В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

2023

Смирнов В.А., Смирнова И.М.

Аналитическая геометрия для школьников: учебное пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: МЦНМО, 2022.

Пособие предназначено как для учащихся старших классов, так и для студентов университетов, изучающих аналитическую геометрию. В нём рассмотрены основные понятия, свойства и теоремы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, приведены упражнения для самостоятельного решения, показаны способы моделирования аналитически заданных фигур в программе GeoGebra. В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных методов в геометрии является аналитический метод, который позволяет свести многие геометрические задачи к алгебраическим, а также позволяет моделировать различные геометрические фигуры в компьютерных программах с помощью аналитического задания этих фигур.

Благодаря универсальности аналитического метода для решения различных задач он широко применяется в механике, физике и других областях знания.

В связи с этим аналитическая геометрия изучается не только на первых курсах математических, но и на других естественно-научных факультетах университетов.

Основные идеи аналитического метода восходят к Р. Декарту, который в 1637 году издал книгу «Геометрия», где были изложены основы аналитической геометрии.

Данное пособие предназначено как для учащихся старших классов, так и для студентов университетов, изучающих аналитическую геометрию. В нём рассмотрены основные понятия, свойства и теоремы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, приведены упражнения для самостоятельного решения, показаны способы моделирования аналитически заданных фигур в программе GeoGebra. В конце пособия помещены ответы и указания ко всем упражнениям.

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Векторы на плоскости

Многие физические величины, среди которых скорость, сила и др., характеризуются не только своим значением, но и направлением. Такие величины называют ***векторными***.

Вектором называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$. Он изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B.

Векторы также обозначаются строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. (рис. 1.1).

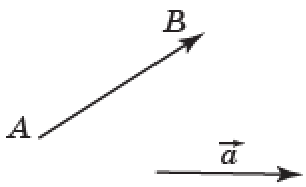


Рис. 1.1

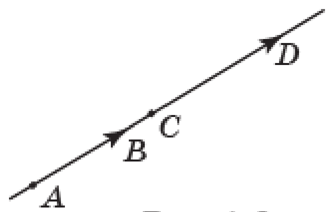


Рис. 1.2

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются ***одинаково направленными***, если один из лучей AB или CD содержится в другом (рис. 1.2).

В противном случае они называются ***противоположно направленными***.

Два вектора, не лежащие на одной прямой, называются одинаково (противоположно) направленными, если они лежат на параллельных прямых по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала. На рисунке 1.3 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ противоположно направлены.

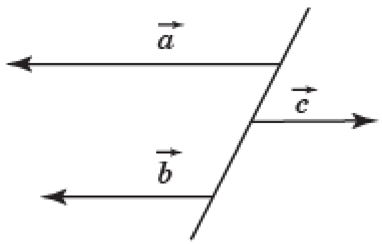


Рис. 1.3

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они одинаково направлены или противоположно направлены.

Длиной, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Рассматривают также ***нулевые векторы***, у них начало совпадает с концом. Такие векторы обозначаются $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Все нулевые векторы считаются равными между собой.

В программе GeoGebra векторы можно получать с помощью инструмента «Вектор». Для этого нужно выбрать этот инструмент и отметить на экране две точки. В результате на экране появится вектор с началом в первой точке и концом во второй точке. Положение точек можно менять, при этом будет меняться и положение вектора.

Для нахождения приближённого значения длины вектора нужно выбрать инструмент «Расстояние или длина» и указать левой кнопкой «мыши» концы этого вектора. В результате на экране появится искомое приближённое значение. Его точность можно регулировать самостоятельно.

С помощью инструмента «Отложить вектор» можно откладывать данный вектор от данной точки.

Например, на рисунке 1.4 показано окно этой программы, вектор $\overrightarrow{AB}$, длина которого приближённо равна 4,47, и вектор $\overrightarrow{CD}$, полученный откладыванием вектора $\overrightarrow{AB}$ от точки C.

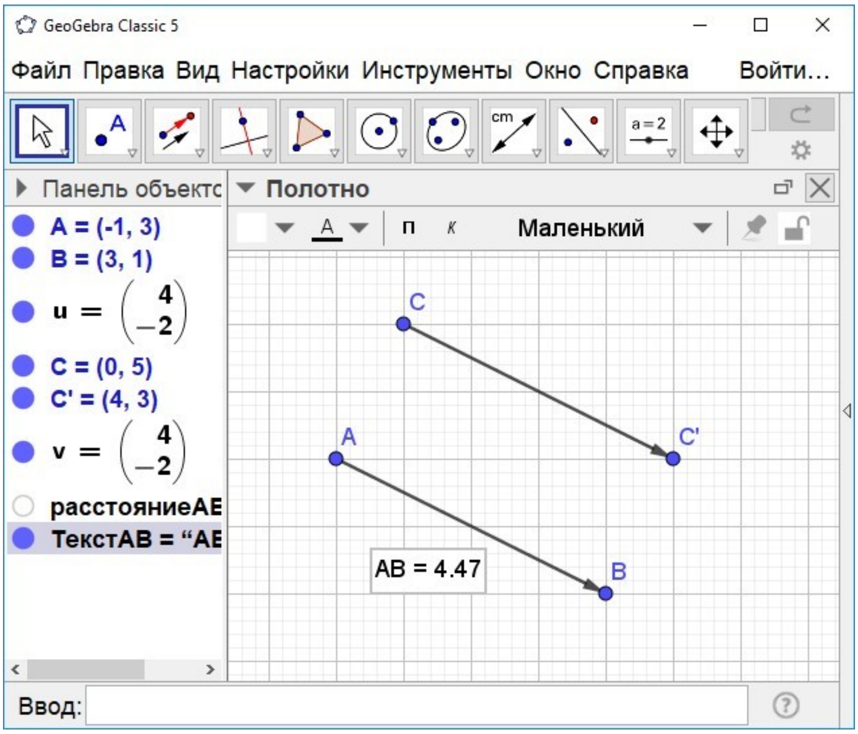


Рис. 1.4

Упражнения

1. Какие из векторов, изображённых на рисунке 1.5: а) равны; б) коллинеарны?

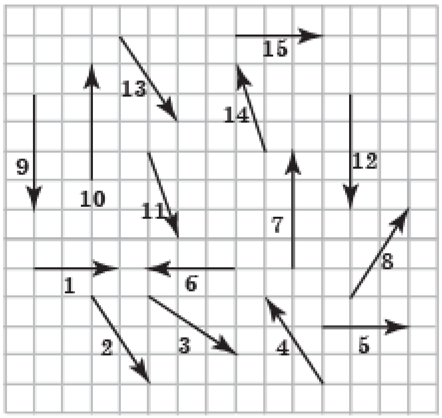


Рис. 1.5

2. Сколько различных векторов задают стороны параллелограмма?

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Сколько имеется различных векторов с началом и концом в точках A, B, C, D, O?

4. Сколько различных векторов задают стороны правильного шестиугольника?

5. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ и точки O пересечения его диагоналей запишите векторы с началом и концом в точках A, B, C, D, E, F, O: а) равные вектору $\overrightarrow{AB}$; б) равные вектору $\overrightarrow{OD}$; в) коллинеарные вектору $\overrightarrow{EF}$; г) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CO}$.

6. Для ромба $ABCD$, стороны которого равны 1, а один из углов равен 60°, найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

7. 6. Для параллелограмма $ABCD$, стороны которого AB и AD равны соответственно 1 и 2, а угол между ними равен 60°, найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}$.

8. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, и точки O пересечения его диагоналей найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{DE}$; б) $\overrightarrow{OF}$; в) $\overrightarrow{BE}$; г) $\overrightarrow{FC}$; д) $\overrightarrow{AC}$.

9. Укажите коллинеарные векторы с началом и концом в вершинах правильного пятиугольника $ABCDE$.

10. Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

11. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

12. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Верно ли обратное?

2. Операции над векторами

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 2.1).

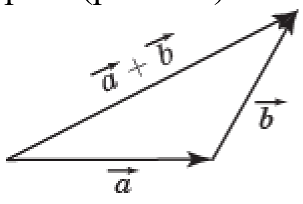


Рис. 2.1

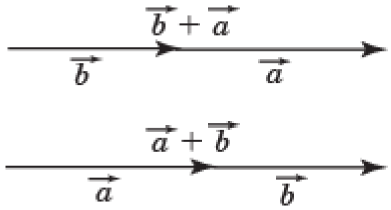


Рис. 2.2

Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Для операции сложения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам сложения чисел. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \text{ (переместительный закон).}$$

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, то требуемое равенство непосредственно следует из определения сложения векторов (рис. 2.2). Аналогичное равенство имеет место для противоположно направленных векторов.

В случае, если данные векторы неколлинеарны, отложим их от одной точки O. Для получившихся векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 2.3).

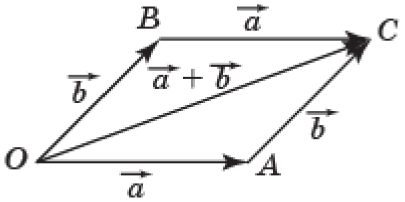


Рис. 2.3

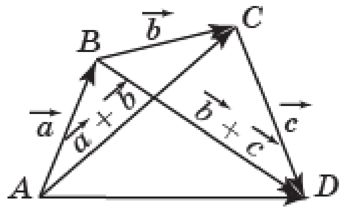


Рис. 2.4

В этом параллелограмме $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. По определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Свойство 2. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется равенство

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \text{ (сочетательный закон).}$$

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от какой-нибудь точки A, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, а вектор $\vec{c}$ - от точки C, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ (рис. 2.4).

По определению сложения векторов будем иметь:

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}, \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

С другой стороны,

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, имеет место равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Кроме операции сложения, для векторов определена операция произведения (умножения) вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остаётся прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 обозначается $-\vec{a}$ и называется вектором, ***противоположным*** вектору $\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел t, s выполняется равенство

$$(ts)\,\vec{a} = t(s\vec{a}) \text{ (сочетательный закон).}$$

Свойство 2. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел t, s выполняется равенство

$$(t+s)\,\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a} \text{ (первый распределительный закон).}$$

Свойство 3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа t выполняется равенство

$$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b} \text{ (второй распределительный закон).}$$

Первое и второе свойства следуют непосредственно из определения произведения вектора на число.

Докажем третье свойство. Пусть, для определённости, $t > 0$. Отложим вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. В треугольнике OAB (рис. 2.5) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$. Рассмотрим треугольник OA_1B_1, стороны которого образуют векторы $t\vec{a}$, $t\vec{b}$ и $t\vec{a} + t\vec{b}$ соответственно.

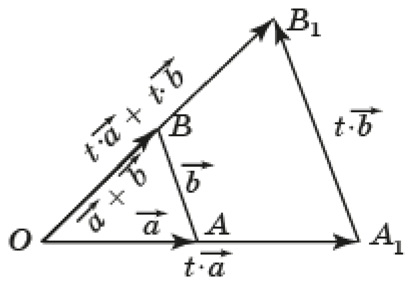


Рис. 2.5

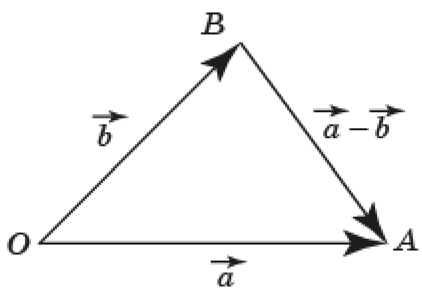


Рис. 2.6

По теореме о пропорциональных отрезках $OB_1 : OB = OA_1 : OA = t$. Следовательно, $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для того чтобы найти разность $\vec{a} - \vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают так, чтобы их начала совпадали (рис. 2.6).

Вектор, у которого начало совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец - с концом вектора $\vec{a}$, будет искомой разностью векторов.

Упражнения

1. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$.

3. На рисунке 2.7 укажите векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{b} + \vec{c}$.

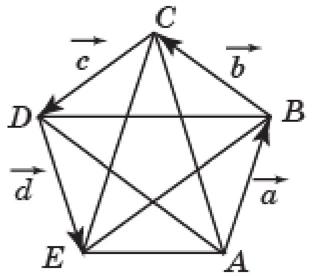


Рис. 2.7

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Верны ли равенства: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$?

5. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Укажите векторы: а) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; б) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}$; в) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC}$.

6. A, B, C, D - произвольные точки плоскости. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

7. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 3$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$; б) $|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}|$; в) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$; г) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

8. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}|$; в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC}|$.

9*. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для точки O пересечения его диагоналей выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

10*. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

При каком расположении векторов достигается равенство?

11. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

12. В треугольнике ABC укажите векторы: а) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$.

13. В параллелограмме $ABCD$ укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$.

14. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ укажите векторы: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$; в) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}$.

15. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соответственно 14 и 10 и пересекаются в точке O. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; в) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC}$.

16. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Укажите вектор, равный вектору: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} - \overrightarrow{EO}$, началом и концом которого являются вершины этого шестиугольника.

17. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 1, пересекаются в точке O. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{OE}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FE}$.

18. В каком случае выполняются равенства: а) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{a} - \vec{b}$?

19. Упростите выражение: а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

20*. Докажите, что $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$. При каком расположении векторов достигается равенство?

21. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. Выразите медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

22. Дана трапеция $ABCD$ и её средняя линия EF, соединяющая середины боковых сторон соответственно AD и BC. Используя операции над векторами, докажите равенство $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

23. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Найдите такие числа t, s, для которых: а) $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{AE} = t \cdot \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{BE}$.

24. Докажите, что для точки M пересечения медиан треугольник ABC выполняется равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

25. Докажите, что для точки M пересечения медиан треугольник ABC и произвольной точки X выполняется равенство $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$.

26*. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что выполняется равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

3. Скалярное произведение векторов

Определим понятие угла между двумя векторами. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от точки O так, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 3.1). Если эти векторы не являются одинаково направленными, то угол, образованный лучами OA и OB, называется ***углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

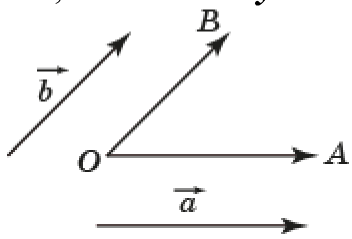


Рис. 3.1

Угол между двумя одинаково направленными векторами считается равным 0°.

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется ***скалярным квадратом*** и обозначается $\vec{a}^2$. Из определения скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Заметим, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю в том и только том случае, когда косинус угла между этими векторами равен нулю. Учитывая, что косинус равен нулю только для угла, равного 90°, получаем, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю в том и только том случае, когда угол между ними равен 90°.

С помощью скалярного произведения выражается работа A, производимая постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ. А именно, имеет место следующая формула

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

В программе GeoGebra можно находить приближённое значение угла между двумя векторами. Для этого нужно выбрать инструмент «Угол» и указать левой кнопкой «мыши» на два данных вектора. В результате на экране появится искомое приближённое значение угла между этими векторами. На рисунке 3.2 показаны векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и значение угла между ними.

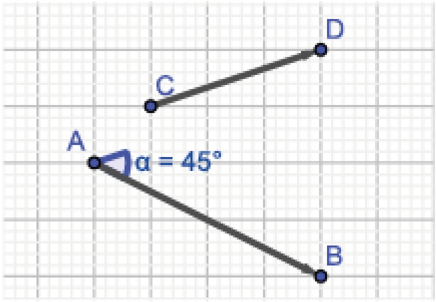


Рис. 3.2

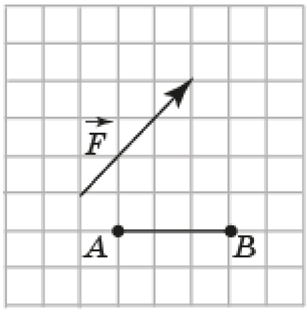


Рис. 3.3

Упражнения

1. Найдите скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 150°.

2. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BE}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DE}$.

3. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 1 найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BE}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DE}$.

4. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 1 проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; е) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

5. Для прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $AD = 6$ найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

6*. При каком угле между векторами, длины которых равны a и b, их скалярное произведение: а) наибольшее; б) наименьшее.

7. Длины двух векторов равны 1 и 2. Найдите: а) наибольшее; б) наименьшее значение их скалярного произведения.

8*. Докажите, что каковы бы ни были число t и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b}$.

9*. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а их длины равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

10*. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{F}$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B (рис. 3.3). Стороны клеток равны 1.

11*. Используя скалярное произведение векторов, докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

12*. Используя скалярное произведение векторов, докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

4. Прямоугольная система координат

Прямая, на которой выбраны точка O и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление этой прямой, называется ***координатной прямой***, или ***координатной осью*** (рис. 4.1). Точка O называется ***началом координат***.

Рис. 4.1

Расстояние x от точки A координатной прямой до начала координат O, взятое со знаком "+", если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком "–", если A принадлежит отрицательной полуоси, называется ***координатой точки*** A.

Легко видеть, что расстояние между точками A_1, A_2 на координатной прямой с координатами x_1, x_2 выражается формулой

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат называется ***прямоугольной системой координат*** на плоскости. Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно ***осью абсцисс*** и ***осью ординат*** (рис. 4.2).

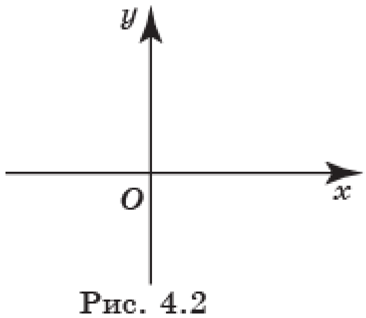


Рис. 4.2

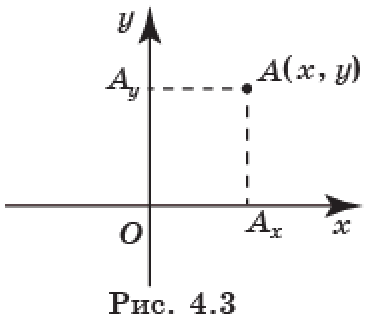


Рис. 4.3

Плоскость с заданной прямоугольной системой координат называется ***координатной плоскостью***.

Рассмотрим точку A на координатной плоскости. Проведём через неё прямую, перпендикулярную оси Ox. Точку пересечения этой прямой с осью Ox обозначим A_x. Координата этой точки на оси Ox обозначается x и называется ***абсциссой*** точки A. Аналогично через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Oy. Точку её пересечения с осью Oy обозначим A_y. Координата этой точки на оси Oy обозначается y и называется ***ординатой*** точки A (рис. 4.3).

Таким образом, каждой точке A на координатной плоскости соответствует пара чисел (x, y), называемая ***координатами точки*** на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$.

В программе GeoGebra точки можно изображать с помощью инструмента «Точка». Для этого нужно выбрать этот инструмент и «кликнуть» левой кнопкой «мыши» на полотне экрана. В результате на экране появится точка. Например, на рисунке 4.4 показано полотно программы GeoGegra и точка A.

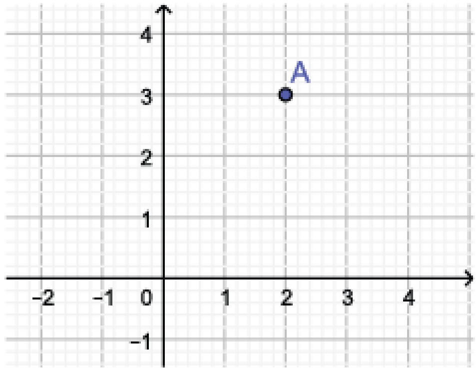


Рис. 4.4

Заметим, что эту точку можно получить написав в строке «Ввод» A=(2,3) и нажав “Enter”.

Исторические сведения

Прямоугольные координаты на плоскости были введены Р. Декартом (1596 – 1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также ***декартовой системой координат***, а сами координаты – ***декартовыми координатами***.

Рене Декарт – один из выдающихся учёных XVII века. Поражает широта его интересов. Учёным получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и других областях. Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения - картезианства (Картезий - латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определённым естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени она имела довольно длинное название: "Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода". В этом сочинении Декарт сформулировал следующие "главные правила метода".

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предупреждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчётливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, насколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчёркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчёты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

"Геометрия" Декарта, являющаяся приложением к "Рассуждению о методе...", произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время "Геометрия" выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. Введение координат позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Метод, основанный на использовании координат, называется ***методом координат***.

В XVIII, XIX веках на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрия. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Упражнения

1. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 4.5) найдите их координаты.

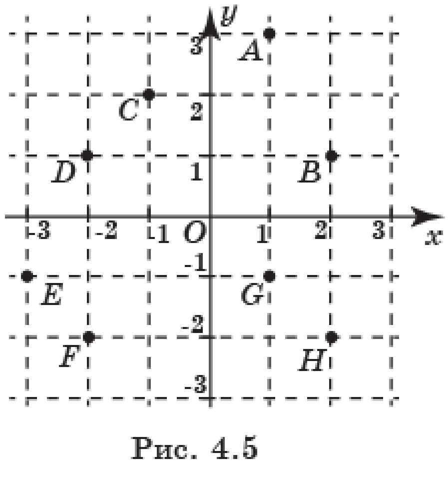


Рис. 4.5

2. На координатной плоскости изобразите точки $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 4)$, $D(2, -3)$, $E(-3, -2)$, $F(-2, 3)$.

3. На прямой, параллельной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них ордината равна 3. Чему равна ордината другой точки?

4. На прямой, перпендикулярной оси абсцисс, взяты две точки. У одной из них абсцисса равна 2. Чему равна абсцисса другой точки?

5. Из точки $A(3, 2)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите координаты основания перпендикуляра.

6. Через точку $A(3, 2)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты её точки пересечения с осью ординат.

7. На координатной плоскости изобразите точки $A(2, -2)$, $B(2, 2)$ и отрезок AB. Пересекает ли этот отрезок какую-нибудь ось координат? Если пересекает, то найдите координаты точки пересечения.

8. Точка A имеет координаты (x, y). Найдите координаты симметричной ей точки относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

9. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(8, -6)$ относительно: а) начала координат; б) оси Ox; в) Оси Oy.

10. Точки $N(\ldots, 2)$ и $M(5, \ldots)$ симметричны относительно оси ординат. Назовите пропущенные координаты этих точек.

11. Докажите, что середина A отрезка, соединяющего точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

12. Найдите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(-2, 1)$, $B(6, 5)$; б) $A(4, -3)$, $B(2, 1)$; в) $A(7, 5)$, $B(-5, -3)$.

13. Изобразите геометрическое место точек на координатной плоскости, для которых: а) $x \geq 0$; б) $y < 0$; в) $x \leq 0$, $y \geq 0$; г) $xy > 0$.

14. Изобразите угол AOB, для которого: а) $A(0, 3)$, $O(0, 0)$, $B(3, 0)$; б) $A(0, 3)$, $O(0, 0)$, $B(3, 3)$; в) $A(0, 3)$, $O(0, 0)$, $B(3, -3)$. Найдите его величину.

15. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 2)$, $C(0, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма $OABC$. Найдите координаты точки B.

16. Точки $O(0, 0)$, $A(8, 2)$, $B(10, 8)$, $C(2, 6)$ являются вершинами. четырёхугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.

17. Найдите координаты центра окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.

18. Докажите, что если точка A принадлежит отрезку, соединяющему точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости, и $\frac{A_1A}{AA_2} = k$, то она имеет координаты

$$A\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right).$$

19. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами:

а) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(4, 4)$;

б) $A(0, 3)$, $B(2, 5)$, $C(4, 1)$.

20. Используя программу GeoGebra, нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (1, 0), (2, 1), (1, 3), (2, 4), (1, 4,5), (1, 6), (1,5, 5,5), (2,5, 5,5), (3, 6), (3, 4,5), (2, 4), (3, 3), (4,5, 2,5), (4,5, 0), (5, 2,5), (5, 0). Очертания какого животного она напоминает?

21. Используя программу GeoGebra, нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (4, 0), (3, 1,5), (1, 2), (-1, 2), (-4, 0,5), (-6, 2), (-5,5, 0), (-6, -2), (-4, -0,5), (-1, -2), (1, -2), (3, -1,5), (4, 0). Очертания кого она напоминает?

22. Используя программу GeoGebra, нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (-5, 1), (-6, 0,5), (-7, 1), (-4,5, 2,5), (-3,5, 2,5), (-4,5, 1), (5,5, 1), (5,5, -0,5), (4,5, -1,5), (4,5, -1), (5, -0,5), (5, 0,5), (4, 0,5), (4,5, 0), (3,5, -2), (3, -2), (3, -1), (2, -0,5), (-2, -0,5), (-3,5, -1), (-4,5, -2), (-5,5, -2), (-5, -1), (-4,5, -1), (-4,5, 2), (-5, 1), (-5,5, -1), (-5, -1). Очертания какой породы собак она напоминает?

23. Используя программу GeoGebra, нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (0, 0), (-1, 1), (-3, 1), (-2, 3), (-3, 3), (-4, 6), (0, 8), (2, 5), (2, 11), (6, 10), (3, 9), (4, 5), (3, 0), (2, 0), (1, -7), (3, -8), (0, -8), (0, 0). Очертания какой птицы она напоминает?

5. Расстояние между точками. Уравнение окружности

Выведем формулу, выражающую расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости.

Рассмотрим случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Обозначим A точку с координатами (x_2, y_1). В прямоугольном треугольнике AA_1A_2 имеем $AA_1 = |x_2 - x_1|$, $AA_2 = |y_2 - y_1|$ (рис. 5.1).

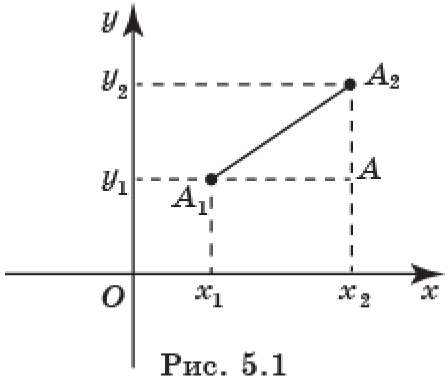


Рис. 5.1

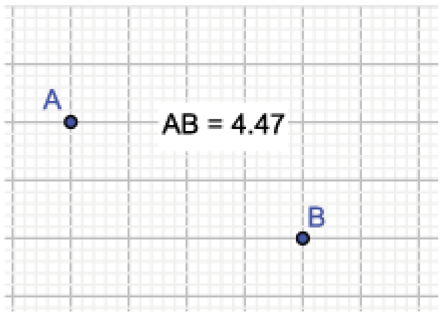


Рис. 5.2

Применяя теорему Пифагора к этому треугольнику AA_1A_2, получим следующую формулу расстояния между точками на координатной плоскости:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Самостоятельно докажите, что найденная формула остаётся верной и в случаях, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Для нахождения приближённого значения расстояния между двумя точками в программе GeoGebra имеется инструмент «Расстояние или длина». Если выбрать этот инструмент и указать левой кнопкой «мыши» на данные две точки, то на экране появится приближённое значение расстояния между этими точками (рис. 5.2).

Рассмотрим окружность с центром $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R на координатной плоскости (рис. 5.3).

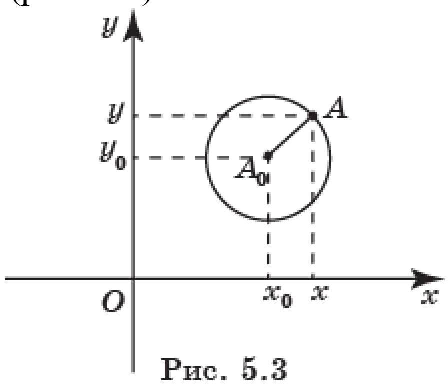


Рис. 5.3

Из определения окружности следует, что координаты её точек удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Оно называется уравнением окружности.

Координаты точек соответствующего круга удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2.$$

Для задания окружности в программе GeoGebra имеются следующие инструменты.

1. Окружность по центру и точке. Для задания окружности нужно задать её центр и какую-нибудь точку, принадлежащую этой окружности. Например, на рисунке 5.4 показана окружность с центром A и точкой B, полученная в программе GeoGebra.

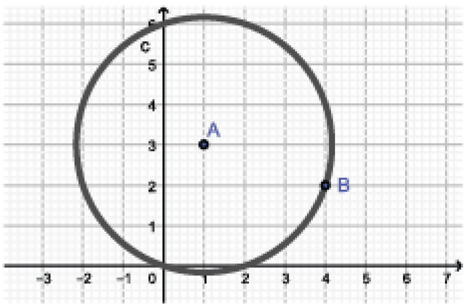


Рис. 5.4

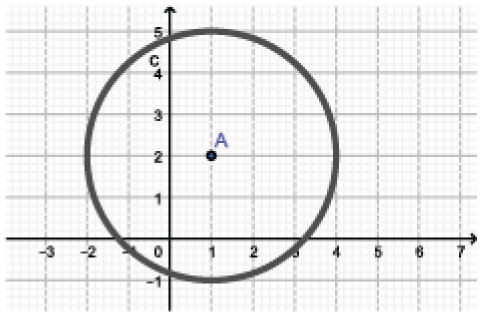


Рис. 5.5

2. Окружность по центру и радиусу. Для задания окружности нужно указать её центр и в открывшемся окне указать её радиус. Например, на рисунке 5.5 показана окружность с центром A и радиусом 3, полученная в программе GeoGebra.

3. Окружность по трём точкам. Для задания окружности нужно указать три точки, не принадлежащие одной прямой. На экране появится окружность, проходящая через эти точки. Например, на рисунке 5.6 показана окружность, проходящая через точки A, B и C, полученная в программе GeoGebra.

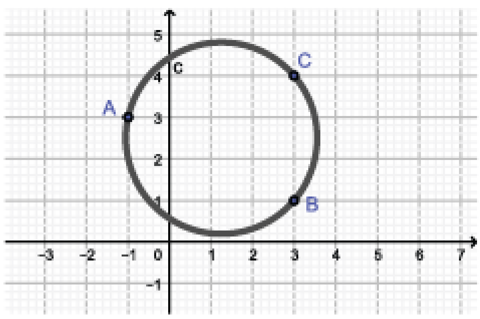


Рис. 5.6

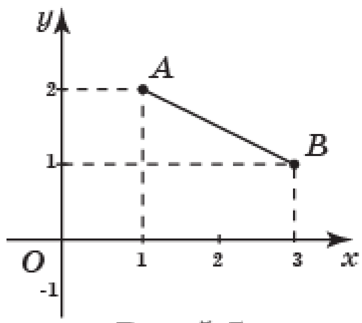


Рис. 5.7

4. Окружность в программе GeoGebra можно задать, написав в строке «Ввод» её уравнение. Например, если в строке «Ввод» набрать команду (x-2)^2+(y+1)^2=4 и нажать “Enter”, то на экране появится окружность с центром в точке (2, -1) и радиусом 2.

Приведём примеры использования формулы расстояния между двумя точками для нахождения наименьших значений выражений, решения уравнений и неравенств.

Пример 1. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10}.$$

Решение. Преобразуем подкоренные выражения

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}.$$

Первое слагаемое равно расстоянию от точки (x, y) до точки A(1, 2). Второе слагаемое равно расстоянию от точки (x, y) до точки B(3, 1) (рис. 5.7).

Наименьшее значение принимается в точках отрезка AB и равно $\sqrt{5}$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-20x+109}+\sqrt{x^2-2x+82}\le 15.$$

Решение. Преобразуем подкоренные выражения

$$\sqrt{(x-10)^2+3^2}+\sqrt{(x-1)^2+9^2}\le 15.$$

Первое слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки A(10, -3). Второе слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки B(1, 9). Расстояние между точками A и B равно 15 (рис. 5.8). Наименьшая сумма расстояний от точки C(x, 0) до точек A и B будет в случае, если точка C принадлежит отрезку AB. Решением является $x = 7\frac{3}{4}$.

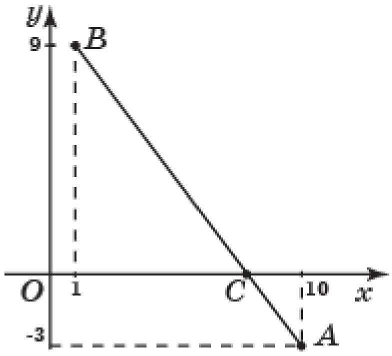


Рис. 5.8

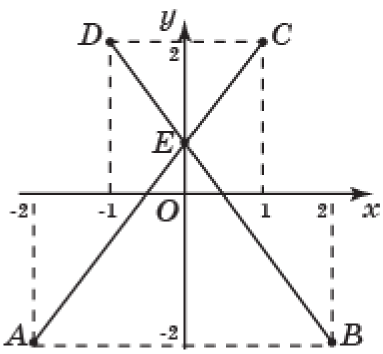


Рис. 5.9

Пример 3. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=10.$$

Решение. Слагаемые выражают расстояния от точки с координатами (x, y) до точек (-2, -2), (2, -2), (1, 2), (-1, 2) (рис. 5.9). Наименьшее значение суммы равно 10 и принимается в точке $E(0, \frac{2}{3})$.

Ответ. $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$.

Упражнения

1. Найдите расстояние между точками: а) A_1(2, 1) и A_2(1, -1); б) B_1(4, 3) и B_2(-1, 3).

2. Найдите расстояние от точки A(3, 2) до оси: а) Ox; б) Oy.

3. Какая из точек A (1, 2) или B (1, -2) лежит ближе к началу координат?

4. Даны точки M(-3, -1), N(3, -1) и K(0, 3). Найдите периметр треугольника MNK.

5. Определите вид треугольника ABC, если его вершины имеют координаты: а) A(-1, -2), B(-1, 2), C(1, -2); б) A(-2, -2), B(-2, 2), C(1, 0).

6. Определите вид четырёхугольника, если его вершины имеют координаты: а) $A(0, -2)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 2)$, $D(2, 0)$; б) $A(1, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 3)$, $D(3, -1)$; в) $A(1, -2)$, $B(2, 2)$, $C(4, 1)$, $D(3, -3)$; г) $A(-1, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 1)$, $D(2, -1)$.

7. На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек: а) $A(1, 1)$, $B(3, 3)$; б) $O(0, 0)$, $B(2, 4)$.

8. На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек: а) $A(2, 2)$, $B(2, 4)$; б) $A(5, 1)$, $B(1, 3)$.

9. Найдите точку, равноудалённую от точек: а) $O(0, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$; б) $A(2, 0)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$.

10. Найдите координаты центра C и радиус R окружности, заданной уравнением: а) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 16$; б) $x^2 + (y-3)^2 = 9$.

11. Напишите уравнение окружности с центром: а) в начале координат и радиусом 2; б) в точке $C(2, –3)$ и радиусом 1.

12, Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящую через точку $A(3, 3)$.

13. Выясните, как расположена точка относительно окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, если она имеет координаты: а) (2, 1); б) (4, 3); в) (3, -4); г) (5, 0); д) (-1, 1).

14. Напишите уравнение окружности с центром в точке $A_0(0, 3)$, проходящей через точку $A(4, 0)$.

15. Даны точки $A(0, 2)$, $B(6, -2)$. Найдите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

16. Найдите уравнение окружности с центром в точке $A_0(2, 1)$, касающейся оси абсцисс.

17. Составьте уравнение окружности с центром в точке $A_0(4, -3)$, проходящей через начало координат.

18. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в точке $P(8, 6)$ и радиусом 2?

19. Докажите, что уравнение: а) $x^2 – 8x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 – 6y + 4 = 0$ задаёт окружность. Найдите её радиус и координаты центра.

20. Каким неравенством задаётся геометрическое место точек, не принадлежащих кругу с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R?

21. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2+16}+\sqrt{(x-10)^2+4}.$$

22. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-6x+58}+\sqrt{x^2+10x+89}=17.$$

6. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора на координатной плоскости. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются ***координатами вектора***.

Векторы с координатами (1, 0), (0, 1) обозначаются $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ соответственно. Они называются ***координатными векторами*** и изображаются, отложенными от начала координат (рис. 6.1).

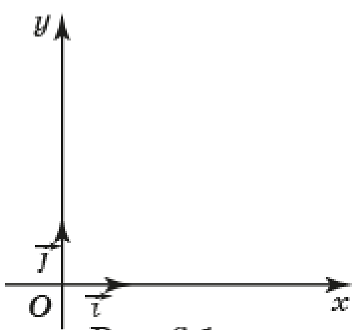


Рис. 6.1

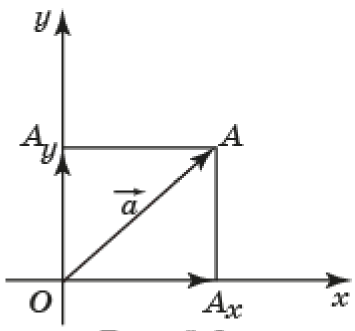


Рис. 6.2

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и обозначим A его конец (рис. 6.2). Через точку A проведём прямые, перпендикулярные осям координат. Обозначим A_x, A_y точки пересечения этих прямых с соответствующими осями координат. Для вектора $\overrightarrow{OA}$ имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$. Точка A имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{\jmath}$, значит, вектор $\vec{a}$ представим в виде $\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Теорема. При сложении двух векторов их координаты складываются.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{a_1}$ (x_1, y_1) и $\overrightarrow{a_2}$ (x_2, y_2). Разложим их по координатным векторам. Получим:

$$\overrightarrow{a_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath},\ \overrightarrow{a_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}.$$

Для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство:

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) + (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}) = (x_1 + x_2)\,\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\,\vec{\jmath}.$$

Следовательно, координатами вектора $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ является пара чисел $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, т. е. если вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y), то вектор $t\vec{a}$ имеет координаты (tx, ty).

