

ИДЕЯ ФУЗИОНИЗМА В ПРЕПОДАВАНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

Термин *фузионизм* происходит от латинского слова *fusio* - *слияние*. Именно так в XIX веке называли совместное преподавание различных школьных предметов, например, физики и математики, химии и биологии. Фузионизмом также называли слитное преподавание нескольких разделов математики: алгебры и геометрии; геометрии и арифметики; наконец, планиметрии и стереометрии.

Одно из первых упоминаний о слитном преподавании планиметрии и стереометрии находится в знаменитом плане *Ж.Даламбера (Д'Аламбера)*. В середине XVIII века во Франции назревает революция, а коренные социальные преобразования, как правило, сопровождаются реформами образования. Новая французская идеология получила свое отражение в многотомной труде - «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Реформаторству подверглись все науки, в том числе и разделы математики. План курса геометрии был изложен Даламбером. Автор восстал против традиционного курса, который преподавался по "Началам" Евклида, и изложил новый подход к изучению геометрии. Новый курс носил более практический характер и содержал элементы совместного изложения начал планиметрии и стереометрии. Рекомендовалось исключить из курса геометрии аксиомы и постулаты, так как, с его точки зрения, они бесполезны в силу своей очевидности. Начинать изложение нужно с рассмотрения тела «как оно есть, а потом показать, что с помощью последовательных отвлечений мы приходим к понятию о теле, обладающем лишь протяженностью и фигурой, и далее – к поверхности, линии, точке. Прямую и кривую линии вовсе не стоит определять, вследствие трудности, а может быть, и невозможности свести понятия о них к более простым идеям».

Даламбер возражал против пренебрежения в «Началах» к задачам измерения величин (площадей, объемов) и использованию различных движений. Основными принципами доказательств должны были быть принцип наложения, метод пределов и теория пропорций (например, теорема о равенстве произведений крайних и средних членов). Требуя от курса геометрии простоты и ясности изложения, Даламбер вместе с тем подчеркивал важность четкости и точности доказательств. Он считал, что чем строже вывод, тем он доступнее, так как подлинная строгость состоит в выводе теорем простым прямым путем из простейших принципов. Любопытно заметить, что он считал целесообразным построение различных курсов геометрии в зависимости от потребностей самих учеников. Одним нужен курс

практической геометрии, другим строгие рассуждения и теоретическое руководство.

Статьи Даламбера о преподавании геометрии получили широкую популярность во Франции и за ее пределами. Его замыслы нашли частичную реализацию в следующих трех известных сочинениях.

В 1770 году вышел шеститомный труд "*Cours des mathematiques*" Э.Безу. Курс геометрии в нем предназначался для слушателей артиллерийских и морских учебных заведений, носил в основном повествовательный характер и использовался как пропедевтический курс геометрии.

В 1794 году вышла книга "*Elements de geometria*" А.М.Лежандра. В ней автор счел необходимым вернуться к античной строгости построения системы геометрии. В частности, он восстановил аксиомы и постулаты. Вместе с тем он широко применял алгебру при изучении геометрии, т.е. осуществлял слитное преподавание алгебры и геометрии, но стереометрию традиционно рассматривал после планиметрии. В первой части курса предлагались пересекающиеся прямые, треугольники, параллелограммы, во второй – круг и измерение углов, в третьей – теоремы о подобии и измерении площадей «прямолинейных» фигур. Четвертая посвящена правильным многоугольникам и измерению окружности и круга, пятая – плоскостям и телесным (т.е. многогранным) углам, шестая – многогранникам, седьмая – шару и сферическим треугольникам и, наконец, последняя, восьмая – цилиндру, конусу и шару. Заметим, что в многочисленных изданиях учебника Лежандра (их было только 20 при жизни автора) делались попытки доказательства пятого постулата Евклида. Причем в каждом новом издании Лежандр давал новое «доказательство», которое опровергал в последующем.

В 1803 году вышли «Начала» С.Ф.Лакруа. Хотя они легко читались и были весьма содержательны, предназначалась эта книга для углубленного изучения геометрии.

