В.А. Смирнов, И.М. Смирнова
МПГУ,
v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ (7–9 КЛАССЫ)

В статье предлагаются комбинаторные задачи по геометрии, решение которых развивает комбинаторные представления и мышление учащихся 7–9 классов.

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новую Примерную рабочую программу основного общего образования (Математика) [1]. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике. Изучение основ комбинаторики развивает навыки организации перебора и подсчёта числа вариантов, в том числе, в прикладных задачах.

Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания. Здесь мы рассмотрим комбинаторные задачи по геометрии для учащихся 7–9 классов, направленные на формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления обучающихся. Часть из них имеется в учебнике геометрии [2]. Рекомендуем также книгу [3], в которой имеются комбинаторные задачи по геометрии повышенного уровня трудности.

1. Прямые. Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием уровня трудности.

1.1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трёх; б) четырёх; в) пяти точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Ответ: а) 3; б) 6; в) 10 (рис. 1).

1.2*. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

Решение. Пусть A_1, ..., A_n – n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$. Заметим, что

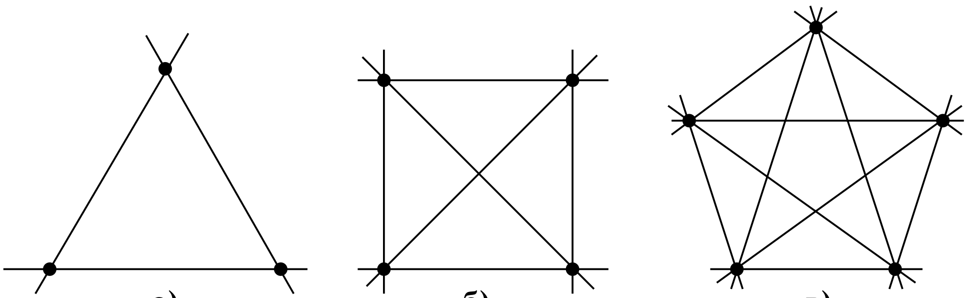

а) б) в)

Рис. 1

рассуждения, проведённые для точки A_1, справедливы для любой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число подсчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$. Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n - 1) = 6$, а число прямых, на самом деле, равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчёте мы каждую прямую подсчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Приведём ещё одно решение этой задачи. Выясним, на сколько увеличивается число прямых при добавлении новой точки к данным. Через две точки проходит одна прямая. Если к данным точкам добавляется третья точка, то к этой прямой добавляются две прямые, проходящие через третью точку и одну из двух данных. Аналогично, если добавить n-ю точку A_n к данным $n - 1$ точкам $A_1, \ldots, A_{n-1}$, то к числу прямых, проходящих через различные пары из точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$, добавятся $n - 1$ прямых, проходящих через точку A_n и одну из точек. Общее число прямых равно сумме $1 + 2 + \ldots + (n - 1)$. Она равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, имеет место формула

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Эта формула применяется при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задаётся двумя точками, то мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значения, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2.

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2=190$.

Полученная формула является частным случаем формулы для числа сочетаний C_n^k из n элементов по k. Она показывает, сколькими способами можно выбрать k элементов из данных n элементов.

Для её вывода рассмотрим сначала формулу для числа размещений (упорядоченных наборов) A_n^k из n элементов по k.

Первый элемент из данных n элементов можно выбрать n способами; второй элемент из оставшихся $n - 1$ элемента можно выбрать $n - 1$ способом; ...; k-й элемент из оставшихся $n - k + 1$ элементов можно выбрать $n - k + 1$ способом. Следовательно, упорядоченный набор, состоящий из k элементов, можно выбрать $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ способом, то есть имеет место формула

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1).$$

В частности, число упорядоченных наборов, из k элементов по k равно $k(k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, то есть равно $k!$.

Следовательно, число сочетаний (неупорядоченных наборов) C_n^k из элементов по k будет выражаться формулой

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Выведем следующее важное соотношение между числами сочетаний:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Для этого зафиксируем какой-нибудь элемент из данных n элементов. Тогда число способов, которыми можно выбрать k элементов из оставшихся $n - 1$ элементов, равно C_{n-1}^k. Число способов, которыми можно выбрать k элементов, в которые входит зафиксированный элемент, равно числу способов, которыми можно выбрать $k - 1$ элемент из оставшихся $n - 1$ элементов, то есть равно C_{n-1}^{k-1}. Общее число способов, которыми можно выбрать k элементов из данных n элементов равно сумме $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, то есть имеет место искомое равенство.

Следующая серия задач связана с числом попарных пересечений прямых на плоскости. Из сформулированной выше аксиомы непосредственно следует, что две прямые могут иметь не более одной общей точки.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием степени трудности.