Следствие. При вычитании векторов их координаты вычитаются, т. е. если векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ имеют координаты соответственно (x_1, y_1), (x_2, y_2), то их разность $\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}$ имеет координаты $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ с началом в точке $A_1(x_1, y_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2)$ (рис. 6.3).

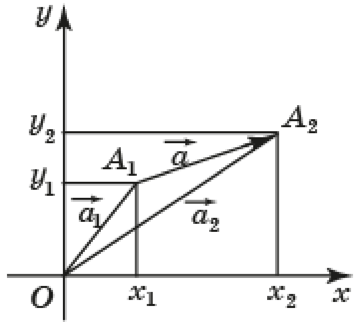


Рис. 6.3

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что ***длина вектора*** $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ выражается формулой

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{a_1}$ $(x_1,\ y_1)$ и $\overrightarrow{a_2}$ $(x_2,\ y_2)$. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно. Если точки O, A_1 и A_2 не принадлежат одной прямой, то рассмотрим треугольник OA_1A_2. По теореме косинусов имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2{\cdot}OA_1 \cdot OA_2{\cdot}\cos\varphi,$$

где $\varphi = \angle A_1OA_2$.

Заметим, что, если точки O, A_1 и A_2 принадлежат одной прямой, то это равенство будет также выполняться.

Перепишем его в виде $(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2})^2 = \overrightarrow{a_1}^{\,2} + \overrightarrow{a_2}^{\,2} - 2{\cdot}\overrightarrow{a_1}{\cdot}\overrightarrow{a_2}$.

Воспользуемся равенствами:

$$\overrightarrow{a_1}^{\,2} = |\overrightarrow{a_1}|^2 = x_1^2 + y_1^2;\ \overrightarrow{a_2}^{\,2} = |\overrightarrow{a_2}|^2 = x_2^2 + y_2^2;$$

$$(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2})^2 = |\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Получим:

$$\overrightarrow{a_1}{\cdot}\overrightarrow{a_2} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким образом, имеет место формула скалярного произведения векторов $\overrightarrow{a_1}$ (x_1, y_1) и $\overrightarrow{a_2}$ (x_2, y_2):

$$\overrightarrow{a_1}{\cdot}\overrightarrow{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Используя скалярное произведение можно находить угол между векторами. А именно, косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{a_1}$ (x_1, y_1) и $\overrightarrow{a_2}$ (x_2, y_2) выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Воспользуемся формулой скалярного произведения векторов для нахождения площади параллелограмма, заданного координатами своих вершин.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$, $\angle BAD = \varphi$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{AD}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AE}(y_3 - y_1, -(x_3 - x_1)$. Он имеет такую же длину, как и вектор $\overrightarrow{AD}$ и перпендикулярен этому вектору (рис. 6.4).

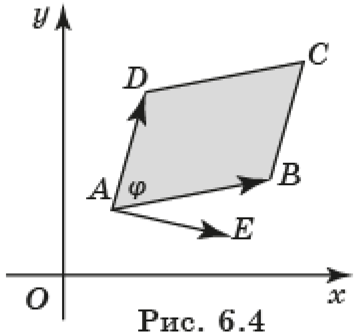


Рис. 6.4

Следовательно, модуль косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ равен $\sin\varphi$.

Для площади S параллелограмма $ABCD$ имеем

$$S = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot|\cos\varphi| = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}\right| =$$
$$|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|.$$

Перепишем последнее выражение, используя понятие определителя. А именно, рассмотрим набор чисел, записанный в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем второго порядка, соответствующим этой матрице, называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Указанную выше формулу площади параллелограмма можно переписать в виде

$$S = \left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Из этой формулы следует, что площадь s треугольника ABC, для которого $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, выражается формулой

$$s = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Заметим, что если вектор $\overrightarrow{AD}$ расположен по левую сторону от вектора AB, то угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ острый. Следовательно, косинус этого угла положителен. Значит, формулы площадей параллелограмма и треугольника можно переписать без знака модуля в виде

$$S = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}, s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Назовите координаты векторов: а) $\vec{a} = 6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; б) $\vec{b} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; в) $\vec{c} = 3\vec{\imath}$; г) $\vec{d} = -5\vec{\jmath}$.

2. Для точек $A_1(3, -5)$, $A_2(2, 3)$ найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$.

3. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y).

4. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (-3, 4) и точка M (-3, 1).

5. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

6. Даны три точки $A(1, 1)$, $B(0, -1)$, $C(1, 0)$. Найдите координаты точки D, для которой векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

7. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}$ (0, 1), $\vec{b}$ (3, 0).

8. Даны векторы $\vec{a}$ (2, -1) и $\vec{b}$ (-4, 2). Найдите координаты вектора: а) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; в) $5\vec{a} - \vec{b}$.

9. Найдите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (4, -3), (1, 1) соответственно.

10. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-2, -1)$, $B(-5, 2)$, $C(-2, 1)$, $D(1, -2)$ является параллелограммом. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

11. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}$ (2, -1) и $\overrightarrow{a_2}$ (-1, 2).

12. Используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|}$$

из определения скалярного произведения, найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{a_1}$ (2, 1) и $\overrightarrow{a_2}$ (-1, 1).

13. Докажите, что векторы с координатами (a, b) и $(b, -a)$ перпендикулярны.

14. При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}(-1,\ 2)$, $\vec{b}(3,\ 4)$?

15. Найдите угол A треугольника с вершинами $A(\sqrt{3}, -1)$, $B(-\sqrt{3}, 1)$, $C(\sqrt{3}, 1)$.

16. Вычислите работу A, которую совершает сила $\vec{F}(4, -3)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $B(-1, 5)$ в положение $C(1, 2)$.

17. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, для которого $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 3)$.

18. Найдите площадь треугольника ABC, для которого $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(1, 3)$.

19. Докажите, что площадь s треугольника $A_1A_2A_3$, вершины которого имеют координаты $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и расположены в направлении против часовой стрелки, выражается формулой

$$s = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

20. Докажите, что площадь s многоугольника $A_1 \ldots A_n$, вершины которого $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, расположены в направлении против часовой стрелки, выражается формулой

$$s = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

7. Уравнение прямой

Рассмотрим прямую на координатной плоскости. Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный этой прямой, называется ***вектором нормали*** (рис. 7.1).

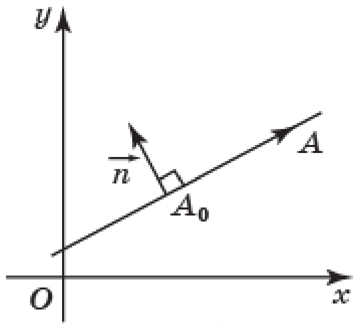


Рис. 7.1

Пусть точка $A_0(x_0,\ y_0)$ принадлежит этой прямой. Точка $A(x,\ y)$ будет принадлежать этой прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0)$ будет перпендикулярен вектору нормали $\vec{n}(a, b)$, т. е. если скалярное произведение этих векторов будет равно нулю.

Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Точка $A(x,\ y)$ будет принадлежать данной прямой, если её координаты обращают это уравнение в тождество.

В этом случае говорят, что уравнение задаёт прямую.

Обозначая $-ax_0 - by_0 = c$, данное уравнение можно переписать в виде

$$ax + by + c = 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Прямая на плоскости задаётся уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c - некоторые числа, причём a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора нормали $\vec{n}$.

Если $b \neq 0$, то, разделив на b, уравнение прямой приводится к виду

$$y = kx + l.$$

Коэффициент k называется ***угловым коэффициентом*** этой прямой.

Выясним его геометрический смысл.

Рассмотрим на прямой две точки $A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$, $x_1 \neq x_2$ (рис. 7.2).

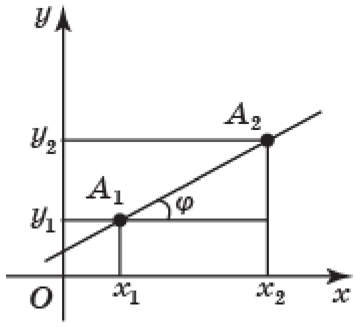


Рис. 7.2

Их координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$y_1 = kx_1 + l,\ y_2 = kx_2 + l.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Следовательно,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Значит, угловой коэффициент k равен тангенсу угла φ, который образует прямая с осью абсцисс.

Направляющим вектором прямой называется вектор $\vec{m}(c, d)$, параллельный или лежащий на данной прямой.

Найдём уравнение прямой с данным направляющим вектором $\vec{m}(c, d)$, проходящей через данную точку $A_0(x_0, y_0)$ (рис. 7.3).

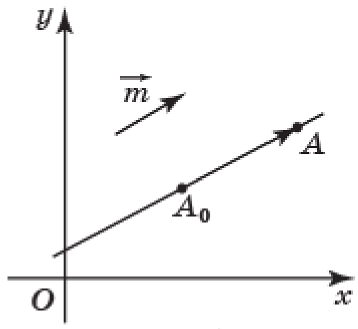


Рис. 7.3

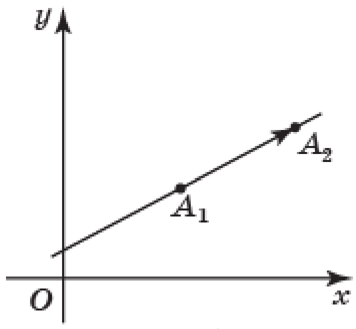


Рис. 7.4

В этом случае вектором нормали к данной прямой будет вектор $\vec{n}(d, -c)$. Следовательно, искомым уравнением прямой будет уравнение

$$d(x - x_0) – c(y - y_0) = 0.$$

Найдём уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ (рис. 7.4).

В этом случае в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{m}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. В качестве точки A_0, принадлежащей данной прямой, возьмём точку $A_1(x_1, y_1)$. Подставляя координаты направляющего вектора и точки A_1 в уравнение прямой, получим уравнение прямой

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Прямая, проходящая через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ задаётся уравнением

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

Заметим, что указанное в этой теореме равенство можно переписать, используя определитель второго порядка, а именно,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведём ещё один способ задания прямой, пересекающей оси координат (рис. 7.5) и проходящей через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$.

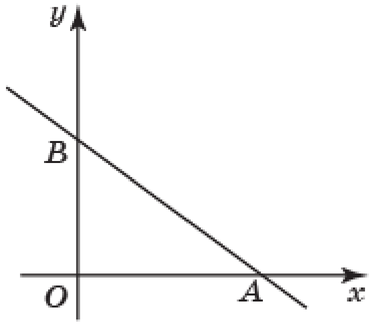


Рис. 7.5

Непосредственно проверяется, что искомым уравнением этой прямой является уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Выясним взаимное расположение прямых на плоскости, в зависимости от их уравнений.

Две прямые на плоскости будут параллельны, если их векторы нормали $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ коллинеарны, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$.

Для прямых, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

векторы нормалей имеют координаты (a_1, b_1), (a_2, b_2). Следовательно, такие прямые параллельны, если для некоторого числа t выполняются равенства

$$a_2 = ta_1,\ b_2 = tb_1.$$

При этом, если $c_2=tc_1$, то данные уравнения определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

В случае, если две прямые пересекаются, то угол φ между ними можно вычислить через формулу скалярного произведения их векторов нормали. А именно,

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

В частности, прямые будут перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Для прямой l, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, и точки $A_0(x_0, y_0)$, не принадлежащей этой прямой, выведем формулу расстояния от данной точки до данной прямой (рис. 7.6).

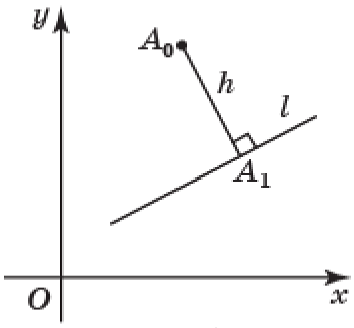


Рис. 7.6

Уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной данной прямой, имеет вид $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

находим координаты точки A_1 пересечения этой прямой с данной

$$x_1 = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, y_1 = \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2}.$$

Искомое расстояние h выражается формулой

$$h = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В программе GeoGebra прямую можно задавать с помощью инструмента «Прямая». Для этого нужно выбрать этот инструмент и указать две точки. В результате на экране появится прямая, проходящая через эти точки.

Например, на рисунке 7.7 показана прямая, проходящая через точки A и B.

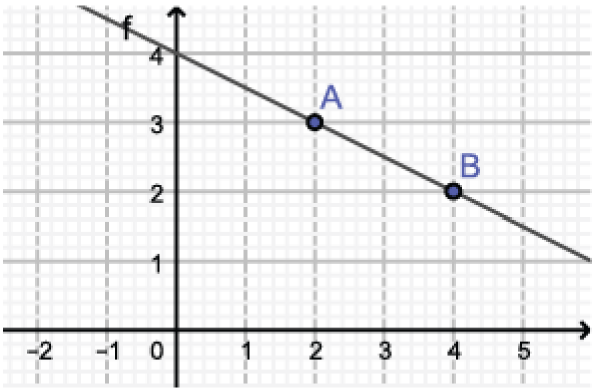


Рис. 7.7

Прямую можно получить, написав в строке «Ввод» её уравнение. Например, если написать уравнение x + 2y = 8, то получим прямую, изображённую на рисунке 7.7.

В программе GeoGebra с помощью инструментов «Параллельная прямая» и «Перпендикулярная прямая» можно проводить прямые, проходящие через данную точку и параллельные или перпендикулярные данной прямой (рис. 7.8).

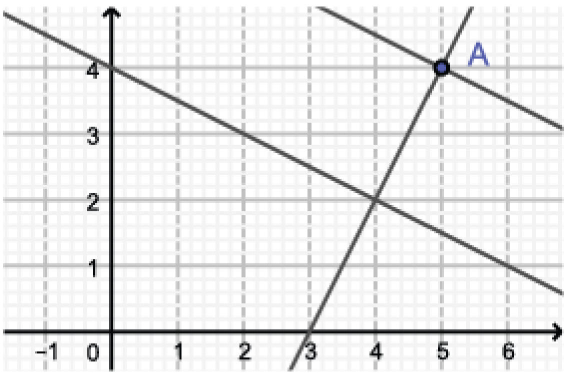


Рис. 7.8

С помощью инструмента «Угол» можно находить приближённое значение угла между двумя прямыми. Для этого нужно выбрать этот инструмент и указать левой кнопкой «мыши» данные прямые. При этом на экране появится искомое приближённое значение (рис. 7.9).

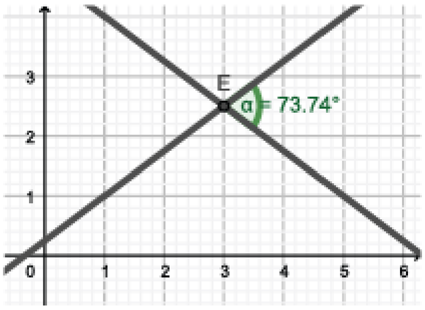


Рис. 7.9

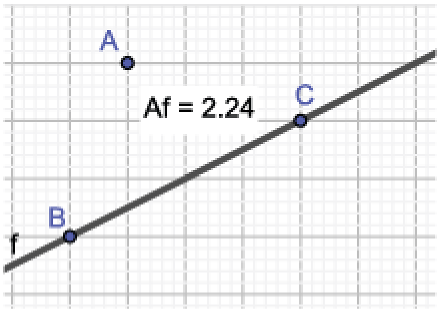


Рис. 7.10

С помощью инструмента «Расстояние или длина» можно находить приближённое значение расстояния от точки до прямой. Для этого нужно выбрать этот инструмент и указать левой кнопкой «мыши» данные точку и прямую. При этом на экране появится искомое приближённое значение (рис. 7.10).

Упражнения

1. Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox; б) Oy?

2. Найдите координаты точки пересечения прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, с осями координат ($a \neq 0, b \neq 0$).

3. Прямая задана уравнением $2x - 3y + 1 = 0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.

4. Напишите уравнения прямых a_1, a_2, изображённых на рисунке 7.11.

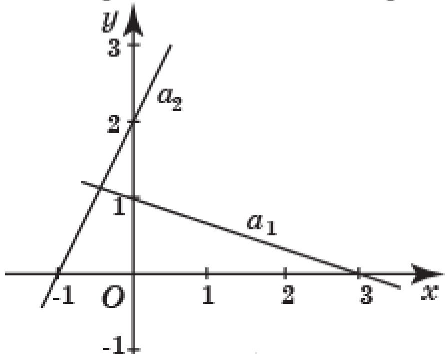


Рис. 7.11

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 0,5$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -0,5$. Нарисуйте эти прямые.

6. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями: а) $2x + y – 1 = 0$, $x – 2y + 3 = 0$; б) $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Нарисуйте эти прямые.

7. Найдите угловой коэффициент прямой: а) $3x - 2y + 4 = 0$; б) $2x + y - 1 = 0$.

8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2, 1)$ с вектором нормали $\vec{n}$ (1, -1).

9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(0, 1)$, $B(1, 0)$.

10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1, 3)$, $N(1, 4)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

11. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(-1, 3)$ и параллельной: а) оси Ox; б) оси Oy; в) прямой $y = 2x$.

12. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(2, 1)$, и перпендикулярной прямой, задаваемой уравнением: а) $x + y + 1 = 0$; б) $2x - 3y + 4 = 0$.

13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(-1, 2)$ и параллельной прямой, задаваемой уравнением: а) $x + y + 1 = 0$; б) $2x - 3y + 4 = 0$.

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

15. Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны:

1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;

2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;

3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;

4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

16. Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$;

б) $x - 3y + 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

17. Вершины A, B, C треугольника ABC имеют координаты соответственно $(0, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 1)$. Найдите:

а) уравнения прямых, содержащих медианы этого треугольника, координаты точки M их пересечения;

б) уравнения прямых, содержащих высоты этого треугольника, координаты точки H их пересечения.

в) уравнения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника;

г) координаты центра окружности, описанной около этого треугольника.

18. Найдите расстояние от точки: а) $O(0, 0)$; б) $A(3, -1)$ до прямой, заданной уравнением $3x + 4y - 12 = 0$.

19. Точка $H(-2, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

20. Напишите уравнение прямой, симметричной прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат O.

21. Напишите уравнение окружности с центром в точке с координатами $(2, 2)$, касающаяся прямой, заданной уравнением $x + 2y - 2 = 0$.

22. Напишите уравнение касательной к окружности с центром в начале координат и радиусом 1, проходящей через точку $A(2, 0)$.

8. Аналитическое задание фигур

Рассмотрим прямую на координатной плоскости, заданную уравнением $ax + by + c = 0$, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0)$. Её вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (a, b) и определяет полуплоскость, ограниченную данной прямой (рис. 8.1).

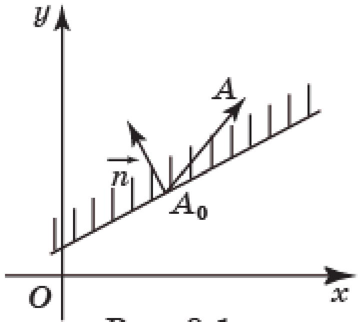


Рис. 8.1

Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости тогда и только тогда, когда угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°. Это выполняется в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нуля, т. е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = a(x - x_0) + b(y - y_0) \geq 0$. Так как $-ax_0 - by_0 = c$, то точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax + by + c \geq 0$.

Аналогично, точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости, по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \leq 0$.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Предположим, что стороны выпуклого n-угольника лежат на прямых, заданных уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$\text{.................},$$
$$a_nx + b_ny + c_n = 0.$$

В этом случае многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей. Следовательно, для координат (x, y) его точек выполняется система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и задаёт этот многоугольник.

Например, неравенства $x \geq -1$, $y \geq -1$, $x \leq 1$, $y \leq 1$, которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

задают квадрат (рис. 8.2).

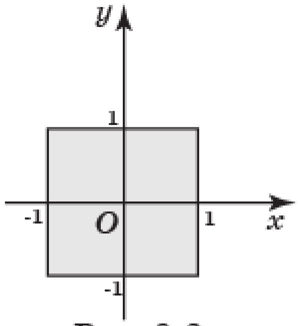


Рис. 8.2

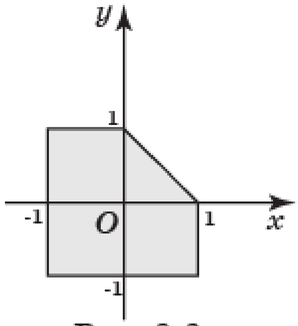


Рис. 8.3

Если к этим неравенствам добавить ещё одно неравенство $x + y \leq 1$, то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 8.3).

Для получения изображения полуплоскости в программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать неравенство, задающее эту полуплоскость, и нажать “Enter”.

Для получения выпуклого многоугольника, задаваемого системой неравенств, в строке «Ввод» нужно набрать неравенства, входящие в систему, разделить их символом $\wedge$ и нажать “Enter”.

Например, для получения треугольника (рис. 8.4), задаваемого системой неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \leq 5, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

в строке «Ввод» нужно набрать $x + 2y \leq 5 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$ и нажать “Enter”.

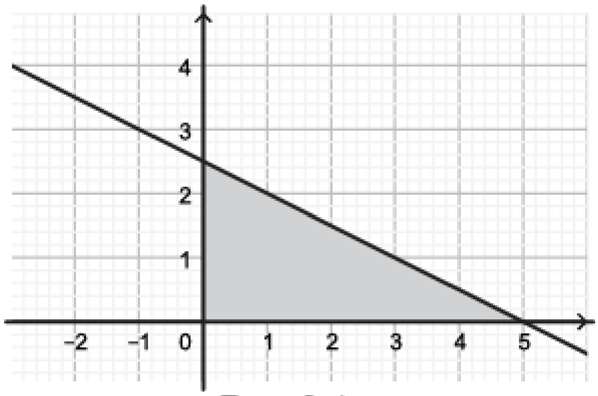


Рис. 8.4

Используя аналитическое задание фигур, можно находить решения уравнений и неравенств с параметром, а также наименьшие и наибольшие значения выражений.

Приведём примеры таких задач.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

Решение. Первое уравнение задаёт квадрат, второе – окружность (рис. 8.5). Наибольшее число решений системы получается, если $1 < a < \sqrt{2}$.

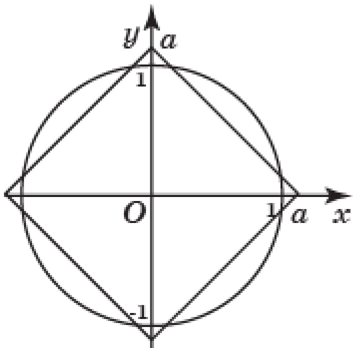


Рис. 8.5

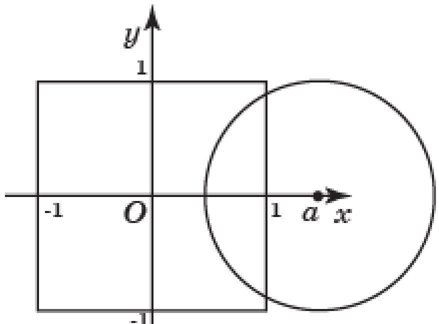


Рис. 8.6

Пример 2. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x+y| + |x-y| = 2, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет два решения.

Решение. Первое уравнение задаёт квадрат, второе – окружность (рис. 8.6).

Два решения системы получается, если $1 < a < 2$ или $-2 < a < -1$.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $(a - c)^2 + (b - d)^2$, если числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16. \end{cases}$$

Решение. Выражение $(a - c)^2 + (b - d)^2$ представляет собой квадрат расстояния между точками с координатами (*a*, *b*) и (*c*, *d*). Первая из них лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом 3, вторая – на окружности с тем же центром и радиусом 4 (рис. 8.7).

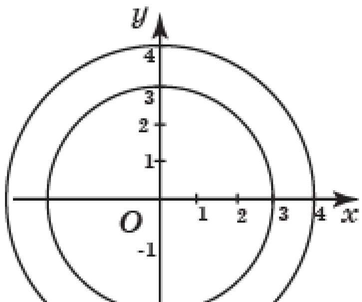


Рис. 8.7

Наибольшее расстояние между точками этих окружностей равно сумме радиусов, т. е. 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, т. е. 1. Поэтому искомые значения равны 49 и 1.

Упражнения

1. Укажите фигуру, координаты которой удовлетворяют неравенствам: а) $x > 0$; б) $x < 0$; в) $y > 0$; г) $y < 0$.

2. Укажите фигуру, координаты которой удовлетворяют неравенствам: а) $x > 0, y > 0$; б) $x < 0, y > 0$; в) $x > 0, y < 0$; г) $x < 0, y < 0$.

3. Изобразите многоугольник, задаваемый неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3, \\ x + y \leq 4. \end{cases}$$

4. Определите, какой полуплоскости $3x + 5y - 2 \geq 0$ или $3x + 5y - 2 \leq 0$, принадлежат точки: а) A (0, 1); б) B (1, 2); в) C (0,0).

5. Какую фигуру задаёт система неравенств:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ 2 \leq y \leq 4? \end{cases}$$

6. Изобразите многоугольник, задаваемый неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x + 2, \\ 2x + 3y \leq 6. \end{cases}$$

7. Напишите неравенства, задающие фигуру, изображённую на рисунке 8.8.

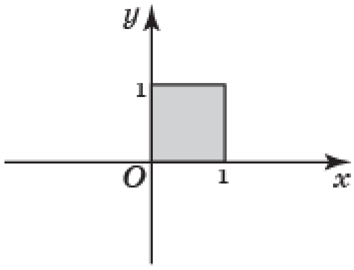


Рис. 8.8

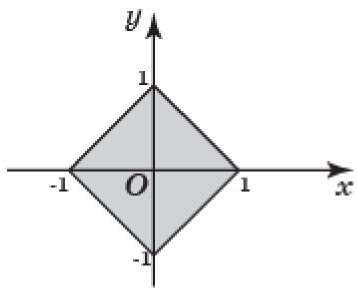


Рис. 8.9

8. Напишите неравенства, задающие фигуру, изображённую на рисунке 8.9.

9. Напишите неравенства, которым удовлетворяют координаты точек фигур, изображённых на рисунке 8.10.

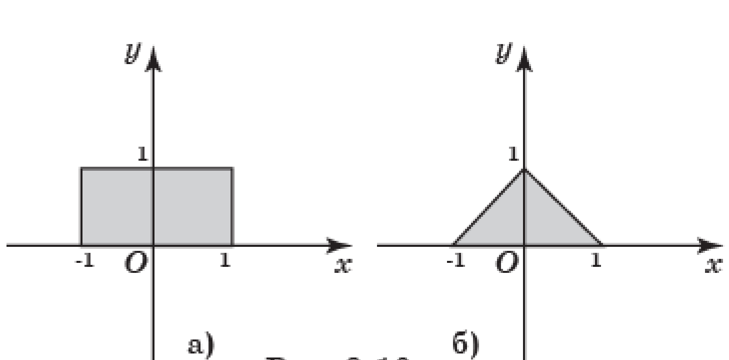


Рис. 8.10

10. Изобразите фигуру, координаты которой удовлетворяют неравенству $2|x| + 3|y| \leq 6$.

11. Изобразите фигуру, координаты которой удовлетворяют равенству $|2x + 3y| + |2x - 3y| = 12$.

12. Напишите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 4)$.

13. Напишите неравенства, задающие многоугольник, изображённый на рисунке 8.11.

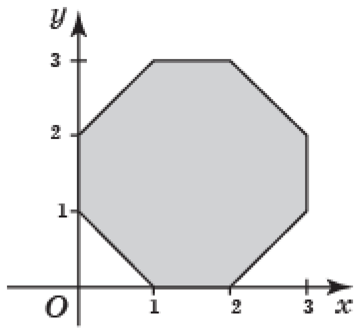


Рис. 8.11

14. Напишите неравенства, задающие фигуры, изображённые на рисунке 8.12.

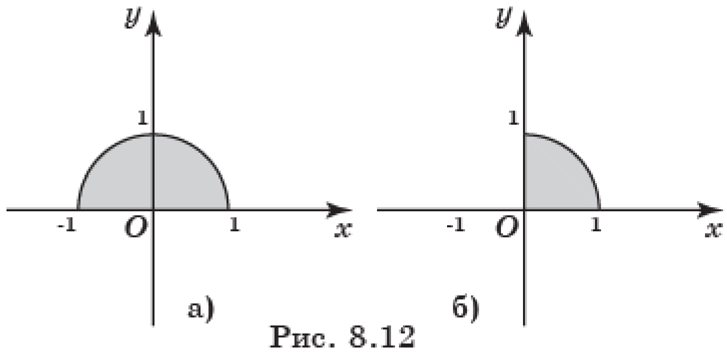


Рис. 8.12

15. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 2a, \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений. Изобразите фигуры, задаваемые уравнениями данной системы в программе GeoGebra.

16. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x| + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Изобразите фигуры, задаваемые уравнениями данной системы в программе GeoGebra.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|x-2|+|y-3|+|y-4|=2, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет единственное решение. Изобразите фигуры, задаваемые уравнениями данной системы в программе GeoGebra.

18. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Изобразите фигуры, задаваемые уравнениями данной системы в программе GeoGebra.

9. Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются задачи оптимизации. Среди них:

– транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

– задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определённым медицинским требованиям;

– задача составления оптимального плана производства;

– задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912-1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощённый вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ требуется завезти сырьё одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья (в т) на складе		Потребность в сырье (в т) на заводе		
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$
20	25	10	15	20

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	5	7	10
$С_2$	3	4	6

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем её условие и переведём его на язык математики, т. е. составим ***математическую модель***.

Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим соответственно x и y. Тогда на третий завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y$ тонн сырья, а со второго склада на заводы нужно будет перевезти соответственно $10 - x$, $15 - y$, $x + y$ тонн сырья.

Запишем эти данные в виде таблицы.

Таблица 3

Склады	Количество сырья (в т), перевезённое на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	x	y	$20\text{-}x\text{-}y$
$С_2$	$10\text{-}x$	$15\text{-}y$	$x+y$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 10 - x \geq 0, \\ 15 - y \geq 0, \\ 20 - x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство является следствием двух первых и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник *OABCD*, изображённый на рисунке 9.1. Назовём его ***многоугольником ограничений***.

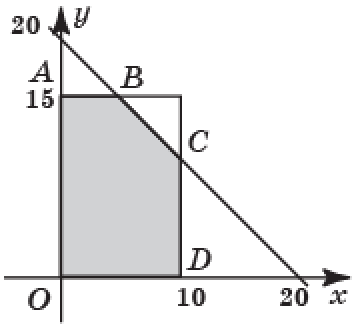


Рис. 9.1

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров будет равно

$$5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) +4(15 - y) + 6(x + y) = 290 - 2x - y.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 290 - 2x - y$ на многоугольнике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = 2x + y$. Тогда $F = 290 - f$.

Воспользуемся тем, что свои наименьшее и наибольшее значения линейная функция достигает в вершинах многоугольника ограничений. Это свойство является основополагающим в задачах оптимизации.

Используя геометрические соображения, покажем, например, что линейная функция $ax + by$ (b>0) принимает своё наибольшее значение на многоугольнике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение c функции $ax + by$. Тогда уравнение $ax + by =$ с задаёт прямую на плоскости, которая характеризуется тем, что во всех её точках данная линейная функция принимает значение c. В точках, расположенных выше этой прямой, она принимает значения, большие c, а в точках, расположенных ниже этой прямой, – значения, меньшие c. Если число c выбрать достаточно большим, то прямая $ax + by = c$ расположится выше многоугольника. Будем опускать эту прямую, уменьшая значения c, до тех пор, пока она не коснётся многоугольника. Такое касание произойдёт при некотором c_0 в какой-нибудь вершине многоугольника (рис. 9.2) или по какому-нибудь его ребру.

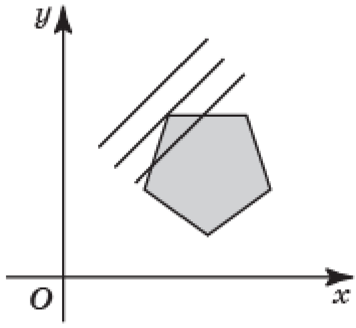


Рис. 9.2

В точках касания линейная функция принимает значение c_0. Поскольку все остальные точки многоугольника лежат ниже прямой, значения линейной функции в этих точках будут меньше c_0. Таким образом, c_0 – искомое наибольшее значение.

Значит, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах этого многоугольника и выбрать из них наибольшее.

Найдём значения функции $f = 2x + y$ в вершинах многоугольника ограничений, учитывая, что вершины имеют координаты $O(0, 0)$, $A(0, 15)$, $B(5, 15)$, $C(10, 10)$, $D(10, 0)$:

$$f(O) = 0, f(A) = 15, f(B) = 25, f(C) = 30, f(D) = 20.$$

Наибольшее значение функции f достигается в точке $C(10,10)$ и равно 30. Следовательно, наименьшее значение функции F достигается в точке C и равно 290 - 30 = 260. В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задаётся таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Количество сырья (в т), перевезённое на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	10	10	0
$С_2$	0	5	20

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно двум и поэтому в процессе её решения получился многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше двух, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства с очень большим n. При решении таких задач используются компьютеры.

Упражнения

1. Изобразите фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x + 4y - 48 \le 0, \\ 3x - 4y \ge 0, \\ x \ge 4, \\ y \ge 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 2x - y \ge 0, \\ x - y \le 1, \\ x \le 7, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

2. Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при условии

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 5x + 3y \le 15, \\ 2x + 6y \le 12, \\ x \le 3, \\ y \le 2. \end{cases}$$

3. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ -2x - y - 2 \ge 0, \\ 2 - x - y \ge 0, \\ 5 - x - y \ge 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

4. Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида - 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 120 руб., а от реализации одного трансформатора второго вида - 100 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

5. Песок для двух строительных комбинатов $С_1$ и $С_2$ берется из трёх карьеров $К_1$, $К_2$, $К_3$. Первому строительному комбинату требуется 40 тонн песка в день, второму – 30 тонн. В карьерах $К_1$, $К_2$, $К_3$ добывается соответственно 20 т 30 т и 20 т песка в день. Расстояния от карьеров до строительных комбинатов $С_1$ и $С_2$ равны соответственно: 5 км, 10 км, 20 км и

20 км, 15 км, 10 км. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

6. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 8 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 30 усл. ед., а улучшенный – 40 усл. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

10. Кривые, заданные уравнением в декартовых координатах

Здесь мы рассмотрим несколько классических кривых, определяемых как геометрические места точек, и найдём уравнения, которыми они задаются.

1. Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой d и данной точки F, не принадлежащей этой прямой. Прямая d называется ***директрисой***, а точка F – ***фокусом*** параболы (рис. 10.1). Прямая, проходящая через фокус параболы и перпендикулярная директрисе, называется ***осью*** параболы.

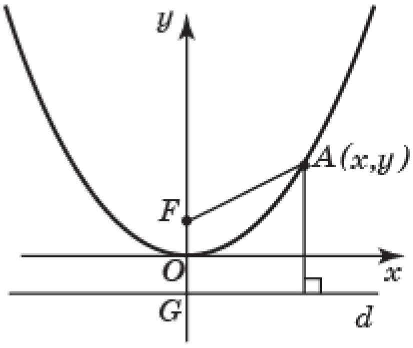


Рис. 10.1

В программе GeoGebra параболу с данным фокусом и директрисой можно получить с помощью инструмента «Парабола». Для этого нужно выбрать этот инструмент, указать точку (фокус) и прямую (директрису) и нажать “Enter”. В результате на экране появится парабола с данными фокусом и директрисой (рис. 10.2).

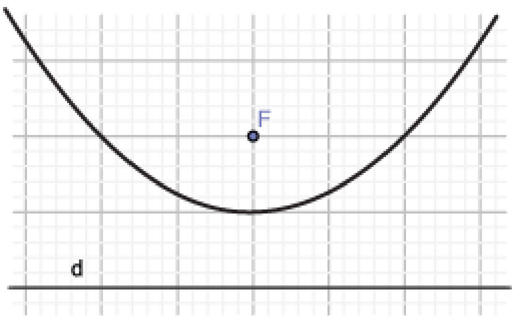


Рис. 10.2

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с её директрисой через G. Длину отрезка FG обозначим через $2a$ (рис. 10.1). Введём систему координат, считая началом координат середину O отрезка FG, осью абсцисс – прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат - ось параболы. Тогда фокус F будет иметь координаты $(0, a)$. Директриса будет иметь уравнение $y = -a$.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от неё до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2 + (y - a)^2}$ и $|y + a|$. Точка A принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство $\sqrt{x^2+(y-a)^2}=|y+a|$.

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь уравнение

$$4ay = x^2,$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

Для получения параболы, заданной этим уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунок a. В строке «Ввод» наберём 4ay=x^2 и нажмём "Enter". На экране появится парабола. Значение a можно изменять. При этом форма параболы будет изменяться.