Работы Даламбера и его последователей оказали большое влияние на преподавание геометрии. Они были переведены на многие европейские языки, в том числе и на русский.

План Даламбера стал известен в России. Он произвел неизгладимое впечатление на Н.И.Лобачевского, которому очень понравилась идея слитного преподавания плоской и пространственной геометрии. В 1823 году им был написан учебник "Геометрия", который историки математики называют одним из первых фузионистских курсов геометрии. Книга содержит следующие главы: 1. Измерение линий. 2. Об углах. 3. О перпендикулярах. 4. Измерение телесных углов. О правильных

многоугольниках и телах. 5. Об одинаковости треугольников. 6. Об измерении прямоугольников. 7. Об измерении треугольников и других фигур. (Другие фигуры, имеются в виду трапеции и параллелограммы.) 8. О параллелограммах. 9. Об измерении призм. 10. Об измерении пирамид и всех тел, ограниченных плоскостями. 11. Измерение окружности и площади круга. 12. Об измерении объема цилиндра и конуса, поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса. 13. О величине объема и поверхности шара.

В книге рассматриваются вопросы плоской геометрии и сразу предлагаются аналогичные утверждения, относящиеся к пространству. Например, во второй главе представляются окружность-круг и сфера-шар. В третьей - рассматривается взаимное расположение плоскостей, а в четвертой - углы между пересекающимися прямыми и телесные (многогранные) углы. Здесь же представлены треугольник и тетраэдр, многоугольник и многогранник, правильный многоугольник и правильный многогранник. Справедливости ради, надо отметить, что данный курс, как подчеркнуто в предисловии, предназначен для читателей, уже усвоивших основной школьный курс геометрии. Таким образом, эта книга адресована студентам, преподавателям, всем интересующимся математикой и вопросами ее преподавания. Большой заслугой Н.И.Лобачевского является то, что он написал не просто теоретическую статью с изложением идей фузионизма, а разработал и представил единый фузионистский курс геометрии. В этом непреходящая ценность и огромное значение данного труда.

В первой половине XIX века фузионизм еще не был популярен в России, и работа Н.И.Лобачевского практически осталась незамеченной. В то же время эти идеи были весьма распространены в Западной Европе. Этому в большой степени способствовали исследования французского математика *Г.Монжа*, в частности, его классическое сочинение "*Geometrie descriptive*" ("Начертательная геометрия"). В нем систематизирован накопленный значительный, но разрозненный материал по решению различных конструктивных задач стереометрии известными планиметрическими построениями. Например, рассматривается задача о проведении касательной плоскости к трем данным («по положению и величине») сферам. При ее решении рассматривается связь теоремы о центрах «внешнего подобия трех кругов на плоскости, взятых попарно, с предложением о проведении касательной плоскости к трем шарам, если эти круги рассматривать как большие круги данных шаров, а касательные к ним, как образующие конических поверхностей, имеющих с данными шарами попарное касание». Другим примером является рассмотрение

свойств плоских конических сечений, которые получаются как сечения конуса плоскостью.

Последователи Г.Монжа - *Ш.Брианшон, Ж.Понселе, М.Шаль, К.Штаудт* и др., - активно содействовали развитию проективной геометрии, в которой слияние планиметрии и стереометрии имело широкое практическое применение, что способствовало распространению фузионизма в геометрии. Заметим, что при этом фузионизм не проникал в элементарную геометрию, ее преподавание велось по традициям "Начал" Евклида, т.е. сначала излагалась планиметрия, затем стереометрия.

В 1825 году известный французский математик *Ж.Жергонн* (он, кстати, открыл в проективной геометрии принцип двойственности) написал статью о необходимости слитного преподавания планиметрии и стереометрии, в которой поднял вопрос о неестественном, с его точки зрения, делении геометрии на плоскую и пространственную, что плохо влияет на умственное развитие учащихся. Эта статья была опубликована в его собственном математическом журнале "Анналы Жергонна", которым он руководил в период с 1810 по 1831 гг. Именно Жергонн первый предложил запись аналогичных утверждений для плоскости и пространства в два столбца, прием которым стали пользоваться многие авторы последующих работ (см. таблицу 1).

