В КАКИХ ОТНОШЕНИЯХ МОГУТ ДЕЛИТЬ ДРУГ ДРУГА БИССЕКТРИСЫ, МЕДИАНЫ И ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА?

В.А. Смирнов, д.ф.-м.н.,
И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет;
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov,
I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University;
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: точки пересечения, биссектрисы, медианы, высоты треугольника

Keywords: intersection points, bisectors, medians, heights of a triangle

Аннотация: в работе рассматриваются задачи, в которых требуется выяснить, в каких отношениях могут делить друг друга биссектрисы, медианы и высоты треугольника точками их пересечения

Abstract: the paper considers problems in which it is necessary to find out in what relations bisectors, medians and heights of a triangle can divide each other by their intersection points

DOI:

В школьном курсе геометрии доказывается, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершин. Здесь же мы выясним, в каких отношениях могут делить друг друга биссектрисы, медианы и высоты треугольника точками их пересечения.

Предложенные задачи могут быть использованы для организации исследовательской деятельности обучающихся, при проведении обобщающего повторения и подготовке к ОГЭ.

Задача 1. В каком отношении точка O пересечения биссектрис AA_1 и CC_1 треугольника ABC может делить биссектрису CC_1?

Р е ш е н и е. Обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Выразим отношение $CO : OC_1$ через эти стороны. Для этого через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 1).

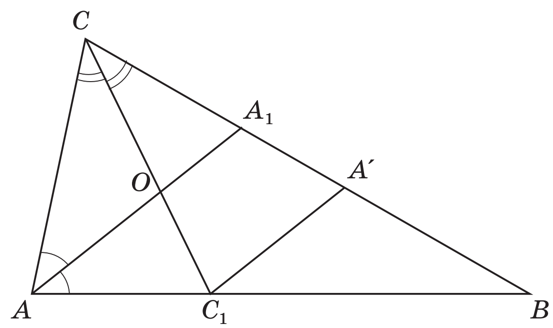

Рис. 1

По свойству биссектрисы треугольника точка C_1 делит отрезок AB в отношении $b : a$. По теореме о пропорциональных отрезках точка A' делит отрезок A_1B в отношении $b : a$. Следовательно, для не-

Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

которого числа t выполняются равенства $A_1A' = bt$, $A'B = at$. Так как точка A_1 делит отрезок BC в отношении $c : b$, то имеет место равенство

$$CA_1 = \frac{b}{c} \cdot BA_1 = \frac{b(a+b)t}{c}.$$

Тогда отношение $CA_1 : A_1A'$ равно $\frac{a+b}{c}$. Следовательно, отношение $CO : OC_1$ также равно $\frac{a+b}{c}$.

Из этого, в частности, следует, что это отношение не может быть меньше или равно 1 и может принимать любое значение, большее 1.

Задача 2. В каком отношении может делить биссектриса треугольника его медиану?

Р е ш е н и е. Предположим, что биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает медиану CC_1 в точке O. Обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Выразим отношение $CO : OC_1$ через эти стороны. Для этого через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 2).

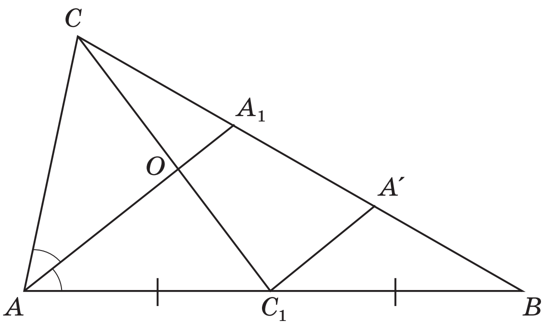

Рис. 2

Тогда отрезок C_1A' является средней линией треугольника ABA_1. Следовательно, $A_1A' = A'B$. По свойству биссектрисы треугольника точка A_1 делит отрезок BC в отношении $CA_1 : A_1B = b : c$. Значит, $CA_1 : A_1A' = 2b : c$. По теореме о пропорциональных отрезках получаем равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{2b}{c}.$$

Это отношение может принимать любые значения, большие нуля. В частности, оно равно 1, если $c = 2b$, равно 2, если $b = c$.

