b, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.14).

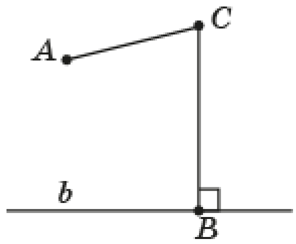


Рис. 15.14

14. Найдите ГМТ C, сумма квадратов расстояний от которых до данной точки A и данной прямой b, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.14).

15. Найдите ГМТ C, разность квадратов расстояний от которых до данной точки A и данной плоскости β, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.15).

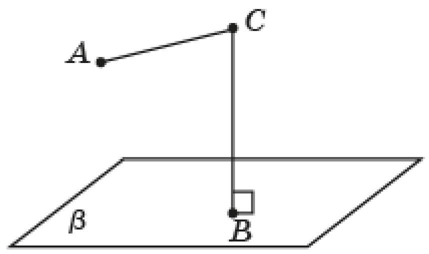


Рис. 15.15

16. Найдите ГМТ C, сумма квадратов расстояний от которых до данной точки A и данной плоскости β, не проходящей через эту точку, есть величина постоянная, равная d^2 (рис. 15.15).

17. Дана точка $F(0, 0, d)$ и прямая a, лежащая на оси Ox Найдите уравнение, задающее ГМТ, расстояние от которых до точки $F(0, 0, a)$ равно расстоянию до прямой b, умноженному на k, $k > 0$ (рис. 15.16).

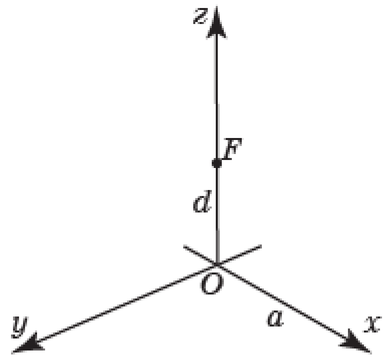


Рис. 15.16

18. Прямая a лежит на оси Ox. Прямая b лежит в плоскости yOz, параллельна оси Oy и отстоит от неё на расстояние d (рис.15.16). Найдите уравнение, задающее ГМТ C, расстояние от которых до прямой a в два раза больше, чем расстояние до прямой b.

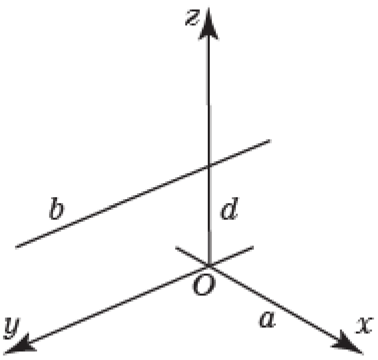


Рис. 15.17

ОТВЕТЫ

1

1. Луч, вершиной которого является середина C отрезка AB, содержащий точку A (рис. О1.1).

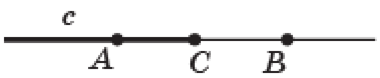


Рис. О1.1

Рис. О1.2

2. Отрезок DE, концами которого являются середины D, E отрезков соответственно AB и AC (рис. О1.2). **3.** Окружность с центром O и радиусом R (рис. О1.3). **4.** Круг с центром O и радиусом R (рис. О1.4).

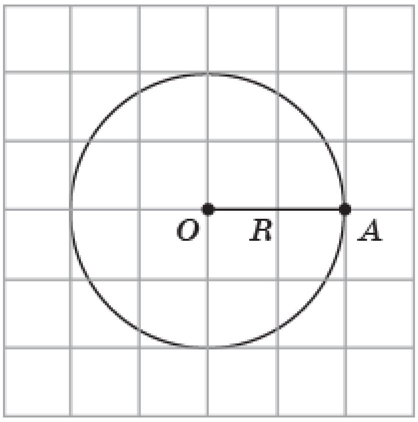


Рис. О1.3

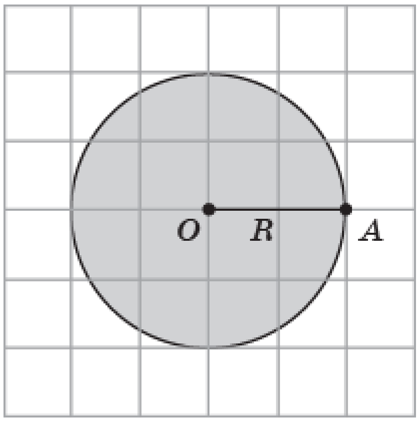


Рис. О1.4

5. а) Точки, расположенные внутри окружности с центром O и радиусом R (рис. О1.5); б) точки, расположенные вне окружности с центром O и радиусом R (рис. О1.6).

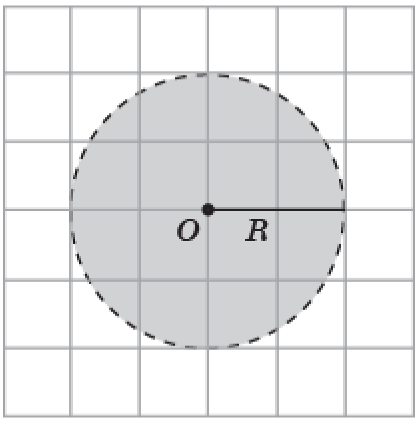


Рис. О1.5

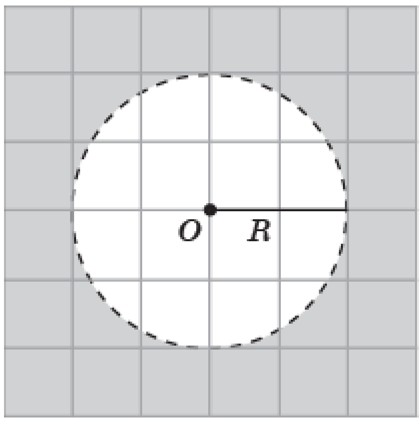


Рис. О1.6

6. а) Рисунок О1.7; б) рисунок О1.8;

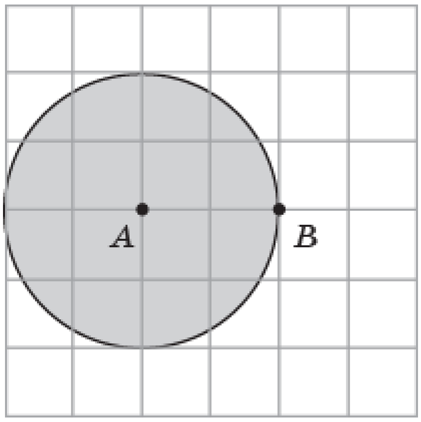


Рис. О1.7

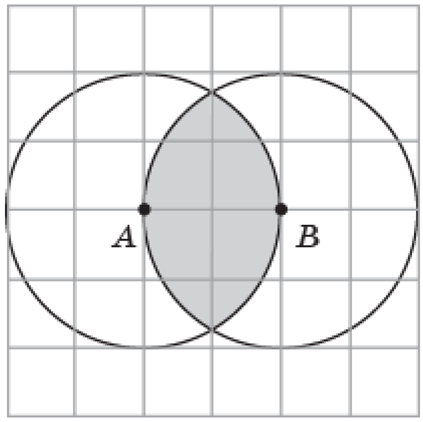


Рис. О1.8

в) рисунок О1.9; г) рисунок О1.10.

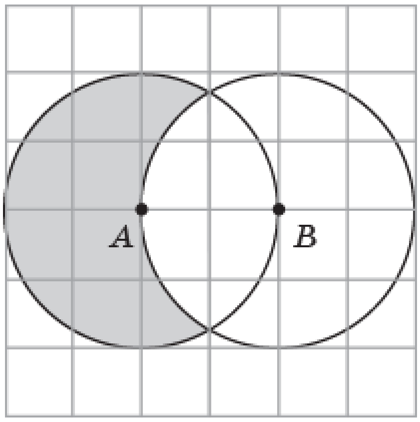


Рис. О1.9

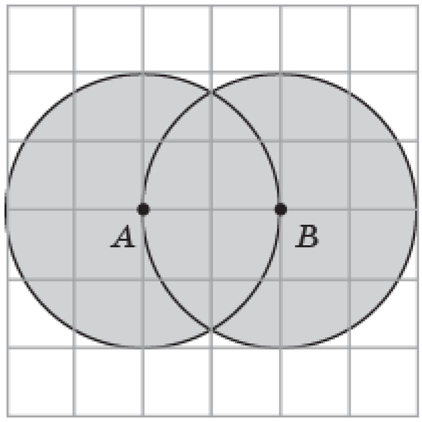


Рис. О1.10

7. а) Рисунок О1.11; б) рисунок О1.12);

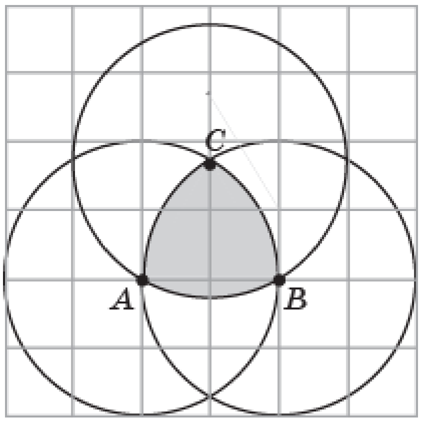


Рис. О1.11

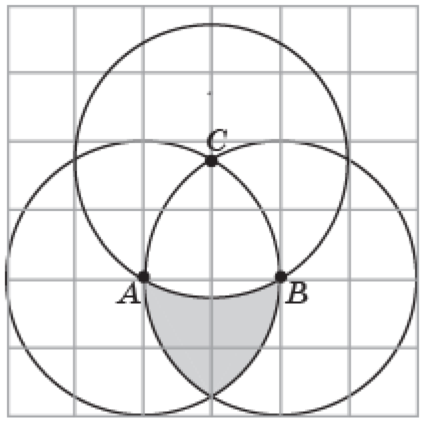


Рис. О1.12

в) рисунок О1.13; г) рисунок О1.14.

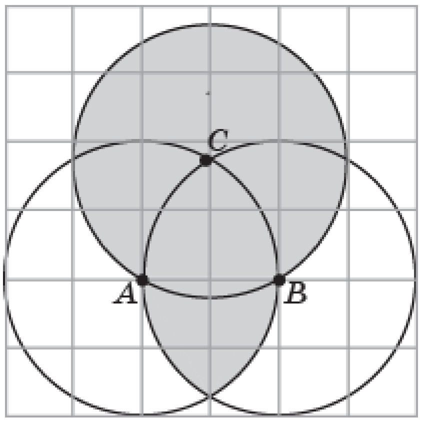


Рис. О1.13

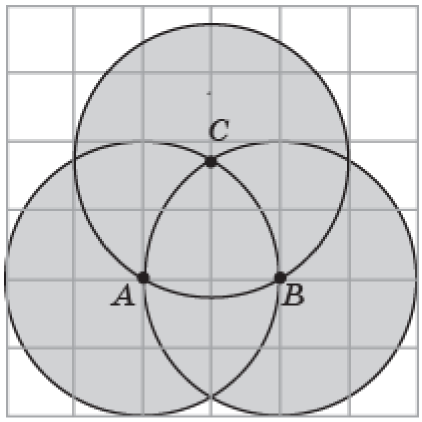


Рис. О1.14

8. Окружность с центром в точке A и радиусом R. **9.** Отрезок A_1A_2 прямой a (рис. О1.15). **10.** Две окружности c_1, c_2 с центром O и радиусами 1 и 3 (рис. О1.16).

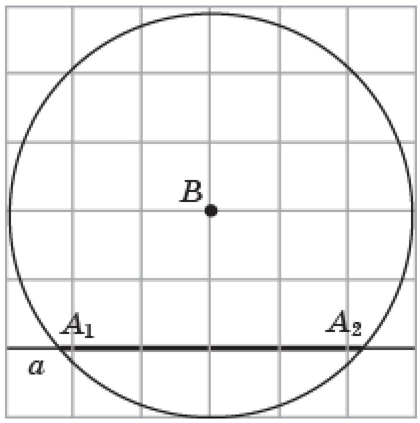


Рис. О1.15

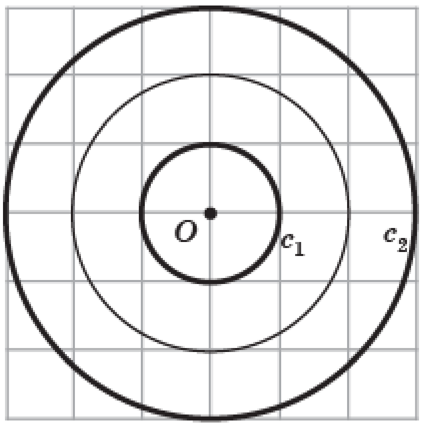


Рис. О1.16

11. Если $R_1 \neq R_2$, то искомым ГМТ являются две окружности c_1, c_2 с центром O и радиусами $|R_1 - R_2|$ и $R_1 + R_2$ (рис. О1.17). Если $R_1 = R_2 = R$, то искомым ГМТ является окружность c с центром O и радиусом $2R$ (рис. О1.18).

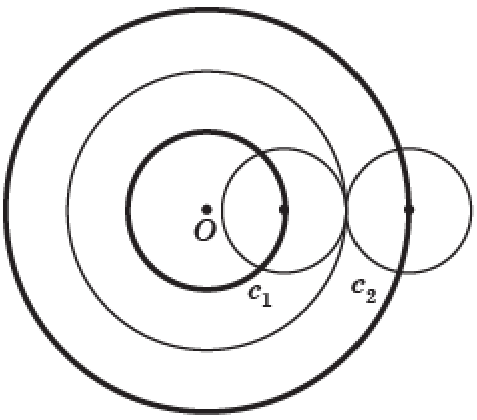


Рис. О1.17

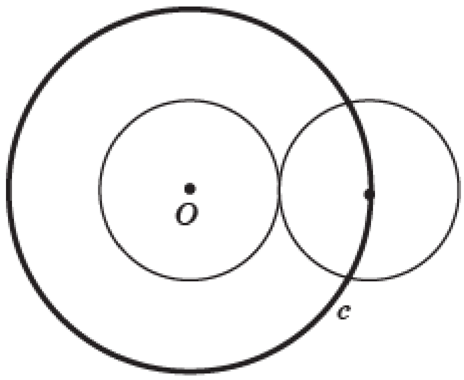


Рис. О1.18

12. Рисунок О1.19. **13.** $\{E \mid OE \leq 2$ и $OA \geq 2$ и $OB \geq 2$ и $OC \geq 2$ и $OD \geq 2\}$.

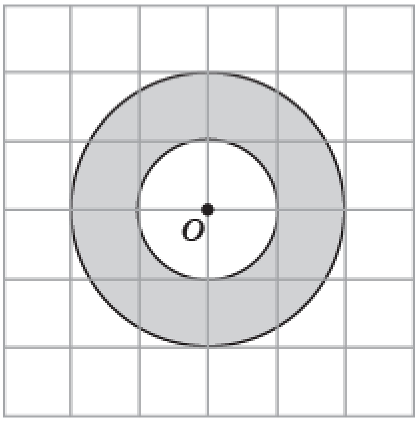


Рис. О1.19

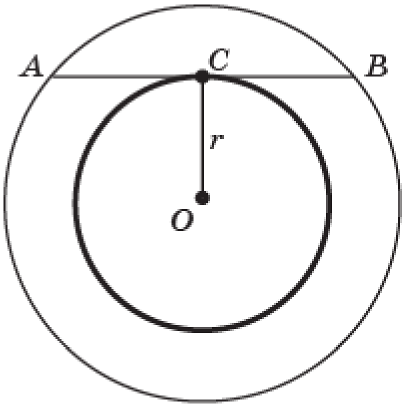


Рис. О1.20

14. Искомым ГМТ является окружность с центром *O* и радиусом *r*, равным расстоянию от этого центра до хорды (рис. О1.20). **15.** Прямая *OA* без точек *O* и *A* (рис. О1.21).

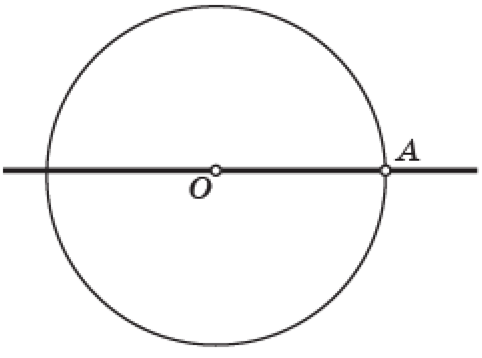


Рис. О1.21

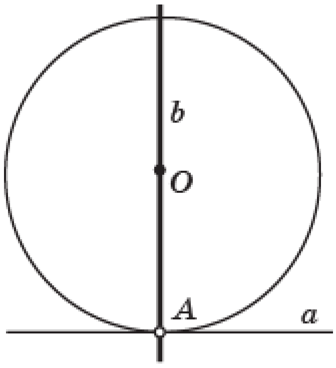


Рис. О1.22

16. Прямая *b*, перпендикулярная прямой *a*, проходящая через точку *A*, без самой этой точки (рис. О1.22). **17.** Две концентрические окружности с центром *O* и диаметрами *R* - *r* и *R* + *r* (рис. О1.23).

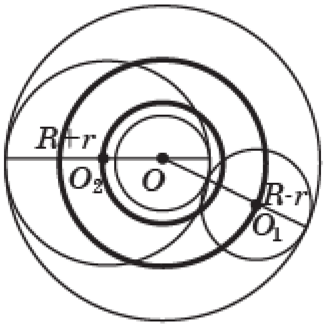


Рис. О1.23

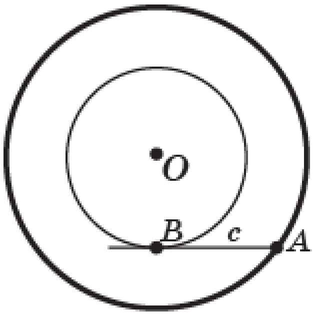


Рис. О1.24

18. Окружность с центром *O* (рис. О1.24).

2

1. Рисунок O2.1.

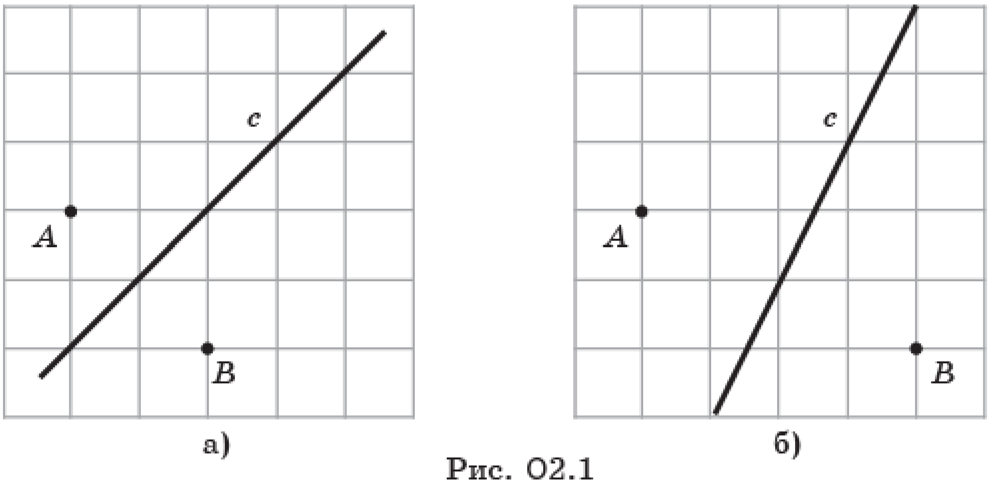


Рис. O2.1

2. Серединный перпендикуляр *c* к отрезку *AB* (рис. O2.2).

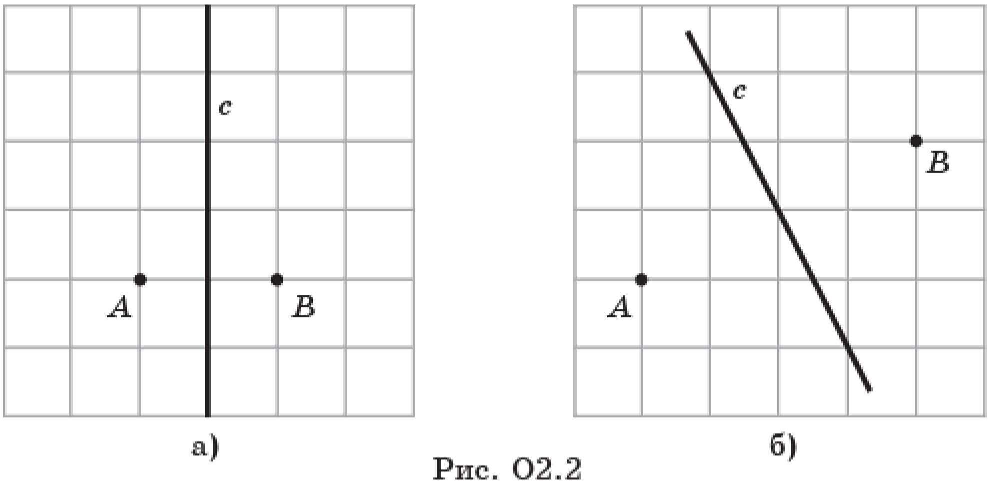


Рис. O2.2

3. Серединный перпендикуляр *c* к отрезку *AB* без середины этого отрезка (рис. O2.3).

