В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

ПРОЕКТНОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «ОКРУЖНОСТЬ ЭЙЛЕРА»

VIII международная научная конференция «Математика, образование, культура» Тольятти, 2017

В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования говорится, что индивидуальный проект представляет собой особую форму организации деятельности обучающихся (учебное исследование или учебный проект).

Индивидуальный проект выполняется обучающимся самостоятельно под руководством учителя по выбранной теме в рамках одного или нескольких изучаемых учебных предметов, курсов в любой избранной области деятельности (познавательной, практической, учебно-исследовательской, социальной, художественно-творческой, иной).

Результаты выполнения индивидуального проекта должны отражать:

- сформированность навыков коммуникативной, учебно-исследовательской деятельности, критического мышления;
- способность к инновационной, аналитической, творческой, интеллектуальной деятельности;
- сформированность навыков проектной деятельности, а также самостоятельного применения приобретённых знаний и способов действий при решении различных задач, используя знания одного или нескольких учебных предметов или предметных областей;
- способность постановки цели и формулирования гипотезы исследования, планирования работы, отбора и интерпретации необходимой информации, структурирования аргументации результатов исследования на основе собранных данных, презентации результатов.

Мы считаем, что индивидуальный проект может занимать по времени не только один или два года, как это указано в ФГОС, но и 3-4 недели, а выполнять проект может и один учащийся или команда из нескольких человек. В этом случае за один год учащиеся могут выполнить несколько проектов, относящихся к разным вопросам математики и её приложений. Если же система проектов, выполняемых учащимися, покрывает основное содержание обучения, то в этом случае можно говорить об обучении через проекты, или проектном обучении.

При этом индивидуальные проекты должны отвечать следующим требованиям.

I. Тема проекта должна быть интересна для учащихся, создавать мотивацию для её исследования.

II. Проект должен соответствовать целям и задачам обучения, учитывать индивидуальные и возрастные особенности учащихся, опираться на пройденный учебный материал.

III. Содержание проекта должно быть значимым с точки зрения математического образования и с точки зрения математики или её приложений. Оно может расширять и углублять основное содержание школьного курса математики, отражать некоторые современные направления математики, иметь исторический, научно-популярный или прикладной характер.

IV. Методы исследования, используемые в проекте, должны быть доступны для учащихся.

V. Учащиеся должны быть обеспечены литературой, интернет-ресурсами, заданиями для самостоятельной работы и другими учебными материалами для выполнения проекта.

VI. Проект должен допускать выбор индивидуальной траектории его выполнения учащимися таким образом, что переход к следующему этапу выполнения проекта зависит от выполнения предыдущего этапа.

VII. Время, отводимое на проект, должно соответствовать объёму работы, необходимому для выполнения этого проекта.

VIII. Проект должен предполагать объективную оценку его выполнения, например, балльно-рейтинговую систему оценивания выполнения заданий проекта.

Работа учащегося над проектом включает в себя следующие этапы.

1. Выбор темы.
2. Знакомство с литературой, интернет-ресурсами и другими источниками по выбранной теме.
3. Изучение теоретического материала.
4. Выполнение предложенных заданий и решение задач.
5. Ответы на вопросы.
6. Оформление проекта.
7. Выступление с докладом о результатах выполнения проекта или сдача экзамена.

В качестве примера проекта рассмотрим примерное содержание проекта «Окружность Эйлера», рассчитанный на выполнение в течение одного месяца.

Этот проект можно предложить учащимся после изучения теоремы Пифагора, подобия треугольников, замечательных точек и линий треугольника (вписанная и описанная окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот).

СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА

1. Исторические сведения о Л. Эйлере

Литература

1. Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер // Квант. – 1983 - № 10, 11.
2. Яковлев А.Я. Леонард Эйлер. – М.: Просвещение. 1983.
3. https://ru.wikipedia.org

2. Замечательные точки и линии треугольника

- точка пересечения высот (ортоцентр);
- точка пересечения медиан (центроид);
- окружность, описанная около треугольника;

- окружность, вписанная в треугольник.