Таблица 1

1. Окружностью называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки, принадлежащей этой же плоскости.	Сферой называется множество точек пространства, одинаково удаленных от данной точки.
2. Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.	Около любого тетраэдра можно описать сферу и притом только одну. В любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.
3. Многоугольник называется правильным, если у него равны все стороны и равны все углы.	Многогранник называется правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками и все его двугранные углы равны.

Спустя 19 лет после статьи Жергонна в 1844 году были опубликованы еще две работы по интересующей нас теме, а именно: "Аналогии элементарной геометрии, геометрии плоскости и

геометрии пространства" *А.Машистрей* и книга *Бретшнейдера* "О преподавании геометрии в гимназиях". Автор второй названной работы четко объяснил свою позицию, почему он считал слитное изучение планиметрии и стереометрии более предпочтительным по сравнению с общепринятым последовательным изучением этих разделов геометрии. В частности, им было высказано следующее:

1) Очень вредно молодой ум ученика долго задерживать на изучении плоской геометрии, так как от этого замедляется развитие пространственных представлений, а от этого и развитие вообще.

2) Метод обучения геометрии, основанный на отделении планиметрии от стереометрии, как показывает опыт, не дает тех результатов каких можно достигнуть с помощью метода слияния.

Несмотря на то, что современники очень высоко оценили эти произведения, практически они не нашли сторонников, и, как следствие этого, не были внедрены в учебный процесс школы. Правда, справедливости ради, заметим, что идеи Бретшнейдера имели одного верного последователя в лице датского педагога *А.Стена*, который написал соответствующий учебник по геометрии и очень пропагандировал его в Дании. Эта история описана в статье *В.М.Фесенко* "О слиянии планиметрии со стереометрией", которая была опубликована в дореволюционном журнале "Математическое образование". Таким образом, основные достижения фузионизма в преподавании геометрии и этапы развития этой идеи были хорошо известны в России.

Во второй половине XIX века фузионизмом в геометрии стали увлекаться в Италии. Например, в 1884 году вышли "Элементы геометрии" туринского профессора *Р.Паоли*. В этом труде четко проведена идея слитного преподавания планиметрии и стереометрии. В предисловии автор говорит о мотивах, побудивших применить этот метод в изложении геометрии. Он говорит о том, что много аналогий существует между некоторыми плоскими и пространственными фигурами и что, изучая их раздельно друг от друга, мы отказываемся видеть то, что дает полная аналогия между ними и должны возвращаться к излишним повторениям. Кроме того, каким образом мы можем найти свойства линии на поверхности, не пользуясь геометрическими элементами расположения вне этой линии или поверхности? Мы ограничиваем, таким образом, свои силы и добровольно отказываемся от научного материала, с помощью которого можно упрощать построения и доказательства. Как, в самом деле, данный отрезок разделить пополам, не выходя из пределов самого отрезка? Пользуясь геометрическими элементами, расположенными в той же плоскости, мы легко можем выполнить построение, необходимое для решения задачи и т.д.

Как видим, в представленной книге слитное изложение планиметрии и стереометрии носит вполне определенные дидактические функции, направленные не только на оживление преподавания геометрии, но и на уменьшение числа постулатов и теорем, более простые доказательства некоторых утверждений, выяснение внутрипредметных связей между разделами геометрии. Например, в этой книге совместно изучается материал о линейных и двугранных углах; многоугольниках и многогранниках; круге и шаре; площади и объеме и т.п.

