О ФОРМЕ ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет (МПГУ);
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University (MSPU);
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: футбольный мяч, усечённый икосаэдр, вписанная и описанная сферы.

Keywords: the soccer ball, a truncated icosahedron, inscribed and described spheres.

Аннотация: в работе рассматривается вопрос о форме футбольного мяча, которая является наилучшей с точки зрения её приближения к сфере.

Abstract: the paper considers the question about the shape of a soccer ball, which is the best in terms of its approximation to the sphere.

DOI:

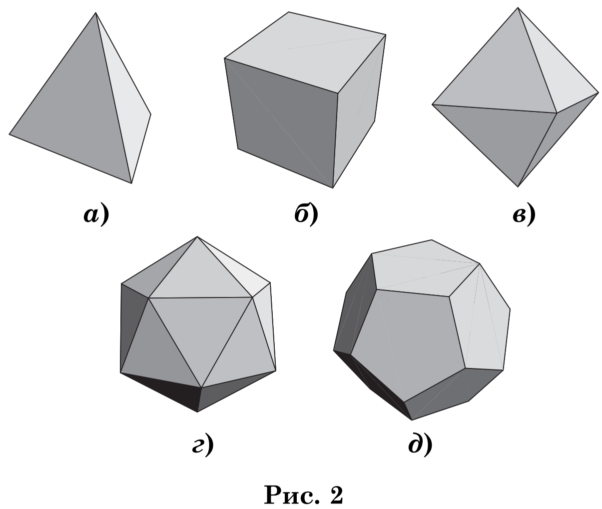
Считается, что поверхность футбольного мяча должна иметь форму, приближающуюся к сфере, радиус которой примерно равен 11 см. Обычно эта поверхность изготавливается в форме поверхности многогранника. Одна из таких поверхностей показана на рисунке 1.

Рис. 1

В данной работе мы выясним, поверхность какого многогранника даёт наилучшее приближение к сфере.

В случае, если поверхность многогранника можно заключить между описанной и вписанной сферами, то будем считать, что лучшее приближение даёт поверхность многогранника, у которой меньшая разность между радиусами этих сфер.

С этой точки зрения, рассмотрим сначала правильные многогранники (рис. 2).



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис. 2

Для единичного тетраэдра радиусы описанной и вписанной сфер равны соответственно $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. Их разность равна

$$\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Если радиус описанной сферы равен 11 см, эта разность будет равна

$$7\frac{1}{3} \approx 7{,}33 \text{ (см).}$$

Для единичного куба радиусы описанной и вписанной сфер равны соответственно $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$. Их разность равна $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Если радиус описанной сферы равен 11 см, эта разность будет равна

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot 11 \approx 4{,}65 \text{ (см).}$$

Для единичного октаэдра радиусы описанной и вписанной сфер равны соответственно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Их разность равна

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}.$$

Заметим, что если октаэдр и куб выбраны так, что радиус сферы, описанной около октаэдра, равен радиусу сферы, описанной около куба, то радиусы сфер, вписанных в октаэдр и куб, будут равны.

Если радиус сферы, описанной около октаэдра равен 11 см, то разность радиусов описанной и вписанной сфер будет равна $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot 11 \approx 4{,}65$ (см).

Для нахождения радиуса R_i сферы, описанной около единичного икосаэдра, рассмотрим прямоугольник $ABCD$, для которого стороны AB и CD – рёбра икосаэдра, они равны 1, а AD и BC – диагонали правильных пятиугольников, они равны $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (рис. 3).

Центром описанной сферы является середина O диагонали AC прямоугольника $ABCD$, а её радиус равен половине этой диагонали. Следовательно, радиус R_i сферы, описанной около икосаэдра, рёбра которого равны 1, выражается формулой

$$R_i = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}951.$$

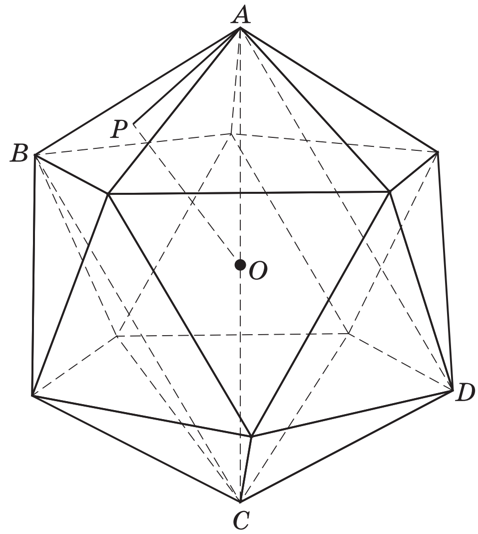


Рис. 3

Рис. 4

Для нахождения радиуса r_i сферы, вписанной в икосаэдр, опустим перпендикуляр OP на одну из граней этого икосаэдра. В прямоугольном треугольнике AOP (рис. 3) $P = r_i$, $OA = R_i$, $AP = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно,

$$r_i = \frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12} \approx 0,756.$$