Задача 3. В каком отношении биссектриса треугольника может делить его высоту?

Р е ш е н и е. Предположим, что биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает высоту CC_1 в точке O (рис. 3).

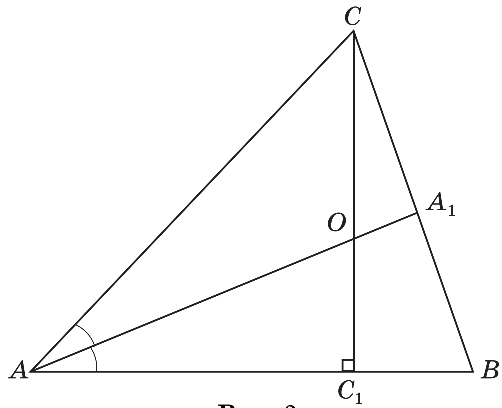

Рис. 3

Так как AO – биссектриса треугольника ACC_1, то имеют место равенства

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{1}{\cos A}.$$

Следовательно, отношение $\frac{CO}{OC_1}$ может принимать любое значение, большее единицы. В частности, биссектриса не может проходить через середину высоты.

Рассмотрим теперь медиану треугольника. Выясним, в каких отношениях медиана может делить биссектрису и высоту.

Задача 4. В каком отношении медиана треугольника может делить его биссектрису?

Р е ш е н и е. Предположим, что медиана AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке O (рис. 4).

© Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

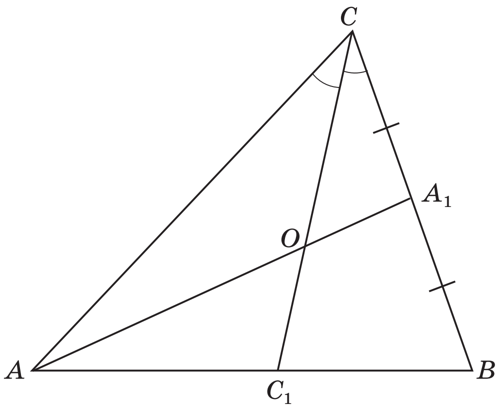

Рис. 4

Если бы точка O была серединой биссектрисы CC_1, то отрезок OA_1 был бы средней линией треугольника BCC_1. Следовательно, прямая OA_1 была бы параллельна прямой AB, что неверно. Значит, медиана треугольника не может проходить через середину биссектрисы.

Для нахождения возможных значений отношения $CO : OC_1$ обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1 и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 5).

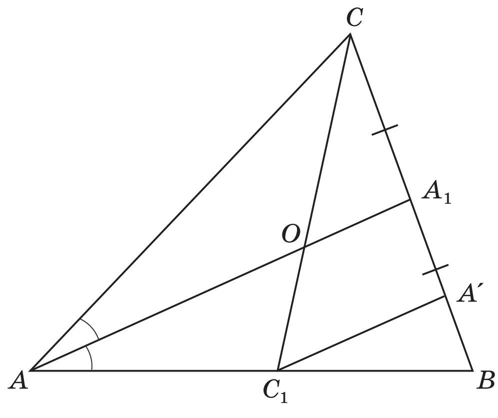

Рис. 5

По свойству биссектрисы треугольника точка C_1 делит отрезок AB в отношении $b : a$. По теореме о пропорциональных отрезках точка A' делит отрезок A_1B в отношении $b : a$. Следовательно, для некоторого числа t выполняются равенства $A_1A' = bt$, $A'B = at$. Так как точка A_1 – середина отрезка BC, то имеет место равенство

$$\frac{CA_1}{A_1A'} = \frac{(a+b)t}{bt} = \frac{a}{b} + 1.$$

Следовательно, отношение $CO : OC_1$ также равно $\frac{a}{b} + 1$.

Из этого, в частности, следует, что это отношение не может быть меньше или равно единицы и может принимать любое значение, большее единицы.

Задача 5. В каком отношении может делить медиана треугольника его высоту?