Дело Паоли продолжили его ученики - *Г.Лаззери* и *А.Боссани*, которые в 1887 году выпустили фузионистский курс геометрии, предназначенный для средней школы (второе издание вышло в 1898 году). В предисловии авторы замечают: "Метод слияния двух геометрий еще не так давно казался утопией, теперь же он подает большие надежды в недалеком будущем стать классическим методом преподавания элементарной геометрии". Начиналось повествование с изложения семи постулатов: 1-й - о геометрических образах; 2-й и 3-й - постулаты движения; 4-й о делимости на части пространства; 5-й и 6-й определяли соответственно прямую и плоскость; 7-й постулат определял взаимное расположение прямых, а также плоскостей.

Эта работа вызвала в Италии большой интерес в педагогической среде. На заседаниях возникшего тогда общества педагогов средних школ "*Mathesis*", поставившее себе целью улучшение преподавания математики (организация, аналогичная, например, современной секции средней школы Московского математического общества), широко обсуждался вопрос о полезности использования метода слияния планиметрии и стереометрии. Далеко не все приветствовали и поддерживали фузионизм в геометрии. В частности, категорически против него выступило очень влиятельное общество педагогов Милана. Известный математик *Дж.Веронезе* считал, что не следует увлекаться фузионизмом в самом начале изучения геометрии. В 1900 году им была написана книга "Элементы геометрии", представленная на II Международном конгрессе математиков. Он проходил в Париже в августе 1900 года и прославился тем, что на одном из его заседаний выступил *Д.Гильберт* со своим знаменитым докладом о 23 математических проблемах, определивших основные направления развития математики XX столетия.

Дж.Веронезе в своем выступлении, в частности, сказал: "В преподавании следует идти от частных к общему, от простого к сложному. Евклид, Лежандр и большинство современных авторов сполна рассматривают геометрию на плоскости до начала изучения геометрии пространства. Я полагаю, что для начала следует избрать Ректиметрию (геометрию прямой), по крайней мере, в том объеме

какой охватывает ее основные положения. Когда эти принципы установлены, можно рассматривать такие специальные теоретические вопросы, как равенство и равновеликость, подобие, измерение и т.д. уже одновременно на плоскости и в пространстве. Я не разделяю здесь точки зрения фузионистов, требующих чтобы при изучении подобных теоретических вопросов геометрические образы трех измерений вплетались в доказательства планиметрических теорем, но держусь того взгляда, что во множестве случаев доказательство может быть прямо распространено с плоскости на пространство. Этот способ изложения приведет к экономии времени и даст возможность лучше вникнуть во взаимоотношения, существующие между различными частями одной и той же теории".

Немецкий математик *Ф.Х.Клейн*, автор всемирно известной работы «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (больше известной под названием «Эрлангенской программы», 1872), увлекался вопросами преподавания математики. В течение сорока лет (с 1876 года) он был главным редактором журнала «Математические анналы». Перед первой мировой войной организовал Международную комиссию по реорганизации преподавания математики. На русский язык переведена его популярная книга «Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции, читанные в Геттингенском университете». Второй ее том полностью посвящен геометрии. Завершает его статья Клейна, которая называется «О преподавании геометрии». В ней, в частности, предлагается несколько требований, которые следует предъявлять к «здоровому школьному преподаванию геометрии». Последнее, пятое требование непосредственно относится к фузионизму в геометрии. Автор говорит: «Я желал бы отметить здесь еще одну полезную методическую точку зрения, а именно...тенденцию к слитному преподаванию планиметрии и стереометрии, цель которого – помешать одностороннему усовершенствованию в планиметрии при одновременном пренебрежении к развитию трехмерной пространственной интуиции. В том же смысле надо понимать также и требование слитного преподавания арифметики и геометрии: я не считаю желательным полное слияние этих областей, но они не должны быть столь резко разграничены, как это часто теперь происходит в школе».