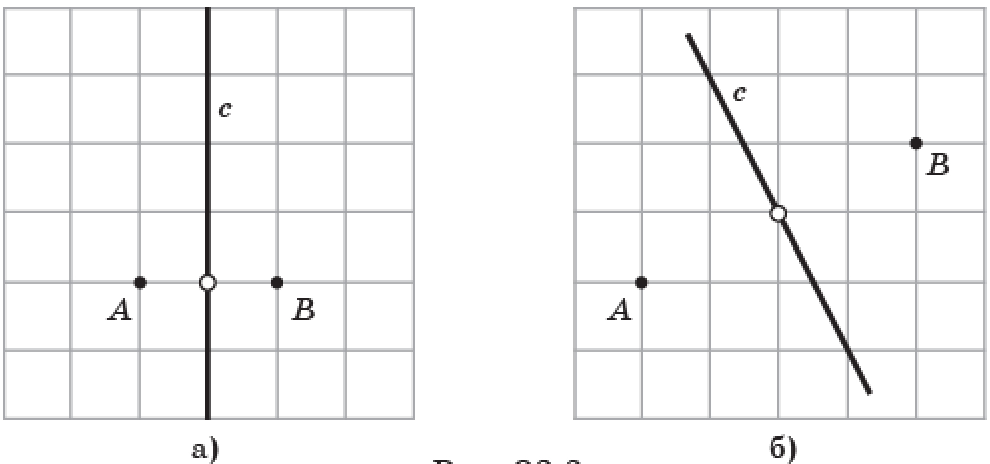


Рис. O2.3

4. Серединный перпендикуляр к отрезку O_1O_2 (рис. O2.4).

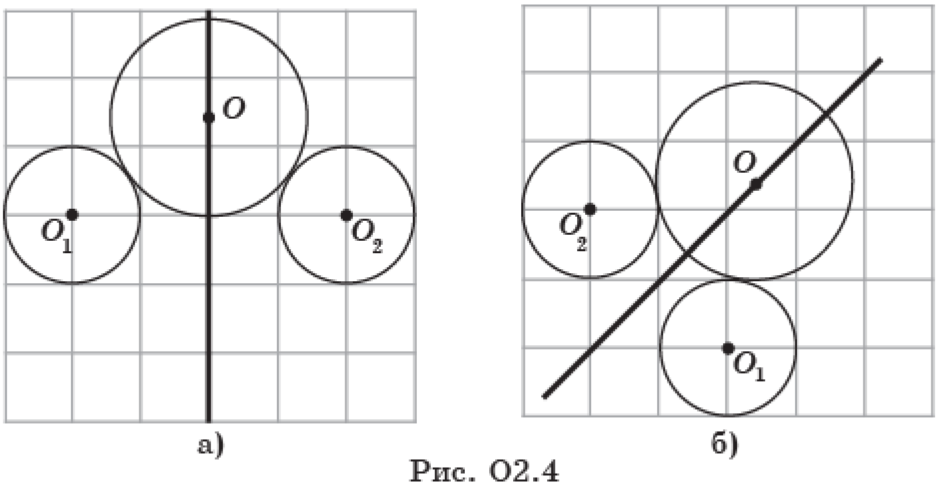


Рис. O2.4

5. Серединный перпендикуляр к отрезку O_1O_2 (рис. O2.5).

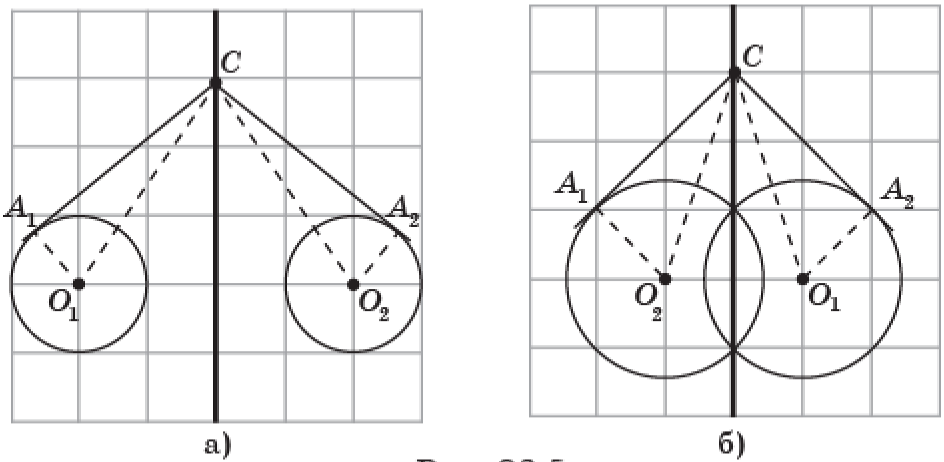


Рис. O2.5

6. Точка C пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB с прямой c (рис. O2.6).

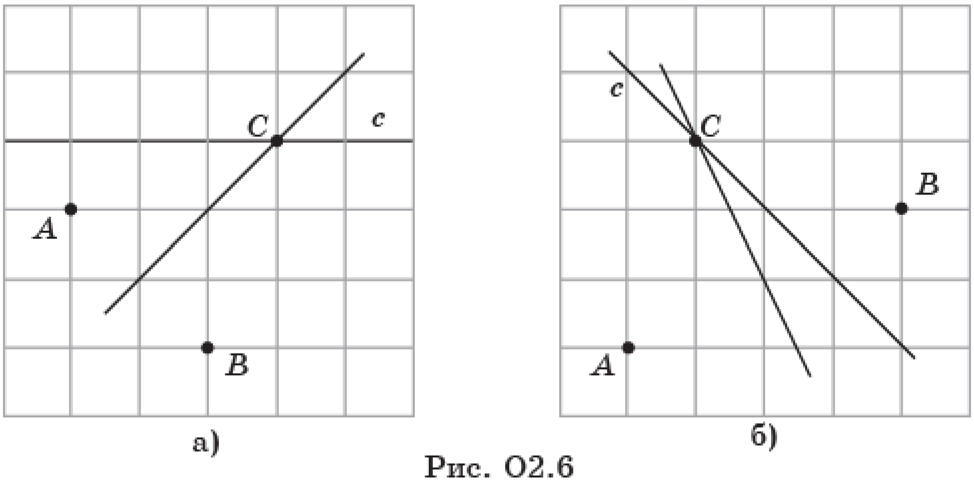
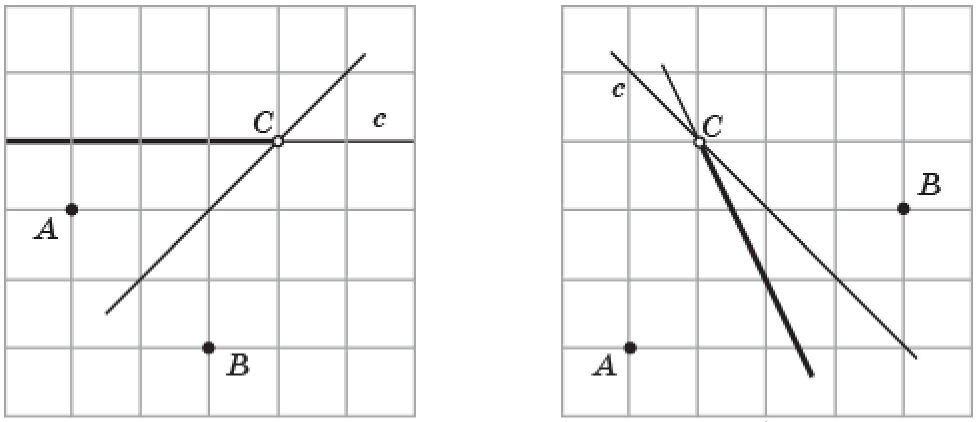


Рис. O2.6

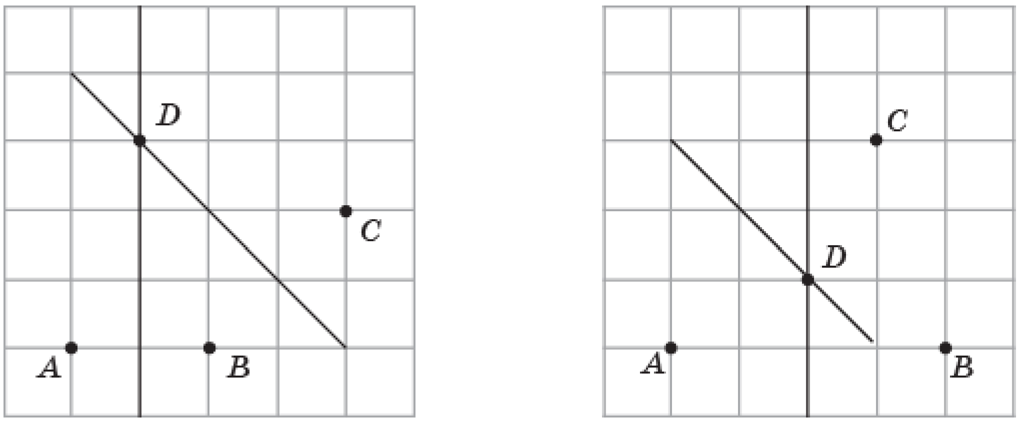
7. Луч, лежащий на серединном перпендикуляре к отрезку AB, вершиной которого является точка C пересечения этого перпендикуляра с прямой c, без самой этой вершины (рис. О2.7).



а) б)

Рис. О2.7

8. Искомой точкой является точка D пересечения серединных перпендикуляров (рис. О2.8).



а) б)

Рис. О2.8

9. а) Рисунок О2.9; б) рисунок О2.10.

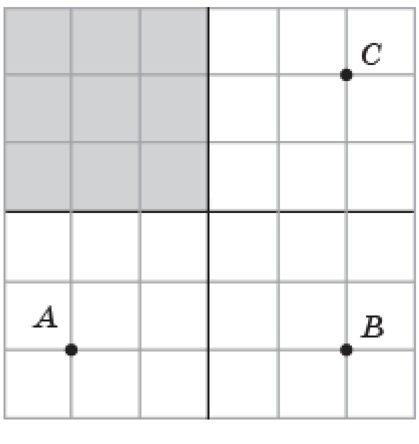


Рис. О2.9

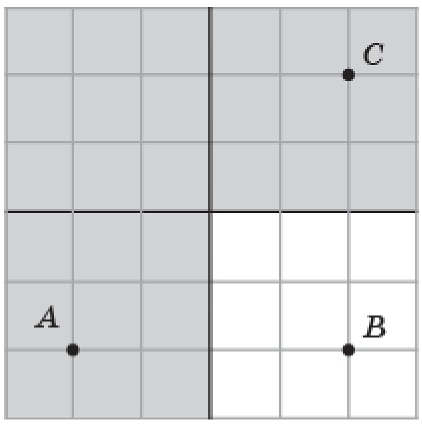
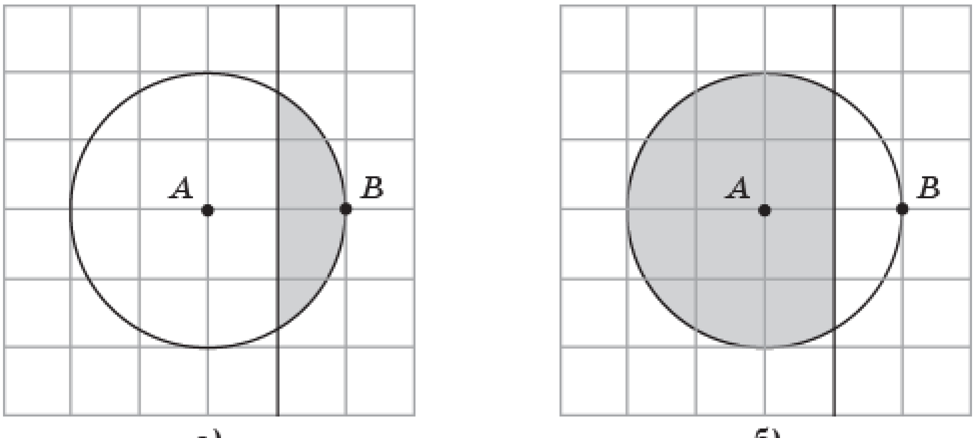


Рис. О2.10

10. Рисунок О2.11.



а) Рис. О2.11 б)

3

1. (рис. О3.1). **2.** Точка *C* (рис. О3.2).

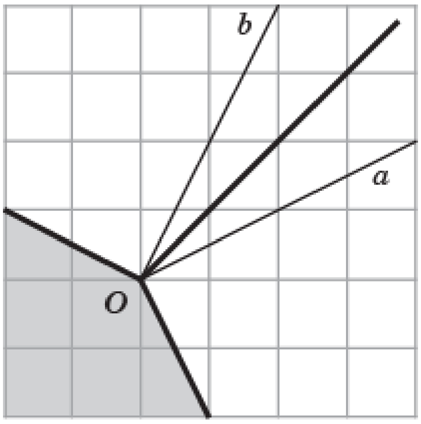


Рис. О3.1

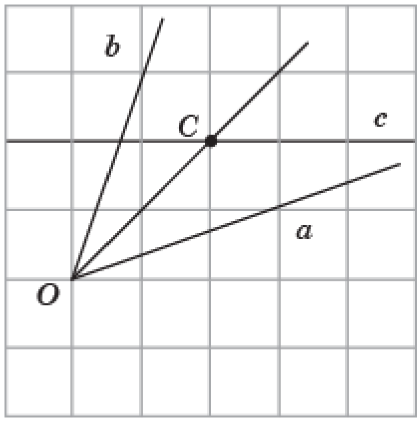


Рис. О3.2

3. Биссектриса *c* угла *aOb* (рис. О3.3).

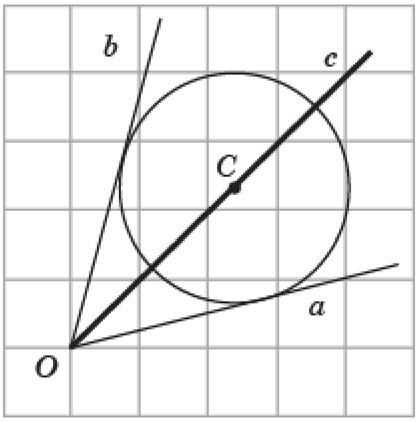


Рис. О3.3

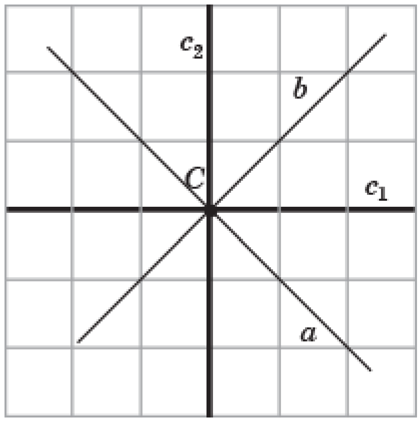


Рис. О3.4

4. Перпендикулярные прямые c_1, c_2, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми a и b (рис. О3.4).

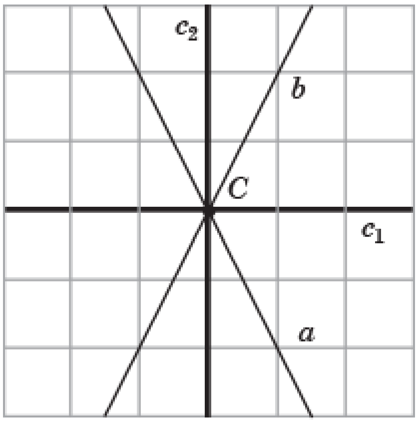


Рис. О3.5

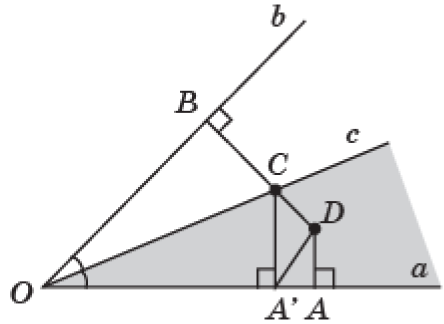


Рис. О3.6

5. Перпендикулярные прямые c_1, c_2, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми a и b, без их точки пересечения C (рис. О3.5).

6. Пусть точка D принадлежит внутренности угла aOc. Опустим из неё перпендикуляры DA и DB на стороны угла aOb соответственно a и b (рис. О3.6). Обозначим C точку пересечения отрезка BD и биссектрисы c. Из точки C опустим перпендикуляр CA' на сторону a угла aOb. Проведём отрезок $A'D$. Тогда $BD = BC + CD = A'C + CD > A'D > DA$, т. е. расстояние от точки D до стороны a меньше расстояния до стороны b. Аналогично доказывается, что для внутренних точек E угла cOb расстояние до стороны b меньше расстояния до стороны a. Следовательно, ГМТ угла aOb, для которых расстояние до стороны a меньше расстояния до стороны b, является внутренность угла aOc.

7. Искомым ГМТ является внутренность двух вертикальных углов, сторонами которых являются биссектрисы углов, образованных данными прямыми (рис. О3.7).

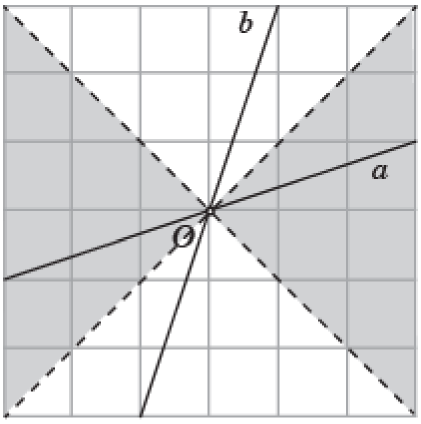


Рис. О3.7

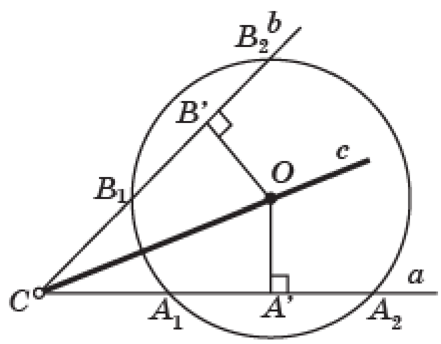


Рис. О3.8

8. Хорды A_1A_2 и B_1B_2 равны в том и только том случае, когда равны расстояния от центра окружности до этих хорд. Это возможно тогда и только тогда, когда центр окружности принадлежит биссектрисе угла. Следовательно, искомым ГМТ является биссектриса данного угла без его вершины (рис. О3.8). **9.** Точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB с биссектрисой угла (рис. О3.9).

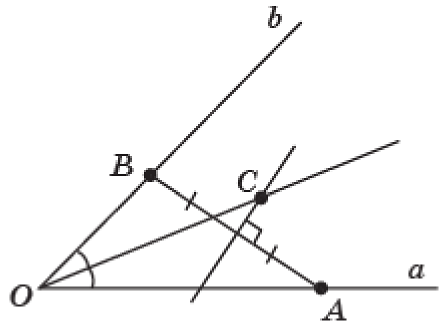


Рис. О3.9

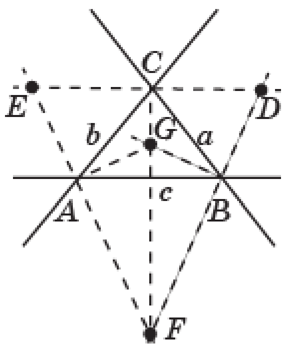


Рис. О3.10

10. Четыре точки D, E, F, G попарных пересечений биссектрис углов, образованных данными прямыми (рис. О3.10).

4

1. Проведём прямую l, перпендикулярную данным прямым a и b. Обозначим A и B её точки пересечения с этими прямыми (рис. О4.1). Искомым ГМТ будет прямая c, проходящая через середину C отрезка AB и параллельная данным прямым a и b. **2.** Через точку C данной прямой c проведём прямую l, перпендикулярную прямой c. Отметим на прямой l точки A и B, находящиеся на расстоянии d = 1 от точки C. Искомым ГМТ будут две прямые a и b, проходящие соответственно через точки A и B и параллельные прямой c (рис. О4.2).