2. Эллипс – геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, большая расстоянию между точками F_1, F_2. Точки F_1, F_2 называются ***фокусами*** эллипса (рис. 10.3).

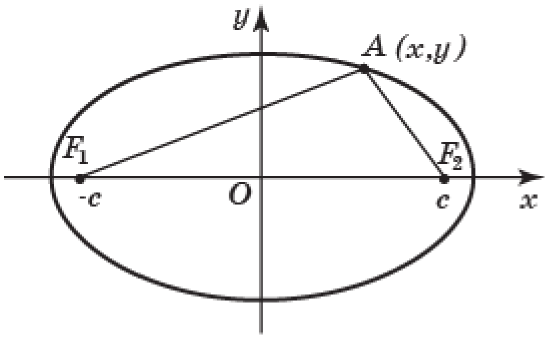


Рис. 10.3

В программе GeoGebra эллипс с данными фокусами можно получить с помощью инструмента «Эллипс». Для этого нужно выбрать этот инструмент, указать две точки (фокусы) и точку на эллипсе и нажать "Enter". В результате на экране появится эллипс с данными фокусами, проходящий через данную точку (рис. 10.4).

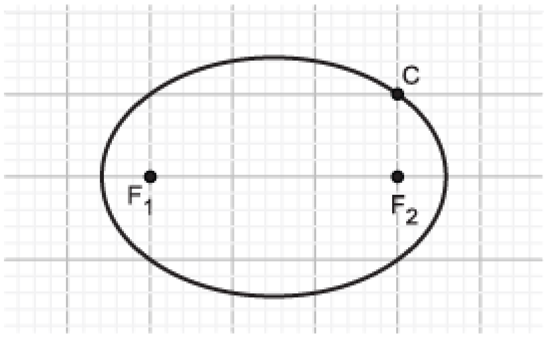


Рис. 10.4

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 - фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введём систему координат, считая началом координат середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс - прямую F_1F_2, осью ординат - прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (рис. 10.3). Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $A(x, y)$ – точка плоскости. Расстояния от неё до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

где a – некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесём второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведём обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Приведём подобные члены, получим уравнение

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Ещё раз возведём в квадрат и приведём подобные члены, получим уравнение

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^4-a^2c^2.$$

Обозначим $b^2=a^2-c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

Заметим, что этот эллипс можно получить из окружности с центром в начале координат и радиусом a сжатием или растяжением в направлении оси Oy. При этом сжатии точка окружности с координатами (x, y) переходит в точку эллипса с координатами $(x, \frac{b}{a}y)$ (рис. 10.5).

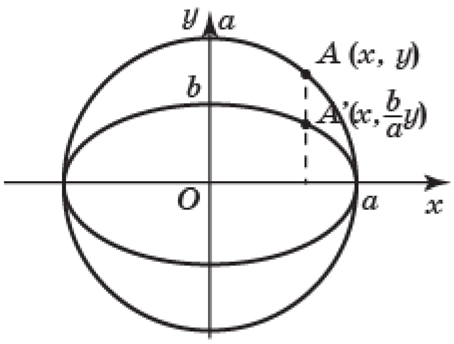


Рис. 10.5

Для получения эллипса, заданного уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунки a и b. В строке «Ввод» наберём x^2/a^2+y^2/b^2=1 и нажмём “Enter”. На экране появится эллипс. Значения a и b можно изменять. При этом форма эллипса также будет изменяться.

3. Гипербола – геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть фиксированное число, меньшее расстояния между точками F_1, F_2. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы (рис. 10.6).

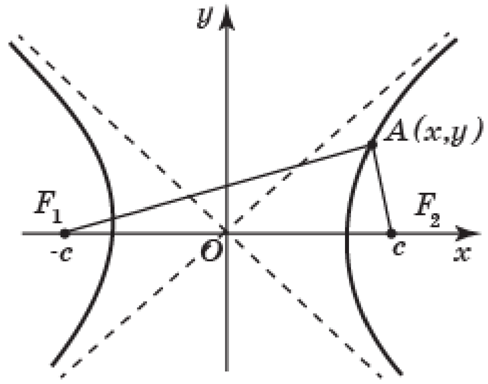


Рис. 10.6

В программе GeoGebra гиперболу с данными фокусами можно получить с помощью инструмента «Гипербола». Для этого нужно выбрать этот инструмент, указать две точки (фокусы) и точку на гиперболе и нажать “Enter”. В результате на экране появится гипербола с данными фокусами, проходящая через данную точку (рис. 10.7).

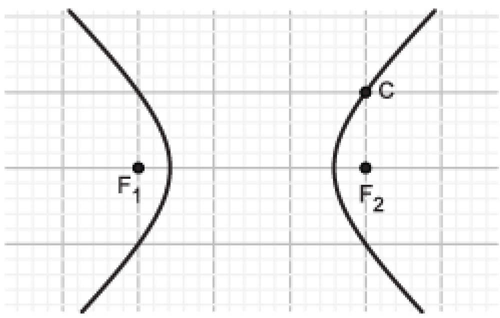


Рис. 10.7

Выведем уравнение гиперболы. Введём систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox, и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Точка $A(x,\ y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AF_1 - AF_2 = \pm 2a$, где a – некоторое фиксированное число, $0 < a < c$.

Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Перенесём второй корень в правую часть и возведём обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Обозначим $b^2=c^2-a^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое и будет искомым уравнением гиперболы.

Прямые, заданные уравнениями $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, называются ***асимптотами*** гиперболы.

Для получения гиперболы, заданной этим уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунки a и b. В строке «Ввод» наберём x^2/a^2-y^2/b^2=1 и нажмём "Enter". На экране появится гипербола. Значения a и b можно изменять. При этом форма гиперболы также будет изменяться.

4. Конхоида Никомеда. Пусть даны прямая c и точка O, находящаяся на расстоянии d от этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие данную прямую в точках C. От точек C в обе стороны на этой прямой откладываются отрезки CA и CB, равные l. Геометрическое место точек A и B образует кривую, называемую конхоидой Никомеда (рис. 10.8).

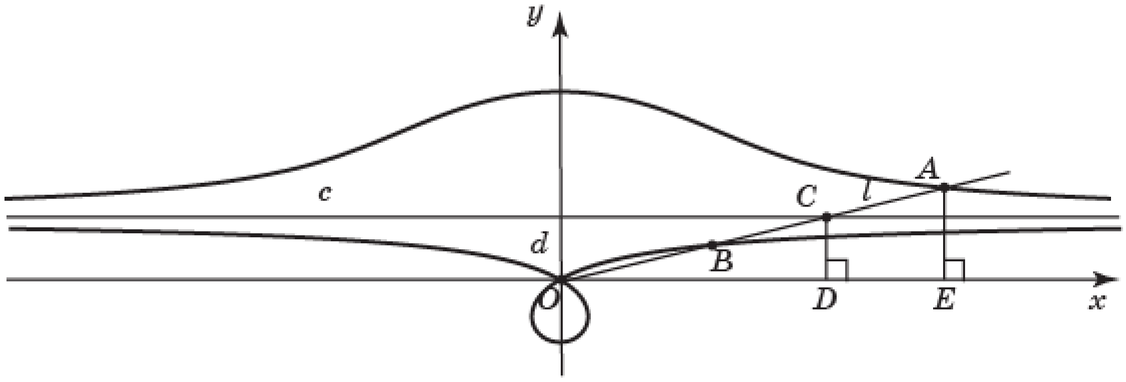


Рис. 10.8

Выведем уравнение конхоиды. Введём систему координат, считая началом координат точку O, а осью Ox прямую, параллельную данной прямой. Пусть точка $A(x, y)$ принадлежит конхоиде. Тогда точка C имеет координаты $\left(\frac{dx}{y}, d\right)$. Квадрат расстояния между точками A и C равен

$$\left(\frac{dx}{y} - x\right)^2 + (d - y)^2.$$

Приравнивая это значение к l^2 и делая преобразования, получим искомое уравнение конхоиды.

$$(x^2 + y^2)(y - d)^2 = l^2y^2.$$

Для получения конхоиды, заданной этим уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунки d и l. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)(y-d)^2=l^2y^2 и нажмём "Enter". На экране появится конхоида. Значения d и l можно изменять. При этом форма конхоиды также будет изменяться. На рисунке 10.9 показана конхоида, для которой $d = 1$, $l = 2$.

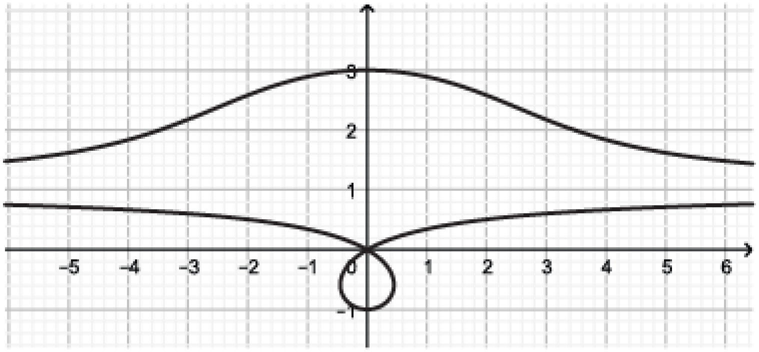


Рис. 10.9

5. Лемниската Бернулли – геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух данных точек F_1, F_2 равно d^2, где $2d$ – расстояние между данными точками F_1 и F_2 (рис. 10.10).

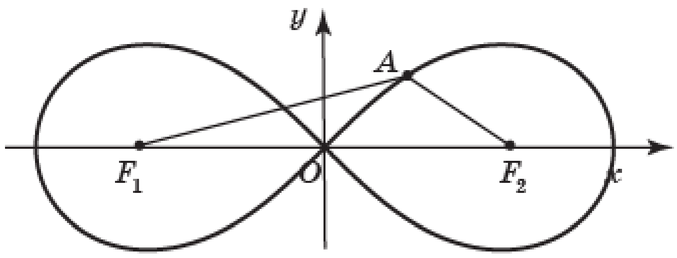


Рис. 10.10

Выведем уравнение лемнискаты. Введём систему координат, считая началом координат середину O отрезка F_1F_2, а осью Ox прямую F_1F_2. Пусть точка $A(x, y)$ принадлежит лемнискате. Расстояния от точки A до точек F_1, F_2 равны соответственно $\sqrt{(x+d)^2+y^2}$, $\sqrt{(x-d)^2+y^2}$. Так как произведение этих расстояний равно d^2, то получаем уравнение

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-d)^2+y^2}=d^2,$$

преобразуя которое, будем иметь искомое уравнение лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2=2d^2(x^2-y^2).$$

Для получения лемнискаты, заданной этим уравнением, в программе GeoGebra создадим ползунок d. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)^2=2d^2(x^2–y^2) и нажмём “Enter”. На экране появится лемниската. Значение d можно изменять. При этом форма лемнискаты будет также изменяться. На рисунке 10.11 показана лемниската, для которой $d = 1$.

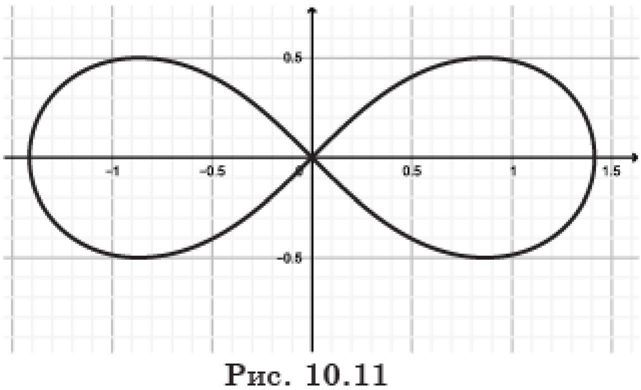


Рис. 10.11

Упражнения

1. Для параболы, заданной уравнением $y = x^2$, найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

2. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y^2 = x$, является параболой. Найдите фокус и директрису этой параболы. Получите эту параболу в программе GeoGebra.

3. Докажите, что кривая, заданная уравнением $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является параболой. Найдите её фокус и директрису.

4. Для эллипса, заданного уравнением $x^2 + 2y^2 = 1$, найдите координаты фокусов. Получите этот эллипс в программе GeoGebra.

5. Докажите, что кривая, заданная уравнением $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$, где a и c положительны и различны, $e < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, является эллипсом.

6. Для гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$, найдите координаты фокусов и уравнения асимптот. Получите эту гиперболу и асимптоты в программе GeoGebra.

7. Докажите, что кривая, заданная уравнением $ax^2 + bx - cy^2 - dy + e = 0$, где a и c положительны и различны, $e \neq \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4c}$, является гиперболой.

8. Найдите уравнение ***строфоиды*** – кривой, которая получается следующим образом. Даны прямая c и точка O, на расстоянии d от этой прямой. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую C. Через точку O проводятся прямые, пересекающие прямую c в точках C. От точек C в обе стороны на прямой c откладываются отрезки CA и CB, равные отрезку CP (рис. 10.12). Геометрическое место точек A и B будет искомой строфоидой. Постройте строфоиду с помощью программы GeoGebra.

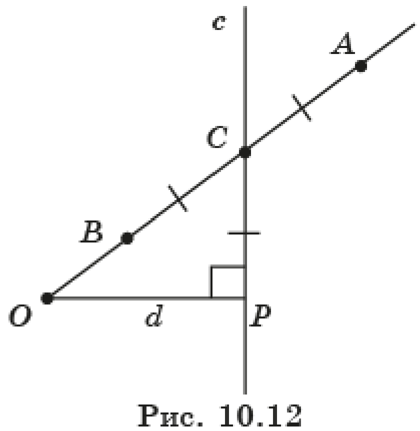


Рис. 10.12

9. Для двух данных точек A и B найдите геометрическое место точек, расстояние от которых до точки A в два раза больше расстояния до точки B.

11. Преобразования координат

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат (O, x, y) и (O', x', y') (рис. 11.1).

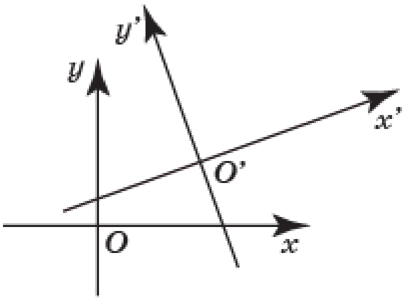


Рис. 11.1

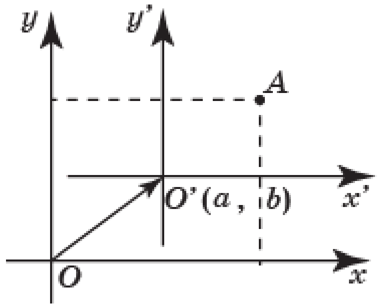


Рис. 11.2

Найдём формулы, выражающие координаты (x, y) в одной системе координат через координаты (x', y') в другой системе координат.

Рассмотрим сначала случай, когда система координат (O', x', y') получается параллельным переносом системы координат (O, x, y), при котором точка $O(0, 0)$ переходит в точку $O'(a, b)$ (рис. 11.2).

В этом случае координаты точки A в системе координат (O, x, y) выражаются через координаты этой точки в системе координат (O', x', y') по формулам

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай, когда система координат (O', x', y') получается поворотом системы координат (O, x, y) вокруг точки O на угол φ. (рис. 11.3).

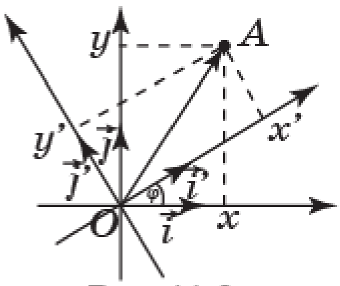


Рис. 11.3

В этом случае координатные векторы $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}$ системы координат (O', x', y') имеют координаты $\vec{\imath'}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{\jmath'}(-\sin\varphi, \cos\varphi)$, Следовательно, они выражаются через координатные векторы $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ системы координат (O', x', y') по формулам $\vec{\imath'} = \cos\varphi \cdot \vec{\imath} + \sin\varphi \cdot \vec{\jmath}, \vec{\jmath'} = -\sin\varphi \cdot \vec{\imath} + \cos\varphi \cdot \vec{\jmath}$.

Пусть точка A в этих системах координат имеет координаты (x', y') и (x, y). Тогда имеют место равенства

$$\overrightarrow{OA} = x' \cdot \vec{\imath'} + \cdot\, y' \cdot \vec{\jmath'} = x' \cdot (\cos\varphi \cdot \vec{\imath} + \sin\varphi \cdot \vec{\jmath}) + y' \cdot (-\sin\varphi \cdot \vec{\imath} + \cos\varphi \cdot \vec{\jmath}) =$$
$$= (x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\vec{\imath} + (x' \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi)\vec{\jmath}.$$

Следовательно, координаты точки A в системе координат (O, x, y) выражаются через координаты этой точки в системе координат (O', x', y') по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

В случае, если система координат (O', x', y') получается симметрией системы координат (O, x, y) относительно осей Ox или Oy, то координаты точки A в системе координат (O, x, y) выражаются через координаты этой точки в системе координат (O', x', y') по формулам соответственно

$$\begin{cases} x = x', \\ y = -y', \end{cases} \quad \begin{cases} x = -x', \\ y = y'. \end{cases}$$

Заметим, что любое движение плоскости, сохраняющее ориентацию, можно представить в виде композиции поворота и параллельного переноса, а движение плоскости, меняющее ориентацию, можно представить в виде композиции симметрии относительно оси Ox, поворота и параллельного переноса.

Таким образом, если система координат (O', x', y') получается движением системы координат (O, x, y), то координаты точки A в системе координат (O, x, y) выражаются через координаты этой точки в системе координат (O', x', y') по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - \varepsilon y' \sin\varphi + a, \\ y = x' \sin\varphi + \varepsilon y' \cos\varphi + b, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$, если системы координат ориентированы одинаково, и $\varepsilon = -1$, если они имеют противоположную ориентацию.

Упражнения

1. Система координат (O', x', y') получается поворотом системы координат (O, x, y) вокруг точки O на угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°. Напишите уравнения, выражающие координаты точки A в системе координат (O, x, y) через координаты этой точки в системе координат (O', x', y').

2. Система координат (O', x', y') получается симметрией системы координат (O, x, y) относительно прямой: а) $y = x$; б) $y = 1$; в) $x + y = 1$. Напишите уравнения, выражающие координаты точки A в системе координат (O, x, y) через координаты этой точки в системе координат (O', x', y').

3. Оси координат $O'x'$, $O'y'$, лежат на прямых, задаваемых уравнениями соответственно $y = x - 1$, $y = 3 - x$ (рис. 11.4). Найдите уравнения, выражающие координаты (x, y) через координаты (x', y'),

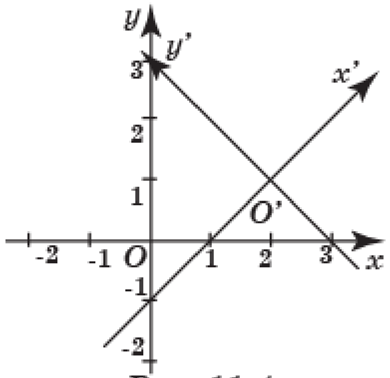


Рис. 11.4

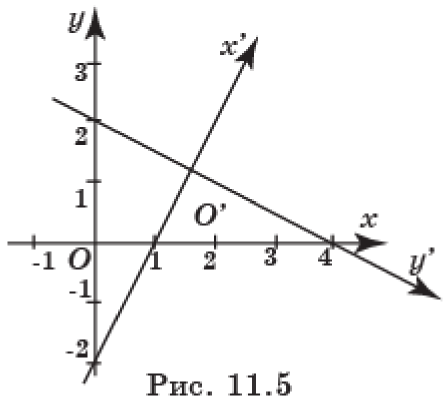


Рис. 11.5

4. Оси координат $O'x'$, $O'y'$, лежат на прямых, задаваемых уравнениями соответственно $2x - y = 2$, $x + 2y = 4$ (рис. 11.5). Найдите уравнения, выражающие координаты (x, y) через координаты (x', y').

5. Докажите, что любое движение плоскости, переводящее точки $A(x, y)$ в точки $A'(x', y')$, задаётся формулами

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + \varepsilon\cos\varphi + b, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$, если движение сохраняет ориентацию, и $\varepsilon = -1$, если оно меняет ориентацию на противоположную.

6. Найдите выражение координат точки $A'(x', y')$, центрально-симметричной точке $A(x, y)$ относительно точки $A_0(x_0, y_0)$.

7. Найдите выражение координат точки $A'(x', y')$, полученной поворотом точки $A(x, y)$ на угол φ вокруг точки: а) $O(0, 0)$; б) $A_0(x_0, y_0)$.

8. Найдите уравнение прямой, полученной поворотом прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, вокруг начала координат на угол φ.

12. Классификация кривых второго порядка

Воспользуемся рассмотренными выше преобразованиями координат для классификации кривых, задаваемых уравнением второго порядка, т. е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \ (*),$$

в котором числа a_{11}, a_{12}, a_{22} одновременно не равны нулю.

Ранее мы рассмотрели частные случаи таких уравнений, среди которых:

1) уравнение $4ay = x^2$, задающее параболу;
2) уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, задающее эллипс;
3) уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, задающее гиперболу.

Эти уравнения называются ***каноническими уравнениями***.

Нашей задачей является выяснение, какие кривые задаёт общее уравнение второго порядка. В каких случаях это уравнение задаёт параболу, эллипс, гиперболу. Для этого мы постараемся упростить это уравнение за счёт выбора подходящей системы координат.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (*) $a_{12} = 0$, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. Тогда параллельным переносом осей координат это уравнение можно привести к виду

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_{00} = 0,$$

где $x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}}$, $y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$, $a'_{00} = a_{00} - \frac{{a'_{10}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{20}}^2}{a'_{22}}$.

Возможны следующие случаи.

1. $a'_{00} = 0$, $a_{11} \cdot a_{22} < 0$. Уравнение задаёт две прямые

$$y' = \pm\sqrt{\frac{-a'_{11}}{a'_{22}}}x'.$$

2. $a'_{00} = 0$, $a_{11} \cdot a_{22} > 0$. Уравнение задаёт одну точку $x' = 0$, $y' = 0$.

3. $a_{20} \neq 0$. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} = c,$$

где $a = a'_{00} \cdot a_{22}$, $b = a'_{00} \cdot a_{11}$, $c = -a_{11} \cdot a_{22}$.

В зависимости от знаков чисел a, b, c это уравнение задаёт эллипс, гиперболу или не задаёт никакую кривую.

Рассмотрим теперь случай, когда в исходном уравнении (*) $a_{12} = 0$, $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$. Тогда параллельным переносом осей координат это уравнение можно привести к уравнению вида

$$a_{11}x'^2 + 2a_{20}y + a'_{00} = 0,$$

где $x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}}$, $a'_{00} = a_{00} - \frac{{a_{10}}^2}{a_{11}}$.

Возможны следующие случаи.

1. $a_{20} \neq 0$. Полученное уравнение можно переписать в виде

$$a_{11}x'^2 + 2a_{20}y' = 0,$$

где $y' = y + \frac{a'_{00}}{2a_{20}}$. Это уравнение задаёт параболу.

2. $a_{20} = 0$. Полученное уравнение имеет вид

$$a_{11}x'^2 + a'_{00} = 0.$$

Если при этом $a_{11} \cdot a'_{00} > 0$, то это уравнение не задаёт никакую кривую на плоскости.

Если $a_{11} \cdot a'_{00} < 0$, то это уравнение задаёт две параллельные прямые

$$x' = \pm\sqrt{\frac{-a'_{00}}{a'_{11}}}.$$

Если $a'_{00} < 0$, то это уравнение задаёт одну прямую $x' = 0$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда в уравнении

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0, a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$$

выполняются равенства $a_{12} = 0$, $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда в исходном уравнении (*) $a_{12} \neq 0$. Попробуем избавиться от слагаемого $2a_{12}xy$. Для этого воспользуемся поворотом системы координат на угол φ. При этом координаты *x*, *y* будут выражаться через координаты *x'*, *y'* повёрнутой системы координат по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение кривой второго порядка. Получим

$$a_{11}(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) +$$
$$+a_{22}(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + 2a_{10}(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) +$$
$$+2a_{20}(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + a_{00} = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(a_{11}cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi){x'}^2 +$$
$$+(-a_{11}\sin 2\varphi + 2\,a_{12}\cos 2\varphi + a_{22}\sin 2\varphi)x'y' +$$
$$+(a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi){y'}^2 +$$
$$+2(a_{10}\cos\varphi + a_{20}\sin\varphi)x' +$$
$$2(-a_{10}\sin\varphi + a_{20}\cos\varphi)y' + a_{00} = 0.$$

Для того чтобы коэффициент при *x'y'* равнялся нулю, нужно чтобы выполнялось равенство

$$-a_{11}\sin 2\varphi + 2\,a_{12}\cos 2\varphi + a_{22}\sin 2\varphi = 0.$$

В случае, если $a_{12} \neq 0$, это равенство эквивалентно равенству

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Выражения для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ можно получить, используя тригонометрические формулы:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\varphi}, \cos^2 2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi}, \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}.$$

При повороте осей координат на угол φ, исходное уравнение преобразуется к уравнению

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0,$$

которое мы рассмотрели ранее.

Пример. Приведём уравнение

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 + 100x - 200y + 100 = 0$$

к каноническому виду.

Избавимся от слагаемого $72xy$. Для этого повернём оси координат на угол φ, для которого $\operatorname{ctg} 2\varphi = -\frac{7}{24}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Формулы поворота осей координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y', \\ y = \dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y'. \end{cases}$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y эти выражения, получим уравнение

$$x'^2 + 4y'^2 - 4x' - 8y' + 4 = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения полные квадраты. Получим уравнение

$$(x' - 2)^2 + 4(y' - 1)^2 - 4 = 0.$$

Параллельный перенос начала координат в точку с координатами (2, 1) приводит уравнение к виду

$$x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0,$$

где

$$\begin{cases} x'' = x' - 2, \\ y'' = y' - 1. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение задаёт эллипс (рис. 12.1)

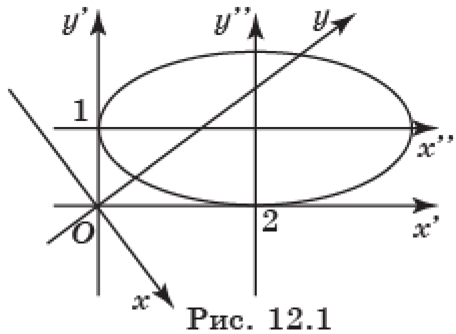


Рис. 12.1

Упражнения

1. Приведите уравнение $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт?

2. Приведите уравнение $x^2 - 6x - 6y - 15 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

3. Приведите уравнение $9x^2 + 4y^2 - 8y = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

4. Приведите уравнение $xy - 1 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

5. Приведите уравнение $xy - 3x + y - 12 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

6. Приведите уравнение $x^2 - \sqrt{3}xy + 1 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

7. Приведите уравнение $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

8. Приведите уравнение $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y - 8 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

9. Приведите уравнение $73x^2 - 72xy + 52y^2 + 380x - 160y + 400 = 0$ к каноническому виду. Какую кривую оно задаёт? Получите эту кривую в программе GeoGebra.

10. Дана прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой, k – некоторое фиксированное положительное число. Выясните, какой фигурой является ГМТ, для которых расстояние до точки F равно расстоянию до прямой d, умноженному на k.

11. Докажите, что расстояние от произвольной точки $A(x, y)$ параболы, заданной уравнением $4ay = x^2$, до точки $F(0, a)$ равно расстоянию до прямой, заданной уравнением $y = -a$. Точка F называется фокусом, прямая – директрисой параболы.

12. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки $A(x, y)$ эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$, до точек $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, постоянна. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

13. Найдите геометрическое место точек $A(x, y)$, сумма квадратов расстояний от которых до точек $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ постоянна и равна d^2.

14. Докажите, что модуль разности расстояний от произвольной точки $A(x, y)$ гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$, до точек $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, постоянен. Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.

13. Кривые, заданные параметрическими уравнениями

Рассмотрим вопрос о том, как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется её координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости её координат x, y от времени t, т. е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки на плоскости (рис. 13.1).

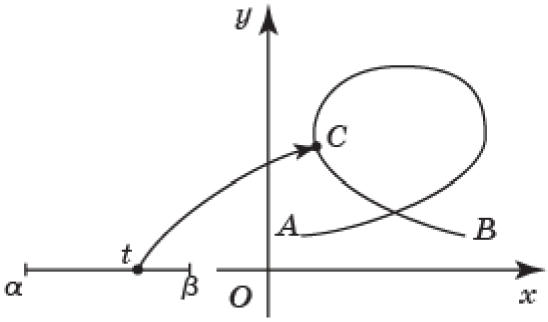


Рис. 13.1

Переменная t называется параметром, а кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям при изменении параметра t, называется ***параметрически заданной кривой*** на плоскости. Сами уравнения называются ***параметрическими уравнениями***.

График функции $y = f(x)$ является частным случаем параметрически заданной кривой на плоскости (рис. 13.2).

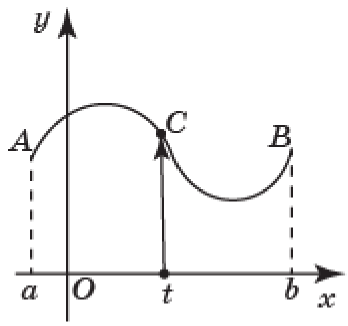


Рис. 13.2

Параметрическими уравнениями в этом случае будут уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Для получения кривой, заданной параметрическими уравнениями, в программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая(x(t),y(t),t,a,b)

и нажать “Enter”.

В результате на экране появится искомая кривая.

Рассмотрим примеры задания кривых параметрическими уравнениями.

1. Окружность. Окружность радиусом R с центром в начале координат (рис. 13.3) можно рассматривать как параметрически заданную кривую на плоскости с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,. \end{cases}$$

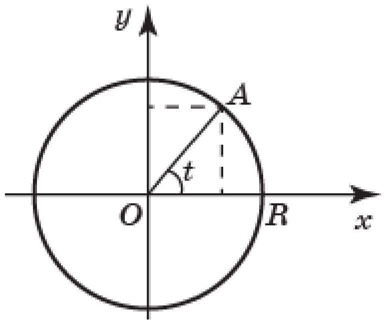


Рис. 13.3

При изменении параметра t от нуля до 2π точка на окружности делает один оборот против часовой стрелки, начиная и заканчивая в точке с координатами (R, 0). При дальнейшем увеличении параметра t точка будет многократно проходить по окружности в направлении против часовой стрелки.

2. Прямая. Рассмотрим прямую с данным направляющим вектором $\vec{m}(c, d)$, проходящую через данную точку $A_0(x_0, y_0)$ (рис. 13.4).

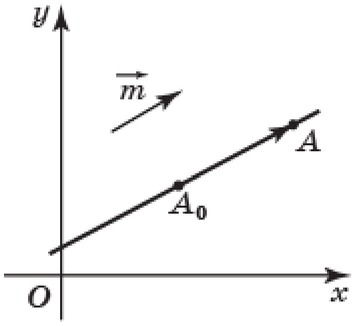


Рис. 13.4

Точка $A(x, y)$ принадлежит этой прямой тогда и только тогда вектор $\overrightarrow{A_0A}$ коллинеарен вектору $\vec{m}$, т. е. для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t\vec{m}$. В координатной форме это равенство можно переписать в виде

$$\begin{cases} x - x_0 = ct, \\ y - x_0 = dt. \end{cases}$$

Следовательно, параметрическими уравнениями прямой являются следующие уравнения.

$$\begin{cases} x = x_0 + ct, \\ y = x_0 + dt. \end{cases}$$

3. Эллипс. Рассмотрим эллипс (рис. 13.5), заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

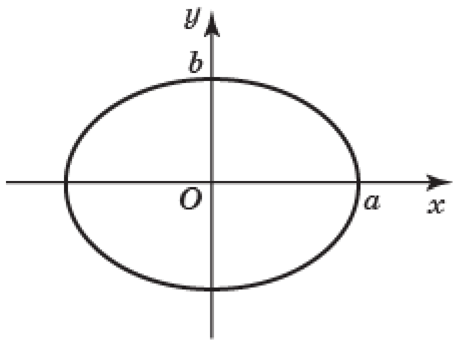


Рис. 13.5

Его можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t\,. \end{cases}$$

4. Циклоида. Рассмотрим циклоиду – кривую, которая описывается точкой, закреплённой на окружности, катящейся по оси *Ox* (рис. 13.6).

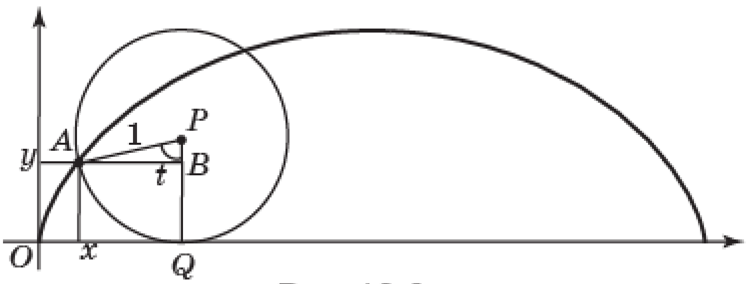


Рис. 13.6

Найдём параметрические уравнения циклоиды. Пусть единичная окружность в начальный момент времени касается начала координат. Закреплённая на ней точка находится в начале координат O. Предположим, что окружность прокатилась по оси Ox и переместилась в точку Q. Центр окружности переместился в точку P. Закреплённая на окружности точка переместилась в точку A.

Пусть $\angle APQ = t$. Поскольку дуга $\overset{\frown}{AQ}$ окружности прокатилась по отрезку OQ, то их длины равны *t*. Для координат *x*, *y* точки *A* имеем

$$\begin{cases} x = OQ - AB = t - \sin t\,, \\ y = PQ - PB = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = t - \sin t\,, \\ y = 1 - \cos t\,. \end{cases}$$

Для получения циклоиды в программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать: набрать Кривая(t-sin(t), 1-cos(t),t,0,2Pi) и нажать “Enter”.

В результате на экране появится циклоида на отрезке [0, 2π].

В программе GeoGebra можно получить движение точки по циклоиде.

Для этого нужно:

1) создать ползунок a, изменяющийся от 0 до 2Pi;

2) построить окружность с центром (a, 1) и радиусом 1;

3) отметить на ней точку с координатами (a-sin(a), 1-cos(a)) и соединить её отрезком с центром окружности;

4) в строке «Ввод» набрать: Кривая(t-sin(t),1-cos(t),t,0,a) и нажать “Enter”;

5) включить анимацию.

В результате окружность будет катиться по оси абсцисс, а точка *B* будет описывать циклоиду (рис. 13.7).

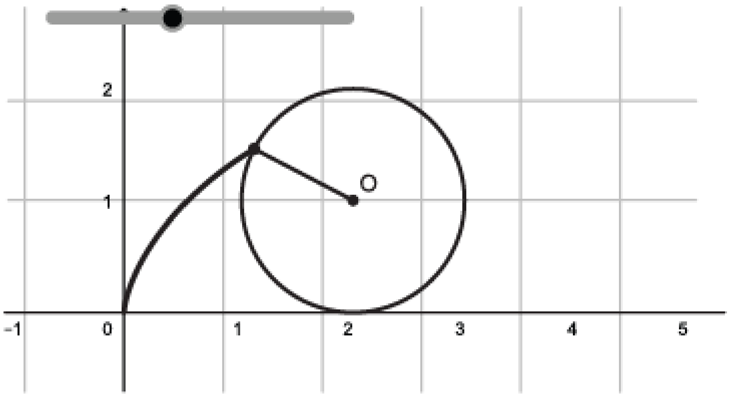


Рис. 13.7

5. Удлинённая циклоида – кривая, которая описывается точкой, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по оси *Ox* (рис. 13.8).

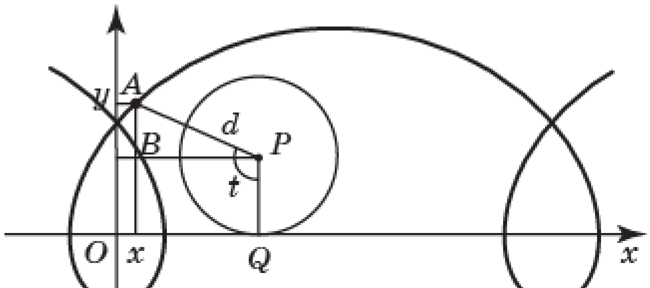


Рис. 13.8

Найдём параметрические уравнения удлинённой циклоиды. Пусть единичная окружность в начальный момент времени касается начала координат. Точка закреплена на продолжении радиуса окружности и удалена от её центра на $d > 1$. Предположим, что окружность прокатилась по оси *Ox* и переместилась в точку Q. Центр окружности переместился в точку P. Закреплённая на окружности точка переместилась в точку A.