Р е ш е н и е. Предположим, что медиана AA_1 треугольника ABC пересекает высоту CC_1 в точке O (рис. 6). Для нахождения возможных значений отношения $CO : OC_1$ обозначим стороны треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную прямой AA_1, и обозначим A' её точку пересечения со стороной BC (рис. 7).

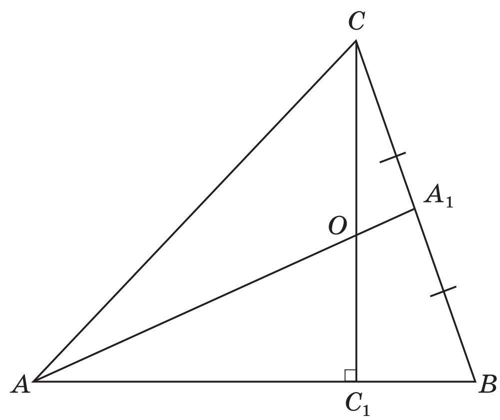

Рис. 6

Тогда $AC_1 = b \cdot \cos A$, $BC_1 = a \cdot \cos B$. Следовательно, для некоторого числа t выполняются равенства $A_1A' = t \cdot b \cdot \cos A$,

⦿ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

$A'B = t \cdot a \cdot \cos B$. Так как точка A_1 – середина отрезка BC, то имеет место равенство $t \cdot b \cdot \cos A + t \cdot a \cdot \cos B = \frac{a}{2}$. Учитывая, что $b \cdot \cos A + a \cdot \cos B = c$, находим $t = \frac{a}{2c}$, значит, $A_1A' = \frac{a \cdot b \cdot \cos A}{2c}$. По теореме о пропорциональных отрезках отношение $CO : OC_1$ равно отношению $CA_1 : A_1A'$ и равно $\frac{c}{b \cdot \cos A}$.

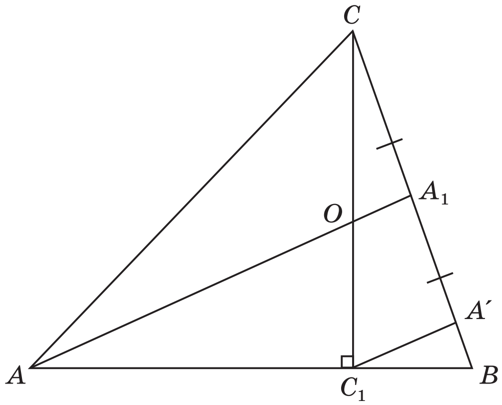

Рис. 7

Поскольку точка C_1 может находиться в любом месте внутри отрезка AB, то это отношение может принимать любые значения, большие 1. Если предположить, что $\frac{c}{b \cdot \cos A} < 1$, то в этом случае угол B будет тупым, а медиана AA_1 и высота CC_1 не будут иметь общих точек. Если $\frac{c}{b \cdot \cos A} = 1$, то в этом случае угол B прямой, высота CC_1 совпадает со стороной CB, а медиана AA_1 будет иметь с этой высотой общую точку A_1.

Таким образом, отношение $CO : OC_1$ может принимать любые значения, больше или равные 1.

Рассмотрим теперь высоту треугольника и выясним, в каких отношениях она может делить биссектрису, медиану и высоту.

Задача 6. В каком отношении точка O пересечения высот AA_1 и CC_1 треугольника ABC может делить высоту CC_1?

Р е ш е н и е. Докажем, что отношение $CO : OC_1$ может принимать любое значение $k > 0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BCC_1 (рис. 8).

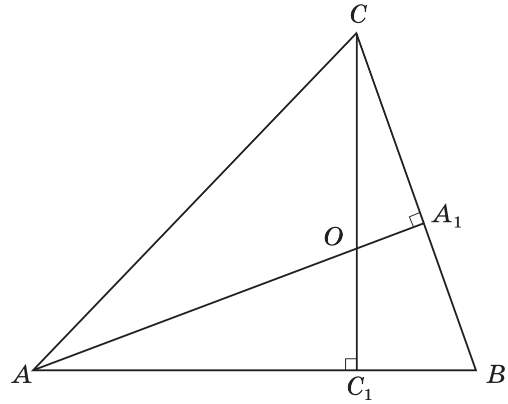

Рис. 8

Отметим на катете CC_1 точку O, делящую этот катет в отношении $\frac{OC}{OC_1} = k$. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную прямой BC. Найдём её точку A пересечения с прямой BC_1 – точку A. Треугольник ABC будет искомым треугольником, в котором точка O пересечения высот AA_1 и CC_1 треугольника ABC делит высоту CC_1 в отношении $\frac{OC}{OC_1} = k$.