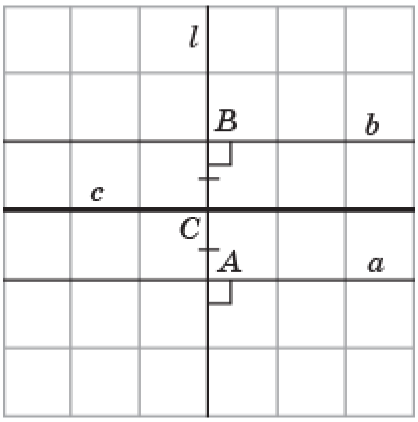


Рис. О4.1

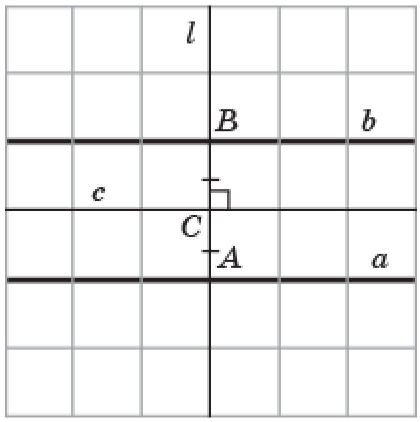


Рис. О4.2

3. Так как центры окружностей радиусом R = 1, касающихся данной прямой c будут одинаково удалены от прямой c, то, согласно предыдущей задаче, искомым ГМТ будут две прямые a и b, параллельные данной прямой c (рис. О4.3).

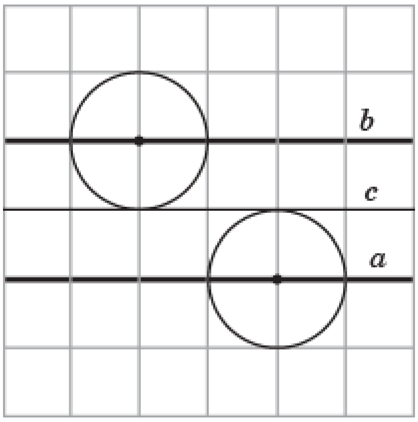


Рис. О4.3

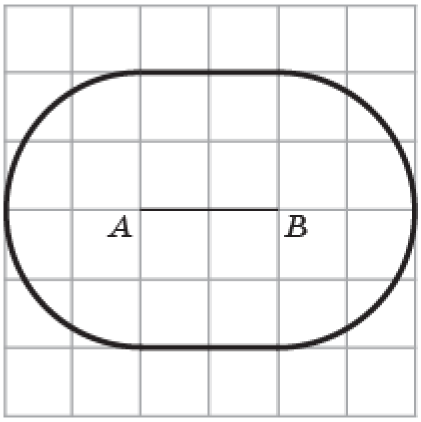


Рис. О4.4

4. Фигура, состоящая из двух отрезков и двух полуокружностей (рис. О4.4).
5. Рисунок О4.5. **6.** Рисунок О4.6.

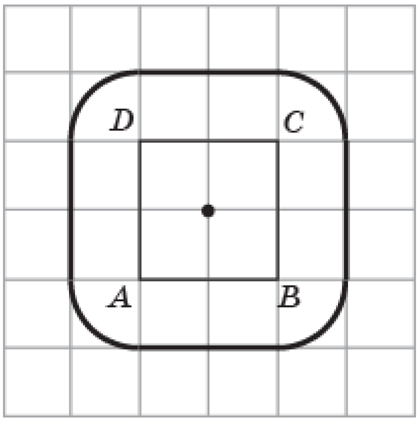


Рис. 4.5

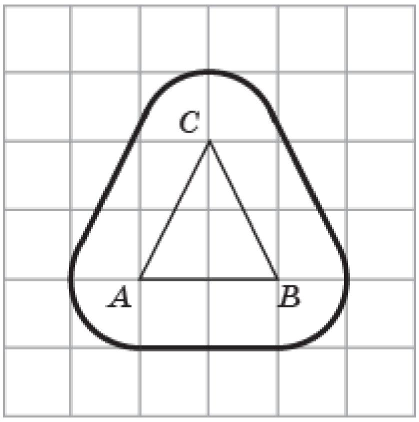


Рис. О4.6

7. Прямая c, параллельная данной прямой b (рис. О4.7).

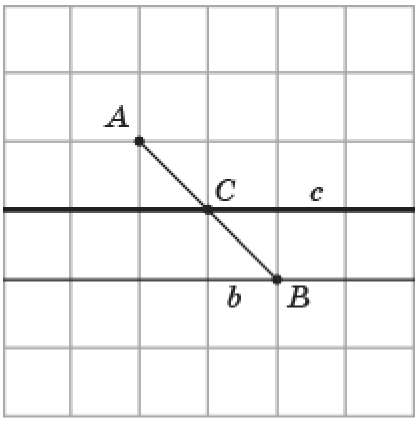


Рис. О4.7

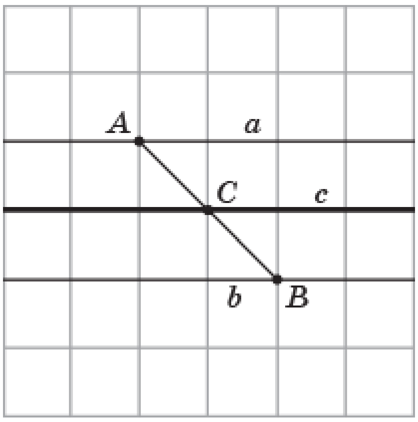


Рис. О4.8

8. Прямая *c*, параллельная данным прямым *a* и *b* (рис. О4.8). **9.** На прямой *b* выберем какую-нибудь точку *B*. Построим точку *A'*, симметричную точке *A* относительно точки *B*. Искомым ГМТ будет прямая *a*, проходящая через точку *A'* и параллельная данной прямой *b* (рис. О4.9).

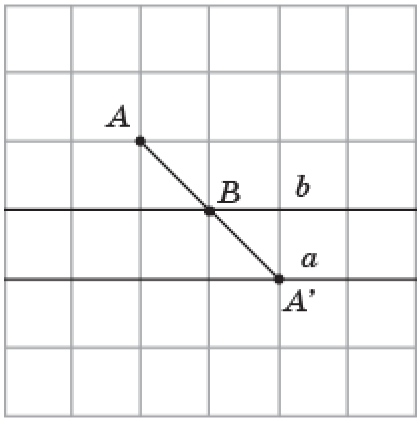


Рис. О4.9

5

1. Рисунок О5.1.

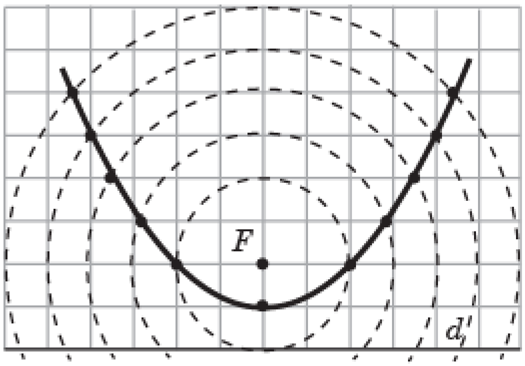


Рис. О5.1

3. а) Ветви параболы будут разжиматься; б) ветви параболы будут сжиматься.
4. а) Пусть точка *A'* расположена выше параболы по отношению к директрисе *d* (рис. О5.2, а). Опустим из этой точки перпендикуляр *A'D* на прямую *d*. Обозначим *A* точку пересечения этого перпендикуляра с параболой. Тогда $A'D = A'A + AD = A'A + AF > A'F$.

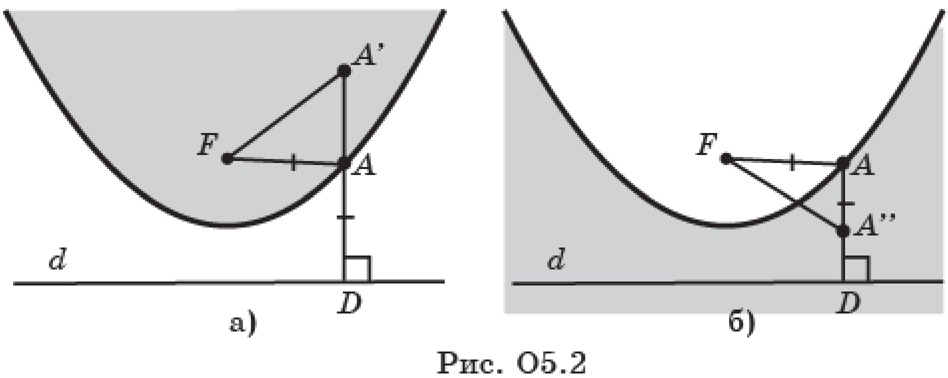


Рис. О5.2

б) Пусть точка A'' расположена ниже параболы по отношению к директрисе d (рис. О5.2, б). Проведём через эту точку прямую, перпендикулярную директрисе d. Обозначим D и A её точки пересечения соответственно с директрисой и параболой. Тогда $A''D = AD - AA'' = AF - AA'' < A''F$. Таким образом, в случае а) искомое ГМТ составляют точки, расположенные выше параболы; в случае б) искомое ГМТ составляют точки, расположенные ниже параболы. **5.** Проведём окружность с центром в точке C и радиусом CF (рис. О5.3). Обозначим D_1, D_2 её точки пересечения с директрисой d. Через точку C проведём серединные перпендикуляры a_1 и a_2 соответственно к отрезкам FD_1 и FD_2. Они и будут искомыми касательными к параболе.

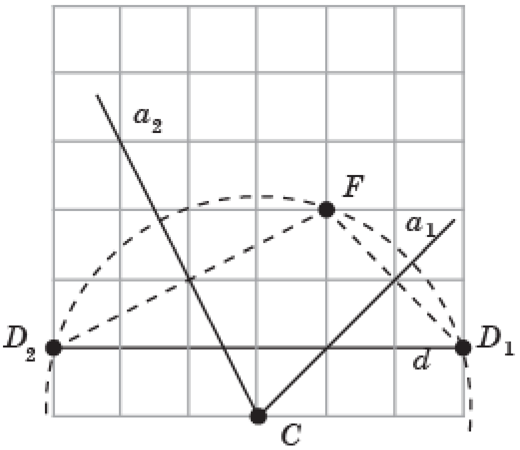


Рис. О5.3

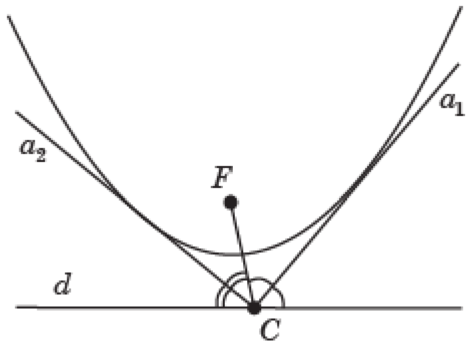


Рис. О5.4

6. а) Директриса d параболы (рис. О5.4); б) ГМТ C', расположенных ниже директрисы (рис. О5.5); в) ГМТ C'', расположенных между параболой и директрисой (рис. О5.6).

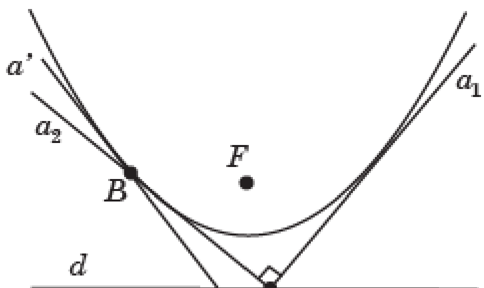


Рис. О5.5

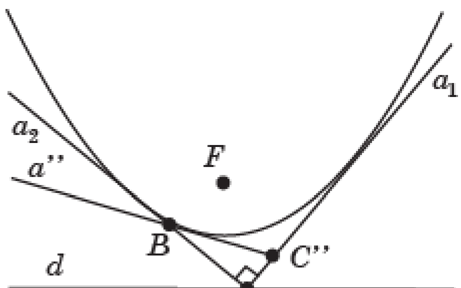


Рис. О5.6

7. Парабола с фокусом A и директрисой b (рис. О5.7).

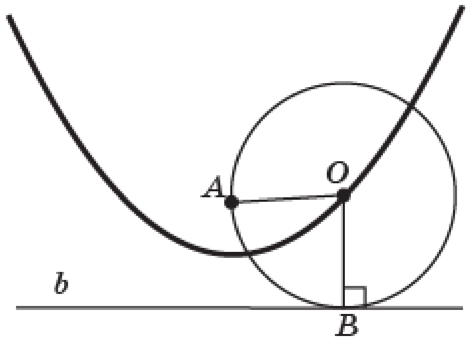


Рис. О5.7

8. а) Парабола с фокусом O и директрисой d (рис. О5.8); б) парабола с фокусом O и директрисой d (рис. О5.9).

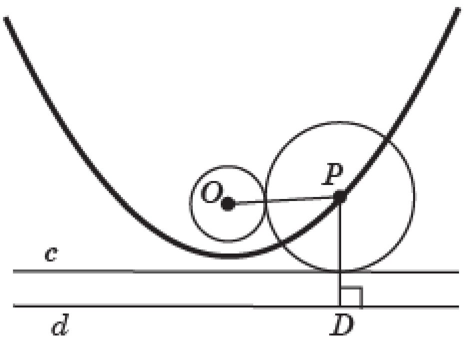


Рис. О5.8

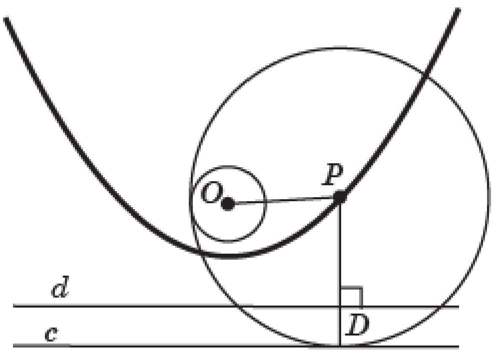


Рис. О5.9

9. Окружность с центром A, касающаяся прямой d, без точки касания D (рис. О5.10).

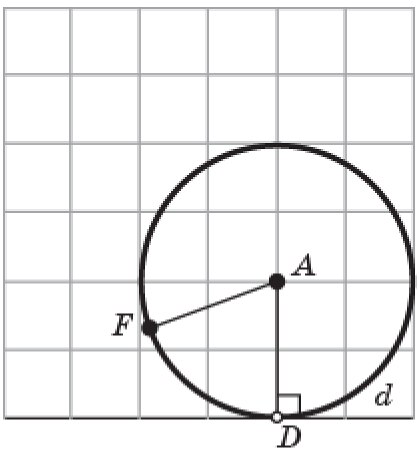


Рис. О5.10

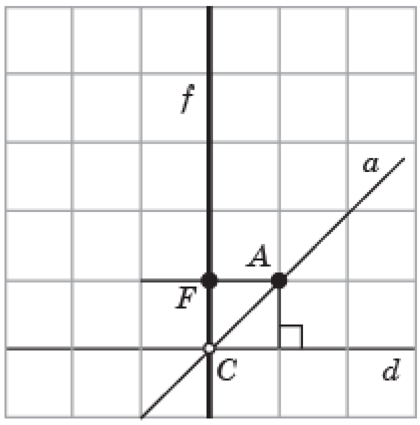


Рис. О5.11

10. Прямая f, проходящая через точку пересечения прямых a и d, для которой прямая a содержит биссектрису угла dCf, без точки C (рис. О5.11).

6

1. Рисунок О6.1.

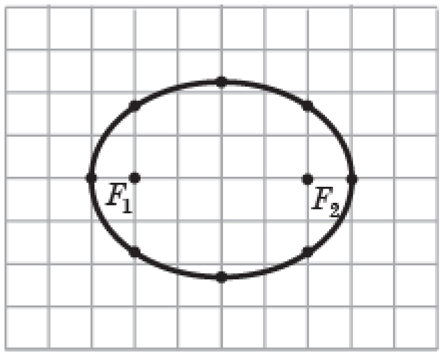


Рис. О6.1

3. Наибольшее расстояние равно c. **4.** а) Эллипс сжимается по вертикали; б) растягивается по горизонтали, приближаясь к отрезку длиной c. **5.** а) Точки C', расположенные внутри эллипса (рис. О6.2, а); б) точки C'', расположенные вне эллипса (рис. О6.2, б).

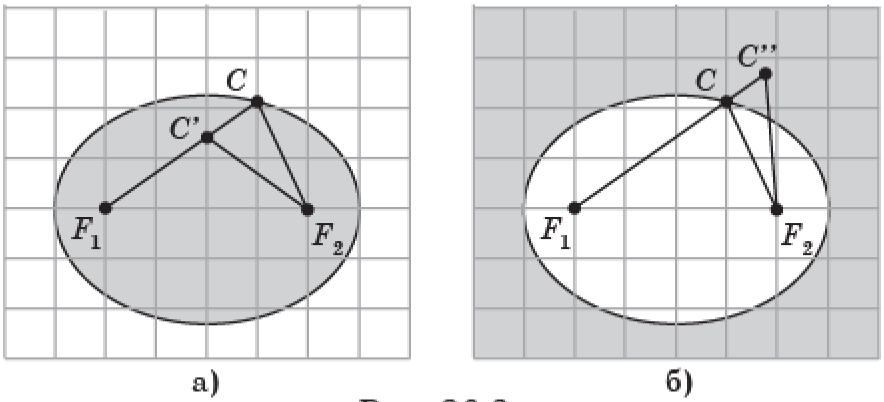


Рис. О6.2

6. С центром в точке F_1 и радиусом c проведём окружность. С центром в точке A и радиусом AF_2 проведём окружность. Обозначим A_1, A_2 их точки пересечения. Серединные перпендикуляры к отрезкам F_2A_1, F_2A_2 будут искомыми касательными (рис. О6.3).

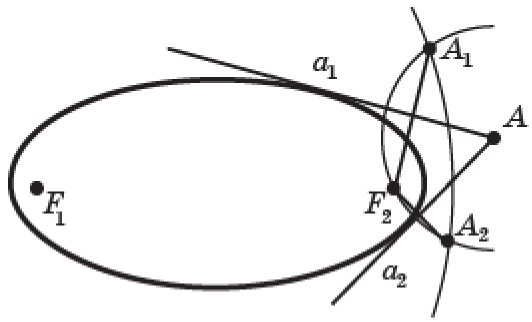


Рис. О6.3

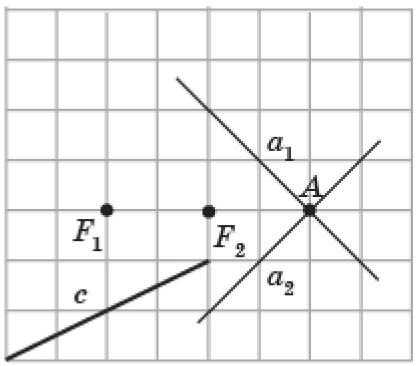


Рис. О6.4

7. Рисунок О6.4. **8.** Эллипс с фокусами *A*, *B* без двух точек, принадлежащих прямой *AB* (рис. О6.5).

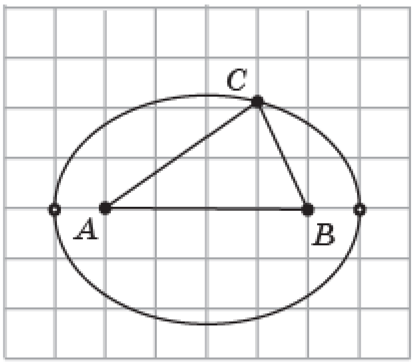


Рис. О6.5

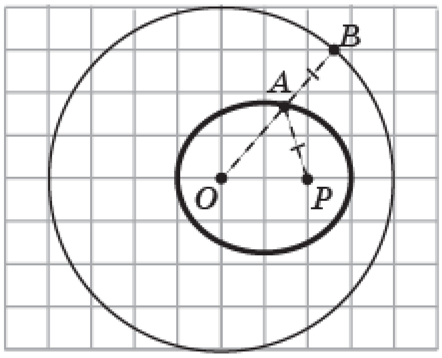


Рис. О6.6

9. Эллипс с фокусами *O* и *P* (рис. О6.6). **10.** Эллипс с фокусами O_1, O_2 (рис. О6.7).

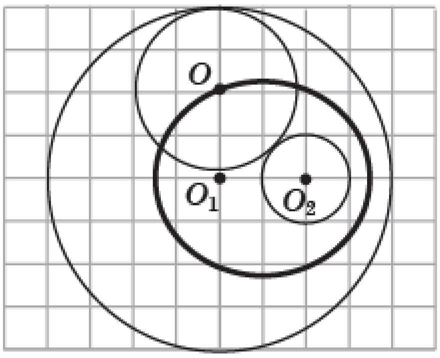


Рис. О6.7

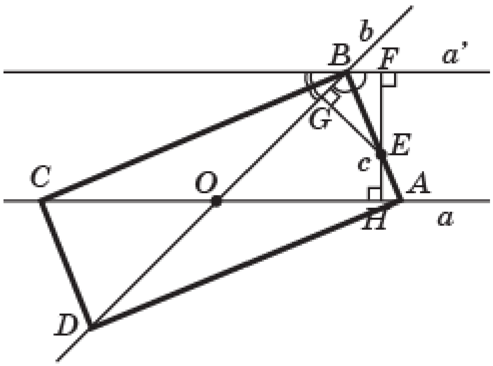


Рис. О6.8

11. Прямоугольник *ABCD* (рис. О6.8).

7

1. Рисунок О7.1. **3.** Наименьшее расстояние равно *c*.