Пусть $\angle APQ = t$. Для координат x, y точки A имеем

$$\begin{cases} x = OQ - PB = t - d \cdot \cos(t - 90°) = t - d \cdot \sin t, \\ y = PQ + AB = 1 + d \cdot \sin(t - 90°) = 1 - d \cdot \cos t. \end{cases}$$

Таким образом, параметрическими уравнениями удлинённой циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = t - d \cdot \sin t, \\ y = 1 - d \cdot \cos t. \end{cases}$$

6. Укороченная циклоида – кривая, которая описывается точкой, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по оси *Ox* (рис. 13.9).

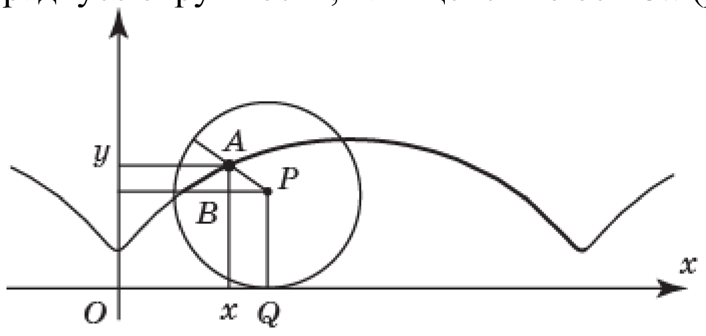


Рис. 13.9

Аналогично тому, как это делалось для удлинённой циклоиды, доказывается, что параметрическими уравнениями укороченной циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = t - d\cdot\sin t\,, \\ y = 1 - d\cdot\cos t\,. \end{cases}$$

7. Эпициклоиды. Рассмотрим теперь ситуацию, когда точка закреплена на окружности, катящейся с внешней стороны по другой. Выведем уравнение получающейся эпициклоиды.

Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат. Пусть катящаяся окружность имеет радиус *r*. Её центр в начальный момент времени расположен в точке с координатами (1+*r*, 0), а закреплённая на ней точка расположена в точке *A* с координатами (1, 0). Предположим, что катящаяся с окружность повернулась на некоторый угол *t* и касается неподвижной окружности в точке *B*. При этом центр катящейся окружности переместилась в точку *P*, а точка *A* переместилась в точку *C*(*x*, *y*) (рис. 13.10).

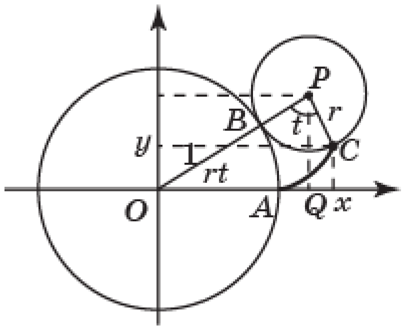


Рис. 13.10

Из равенства длин дуг $\breve{AB}$ и $\breve{BC}$ окружностей следует, что угол AOB равен *rt*. Обозначим Q ортогональную проекцию точки P на ось абсцисс. Тогда $\angle OPQ = \frac{\pi}{2} - rt, \angle CPQ = t - \left(\frac{\pi}{2} - rt\right) = (1+r)t - \frac{\pi}{2}$.

Для координат *x*, *y* точки *C* имеем

$$x = OP\cdot\cos\angle POQ + PC\cdot\sin\angle CPQ = (1+r)\cos(rt) - r\cdot\cos(t+rt),$$
$$y = OP\cdot\sin\angle POQ - PC\cdot\cos\angle CPQ = (1+r)\sin(rt) - r\cdot\sin(t+rt),$$

следовательно, имеем параметрические уравнения эпициклоиды

$$\begin{cases} x = (1 + r)\cos(rt) - r \cdot \cos(t + rt), \\ y = (1 + r)\sin(rt) - r \cdot \sin(t + rt). \end{cases}$$

Частным случаем эпициклоиды является ***кардиоида*** – кривая, которая описывается точкой, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса (рис. 13.11).

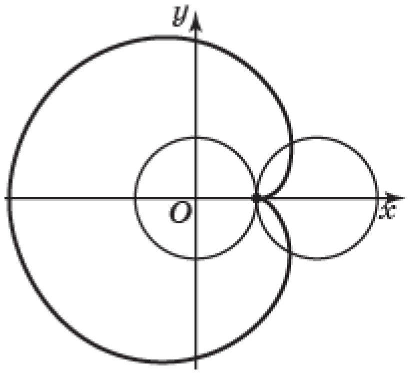


Рис. 13.11

Параметрические уравнения кардиоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = 2\cos t \ - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Гипоциклоиды. Рассмотрим теперь ситуацию, когда точка закреплена на окружности радиусом *r*, катящейся с внутренней стороны по единичной окружности с центром в начале координат (рис. 13.12). Так же, как и для эпициклоиды, показывается, что уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = (1 - r)\cos(rt) + r \cdot \cos(t - rt), \\ y = (1 - r)\sin(rt) + r \cdot \sin(t - rt). \end{cases}$$

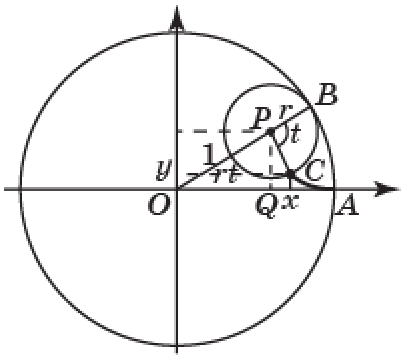


Рис. 13.12

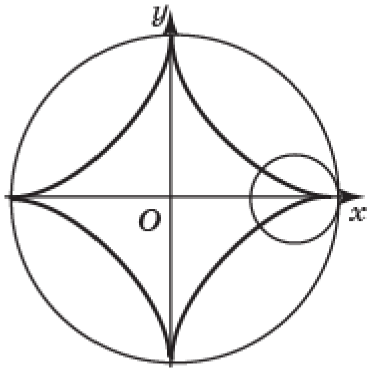


Рис. 13.13

Частным случаем гипоциклоиды является ***астроида*** – кривая, которая описывается точкой, закреплённой на окружности, катящейся с внутренней стороны по другой окружности в четыре раза большего радиуса (рис. 13.13).

Параметрические уравнения астроиды имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3t}{4}, \\ y = \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3t}{4}. \end{cases}$$

Упражнения

1. Напишите параметрические уравнения окружности с центром в точке $P(x_0, y_0)$ и радиусом R.

2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.

3. Какую кривую задают параметрические уравнения $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$?

4. Получите эллипс в программе GeoGebra, задав его параметрическими уравнениями.

5. Получите удлинённую циклоиду в программе GeoGebra.

6. В программе GeoGebra получите движение точки по удлинённой циклоиде.

7. Получите укороченную циклоиду в программе GeoGebra.

8. В программе GeoGebra получите движение точки по укороченной циклоиде.

9. Получите кардиоиду в программе GeoGebra.

10. В программе GeoGebra получите движение точки по кардиоиде.

11. Получите эпициклоиду в программе GeoGebra, для которой радиус r катящейся окружности равен: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}$; в) 2.

12. Получите гипоциклоиду в программе GeoGebra, для которой радиус r катящейся окружности равен: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{2}$.

13. Выясните, какая кривая задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

14. В программе GeoGebra получите кривую, называемую «Декартов лист», задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

15. В программе GeoGebra получите кривую, называемую «Строфоида», задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t(t^2-1)}{1+t^2}. \end{cases}$$

16. В программе GeoGebra получите кривую, называемую «Конхоида», задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t + b \cdot \cos t\,, \\ y = 1 + b \cdot \sin t\,. \end{cases}$$

Рассмотрите случаи: а) $b = 0{,}5$; б) $b = 1$; в) $b = 2$.

14. Полярные координаты

Наряду с декартовыми координатами на плоскости, во многих случаях более удобными оказываются так называемые ***полярные координаты***.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например**:** "Вы пройдёте по этой улице около 100 м, свернёте направо, пройдёте ещё 50 м и будете у цели". При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая будет называться ***полярной осью***, а точка O – ***полюсом*** (рис. 14.1).

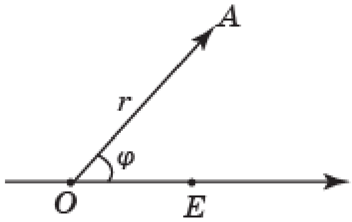


Рис. 14.1

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара $(r;\ \varphi)$, где r – расстояние от точки A до точки O, φ – угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$.

При этом первая координата r называется ***полярным радиусом***, а вторая φ – ***полярным углом***. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Чтобы различать обозначения полярных и декартовых координат, будем обозначать полярные координаты через точку с запятой.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат, а за полярную ось – ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами $(x,\ y)$ можно сопоставить полярные координаты $(r;\ \varphi)$ (рис. 14.2).

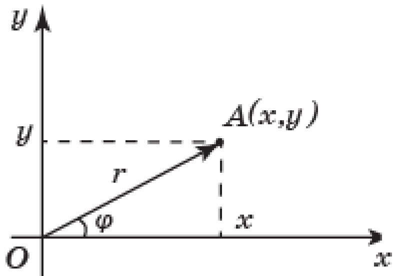


Рис. 14.2

При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей.

Уравнения таких кривых имеют вид

$$r = r(\varphi).$$

Для получения кривой, заданной уравнением в полярных координатах, программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая((r(t);t),t,a.b)

и нажать “Enter”.

В результате на экране появится искомая кривая.

Рассмотрим примеры кривых, заданных уравнением в полярных координатах.

1. Окружность радиусом *R* с центром в точке *O* задаётся уравнением *r* = *R* (рис. 14.3).

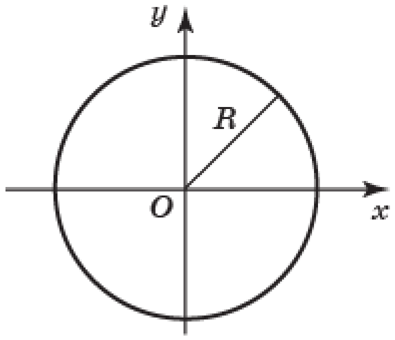


Рис. 14.3

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от точки *O* на расстояние *R*. Все такие точки удовлетворяют равенству *r* = *R*. При этом, если угол φ увеличивается, соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

2. Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением *r* = *a* φ, где *a* - некоторое фиксированное число, угол φ задаётся в радианах.

Предположим, что *a* > 0, и построим график этой кривой. Если φ = 0, то *r* = 0. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус *r* также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = \frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\pi$, т. е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса *r* будет в три раза больше и т. д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь учёного, её открывшего и изучившего её свойства (рис. 14.4).

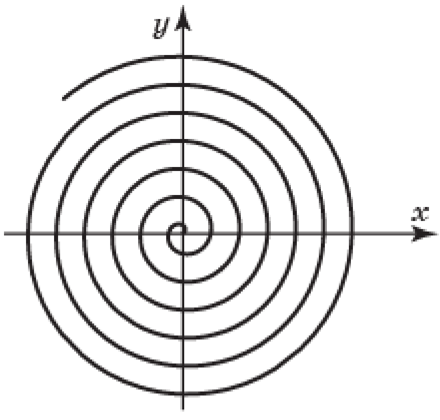


Рис. 14.4

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идёт звуковая дорожка на грампластинке. Туго свёрнутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины – механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку – имеет форму спирали Архимеда.

3. **Логарифмическая спираль** задаётся уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где a - некоторое фиксированное положительное число, φ – угол, измеряемый в радианах (рис. 14.5).

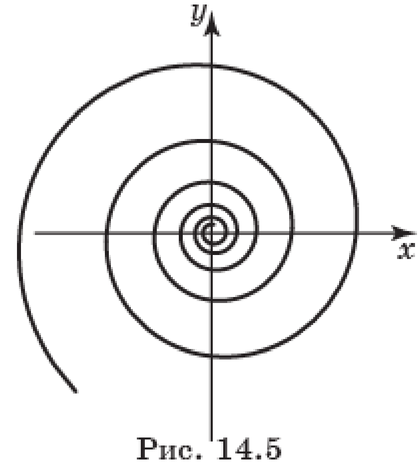


Рис. 14.5

В отличие от спирали Архимеда, логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, если $a > 1$, при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, при увеличении угла радиус уменьшается.

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий её виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему, и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток логарифмической спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полёта и лучом света. Однако, если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полёта и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горных козлов) закручиваются по логарифмической спирали. Один из наиболее распространённых пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает её нити также по логарифмической спирали. По этой спирали закручены и многие галактики, в частности Галактика нашей Солнечной системы.

4. Трилистник – кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ:

$$0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ;\ 120^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ;\ 240^\circ \leq \varphi \leq 300^\circ.$$

Итак, пусть $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$. Если угол φ изменяется от 0° до 30°, $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60°, радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 14.6).

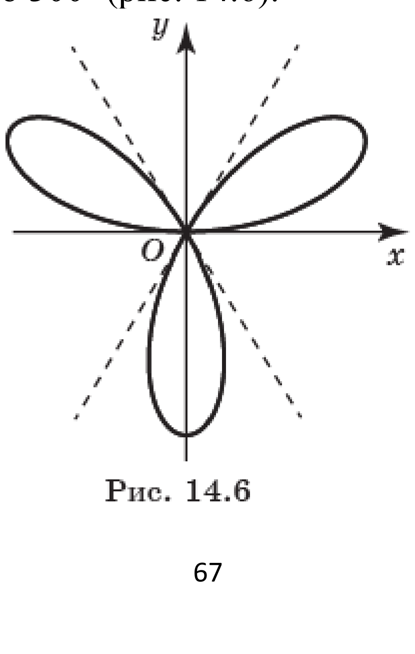


Рис. 14.6

5. Кардиоида. Докажем, что кардиоиду можно задать уравнением

$$r = 2 - 2\cos\varphi.$$

Рассмотрим единичную окружность с центром в точке Q(-1, 0) и катящуюся по ней единичную окружность, отмеченная точка которой в начальное время расположена в начале координат O. Предположим, что катящаяся окружность повернулась вокруг центра неподвижной окружности на угол φ. При этом её центр переместился в положение P, а отмеченная точка переместилась в положение A (рис. 14.7).

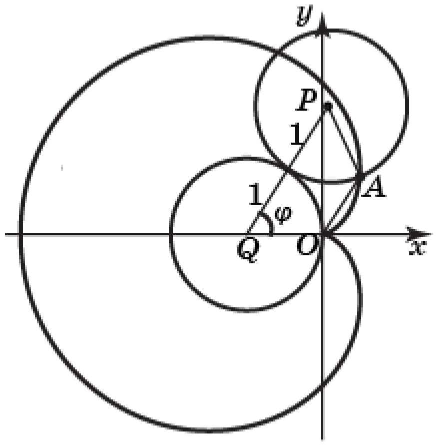


Рис. 14.7

Четырёхугольник $OAPQ$ является равнобедренной трапецией с основанием OP = 2 и боковыми сторонами OQ = AP = 1. Тогда для основания OA имеем: $OA = 2 - 2\cos\varphi$. Так как $OA = r$, то уравнением кардиоиды в полярных координатах будет уравнение $r = 2 - 2\cos\varphi$,

6. Конхоида Никомеда. Напомним, как она получается. Пусть даны прямая и точка O, не принадлежащая этой прямой. Через точку O проводятся прямые, пересекающие данную прямую в точках C. От точек C в обе стороны на этой прямой откладываются равные отрезки CA и CB (рис. 14.8). Геометрическое место точек A и B образует кривую, называемую конхоидой Никомеда.

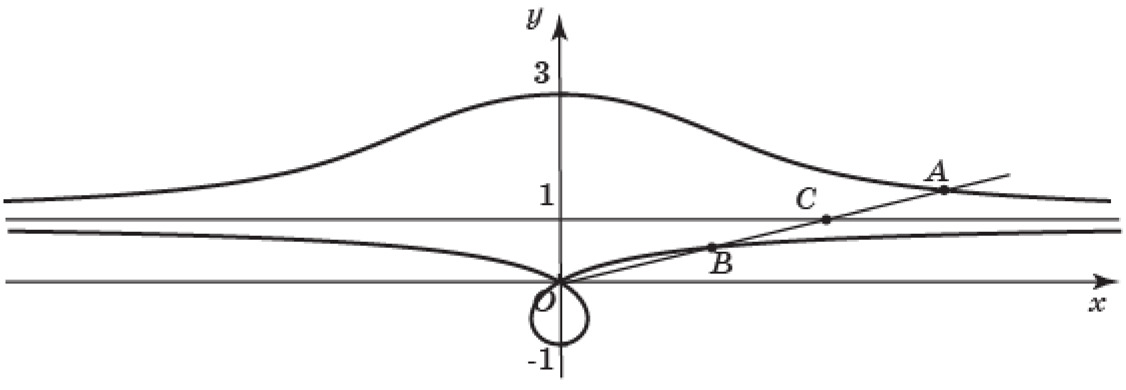


Рис. 14.8

Для нахождения параметрических уравнений конхоиды возьмём в качестве точки O начало координат. В качестве прямой возьмём прямую, параллельную оси абсцисс и удалённую от начала координат на расстояние d. Возьмём отрезки CA и CB, равными l. Тогда параметрическими уравнениями конхоиды будут уравнения

$$r = \frac{d}{\sin \varphi} \pm l.$$

На рисунке 14.8 показана конхоида, для которой $d = 1$, $l = 2$.

7. Улитка Паскаля. Пусть дана окружность. Через точку O этой окружности проводятся прямые, пересекающую окружность в точках C. От точек C в обе стороны на этой прямой откладываются равные отрезки CA и CB. Геометрическое место точек A и B образует кривую, называемую улиткой Паскаля (рис. 14.9).

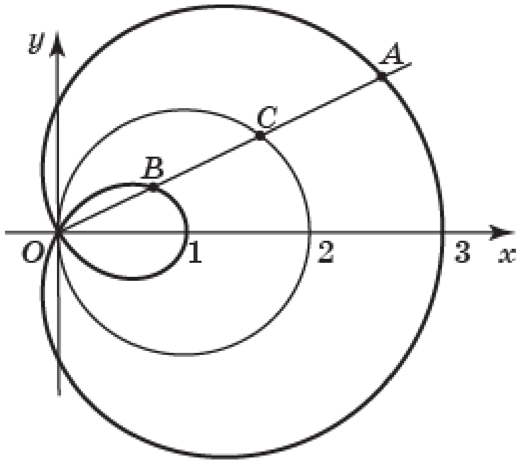


Рис. 14.9

Для нахождения параметрических уравнений улитки Паскаля возьмём в качестве точки O начало координат. В качестве окружности возьмём окружность радиусом R с центром в точке (R, 0). Возьмём отрезки CA и CB, равными l. Тогда параметрическими уравнениями улитки Паскаля будут уравнения

$$r = 2R \cdot \cos \varphi \pm l.$$

На рисунке 14.9 показана улитка Паскаля, для которой $R = 1$, $l = 1$.

Упражнения

1. На плоскости с заданной на ней полярной осью изобразите точки с полярными координатами: $A(1;\, 0)$, $B(2;\, -\frac{\pi}{2})$, $C(3;\, \pi)$, $D(\sqrt{2};\, \frac{\pi}{4})$.

2. Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты: $A(1;\, 0)$, $B(2;\, -\frac{\pi}{2})$, $C(3;\, \pi)$, $D(\sqrt{2};\, \frac{\pi}{4})$.

3. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: $A(\sqrt{2},\, \sqrt{2})$, $B(-10,\, 0)$, $C(1,\, -\sqrt{3})$, $D(-\sqrt{3},\, 1)$.

4. Изобразите геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30^\circ \le \varphi \le 60^\circ$; б) $1 \le r \le 2$; в) $30^\circ \le \varphi \le 60^\circ$, $1 \le r \le 2$.

5. Человек идёт с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

6. Получите спираль Архимеда в программе GeoGebra.

7. Получите логарифмическую спираль в программе GeoGebra.

8. Получите в программе GeoGebra кривую, задаваемую уравнением r = sin 5φ.

9. Определите, какую кривую, задают уравнения: а) $r = \cos\varphi$; б) $r = \sin\varphi$.

10. Изобразите ***гиперболическую спираль*** – кривую, задаваемую уравнением $r = \frac{1}{\varphi}$.

11. Используя программу GeoGebra, получите кривую, заданную уравнением $r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$.

12. Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задаётся уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos\varphi}.$$

13. Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

задаёт эллипс, если $0 < \varepsilon < 1$, и гиперболу, если $\varepsilon > 1$.

14. Используя программу GeoGebra, получите кривую, заданную уравнением $r = |\sin\frac{\varphi}{2}|$.

15. Используя программу GeoGebra, получите кривую, заданную уравнением $r = |\sin\frac{5\varphi}{3}|$.

16. Используя программу GeoGebra, получите кривую, заданную уравнением $r = 30 + 15\sin(60\varphi)\sin(2{,}5\varphi)$.

17. Даны точки $O(0, 0)$, $P(2, 0)$ и прямая c, заданная уравнением $x = 2$. Через точку O проводятся прямые под углами φ к оси абсцисс, пересекающие прямую c в точках C. От точек C на этих прямых откладываются отрезки $CA = CB = CP$. Изобразите кривую, которую описывают точки A и B при изменении углов φ Она называется ***строфоидой***. Найдите её уравнение в полярных координатах.

18. Даны точки $O(0, 0)$, $Q(4, 0)$, окружность с диаметром OQ и прямая c, заданная уравнением $x = 4$. Через точку O проводятся прямые под углами φ к оси абсцисс, пересекающие окружность в точках B и прямую c в точках C. От точек O на этих прямых откладываются отрезки $OA = BC$. Изобразите кривую, которую при этом описывают точки A и B. Она называется ***циссоидой***. Найдите её уравнение в полярных координатах.

II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

15. Векторы в пространстве

Определение вектора в пространстве аналогично определению вектора на плоскости.

Вектором в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также нулевой вектор, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой (рис. 15.1). Векторы обозначают также строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

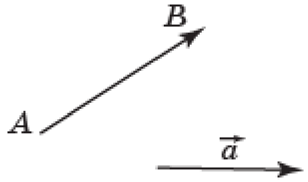


Рис. 15.1

Длиной, или ***модулем***, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора называются ***одинаково*** (***противоположно***) ***направленными***, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Два вектора называются ***равными***, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными между собой.

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если при откладывании их от одной точки они располагаются на одной прямой.

Коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Три ненулевых вектора в пространстве называются ***компланарными***, если при откладывании их от одной точки они располагаются в одной плоскости.

Упражнения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, коллинеарные вектору: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{BD}$.

3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$.

4. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите векторы, коллинеарные вектору: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$; д) $\overrightarrow{AC_1}$.

6. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

7. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{C_1E_1}$ в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

8. Сколько различных векторов задают рёбра: а) куба; б) треугольной призмы; в) правильной четырёхугольной пирамиды?

9. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите какие-нибудь тройки: а) компланарных; б) некомпланарных векторов.

10. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ укажите какие-нибудь тройки: а) компланарных; б) некомпланарных векторов.

11. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{AD_1}$.

13. Точки E и F являются серединами соответственно рёбер AB и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ компланарны.

14. Докажите, что в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CE}$ компланарны.

15. В тетраэдре $ABCD$ точки P, Q являются точками пересечения медиан соответственно граней ABD и BCD. Докажите, что векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.

16. Точки G и H являются серединами соответственно рёбер SC и SF правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{GH}$ коллинеарны.

17. Точки G и H являются серединами соответственно рёбер SC и SF правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{CF}$ компланарны.

18. Точки E и F являются серединами соответственно рёбер AB и C_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ компланарны.

19. Сколько различных векторов задают рёбра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

20. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BE_1}$ и $\overrightarrow{FE_1}$ в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

16. Операции над векторами

Так же, как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 16.1).

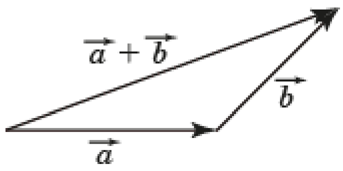


Рис. 16.1

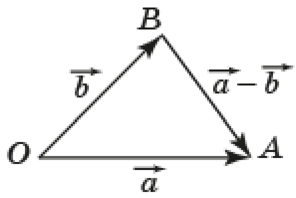


Рис. 16.2

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $t \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|t| \cdot |\vec{a}|$, а направление остаётся прежним, если $t > 0$, и меняется на противоположное, если $t < 0$.

Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число –1 называется вектором, ***противоположным*** вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

По определению вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\vec{a}$, и $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Ясно, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только том случае, если $\vec{b} = t\vec{a}$ для некоторого отличного от нуля числа t.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.

Для того чтобы найти разность $\vec{a}-\vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают так, чтобы их начала совпадали (рис. 16.2).

Вектор, у которого начало совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец – с концом вектора $\vec{a}$, будет искомой разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Для сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам векторов на плоскости.

Свойство 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).

Свойство 2. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (сочетательный закон).

Свойство 3. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 4. $(t+s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 5. $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (второй распределительный закон).

Угол между векторами в пространстве определяется аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два ненулевых вектора. Отложим их от точки O так, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 16.3). ***Углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, образованный лучами OA и OB.

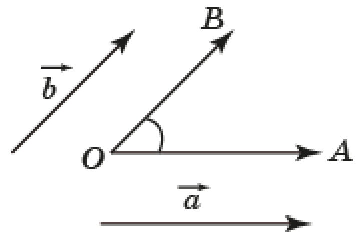


Рис. 16.3

Градусная величина угла между двумя одинаково направленными векторами считается равной 0º.

Для векторов в пространстве аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости, определяется скалярное произведение.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$. Оно обозначается $\vec{a}^2$.

Из формулы скалярного произведения следует выполнимость равенства $\vec{a}^2 = \overrightarrow{|a|}^2$.

Два ненулевых вектора называются ***перпендикулярными***, если они образуют прямой угол.

Из формулы скалярного произведения следует, что два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и выражает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно, имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

Упражнения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ укажите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE_1}$.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$.

4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите вектор: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1D_1}$.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE_1}$.

7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1D_1}$.

8. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите такую точку X, для которой выполняется равенство:

а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XA_1}=\vec{0}$;

в) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1}+\overrightarrow{XD_1}=\vec{0}$.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите такие числа t, s, для которых: а) $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выразите вектор $\overrightarrow{AC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{AC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AA_1}$; б) вектор $\overrightarrow{AD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Будут ли векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны?

14. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

15. В тетраэдре $ABCD$ точки M_1, M_2 являются точками пересечения медиан соответственно граней ADB и BDC. Докажите, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Найдите отношение длин этих векторов.

16. В тетраэдре $ABCD$ точки E и F являются серединами рёбер соответственно AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

17. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.

19. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SD}$.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

21. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1E_1}$.

22. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$

23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.

24. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SD}$.

25. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 2. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1E_1}$.

27. Вычислите работу, которую производит сила $\vec{F}$, перемещая объект из точки B в точку C единичного куба (рис. 16.4).

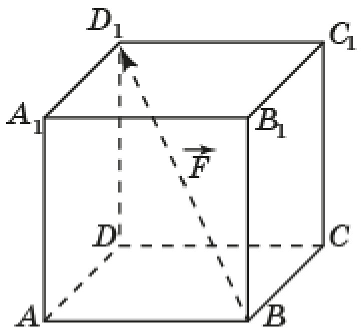


Рис. 16.4

17. Прямоугольная система координат в пространстве

Напомним, что ***координатной прямой*** называется прямая, на которой выбраны точка O, называемая ***началом координат***, и единичный вектор $\overrightarrow{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат.

Начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно ***осью абсцисс*** и ***осью ординат*** (рис. 17.1).

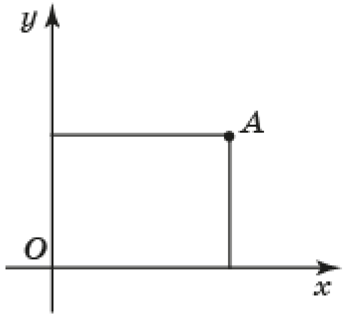


Рис. 17.1

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое ***координатой*** этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел (x, y), называемых ***координатами точки*** на плоскости относительно данной системы координат.

Прямоугольной системой координат в пространстве называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются соответственно ***осью абсцисс***, ***осью ординат*** и ***осью аппликат*** (рис. 17.2).

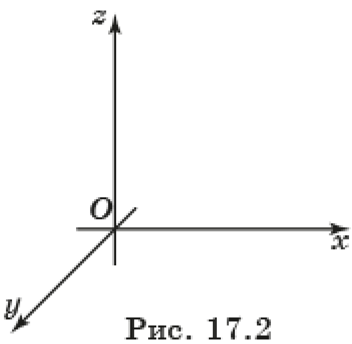


Рис. 17.2

Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются ***координатными плоскостями*** и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz.

Зафиксируем прямоугольную систему координат в пространстве. Пусть A – произвольная точка пространства. Проведём через неё плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку пересечения этой плоскости с осью Ox обозначим A_x (рис. 17.3). Координата этой точки на оси Ox называется ***абсциссой*** точки A и обозначается x. Аналогичным образом на осях Oy и Oz

определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно ***ординатой*** и ***аппликатой*** точки A и обозначаются y и z соответственно.

Тройка чисел (x, y, z) называется ***координатами точки*** A в пространстве.

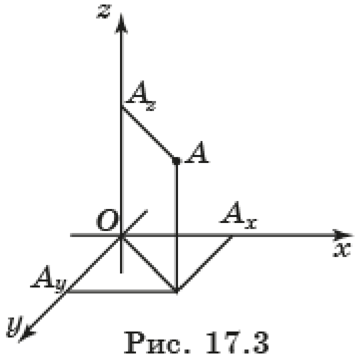


Рис. 17.3

На рисунке 17.4 показано окно программы GeoGebra, позволяющее моделировать фигуры в пространстве. Для задания точки A(2, 1, 3) в строке «Ввод» нужно набрать A=(2,1,3) и нажать “Enter”. В результате на экране появится точка с заданными координатами.

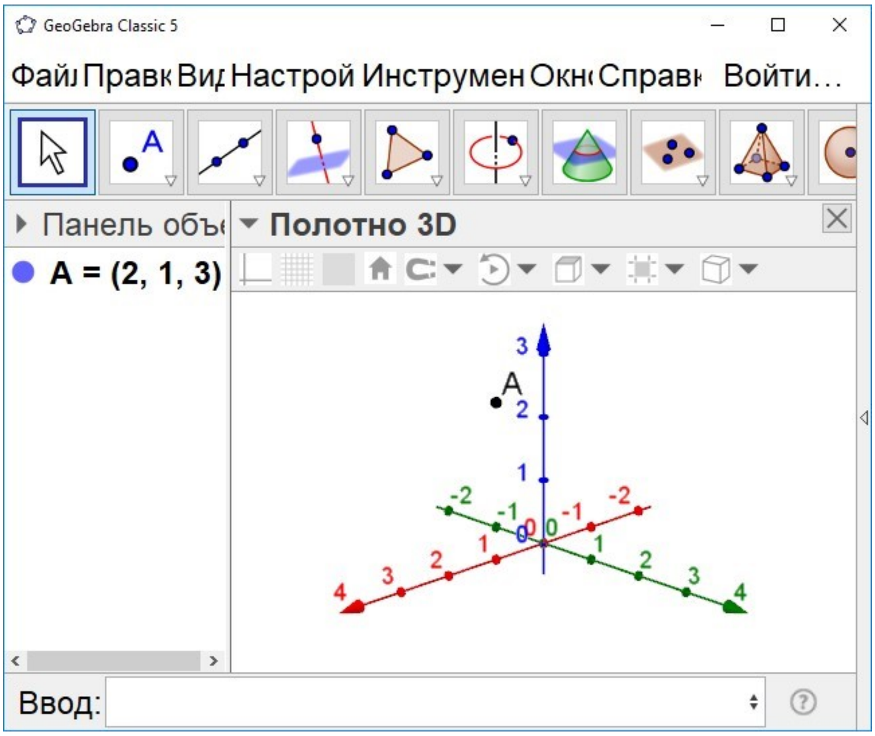


Рис. 17.4

Упражнения

1. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

2. Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?

3. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Начало координат находится в точке D (рис. 17.5). Оси координат лежат на прямых соответственно DC, DA и DD_1. Найдите координаты всех вершин куба.

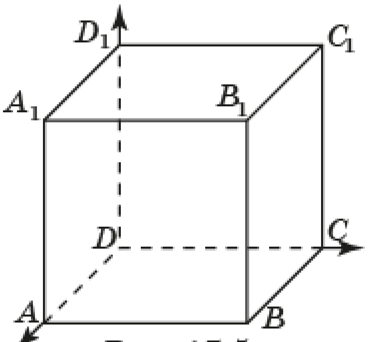


Рис. 17.5

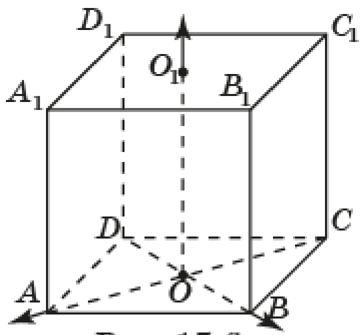


Рис. 17.6

4. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещён в прямоугольную систему координат (рис. 17.6) так, что началом координат является центр O грани $ABCD$, а оси координат лежат на прямых соответственно OB, OA, OO_1 (O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$). Найдите координаты вершин куба.

5. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 1. Начало координат находится в центре O основания пирамиды (рис. 17.7) Оси координат лежат на прямых соответственно OB, OA и OS. Найдите координаты всех вершин пирамиды.

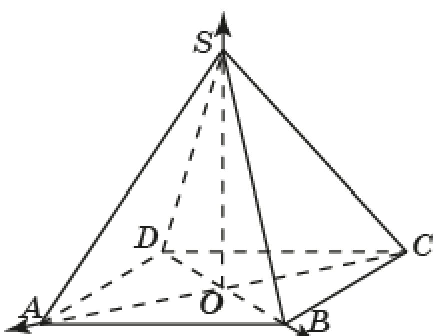


Рис. 17.7

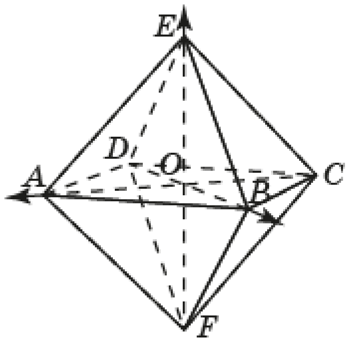


Рис. 17.8

6. Дан октаэдр $ABCDEF$ (рис. 17.8), все рёбра которого равны 1. Начало координат находится в центре O. Оси координат лежат на прямых соответственно OB, OA и OE. Найдите координаты вершин октаэдра.

7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1 (рис. 17.9). Начало координат находится в середине D отрезка BC. Оси координат лежат на прямых соответственно DB, DA и DD_1 (D_1 – середина отрезка B_1C_1). Найдите координаты всех вершин призмы.

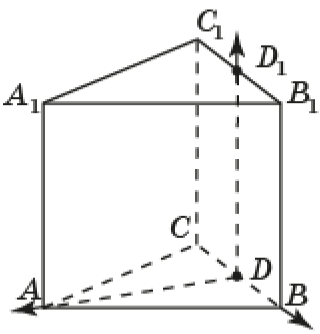


Рис. 17.9

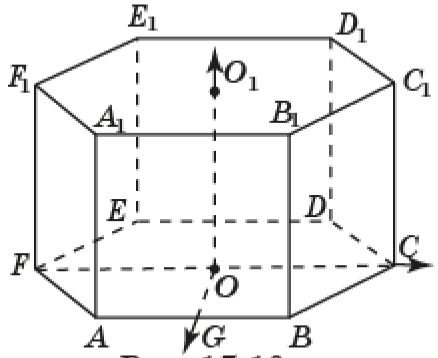


Рис. 17.10

8. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1 (рис. 17.10). Начало координат находится в центре O основания призмы. Точка G – середина ребра AB. Оси координат лежат на прямых соответственно OC, OG и OO_1 (O_1 – центр второго основания призмы). Найдите координаты всех вершин призмы.

9. Точка A имеет координаты (1, 2, -3). Найдите координаты точки, симметричной точке A относительно: а) начала координат; б) оси Ox; в) оси Oy; г) оси Oz; д) плоскости Oxy; е) плоскости Oxz; ж) плоскости Oyz.

10. Для точек $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 2, 5)$ найдите координаты середины отрезка AB.

18. Расстояние между двумя точками в пространстве. Уравнение сферы

В курсе планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

Теорема. Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство. Для точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства проведём отрезок A_1A_2. Он не может быть параллелен одновременно всем осям координат. Предположим, например, что он не параллелен оси Oz. Обозначим A_1', A_2' ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 18.1).