В конце XIX века идеи фузионизма стали необычайно популярны в России. В это время у нас началась одна из самых крупных реформ школьного образования. Сложилась такая ситуация, когда, с одной стороны, педагогическая и методическая науки накопили значительный материал в области теории воспитания и обучения, а с другой, имела место устаревшая общеобразовательная

система. Она характеризовалась ранней специализацией учащихся (реальные училища и классические гимназии), которая не соответствовала достижениям педагогической психологии. Заметим, что в этой области у нас были получены глубокие результаты. В качестве примера достаточно обратиться к работам *П.Ф.Кантерева*, его "Педагогической психологии" (Спб; 1876, переиздана в 1883 году). Сложившееся противоречие, естественно, не могло не привести к новой реформе образования. Преобразования касались как всей системы обучения в целом, так и каждого предмета в отдельности. Наиболее серьезным изменениям при этом подвергся курс математики. Свообразным итогом движения за реформу были исторические Всероссийские съезды преподавателей математики.

Первый съезд проходил в Петербурге с 27.12.1911 г. по 3.1.1912 г., а второй ровно через два года в Москве. На них впервые учителя и ученые-математики имели возможность обсудить важнейшие проблемы преподавания математики в школе. Поражает высокоавторитетный состав съездов. Достаточно назвать фамилии таких видных педагогов-математиков, как *А.М.Астряб*, *С.А.Богомолов*, *Н.А.Извольский*, *А.Р.Кулишер*, *К.Ф.Лебединцев*, *С.И.Шохор-Троцкий* и мн.др. Это позволило на высоком научно-методическом уровне подойти к решению вставших перед школой проблем. По-существу, съезды подытожили всю огромную работу в области преподавания математики в школе и выработали далеко идущие перспективные планы на будущее. Результаты съездов удивляют обилием интересных идей, находок, решений проблем, многие из которых актуальны и в наши дни. Это непосредственно касается и обсуждаемой нами проблемы фузионизма в преподавании школьного курса геометрии, причем особый интерес представляет первый съезд.

Уже на первом пленарном заседании был заслушан большой доклад известного математика, профессора *С.А.Богомолова* "Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания". В нем автор подробно остановился на общем значении курса геометрии и его основных целях. В частности, он сказал: "Что касается самих учащихся, то для них геометрия является наиболее усвояемым и интересным отделом математики; преподавание геометрии облегчается и оживляется чертежами, призывом к воображению ... геометрия имеет выдающееся значение, как предмет общего и специально-математического образования. Помимо сообщения начальных геометрических сведений, мы видим цель ее преподавания в развитии двух умственных способностей: интуиции пространства и логического мышления". Далее «...конечно, всякий преподаватель оживит урок ссылкой на факты, известной ученикам области; но нам

кажется, что главная задача выполнения фузионистских чайний лежит на представителях прикладных наук: они должны ставить свои предметы в теснейшую связь с математикой, памятуя слова Канта, что во всякой отрасли изучения природы мы постольку имеем науку, поскольку встречаем в ней математику. Представители же нашей специальности могут главное свое внимание, помимо обучения технике математического знания, посвятить развитию и дисциплинированию ума учащихся; логически развитой ум есть наиболее могучее орудие человека, важнейший фактор его прогресса».

В соответствии со сказанным С.А.Богомолов предложил разбить весь курс геометрии на две части, а именно: пропедевтическую и систематическую. Причем первая должна иметь целью развить пространственную интуицию и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы геометрической науки. При этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения, ее постоянное упражнение должно служить лучшим средством к ее развитию. Более того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место, так называемому, лабораторному методу, т.е. экспериментированию всякого рода. Последнее может происходить при помощи построений с простейшими геометрическими приборами, построений на клетчатой бумаге, вырезания и накладывания фигур и т.п.

Таким образом, по мнению С.А.Богомолова, именно начальный курс геометрии должен носить фузионистский характер. Эта идея была поддержана и одобрена съездом и широко на нем обсуждена.

Таким образом, съезд пришел к единодушному выводу о необходимости слияния планиметрии и стереометрии в курсе начальной геометрии, предшествующей изучению систематического курса, что и нашло отражение в его резолюции. Однако было отмечено, что в основном курсе геометрии, где должна происходить четкая систематизация учебного материала, слияние, смешение курсов планиметрии и стереометрии нецелесообразно, так как это ведет к нарушению основополагающих педагогических принципов систематизации и последовательности обучения. Более того, в систематических курсах не следует смешивать различные разделы математики, например, алгебру и геометрию, поскольку в таких фузионистских курсах невозможно обеспечить последовательное и непрерывное прохождение учебного материала каждого из них.