3. Окружность Эйлера.

Литература

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия, т. 1. – М.: МЦНМО, 2004.
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2006.

Задания для самостоятельной работы

1. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 1.

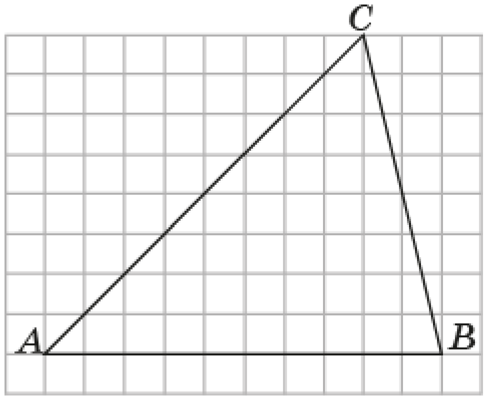

Рис. 1

2. Отметьте основания медиан A_1, B_1, C_1, лежащие против вершин соответственно A, B, C треугольника ABC.

3. Проведите высоты CC_2, BB_2, AA_2 и отметьте точку H их пересечения.

4. Отметьте середины A_3, B_3, C_3 соответственно отрезков AH, BH, CH.

5. Через точки C_1, C_2, C_3 проведите окружность. Где находится её центр?

Оказывается, что точки A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 также принадлежат этой окружности. Она называется ***окружностью Эйлера***.

6. Докажите, что точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.
7. Докажите, что точка A_3 принадлежит окружности Эйлера.
8. Докажите, что точка A_2 принадлежит окружности Эйлера.
9. Докажите, что точки B_1, B_2, B_3 принадлежат окружности Эйлера.
10. Найдите радиус полученной окружности Эйлера, считая стороны клеток равными 1.
11. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 2. Отметьте нужные точки и проведите через них окружность Эйлера. Найдите её радиус, считая стороны клеток равными 1.

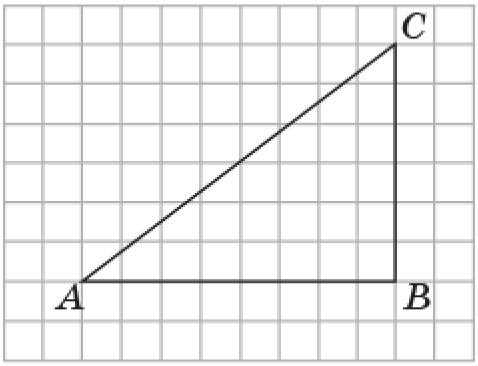

Рис. 2

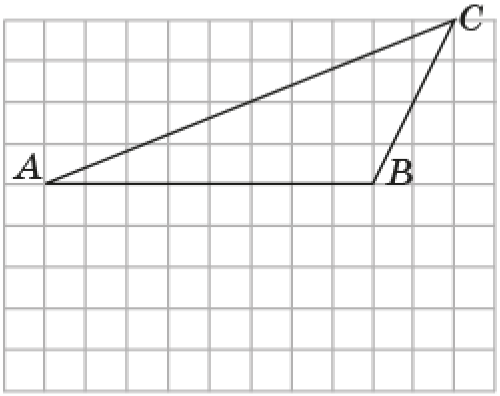

Рис. 3

12. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как показано на рисунке 3. Отметьте нужные точки и проведите через них окружность Эйлера. Найдите ее радиус, считая стороны клеток равными 1.

13. Докажите, что центр N окружности Эйлера треугольника ABC является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр H и центр O описанной около этого треугольника окружности.

14. Докажите, что расстояние от точки O окружности, описанной около треугольника ABC до прямой AB равно половине расстояния от вершины C до ортоцентра H этого треугольника.

15. Докажите, что точка M пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку, соединяющему ортоцентр H и центр O описанной окружности этого треугольника, и делит этот отрезок в отношении 1 : 2, считая от точки O.