Для треугольника ABC с заданными углами найдём отношение, в котором точка O пересечения высот AA_1 и CC_1 треугольника ABC делит высоту CC_1.

Из теоремы синусов, применённой к треугольникам AOC и ABC, следуют равенства

$$\frac{CO}{\cos\angle C} = \frac{CO}{\sin\angle OAC} =$$
$$= \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C}.$$

Следовательно, имеют место равенство

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

$CO = AB \cdot \operatorname{ctg} C$ аналогичное равенство $AO = BC \cdot \operatorname{tg} A$.

Кроме этого, имеет место равенство $OC_1 = AO \cdot \cos B$. Следовательно,

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{AB \cdot \operatorname{ctg} C}{BC \cdot \operatorname{ctg} A \cdot \cos B}.$$

Учитывая равенство $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}$, окончательно получаем

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{\cos C}{\cos A \cdot \cos B}.$$

Задача 7. В каком отношении высота треугольника может делить его биссектрису?

Р е ш е н и е. Обозначим O точку пересечения высоты AA_1 и биссектрисы CC_1 треугольника ABC. Докажем, что отношение $CO : OC_1$ может принимать любое значение $k > 0$. Рассмотрим острый угол с вершиной C (рис. 9).

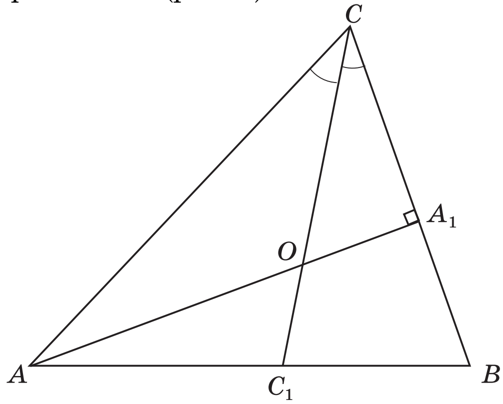

Рис. 9

Проведём биссектрису этого угла и отложим на ней отрезок CC_1. Отметим на этом отрезке точку O, делящую его в отношении $\frac{CO}{OC_1} = k.$ Через точку O проведём прямую, перпендикулярную одной стороне рассмотренного угла, и обозначим A_1 их точку пересечения. Обозначим A точку пересечения этой прямой с другой стороной угла. Через точки A и C_1 проведём прямую и обозначим B её точку пересечения с прямой CA_1. Треугольник ABC будет искомым треугольником, у которого высота AA_1 делит биссектрису CC_1 в отношении $\frac{CO}{OC_1} = k.$

Задача 8. В каком отношении высота треугольника может делить его медиану?

Р е ш е н и е. Обозначим O точку пересечения высоты AA_1 и медианы CC_1 треугольника ABC. Докажем, что отношение $CO : OC_1$ может принимать любое значение $k > 0$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABA_1 (рис. 10).