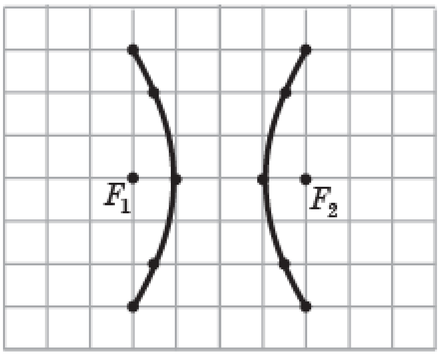


Рис. О7.1

4. а) Расширяются; б) сжимаются, приближаясь к серединному перпендикуляру к отрезку F_1F_2. **5.** а) Точки *A'*, расположенные во внешней области гиперболы (рис. О7.2); б) точки A'', расположенные во внутренних областях гиперболы (рис. О7.3).

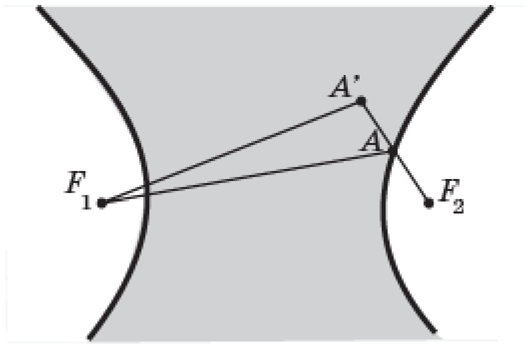


Рис. О7.2

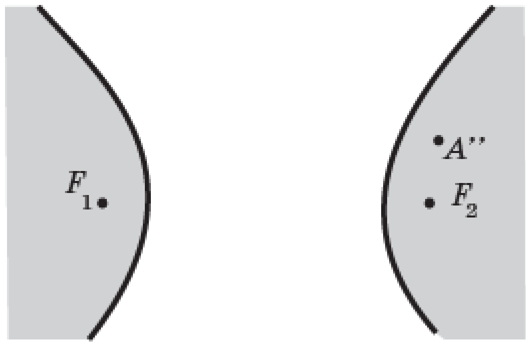


Рис. О7.3

6. С центром в точке F_1 и радиусом c проведём окружность. С центром в точке A и радиусом AF_2 проведём окружность. Обозначим F_2', F_2'' их точки пересечения. Серединные перпендикуляры a_1, a_2 к отрезкам F_2F_2', F_2F_2'' будут искомыми касательными (рис. О7.4).

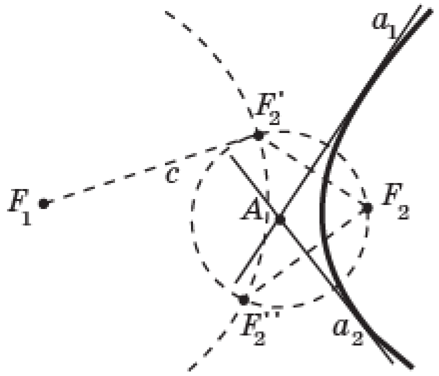


Рис. О7.4

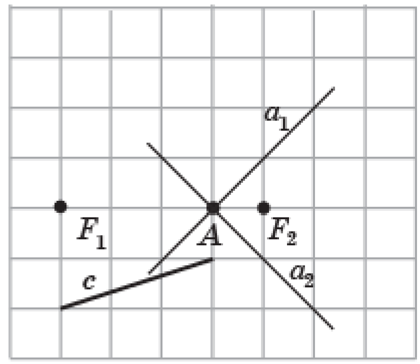


Рис. О7.5

7. Рисунок О7.5. **8.** а), б) Ветвь гиперболы с фокусами O_1, O_2 (рис. О7.6).

а) Рис. О7.6 б)

9. Касательная к эллипсу, проведённая в точке A, содержит биссектрису угла, смежного с углом F_1AF_2. Касательная к гиперболе, проведённая в этой же точке, содержит биссектрису угла F_1AF_2. Так как эти биссектрисы перпендикулярны, то и касательные к эллипсу и гиперболе будут перпендикулярны. **10.** Рисунок О7.8.

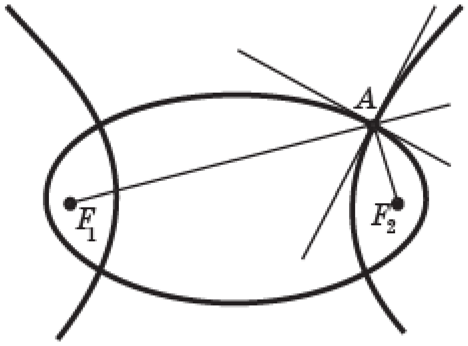


Рис. О7.7

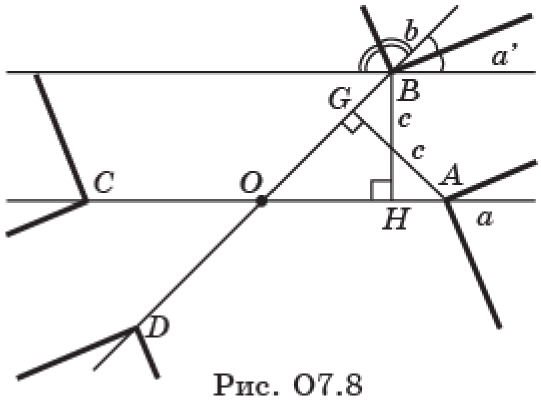


Рис. О7.8

8

1. Рисунок О8.1.

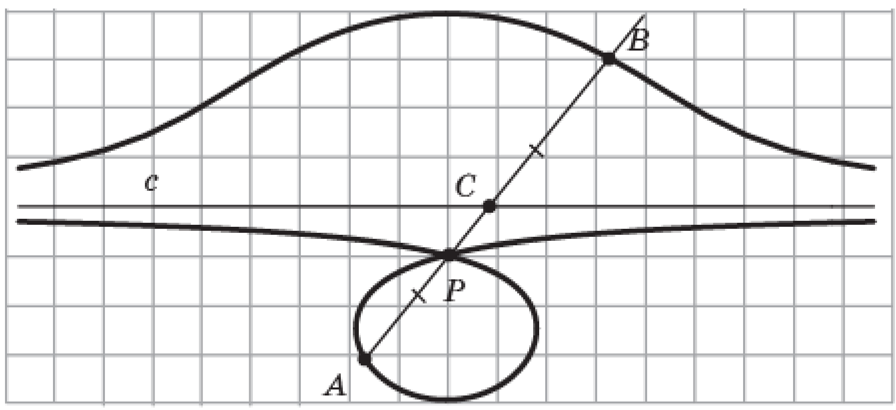


Рис. О8.1

2. Рисунок О8.2.

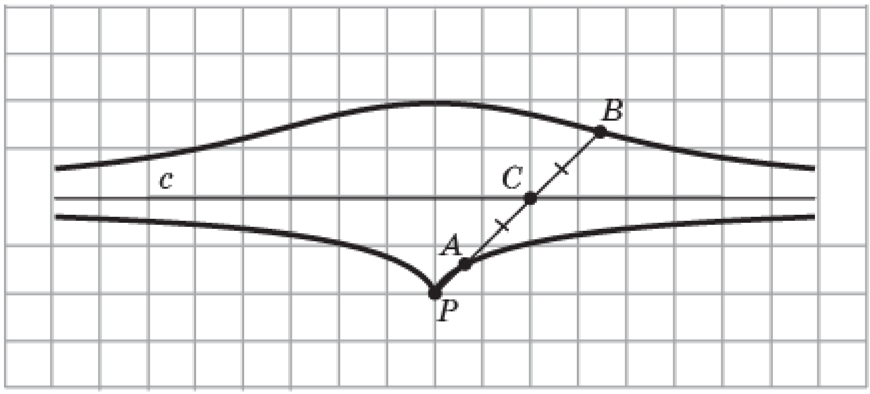


Рис. О8.2

3. Рисунок О8.3.

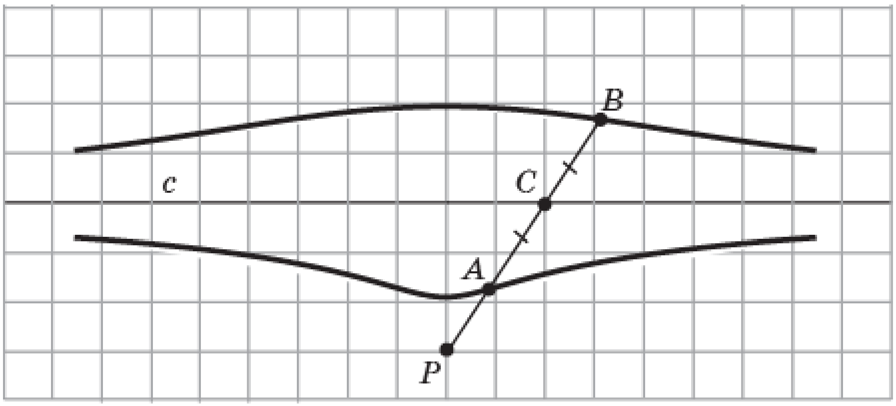


Рис. О8.3

4. Рисунок О8.4.

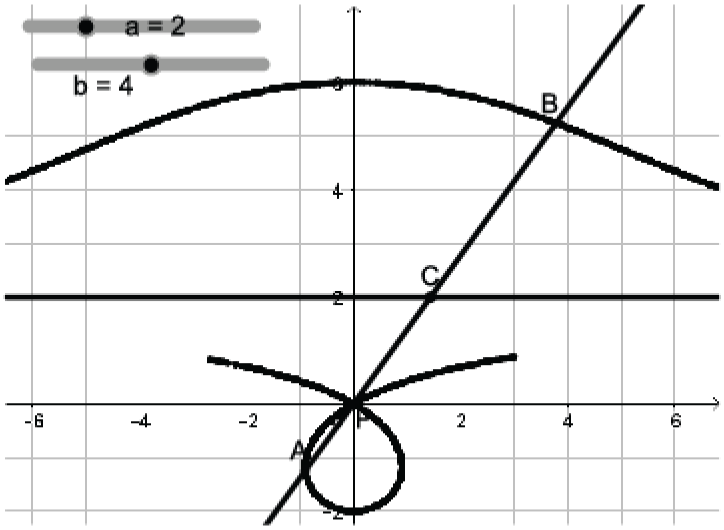


Рис. О8.4

5. Рисунок О8.5. **6.** Рисунок О8.6.

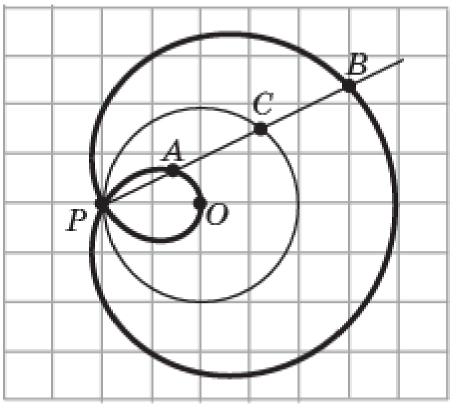


Рис. О8.5

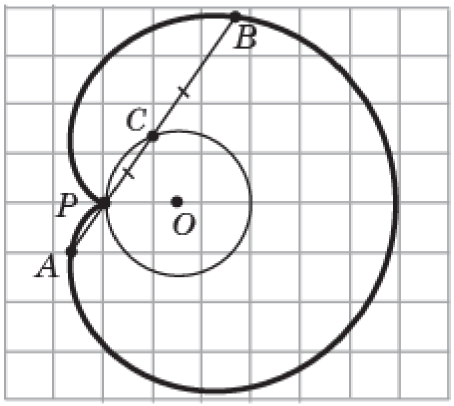


Рис. О8.6

7. Рисунок О8.7. **8.** Рисунок О8.8.

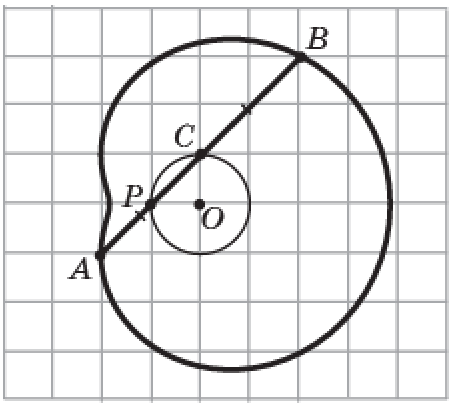


Рис. О8.7

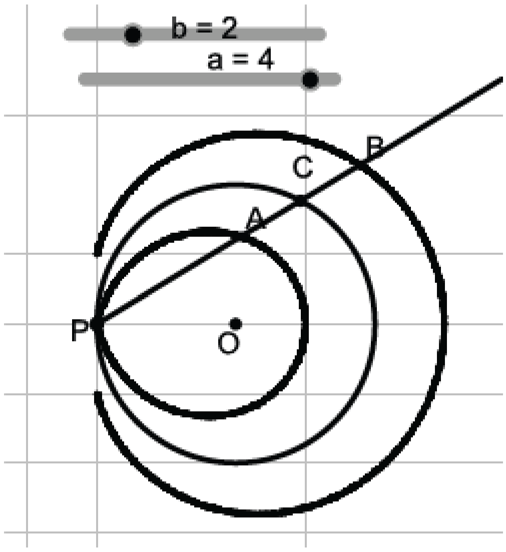


Рис. О8.8

9. Рисунок О8.9. **10.** Рисунок О8.10.

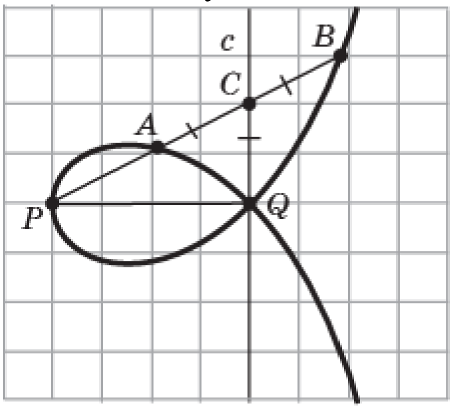


Рис. О8.9

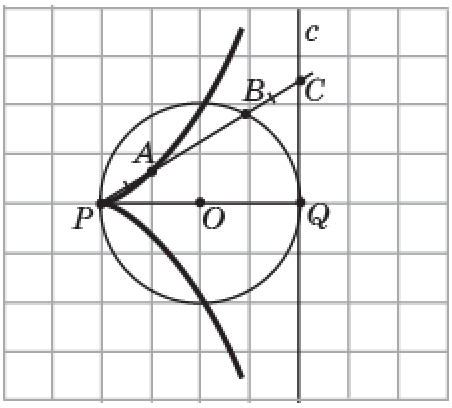


Рис. О8.10

11. Рисунок О8.11. **12.** Рисунок О8.12.

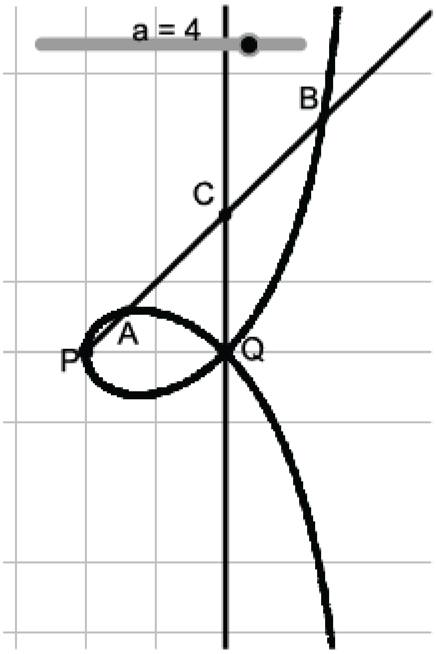


Рис. О8.11

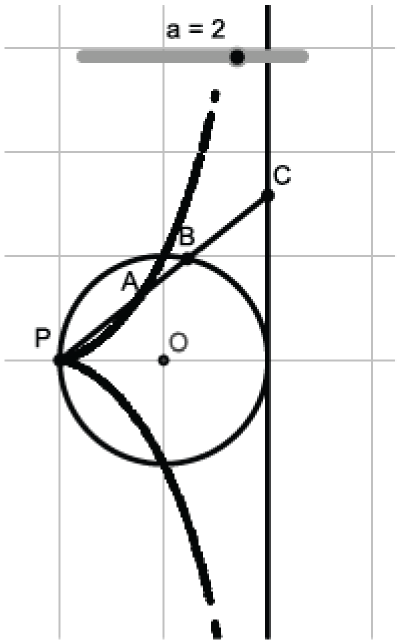


Рис. О8.12

13. Рисунок O8.13. **14.** Рисунок O8.14.

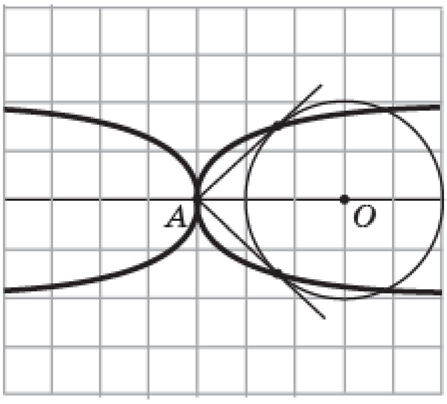


Рис. O8.13

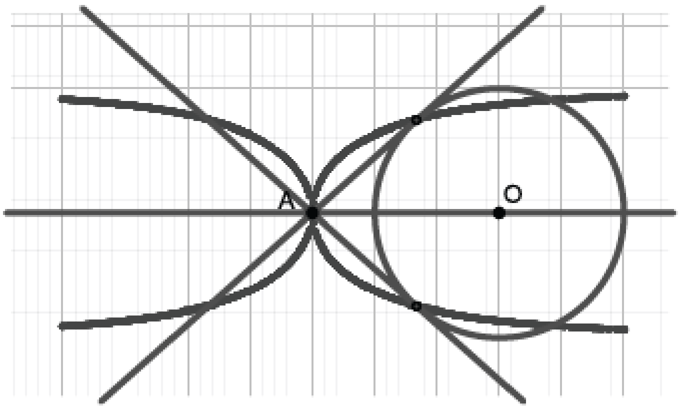


Рис. O8.14

9

1. Окружность с диаметром *AB* без концов этого диаметра (рис. O9.1).

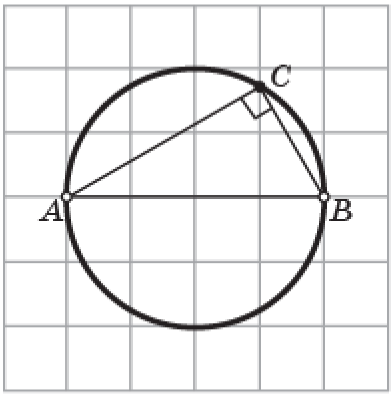


Рис. O9.1

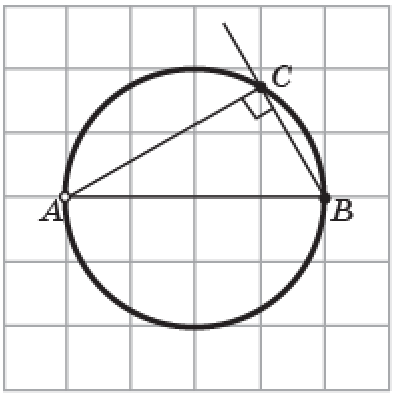
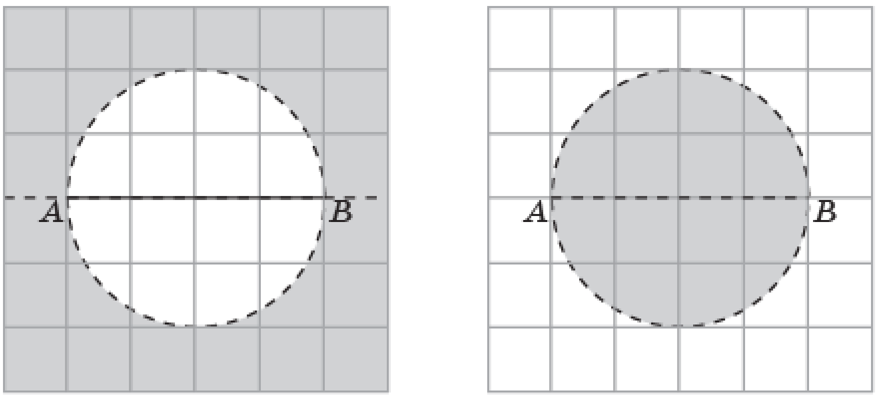


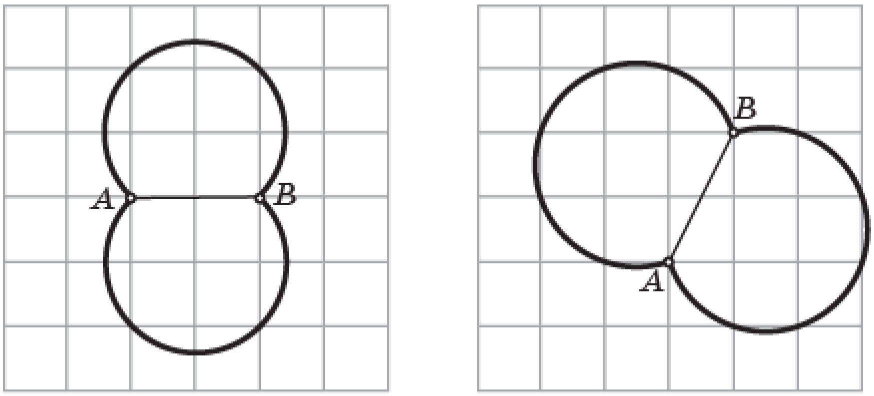
Рис. O9.2

2. Окружность с диаметром *AB* без точки *A* (рис. O9.2). **3.** а) Точки, расположенные вне круга с диаметром *AB*, без точек на прямой *AB* (рис. 9.3, а); б) точки, расположенные внутри круга с диаметром *AB*, без точек отрезка *AB* (рис. O9.3, б).