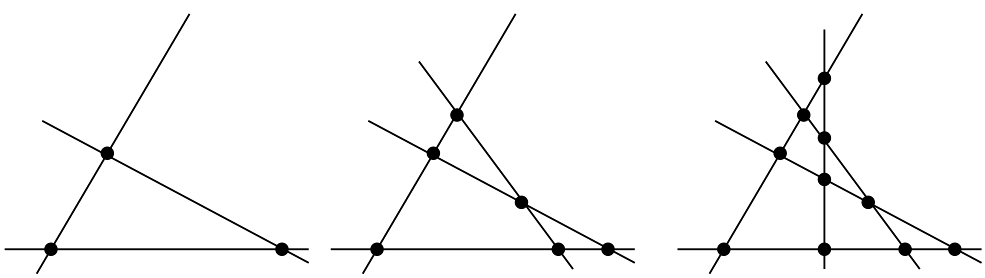
1.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) три; б) четыре; в) пять прямых?

О т в е т: а) 3; б) 6; в) 10 (рис. 2).

1.4*. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Р е ш е н и е. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 1.2. Так как всего прямых n, и на каждой прямой $n - 1$ точка, то их общее число будет



а) б) в)

Рис. 2

равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку каждую точку мы подсчитали дважды, число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ещё одной аксиомой, относящейся к взаимному расположению прямых на плоскости, является аксиома о том, что прямая разбивает плоскость на две части. При этом, если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой, а если точки принадлежат одной части, то отрезок, их соединяющий, не пересекается с прямой.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

1.5. На сколько частей разбивают плоскость: а) три; б) четыре; в) пять попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Ответ: а) 7; б) 11; в) 16 (рис. 2).

1.6*. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счёт того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырёх частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $7 = 4 + 3$. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я прямая пересекается с $n - 1$ прямой, то она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n. Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно $4 + 3 + \ldots + n$.

Используя формулу для числа сочетаний, находим искомое число частей

$$4 + 3 + \ldots + n =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

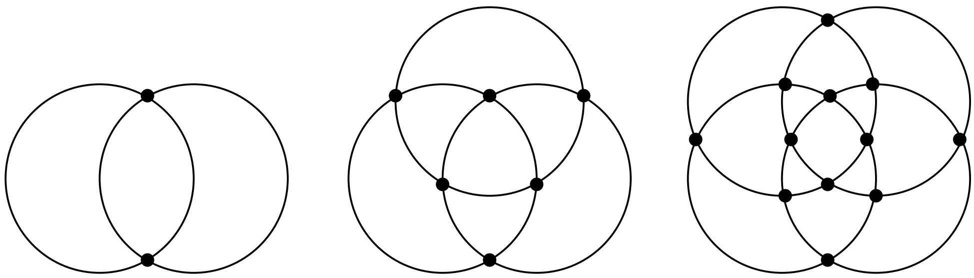
2. Окружности. Вместо прямых на плоскости можно рассмотреть окружности и выяснить количество их точек пересечения.

2.1. Сколько окружностей проходит через различные тройки из: а) трёх; б) четырёх; в) пяти; г)* n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой и никакие четыре из них не принадлежат одной окружности?

Решение. Так как каждая окружность однозначно задаётся тремя точками, не принадлежащими одной прямой, то искомое число окружностей равно числу сочетаний из n элементов по 3, то есть равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

2.2. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь: а) две; б) три; в) четыре окружности?

Ответ: а) 2; б) 6; в) 12 (рис. 3).



а) б) в)

Рис. 3

2.3*. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей?

Р е ш е н и е. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая окружность пересекается с каждой, и при этом никакие три окружности не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая окружность имеет $2(n - 1)$ точку пересечения с остальными окружностями. Число точек попарных пересечений будет равно

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1) = n(n - 1).$$

2.4. На сколько частей разбивают плоскость: а) две; б) три; в) четыре попарно пересекающиеся окружности, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

О т в е т: а) 4; б) 8; в) 14 (рис. 3).

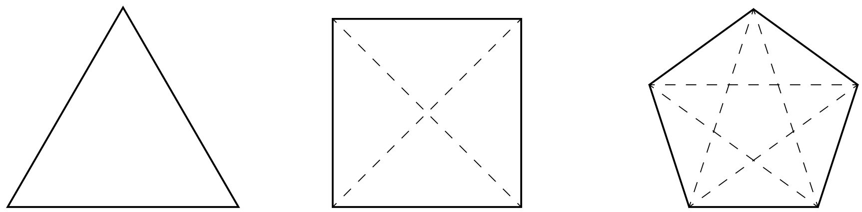
2.5*. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Р е ш е н и е. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой окружности к данным. Это увеличение происходит за счёт того, что какие-то части плоскости разбиваются новой окружностью на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся окружности, то при добавлении третьей окружности все четыре части плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $8 = 4 + 4$. При добавлении четвёртой окружности шесть частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $14 = 8 + 6$. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой окружностью, равно количеству дуг новой окружности, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися окружностями. Каждая такая дуга новой окружности разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я окружность пересекается с $n - 1$ окружностью, то она разбивается на $2(n - 1)$ дуг и поэтому число частей плоскости увеличивается на $2(n - 1)$. Таким образом, общее число частей, на которые n окружностей разбивают плоскость, равно $4 + 4 + 6 + \ldots$ $\ldots + 2(n - 1) = 2(2 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) =$ $= n(n - 1) + 2$.