Дальнейшее развитие математического образования в России подтвердило правильность подобного подхода. К 60-м годам XX

столетия были созданы прекрасные курсы начальной (пропедевтической, подготовительной) геометрии для младших школьников, в которых сочеталось изучение плоских и пространственных фигур. Одним из первых таких учебников нового поколения был учебник математики для 5-6 (тогда 4-5) классов известных авторов: *Н.Я.Виленкина, А.С.Чеснокова, С.И.Шварцбурда*, написанный в период реформы математического образования конца 60-х – начала 70-х годов прошлого века.

В систематическом же курсе геометрии планиметрия и стереометрия изучались традиционно последовательно. Однако в конце курса планиметрии предусматривалась глава «Начальные сведения из стереометрии», которая знакомила учащихся с основными темами геометрии старших классов, а именно, с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, многогранниками, фигурами вращения (см.: *А.Н.Колмогоров, А.Ф.Семенович, Р.С.Черкасов* «Геометрия: Учебное пособие для 6-8 классов средней школы»).

Идеи фузионизма не были популярны в период той реформы математического образования. Было проведено только одно исследование по данной теме. Это кандидатская диссертация *Я.М.Жовнира* "Фузионизм в системе преподавания геометрии в средней школе" (Киев; 1970). В ней автор выявил "фактическую, внутреннюю и логическую связь между планиметрией и стереометрией", на основании чего разработал экспериментальный фузионистский курс геометрии в 7-9 классах (нумерация классов современная). Например, в курсе 8 класса рассматривается одновременное доказательство следующих теорем:

"Если из точки вне плоскости (прямой) проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр короче наклонной".

Приведем программу, предложенную Я.М.Жовниром, для слитного преподавания планиметрии и стереометрии:

7 класс. Геометрические тела. Типы линий. Плоскость. Аксиомы плоскости и следствия из них. Понятие движения в геометрии. Углы (двугранные и плоские). Окружность и круг. Сфера и шар. Развертки поверхностей тел. Многогранные углы и многоугольники. Симметрия (в пространстве и на плоскости). Проекции и их виды. Программой также предусмотрены соответствующие работы на местности.

8 класс. Элементы математической логики. Равенство треугольников и тетраэдров. Практические занятия на местности. Параллелизм плоскостей и прямых. Вектор; сложение и вычитание векторов; умножение вектора на число; проекция вектора на ось (плоскость). Четырехугольники, призмы, пирамиды. Окружность и

сфера. Простейшие геометрические места точек в пространстве и на плоскости.

9 класс. Тригонометрические функции острого угла. Решение прямоугольных треугольников. Скалярное произведение вектора и его свойства. Углы в окружности. Вписанные и описанные многоугольники и многогранники. Площади фигур и поверхностей. Объем многогранников. Пропорциональность отрезков. Тела вращения и вычисление их поверхностей и объемов (без доказательств). В программу 8 и 9 классов включены практические работы на местности.

В диссертации приводится программа и для 10-11 классов. Она составлена с учетом условий преемственности программы для 7-9 классов, составленной в духе фузионизма, и включает в себя следующие вопросы: (10 класс). Пространственная система координат. Векторы в пространстве. Разложение вектора по направляющим единичным векторам. Расстояние между точками в пространстве. Эллипс. Площадь эллипса. Уравнение плоскости и сферы. (11 класс). Группы преобразований. Аксиоматический метод. Некоторые понятия геометрии Лобачевского и Римана.

К разработанным учебникам были написаны также "Сборник задач и упражнений" и "Рабочая тетрадь", т.е. создано полное методическое обеспечение для проведения уроков с учащимися.

Хотя эта работа написана ярко, она не нашла сторонников и последователей, так и оставшись красивым экспериментальным методическим исследованием. Тем самым была убедительно продемонстрирована непрактичность данной идеи в масштабах ее внедрения в работу массовой школы.