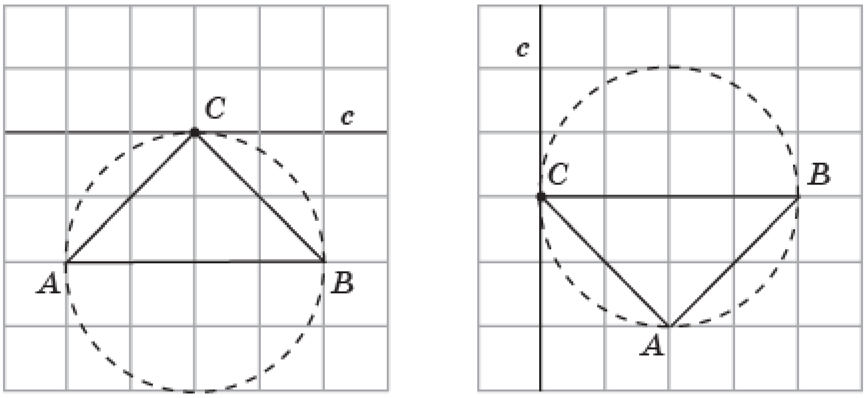
а) Рис. O9.3 б)

4. Рисунок О9.4.



а) Рис. О9.4 б)

5. а) 90° (рис. О9.5, а); б) 45° (рис. О9.5, б).



а) Рис. О9.5 б)

6. На сторонах AC и BC треугольника ABC построим внешним образом равносторонние треугольники и опишем около них окружности. Для точки T пересечения этих окружностей углы ATC и BTC равны 120°. Следовательно, угол ATB также будет равен 120°, т. е. точка T будет искомой.

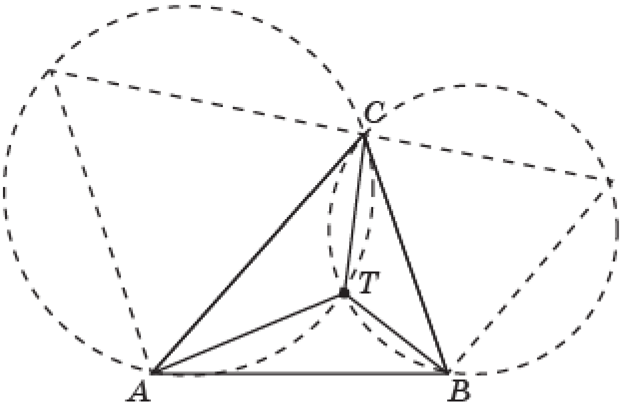


Рис. О9.6

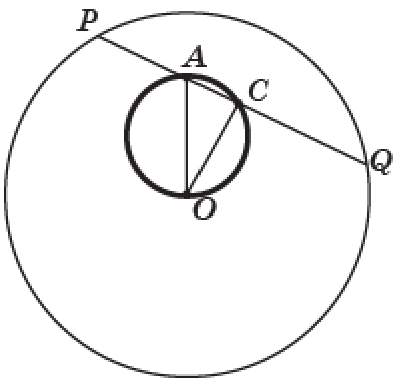


Рис. О9.7

7. Окружность с диаметром *OA* (рис. O9.7). **8.** Окружность с диаметром *OA* без точки *A* (рис. O9.8).

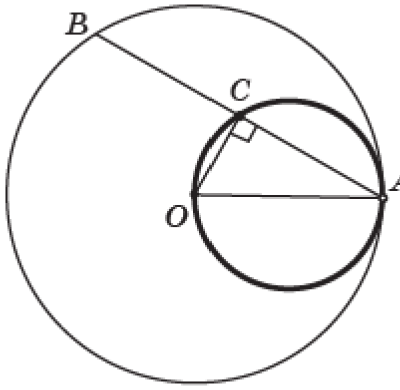


Рис. O9.8

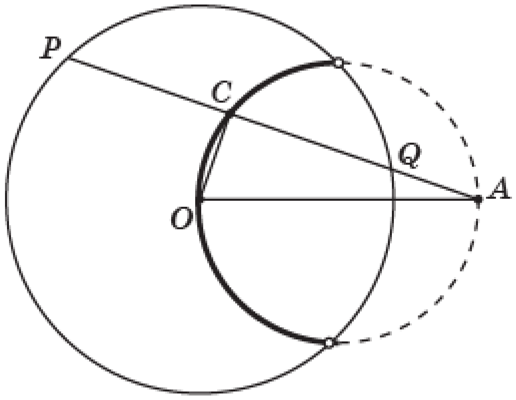


Рис. O9.9

9. Дуга окружности с диаметром *OA*, расположенная внутри данной окружности, без её концов (рис. O9.9). **10.** Окружность с центром *O* и радиусом 2 (рис. 9.10).

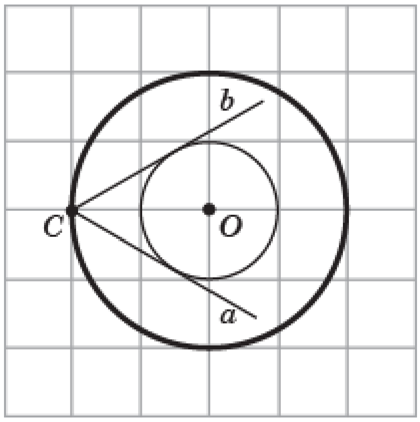


Рис. O9.10

10

1. Прямая *a*, параллельная прямой *AB* (рис. O10.1). **2.** Прямая *m*, параллельная прямой *AB* (рис. O10.2).

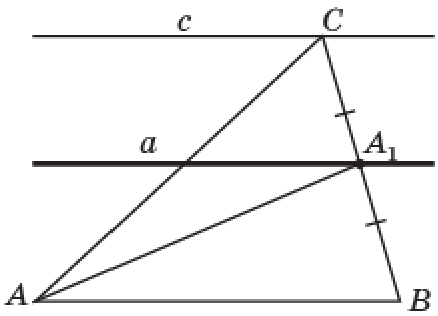


Рис. O10.1

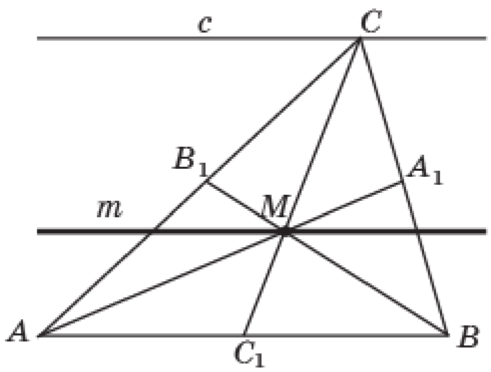


Рис. O10.2

3. Окружность (рис. О10.3).

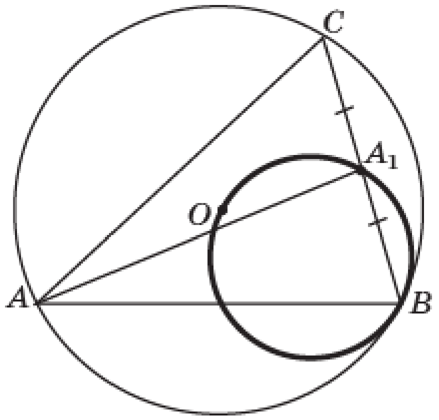


Рис. О10.3

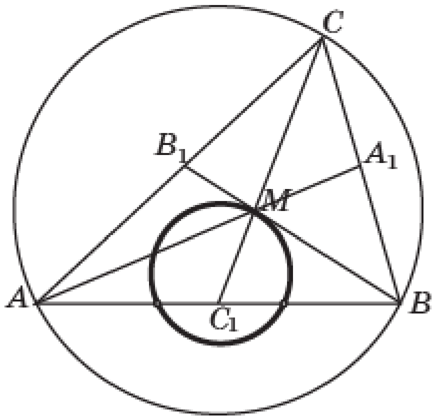


Рис. О10.4

4. Пусть M – точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (рис. О10.4). Так как отношение C_1M : C_1C равно 1 : 3, то точки M получаются гомотетией точек C с центром в точке C_1 и коэффициентом $\frac{1}{3}$. Искомым ГМТ пересечения медиан является окружность, получающаяся из исходной окружности гомотетией с центром C_1 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ без точек пересечения этой окружности со стороной AB (в этом случае треугольник ABC вырождается). Радиус этой окружности равен одной третьей радиуса исходной окружности. **5.** Окружность с центром в точке O и радиусом $\frac{c}{2}$ (рис. О10.5). **6.** Окружность с диаметром AB без точки A (рис. О10.6).

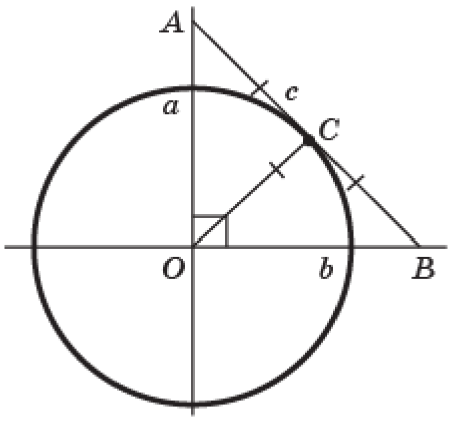


Рис. О10.5

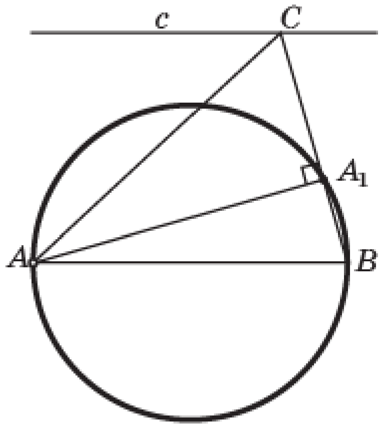


Рис. О10.6

7. Окружность с диаметром AB без точки A (рис. О10.7).

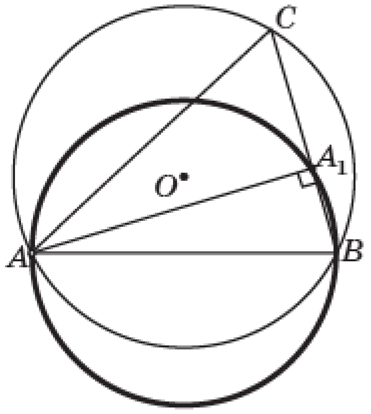


Рис. О10.7

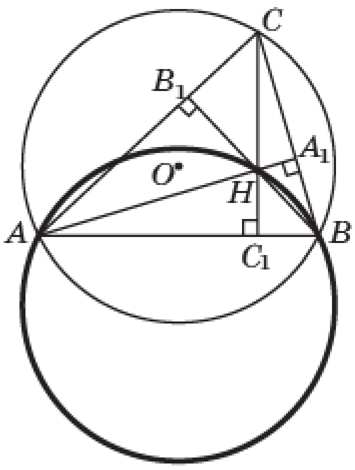


Рис. О10.8

8. Пусть H – точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 или их продолжений треугольника ABC, вписанного в окружность (рис. О10.8). Угол AHB равен $180° - \angle C$. Следовательно, он является вписанным углом для окружности, симметричной данной относительно прямой AB. Предположим, что точка C, перемещаясь по окружности делает полный оборот. В этом случае точка H будет описывать окружность, симметричную данной окружности относительно прямой AB, без самих точек A и B. Радиус этой окружности равен радиусу данной окружности. **9*.** Обозначим O точку пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (рис. О10.9).

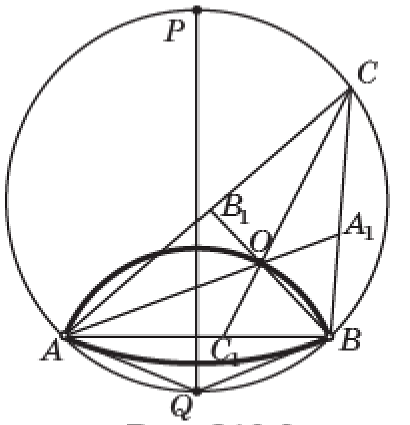


Рис. О10.9

Пусть меньшая дуга окружности, стягиваемая отрезком AB, составляет 2φ градусов. Предположим, что точка C, перемещаясь по окружности, проходит большую дугу окружности, стягиваемую стороной AB. Так как угол C равен φ градусов, то угол AOB равен $90° + \frac{\varphi}{2}$. Значит, точка O принадлежит дуге некоторой окружности, стягивающей хорду AB, без самих точек A и B. Соответствующий вписанный угол этой окружности, опирающийся на данную дугу, равен $90° - \frac{\varphi}{2}$. Следовательно, соответствующий центральный угол равен $180° - \varphi$. Значит, центром этой окружности является точка P пересечения меньшей дуги исходной окружности с серединным перпендикуляром PQ к отрезку AB.

11

1. Искомым ГМТ является окружность (рис. О11.1).

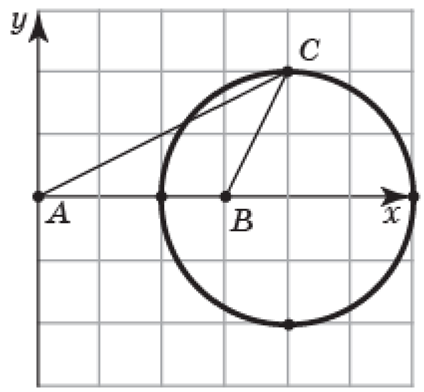


Рис. О11.1

Для доказательства введём систему координат, считая точку A началом координат и $B(b, 0)$. Рассмотрим точку $C(x, y)$. Перепишем равенство $AC = kBC$ в виде $x^2 + y^2 = k^2((x-b)^2 + y^2)$. Делая преобразования, получим равенство $\left(x - \frac{k^2 b}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{kb}{k^2-1}\right)^2$, которое является уравнением окружности с центром $O\left(\frac{k^2 b}{k^2-1}, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{kb}{|k^2-1|}$. **2.** а) Рисунок. О11.2, а; б) рисунок О11.2, б.

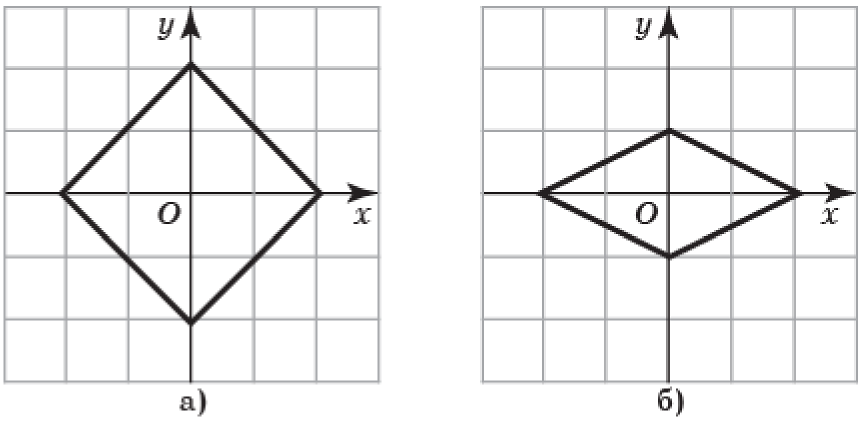


Рис. О11.2

3. Рисунок О11.3. **4.** Рисунок О11.4.

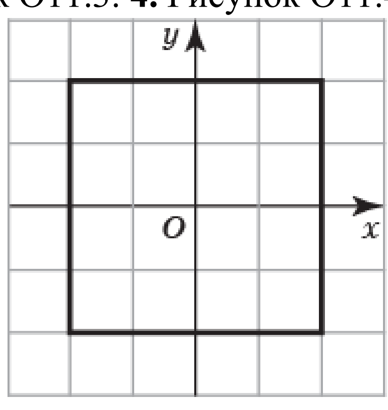


Рис. О11.3

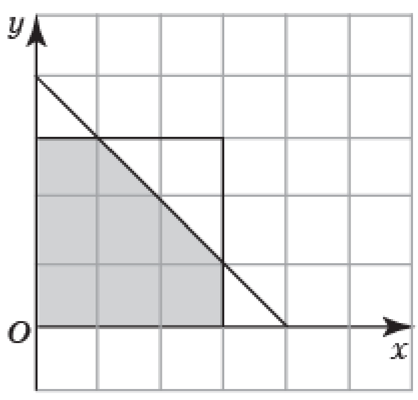


Рис. О11.4

5. Рисунок О11.5.

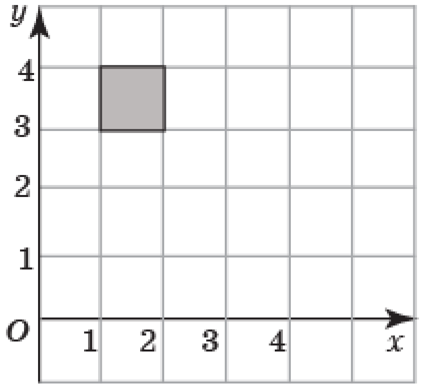


Рис. О11.5

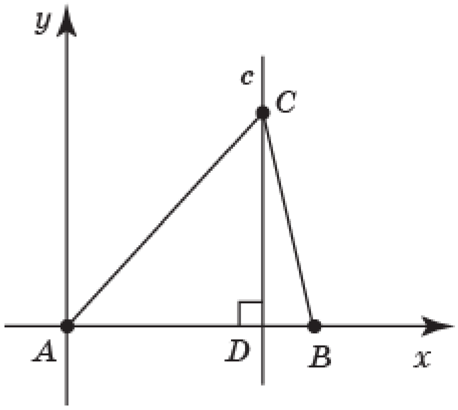


Рис. О11.6

6. Введём систему координат, считая точку *A* началом координат и *B*(b, 0) (рис. О11.6). Рассмотрим точку *C*(x, y), разность квадратов расстояний от которой до двух данных точек *A* и *B* равна d^2. Перепишем равенство $AC^2 - BC^2 = d^2$ в виде $x^2 + y^2 - (x-b)^2 - y^2 = d^2$. Делая преобразования, получим равенство $x = \frac{d^2+b^2}{2b}$, которое является уравнением прямой, перпендикулярной прямой *AB*. **7.** Введём систему координат, считая точку *A* началом координат и *B*(b, 0). Рассмотрим точку *C*(x, y), сумма квадратов расстояний от которой до двух данных точек *A* и *B* равна d^2 (рис. О11.7). Перепишем равенство $AC^2 + BC^2 = d^2$ в виде $x^2 + y^2 + (x-b)^2 + y^2 = d^2$. Делая преобразования, получим равенство $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2d^2-b^2}{4}$, которое в случае $2d^2 - b^2 > 0$ является уравнением окружности с центром в точке $O\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{\sqrt{2d^2-b^2}}{2}$.

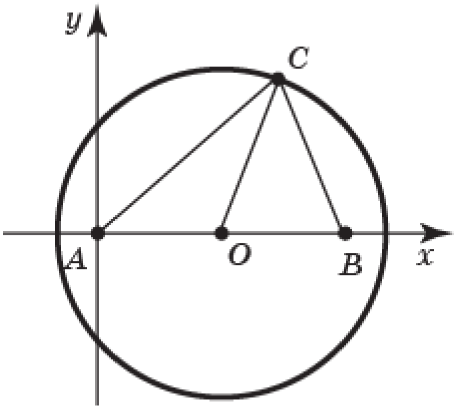


Рис. О11.7

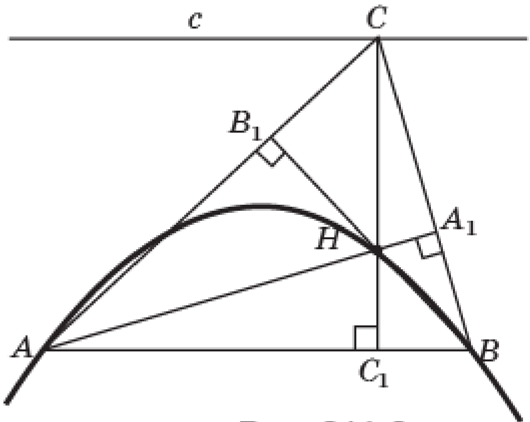


Рис. О11.8

8. Введём систему координат, считая точку *A* началом координат и *B*(b, 0). Рассмотрим точку *C*(x, h), принадлежащую прямой *c* (h – расстояние между прямыми *AB* и *c*) (рис. О11.8). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ будет иметь координаты (x, h).