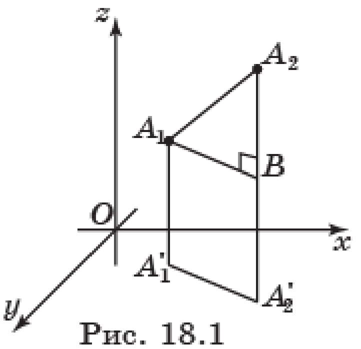


Рис. 18.1

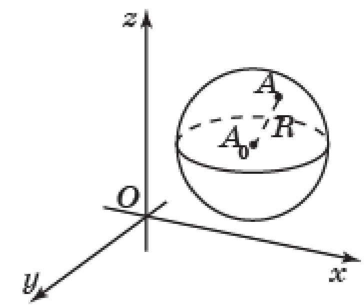


Рис. 18.2

Эти проекции на плоскости Oxy имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A'_1A'_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Через точку A_1 проведём прямую, параллельную прямой $A_1'A_2'$, и точку её пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Треугольник A_1A_2B прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Следовательно, по теореме Пифагора, имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Непосредственно из определения сферы следует, что координаты точек сферы с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R удовлетворяют равенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Это равенство называется ***уравнением сферы*** с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R (рис. 18.2).

Координаты точек соответствующего шара удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2.$$

Для задания сферы в программе GeoGebra имеются следующие инструменты.

1. Сфера по центру и точке. Для задания сферы нужно задать её центр и какую-нибудь точку, принадлежащую этой сфере. Например, на рисунке 18.3 показана сфера с центром A и точкой B, полученная в программе GeoGebra.

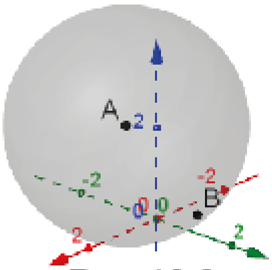


Рис. 18.3

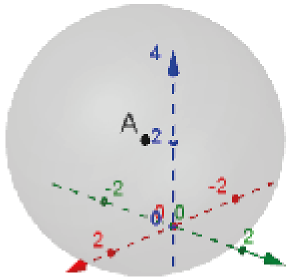


Рис. 18.4

2. Сфера по центру и радиусу. Для задания сферы нужно указать её центр и в открывшемся окне указать её радиус. Например, на рисунке 18.4 показана сфера с центром A и радиусом 3, полученная в программе GeoGebra.

3. Сферу в программе GeoGebra можно задать, написав в строке «Ввод» её уравнение. Например, если в строке «Ввод» набрать команду (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9 и нажать “Enter”, то на экране появится сфера с центром в точке (2, 1, 3) и радиусом 3.

Упражнения

1. Найдите расстояние от точки: а) $A(4, 3, 0)$; б) $B(-2, 1, 2)$ до начала координат.

2. Найдите расстояние между точками: а) $A_1(1, 2, 4)$ и $A_2(-1, 3, 2)$; б) $B_1(3, -2, 0)$ и $B_2(3, 0, -4)$.

3. Какая из точек A (1, 3, 5) или B (–1, 1, 6) расположена ближе к началу координат?

4. На каком расстоянии находится точка $A(1, -2, -3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

5. На каком расстоянии находится точка $A(-1, -2, 3)$ от координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

6. Найдите координаты центра A_0 и радиус R сферы, заданной уравнением: а) $(x-2)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 9$; б) $x^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 4$.

7. Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $A_0(1, -2, 3)$ и радиусом 4.

8. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A_0(1, 2, -3)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

9. Напишите уравнение сферы с центром в точке $A_0(3, -2, -1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

10. Найдите уравнения сфер радиусом 1, касающихся трёх координатных плоскостей. Сколько таких сфер?

11. Найдите уравнение сферы радиусом 1, касающихся трёх координатных прямых. Сколько таких сфер?

12. Докажите, что уравнение $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 0$ задаёт сферу в пространстве. Найдите её радиус и координаты центра.

13. Точка $A(1, 2, 3)$ принадлежит сфере с центром $A_0(3, 4, 5)$. Напишите уравнение этой сферы.

14. Как расположена точка: а) $A(3, 2, 1)$; б) $B(4, 2, –4)$; в) $C(2, 2, –2)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 – 2x + 4y +8z – 4 = 0$?

15. Как расположены друг относительно друга сферы $(x – 2)^2 + (y – 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$, $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 + (z – 1)^2 = 4$?

16. Найдите радиус сферы с центром в точке $P(1, 2, 2)$, касающейся сферы с центром $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1.

17. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точки $A(1, 1, 1)$ до точек сферы с центром $O(0, 0, 0)$ и радиусом 3.

18. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками сферы с центром $O(0, 0, 0)$ и радиусом 1 и сферы с центром $P(2, 4, 4)$ и радиусом 3.

19. Координаты вектора

Координаты вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат определяются аналогично тому, как это было сделано для векторов на плоскости. А именно, отложим данный вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются ***координатами вектора***.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их ***координатными векторами*** (рис. 19.1).

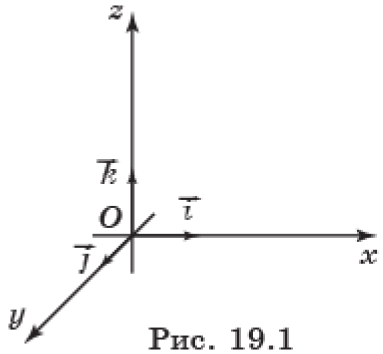


Рис. 19.1

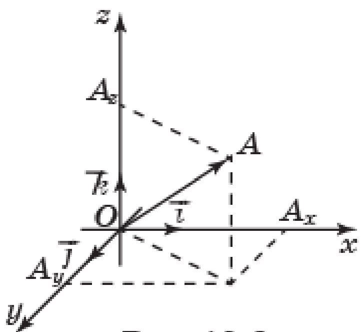


Рис. 19.2

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ (рис. 19.2). Точка A имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$, значит, вектор $\vec{a}$ представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Теорема. Сумма $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ векторов $\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2)$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Доказательство. Разложим векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ по координатным векторам:

$$\overrightarrow{a_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \overrightarrow{a_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Для суммы $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ имеет место равенство:

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Следовательно, тройка чисел ($x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$) является координатами вектора $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом доказывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, а при вычитании векторов их соответствующие координаты вычитаются.

Если вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом – точку $A_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 19.3), то его можно представить как разность векторов $\vec{a} =$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$. Следовательно, он будет иметь координаты (x_2–x_1, y_2–y_1, z_2–z_1).

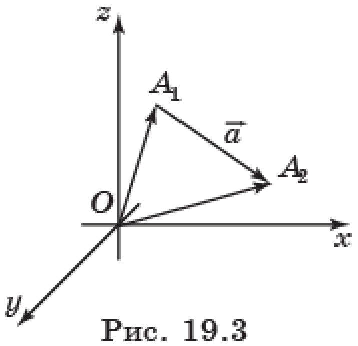


Рис. 19.3

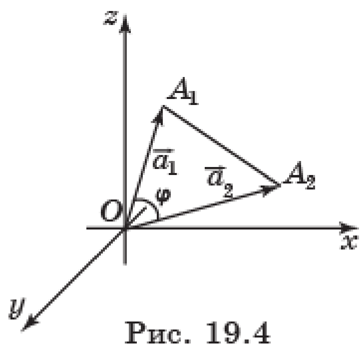


Рис. 19.4

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ выражается через его координаты по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Напомним, что скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = |\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$.

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты.

Теорема. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство. Отложим векторы $\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2)$ от начала координат и обозначим их концы соответственно A_1, A_2 (рис. 19.4).

По теореме косинусов имеем равенство:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos\varphi.$$

Следовательно, выполняется равенство $(\overrightarrow{a_1} - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Воспользуемся равенствами

$$\vec{a}_1{}^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \vec{a}_2{}^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

Получим

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Полученная формула скалярного произведения позволяет находить угол между векторами $\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2)$ с заданными координатами. А именно, имеет место следующая формула

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Упражнения

1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{k}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$; г) $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{k}$.

2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, –3, 5)$, B (–5, 4, –3); б) $A(1, 2, –4)$, B (6, –5, –7); в) $A(–3, 1, –8)$, B (3, 2, –1).

3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b, c). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

4. Векторы $\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны. Как связаны между собой их координаты?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $DC = 5$, $DA = 4$, $DD_1 = 3$. Вершина D – начало координат, оси координат лежат на прямых соответственно DC, DA, DD_1. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

6. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Начало координат находится в середине D отрезка BC. Оси координат лежат на прямых соответственно DB, DA и DD_1 (D_1 – середина отрезка B_1C_1). Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{DC_1}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$; е) $\overrightarrow{AB}$; ж) $\overrightarrow{A_1B_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

7. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Начало координат находится в центре O основания призмы. Точка G – середина ребра AB. Оси координат лежат на прямых соответственно OC, OG и OO_1 (O_1 – центр второго основания призмы). Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OA}$; в) $\overrightarrow{OB_1}$; г) $\overrightarrow{OC_1}$; д) $\overrightarrow{OA_1}$; е) $\overrightarrow{AB}$; ж) $\overrightarrow{A_1B_1}$; з) $\overrightarrow{AB_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

8. Найдите координаты вектора: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(0, -3, 4)$.

9. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, -3, 4)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} - 2\vec{b}$; б) $0{,}5\vec{a} + 0{,}25\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

10. Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (–2, 1, 0), а точка M имеет координаты (1, –3, 5).

11. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy; б) параллелен координатной прямой Ox?

12. Найдите длину вектора: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $3\vec{j} + 2\vec{k}$; в) $-\vec{i} + \vec{k}$.

13. Длина вектора равна 1. Найдите координаты этого вектора, если известно, что все они равны.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ DC=5, DA=4, DD_1=3. Вершина D – начало координат. Оси координат лежат на прямых

соответственно DC, DA, DD_1. Найдите длину вектора: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.

15. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(2, -1, 3)$.

16. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}_1(-1, 2, 3)$ и $\vec{a}_2(2, -1, 3)$.

17. Найдите косинусы углов, которые образует вектор $\vec{e}(1, 1, 1)$ с координатными векторами.

18. При каком значении z векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ перпендикулярны?

19. При каком значении t вектор $3\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2, -1, 1)$, $\vec{b}(4, 3, 2)$?

20. Докажите, что в треугольнике ABC, где A (2, 1, 3), B (1, 1, 4) и C (0, 1, 3), угол B прямой.

21. Докажите, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма.

22. Вычислите, какую работу A производит сила $\vec{F}(-3, 4, 6)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(2, -1, -3)$ в положение $N(3, 2, 1)$.

20. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задаётся уравнением $ax + by + c = 0$, где a, b, c - действительные числа, для которых a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого вектором нормали. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Вектором нормали для данной плоскости в пространстве называется вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Теорема. Плоскость в пространстве задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d - действительные числа, из которых a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора нормали.

Доказательство. Пусть $\vec{n}(a, b, c)$ – вектор в пространстве. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярную этому вектору (рис. 20.1).

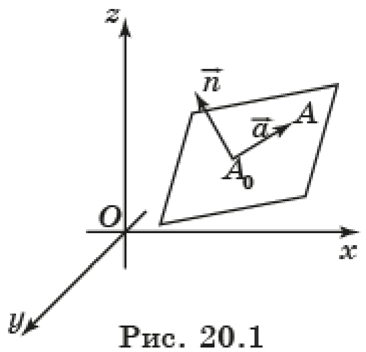


Рис. 20.1

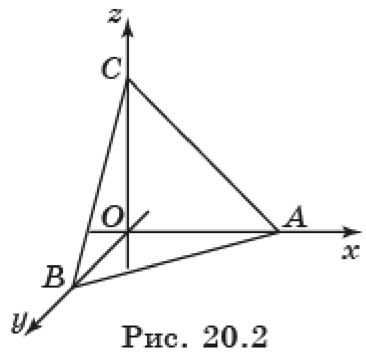


Рис. 20.2

Точка $A(x, y, z)$ принадлежит этой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. когда скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразуя это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Приведём еще один способ задания плоскости, пересекающей оси координат (рис. 20.2) и проходящей через точки $A(a, 0, 0)$ и $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

Непосредственно проверяется, что искомым уравнением этой плоскости является уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений.

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

$\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{n_2}$ (a_2, b_2, c_2) – их векторы нормали.

Эти плоскости параллельны или совпадают, если их векторы нормали $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ коллинеарны. Следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство

$$\overrightarrow{n_2} = t \cdot \overrightarrow{n_1}.$$

Значит, для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$.

При этом, если $d_2 = td_1$, то данные уравнения определяют одну и ту же плоскость.

Если же $d_2 \neq td_1$, то эти уравнения определяют параллельные плоскости.

В случае, если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними равен углу между их векторами нормали, если этот угол не превосходит 90°, и дополнению этого угла до 180°, если он больше 90°. Его можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ равно нулю, т. е. выполняются равенства

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

В программе GeoGebra плоскость можно задавать с помощью инструмента «Плоскость через три точки». Для этого нужно выбрать этот инструмент и указать три точки. В результате на экране появится плоскость, проходящая через эти точки.

Плоскость можно получить, написав в строке «Ввод» её уравнение. Например, если написать уравнение x + 2y + 3z = 6, то получим плоскость, проходящую через точки с координатами (6, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 2).

Упражнения

1. Напишите уравнения координатных плоскостей *Oxy*, *Oxz*, *Oyz*.

2. Даны точки $A(3, 2, 5)$, $B(–1, –2, 2)$, $C(7, 0, –9)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x – 3y + z – 5 = 0$.

3. Дана плоскость $x – 2y + 3z – 1 = 0$. Найдите её точки пересечения с осями координат.

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1, 2, 3)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1, 2)$.

5. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1, –2, 3)$ и параллельна координатной плоскости: а) *Oxy*; б) *Oxz*; в) *Oyz*.

6. Точка $H(-2, 3, -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$; б) $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ и $C(0, 1, 1)$.

8. Проверьте, что плоскость, проходящая через точки с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, где a, b, c отличны от нуля, задаётся уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $DC = 5$, $DA = 4$, $DD_1 = 3$ (рис. 20.3). Вершина D – начало координат. Оси координат лежат на прямых соответственно DC, DA, DD_1. Напишите уравнение плоскости: а) ABB_1; б) BCC_1; в) $A_1B_1C_1$; г) ABC_1; д) BCD_1; е) ACC_1; ж) ACD_1.

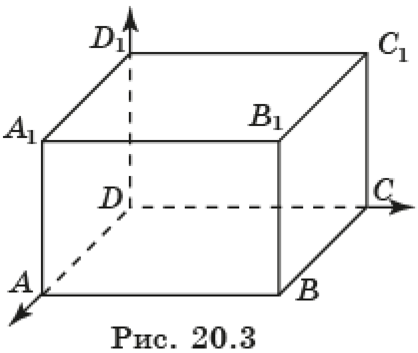


Рис. 20.3

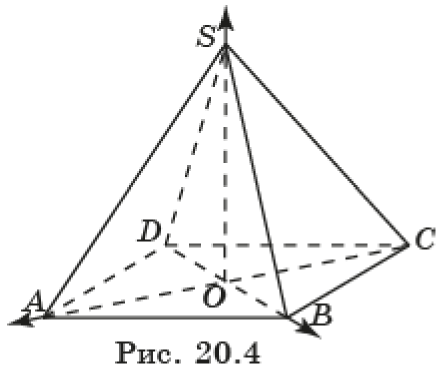


Рис. 20.4

10. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 1 (рис. 20.4). Начало координат находится в центре O основания этой пирамиды. Оси координат лежат на прямых соответственно OB, OA и OS. Напишите уравнение плоскости: а) SAB; б) SBC; в) SCD; г) SAD.

11. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1 (рис. 20.5). Начало координат находится в центре O основания этой призмы. Точка G – середина ребра AB, O_1 – центр второго основания призмы. Оси координат лежат на прямых соответственно OC, OG и OO_1. Напишите уравнение плоскости: а) ABB_1; б) BCC_1; в) $A_1B_1C_1$; г) ABC_1; д) BCD_1; е) ACC_1; ж) ACD_1.

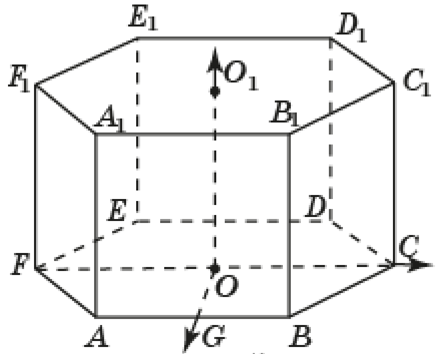


Рис. 20.5

12. Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x + y + z - 2 = 0$, $x + y + z + 2 = 0$;

б) $x + y + z - 2 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$;

в) $-3x + y + 2z = 0$, $3x - y - 2z - 5 = 0$;

г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 6 = 0$.

13. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, -3)$ и параллельную плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 3z - 4 = 0$.

14. Перпендикулярны ли плоскости:

а) $y + 2z + 1 = 0$ и $2y - z + 1 = 0$;

б) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 3 = 0$;

в) $2x - y + 5 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

15. Напишите уравнение какой-нибудь плоскости, перпендикулярной плоскости, заданной уравнением:

а) $y + 1 = 0$; б) $x - y + 1 = 0$;

в) $x + y + z - 1 = 0$.

16. Найдите косинус угла между плоскостями, заданными уравнениями:

а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;

б) $2x + 3y - 5 = 0$, $2y + 3z - 7 = 0$.

17. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение симметричной плоскости относительно: а) начала координат; б) плоскости Oxy; в) плоскости Oxz; г) плоскости Oyz; д) прямой Ox; е) прямой Oy; ж) прямой Oz.

21. Параметрическое задание кривых в пространстве

Кривую в пространстве можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Переменная t называется параметром, а кривая в пространстве, задаваемая этими уравнениями, называется ***параметрически заданной кривой*** в пространстве.

Выясним, какими параметрическими уравнениями задаётся прямая.

Для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой и ***направляющий вектор*** $\vec{e}(k, l, m)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2\text{-}x_1, y_2\text{-}y_1, z_2\text{-}z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

Теорема. Прямая, проходящая через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, задаётся системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

где k, l, m – действительные числа, одновременно не равные нулю, составляющие координаты направляющего вектора, а t – параметр, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Точка $A(x, y, z)$ принадлежит прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, и направляющим вектором $\vec{e}(k, l, m)$ в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x\text{-}x_0, y\text{-}y_0, z\text{-}z_0)$ коллинеарен вектору $\vec{e}(k, l, m)$ (рис. 21.1).

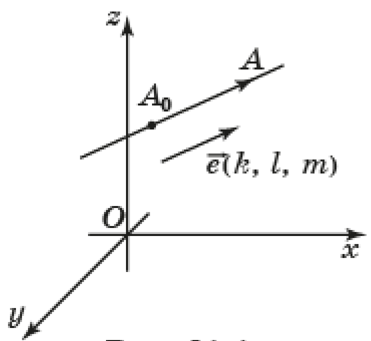


Рис. 21.1

Координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должно выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = kt, \\ y - y_0 = lt, \\ z - z_0 = mt, \end{cases}$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

где t – действительное число.

Следствие. Прямая, проходящая через точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, задаётся системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

Действительно, в этом случае в качестве направляющего вектора этой прямой можно выбрать вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2\text{-}x_1, y_2\text{-}y_1, z_2\text{-}z_1)$, в качестве точки A_0 – точку A_1, и воспользоваться доказанной теоремой.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами (x, y, z), удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой.

Теорема. Движение точки по прямой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt, \end{cases}$$

является равномерным. Направляющий вектор $\vec{e}(k, l, m)$ является вектором скорости, а величина скорости выражается формулой

$$|\vec{e}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим промежуток T времени от t_1 до t_2, $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты (kT, lT, mT). Разделив вектор перемещения на время T, получим, что вектор скорости имеет координаты (k, l, m). Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{e}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

В качестве примера параметрического задания кривой в пространстве рассмотрим ***винтовую линию*** – траекторию движения точки, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси и одновременно перемещается вдоль этой оси с постоянной скоростью (рис. 21.2).

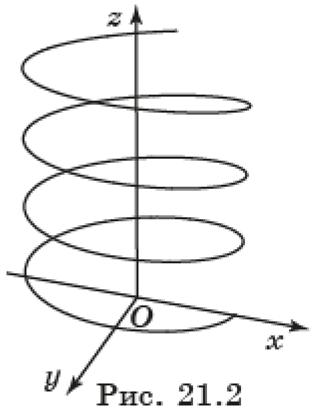


Рис. 21.2

Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t\,, \\ y = R \cdot \sin t\,, \\ \quad z = a \cdot t. \end{cases}$$

Первые два уравнения описывают движение точки вокруг оси Oz. Третье уравнение задаёт движение точки вдоль этой оси.

Для получения кривой в пространстве, заданной параметрическими уравнениями, в программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая(x(t),y(t),z(t),t,a,b)

и нажать "Enter". В результате на экране появится искомая кривая.

Упражнения

1. Напишите уравнения, которыми задаются координатные прямые: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

2. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, 2, 3)$ и направляющим вектором $\vec{e}(2, -3, 1)$.

3. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(2, 1, -3)$, $A_2(5, 4, 3)$.

4. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -2, 3)$ и перпендикулярную плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

5. Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 8t, \\ y = t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

6. В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_1 + k_1 t, \\ y = y_1 + l_1 t, \\ z = z_1 + m_1 t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2 + k_2 t, \\ y = y_2 + l_2 t, \\ z = z_2 + m_2 t \end{cases}$$

задают перпендикулярные прямые.

7. Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = 1 + 7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

8. Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 2, 2)$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $DC = 5$, $DA = 4$, $DD_1 = 3$. Вершина D – начало координат. Оси координат лежат на прямых соответственно DC, DA, DD_1 лежат на осях координат, Напишите параметрические уравнения прямой: а) DB; б) DB_1; в) AB_1; г) AC_1.

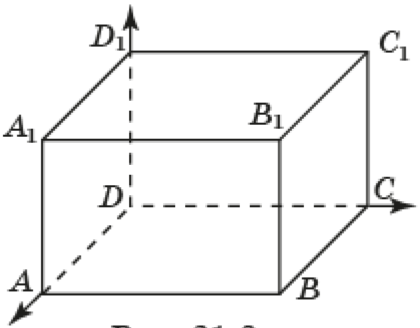


Рис. 21.3

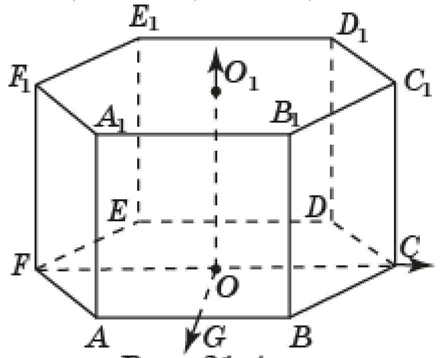


Рис. 21.4

10. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Начало координат находится в центре O основания призмы. Точка G – середина ребра AB, O_1 – центр второго основания призмы. Оси координат лежат на прямых соответственно OC, OG и OO_1. Напишите параметрические уравнения прямой: а) AB_1; б) AC_1; в) AD_1.

11. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}(3, 2, 1)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты (1, -1, 2). Какие координаты она будет иметь в момент времени $t = 2$?

12. Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$$

Найдите скорость движения этой точки.

13. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 1$ она имела координаты (1, 2, 3), а в момент времени $t = 4$ – координаты (4, 5, 6). Какова скорость движения точки?

14. Найдите длину участка винтовой линии, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

15, В программе GeoGebra получите кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

16. Напишите параметрические уравнения кривой, изображённой на рисунке 21.5.

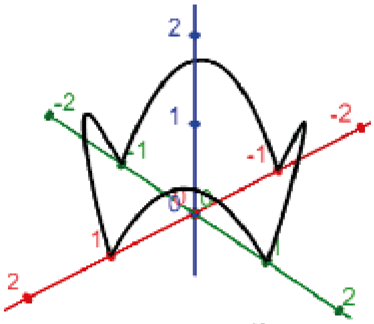


Рис. 21.5

22. Векторное произведение векторов

Многие задачи аналитической геометрии в пространстве сводятся к нахождению вектора, перпендикулярного двум данным векторам. Решить эти задачи помогает векторное произведение двух векторов. Для его определения нам понадобится понятие ориентации тройки некомпланарных векторов.

Условимся называть тройку некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой, если наблюдателю, находящемуся внутри трёхгранного угла, образованного этими векторами, отложенными от одной точки, кратчайшие повороты от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от $\vec{b}$ к $\vec{c}$ кажутся происходящими против часовой стрелки (рис. 22.1, а).

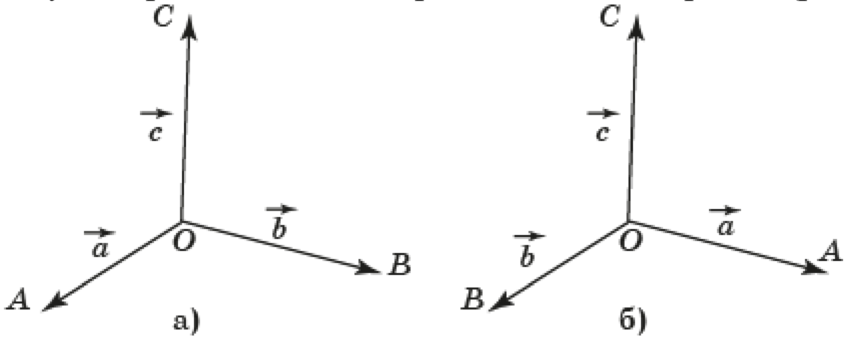


Рис. 22.1

Аналогично, тройку некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будем называть левой, если наблюдателю, находящемуся внутри трёхгранного угла, образованного этими векторами, отложенными от одной точки, кратчайшие повороты от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от $\vec{b}$ к $\vec{c}$ кажутся происходящими по часовой стрелке (рис. 22.1, б).

Для определения ориентации тройки некомпланарных векторов используют также «правило правой (левой) руки»: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в правой (левой) тройке векторов располагаются так, как большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Рассмотрим два ненулевых неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ***Векторным произведением*** этих векторов называется вектор, обозначаемый $\vec{a} \times \vec{b}$, для которого выполняются следующие условия:

1) его длина равна $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между данными векторами;
2) он перпендикулярен каждому из данных векторов;
3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ является правой (рис. 22.2).

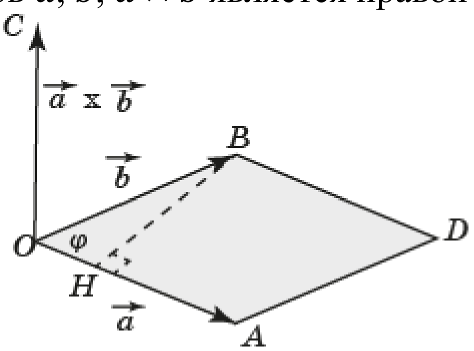


Рис. 22.2

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то будем считать их векторное произведение равным нулевому вектору.

Геометрическим смыслом модуля векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки (рис. 22.2).

Механическим смыслом векторного произведения двух векторов является момент силы. А именно, если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную к точке A, а вектор $\vec{a}$ имеет начало в некоторой точке O и конец в точке A, то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O, который характеризует действие силы на тело, помещённое в точку O, вызывающее его вращательное движение (рис. 22.3).

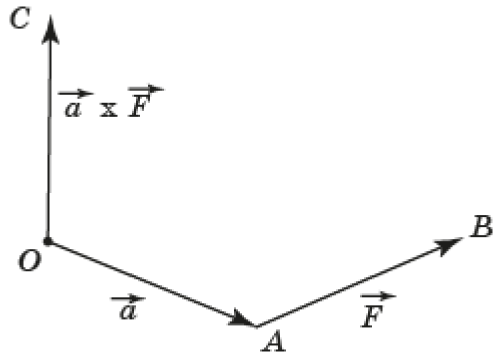


Рис. 22.3

Из определения векторного произведения следует, что для координатных векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ выполняются равенства

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{0}, \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}.$$

Установим свойства векторного произведения.

1. Антикоммутативность, т. е. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Действительно, при изменении порядка следования векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их векторное произведение меняет направление на противоположное.

2. Сочетательное свойство относительно умножения на число: $t(\vec{a} \times \vec{b}) = (t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b})$.

Непосредственно следует из определения.

3. Дистрибутивность, т. е. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Доказательство. Предположим, что вектор $\vec{a}$ единичный. В общем случае можно воспользоваться свойством 2, сведя доказательство к единичному вектору.

Пусть $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – неколлинеарные векторы. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O. Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}$. Обозначим B', C', D' ортогональные проекции соответственно точек B, C, D на плоскость, проходящую через точку O и перпендикулярную вектору $\vec{a}$ (рис. 22.4).

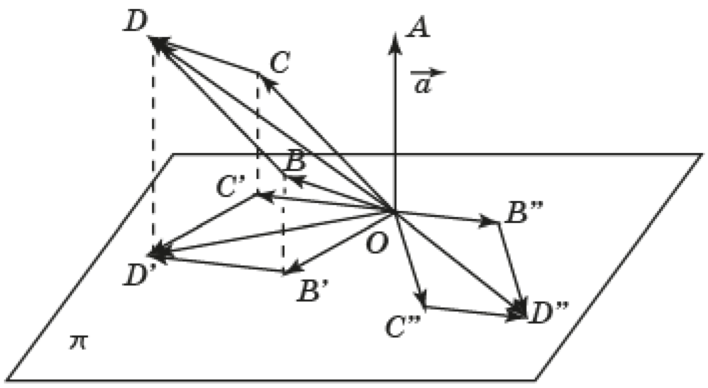


Рис. 22.4

Тогда

$$\left|\overrightarrow{OB'}\right| = |\vec{a} \times \vec{b}|, \left|\overrightarrow{OC'}\right| = |\vec{a} \times \vec{c}|, \left|\overrightarrow{OD'}\right| = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})|.$$

Повернём векторы $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OD'}$ вокруг прямой OA на 90° против часовой стрелки. Получим векторы $\overrightarrow{OB''}, \overrightarrow{OC''}, \overrightarrow{OD''}$.

Для этих векторов имеют место равенства

$$\overrightarrow{OB''} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OC''} = \vec{a} \times \vec{c}, \overrightarrow{OD''} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}).$$

Так как $\overrightarrow{OD''} = \overrightarrow{OB''} + \overrightarrow{OC''}$, то выполняется искомое равенство

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Заметим, что из свойства 1 и доказанного свойства 3 следует выполнимость равенства

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Выведем формулу, выражающую векторное произведение векторов через их координаты.

Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Перепишем их в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\jmath}) \times (b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{\jmath}) =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Таким образом, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет координаты

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Пример. Воспользуемся векторным произведением векторов для нахождения уравнения плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, не принадлежащие одной прямой.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ с координатами

$$\left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)$$

будет перпендикулярен этим векторам. Значит, он будет вектором нормали плоскости, проходящей через данные точки. Следовательно, искомое уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1)-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1)=0.$$

Перепишем последнее выражение, используя понятие определителя. А именно, рассмотрим набор чисел, записанный в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка, соответствующим этой матрице, называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Указанное выше уравнение плоскости можно переписать в виде равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ векторов $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ можно записать в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите векторное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; в) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

2. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите длину векторного произведение векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BE_1}$ д) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; е) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BE_1}$.

3. Найдите координаты векторного произведения векторов:

а) $\vec{a}(1,1,1)$, $\vec{b}(-1,-1,1)$;

б) $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(2,3,4)$;

в) $\vec{a}(2,5,7)$, $\vec{b}(1,2,4)$.

4. Найдите векторное произведение векторов:

а) $\vec{a}=\vec{\imath}$, $\vec{b}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$;

б) $\vec{a}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+4\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$;

в) $\vec{a}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$;

г) $\vec{a}=5\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

5. Найдите координаты вектора нормали плоскости, проходящей через точки:

а) $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 2, 0)$, $A_3(0, 0, 3)$;

б) $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 1, 2)$.

6. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки:

а) $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 2, 0)$, $A_3(0, 0, 3)$;

б) $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 1, 2)$.

7. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки:

а) $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 2, 0)$, $A_3(0, 0, 3)$;

б) $A_1(1, 2, 3)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 1, 2)$;

в) $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$.

8. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

9. Покажите, что векторное произведение не ассоциативно, т. е. не для всех векторов выполняется равенство $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$. Рассмотрите векторы $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\jmath}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

10. Сила $\vec{F}(3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Найдите координаты момента этой силы относительно начала координат.

11. Докажите, что для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место равенство

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

12. Докажите, что расстояние h от точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой, проходящей через точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором $\vec{m}$, выражается формулой

$$h = \frac{|\overrightarrow{A_0 A_1} \times \vec{m}|}{|\vec{m}|}.$$

23. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Умножим векторно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Полученный вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ умножим скалярно на вектор $\vec{c}$. Полученное число $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ называется ***смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то будем считать их смешанное произведение равным нулю.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения векторов. Отложим некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки O. Получим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (рис. 23.1).

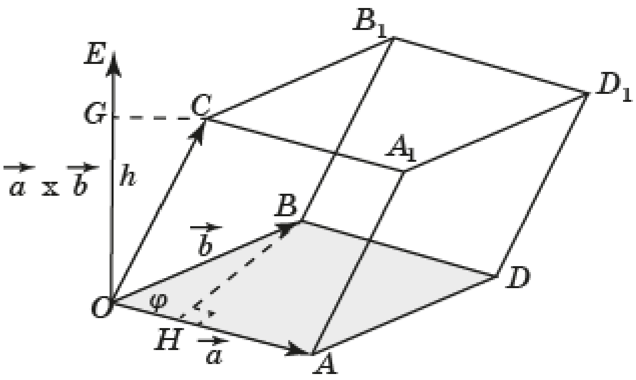


Рис. 23.1

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\overrightarrow{OE}$, перпендикулярный этим векторам, модуль которого равен площади параллелограмма $OADB$, а тройка векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$ является правой.

Если тройка векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ также является правой, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно высоте OG параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Если тройка векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ является левой, то скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно высоте OG параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, взятой со знаком минус.

Таким образом, смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки, взятому со знаком плюс, если данная тройка векторов правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

Выразим смешанное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. Тогда вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ имеет координаты

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Воспользуемся формулой скалярного произведения векторов. Получим выражение для смешанного произведения данных векторов

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Используя понятие определителя, это выражение можно переписать в виде

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Объём V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, отложенных от одной точки, равен модулю смешанного произведения этих векторов, т. е. имеет место формула

$$V = \left| \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right|.$$

Из этой формулы следует, что объём v тетраэдра $ABCD$, для которого $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$, $D(x_3, y_3, z_3)$, выражается формулой

$$v = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} \right|.$$

Заметим, что если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является правой, то в формуле объёма параллелепипеда знак модуля можно снять. Получим

$$V = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если тройка векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ является правой, то в формуле объёма тетраэдра знак модуля можно снять. Получим

$$v = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Упражнения

1. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите смешанное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$и $\overrightarrow{CB_1}$.

2. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите смешанное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BE_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

3. Найдите смешанное произведение векторов:

а) $\vec{a}(1, 1, 1)$, $\vec{b}(-1, -1, 1)$, $\vec{c}(1, 2, 3)$;

б) $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 3, 4)$, $\vec{c}(1, 2, 3)$;

в) $\vec{a}(2, 5, 7)$, $\vec{b}(1, 2, 4)$, $\vec{c}(1, 2, 3)$.

4. Найдите смешанное произведение векторов:

а) $\vec{a} = \vec{\imath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$;

б) $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$;

в) $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k},\ \vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

5. Докажите, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ принадлежат одной плоскости.

6. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, 1)$, $C(-1, 1, -1)$, $D_1(1, -1, -1)$.

7. Найдите объём тетраэдра, $ABCD$, для которого $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

8. Докажите, что для смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется неравенство

$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|.$$

В каком случае это неравенство превращается в равенство?

9. Докажите, что три вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Докажите, что расстояние h от точки A_0 до плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_3, не принадлежащие одной прямой, выражается формулой

$$h = \frac{|\overrightarrow{A_0A_1}\,\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_2A_3}|}{|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|}.$$

11. Докажите, что объём v тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, вершины которого имеют координаты $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$, а тройка векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ является правой, выражается формулой

$$v = \frac{1}{6}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_1 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_1 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\right).$$

24. Аналитические методы нахождения углов в пространстве

1. Угол между двумя прямыми. Угол φ между двумя прямыми в пространстве можно находить, используя формулу скалярного произведения их направляющих векторов

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}|}{|\overrightarrow{e_1}| \cdot |\overrightarrow{e_2}|},$$

где $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ – направляющие векторы данных прямых.

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдём угол между прямыми AB_1 и BC_1 (рис. 24.1).

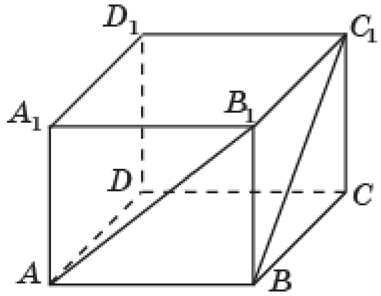


Рис. 24.1

Введём систему координат, считая точку D началом координат, прямые DC, DA, DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AB_1}(3, 0, 1)$ и $\overrightarrow{BC_1}(0, -2, 1)$. Их скалярное произведение равно 1. Их длины равны соответственно $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$. Следовательно, косинус угла между данными прямыми выражается формулой

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

2. Угол между двумя плоскостями. Угол между двумя пересекающимися плоскостями, можно находить, используя формулу скалярного произведения их векторов нормалей

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|},$$

где $\vec{n}$, $\overrightarrow{n_2}$ – векторы нормали данных плоскостей.