Разность $R_i - r_i$ приближённо равна 0,195.

Если радиус описанной сферы равен 11 см, эта разность будет приближённо равна 2,25 см.

Можно доказать, что для единичного додекаэдра радиусы описанной и вписанной сфер равны соответственно

$$\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4} \approx 1,401 \text{ и } \frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20} \approx 1,114.$$

Их разность приближённо равна 0,287.

Непосредственные вычисления показывают, что если икосаэдр и додекаэдр выбраны так, что радиус сферы, описанной около икосаэдра, равен радиусу сферы, описанной около додекаэдра, то радиусы сфер, вписанных в икосаэдр и додекаэдр, будут равны.

Если радиус сферы, описанной около додекаэдра равен 11 см, то разность радиусов описанной и вписанной сфер будет приближённо равна 2,25 см.

Таким образом, из правильных многогранников наилучшие приближения к сфере дают икосаэдр и додекаэдр. Однако форма поверхности додекаэдра имеет преимущество по сравнению с формой поверхности икосаэдра, так как додекаэдр имеет меньше граней, и в каждой его вершине сходится меньше рёбер. В частности, на рисунке 1 изображён футбольный мяч, поверхность которого приблизительно имеет форму поверхности додекаэдра.

Имеются многогранники, дающие более хорошие приближения к сфере.

Одна из распространённых форм футбольного мяча изображена на рисунке 4.Она состоит из двенадцати «правильных пятиугольников» и двадцати «правильных шестиугольников».

Данную поверхность имеет один из полуправильных многогранников – усечённый икосаэдр (рис. 5). Он получается из икосаэдра отсечением от каждой вершины правильной пятиугольной пирамиды, боковые рёбра которой равны одной третьей ребра исходного икосаэдра. На рисунке 6 показано несколько таких отсечений.

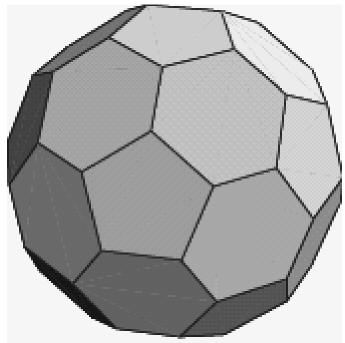


Рис. 5

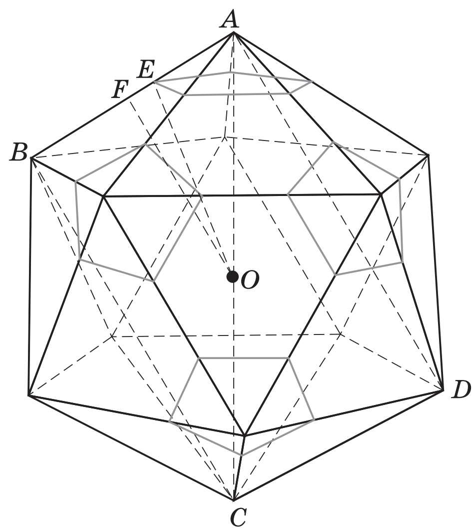


Рис. 6

Центром сферы, описанной около усечённого икосаэдра является центр O сферы, описанной около исходного икосаэдра. Для нахождения радиуса R этой сферы рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором AB и CD – рёбра икосаэдра, равные 1, а AD и BC – диагонали правильных пятиугольников, равные $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Опустим перпендикуляр OF на ребро AB. В прямоугольном треугольнике $OEFOE = R$, $OF = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $EF = \frac{1}{6}$. Следовательно,

$$R = \frac{\sqrt{58+18\sqrt{5}}}{12} \approx 0,826.$$

Докажем, что в усечённый икосаэдр нельзя вписать сферу. Действительно, центром вписанной сферы может быть только центр сферы, вписанной в икосаэдр, совпадающий с центром O сферы, описанной около икосаэдра.