Прямая, проходящая через ортоцентр, центр окружности Эйлера, точку пересечения медиан и центр окружности, описанной около данного треугольника, называется ***прямой Эйлера.***

16. Докажите, что радиус окружности Эйлера треугольника в два раза меньше радиуса описанной около него окружности.

17. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABH, ACH, BCH совпадают.

Вопросы

1. Может ли окружность Эйлера треугольника проходить через вершину этого треугольника?

2. Окружность Эйлера треугольника проходит через его вершину. Что можно сказать об этом треугольнике?

3. Может ли окружность Эйлера треугольника совпадать с окружностью:

а) описанной около этого треугольника;

б) вписанной в этот треугольник?

4. Окружность Эйлера треугольника совпадает с окружностью, вписанной в этот треугольник. Что можно сказать об этом треугольнике?

5. Центр окружности Эйлера принадлежит высоте треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

6. Центр окружности Эйлера совпадает с ортоцентром треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

7. Центр окружности Эйлера принадлежит медиане треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

8. Центр окружности Эйлера совпадает с центроидом треугольника. Что можно сказать об этом треугольнике?

9. Может ли центр окружности Эйлера треугольника находиться:

а) внутри этого треугольника;

б) на стороне этого треугольника;

в) совпадать с вершиной треугольника;

г) вне этого треугольника?

10. Приведите пример треугольника, для которого центр окружности Эйлера:

а) находится на стороне этого треугольника;

б) совпадает с вершиной треугольника

в) находится вне этого треугольника.

Ответы на задания для самостоятельной работы

2. Точки показаны на рисунке 4.

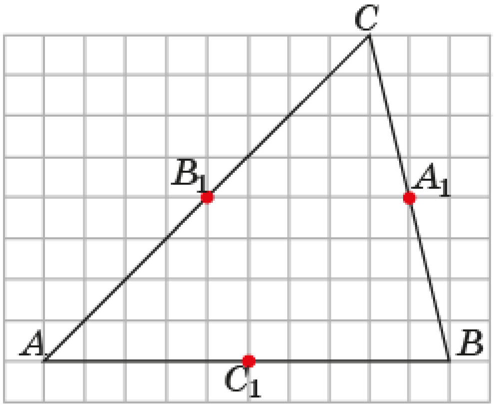

Рис. 4

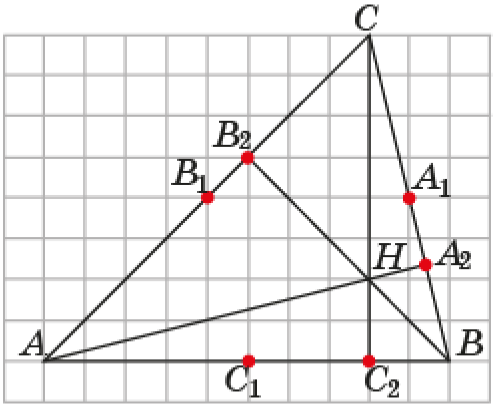

Рис. 5

3. Точки показаны на рисунке 5.

4. Точки показаны на рисунке 6.

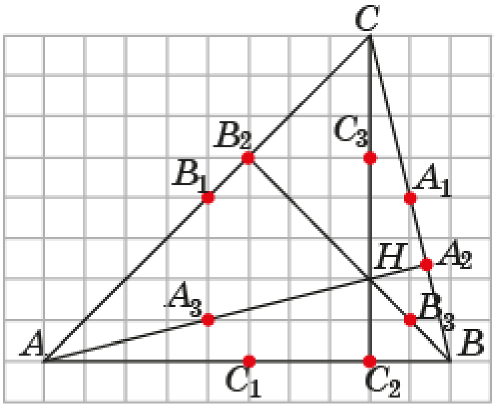

Рис. 6

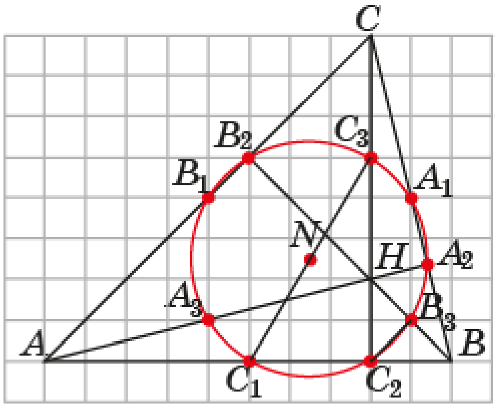

Рис. 7

5. Центр N окружности Эйлера находится в середине отрезка C_1C_3 (рис. 7).