Пример 2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBC (рис. 24.2).

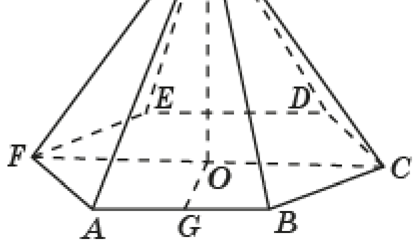


Рис. 24.2

Обозначим O центр основания пирамиды, G – середину ребра AB. Введём систему координат, считая точку O началом координат, прямые OC, OG, OS – соответствующими осями координат. Данные плоскости задаются уравнениями соответственно

$$\sqrt{3}x + y + z = \sqrt{3}, -\sqrt{3}x + y + z = \sqrt{3}.$$

Их векторы нормалей имеют координаты соответственно $\overrightarrow{n_1}(\sqrt{3}, 1, 1)$ и $\overrightarrow{n_2}(-\sqrt{3}, 1, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно –1. Их длины равны $\sqrt{5}$.

Следовательно, косинус угла между данными плоскостями выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. Угол между прямой и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью можно находить, используя формулу скалярного произведения направляющего вектора прямой и вектора нормали плоскости, а также то, что модуль косинуса угла между этими векторами равен синусу угла между данными прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|},$$

где $\vec{m}$ – направляющий вектор данной прямой, $\vec{n}$ – вектор нормали данной плоскости (рис. 24.3).

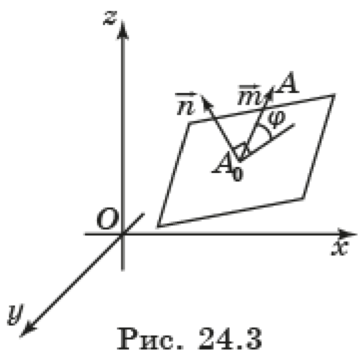


Рис. 24.3

Пример 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 2, найдём угол между прямой SA и плоскостью SBC (рис. 24.4).

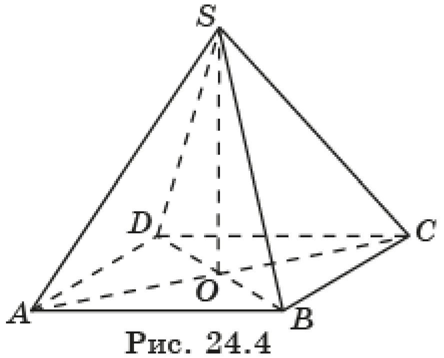


Рис. 24.4

Обозначим O центр основания пирамиды. Введём систему координат, считая точку O началом координат, прямые OB, OA, OS – соответствующими осями координат. Данные прямая и плоскость задаются уравнениями соответственно

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2}t, \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}t, \end{cases} \quad x - y + z = \sqrt{2}.$$

Направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости имеют координаты соответственно $\vec{m}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $\vec{n}(1, -1, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно $-2\sqrt{2}$. Их длины равны соответственно 2 и $\sqrt{3}$.

Следовательно, синус угла между данными прямой и плоскостью выражается формулой

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Упражнения

1. Найдите угол между прямыми, направляющие векторы которых имеют координаты (1, -1, 0) и (1, 1, 1).

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF_1, где E и F_1 – середины рёбер соответственно BC и C_1D_1.

4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между прямыми AE и BE_1, где E и E_1 – середины рёбер соответственно BC и B_1C_1.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BC.

7. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BD.

8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1, точка E – середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми AS и BE.

9. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1, точки E, F – середины рёбер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2, точки G и H – середины рёбер соответственно SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.

15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и BD_1.

16. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCD_1.

17. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BDA_1.

18. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра AA_1. Найдите угол между плоскостями ABC_1 и B_1D_1E.

19. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины рёбер соответственно AA_1 и BB_1. Найдите косинус угла между плоскостями ACF и B_1D_1E.

20. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F – середины рёбер соответственно AA_1 и CD. Найдите косинус угла между плоскостями BFC_1 и B_1D_1E.

21. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC_1 и AB_1C_1.

22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра равны 1, точки D и E – середины рёбер соответственно AA_1 и CC_1. Найдите косинус угла между плоскостями ABE и DB_1C_1.

23. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ рёбра равны 2, точки E, F и G – середины рёбер соответственно AB, BC и SC. Найдите косинус угла между плоскостями SAD и EFG.

24. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ рёбра равны 2, точки E, F – середины рёбер соответственно SC, SD. Найдите косинус угла между плоскостями SAD и ABE.

25. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BDD_1 и AFE_1.

26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BCC_1 и AFE_1.

27. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBD.

28. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2, точка G – середина ребра SC. Найдите косинус угла между плоскостями SAF и SDG.

29. Найдите угол между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты (1, 1, 1), и плоскостью, заданной уравнением $x + y + z + 1 = 0$.

30. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BDA_1.

31. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E_1 – середина ребра C_1D_1. Найдите синус угла между прямой AE_1 и плоскостью BDA_1.

32. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра AA_1. Найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью B_1D_1E.

33. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F_1 – середины рёбер соответственно CD и A_1D_1. Найдите угол между прямой CF_1 и плоскостью BEC_1.

34. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$. Найдите синус угла между прямой DB_1 и плоскостью ACD_1.

35. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$. Найдите синус угла между прямой DA_1 и плоскостью ACD_1.

36. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра равны 1, точка D_1 – середина ребра A_1C_1. Найдите синус угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1D_1.

37. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра равны 1, точки D_1 и E – середины рёбер соответственно A_1C_1 и AA_1. Найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью B_1D_1E.

25. Аналитические методы нахождения расстояний в пространстве

1. Расстояние от точки до прямой. Выведем формулу для расстояния h от точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$, и направляющим вектором $\vec{m}(a, b, c)$ (рис. 25.1).

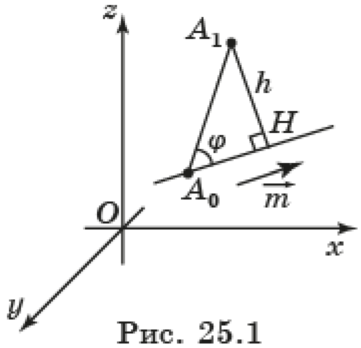


Рис. 25.1

Воспользуемся векторным произведением векторов. Напомним, что модуль векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_0A_1}$ и $\vec{m}$ равен произведению длин этих векторов и синуса угла φ между ними, т. е.

$$\left|\overrightarrow{A_0A_1} \times \vec{m}\right| = \left|\overrightarrow{A_0A_1}\right| \cdot |\vec{m}| \cdot \sin\varphi.$$

Заметим, что $\left|\overrightarrow{A_0A_1}\right| \cdot \sin\varphi$ является искомым расстоянием от данной точки до данной прямой. Следовательно, имеет место формула

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{A_0A_1} \times \vec{m}\right|}{|\vec{m}|}.$$

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдём расстояние от точки A_1 до прямой BC_1 (рис. 25.2).

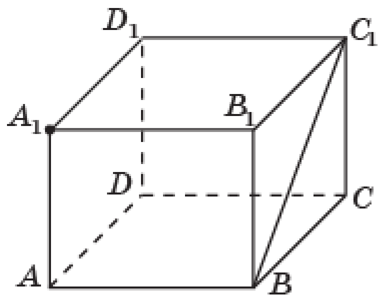


Рис. 25.2

Введём систему координат, считая точку D началом координат, прямые DC, DA, DD_1 – соответствующими осями координат. В качестве вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$ возьмём вектор $\overrightarrow{BA_1}(-3, 0, 1)$. Направляющий вектор $\overrightarrow{BC_1}$ прямой имеет координаты (0, -2, 1). Искомое расстояние равно $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

2. Расстояние от точки до плоскости. Выведем формулу для расстояния h от точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка плоскости, $\vec{n}(a, b, c)$ – вектор нормали (рис. 25.3).

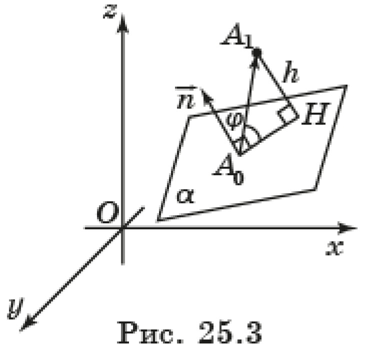


Рис. 25.3

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_0A_1}|} = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot|\overrightarrow{A_0A_1}|}.$$

Учитывая, что $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, и то, что искомое расстояние h равно $|\overrightarrow{A_0A_1}|\cdot\cos\varphi$, получаем искомую формулу

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, найдём расстояние от точки B_1 до плоскости ACD_1 (рис. 25.4).

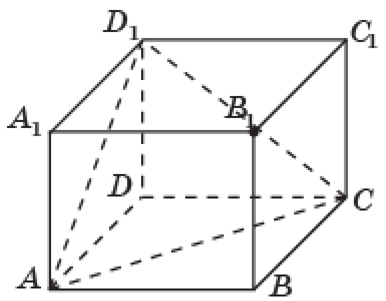


Рис. 25.4

Введём систему координат, считая точку D началом координат, прямые DC, DA, DD_1 – соответствующими осями координат. Точка B_1 имеет координаты (3, 2, 1). Плоскость задаётся уравнением $2x + 3y + 6z = 6$. Искомое расстояние равно $1\frac{5}{7}$.

3. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Пусть скрещивающиеся прямые a и b задаются соответственно точками A, B и направляющими векторами $\vec{k}$, $\vec{l}$. Выведем формулу для расстояния h между этими прямыми (рис. 25.5).

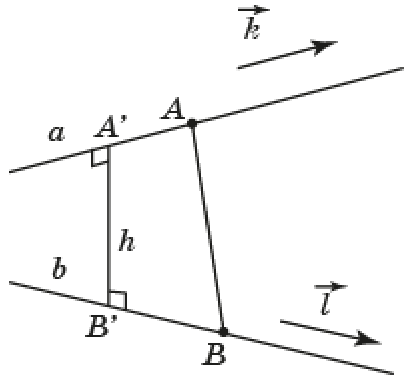


Рис. 25.5

Векторное произведение $\vec{k} \times \vec{l}$, делённое на его модуль $|\vec{k} \times \vec{l}|$ представляет собой единичный вектор, перпендикулярный прямым a и b. Модуль скалярного произведения этого вектора на вектор $\overrightarrow{AB}$ равен длине общего перпендикуляра $A'B'$ к этим прямым. Следовательно, имеет место формула

$$h = \left|\frac{\vec{k}\,\vec{l}\,\overrightarrow{AB}}{|\vec{k} \times \vec{l}|}\right|.$$

Пример 3. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 2, найдём расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 (рис. 25.6).

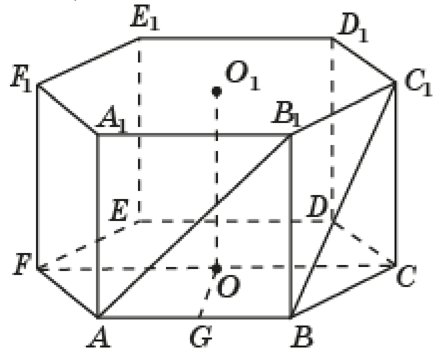


Рис. 25.6

Обозначим O и O_1 центры оснований призмы, G – середину ребра AB. Введём систему координат, считая точку O началом координат, прямые OC, OG, OO_1 – соответствующими осями координат. Имеем: $A(-1, \sqrt{3}, 0)$, $B(1, \sqrt{3}, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $B_1(1, \sqrt{3}, 2)$, $C_1(2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB}(2, 0, 0)$, $\vec{k} = \overrightarrow{AB_1}(2, 0, 2)$, $\vec{l} = \overrightarrow{BC_1}(1, -\sqrt{3}, 2)$. Искомое расстояние равно $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Упражнения

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1D_1.

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой A_1C.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра C_1D_1. Найдите расстояние от точки A до прямой BE.

4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E – середина ребра C_1D_1. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BE.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BD_1, где D_1 – середина ребра A_1C_1.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BE_1.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BF_1.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CE_1.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.

14. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDA_1.

15. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.

16. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BC_1D.

17. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости, проходящей через вершины C, A_1 и середину ребра BB_1.

18. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости, проходящей через вершины C, B_1 и середину ребра DD_1.

19. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBF.

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

22. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.

23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.

24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.

25. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1D.

26. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.

27. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости F_1C_1D.

28. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.

29. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

30. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние прямыми AB_1 и BD_1.

31. В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC.

32. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BD.

33. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

34. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.

35. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны1, найдите расстояние между прямыми SA и BF.

36. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и CE.

37. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

38. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.

39. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

40. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

41. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BE_1.

42. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

43. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

44. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BE_1.

26. Аналитическое задание многогранников

Рассмотрим вопрос об аналитическом задании выпуклых многогранников. Так как выпуклый многогранник можно представить как пересечение конечного числа полупространств, то сначала выясним, как задаются полупространства.

Теорема. Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство, задаются неравенствами

$$ax + by + cz + d \geq 0, \; ax + by + cz + d \leq 0,$$

где a, b, c, d - действительные числа, из которых a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора нормали к плоскости, ограничивающей это полупространство.

Доказательство. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую вектор нормали $\vec{n}(a, b, c)$ (рис. 26.1).

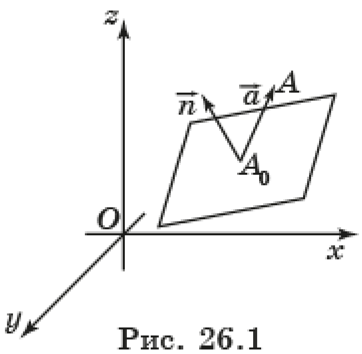


Рис. 26.1

Точка $A(x, y, z)$ принадлежит полупространству, ограниченному этой плоскостью и содержащему вектор нормали, тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_0A}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ образует острый или прямой угол с вектором $\vec{n}$, т. е. когда скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0A}$ больше или равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим неравенство

$$a(x–x_0) + b(y–y_0) + c(z–z_0) \geq 0.$$

Обозначая $–ax_0 – by_0 – cz_0 = d$ и преобразуя это уравнение, получим требуемое неравенство

$$ax + by + cz + d \geq 0.$$

Полупространство, лежащее от данной плоскости по другую сторону, задаётся неравенством $ax + by + cz + d \leq 0$.

Для того чтобы определить, какому из двух полупространств относительно заданной плоскости принадлежит точка, достаточно подставить её координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Заметим, что, поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Например, неравенства

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 26.2).

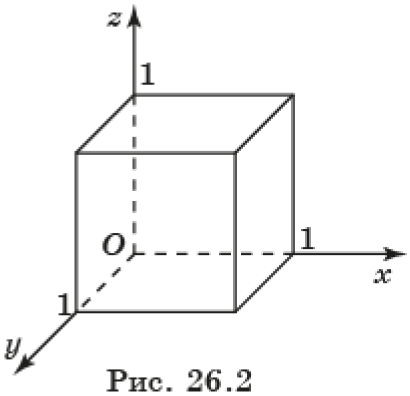


Рис. 26.2

Упражнения

1. Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \ge 0$ или $5x + 3y - z - 2 \le 0$ принадлежит точка: а) $A(1, 0, 0)$; б) $B(0, 1, 0)$; в) $C(0, 0, 1)$.

2. Какую фигуру в пространстве задаёт следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le 5? \end{cases}$$

3. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le 4, \\ x + y + z \le 8. \end{cases}$$

4. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le 4, \\ x + y + z \le 6. \end{cases}$$

5. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 0 \le x + 2z \le 4, \\ 2y + z \le 6. \end{cases}$$

6. Найдите неравенства, задающие треугольную пирамиду $SOBC$ (рис. 26.3), вершины которой имеют координаты: $O(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $S(0, 0, 2)$.

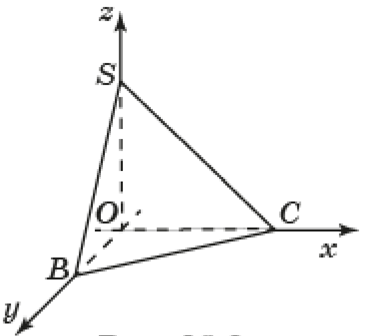


Рис. 26.3

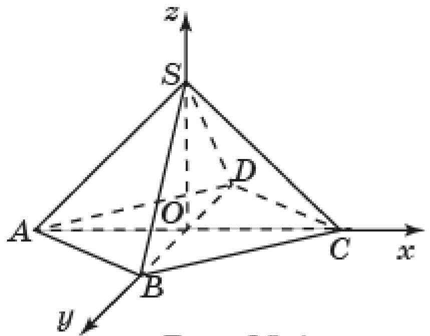


Рис. 26.4

7. Найдите неравенства, задающие правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ (рис. 26.4), вершины которой имеют координаты: $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $D(0, -2, 0)$, $S(0, 0, 2)$.

8. Какой многогранник в пространстве задаётся неравенством

$$|x| + |y| + |z| \leq 2?$$

9. Какой из полуправильных многогранников задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1, \\ |x| + |y| + |z| \leq 2? \end{cases}$$

10. Найдите неравенства, которые задают правильный тетраэдр с вершинами в точках с координатами (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1,-1).

11. Изобразите многогранник, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2, \\ |x| + |y| + |z| \leq 3. \end{cases}$$

12. Изобразите многогранник, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2, \\ |x| + |y| + |z| \leq 5. \end{cases}$$

27. Многогранники в задачах оптимизации

Ранее мы рассмотрели задачи оптимизации, решение которых приводит к отысканию наименьшего значения линейной функции на многоугольнике.

Здесь мы рассмотрим примеры задач, решение которых приводит к отысканию наименьшего значения линейной функции на многограннике. Начнём с транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода З$_1$, З$_2$, З$_3$, З$_4$ требуется завезти сырьё одинакового вида, которое хранится на двух складах С$_1$, С$_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья, (в т) на складе		Потребность в сырье, (в т) на заводе			
С$_1$	С$_2$	З$_1$	З$_2$	З$_3$	З$_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода			
	З$_1$	З$_2$	З$_3$	З$_4$
С$_1$	5	6	4	10
С$_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем её условие и переведём его на язык математики, т. е. составим ***математическую модель***. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада С$_1$ на заводы З$_1$, З$_2$, З$_3$, обозначим соответственно через x, y и z. Тогда на четвёртый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x – y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезённое на заводы			
	З$_1$	З$_2$	З$_3$	З$_4$
С$_1$	x	y	z	$20 – x – y - z$
С$_2$	$8 - x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \\ 8 - x \geq 0, 10 - y \geq 0, 12 - z \geq 0, \\ 20 - x - i - z \geq 0, x + y + z - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строкой данной системы. На рисунке 27.1 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$.

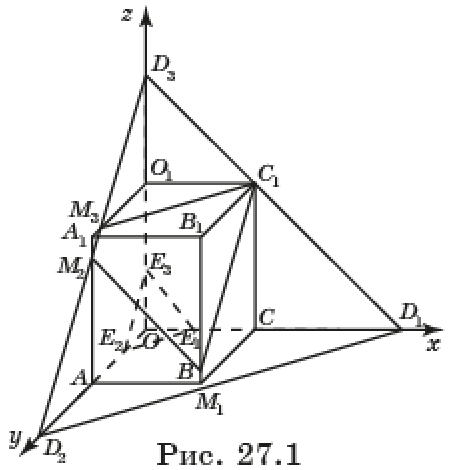


Рис. 27.1

Уравнение 20 - x - y - z = 0 определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая пересекает параллелепипед по многоугольнику $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед по треугольнику $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8,10,2)$, $M_2(0,10,10)$, $M_3(0,8,12)$, $C_1(8,0,12)$, $C(8,0,0)$, $B(8,10,0)$, $A(0,10,0)$, $E_1(5,0,0)$, $E_2(0,5,0)$, $E_3(0,0,5)$, $O_1(0,0,12)$, выполняются все условия данной системы. Назовём его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров будет равно:

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) +$$
$$+ 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{min} = 295 - f_{max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ ($c > 0$) принимает своё наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задаёт плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех её точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости, - значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснётся с многогранником. Такое касание произойдёт при некотором d_0 или в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 27.2), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

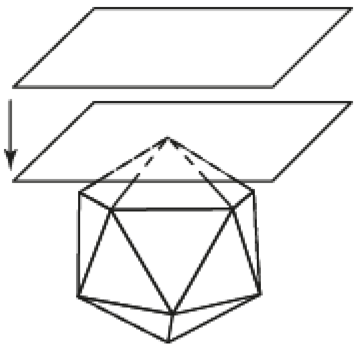


Рис. 27.2

В точках касания линейная функция принимает значение d_0. Поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках будут меньше d_0. Таким образом, d_0 будет искомым наибольшим значением.

Таким образом, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения этой функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее.

Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M_1) = 52, f(M_2) = 60, f(M_3) = 56, f(C_1) = 32, f(C) = 8, f(B) = 48, f(A) = 40, f(E_1) = 5, f(E_2) = 20, f(E_3) = 10, f(O_1) = 24$.

Легко видеть, что наибольшее значение этой функции f равно 60. Следовательно, $F_{min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0,10,10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задаётся таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезённое на заводы			
	З$_1$	З$_2$	З$_3$	З$_4$
С$_1$	0	10	10	0
С$_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трём, поэтому в процессе её решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трёх, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются компьютеры.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трёхмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики - ***многомерной геометрии***.

Упражнения

1. Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

2. Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

3. Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

4. Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если c: а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

5. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 2 + 2x + y \geq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

6. На трёх складах хранится сырьё одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны соответственно 7 км, 5 км, 8 км.

7. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

8. Установка собирается из трёх различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 типа Б и 9 типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

28. Аналитическое задание поверхностей

Поверхностью второго порядка называется поверхность, задаваемая в координатном пространстве уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

в котором числа $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{12}, a_{13}$ одновременно не равны нулю.

Частным случаем поверхности второго порядка является сфера с центром в точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R, которая задаётся уравнением

$$(x–x_0)^2 + (y–y_0)^2 + (z–z_0)^2 = R^2.$$

Приведём другие примеры поверхностей второго порядка.

1. Эллипсоид – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рис. 28.1).}$$

Положительные числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

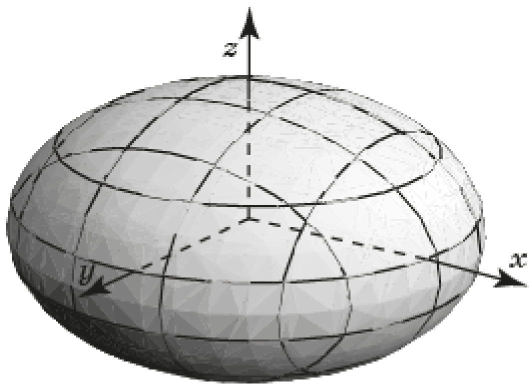


Рис. 28.1

2. Однополостный гиперболоид – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (рис. 28.2).}$$

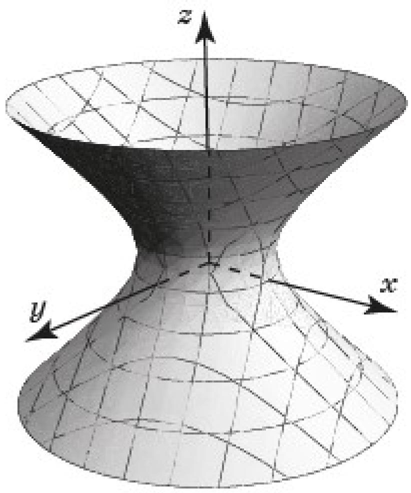


Рис. 28.2

Положительные числа a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида.

3. Двуполостный гиперболоид – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (рис. 28.3).}$$

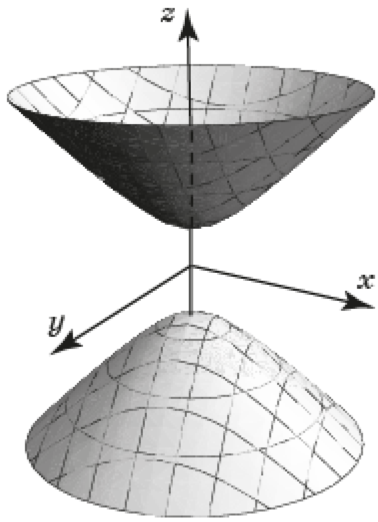


Рис. 28.3

Положительные числа a, b, c называются полуосями двуполостного гиперболоида.

4. Коническая поверхность – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 28.4).

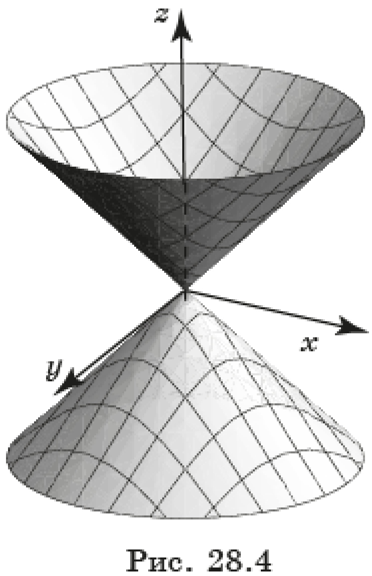


Рис. 28.4

5. Эллиптический параболоид – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением

$$2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \text{ (рис. 28.5).}$$

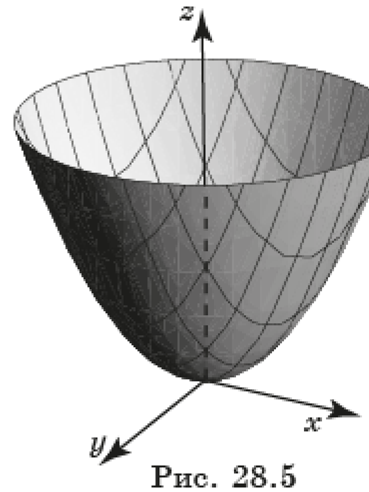


Рис. 28.5

6. Гиперболический параболоид – поверхность, которая в некоторой системе координат задаётся уравнением

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ (рис. 28.6).}$$

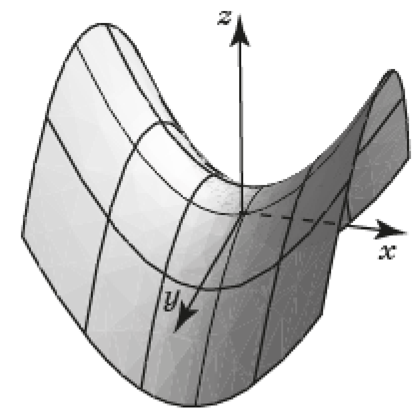


Рис. 28.6

7. Поверхность в пространстве можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

В качестве примера такой поверхности рассмотрим ***геликоид*** - поверхность, описываемую отрезком, перпендикулярным оси вращения, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг этой оси и одновременно перемещается вдоль неё с постоянной скоростью (рис. 28.7).

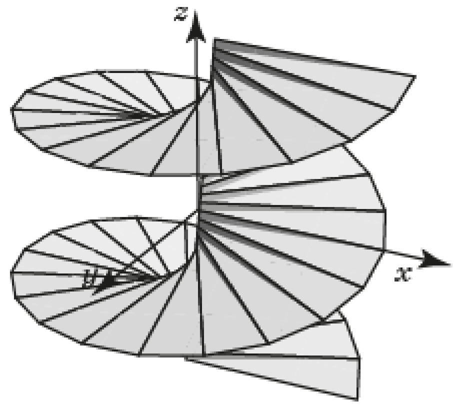


Рис. 28.7

Параметрические уравнения геликоида имеют вид

$$\begin{cases} x = u\sin(v), \\ y = u\cos(v), \\ z = av. \end{cases}$$

Упражнения

1. В программе GeoGebra получите поверхности, заданные следующими уравнениями:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
2) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$;
3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$;
4) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$;
5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$;
6) $x^2 - y^2 - z^2 = 16$;
7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$;
8) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$;
9) $x^2 - y^2 = 4z$;
10) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = \frac{z}{4}$.

2. Придумайте преобразование координат, при котором уравнение $z = xy$ приводится к одному из рассмотренных примеров. Какая это поверхность?

3. Придумайте преобразование координат, при котором уравнение $z^2 = xy$ приводится к одному из рассмотренных примеров. Какая это поверхность?

4. Напишите параметрические уравнения эллипсоида.

5. Кривая в плоскости xOz задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u), \\ z = z(u) \end{cases}$$

и расположена в полуплоскости $x \geq 0$. Напишите параметрические уравнения поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси Oz.

6. Найдите параметрические уравнения ***тора*** (рис. 28.8) – поверхности, полученной вращением вокруг оси Oz окружности, которая в плоскости xOz задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a + \cos t, \\ z = \sin t, \end{cases} \quad (a > 1).$$

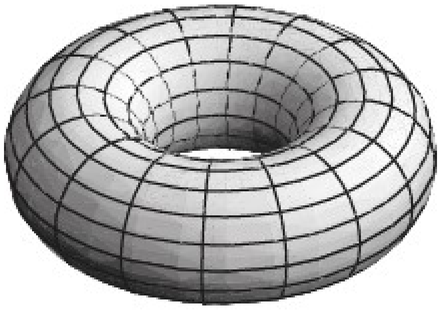


Рис. 28.8

7. Кривая в плоскости xOz задана уравнением $F(x,\ z) = 0$ $(x \geq 0)$. Напишите уравнение поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси Oz.

8. Найдите уравнение тора (рис. 28.8) – поверхности, полученной вращением вокруг оси Oz окружности, которая в плоскости xOz задаётся уравнением $(x-2)^2 + z^2 = 1$.

9. Вращением какого графика функции получается поверхность, изображённая на рисунке 28.9?

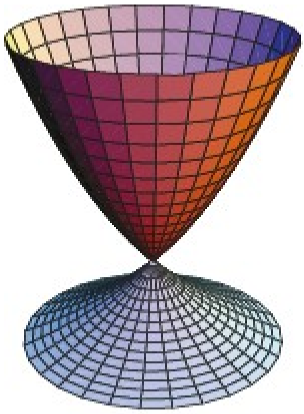


Рис. 28.9

10. Вращением какого графика функции получается поверхность, изображённая на рисунке 28.10?

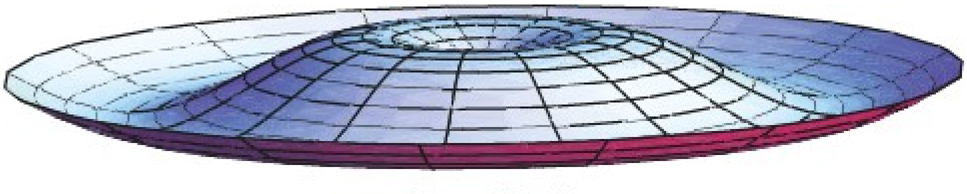


Рис. 28.10

29. Сферические координаты в пространстве

Сферические координаты широко используются для определения положения тел в пространстве. Например, в навигации при определении места нахождения самолёта, корабля и т. д., в астрономии при определении положения звёзд и других небесных тел, в географии при определении положения объектов на поверхности Земли и т. д.

Для определения сферических координат рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку *A* (рис. 29.1).

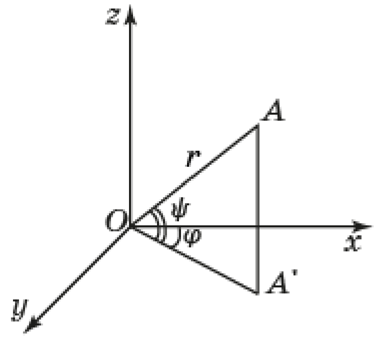


Рис. 29.1

Ортогональную проекцию точки *A* на плоскость *Oxy* обозначим *A*', а длину вектора $\overrightarrow{OA}$ обозначим *r*. Угол между вектором $\overrightarrow{OA'}$ и осью *Ox* обозначим φ. Будем считать его изменяющимся от 0° до 360°. Угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и плоскостью *Oxy* обозначим ψ. Будем считать его изменяющимся от -90° до 90°.

Тройка (*r*; φ; ψ) называется ***сферическими координатами*** точки *A* в пространстве.

Декартовы координаты (*x*, *y*, *z*) точки в пространстве выражаются через её сферические координаты по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi. \end{cases}$$

Наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Поверхность в пространстве можно задавать уравнением в сферических координатах

$$r = r(\varphi;\ \psi).$$

Для того чтобы получить такую поверхность в программе GeoGebra, в строке «Ввод» нужно набрать

Поверхность((*r*(u,v);u;v),u,a,b,v,c,d)

и нажать “Enter”.

В результате получим поверхность, в которой a, b – границы изменения параметра u; c, d – границы изменения параметра v.

Например, если набрать

Поверхность((1;u;v),u,0,Pi/2,v,0,Pi/2),

то получим поверхность, являющуюся частью сферы с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 29.2).

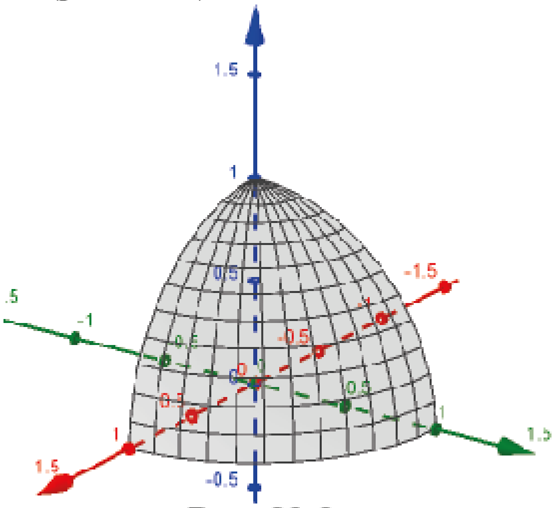


Рис. 29.2

Кривую в пространстве можно задавать параметрическими уравнениями в сферических координатах

$$\begin{cases} r = r(t). \\ \varphi = \varphi(t), \\ \psi = \psi(t). \end{cases}$$

Для того, чтобы получить такую кривую в программе GeoGebra, в строке «Ввод» нужно набрать

Кривая((*r*(t);u(t);v(t)),t,a,b)

и нажать “Enter”.

В результате получим кривую, в которой a, b – границы изменения параметра t.

Например, если набрать

Кривая((1;t;t/10),t,0,5Pi),

то получим винтовую линию на единичной сфере (рис. 29.3).

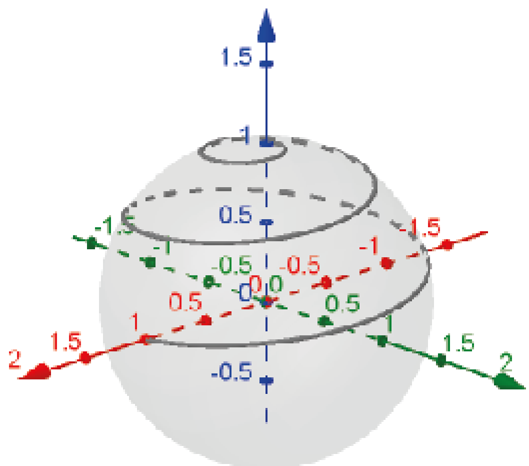


Рис. 29.3

Рассмотрим поверхность Земли, которую будем считать сферой. Выберем начало координат в центре этой сферы. Ось Oz выбирается проходящей через северный полюс, а ось Ox так, чтобы соответствующая плоскость Oxz проходила через обсерваторию английского города Гринвича.

Поскольку все точки на сфере одинаково удалены от начала координат O, то положение точки A на сфере определяется двумя сферическими координатами (φ; ψ). При указании этих координат на поверхности Земли для положительных ψ от нуля до 90° добавляют слова "северной широты", а для отрицательных ψ от нуля до –90° берут абсолютную величину ψ и добавляют слова "южной широты". Аналогично, для положительных φ от нуля до 180° добавляют слова "восточной долготы", а для отрицательных φ от нуля до -180° берут абсолютную величину φ и добавляют слова "западной долготы". Например, город Москва имеет следующие координаты: 55°45' северной широты и 37°35' восточной долготы.

Точки на поверхности Земли, имеющие одинаковый угол ψ, образуют окружность, которая называется ***параллелью***. Точки, имеющие одинаковый угол φ, образуют полуокружность, называемую ***меридианом***.

Выясним, какой путь, соединяющий две точки на сфере, является кратчайшим. Если бы такой путь мы искали в пространстве, то им, очевидно, был бы отрезок, соединяющий эти точки. Однако отрезок не лежит на сфере. Поэтому его требуется заменить таким путем на сфере, который, по возможности, меньше отличается от прямолинейного отрезка.

Пусть C - какая-нибудь точка на отрезке A_1A_2 (рис. 29.4).

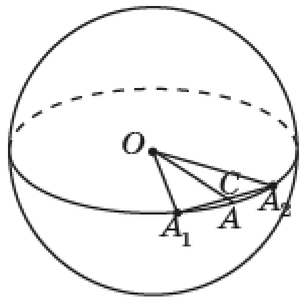


Рис. 29.4

Наименее удалённой от неё точкой на сфере является точка A пересечения прямой OC со сферой. Все такие прямые лежат в плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и O. Пересечением этой плоскости со сферой является окружность с центром в точке O. Такие окружности на сфере называются ***большими окружностями***. Оказывается, что искомым кратчайшим путём, соединяющим точки A_1 и A_2 на сфере, является дуга большой окружности, соединяющая эти точки. Такой путь называют ***ортодромией***, что в переводе с греческого означает "прямой бег".