Он является вектором нормали прямой, содержащей высоту BB_1. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид $x(x - b) + hy = 0$. Откуда

$$y = \frac{bx - x^2}{h}.$$

Это уравнение задаёт параболу. Таким образом, траекторией, которую описывает точка H, является парабола. **9.** Делая преобразования, уравнение $y = ax^2 + bx + c$ можно переписать в виде $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, которое является уравнением параболы (рис. O11.9) с фокусом $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$ и директрисой $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

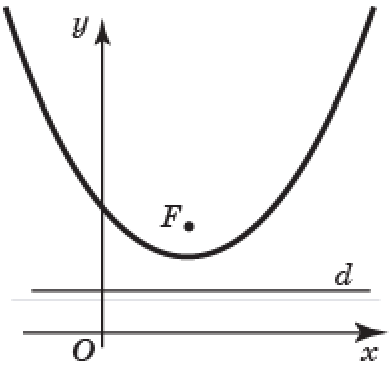


Рис. 11.9

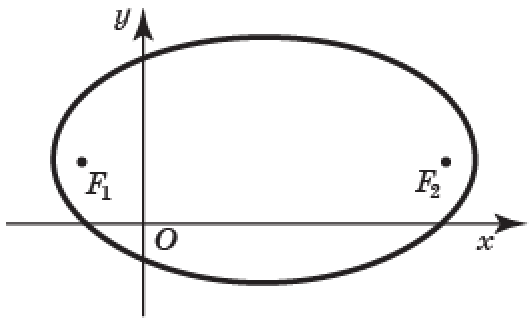


Рис. O11.10

10. Делая преобразования, уравнение $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ можно переписать в виде $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c} - e$, которое приводится к уравнению эллипса (рис. O11.10). **11.** Делая преобразования, уравнение $ax^2 + bx - cy^2 - dy + e = 0$ можно переписать в виде $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - c\left(y + \frac{d}{2c}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c} - e$, которое приводится к уравнению гиперболы (рис. O11.11).

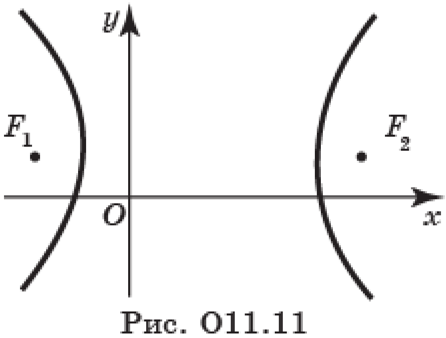


Рис. O11.11

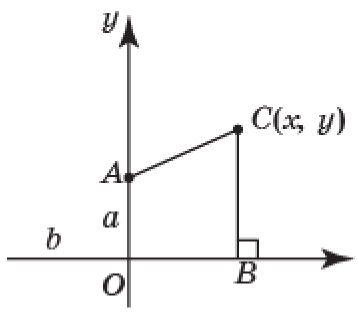


Рис. O11.12

12. Введём систему координат, взяв в качестве оси абсцисс прямую b, $A(0, a)$ (рис. O11.12). Пусть точка $C(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ. Имеем уравнение $x^2 + (y - a)^2 = k^2y^2$. Преобразуем это уравнение к виду $x^2 + (1 - k^2)\left(y - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 = \frac{k^2a^2}{1-k^2}$. Если $k > 1$, то это уравнение задаёт гиперболу (рис. O11.13). Если $0 < k < 1$, то это уравнение задаёт эллипс (рис. O11.14).

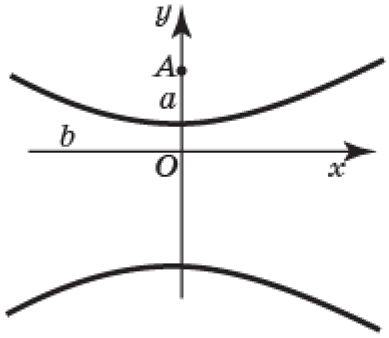


Рис. O11.13

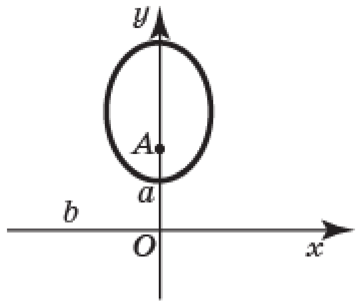


Рис. O11.14

13. Введём систему координат так, чтобы точка *A* имела координаты (0, *a*), а прямая b лежала на оси *Ox*. Рассмотрим точку *C*(*x*, *y*). Имеем уравнение $x^2 + (y - a)^2 - y^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $2ay = x^2 + a^2 - d^2$. Это уравнение параболу (рис. O11.15).

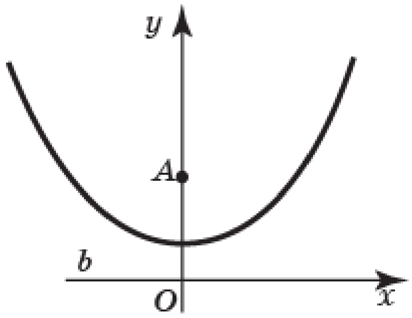


Рис. O11.15

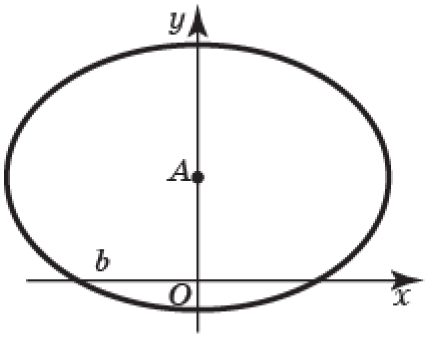


Рис. O11.16

14. Введём систему координат так, чтобы точка *A* имела координаты (0, *a*), а прямая b лежала на оси *Ox*. Рассмотрим точку *C*(*x*, *y*). Имеем уравнение $x^2 + (y - a)^2 + y^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $x^2 + 2(y - \frac{a}{2})^2 = d^2 - \frac{a^2}{2}$. Если $d^2 > \frac{a^2}{2}$, то это уравнение задаёт эллипс (рис. O11.16).**15.** Введём систему координат, для которой F_1(-*a*, 0), F_2(*a*, 0) (рис. O11.17).

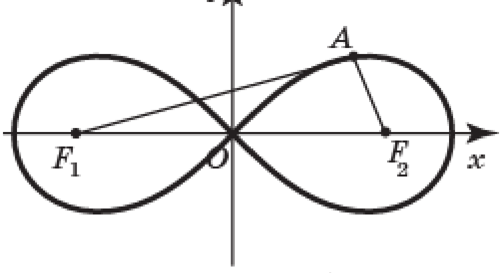


Рис. O11.17

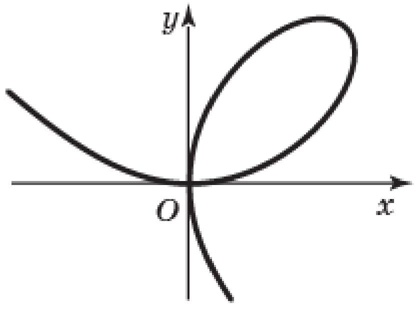


Рис. O11.18

Пусть точка $A(x, y)$ принадлежит лемнискате. Расстояния от точки A до точек F_1, F_2 равны соответственно $\sqrt{(x+a)^2+y^2}$, $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$. Так как произведение этих расстояний равно a^2, то получаем уравнение

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2,$$

преобразуя которое, будем иметь искомое уравнение лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Для получения лемнискаты, заданной этим уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунок a. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)^2=2a^2(x^2–y^2) и нажмём “Enter”. На экране появится лемниската. Значение a можно изменять. При этом форма лемнискаты будет также изменяться. **16.** Рисунок О11.18. **17.** $(x^2+y^2)(y-d)^2 = l^2y^2$ (рис. О11.19).

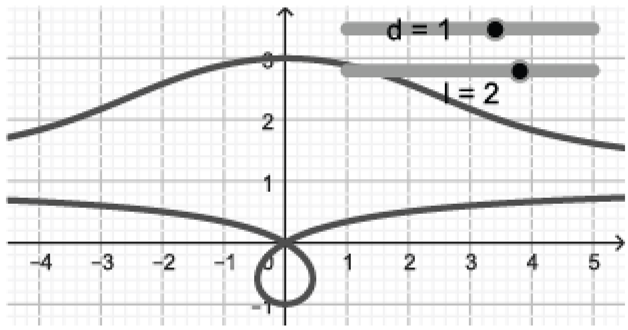


Рис. О11.19

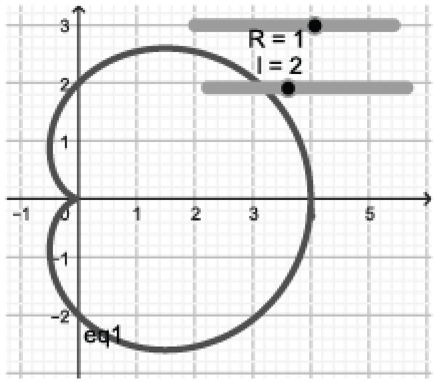


Рис. О11.20

18. $(x^2+y^2-2Rx)^2 = l^2(x^2+y^2)^2$ (рис. О11.20).

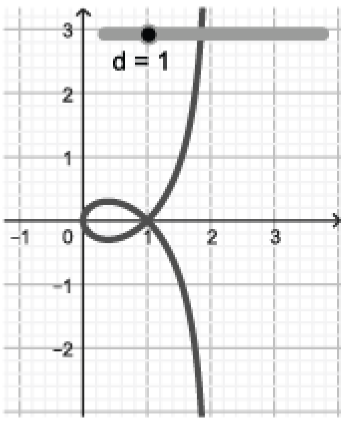


Рис. О11.21

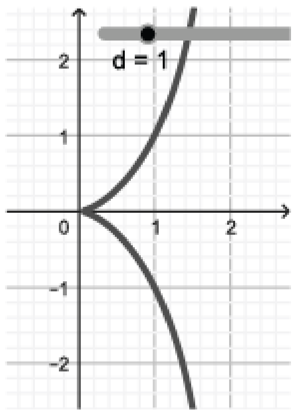


Рис. О11.22

19. $y^2(2d-x) = (x-d)^2x$ (рис. О11.21). **20.** $y^2(2d-x) = x^3$ (рис. О11.22). **21.** $(x^2+y^2)y^2 = R^2x^2$ (рис. О11.23).

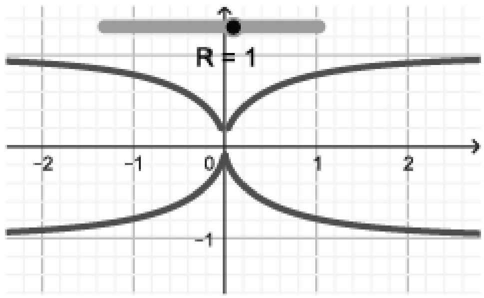


Рис. О11.23

12

1. Через какую-нибудь точку C данной плоскости γ проведём прямую l, перпендикулярную плоскости γ. Отметим на прямой l точки A и B, находящиеся на расстоянии d от точки C. Искомым ГМТ будут две плоскости α и β, проходящие соответственно через точки A, B и параллельные плоскости γ (рис. О12.1).

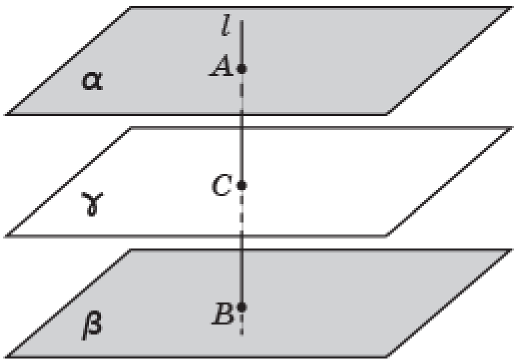


Рис. О12.1

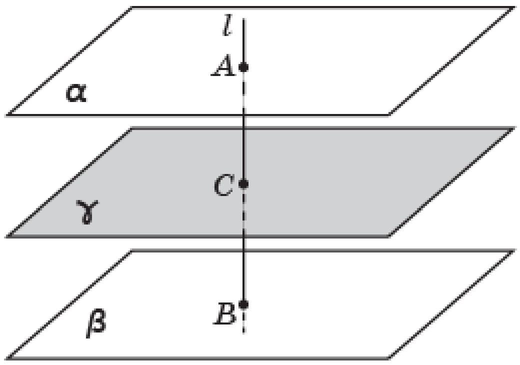


Рис. О12.2

2. Проведём прямую l, перпендикулярную данным плоскостям α и β. Обозначим A и B её точки пересечения с этими плоскостями соответственно (рис. О12.2). Искомым ГМТ будет плоскость γ, проходящая через середину C отрезка AB и параллельная данным плоскостям α и β. **3.** Соединим точку A отрезком с какой-нибудь точкой B плоскости β. Искомым ГМТ будет плоскость γ, проходящая через середину C отрезка AB и параллельная данной плоскости β (рис. О12.3).

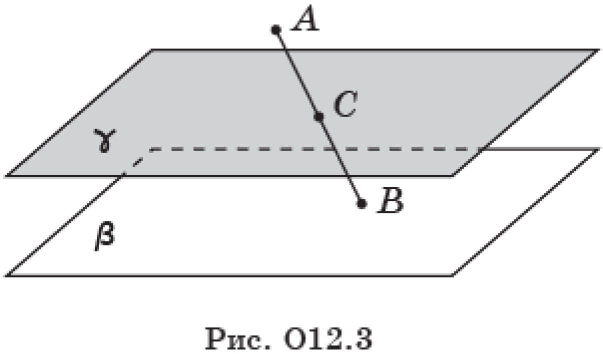


Рис. О12.3

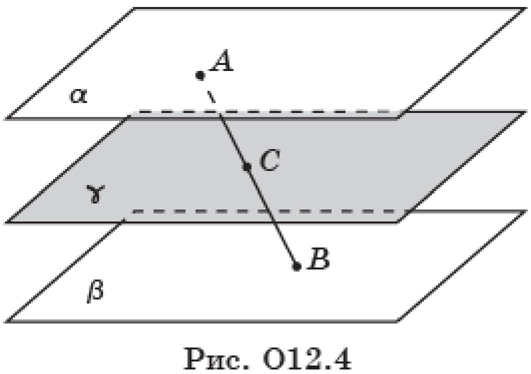


Рис. О12.4

4. Проведём отрезок *AB*, соединяющий точки *A* и *B* соответственно плоскостей α и β. Искомым ГМТ будет плоскость γ, проходящая через середину *C* отрезка *AB* и параллельная данным плоскостям α и β (рис. О12.4). **5.** Построим точку *A'*, симметричную точке *A* относительно какой-нибудь точки *B* плоскости β. Искомым ГМТ будет плоскость α′, проходящая через точку *A'* и параллельная данной плоскости β (рис. О12.5).

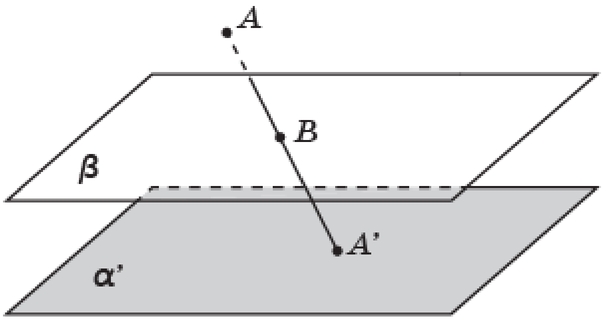


Рис. О12.5

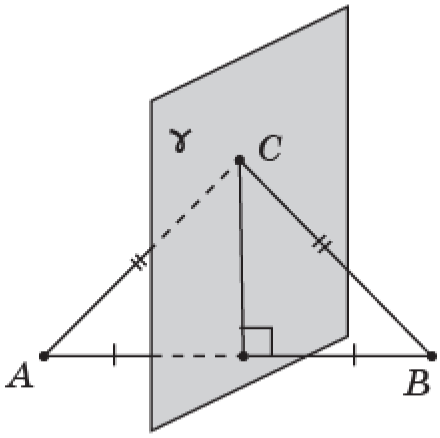


Рис. О12.6

6. Плоскость, проходящая через середину отрезка *AB* и перпендикулярная этому отрезку (рис. О12.6). **7.** Проведём отрезок *AB*, соединяющий точки *A* и *B* данных прямых соответственно *a*, *b* и перпендикулярный этим прямым. Искомым ГМТ является плоскость γ, проходящая через середину *C* этого отрезка и перпендикулярная прямой *AB* (рис. О12.7).

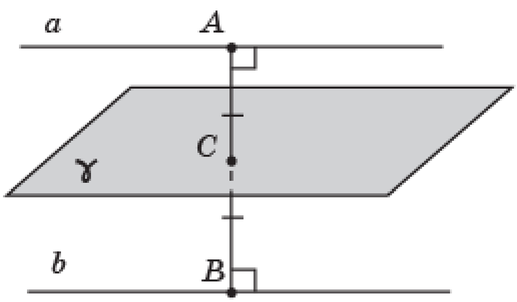


Рис. О12.7

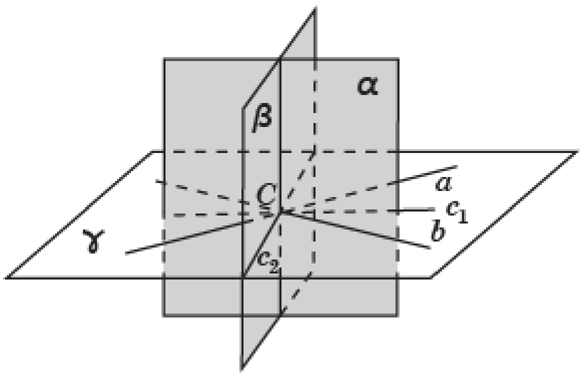


Рис. О12.8

8. Две плоскости α и β, проходящие через биссектрисы углов, образованных данными прямыми *a*, *b* и перпендикулярные плоскости γ этих прямых (рис. О12.8). **9.** Две перпендикулярные плоскости γ_1 и γ_2, содержащие биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных данными пересекающимися плоскостями α и β (рис. О12.9).

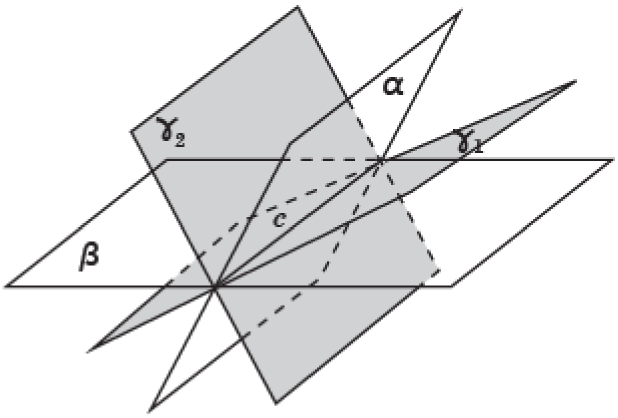


Рис. О12.9

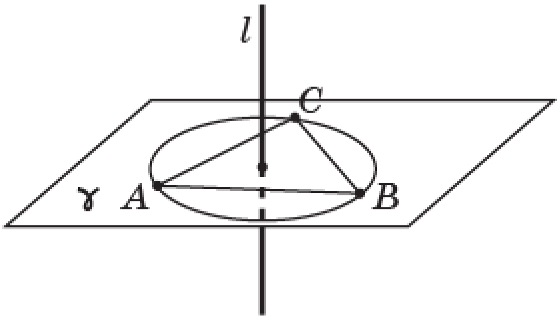


Рис. О12.10

10. Прямая l, проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC и перпендикулярная плоскости γ данного треугольника ABC (рис. О12.10). **11.** Прямая l, проходящая через центр окружности, вписанной в треугольник ABC и перпендикулярная плоскости γ данного треугольника ABC (рис. О12.11).