3. Ломаные и многоугольники. При рассмотрении многоугольников и их общих свойств учащимся можно предложить следующие комбинаторные задачи.

3.1. Сколько диагоналей имеет: а) треугольник; б) четырёхугольник; в) пятиугольник?

О т в е т: а) 0; б) 2; в) 5 (рис. 4).



а) б) в)

Рис. 4

3.2*. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

Р е ш е н и е. Зафиксируем какую-нибудь вершину n-угольника. Учитывая, что диагональю является отрезок, соединяющий не соседние вершины многоугольника, получаем, что через данную вершину проходит $n - 3$ диагонали. Поскольку общее число вершин равно n, через каждую из них проходит $n - 3$ диагонали, и при таком подсчете каждая диагональ считается дважды, получаем, что общее число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

3.3. В правильном пятиугольнике провели все диагонали (рис. 4, в). Сколько треугольников при этом образовалось?

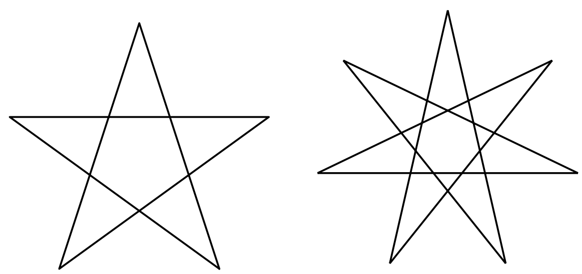
Р е ш е н и е. Число треугольников, две стороны которых являются сторонами правильного пятиугольника, равно 5. Число треугольников, только одна сторона которых является стороной правильного пятиугольника, равно 20. Число треугольников, стороны которых не являются сторонами правильного пятиугольника, равно10. Общее число треугольников равно 35.

3.4. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная с: а) пятью; б) семью; в)* $2n + 1$ сторонами?

Р е ш е н и е. Каждая сторона ломаной может пересекаться только со сторонами, не являющимися соседними с данной. Таких сторон у $(2n + 1)$-сторонней ломаной $2n - 2$. Значит, число точек самопересечения не превосходит

$$\frac{(2n+1)\cdot(2n-2)}{2} = (2n+1)(n-1).$$

Для построения такой ломаной можно разделить окружность на $2n + 1$ равных частей и соединить точки деления замкнутой ломаной, углы при вершинах которой равны $\frac{180°}{2n+1}$. На рисунке 5 показаны примеры таких ломаных с пятью и семью сторонами.

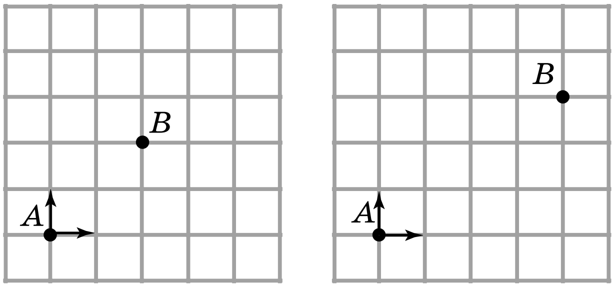


а) б)

Рис. 5

3.5. Сколько имеется путей, соединяющих точки A и B, проходящих по сторонам сетки, если двигаться можно только в направлениях, указанных стрелками (рис. 6)?

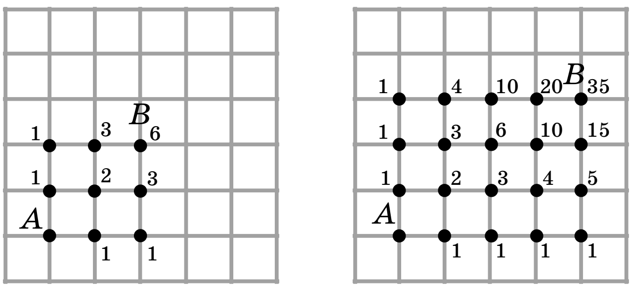
Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала ближайшие к точке A вершины сетки. Количество путей из точки A в эти вершины равно 1. Будем последовательно брать всё



а) б)

Рис. 6

более удалённые вершины сетки. Заметим, что число путей, соединяющих вершину A с вершиной сетки, равно сумме числа путей, соединяющих вершину A с вершинами, расположенными снизу и слева от данной вершины. В результате получаем, что число путей, соединяющих точки A и B на рисунке а) равно 6, а на рисунке б) оно равно 35 (рис. 7).