6. Проведём отрезки A_1C_1 и A_1C_3 (рис. 8). Так как C_1C_3 – диаметр окружности Эйлера, то для того чтобы доказать, что точка A_1 принадлежит этой окружности, достаточно доказать, что угол $C_1A_1C_3$ прямой.

Отрезок A_1C_1 является средней линией треугольника ABC. Следовательно, прямая A_1C_1 параллельна прямой AC.

Отрезок A_1C_3 является средней линией треугольника BCH. Следовательно, прямая A_1C_3 параллельна прямой BH.

Прямые AC и BH перпендикулярны. Следовательно, перпендикулярны прямые A_1C_1 и A_1C_3. Значит, угол $C_1A_1C_3$ прямой и точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.

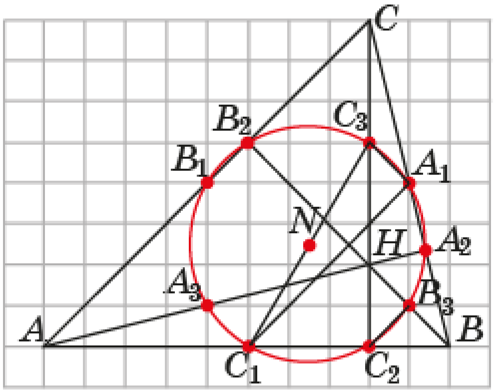

Рис. 8

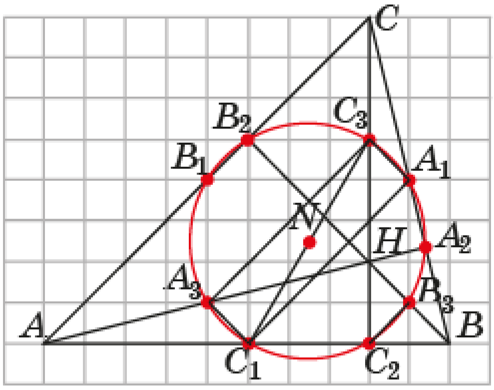

Рис. 9

7. Проведём отрезки A_3C_1 и A_3C_3 (рис. 9). Так как C_1C_3 – диаметр окружности Эйлера, то для того чтобы доказать, что точка A_3 принадлежит этой окружности, достаточно доказать, что угол $C_1A_3C_3$ прямой.

Отрезок A_3C_3 является средней линией треугольника ACH. Следовательно, прямая A_3C_3 параллельна прямой AC.

Отрезок A_3C_1 является средней линией треугольника ABH. Следовательно, прямая A_3C_1 параллельна прямой BH.

Прямые AC и BH перпендикулярны. Следовательно, перпендикулярны прямые A_3C_3 и A_3C_1. Значит, угол $C_1A_3C_3$ прямой и точка A_1 принадлежит окружности Эйлера.

8. Проведём отрезок A_1A_3 (рис. 10).