Представим усечённый икосаэдр составленным из правильных пятиугольных и шестиугольных пирамид, вершинами которых является точка O, а основаниями – грани усечённого икосаэдра. Так как боковые рёбра этих пирамид равны, то высота пятиугольной пирамиды больше высоты шестиугольной пирамиды.

Таким образом, расстояния от центра O до пятиугольных и шестиугольных граней различны. Значит, в усечённый икосаэдр нельзя вписать сферу, так как сфера с центром O, касающаяся шестиугольных граней, не будет касаться пятиугольных граней.

Радиус r сферы, касающейся шестиугольных граней, равен радиусу r_i сферы, вписанной в исходный икосаэдр, то есть

$$r = r_i = \frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12} \approx 0,757.$$

Разность между радиусом описанной сферы и радиусом этой сферы приближённо равна 0,069.

Если радиус описанной сферы равен 11 см, эта разность будет приближённо равна 0,92 см. Это существенно меньше, чем разность радиусов описанной и вписанной сфер для икосаэдра.

Однако, то что в усечённый икосаэдр нельзя вписать сферу, является недостатком его поверхности. Если смотреть на эту поверхность с внутренней стороны, то у неё есть более удалённые и менее удалённые от точки O участки. Конечно, это влияет на «лётные» характеристики футбольного мяча, имеющего такую форму.

Нашей задачей является исправление этого недостатка и нахождение многогранника, близкого к усечённому икосаэдру, для которого будут существовать не только описанная, но и вписанная сферы, а разность радиусов этих сфер будет меньше разности соответствующей радиусов для усечённого икосаэдра.

Этот многогранник, также как и усечённый икосаэдр, получается из икосаэдра отсечением от его вершин равных правильных пятиугольных пирамид. Для каждого такого многогранника имеется описанная сфера. Для того чтобы у него была вписанная сфера, нужно, чтобы высоты h отсекаемых пятиугольных пирамид были равны разности радиусов описанной и вписанной сфер икосаэдра, то есть

$$h = R_i - r_i \approx 0,194.$$

Найдём величины боковых рёбер таких пятиугольных пирамид. Для этого сначала найдём высоту правильной пятиугольной пирамиды, все рёбра которой равны 1 (рис. 7).

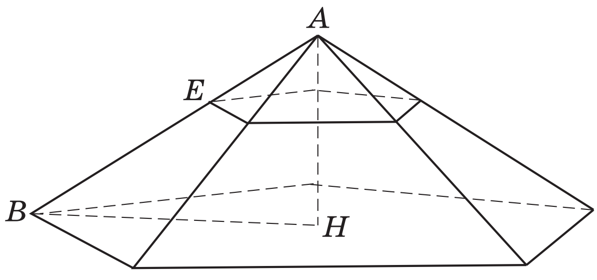


Рис. 7

Напомним, что радиус R_5 окружности, описанной около правильного пятиугольника выражается формулой

$$R_5 = BH = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \approx 0851.$$

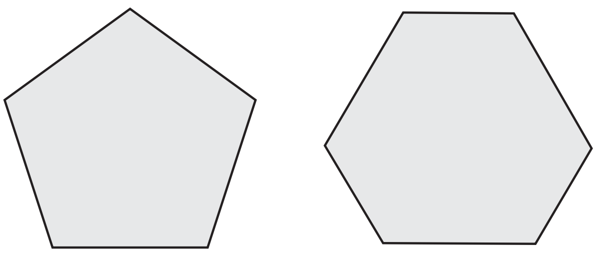
Следовательно, для высоты AH имеет место формула

$$AH = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \approx 0,526.$$

Отношение высоты h к высоте AH приближённо равно 0,370. Это отношение равно отношению бокового ребра отсекаемой пятиугольной пирамиды к ребру икосаэдра. Поскольку мы предположили, что ребро икосаэдра равно 1, то число 0,370 будет приближённым значением бокового ребра AE отсекаемой пятиугольной пирамиды (рис. 6).

Таким образом, поверхность полученного многогранника состоит из двенадцати правильных пятиугольников (рис. 8*а*), стороны которых приближённо равны 0,370, и двадцати шестиугольников (рис. 8*б*), три стороны каждого из которых приближённо равны 0,370, а три другие стороны приближённо равны

$$1 - 2 \cdot 0,370 = 0,260.$$



а) ***б)***

Рис. 8

Соответствующий многогранник изображён на рисунке 9.