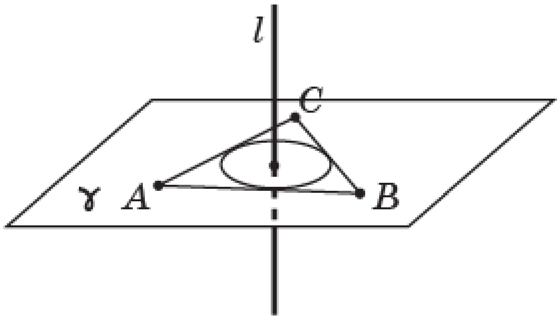


Рис. О12.11

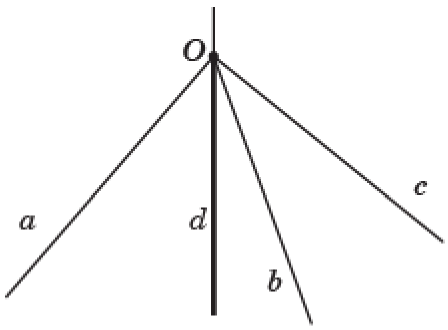


Рис. О12.12

12. Через биссектрисы плоских углов aOb и bOc проведём плоскости, соответственно перпендикулярные плоскостям этих углов. Точки, принадлежащие прямой d пересечения этих плоскостей, будут равноудалены от рёбер a, b, c данного трёхгранного угла. Искомым ГМТ будет луч с вершиной в точке O, являющейся частью прямой d, содержащейся в данном трёхгранном угле (рис. О12.12). **13.** Проведём биссектральные плоскости двугранных углов с рёбрами a и b, образованных соседними гранями данного трёхгранного угла. Точки, принадлежащие прямой d пересечения этих плоскостей, будут равноудалены от граней данного трёхгранного угла. Искомым ГМТ будет луч с вершиной в точке O, являющейся частью прямой d, содержащейся в данном трёхгранном угле (рис. О12.12). **14.** Полупространство, содержащее плоскость α, ограниченное плоскостью γ (см. решение упражнения 2) (рис. О12.13).

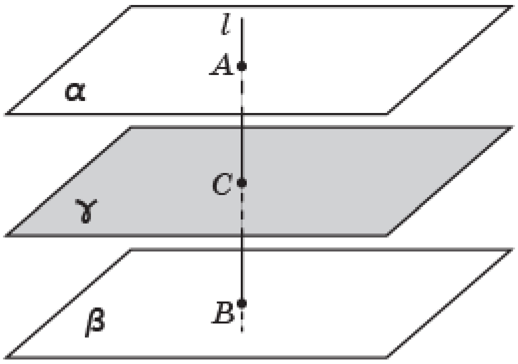


Рис. О12.13

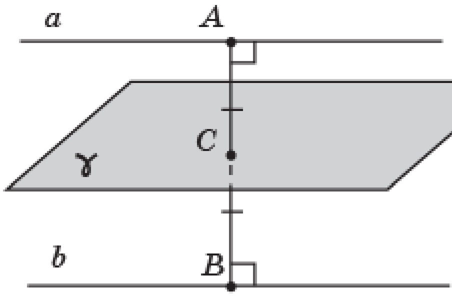


Рис. О12.14

15. Полупространство, содержащее прямую *a*, ограниченное плоскостью γ (см. решение упражнения 7) (рис. О12.14). **16.** Два двугранных угла, образованных плоскостями α и β (см. решение упражнения 8), объединение которых содержит прямую *a* (рис. О12.15).

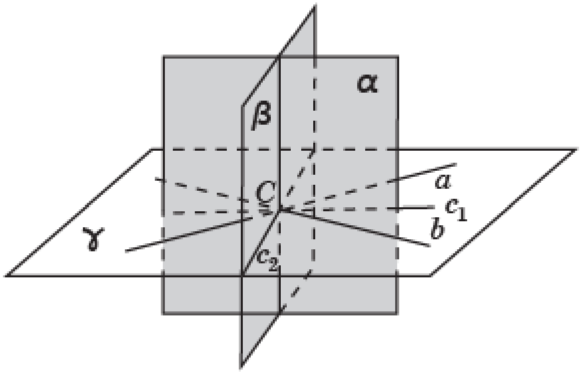


Рис. О12.15

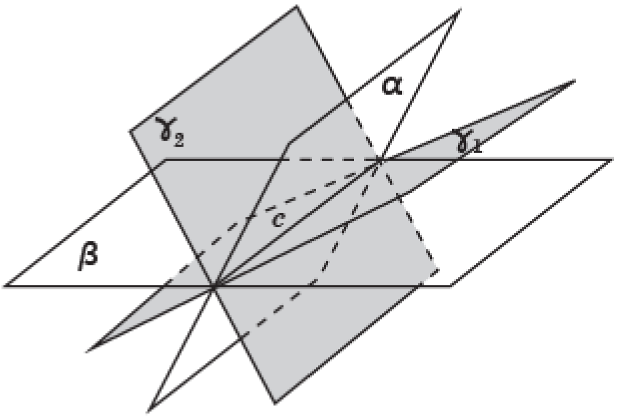


Рис. О12.16

17. Два двугранных угла, образованных плоскостями γ_1 и γ_2 (см. решение упражнения 9), объединение которых содержит плоскость α (рис. О12.16). **18.** Полупространство, содержащее точку *A*, ограниченное плоскостью γ (см. решение упражнения 6) (рис. О12.17).

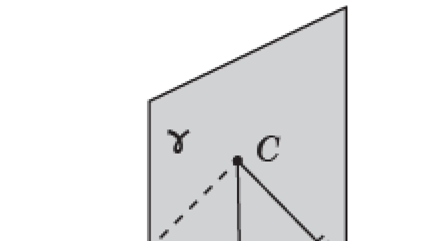


Рис. О12.17

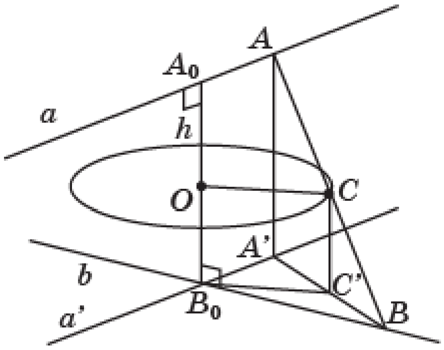


Рис. О12.18

19. Обозначим O середину общего перпендикуляра A_0B_0 к данным прямым a и b. Через точку B_0 проведём прямую a', параллельную прямой a. Из точек A и C опустим перпендикуляры соответственно AA' и CC' на плоскость прямых a' и b (рис. O12.18). Длина отрезка $A'B$ будет равна $\sqrt{d^2-h^2}$. Точка C' будет серединой отрезка $A'B$. Ранее доказывалось, что геометрическим местом середин C' отрезков заданной длины, концы которых принадлежат данным перпендикулярным прямым, является окружность, радиус которой равен половине заданной длины. Следовательно, геометрическим местом точек C' будет окружность с центром B_0 и радиусом $\frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2}$. Значит, искомым геометрическим местом точек C будет окружность с центром O и радиусом $\frac{\sqrt{d^2-h^2}}{2}$.

13

1. Сферой называется ГМТ, удалённых от данной точки O на данное расстояние R. Данная точка называется центром сферы. Данное расстояние – радиусом сферы. **2.** Шаром называется ГМТ, удалённых от данной точки O на расстояние, не превосходящее данное положительное число R. Данная точка называется центром шара. Данное расстояние – радиусом шара. **3.** а) ГМТ, расположенных внутри шара; б) ГМТ, расположенных вне шара с центром O и радиусом R. **4.** Две плоскости, параллельные данной и отстоящие от неё на расстояние R (рис. O13.1). **5.** Проведём прямую l, перпендикулярную данным плоскостям α и β. Обозначим A и B её точки пересечения с этими плоскостями (рис. O13.2). Искомым ГМТ будет плоскость γ, проходящая через середину C отрезка AB и параллельная данным плоскостям α и β.

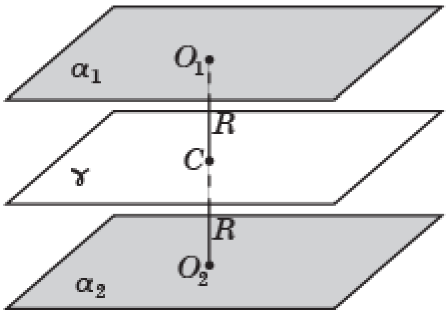


Рис. O13.1

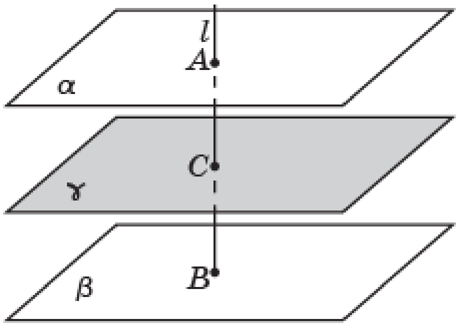


Рис. O13.2

6. Две перпендикулярные плоскости γ_1 и γ_2, содержащие биссектральные полуплоскости двугранных углов, образованных данными пересекающимися плоскостями α и β, без линии пересечения этих плоскостей (рис. O13.3).

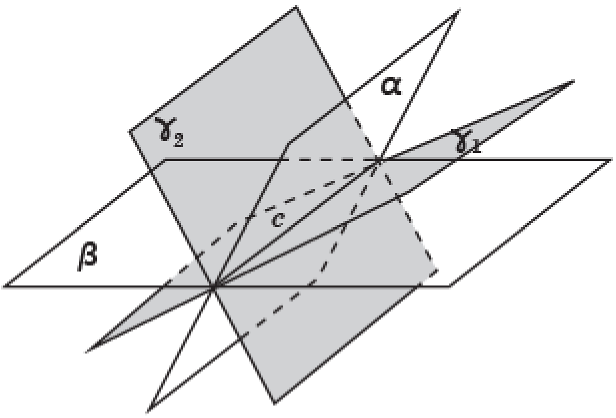


Рис. О13.3

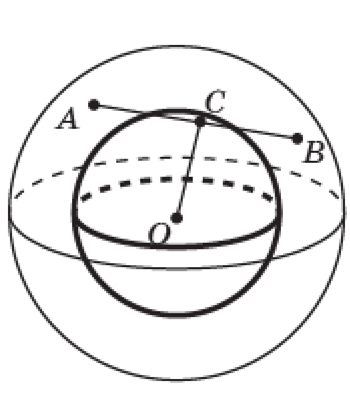


Рис. О13.4

7. Сфера с центром A и радиусом R. **8.** Если $R_1 \neq R_2$, то искомым ГМТ являются две сферы с центром O и радиусами $|R_1 - R_2|$ и $R_1 + R_2$. Если $R_1 = R_2 = R$, то искомым ГМТ является сфера c с центром O и радиусом $2R$. **9.** Если $R_1 \neq R_2$, то искомым ГМТ являются две сферы с центром O и радиусами $|R_1 - R_2|$ и $R_1 + R_2$. Если $R_1 = R_2 = R$, то искомым ГМТ является сфера c с центром O и радиусом $2R$. **10.** Искомым ГМТ является сфера с центром O и радиусом r, равным расстоянию от этого центра до хорды (рис. О13.4). **11.** Окружность, центром которой является середина C отрезка AB, лежащая в плоскости, перпендикулярной этому отрезку (рис. О13.5).

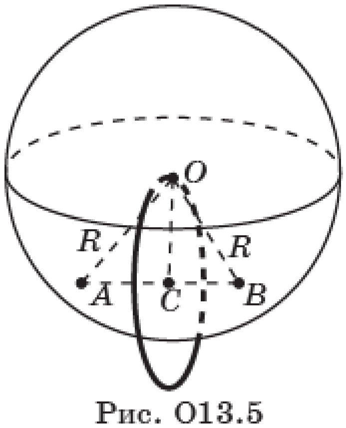


Рис. О13.5

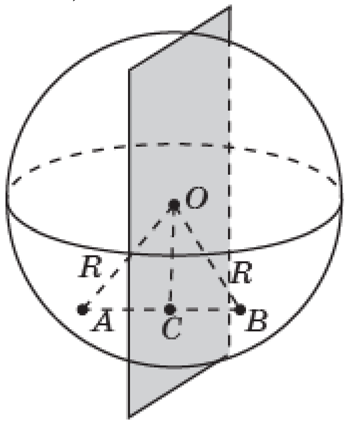


Рис. О13.6

12. Плоскость, проходящая через середину C отрезка AB и перпендикулярная этому отрезку (рис. О13.6). **13.** Две прямые, параллельные данным прямым и находящиеся от них на расстоянии R (рис. О13.7).

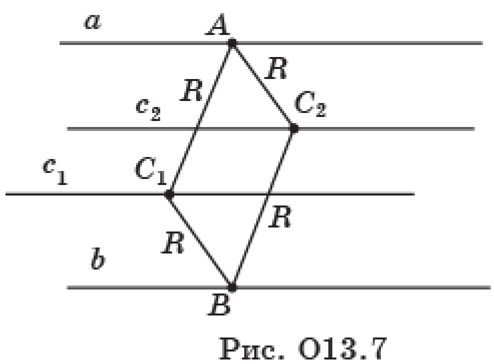


Рис. О13.7

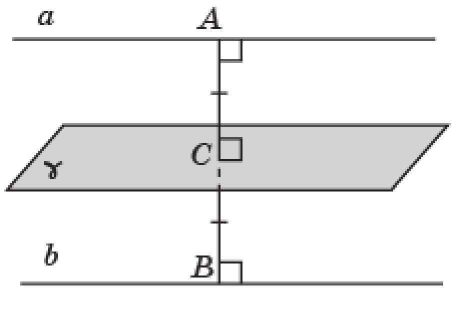


Рис. О13.8

14. Плоскость, параллельная данным прямым и равноудалённая от них (рис. O13.8). **15.** Прямая l, проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC и перпендикулярная плоскости γ данного треугольника ABC (рис. O13.9). **16.** а), б) Плоскость, проходящая через середину O отрезка O_1O_2 и перпендикулярная этому отрезку (рис. O13.10).

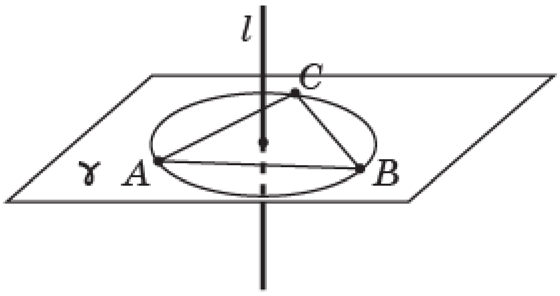


Рис. O13.9

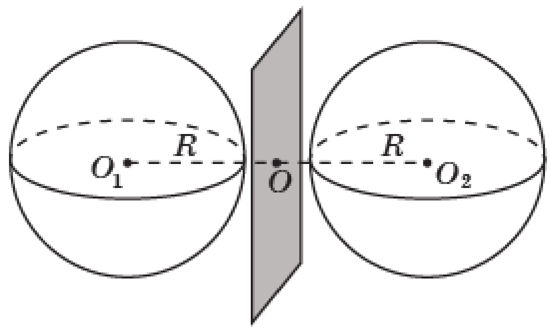


Рис. O13.10

14

1. Цилиндрическая поверхность (рис. O14.1). **2.** Точки, расположенные: а) внутри; б) вне цилиндрической поверхности (рис. O14.1).

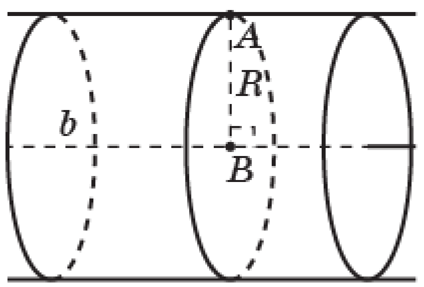


Рис. O14.1

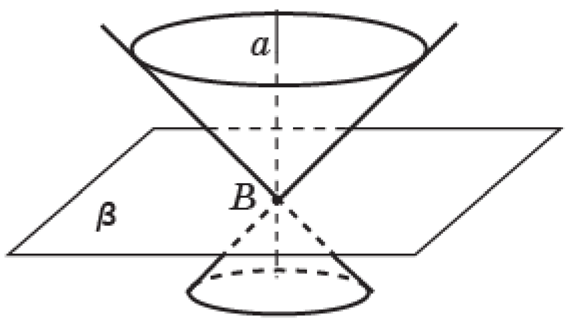


Рис. O14.2

3. Коническая поверхность (рис. O14.2). **4.** Точки, расположенные: а) внутри; б) вне конической поверхности (рис. O14.2). **5.** Через точку F проведём какую-нибудь плоскость, перпендикулярную плоскости δ. Обозначим d линию пересечения этих плоскостей. В проведённой плоскости ГМТ, равноудалённых от точки F и прямой d, будет парабола. Искомым ГМТ, равноудалённых от точки F и плоскости δ, будет параболоид вращения – поверхность, полученная вращением этой параболы вокруг её оси l (рис. O14.3).

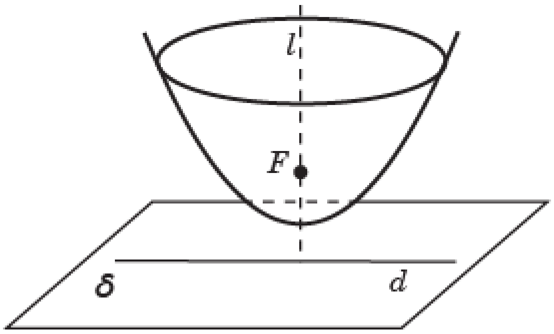


Рис. О14.3

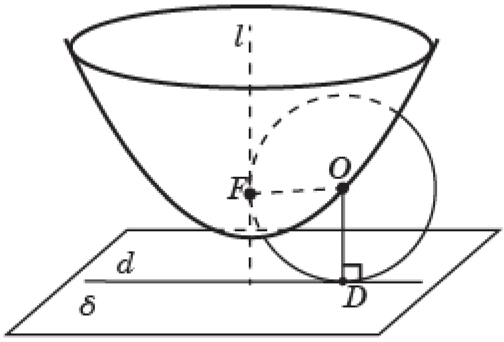


Рис. О14.4

6. ГМТ, расположенных: а) выше; б) ниже параболоида вращения по отношению к плоскости δ (рис. О14.3). **7.** Через точку F проведём какую-нибудь плоскость, перпендикулярную плоскости δ. Обозначим d линию пересечения этих плоскостей. В проведённой плоскости ГМ центров окружностей, проходящих через точку F и касающихся прямой d, будет парабола (см. упражнение 7 пункта 5). Искомым ГМТ будет параболоид вращения (рис. О14.4). **8.** Через точку F проведём какую-нибудь плоскость, перпендикулярную плоскости δ. Обозначим d линию пересечения этих плоскостей. В проведённой плоскости ГМ центров окружностей, касающихся данной окружности внешним образом и прямой d, будет парабола (см. упражнение 8 пункта 5). Искомым ГМТ будет параболоид вращения (рис. О14.5). Аналогичный параболоид будет в случае касания данной сферы внутренним образом (рис. О14.6).

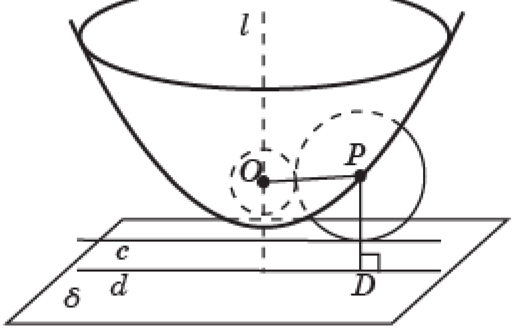


Рис. О14.5

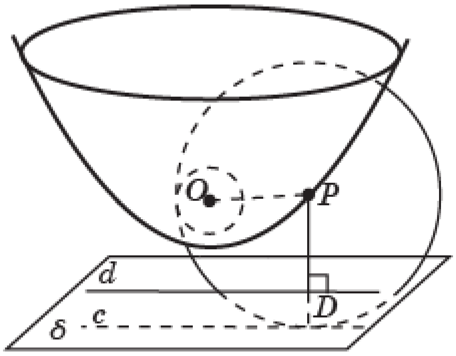


Рис. О14.6

9. Через данные точки F_1 и F_2 проведём какую-нибудь плоскость. В этой плоскости ГМТ A, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна c, будет эллипсом. Искомым ГМТ будет эллипсоид вращения – поверхность, полученная вращением этого эллипса вокруг прямой F_1F_2 (рис. О14.7).

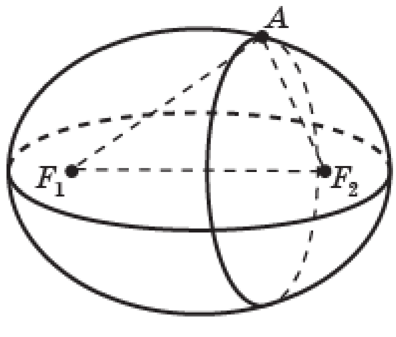


Рис. O14.7

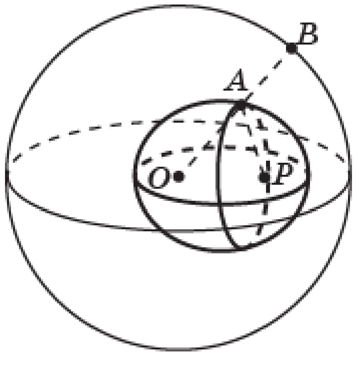


Рис. O14.8

10. Через данные точки O и P проведём какую-нибудь плоскость. Она пересечёт сферу по некоторой окружности. В этой плоскости ГМТ, равноудалённых от этой окружности и точки P, будет эллипс (см. упражнение 9 пункта 6). Искомым ГМТ будет эллипсоид вращения, полученный вращением этого эллипса вокруг прямой OP (рис. O14.8). **11.** Через данные точки O_1 и O_2 проведём какую-нибудь плоскость. Она пересечёт данные сферы по некоторым окружностям. В этой плоскости ГМТ, равноудаленных от этих окружностей, будет эллипс (см. упражнение 10 пункта 6). Искомым ГМТ будет эллипсоид вращения, полученный вращением этого эллипса вокруг прямой O_1O_2 (рис. O14.9).