а) б)

Рис. 7

Бесконечная таблица чисел, расположенных так, как показано на рисунке 8, которую мы использовали при решении данной задачи, называется треугольником Паскаля.

На сторонах этой таблицы, выходящих из вершины A, стоят единицы. Для остальных точек соответствующие числа равны сумме чисел, стоящих снизу и слева от данных чисел.

Из этого можно вывести формулу для числа, стоящего в n-м столбце и k-й строке. Если эти числа обозначить T_n^k, то для них будет иметь место равенство

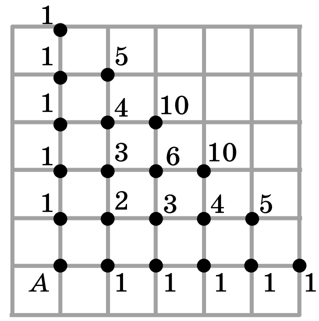


Рис. 8

$$T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k.$$

Следовательно, они будут совпадать с числами C_n^k, то есть будет иметь место формула

$$T_n^k = C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Для более подробного знакомства с треугольником Паскаля рекомендуем книгу [4].

3.6. Сколько имеется путей, соединяющих точки A и B, проходящих по сторонам сетки, если двигаться можно только в направлениях, указанных стрелками (рис. 9)?

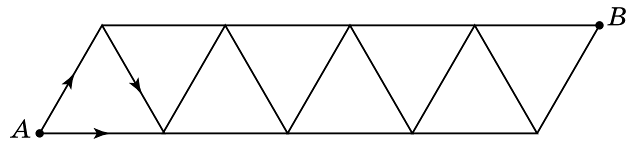


Рис. 9

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала ближайшие к точке A вершины сетки (рис. 10).

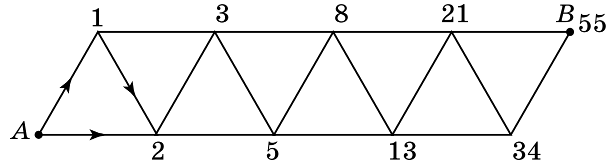


Рис. 10

Количество путей из точки A в эти вершины равно 1 и 2. Будем последовательно брать всё более удалённые вершины сетки. Заметим, что число путей, соединяющих вершину A с вершиной сетки, равно сумме числа путей, соединяющих вершину A с пройденными соседними вершинами. В результате получаем, что число путей, соединяющих точки A и B, равно 55.

Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Обладают тем свойством, что каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Эти числа называются числами Фибоначчи по имени итальянского математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи).

Такие числа возникают во многих задачах, в частности, в задаче о кроликах, которой занимался Фибоначчи. Для знакомства с этими числами рекомендуем книгу [5].

Список источников

1. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика, http://www.instrao.ru/primer

2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия: учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2019.

3. *Шклярский Д.О.* и др. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.

4. *Успенский В.А.* Треугольник Паскаля. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.

5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — 6-е изд. — М.: Наука, 1992.

МАТЕМАТИКИ ШУТЯТ

Проще простого

Заболела учительница русского языка. На замену поставили математика, он пришёл на урок и стал объяснять падежи.

— Именительный: кто? что? — начинает перечислять он. — Родительный: кого? чего? Дательный: кому?.. — а дальше не помнит.

Тогда он непринужденно говорит:

— Выведем второй вопрос из имеющихся данных. Обозначим неизвестное слово через X и составим пропорцию:

кого — чего

кому — X,

откуда X = чего • кому / кого. Теперь ко и го сокращаем и получаем X = чему. Итак, дательный падеж — кому? чему?

Математики тоже шутят/ Автор-сост. С.Н. Федин. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2009. — 208 с.

* * *

Таблица умножения

Известный немецкий алгебраист Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893) очень плохо умел считать в уме. Если при чтении лекции ему надо было выполнить простенький расчёт, он обычно прибегал к помощи студентов.

Однажды ему надо было умножить 7 на 9. Он начал вслух рассуждать:

— Гм... это не может быть 61, потому что 61 — простое число. Это не может быть и 65, потому что 65 делится на 5. 67 — тоже простое число, а 69 — явно слишком много. Остается только 63...

(Цит. по книге: Kutzler B. B. Mathematikerwitze & Mathematikwitze. 2006; перевод Ю. Фролова.)