Остановимся еще на двух важных для обсуждаемой нами проблемы работах. Первая включала в себя разработку фузионистского курса и называлась "Геометрия. Систематический курс" (1949 г.). Ее написал *С.А.Богомолов* и в ней он реализовал те идеи, которые высказал на первом всероссийском съезде преподавателей математики (тезисы доклада приведены выше). В книге выделены две части, а именно: 1. Геометрия положения. 2. Геометрия меры.

Курс построен на аксиоматической основе. Так, в первой части даются три основные неопределяемые понятия - точка, прямая, плоскость; даны аксиомы принадлежности, расположения и аксиома Паша; рассмотрены основные фигуры (образы) - угол, треугольник, многоугольник, телесный (многогранный) угол, тетраэдр и многогранник. Во второй части представлены еще 4 аксиомы меры и аксиома непрерывности. Здесь рассмотрены равенство углов, треугольников; свойства плоских и пространственных фигур;

вписанные и описанные фигуры; измерение геометрических величин и др. Автором объединены доказательства некоторых теорем из планиметрии и стереометрии, например, в параграфе "Круг и шар" приводится следующая теорема: "Прямая, проходящая через центр шаровой поверхности, пересекает ее в двух и только в двух точках. То же самое имеет место для окружности - при условии, что прямая лежит в ее плоскости".

В данной книге практически отсутствуют задачи. Для этой цели, как замечает сам автор, вполне подходят имеющиеся сборники задач. В то время, как мы знаем, было принято разделять учебник, где предлагалась теория, и отдельно к нему прикладывался задачник.

Специально отметим и подчеркнем, что эта книга С.А.Богомолова не была предназначена для учащихся средней школы. Она рекомендована в качестве пособия для самообразования учителям математики и студентам математических факультетов педагогических вузов, т.е. тем, кто уже знаком с основным школьным курсом геометрии. Таким образом, она предназначалась для повышения уровня геометрической подготовки, для тех, кто интересуется геометрией и ее преподаванием.

Вторая книга, на которую мы обратим внимание, это "Геометрия" американских авторов *Э.Э.Моиза* и *Ф.Л.Даунса*. Книга написана в 1963 году (в 1972 году в издательстве "Просвещение" она была опубликована на русском языке) и представляет собой учебник геометрии, который использовался в старших классах американских средних школ. Он содержит разделы, относящиеся, как к планиметрии, так и к стереометрии. Предлагаемый материал соответствует полной программе школьного курса геометрии. Основными особенностями является следующее:

1. Рано вводятся основные понятия стереометрии (уже в третьей главе, всего их 17), которые с этого момента активно используются. Таким образом, к тому времени, когда авторы обращаются к систематическому изучению стереометрии (глава 8) учащиеся уже имеют большой и разнообразный интуитивный опыт работы с пространственными объектами.

2. Система координат на прямой вводится в главе 2, расстояния и углы измеряются числами, при действиях с которыми применяются алгебраические методы. Это позволяет легко ввести в главе 13 (после подобия и теоремы Пифагора) систему координат на плоскости.

3. Теория измерений площадей авторы предлагают приблизительно в середине курса. Они считают, что, во-первых, понятие площади является, довольно, легким. Во-вторых, оно оказывается полезным в оставшейся части теории курса, например,

дает простое доказательство теоремы Пифагора, а также теоремы о пропорциональных отрезках, на которую опирается теория подобия.

4. Почти в каждом случае, прежде чем формально определить какое-либо понятие, авторы объясняют его интуитивным путем неформального обсуждения (чаще всего с помощью рисунка).

5. Рисунки в книге играют существенную роль, их много, они служат для увеличения предлагаемой информации. Многие из них снабжены необходимыми замечаниями, пояснениями и т.п. Имеется даже специальный параграф, который называется "Передача информации с помощью рисунков".