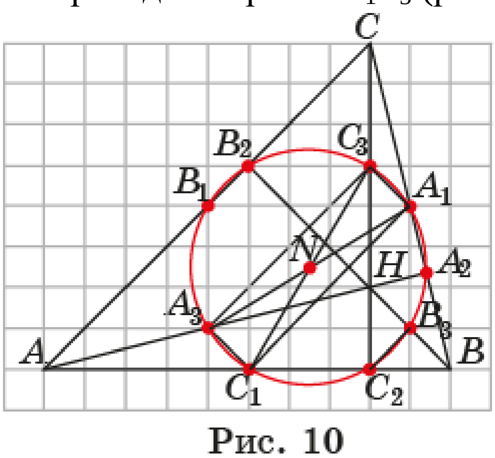

Рис. 10

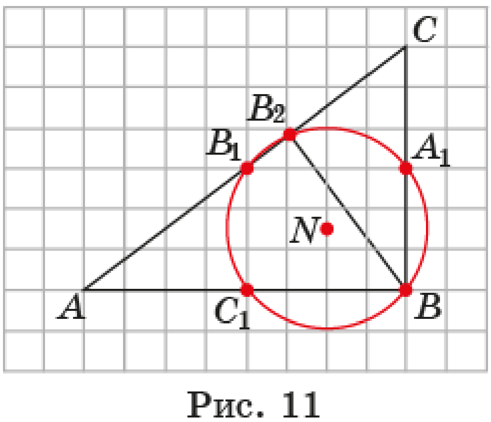

Рис. 11

Четырёхугольник $A_1C_1A_3C_3$ – прямоугольник. Следовательно, отрезок A_1A_3 проходит через середину отрезка C_1C_3, т. е. является диаметром окружности Эйлера. Угол $A_1A_2A_3$ прямой. Следовательно, точка A_2 принадлежит окружности Эйлера.

9. Доказательство аналогично доказательству для точек A_1, A_2, A_3.

10. $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

11. Окружность показана на рисунке 11. Её радиус равен 2,5.

12. Окружность показана на рисунке 12. Её радиус равен $\frac{\sqrt{145}}{4}$.

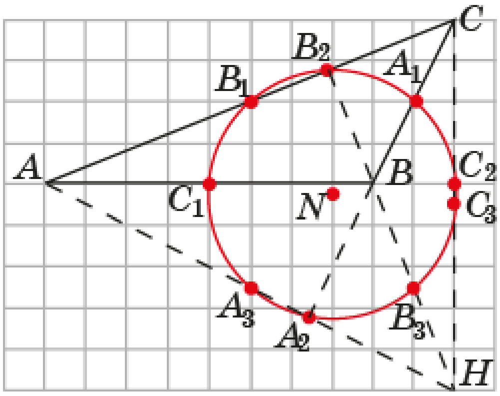

Рис. 12

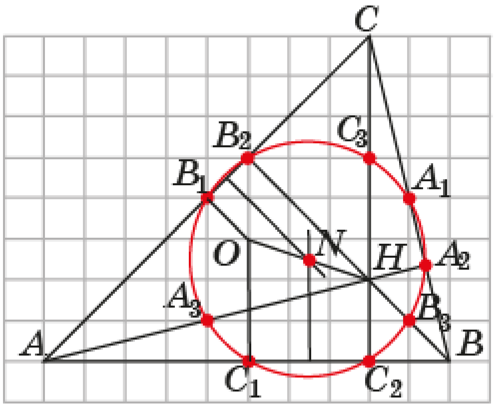

Рис. 13

13. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 13). Серединный перпендикуляр к хорде C_1C_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Таким образом, середина отрезка OH является точкой пересечения двух диаметров окружности Эйлера, т. е. является её центром.

14. При введённых ранее обозначениях в треугольнике ABC проведём отрезок C_1C_3 (рис. 14). Треугольники C_1NO и C_3NH равны по двум сторонам и углу между ними ($C_1N = C_3N$, $ON = HN$, $\angle C_1NO = \angle C_3NH$). Следовательно, $C_1O = C_3H = \frac{1}{2}CH$.