В частности, если точки A_1, A_2 расположены на противоположных меридианах, то кратчайшим путем на сфере, их соединяющим, будет дуга большой окружности, проходящая через северный или южный полюс, в зависимости от того, в каких полушариях, северном или южном, лежат эти точки.

Например, для точек $A_1(R; 0°; 45°)$, $A_2(R; 180°; 45°)$ угол ψ равен 45° (рис. 29.5).

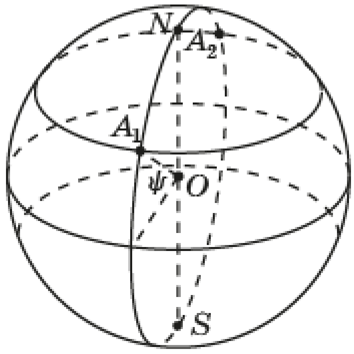


Рис. 29.5

Кратчайший путь, соединяющий эти точки, проходит через северный полюс, и его длина равняется $\frac{\pi R}{2}$. Если бы мы двигались по параллели, соединяющей эти точки, то длина пути составила бы половину длины окружности радиусом $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и была бы равна $\frac{\pi R\sqrt{2}}{2}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше длины кратчайшего пути.

Хотя ортодромия и является кратчайшим путём на поверхности Земли, тем не менее самолёты, корабли и т. д. в основном двигаются по другим маршрутам. Это связано с тем, что ортодромия, отличная от дуги меридиана или экватора, образует с меридианами разные углы, а наиболее простым маршрутом является кривая, образующая равные углы с разными меридианами. Эта кривая называется ***локсодромия***, что в переводе с греческого означает "косой бег". Движение по локсодромии называется также движением с постоянным курсом. Для того чтобы держать постоянный курс, используется компас, указывающий направления меридианов и направление движения. Двигаясь же по ортодромии, приходится постоянно менять курс, что возможно только с использованием компьютеров.

Конечно, при движении с постоянным курсом путь удлиняется. Однако, если начало и конец пути расположены сравнительно близко друг к другу, то такое удлинение незначительно. Оно начинает сказываться при значительном удалении друг от друга начала и конца пути. В этом случае весь путь разбивается на меньшие участки, движение по которым осуществляется с постоянным курсом, а при переходе с одного участка на другой курс меняется.

Упражнения

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами: (1; 45°; 120°), (2; -30°; -90°), (1; 90°; 60°).

2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами: $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, 0, 2)$.

3. Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

4. Точка A имеет сферические координаты (r; φ; ψ). Найдите сферические координаты точки, симметричной данной, относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

5. Пункт A находится на параллели 60° северной широты. Какой длины путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли примите равным 6000 км.

6. Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при её продолжении в обе стороны?

7. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) φ постоянно.

8. Какая фигура в пространстве задаётся неравенствами: а) $0 \le r \le 1$, $0 \le \psi$; б) $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$; в) $0 \le r \le 1$, $0 \le \psi$, $0 \le \varphi \le \pi$?

9. Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}; 45°; 0°)$, $B(2; 0°; 60°)$.

10. В прямоугольной системе координат дана сфера с центром в начале координат и радиусом 1. Найдите параметрические уравнения в сферических координатах сечения этой сферы плоскостью, параллельной плоскости Oxy, и отстоящей от неё на расстояние $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. В прямоугольной системе координат дана сфера с центром в начале координат и радиусом 1. Найдите параметрические уравнения в полярных координатах сечения этой сферы плоскостью, содержащей ось Oz, и проходящей через точку $A(1, 1, 1)$

12. В программе GeoGebra получите поверхность, заданную уравнением $r = |\cos v|$, $0 \le u \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

30. Пространство R^n

Рассмотрим n-мерное координатное пространство R^n. В нём имеется n взаимно перпендикулярных координатных прямых, называемых осями координат, пересекающихся в точке O – начале координат.

Точки A пространства R^n однозначно определяются своими координатами – упорядоченными наборами $(a_1, \ldots, a_n)$ действительных чисел. Начало координат O имеет координаты $(0, \ldots, 0)$.

Расстоянием между точками $A(a_1, \ldots, a_n)$ и $B(b_1, \ldots, b_n)$ называется число, обозначаемое $d(A, B)$ и выражаемое формулой

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

Вектор с началом в точке $A(a_1, \ldots, a_n)$ и концом в точке $B(b_1, \ldots, b_n)$ обозначается $\overrightarrow{AB}$. Его координатами является упорядоченный набор чисел $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$.

Вектор с координатами $(0, \ldots, 0)$ называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

Векторы с началом в точке O и координатами $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ называются координатными векторами и обозначаются соответственно $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если равны их координаты.

Суммой векторов $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a} + \vec{b}$, имеющий координаты $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.

Аналогичным образом определяется разность векторов.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ на число t называется вектор, обозначаемый $t\vec{a}$, имеющий координаты $(ta_1, \ldots, ta_n)$.

Непосредственно проверяется, что вектор $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ выражается через координатные векторы по формуле

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}.$$

Длиной, или модулем, вектора $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ называется число

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называются линейно зависимыми, если для некоторых чисел $t_1, \ldots, t_n$, одновременно не равных нулю, выполняется равенство $t_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

Если таких чисел $t_1, \ldots, t_n$ нет, векторы $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называются линейно независимыми.

Например, линейно независимыми векторами являются координатные векторы $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$.

Легко проверяется, что для введённых операций над векторами справедливы свойства векторов на плоскости или в пространстве.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$, для которого $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ самого на себя называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

Непосредственно проверяется, что для скалярного произведения векторов справедливы следующие свойства.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Косинус угла φ между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Теорема. Для любых векторов $\vec{a}(a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b}(b_1, \ldots, b_n)$ в пространстве R^n имеет место неравенство

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Это неравенство называется неравенством Коши-Буняковского.

В координатах его можно записать в виде

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 =$$
$$= \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i \neq j} a_i a_j b_i b_j.$$

Непосредственный подсчёт показывает, что имеет место равенство

$$\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i \neq j} a_i a_j b_i b_j = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}^2,$$

в котором $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$.

Правая часть этого равенства больше или равна нуля. Следовательно, выполняется и требуемое неравенство. При этом правая часть равна нулю тогда и только тогда, когда каждое её слагаемое, стоящее в сумме, равно нулю. Это возможно тогда и только тогда, когда для некоторого числа t и для всех i $(1 \leq i \leq n)$ выполняются равенства $b_i = t \cdot a_i$, которые означают, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Упражнения

1. В n-мерном пространстве найдите расстояние между точками O(0, …, 0) и A(1, …, 1).

2. Найдите углы между вектором $\vec{a}(1, \dots, 1)$ и координатными векторами $\overrightarrow{e_1}$, …, $\overrightarrow{e_n}$.

3. Для вектора $\vec{a}(1, \dots, 1)$ и точки A(1, 0, …, 0) найдите координаты точки B, для которой $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

4. Для вектора $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ найдите какой-нибудь вектор $\vec{b}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}$.

5. Какому условию должны удовлетворять координаты вектора $\vec{a}$, чтобы он был перпендикулярен: а) координатному вектору $\overrightarrow{e_1}$; б) координатным векторам $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$?

6. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны вектору $\vec{c}$, то для любых чисел t и s вектор $t\vec{a} + s\vec{b}$ будет перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

7. Длина вектора в n-мерном пространстве равна 1. Найдите координаты этого вектора, если известно, что все они равны.

8. Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Это неравенство называется неравенством треугольника.

9. Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

10. Докажите, что для любых трёх точек A, B, C пространства R^n выполняется неравенство $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены. Это неравенство также называется неравенством треугольника.

31. Подпространства пространства R^n

(n-1)-мерное подпространство. Напомним, что в трёхмерном пространстве плоскость (двумерное подпространство) задаётся уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c – числа, одновременно неравные нулю и составляющие координаты вектора $\vec{n}$ нормали к данной плоскости (рис. 31.1).

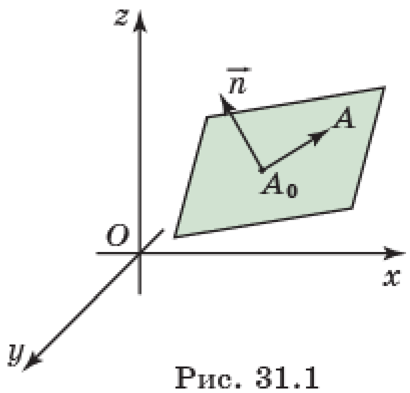


Рис. 31.1

Если точка $A_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит данной плоскости, то уравнение этой плоскости можно переписать в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой плоскости, если скалярное произведение векторов $\vec{n}(a, b, c)$ и $\overrightarrow{A_0A}$ будет равно нулю, т. е. векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ будут перпендикулярны.

По аналогии с этим (n-1)-мерное подпространство в n-мерном пространстве R^n задаётся уравнением

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0,$$

где $m_1, \ldots, m_n$ – числа, одновременно неравные нулю.

Если точка $A_0(a_{01}, \ldots, a_{0n})$ принадлежит данному (n-1)-мерному подпространству, то уравнение этого (n-1)-мерного подпространства можно переписать в виде

$$m_1(x_1 - a_{01}) + \cdots + m_n(x_n - a_{0n}) = 0.$$

Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этому (n-1)-мерному подпространству, если векторы $\vec{m}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ будут перпендикулярны, т. е. скалярное произведение векторов $\vec{m}(m_1, \ldots, m_n)$ и $\overrightarrow{A_0A}$ будет равно нулю.

Из этого следует, что вектор $\vec{m}(m_1, \ldots, m_n)$ будет перпендикулярен любому вектору, лежащему в данном (n-1)-мерном подпространстве, значит, перпендикулярен самому (n-1)-мерному подпространству. Будем называть его вектором нормали к данному (n-1)-мерному подпространству.

Угол φ между двумя пересекающимися (n-1)-мерными подпространствами определяется углом между их векторами нормали $\overrightarrow{m_1}$ и $\overrightarrow{m_2}$.

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{m_1} \cdot \overrightarrow{m_2}|}{|\overrightarrow{m_1}| \cdot |\overrightarrow{m_2}|}.$$

По аналогии с выводом формулы расстояния от точки до плоскости в трёхмерном пространстве выведем формулу расстояния от точки до (n-1)-мерного подпространства в n-мерном пространстве.

Рассмотрим (n-1)-мерное подпространство, заданное уравнением

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0,$$

$\vec{m}(m_1,\ \ldots,\ m_n)$ – её вектор нормали, $B(b_1, \ldots, b_n)$ – точка, не принадлежащая этому подпространству, $C(c_1, \ldots, c_n)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на данное (n-1)-мерное подпространство, $A(a_1, \ldots, a_n)$ – какая-нибудь другая точка этого (n-1)-мерного подпространства (рис. 31.2).

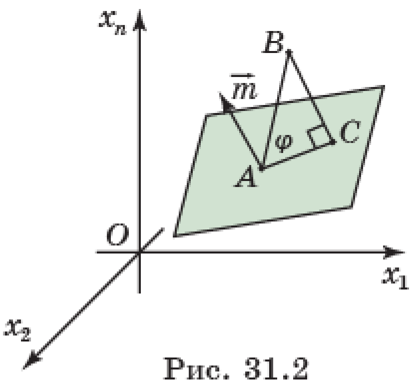


Рис. 31.2

Косинус угла φ между векторами $\vec{m}$ и $\overrightarrow{AB}$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m_1(b_1 - a_1) + \cdots + m_n(b_n - a_n)}{\sqrt{m_1{}^2 + \cdots + m_n{}^2}\cdot|\overrightarrow{AB}|}.$$

Учитывая, что $-m_1a_1 - \ldots - m_na_n = k$, и то, что искомое расстояние h равно $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\cos\varphi|$, получаем искомую формулу

$$h = \frac{|m_1b_1 + \cdots + m_nb_n + k|}{\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2}}.$$

***n*-мерное полупространство.** (n-1)-мерное подпространство, заданное уравнением $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0$, разбивает n-мерное пространство на две части, координаты точек которых удовлетворяют одному из неравенств

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k \geq 0,\ m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k \leq 0.$$

Эти части будем называть n-мерными полупространствами. Их общей частью является (n-1)-мерное подпространство, заданное уравнением $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0$.

Прямая. Напомним, что для задания прямой в трёхмерном пространстве достаточно задать точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{e}(k, l, m)$, называемый направляющим вектором (рис. 31.3).

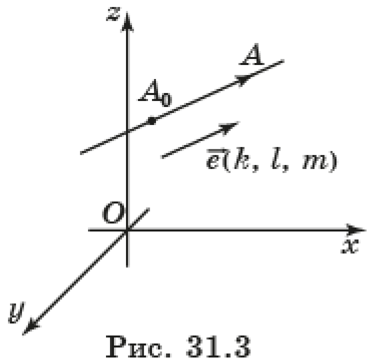


Рис. 31.3

Точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой прямой, если векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\vec{e}$ будут коллинеарны, т. е. для некоторого числа t будет выполняться равенство $\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{l}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases}$$

Прямую можно задать и двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. В этом случае в качестве направляющего вектора $\vec{e}$ можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2\text{-}x_1, y_2\text{-}y_1, z_2\text{-}z_1)$. Точка $A(x, y, z)$ будет принадлежать этой прямой, если для некоторого числа t выполняются равенства

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

По аналогии с этим для задания прямой в n-мерном пространстве достаточно задать точку $A_0(a_{01}, \ldots, a_{0n})$ и ненулевой вектор $\vec{l}(l_1, \ldots, l_n)$, называемый направляющим вектором. Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этой прямой, если векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\vec{l}$ будут коллинеарны, т. е. для некоторого числа t будет выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t \cdot \vec{l}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{01} + t \cdot l_1, \\ \qquad \ldots, \\ x_n = a_{0n} + t \cdot l_n. \end{cases}$$

Прямую можно задать и двумя точками $A_1(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ и $A_2(a_{21}, \ldots, a_{2n})$. В этом случае в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(a_{21} - a_{11}, \ldots, a_{2n} - a_{1n})$. Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этой прямой, если для некоторого числа t выполняются равенства

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} + t(a_{21} - a_{11}), \\ \qquad \ldots, \\ x_n = a_{1n} + t(a_{2n} - a_{1n}). \end{cases}$$

Часть этой прямой, для которой t изменяется от 0 до 1, называется отрезком, соединяющим точки $A_1(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ и $A_2(a_{21}, \ldots, a_{2n})$. Если $t = 0$, то получаем точку A_1, если $t = 1$, то получаем точку A_2.

По аналогии с определением параллельных прямых в пространстве будем говорить, что две прямые в n-мерном пространстве параллельны, если они лежат в одном 2-мерном подпространстве и не пересекаются.

Направляющие векторы двух параллельных прямых будут коллинеарны.

Угол φ между двумя прямыми определяется углом между их направляющими векторами $\overrightarrow{l_1}(l_{11}, \ldots, l_{1n})$ и $\overrightarrow{l_2}(l_{21}, \ldots, l_{2n})$

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{l_1} \cdot \overrightarrow{l_2}|}{|\overrightarrow{l_1}| \cdot |\overrightarrow{l_2}|}.$$

Угол φ между пересекающимися прямой и (n-1)-мерным подпространством определяется углом ψ между направляющим вектором $\vec{l}(l_1, \ldots, l_n)$ данной прямой и вектором нормали $\vec{m}(m_1, \ldots, m_n)$ данного (n-1)-мерного подпространства (рис. 31.4).

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{m}|}{|\vec{l}| \cdot |\vec{m}|}.$$

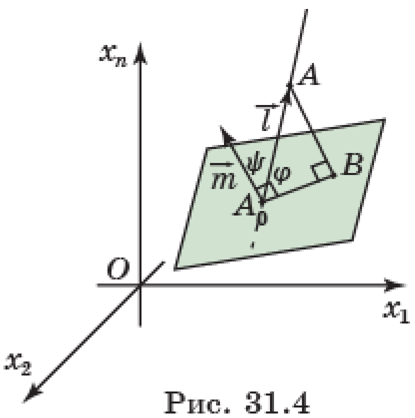


Рис. 31.4

***k*-мерное подпространство.** В общем случае для задания k-мерного подпространства в n-мерном пространстве достаточно задать точку $A_0(a_{01}, \ldots, a_{0n})$ и k линейно независимых векторов $\overrightarrow{l_1}(l_{11}, \ldots, l_{1n}), \ldots, \overrightarrow{l_k}(l_{k1}, \ldots, l_{kn})$. Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этому подпространству, если векторы $\overrightarrow{A_0A}, \overrightarrow{l_1}, \ldots, \overrightarrow{l_k}$ будут линейно зависимы, т. е. для некоторых чисел $t_1, \ldots, t_k$ будет выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1 \cdot \overrightarrow{l_1} + \cdots + t_k \cdot \overrightarrow{l_k}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{01} + t_1 \cdot l_{11} + \ldots + t_1 \cdot l_{k1}, \\ \ldots, \\ x_n = a_{0n} + t_k \cdot l_{1n} + \cdots + t_k \cdot l_{kn}. \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями k-мерного подпространства в n-мерном пространстве. Векторы $\overrightarrow{l_1}, \ldots, \overrightarrow{l_k}$ называются направляющими векторами этого подпространства.

k-мерное подпространство можно задать точками $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$, не принадлежащими одному (k-1)-мерному подпространству. В этом случае в качестве направляющих векторов $\overrightarrow{l_1}, \ldots, \overrightarrow{l_k}$ можно взять векторы $\overrightarrow{A_1A_2}(a_{21} -$

$a_{11}, \dots, a_{2n} - a_{1n}), \dots, \overrightarrow{A_1A_{k+1}}(a_{k+11} - a_{11}, \dots, a_{k+1n} - a_{1n})$. Точка $A(x_1, \dots, x_n)$ будет принадлежать этому k-мерному подпространству, если для некоторых чисел $t_1, \dots, t_k$ будет выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A} = t_1 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + t_k \cdot \overrightarrow{A_1A_{k+1}}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} + t_1(a_{21} - a_{11}) + \dots + t_1(a_{2n} - a_{1n}), \\ \dots, \\ x_n = a_{1n} + t_k(a_{2n} - a_{1n}) + \dots + t_k(a_{k+1n} - a_{1n}). \end{cases}$$

Упражнения

1. Напишите уравнение (n-1)-мерного подпространства, проходящего через точку $A(1, 0, \dots, 0)$ с вектором нормали: а) $\vec{m}(1, 0, \dots, 0)$; б) $\vec{m}(0, \dots, 0, 1)$; в) $\vec{m}(1, \dots, 1)$.

2. Напишите уравнение (n-1)-мерного подпространства, проходящего через точки $A_1(0, 1, \dots, 1)$, $A_2(1, 0, 1, \dots, 1)$, …, $A_n(1, \dots, 1, 0)$,

3. Напишите уравнение (n-1)-мерного подпространства, проходящего через точки $A_1(a_1, 0, \dots, 0)$, …, $A_n(0, \dots, 0, a_n)$, где $a_1, \dots, a_n \neq 0$.

4. Найдите косинус угла между (n-1)-мерными подпространствами в n-мерном пространстве, заданными уравнениями $x_1 + \dots + x_n = 1$ и $x_1 = 0$.

5. Найдите расстояние от точки $O(0, \dots, 0)$ в n-мерном пространстве до (n-1)-мерного подпространства, задаваемого уравнением $x_1 + \dots + x_n = 1$.

6. Найдите задание прямой в n-мерном пространстве, проходящей через точку $O(0, \dots, 0)$ и направляющим вектором: а) $\vec{l}(1, 0, \dots, 0)$; б) $\vec{l}(0, \dots, 0, 1)$; в) $\vec{l}(1, \dots, 1)$.

7. Найдите задание прямой в n-мерном пространстве, проходящей через точки $A(1, \dots, 1)$ и $B(2, \dots, 2)$.

8. Найдите задание прямой в n-мерном пространстве, проходящей через точку $A(2, \dots, 2)$ и перпендикулярной (n-1)-мерному подпространству, заданному уравнением $x_1 + \dots + x_n = 1$.

9. Найдите уравнение прямой в n-мерном пространстве, проходящей через точку $A(2, \dots, 2)$ и параллельной прямой, заданной уравнением
$$\begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ \dots, \\ x_n = 1 + t. \end{cases}$$

10. Найдите координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(a_1, \dots, a_n)$ и $B(b_1, \dots, b_n)$.

11. Докажите, что уравнения, задающие отрезок, соединяющий точки $A_1(a_{11}, \dots, a_{1n})$ и $A_2(a_{21}, \dots, a_{2n})$, можно переписать в виде $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$, где $O(0, \dots, 0)$, $A(x_1, \dots, x_n)$ – точка, принадлежащая отрезку, t изменяется от нуля до единицы.

12. Докажите, что уравнения, задающие отрезок, соединяющий точки $A_1(a_{11}, \dots, a_{1n})$ и $A_2(a_{21}, \dots, a_{2n})$, можно переписать в виде $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A_1} + t\overrightarrow{A_0A_2}$, где $A_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$ – какая-нибудь точка, $A(x_1, \dots, x_n)$ – точка, принадлежащая отрезку, t изменяется от нуля до единицы.

13. Найдите косинус угла между прямыми, проходящими через точки (0, …, 0), (1, …, 1) и (1, 0, …, 0), (0, 1, …, 1) в n-мерном пространстве.

14. Выведите формулу расстояния от точки B до прямой, проходящей через точку A и направляющим вектором $\vec{l}$,

15. Найдите расстояние от точки $B(1, 0, \ldots, 0)$ в n-мерном пространстве до прямой, проходящей через точку $A(0, \ldots, 0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(1, \ldots, 1)$.

16. Напишите уравнения 2-мерного подпространства n-мерного пространства, проходящего через точки $A_1(0, \ldots, 0)$, $A_1(1, 0, \ldots, 0)$, $A_2(0, 1, 0, \ldots, 0)$.

17. По аналогии с определением параллельности двух прямых в n-мерном пространстве определите параллельность двух k-мерных подпространств n-мерного пространства.

32. (n-1)-мерная сфера

Напомним, что сферой в трёхмерном пространстве называется геометрическое место точек, удалённых от данной точки на данное расстояние. Данная точка называется центром сферы, данное расстояние – радиусом сферы.

Сфера с центром $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и радиусом R (рис. 32.1) задаётся уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

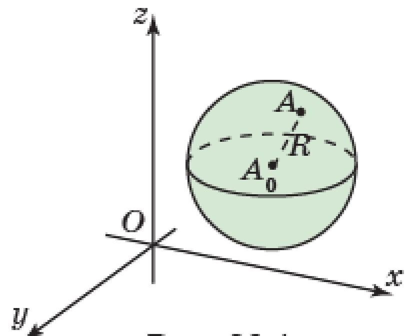


Рис. 32.1

По аналогии с этим (n-1)-мерной сферой в n-мерном пространстве будем называть геометрическое место точек этого пространства, удалённых от данной точки на данное расстояние. Данная точка называется центром (n-1)-мерной сферы, данное расстояние – радиусом (n-1)-мерной сферы. Точка $A(x_1,\ \dots,\ x_n)$ принадлежит (n-1)-мерной сфере с центром $A_0(a_{01},\ \dots,\ a_{0n})$ и радиусом R, если выполняется равенство

$$\left|\overrightarrow{A_0A}\right|=R.$$

В координатной форме это равенство можно переписать в виде

$$(x_1-a_{01})^2+\cdots+(x_n-a_{0n})^2=R^2.$$

По аналогии с определением касающихся сфер в трёхмерном пространстве две (n-1)-мерной сферы будем называть касающимися, если они имеют только одну общую точку.

По аналогии с определением касающихся сферы и плоскости в трёхмерном пространстве (n-1)-мерную сферу и (n-1)-мерное подпространство будем называть касающимися, если они имеют только одну общую точку.

(n-1)-мерный шар. Напомним, что шаром в трёхмерном пространстве называется геометрическое место точек, удалённых от данной точки на расстояние, не превосходящее данное. Данная точка называется центром шара, данное расстояние – радиусом шара.

Шар с центром $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и радиусом R (рис. 32.1) задаётся неравенством

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le R^2.$$

По аналогии с этим n-мерный шаром в n-мерном пространстве будем называть геометрическое место точек этого пространства, удалённых от данной точки на расстояние, не превосходящее данное. Данная точка называется центром n-мерного шара, данное расстояние – радиусом n-мерного шара.

Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит n-мерному шару с центром $A_0(a_{01}, \ldots, a_{0n})$ и радиусом R, если выполняется неравенство

$$\left|\overrightarrow{A_0A}\right| \leq R.$$

В координатной форме это неравенство можно переписать в виде

$$(x_1 - a_{01})^2 + \cdots + (x_n - a_{0n})^2 \leq R^2.$$

Упражнения

1. Докажите, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 5 = 0$ задаёт трёхмерную сферу в четырёхмерном пространстве. Найдите её центр и радиус.

2. Напишите уравнение n-1)-мерной сферы в n-мерном пространстве с центром в точке $A(1, \ldots, 1)$, проходящей через точку $O(0, \ldots, 0)$.

3. Как расположены точки $A_1(1, \ldots, 1)$, $A_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $A_3\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ относительно (n-1)-мерной сферы, заданной уравнением $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$?

4. Как по отношению друг к другу расположены (n-1)-мерные сферы, заданные уравнениями $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, $(x_1 - 1)^2 + \cdots + (x_n - 1)^2 = 1$.

5. Найдите радиус (n-1)-мерной сферы с центром $A(1, \ldots, 1)$, касающейся (n-1)-мерной сферы с центром $O(0, \ldots, 0)$ и радиусом 1.

6. Установите взаимное расположение (n-1)-мерной сферы, заданной уравнением ${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1$, и ($n$-1)-мерного подпространства, заданного уравнением $x_1 + \cdots + x_n = a$. Для каких чисел a эти (n-1)- мерная сфера и (n-1)- мерное подпространство: а) пересекаются; б) касаются; в) не имеют общих точек?

7. Найдите уравнение (n-1)-мерной сферы с центром $A(1, \ldots, 1)$, касающейся (n-1)-мерного подпространства, заданного уравнением $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

8. Найдите уравнение трёхмерного подпространства четырёхмерного пространства, проходящего через точку $A_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и касающегося трёхмерной сферы, заданной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.

9. Докажите, что пересечением (n-1)-мерной сферы, заданной уравнением ${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 4$, и ($n$-1)-мерного подпространства, заданного уравнением $x_n = 1$, является (n-2)-мерная сфера. Найдите её центр и радиус.

10. Докажите, что пересечением (n-1)-мерных сфер, заданных уравнениями ${x_1}^2 + {x_2}^2 \ldots + {x_n}^2 = 1$, $(x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 \ldots + {x_n}^2 = 1$, является ($n$-2)-мерная сфера. Найдите её центр и радиус.

11. Докажите, что n-мерный шар является выпуклой фигурой.

12. Является ли (n-1)-мерная сфера выпуклой фигурой?

33. *n*-мерный параллелепипед

Напомним, что для задания параллелограмма (двумерного параллелепипеда) в пространстве R^2 достаточно задать два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, отложенных от одной точки. Точка A принадлежит параллелограмму, построенному на этих векторах, если выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + t_2\overrightarrow{A_0A_2}$, где t_1, t_2 – числа, изменяющиеся от 0 до 1 (рис. 33.1).

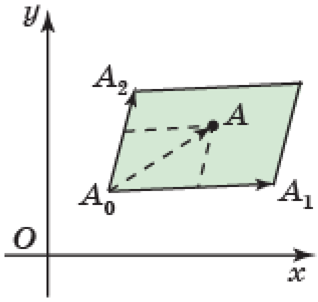


Рис. 33.1

Если векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ перпендикулярны, то параллелограмм является прямоугольником.

Прямоугольник со сторонами a, b, выходящими из одной вершины, можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Для задания параллелепипеда в пространстве R^3 достаточно задать три некомпланарных вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$, отложенных от одной точки. Точка A принадлежит параллелепипеду, построенному на этих векторах, если выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + t_2\overrightarrow{A_0A_2} + t_3\overrightarrow{A_0A_3}$, где t_1, t_2, t_3 – числа, изменяющиеся от 0 до 1 (рис. 33.2).

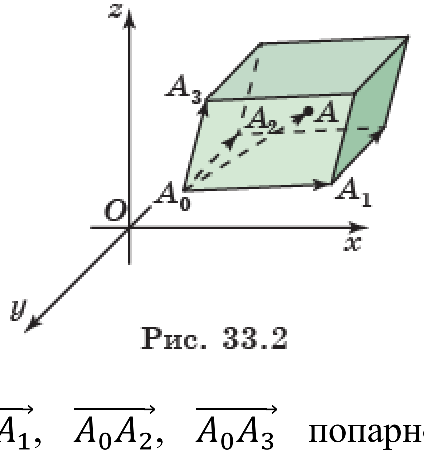


Рис. 33.2

Если векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$ попарно перпендикулярны, то параллелепипед будет прямоугольным.

Прямоугольный параллелепипед с рёбрами a, b, c, выходящими из одной вершины, можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b, \\ 0 \le z \le c. \end{cases}$$

В частности, куб с ребром a (рис. 33.3) можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le a, \\ 0 \le z \le a. \end{cases}$$

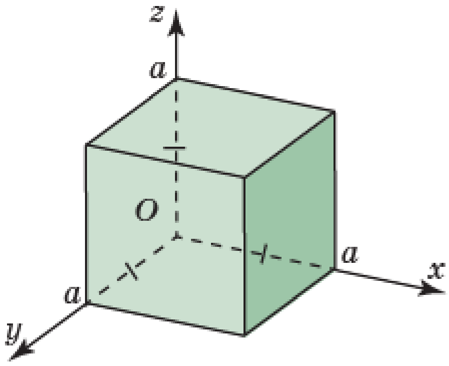


Рис. 33.3

По аналогии с этим для задания k-мерного параллелепипеда в пространстве R^n достаточно задать k линейно независимых векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Точка A принадлежит k-мерному параллелепипеду, построенному на этих векторах, если выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t_k\overrightarrow{A_0A_k}$, где $t_1, \dots, t_k$ – числа, изменяющиеся от 0 до 1.

Если векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ попарно перпендикулярны, то k-мерный параллелепипед будет прямоугольным.

Прямоугольный n-мерный параллелепипед с рёбрами $a_1, \dots, a_n$, выходящими из одной вершины, можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le a_1, \\ \quad \dots \\ 0 \le x_n \le a_n. \end{cases}$$

В частности, n-мерный куб с ребром a (рис. 33.3) можно задать системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le a, \\ \quad \dots \\ 0 \le x_n \le a. \end{cases}$$

Его вершинами являются точки, каждая координата которых равна 0 или a. Рёбра (1-мерные грани) состоят из его точек, каждая координата которых, за исключением одной фиксированной координаты, равна 0 или a. k-мерные грани состоят из его точек, каждая координата которых, за исключением k фиксированных координат, равна 0 или a.

На рисунке 33.4 изображён четырёхмерный куб в четырёхмерном пространстве.

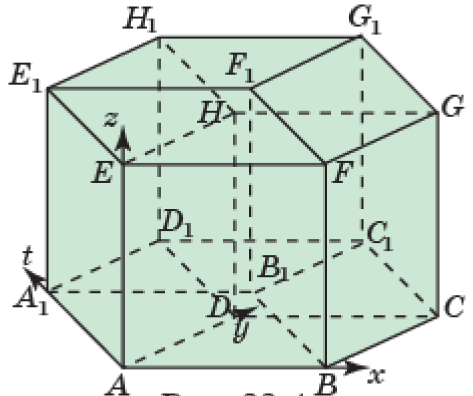


Рис. 33.4

Упражнения

1. Сколько у n-мерного куба: а) вершин; б) рёбер; в)* k-мерных граней?

2. Найдите длину диагонали (расстояние между противолежащими вершинами) единичного n-мерного куба.

3. Найдите косинус угла, образованного диагональю n-мерного куба, и ребром, имеющим с этой диагональю общую вершину.

4. Для четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 33.4) найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AG}$ и: а) $\overrightarrow{BD_1}$; б) $\overrightarrow{BG_1}$; в) $\overrightarrow{BE_1}$; г) $\overrightarrow{BH}$.

5. Докажите, что для любой вершины C n-мерного куба, отличной от его противолежащих вершин A и B, угол ACB равен 90^o.

6. Для единичного четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 33.4) найдите расстояние от вершин: а) B; б) C; в) D; г) E; д) F; е) G; ж) H до прямой AG_1.

7. Для четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 33.4) укажите двумерные грани, параллельные двумерной грани $ABCD$.

8. (n-1)-мерная сфера называется вписанной в n-мерный куб, если она касается всех его (n-1)-мерных граней. Сам n-мерный куб называется описанным около (n-1)-мерной сферы. Найдите радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный куб.

9. (n-1)-мерная сфера называется описанной около n-мерного куба, если все вершины этого куба принадлежат данной сфере. Сам n-мерный куб называется вписанным в (n-1)-мерную сферу. Найдите радиус (n -1)-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного куба. Проверьте, что этот радиус стремится к бесконечности при n стремящемся к бесконечности.

10. Найдите радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около n-мерного прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны $a_1, \ldots, a_n$.

11. Какой многогранник является сечением четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 33.4) трёхмерным подпространством, проходящим через рёбра AB и E_1H_1?

12. Какой многогранник является сечением четырёхмерного куба $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ (рис. 33.4) трёхмерным подпространством, проходящим через середины рёбер AB, BC, CG, GG_1?

13. Какой многогранник является сечением четырёхмерного куба (рис. 33.4) трёхмерным подпространством, проходящим через середину диагонали данного четырёхмерного куба и перпендикулярным этой диагонали?

14. Докажите, что k-мерный параллелепипед в пространстве R^n является выпуклой фигурой.

14. Найдите углы, которые образует диагональ n-мерного куба с его рёбрами, выходящими из одного из концов этой диагонали. Проверьте, что величина этого угла стремится к 90° при n стремящемся к бесконечности.

34. *n*-мерный тетраэдр

Напомним, что тетраэдром в трёхмерном пространстве называется многогранник, поверхность которого состоит из четырёх треугольников (рис. 34.1). Эти треугольники называются гранями тетраэдра.

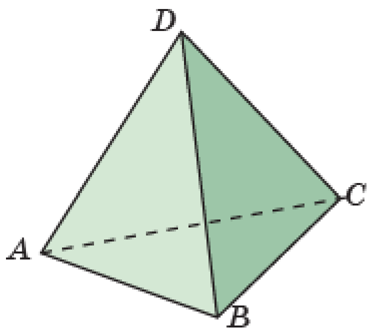


Рис. 34.1

Если гранями тетраэдра являются правильные треугольники, то тетраэдр называется правильным.

Для задания тетраэдра в пространстве R^3 можно задать три некомпланарных вектора $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$, отложенных от одной точки. Точка A принадлежит тетраэдру, построенному на этих векторах, если выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + t_2\overrightarrow{A_0A_2} + t_3\overrightarrow{A_0A_3}$, где t_1, t_2, t_3 – неотрицательные числа, для которых выполняется неравенство $t_1 + t_2 + t_3 \leq 1$ (рис. 34.2).

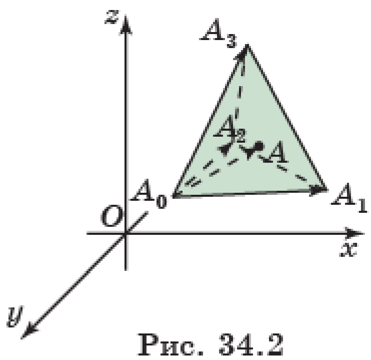


Рис. 34.2

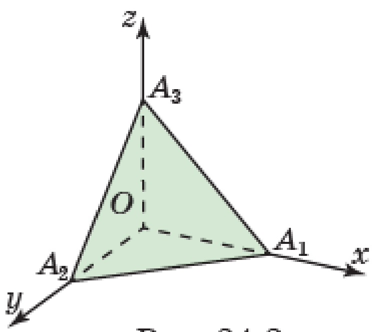


Рис. 34.3

Если длины векторов $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$ равны, а углы, между ними равны 60°, то тетраэдр будет правильным.

Заметим, что треугольник $A_1A_2A_3$ в пространстве (рис. 34.3), вершинами которого являются точки $A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 – положительные числа, можно задать как геометрическое место точек $A(x, y, z)$, координаты которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1.$$

Если $a_1 = a_2 = a_3 = a$, то треугольник $A_1A_2A_3$ будет правильным, стороны которого равны $a\sqrt{2}$.

По аналогии с этим для задания k-мерного тетраэдра в пространстве R^n достаточно задать k линейно независимых векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Точка A принадлежит k-мерному тетраэдру, построенному на этих векторах, если выполняется равенство

$$\overrightarrow{A_0A} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t_k\overrightarrow{A_0A_k},$$

где $t_1, \dots, t_k$ – неотрицательные числа, для которых выполняется неравенство $t_1 + \dots + t_k \leq 1$.