6. Обращает на себя внимание то, что многие аксиомы и теоремы имеют названия, например, аксиома измерения углов, аксиома масштабной линейки, или теорема о двух окружностях ("Пусть даны две окружности радиусов a и b , расстояние между центрами которых равно c . Если каждое из чисел a , b и c меньше суммы двух других, то эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих по разные стороны от прямой, проходящей через их центры"), теорема о шарнире ("Если две стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам другого треугольника и если угол, заключенный между указанными сторонами первого треугольника, больше угла, заключенного между соответствующими сторонами второго, то третья сторона первого треугольника больше третьей стороны второго треугольника") и т.д.

7. Авторы специально подчеркнули, что одна из основных целей книги состоит в том, чтобы научить каждого учащегося пользоваться математическим языком, т.е. самому понимать математическое содержание предлагаемого материала.

Книга прекрасно написана, оформлена, имеет исторические экскурсы, например, о том, как Эратосфен измерил Землю, о неразрешимости некоторых классических задач на построение, о жизни и творчестве многих известных математиков, таких как Л.Эйлер, Р.Декарт, Н.И.Лобачевский и мн.др.

Сегодняшнее состояние общества и математического образования в школе не является таким благоприятным, как раньше. Чтобы сохранить достигнутый отечественной школой уровень математического образования, необходимо, в первую очередь, заботиться о том, не приведет ли то или иное изменение к резкому снижению этого уровня или даже полной его потере. Опасения за судьбу школьного математического образования высказывают многие видные современные математики. Например, академик *В.И.Арнольд* в статье "Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции" пишет: "Традиционно высокий уровень российской математики всегда был основан на хорошем математическом

образовании “по Киселеву”... К сожалению, сейчас уровень математического грамотности страны в целом начал катастрофически падать ... Доказывать необходимость математической грамотности для каждого культурного человека как-то странно”. Заметим, что в большой степени это связано с уменьшением числа часов, отводимых на математику и, как следствие, значительная перестройка ее курсов.

Из сказанного следуют такие важные выводы, а именно:

1. Идея фузионизма в геометрии весьма привлекательна, сама по себе очень красива, нестандартна по отношению к традиционной сложившейся системе последовательного изложения курса геометрии от планиметрии к стереометрии, восходящей еще к “Началам” Евклида.

2. Эта проблема была блестяще разрешена в пропедевтических курсах геометрии младших классов, основной целью которых была подготовка к изучению систематического курса геометрии основной школы.

3. Однако многочисленные попытки решения рассматриваемой проблемы, которые велись на протяжении более чем двух веков и заключающиеся в ее реализации на систематическом курсе геометрии, не увенчались успехом. Фактически в России в XIX веке было создано одно соответствующее пособие Н.И.Лобачевского и одно в XX веке С.А.Богомолова, но и они были предназначены для читателей, имеющих базовую школьную подготовку по геометрии. Другими словами, это были книги, которые предлагали другой способ построения школьного курса геометрии для тех, кто особо интересовался геометрией и ее преподаванием.

4. Почему же в школе не прижилось слитное преподавание планиметрии и стереометрии в систематическом курсе геометрии? Основная причина заключается в том, что фузионизм противоречит основным дидактическим принципам: от простого к сложному; последовательности; систематичности; соответствия возрастным особенностям учащихся.

5. Однако, исходя из рассмотренных и представленных особенностей слитного преподавания планиметрии и стереометрии, можно сделать вывод о том, что метод фузионизма будет весьма полезен и эффективен при проведении заключительного этапа изучения школьного курса геометрии - повторении основного пройденного материала.

В настоящее время школе предстоит сделать выбор концепции преподавания систематического курса геометрии. Каким он будет, покажет время, но ясно, что нельзя игнорировать исторический опыт решения данной проблемы. При этом следует помнить, что фузионистский систематический курс геометрии никогда не был

официальным, общепринятым, никогда не имел широкого распространения. Он нравился как интересная, привлекательная идея, альтернативная традиционному курсу. Неслучайно поэтому к идее слитного преподавания планиметрии и стереометрии обращаются в периоды реформ, во времена кризисов и коренных перестроек математического образования.