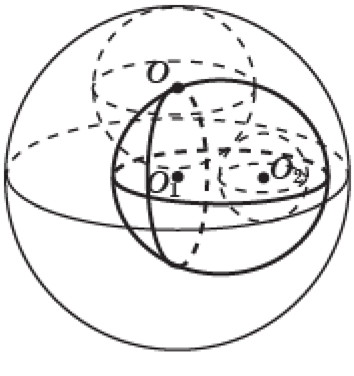


Рис. O14.9

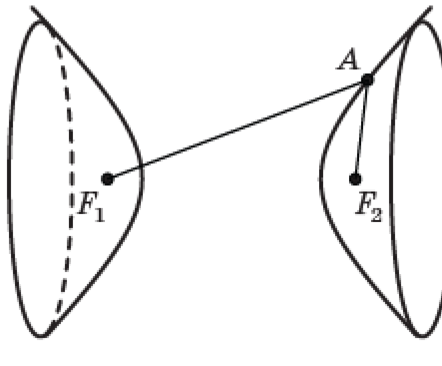


Рис. O14.10

12. Через данные точки F_1 и F_2 проведём какую-нибудь плоскость. В этой плоскости ГМТ A, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянен и равен $c < F_1F_2$, будет гиперболой. Искомым ГМТ будет гиперболоид вращения – поверхность, полученная вращением этой гиперболы вокруг прямой F_1F_2 (рис. O14.10). **13.** Через данные точки O_1 и O_2 проведём какую-нибудь плоскость. Она пересечёт данные сферы по некоторым окружностям. В этой плоскости ГМ центров окружностей, касающихся внешним образом этих окружностей, будет ветвь гиперболы (см. упражнение 8 пункта 7). Искомым ГМТ будет часть гиперболоида вращения, полученная вращением этой ветви гиперболы вокруг прямой O_1O_2 (рис. O14.11). Аналогичная поверхность будет в случае касания данной сферы внутренним образом (рис. O14.12).

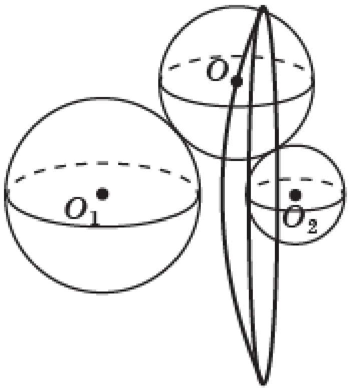


Рис. О14.11

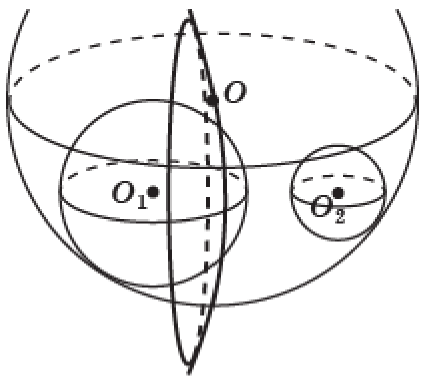


Рис. О14.12

14. Проведём какую-нибудь плоскость, содержащую данный отрезок AB. В этой плоскости ГМТ C, из которых данный отрезок AB виден под данным углом φ, является дуга ACB окружности без точек A и B (см. пункт 9). Искомым ГМТ будет поверхность, образованная вращением этой дуги вокруг прямой AB без точек A и B (рис. О14.13). **15.** Сфера с центром O и радиусом $\frac{c}{2}$ (рис. О14.14).

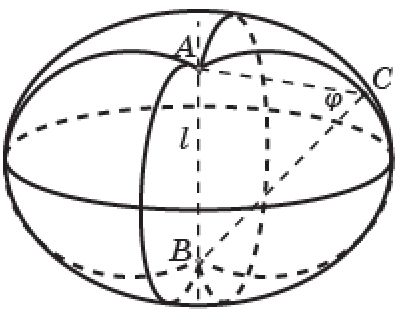


Рис. О14.13

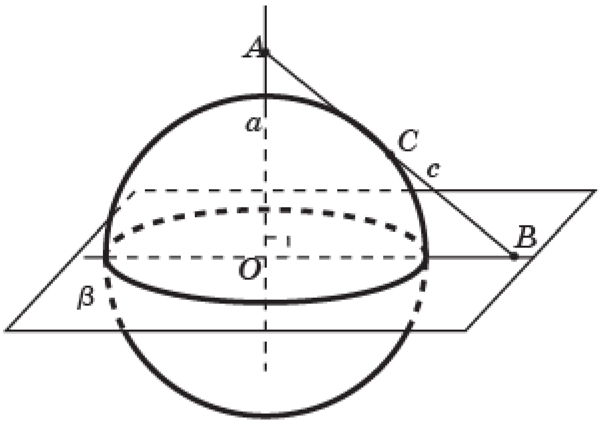


Рис. О14.14

15

1. Октаэдр – многогранник, изображённый на рисунке О15.1. **2.** Многогранник с вершинами O, A, B, C, D, E, F, G, H, I (рис. О15.2), который является частью куба, отсекаемой плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = 4$.

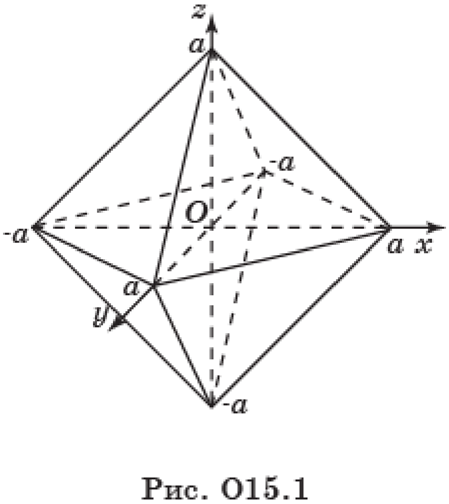


Рис. О15.1

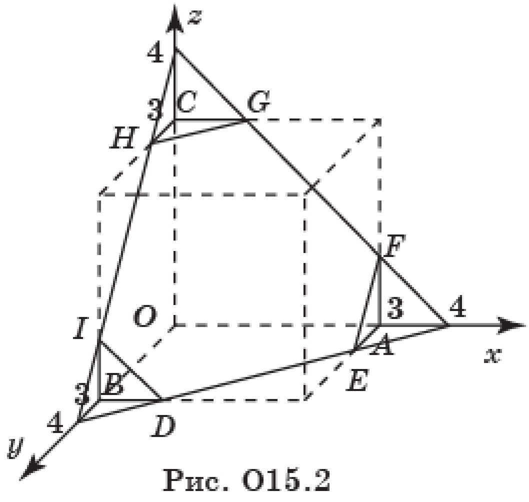


Рис. О15.2

3. $4az = x^2 + y^2$. **4.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. **5.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. **6.** Введём систему координат, считая точку A началом координат и $B(b, 0, 0)$ (рис. О15.3). Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, разность квадратов расстояний от которой до двух данных точек A и B равна d^2. Перепишем равенство $AC^2 - BC^2 = d^2$ в виде $x^2 + y^2 + z^2 - (x-b)^2 - y^2 - z^2 = d^2$. Делая преобразования, получим равенство $x = \frac{d^2+b^2}{2b}$, которое является уравнением плоскости γ, перпендикулярной прямой AB.

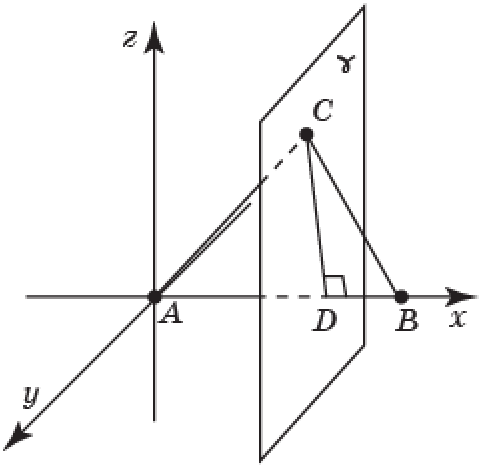


Рис. О15.3

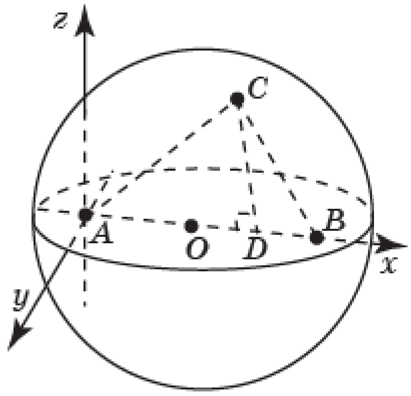


Рис. О15.4

7. Введём систему координат, считая точку A началом координат и $B(b, 0, 0)$. Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, сумма квадратов расстояний от которой до двух данных точек A и B равна d^2 (рис. О15.4). Перепишем равенство $AC^2 + BC^2 = d^2$ в виде $x^2 + y^2 + z^2 + (x-b)^2 + y^2 + z^2 = d^2$. Делая преобразования, получим равенство $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{2d^2 - b^2}{4}$, которое в случае $2d^2 - b^2 > 0$ является уравнением сферы с центром в точке $O\left(\frac{b}{2}, 0, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{\sqrt{2d^2-b^2}}{2}$. **8.** $x^2 + z^2 = R^2$. **9.** $z^2 = x^2 + y^2$. **10.** Искомым ГМТ является поверхность, задаваемая уравнением $4az = x^2$ (рис. О15.5).

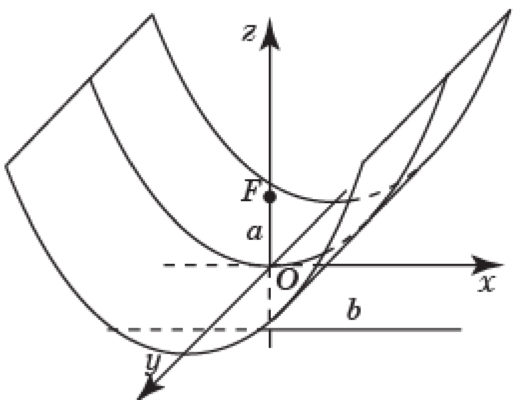


Рис. О15.5

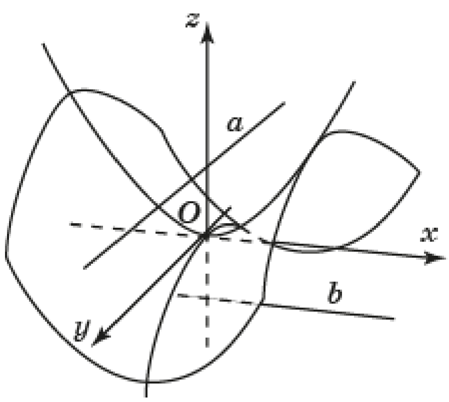


Рис. О15.6

11. Для двух данных скрещивающихся перпендикулярных прямых выберем оси координат так, чтобы одна из этих прямых лежала в плоскости *Oxz* и задавалась в этой плоскости уравнением $z = -a$, а другая прямая лежала в плоскости *Oyz* и задавалась в этой плоскости уравнением $z = a$. Квадраты расстояний от точки $C(x, y, z)$ до этих прямых равны соответственно $y^2 + (z+a)^2$, $x^2 + (z-a)^2$. Точка *C* будет равноудалена от этих прямых тогда и только тогда, когда будет выполняться равенство $y^2 + (z+a)^2 = x^2 + (z-a)^2$. Делая преобразование, получаем уравнение $4az = x^2 - y^2$, которое задаёт гиперболический параболоид (рис. О15.6). **12.** Пусть точка $A(x, y, z)$ принадлежит искомому ГМТ. Имеем уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = k^2z^2$. Преобразуем это уравнение к виду $x^2 + y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 = \frac{k^2a^2}{1-k^2}$. Если $k > 1$, то это уравнение задаёт гиперболоид вращения (рис. 15.7). Если $0 < k < 1$, то это уравнение задаёт эллипсоид вращения (рис. 15.8).

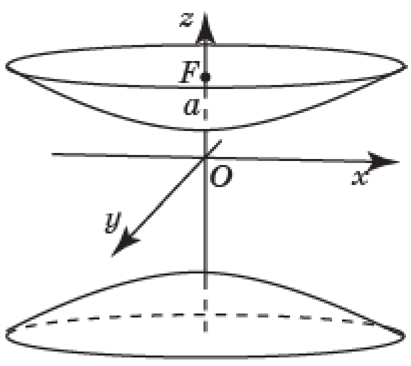


Рис. О15.7

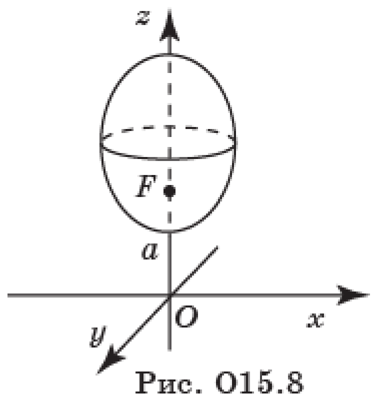


Рис. О15.8

13. Введём систему координат так, чтобы точка *A* имела координаты $(0, 0, a)$, а прямая *b* лежала на оси *Ox*. Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, разность квадратов расстояний от которой до данной точки *A* и данной прямой *b* равна d^2. Имеем уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 - y^2 - z^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $2az = x^2 + a^2 - d^2$. Это уравнение задаёт поверхность, изображённую на рисунке О15.9.

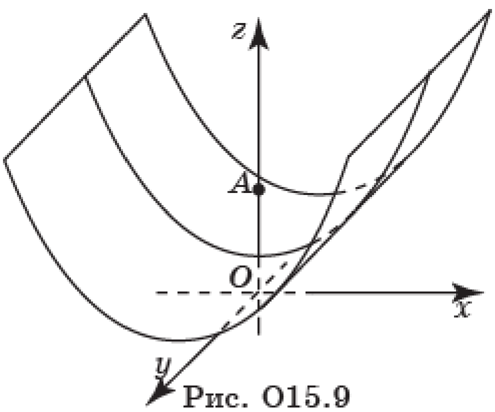


Рис. О15.9

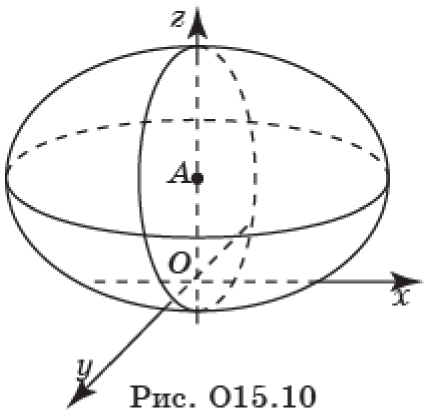


Рис. О15.10

14. Введём систему координат так, чтобы точка A имела координаты (0, 0, a), а прямая b лежала на оси Ox. Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, сумма квадратов расстояний от которой до данной точки A и данной прямой b равна d^2. Имеем уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 + y^2 + z^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $x^2 + 2y^2 + 2(z - \frac{a}{2})^2 = d^2 - \frac{a^2}{2}$. Если $d^2 > \frac{a^2}{2}$, то это уравнение задаёт эллипсоид вращения (рис. О15.10). **15.** Введём систему координат так, чтобы точка A имела координаты (0, 0, a), а плоскостью β была координатная плоскость Oxy. Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, разность квадратов расстояний от которой до данной точки A и данной плоскости β равна d^2. Имеем уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 - z^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $2az = x^2 + y^2 + a^2 - d^2$. Это уравнение задаёт параболоид вращения (рис. О15.11).

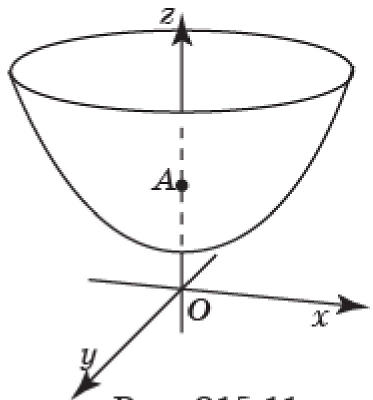


Рис. О15.11

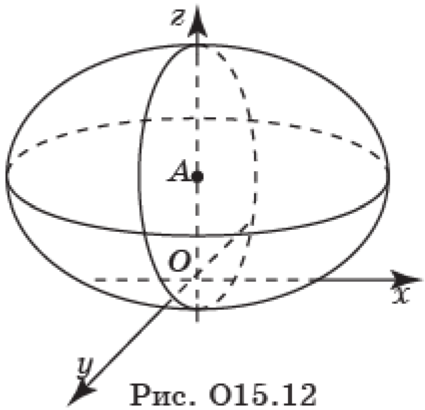


Рис. О15.12

16. Введём систему координат так, чтобы точка A имела координаты (0, 0, a), а плоскостью β была координатная плоскость Oxy. Рассмотрим точку $C(x, y, z)$, сумма квадратов расстояний от которой до данной точки A и данной плоскости β равна d^2. Имеем уравнение $x^2 + y^2 + (z-a)^2 + z^2 = d^2$. Преобразуем это уравнение к виду $x^2 + y^2 + 2(z - \frac{a}{2})^2 = d^2 - \frac{a^2}{2}$. Если $d^2 > \frac{a^2}{2}$, то это уравнение задаёт эллипсоид вращения (рис. О15.12). **17.** Расстояние от точки $C(x, y, z)$ до точки $F(0, 0, d)$ равно $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$. Расстояние от точки $C(x, y, z)$ до прямой a равно $\sqrt{y^2 + z^2}$. Имеем уравнение $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2} = k\sqrt{y^2 + z^2}$, которое в случае $k \neq 1$ приводится к уравнению

$$x^2 + (1-k^2)y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{d}{1-k^2}\right)^2 = \frac{k^2 d^2}{1-k^2}.$$

Случай $k = 1$ был рассмотрен ранее. Если $0 < k < 1$, то это уравнение задаёт эллипсоид (рис. О15.13). Если $k > 1$, то это уравнение задаёт однополостный гиперболоид (рис. О15.14).

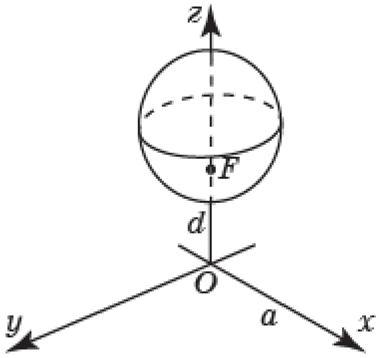


Рис. О15.13

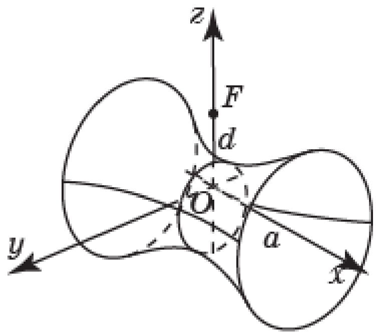


Рис. О15.14

18. Расстояние от точки $C(x, y, z)$ до прямой a равно $\sqrt{y^2 + z^2}$. Расстояние от точки $C(x, y, z)$ до прямой b равно $\sqrt{x^2 + (z - d)^2}$. Имеем уравнение $\sqrt{y^2 + z^2} = 2\sqrt{x^2 + (z - d)^2}$, которое приводится к уравнению

$$4x^2 - y^2 + 3\left(z - \frac{4d}{3}\right)^2 = \frac{4d^2}{3}.$$

Это уравнение задаёт однополостный гиперболоид (рис. О15.15).

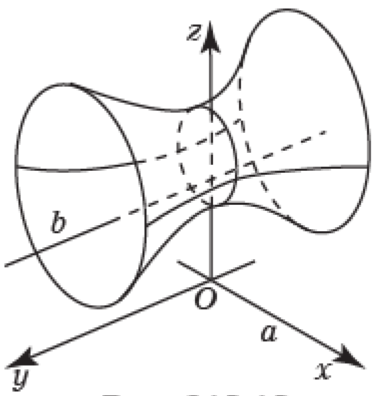


Рис. О15.15

ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. JL Учпедгиз, 1940.

2. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение с решениями. / Под ред. Н. В. Наумович. –12-е изд. М.: Учпедгиз, 1954.

3. Аргунов Б. И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости: пособие для студентов пед. ин-тов. М.: Учпедгиз, 1957.

4. Наумович Н. В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. М.: Учпедгиз, 1956.

5. Перепелкин Д. И. Геометрические построения в средней школе. М. - JL: Изд-во АПН РСФСР, 1947.

6. Стражевский А. А. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М.: Учпедгиз, 1954.

ОГЛАВЛЕНИЕ