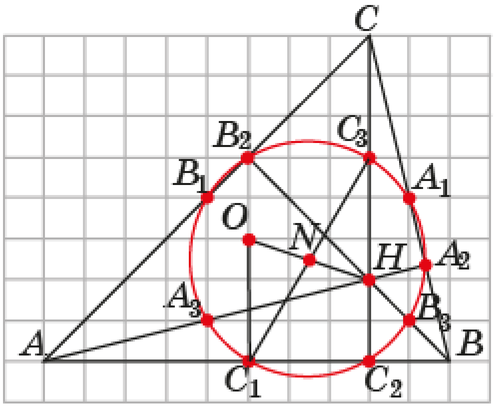

Рис. 14

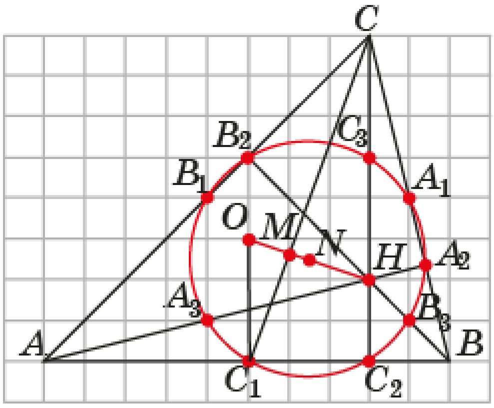

Рис. 15

15. При введённых ранее обозначениях в треугольнике ABC проведём медиану CC_1 (рис. 15). Обозначим M её точку пересечения с отрезком OH. Треугольники CHM и C_1OM подобны, $C_1O = C_3H = \frac{1}{2}CH$. Следовательно,

$C_1M : MC = 1 : 2$. Значит, M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Кроме того, $OM : MH = 1 : 2$.

16. Окружность Эйлера треугольника ABC является окружностью, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, сторонами которого являются средние линии треугольника ABC (рис. 16). Так как стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в два раза меньше сторон треугольника ABC, то и радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

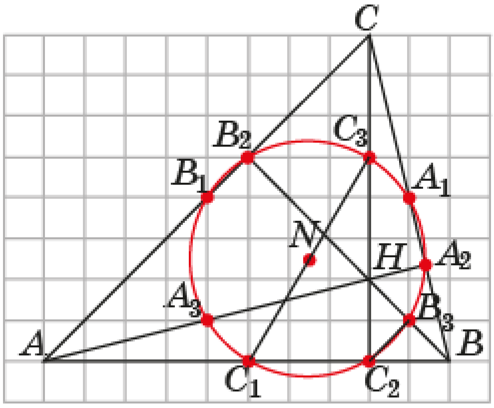

Рис. 16

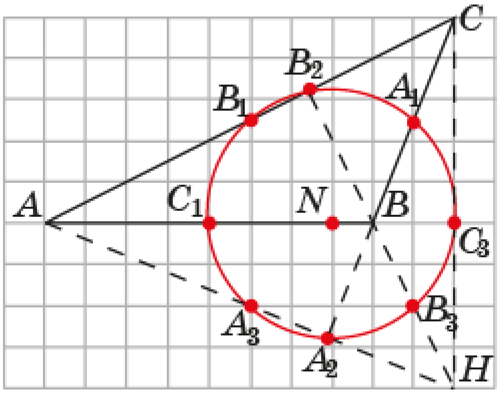

Рис. 17

17. Докажем, например, что окружности Эйлера треугольников ABC и ABH совпадают. Действительно, основаниями высот треугольника ABH являются точки A_2, B_2, C_2 (рис. 16). Окружность Эйлера треугольника ABH проходит через эти точки, следовательно, она совпадает с окружностью Эйлера треугольника ABC. Аналогично доказывается, что окружности Эйлера треугольников ABC, ACH и BCH совпадают.

Ответы на вопросы

1. Да.
2. Треугольник прямоугольный.
3. а) Нет; б) да.
4. Треугольник равносторонний.
5. Треугольник равнобедренный.
6. Треугольник равносторонний.
7. Треугольник равнобедренный.
8. Треугольник равносторонний.
9. а), б), в), г) Да.
10. Пример треугольника показан на рисунке: а) 17; б) 11; в) 12.

Литература

1. *Гиндикин С.Г.* Леонард Эйлер // Квант. – 1983 - № 10, 11.
2. *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
3. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия, т. 1. – М.: МЦНМО, 2004.
4. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2006.
5. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. – М.: Дрофа, 2012.
6. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. – М.: Просвещение. 1983.
7. https://ru.wikipedia.org