Радиус r' его вписанной сферы равен радиусу r_i исходного икосаэдра, то есть

$$r' = r_i = \frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12} \approx 0,757.$$

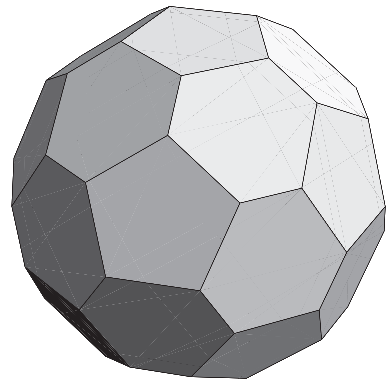


Рис. 9

Найдём приближённое значение радиуса R' его описанной сферы. Для этого рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором AB и CD – рёбра икосаэдра, равные 1, а AD и BC – диагонали правильных пятиугольников, равные $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (рис. 6). Опустим перпендикуляр OF на ребро AB. В прямоугольном треугольнике $OEFOE = R'$ – радиус описанной сферы,

$$OF = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,809, \quad EF = \frac{1}{2} - AE \approx 0,130.$$

Следовательно,

$$R' = \sqrt{OF^2 + EF^2} \approx 0,819.$$

Разность $R' - r'$ между радиусами описанной и вписанной сферы для этого многогранника будет приближённо равна 0,063.

Если радиус описанной сферы равен 11 см, эта разность будет приближённо равна 0,85 см, что меньше разности радиусов соответствующих сфер для усечённого икосаэдра.

Помимо этого, имеется ещё один плюс этого многогранника. А именно, для усечённого икосаэдра, полученного из икосаэдра, радиус описанной сферы которого равен 11 см, стороны пятиугольных и шестиугольных граней приближённо равны 4,44 см. Площади S_5 и S_6 правильного пятиугольника и правильного шестиугольника со сторонами a выражаются соответственно формулами

$$S_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2, \quad S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Следовательно, их площади приближённо равны соответственно 33,92 см^2 и 51,22 см^2.Их разность приближённо равна 17,30 см^2.

Для полученного многогранника стороны пятиугольных граней приближённо равны 4,97 см, а стороны шестиугольных граней приближённо равны 4,97 см и 3,49 см. Их площади приближённо равны соответственно 42,50 см^2 и 46,01 см^2. Их разность приближённо равна 3,51 см^2.

Таким образом, площади пятиугольных и шестиугольных граней полученного многогранника отличаются не так сильно, как площади соответствующих граней усечённого икосаэдра.

Заметим также, что из существования вписанной и описанной сфер для полученного многогранника следует, что радиусы окружностей, описанных около его пятиугольных и шестиугольных граней, равны.

И то, и другое повышает «лётные» качества полученного многогранника.

Укажем ещё один способ построения этого многогранника. Рассмотрим додекаэдр, и впишем в него икосаэдр так, чтобы вершины икосаэдра находились в центрах граней додекаэдра. Применим к икосаэдру гомотетию с центром в центре сферы, описанной около додекаэдра, и коэффициентом, равным отношению радиусов сфер, описанных около додекаэдра и икосаэдра. Тогда радиус сферы, описанной около икосаэдра будет равен радиусу сферы, описанной около додекаэдра. По сделанному выше замечанию, у этих икосаэдра и додекаэдра будут также равны радиусы вписанных сфер (рис. 10).

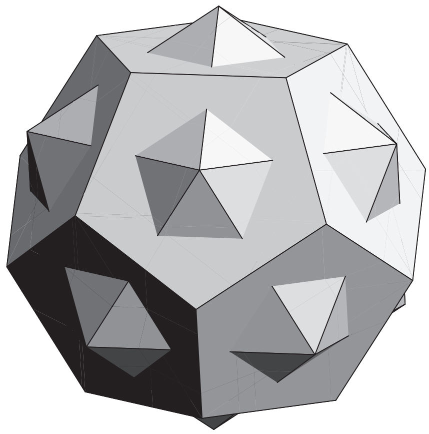


Рис. 10

Их пересечение будет искомым многогранником.

Попробуйте самостоятельно рассмотреть некоторые другие полуправильные многогранники, сведения о которых имеются в статье [1] и книге [2].

Литература

1. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Задачи на комбинации многогранников // Математика в школе. – 2020. – № 2. – С. 54–61.

2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. – М.: МЦНМО, 2010.