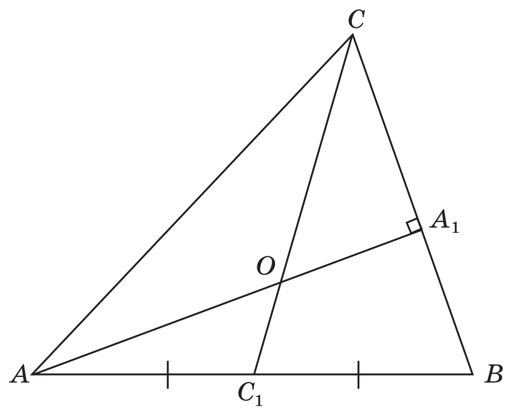

Рис. 10

На продолжении катета BA_1 отметим точку C. Соединим её отрезком с точкой A и с серединой C_1 гипотенузы AB. Обозначим O точку пересечения этого отрезка и катета AA_1. Получим треугольник ABC с высотой AA_1 и медианой CC_1. Заметим, что если точка C приближается к точке A_1, то отношение $\frac{CO}{OC_1}$ приближается к нулю. Если же точка C удаляется от точки A_1, то это отношение неограниченно растёт. Учитывая непрерывность изменения этого отношения, получаем, что оно может принимать любые значения, большие нуля.

Задача 9. Могут ли биссектриса, высота и медиана, проведённые из разных

⦿ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

вершин разностороннего треугольника, пересекаться в одной точке?

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, AA_1 – биссектриса, BB_1 – высота, CC_1 – медиана. Как следует из решения задачи 4 2 для точки O пересечения биссектрисы и медианы имеет место равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{2b}{c}.$$

Выясним, в каком случае высота BB_1 будет проходить через точку O. Через точку C_1' проведём прямую, параллельную BB_1, и обозначим B' её точку пересечения со стороной AC (рис. 11).

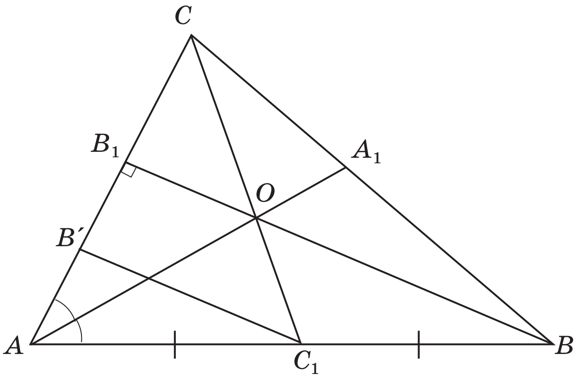

Рис. 11

Тогда имеют место равенства

$$CB_1 = a \cdot \cos C,\ B_1B' = \frac{c \cdot \cos A}{2}.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CB_1}{B_1B'} = \frac{2a \cdot \cos C}{c \cdot \cos A}.$$

Значит, для того чтобы высота BB_1 проходила через точку O, нужно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{2b}{c} = \frac{2a \cdot \cos C}{c \cdot \cos A},$$

которое эквивалентно равенству

$$B \cdot \cos A = a \cdot \cos C.$$

Построим треугольник ABC, в котором биссектриса AA_1, высота BB_1 и медиана CC_1 пересекаются в одной точке.

Для этого сначала построим прямоугольный треугольник ACC', в котором $AC = b$. На гипотенузе AC отложим отрезок $CB_1 = AC'$. Через точку B_1 проведём прямую, перпендикулярную прямой AC, и обозначим B её точку пересечения с прямой AC' (рис. 12). Треугольник ABC будет искомым. В нём

$$AC = b,\ AB = \frac{b - b \cdot \cos A}{\cos A} = b\left(\frac{1}{\cos A} - 1\right).$$

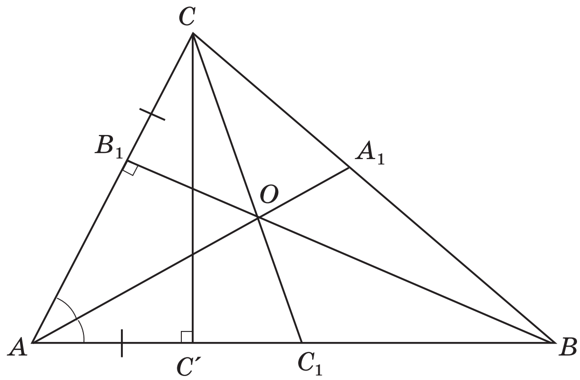

Рис. 12

В частности, из этого следует, что для фиксированного острого угла A существует единственный с точностью до подобия треугольник ABC, в котором биссектриса AA_1, высота BB_1 и медиана CC_1 пересекаются в одной точке.

© Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.