Если длины векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ равны, а углы, между ними равны 60°, то k-мерный тетраэдр будет правильным.

Заметим, что (n-1)-мерный тетраэдр $A_1 \dots A_n$ в n-мерном пространстве (рис. 34.3), вершинами которого являются точки $A_1(a_1, 0, \dots, 0), \dots, A_n(0, \dots, 0, a_n)$, где $a_1, \dots, a_n$ – положительные числа, можно задать как геометрическое место точек $A(x_1, \dots, x_n)$, координаты которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению

$$\frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1.$$

Если $a_1 = \dots = a_n = a$, то (n-1)-мерный тетраэдр $A_1 \dots A_n$ будет правильным, рёбра которого равны $a\sqrt{2}$. Его вершинами являются точки, все координаты которых, за исключением одной, равны 0, т. е. точки $A_1(a, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, a)$. Рёбра (1-мерные грани) состоят из его точек, все координаты которых, за исключением двух фиксированных координат, равны 0. k-мерные грани состоят из его точек, все координаты которых, за исключением $k + 1$ фиксированных координат, равны 0.

На рисунке 34.4 изображён правильный четырёхмерный тетраэдр в пятимерном пространстве.

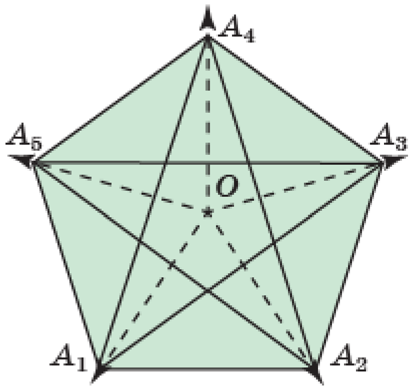


Рис. 34.4

Упражнения

1. Сколько у n-мерного тетраэдра: а) вершин; б) рёбер; в)* k-мерных граней?

2. Укажите какие-нибудь неравенства и равенства, задающие единичный правильный n-мерный тетраэдр в (n+1)-мерном пространстве.

3. Докажите, что для точек A правильного n-мерного тетраэдра в (n+1)-мерном пространстве, вершинами которого являются точки $A_1(a, 0, \dots, 0)$, …

, $A_{n+1}(0, \ldots, 0, a)$, выполняется равенство $\overrightarrow{OA} = t_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + t_{n+1}\overrightarrow{OA_{n+1}}$, где $O(0, \ldots, 0)$, а $t_1, \ldots, t_n$ – неотрицательные числа, сумма которых равна a.

4. Найдите угол, образованный соседними (n-1)-мерными гранями правильного n-мерного тетраэдра.

5. (n-1)-мерная сфера называется описанной около n-мерного тетраэдра, если все вершины этого n-мерного тетраэдра принадлежат данной (n-1)-мерной сфере. Сам n-мерный тетраэдр называется вписанным в (n-1)-мерную сферу. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около единичного правильного n-мерного тетраэдра.

6. (n-1)-мерная сфера называется вписанной в n-мерный тетраэдр, если она касается всех его (n-1)-мерных граней. Сам n-мерный тетраэдр называется описанным около (n-1)-мерной сферы. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный правильного n-мерный тетраэдр. Проверьте, что этот радиус стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

7. Докажите, что центры (n-2)-мерных сфер, описанных околло (n-1)-мерных граней правильного n-мерного тетраэдра, являются вершинами правильного n-мерного тетраэдра. Найдите его ребро, если ребро исходного правильного n-мерного тетраэдра равно 1.

8. Найдите высоту единичного правильного n-мерного тетраэдра.

9. Вершинами n-мерного тетраэдра являются точки $O(0, \ldots, 0)$, $A_1(1, 0, \ldots, 0)$, …, $A_n(0, \ldots, 0, 1)$. Найдите высоту этого n-мерного тетраэдра, проведённую из вершины O.

10. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около n-мерного тетраэдра, вершинами которого являются точки $O(0, \ldots, 0)$, $A_1(1, 0, \ldots, 0)$, …, $A_n(0, \ldots, 0, 1)$.

11. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $O(0, \ldots, 0)$, $A_1(1, 0, \ldots, 0)$, …, $A_n(0, \ldots, 0, 1)$.

12. Какой многогранник является сечением правильного четырёхмерного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 34.4) трёхмерным подпространством, проходящим через середины рёбер A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5?

13. Какой многогранник является сечением правильного n-мерного тетраэдра (n-1)-мерным подпространством, проходящим через середины рёбер, выходящих из одной вершины?

14. Какой многогранник является сечением n-мерного куба (n-1)-мерным подпространством, проходящим через концы рёбер, выходящих из одной вершины?

15. Какой многогранник является сечением n-мерного куба (n-1)-мерным подпространством, проходящим через середины рёбер, выходящих из одной вершины?

16. Докажите, что n-мерный тетраэдр является выпуклой фигурой.

35. *n*-мерный октаэдр

Выясним, какая фигура в n-мерном пространстве, задаётся неравенством

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1.$$

В случае $n = 2$ искомой фигурой является квадрат (рис. 35.1).

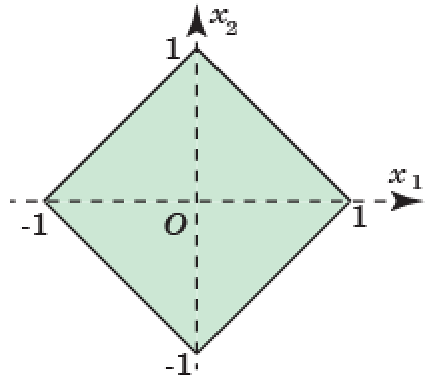


Рис. 35.1

В случае $n = 3$ искомой фигурой является октаэдр (рис. 35.2). Его двумерными гранями являются правильные треугольники.

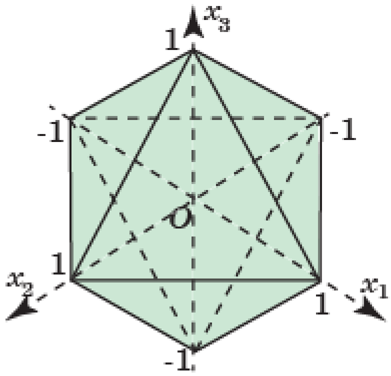


Рис. 35.2

В случае $n = 4$ искомый 4-мерный многогранник изображён на рисунке (рис. 35.3). Он называется 4-мерным октаэдром. Его 3-мерными гранями являются тетраэдры.

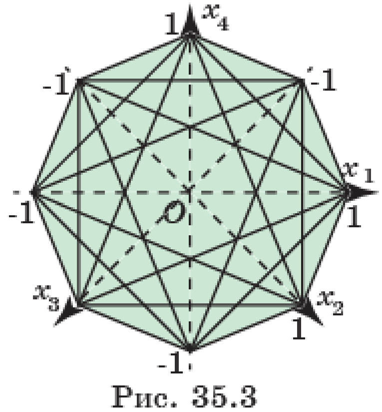


Рис. 35.3

В общем случае искомый многогранник называется n-мерным октаэдром. Его (n-1)-мерными гранями являются (n-1)-мерные тетраэдры, один из которых образован всеми точками, координаты x_1, …, x_n которых неотрицательны и удовлетворяют равенству

$$x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

Упражнения

1. Сколько вершин имеет n-мерный октаэдр?

2. Сколько k-мерных граней имеет n-мерный октаэдр?

3. Найдите длины рёбер n-мерного октаэдра, задаваемого неравенством $|x_1|+\cdots+|x_n| \leq 1$.

4. Найдите угол, образованный соседними (n-1)-мерными гранями n-мерного октаэдра.

5. Докажите, что центры (n-1)-мерных граней n-мерного куба являются вершинами n-мерного октаэдра. Найдите его ребро, если ребро n-мерного куба равно 1.

6. Докажите, что центры (n-1)-мерных граней n-мерного октаэдра, являются вершинами n-мерного куба. Найдите его ребро, если ребро n-мерного октаэдра равно 1.

7. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, описанной около n-мерного октаэдра, заданного неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$.

8. Найдите центр и радиус (n-1)-мерной сферы, вписанной в n-мерный октаэдр, заданный неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$. Проверьте, что этот радиус стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

9. Какой многогранник является сечением n-мерного октаэдра (n-1)-мерным подпространством, проходящим через середину диагонали данного n-мерного октаэдра и перпендикулярным этой диагонали?

10. Какой многогранник является сечением n-мерного октаэдра (n-1)-мерным подпространством, проходящим через середины рёбер, выходящих из одной вершины?

11. Докажите, что n-мерный октаэдр является выпуклой фигурой.

36. Выпуклые фигуры в пространстве R^n

Фигура в пространстве R^n называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит соединяющий их отрезок.

Нетрудно доказать, что пересечение любого числа выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Теорема. *n*-мерное полупространство пространства R^n, задаваемое неравенством $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k \geq 0$, является выпуклой фигурой.

Доказательство. Пусть точки *A'*$(x'_1, \dots, x'_n)$ и *A'''*$(x''_1, \dots, x''_n)$ принадлежат этому полупространству. Рассмотрим точку $A(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащую отрезку *A'A''*. Её координаты выражаются формулами

$$\begin{cases} x_1 = (1-t)x'_1 + tx''_1, \\ \qquad \dots, \\ x_n = (1-t)x'_n + tx''_n, \end{cases}$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Непосредственная подстановка показывает, что если для точек *A'*$(x'_1, \dots, x'_n)$ и *A'''*$(x''_1, \dots, x''_n)$ выполняются неравенства $m_1x'_1 + \cdots + m_nx'_n + k \geq 0$, $m_1x''_1 + \cdots + m_nx''_n + k \geq 0$, то для точки $A(x_1, \dots, x_n)$ будет выполнятся неравенство $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k \geq 0$, т. е. точка *A* будет принадлежать данному полупространству.

Следствие. Фигура в *n*-мерном пространстве, задаваемая системой неравенств

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1n}x_n + k_1 \geq 0, \\ \qquad \dots, \\ m_{i1}x_1 + \cdots + m_{in}x_n + k_i \geq 0, \end{cases}$$

является выпуклой.

Такой системой неравенств можно задавать выпуклый *n*-мерный многогранник. Примерами выпуклых *n*-мерных многогранников являются рассмотренные ранее *n*-мерные куб, тетраэдр, октаэдр.

***m*-мерная призма.** Пусть в пространстве R^n задан выпуклый (*m*-1)-мерный многогранник *M*. Рассмотрим какой-нибудь вектор $\vec{l}$, составляющий с (*m*-1)-мерным подпространством, в котором лежит *M*, ненулевой угол. Обозначим *M'* (*m*-1)-мерный многогранник, полученный параллельным переносом *M*.

Фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки, принадлежащие *M*, с соответствующими точками, принадлежащими *M'*, будем называть *m*-мерной призмой. (*m*-1)-мерные многогранники *M* и *M'* будем называть основаниями *m*-мерной призмы.

Высотой *m*-мерной призмы будем называть расстояние между (*m*-1)-мерными подпространствами, в которых лежат её основания.

Если вектор $\vec{l}$ перпендикулярен (*m*-1)-мерному подпространству, в котором лежит *M*, то соответствующую *m*-мерную призму будем называть прямой.

m-мерную призму, в основании которой (*m*-1)-мерный параллелепипед, будем называть ***m*-мерным параллелепипедом.**

***m*-мерный цилиндр.** Пусть в пространстве R^n задан (m-1)-мерный шар B. Рассмотрим какой-нибудь вектор $\vec{l}$, составляющий с (m-1)-мерным подпространством, в котором лежит B, ненулевой угол. Обозначим B' (m-1)-шар, полученный параллельным переносом B на вектор $\vec{l}$.

Фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки, принадлежащие B, с соответствующими точками, принадлежащими B', будем называть m-мерным цилиндром. (m-1)-мерные шары B и B' будем называть основаниями m-мерного цилиндра.

Высотой m-мерного цилиндра будем называть расстояние между (m-1)-мерными подпространствами, в которых лежат её основания.

Если вектор $\vec{l}$ перпендикулярен (m-1)-мерному подпространству, в котором лежит B, то соответствующий m-мерный цилиндр будем называть прямым.

***m*-мерная пирамида.** Пусть в пространстве R^n задан выпуклый (m-1)-мерный многогранник M. Рассмотрим какой-нибудь точку S, не принадлежащую (m-1)-мерному подпространству, в котором лежит M.

Фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки, принадлежащие M, с точкой S, будем называть m-мерной пирамидой. (m-1)-мерный многогранник M будем называть основанием m-мерной пирамиды. Точку S будем называть вершиной m-мерной пирамиды.

Высотой m-мерной пирамиды будем называть длину перпендикуляра, опущенного из вершины S на (m-1)-мерное подпространство, в котором лежит её основание.

***m*-мерный конус.** Пусть в пространстве R^n задан (m-1)-мерный шар B. Рассмотрим какой-нибудь точку S, не принадлежащую (m-1)-мерному подпространству, в котором лежит B.

Фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки, принадлежащие B, с точкой S, будем называть m-мерным конусом. (m-1)-мерный шар N будем называть основанием m-мерного конуса. Точку S будем называть вершиной m-мерного конуса.

Высотой m-мерного конуса будем называть длину перпендикуляра, опущенного из вершины S на (m-1)-мерное подпространство, в котором лежит его основание.

Если отрезок, соединяющий вершину m-мерного конуса с центром (n-1)-мерного шара, являющегося снованием, то соответствующий m-мерный конус будем называть прямым.

Упражнения

1. Докажите, что (n-1)-мерное подпространство пространства R^n, задаваемое уравнением $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0$, является выпуклой фигурой.

2. Докажите, что пересечение любого числа выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

3. Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

4. Докажите, что n-мерный шар является выпуклой фигурой.

5. Является ли (n-1)-мерная сфера выпуклой фигурой?

6. Докажите, что k-мерный параллелепипед в пространстве R^n является выпуклой фигурой.

7. Докажите, что k-мерный тетраэдр является выпуклой фигурой.

8. Докажите, что n-мерный октаэдр является выпуклой фигурой.

9. Найдите неравенства, задающие выпуклый многогранник, вершинами которого являются середины рёбер n-мерного куба.

10. Найдите неравенства, задающие прямой n-мерный цилиндр в n-мерном пространстве, основанием которого является (n-1)-мерный шар радиусом R, а высота равна h.

11. Найдите неравенства, задающие прямой n-мерный конус в n-мерном пространстве, основанием которого является (n-1)-мерный шар радиусом R, а высота равна h.

37*. Определители n-го порядка. Векторное и смешанное произведения векторов

(n,n)-матрицей A называется таблица из n^2 элементов a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, записанная в следующем виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы A, составленной из чисел, называется число, обозначаемое

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

которое мы определим индуктивным образом.

Для (2,2)-матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определитель $\det(A)$ определяется по формуле

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Предположим, что для $(n\text{-}1,n\text{-}1)$-матриц мы определили их определители. Рассмотрим матрицу A_{ij} $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$, которая получается из матрицы A вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца, т. е. строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ij}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Обозначим $\det(A_{ij})$ – её определитель. Определим определитель матрицы A, положив

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}).$$

Приведём некоторые свойства определителей.

Свойство 1. Вместо элементов a_{1j} первой строки (n,n)-матрицы A в определении определителя можно взять элементы i-ой строки. При этом будет выполняться равенство

$$\det(A) = (-1)^{i+1}(a_{i1}\det(A_{i1}) - a_{i2}\det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{in}\det(A_{in})).$$

Доказательство. Будем доказывать это свойство индукцией по n. Для $n = 2$ это свойство очевидно выполняется. Предположим, что оно выполняется для определителей размером $(n\text{-}1,n\text{-}1)$. Докажем, что оно выполняется для определителей $\det(A)$ размером (n,n).

По определению, имеет место равенство

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n}).$$

По предположению, для каждого определителя $\det\left(A_{1j}\right)$ выполняется требуемое равенство. Обозначим A_{1jik} матрицу, полученную из матрицы A_{1j}

вычёркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ik}. Раскладывая определители $\det(A_{1j})$ по строке элемента a_{ik}, получим равенство

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{j+1} a_{1j} \det\left(A_{1j}\right) = \sum_{j,k} (-1)^{j+i+k+1} a_{1j} a_{ik} \det\left(A_{1jik}\right).$$

Рассмотрим матрицу A_{ik1j}, получающуюся из матрицы A вычёркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ik}, а затем вычёркиванием строки и столбца, в которых стоит элемент a_{1j},

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & \boldsymbol{a_{1j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \boldsymbol{a_{ik}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей A_{1jik}. По определению определителей $\det(A_{ik})$, имеют место равенства

$$\det(A_{ik}) = \sum_j (-1)^{j+1} a_{1j} \det\left(A_{ik1j}\right).$$

Следовательно, имеем равенство

$$\det(A) = \sum_{j,k} (-1)^{j+i+k+1} a_{1j} a_{ik} \det\left(A_{ik1j}\right) = \sum_k (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}).$$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. При перестановке двух строк (n,n)-матрицы её определитель меняет знак.

Доказательство. Рассмотрим (n,n)-матрицу A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & \boldsymbol{a_{ik}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \boldsymbol{a_{jl}} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Представим определитель матрицы A в виде разложения сначала по i-ой строке, а затем по j-ой строке. Получим равенства

$$\det(A) = \sum_k (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k,l} (-1)^{i+k+j+l+1} a_{il} a_{jl} \det\left(A_{ikjl}\right).$$

Пусть (n,n)-матица A' получена из матрицы A перестановкой i-ой и j-ой строк ($i < j$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \boldsymbol{a_{jl}} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & \boldsymbol{a_{ik}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Представим определитель матрицы A', в виде разложения сначала по j-ой строке, а затем по i-ой строке. Получим равенства

$$\det(A') = \sum_l (-1)^{i+l} a_{jl} \det\left(A'_{jl}\right) = \sum_{l,k} (-1)^{i+l+j+k} a_{jl} a_{ik} \det\left(A'_{jlik}\right).$$

В разложениях определителей $\det(A)$ и $\det(A')$ матрицы A_{ikjl}, A'_{jlik} совпадают, а знаки соответствующих элементов противоположны. Следовательно, имеет место равенство $\det(A) = -\det(A')$.

Свойство 3. Если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю.

Доказательство следует из того, что при перестановке двух строк определитель меняет знак.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на число t, то сам определитель умножится на t.

Доказательство следует из определения.

Свойство 5. Если все элементы i-ой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-ой, такие, как и в исходном определителе, а i-я строка в первом определителе состоит из первых слагаемых i-ой строки исходного определителя, а во втором определителе – из вторых слагаемых i-ой строки исходного определителя.

Доказательство следует из определения.

Свойство 6. Если одна из строк определителя является линейной комбинацией других его строк, то этот определитель равен нулю.

Доказательство следует из свойств 5 и 6.

Свойство 7. Вместо элементов a_{1j} первой строки (n,n)-матрицы A в определении определителя можно взять элементы 1-го столбца. При этом будет выполняться равенство

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}).$$

Доказательство. Будем доказывать это свойство индукцией по n. Для $n = 2$ это свойство очевидно выполняется. Предположим, что оно выполняется для определителей размером $(n\text{-}1,n\text{-}1)$. Докажем, что оно выполняется для определителей $\det(A)$ размером (n,n).

Представим определитель $\det(A)$ в виде алгебраической суммы по строкам. Получим равенство.

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \sum_{j>1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det\left(A_{1j}\right).$$

Представим определители $\det\left(A_{1j}\right)$, j>1, в виде алгебраической суммы по столбцам. Получим равенство

$$\det\left(A_{1j}\right) = \sum_{i>1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det\left(A_{1ji1}\right).$$

Следовательно, для определителя $\det(A)$ будем иметь равенство

$$(1)\quad \det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \sum_{j>1,i>1}^{n}(-1)^{I+j}a_{1j}\,a_{i1}\det\left(A_{1ji1}\right).$$

Рассмотрим теперь алгебраическую сумму

$$a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}).$$

Представим определители $\det(A_{i1})$, i>1, в виде алгебраической суммы по строкам. Получим равенство

$$(2)\quad a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}) =$$

$$= a_{11}\det(A_{11}) + \sum_{i>1,j>1}^{n} (-1)^{I+j}\, a_{i1}a_{1j}\det\big(A_{i11j}\big).$$

Правая часть этого равенства равна правой части равенства (1). Следовательно, равны и левые части этих равенств, т. е.

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det(A_{n1}).$$

Что и требовалось доказать.

Матрица $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, получающаяся из матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ заменой строк столбцами, называется транспонированной по отношению матрице A.

Свойство 7 означает, что определители этих матриц равны.

Определим произведение матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ как такую матрицу $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$, для элементов c_{ij} которой выполняются равенства

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Таким образом, элемент c_{ij} матрицы C, стоящей в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Произведение матриц A и B обозначается $A \cdot B$.

Примем без доказательства следующее свойство.

Свойство 8. Определитель $\det(A \cdot B)$ произведения матриц A и B равен произведению определителей матриц A и B, т. е. имеет место равенство

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(A).$$

Определим векторное произведение векторов в n-мерном пространстве.

Векторным произведением векторов $\overrightarrow{a_1}(a_{11}, \dots, a_{1n})$, …, $\overrightarrow{a_{n-1}}(a_{n-11}, \dots, a_{n-1n})$ в n-мерном пространстве называется вектор, обозначаемый $[\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1}}]$, выражаемый формулой

$$[\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1}}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \cdots & \overrightarrow{e_n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix},$$

где $\overrightarrow{e_1}$, …, $\overrightarrow{e_n}$ – единичные координатные векторы.

Из свойств определителей следует, что векторное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1}}$ является вектором, перпендикулярным каждому из векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1}}$.

Смешанным произведением векторов $\overrightarrow{a_1}(a_{11}, \dots, a_{1n})$,…, $\overrightarrow{a_n}(a_{n1}, \dots, a_{nn})$ называется скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $[\overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}]$. Оно обозначается $\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ выражается формулой

$$\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В случае $n = 2$ смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ называется также косым произведением,

$$\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из свойств определителей следует, что смешанное произведение линейно зависимых векторов равно нулю.

Используя векторное и смешанное произведения векторов, выведем уравнение (n-1)-мерного пространства в n-мерном пространстве, проходящего через точки $A_1(a_{11}, \dots, a_{1n})$ …, $A_n(a_{n1}, \dots, a_{nn})$, для которых векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}$ линейно независимы.

Вектор $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}\right]$ будет перпендикулярен каждому из векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}$. Он является вектором нормали данного (n-1)-мерного пространства. Точка $A(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит этому пространству, если векторы $\overrightarrow{A_1A}$ и $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}\right]$ перпендикулярны. Следовательно, искомым уравнением (n-1)-мерного пространства является уравнение

$$\left\{\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}\right\} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{11} & \cdots & x_n - a_{1n} \\ a_{21} - a_{11} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнения

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

преобразуя его к более простому виду.

2. В четырёхмерном пространстве найдите координаты векторного произведения векторов $\overrightarrow{a_1}(0, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_3}(1, 1, 0, 1)$.

3. В четырёхмерном пространстве найдите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}(0, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_3}(1, 1, 0, 1)$, $\overrightarrow{a_4}(1, 1, 1, 0)$.

4. Найдите уравнение трёхмерного подпространства четырёхмерного пространства, проходящего через точки $A_1(0, 0, 0, 0)$, $A_2((0, 1, 1, 1)$, $A_3(1, 0, 1, 1)$, $A_4(1, 1, 0, 1)$.

5. Найдите уравнение (n-1)-мерного подпространства n-мерного пространства, проходящего через точки $A_1(0, 1, \ldots, 1)$, … $A_n((1, \ldots, 1, 0)$.

6. По аналогии с доказательством свойства 1 докажите, что вместо элементов первого столбца (n,n)-матрицы A можно взять элементы j-го столбца. При этом будет выполняться равенство

$$\det(A) = (-1)^{j+1}\left(a_{1j}\det(A_{1j}) - a_{2j}\det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}\det(A_{nj})\right).$$

7. По аналогии с доказательством свойства 2 докажите, что при перестановке двух столбцов (n,n)-матрицы её определитель меняет знак.

8. Докажите, что если определитель содержит два одинаковых столбца, то он равен нулю.

9. Докажите, что если все элементы некоторого столбца определителя умножить на данное число t, то сам определитель умножится на t.

10. Докажите, что если все элементы j-го столбца определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы, кроме j-го, такие, как и в исходном определителе, а j-й столбец в первом определителе состоит из первых слагаемых j-го столбца исходного определителя, а во втором определителе – из вторых слагаемых j-го столбца исходного определителя.

11. Докажите, что если один из столбцов определителя является линейной комбинацией других его столбцов, то этот определитель равен нулю.

12. Найдите произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $A \cdot B \neq B \cdot A, |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

38*. Ортогонализация. Определитель Грама

В n-мерном пространстве рассмотрим линейно независимые векторы $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$, отложенные от начала координат O. Они задают k-мерное подпространство, точками $A(x_1, \ldots, x_n)$ в котором являются концы A векторов $\overrightarrow{OA}$, являющиеся всевозможными линейными комбинациями векторов $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$, т. е. $\overrightarrow{OA} = t_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{a_n}$, где $t_1, \ldots, t_n$ – произвольные числа.

По данным векторам $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$ можно построить ортогональную систему векторов $\overrightarrow{b_1}$, …, $\overrightarrow{b_k}$, задающих то же самое k-мерное подпространство. Процесс построения таких векторов называется процессом ортогонализации Грама–Шмидта.

Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим $P(\vec{a}, \vec{b})$ проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, $P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$. Положим

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1},$$
$$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - P(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}),$$
$$\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{a_3} - P(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}) - P(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_2}),$$
$$\ldots,$$
$$\overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{a_k} - P(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}) - P(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_2}) - \cdots - P(\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_{k-1}}).$$

Используя свойства скалярного произведения, можно доказать, что векторы $\overrightarrow{b_1}$, …, $\overrightarrow{b_k}$ будут попарно перпендикулярны и образуют то же самое m-мерное подпространство, что и векторы $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$.

На рисунках 37.1 и 37.2 показано построение векторов $\overrightarrow{b_2}$ и $\overrightarrow{b_3}$.

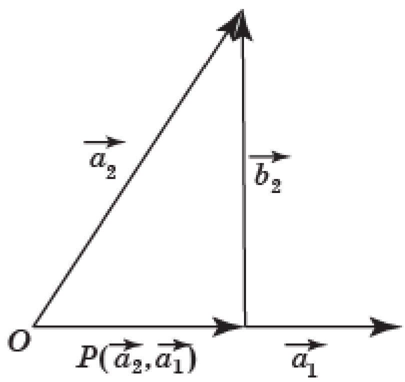


Рис. 37.1

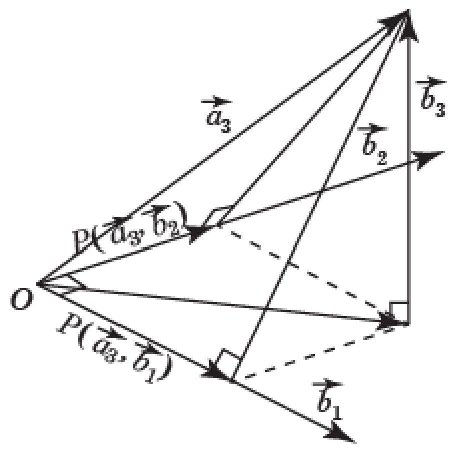


Рис. 37.2

Определителем Грама системы векторов $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$ в n-мерном пространстве называется определитель, обозначаемый $\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$, составленный из всевозможных скалярных произведений данных векторов,

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{a_k} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Определитель Грама $\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n})$ в пространстве R^n равен квадрату смешанного произведения векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, т. е. имеет место равенство

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}) = \{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}^2.$$

Доказательство. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{a_1}(a_{11}, \ldots, a_{1n})$,…, $\overrightarrow{a_n}(a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Их смешанное произведение выражается формулой

$$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В силу свойств определителей в этой формуле вместо указанного определителя можно взять определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Представим скалярный квадрат смешанного произведения данных векторов в виде

$$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как произведение определителей матриц равно определителю произведения этих матриц, то будет выполняться равенство

$$\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}^2 = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right).$$

Непосредственная проверка показывает, что произведение матриц, стоящее в правой части этого равенства, равно матрице определителя Грама $\begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_1} & \cdots & \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{a_k} \end{pmatrix}$. Следовательно, имеет место требуемое равенство.

Теорема. Определитель Грама $\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m})$ не изменится, если $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ заменить на векторы $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}$, полученные в процессе ортогонализации, т. е. имеет место равенства

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \det G(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}).$$

Доказательство. Действительно, в процессе ортогонализации по векторам $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ последовательно строятся векторы $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - t_{21}\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_k} = \overrightarrow{a_k} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{ki}\overrightarrow{b_i}$.

После первого шага определитель Грама не изменяется

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \det G(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}).$$

Выполним с определителем $\det G(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ следующие преобразования. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на число $-t_{21}$, а затем ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на число $-t_{21}$.

Получим определитель

$$\det G(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{a_2} - t_{21}\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \det G(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_k}).$$

Так как при этих преобразованиях определитель не изменяется, то

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \det G(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_k}).$$

Значит, после второго шага в процессе ортогонализации определитель не изменяется. Продолжая аналогично, получаем после k шагов:

$$\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}) = \det G(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}).$$

Следствие. Для определителя Грама имеет место равенство

$$\det G(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}) = \overrightarrow{b_1}^2 \cdot \ldots \cdot \overrightarrow{b_k}^2.$$

Доказательство. В матрице $G(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k})$ Грама все элементы равны нулю, кроме элементов, стоящих на диагонали. Поэтому её определитель равен произведению элементов, стоящих на диагонали.

Используя определитель Грама, выведем формулу для расстояния от точки до k-мерного подпространства n-мерного пространства.

Напомним, что для задания k-мерного подпространства в n-мерном пространстве достаточно задать точку $A_0(a_{01}, \ldots, a_{0n})$ и k линейно независимых векторов $\overrightarrow{l_1}(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \overrightarrow{l_k}(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$.

Точка $A(x_1, \ldots, x_n)$ будет принадлежать этому подпространству, если векторы $\overrightarrow{A_0A}, \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ будут линейно зависимы, т. е. для некоторых чисел t_1, $\ldots$, t_k будет выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = t_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \cdots + t_k \cdot \overrightarrow{a_k}$, которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{01} + t_1 \cdot a_{11} + \ldots + t_k \cdot a_{k1}, \\ \ldots, \\ x_n = a_{0n} + t_1 \cdot a_{1n} + \cdots + t_k \cdot \overrightarrow{a_{kn}}. \end{cases}$$

Расстояние h_k от точки $B(b_1, \ldots, b_n)$, не принадлежащей данному пространству, до этого пространства равно модулю вектора $\overrightarrow{b_{k+1}}$ из системы векторов $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_{k+1}}$, полученных ортогонализацией системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots,$ $\overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{A_0B}$.

Используя свойства определителя Грама, получаем следующее выражение для искомого расстояния

$$h_m = \sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{A_0B})}{\det G(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k})}}.$$

В частности, расстояние от точки B до прямой, проходящей через точку A_0 с направляющим вектором $\overrightarrow{a_1}$ (рис. 37.3), равно модулю вектора $\overrightarrow{b_2}$, полученного ортогонализацией системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{A_0B}$. Оно выражается формулой

$$h_1 = \frac{\sqrt{\det G(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{A_0B})}}{|\overrightarrow{a_1}|}.$$

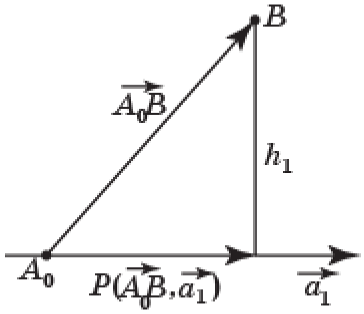


Рис. 37.3

Найдём выражение для расстояния h_2 между двумя скрещивающимися прямыми, проходящими через точки A_1, A_2 и направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ (рис. 37.4).

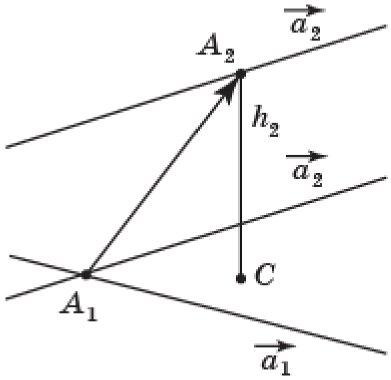


Рис. 37.4

Рассмотрим плоскость (2-мерное пространство), проходящую через точку A_1 и направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$. Искомое расстояние между данными прямыми равно расстоянию от точки A_2 до этой плоскости. Оно равно модулю вектора $\overrightarrow{b_3}$, полученного ортогонализацией системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_2}$. Следовательно, имеет место формула

$$h_2 = \sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_2})}{\det G(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})}}.$$

Выведем формулы для объёмов фигур в пространстве R^n.

Будем считать, что объём k-мерного прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин рёбер, выходящих из одной вершины,

Аналогично тому, как это делается для обычных параллелепипедов в трёхмерном пространстве, можно доказать, что объём k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве равен объёму его (k-1)-мерной грани, умноженной на высоту, проведённую к этой (k-1)-мерной грани.

Пусть $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ – система k линейно независимых векторов n-мерного пространства, отложенных от одной точки. Рассмотрим k-мерный параллелепипед, построенный на этих векторах. Обозначим $\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_k}$, систему векторов, полученную в процессе ортогонализации данной системы векторов. Заметим, что длина вектора $\overrightarrow{b_i}$ равна высоте h_i i-мерного параллелепипеда, образованного векторами $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_i}$, проведённой к его ($i$-1)-мерной грани, образованной векторами $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{i-1}}$.

Из сказанного выше следует, что объём V_k k-мерного параллелепипеда, образованного векторами $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$, равен произведению $|\overrightarrow{a_1}| \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_k$. Значит, имеет место равенство

$$V_k = |\overrightarrow{b_1}| \cdot \ldots \cdot |\overrightarrow{b_k}|,$$

Из свойств определителя Грама получаем следующую теорему.

Теорема. Квадрат объёма k-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_k}$, равен определителю Грама этих векторов, т. е. имеет место равенство

$$(V_k)^2 = \mathrm{detG}(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_k}).$$

Следствие. Объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}$, …, $\overrightarrow{a_n}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов, т. е. имеет место равенство

$$V_n = |\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}|.$$

Теорема. Объем (n-1)-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве, построенного на линейно независимых векторах $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}$, равен модулю векторного произведения этих векторов.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь единичный вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $[\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}]$. Объём V_n n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{b}$, $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}$, равен объёму V_{n-1} (n-1)-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}$.

С другой стороны, объём V_n равен смешанному произведению векторов $\vec{b}$, $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}$, которое равно скалярному произведению векторов $\vec{b}$ и $[\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}]$. Так как вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $[\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}]$ и $|\vec{b}| = 1$, то скалярное произведение этих векторов равно $|[\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}]|$. Следовательно, имеет место формула

$$V_{n-1} = |[\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}]|.$$

Таким образом, можно сказать, что векторное произведение векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-1}}$ в n-мерном пространстве представляет собой вектор, перпендикулярный данным векторам, а его модуль равен объёму (n-1)-го параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Рассмотрим теперь k-мерные тетраэдры $A_0 \ldots A_k$ с вершинами A_0, …, A_k в n-мерном пространстве.

Двумерные тетраэдры $A_0A_1A_2$ являются треугольниками. Их площадь (2-мерный объём) равна половине произведения стороны на высоту, проведённую к этой стороне, т. е. имеет место формула

$$V_2(A_0A_1A_2) = \frac{1}{2}A_0A_1 \cdot h_2.$$

Объём трёхмерного тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ равен одной третьей произведения площади грани тетраэдра на высоту, проведённую к этой грани, т. е. имеет место формула

$$V_3(A_0A_1A_2A_3) = \frac{1}{3}V_2(A_0A_1A_2) \cdot h_3.$$

По аналогии с этим можно доказать, что для объёма V_k k-мерного тетраэдра $A_0 \ldots A_k$ имеет место равенство

$$V_k(A_0 \dots A_k) = \frac{1}{k} V_{k-1}(A_0 \dots A_{k-1}) \cdot h_k,$$

где h_k – высота, проведённая к грани $A_0 \dots A_{k-1}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$V_k(A_0 \dots A_k) = \frac{1}{k!} A_0A_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_k.$$

из которого получаем, что объём k-мерного тетраэдра с вершинами A_0, …, A_k в n-мерном пространстве равен объёму k-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, умноженному на $\frac{1}{k!}$.

Упражнения

1. Для векторов $\overrightarrow{a_1}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{a_3}(1, 1, 0)$ в трёхмерном пространстве постройте ортогональную систему векторов.

2. Найдите определитель Грама системы векторов $\overrightarrow{a_1}(0, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_3}(1, 1, 0, 1)$, $\overrightarrow{a_4}(1, 1, 1, 0)$ в четырёхмерном пространстве.

3. Найдите расстояние от точки $B(1, 0, \dots, 0)$ в n-мерном пространстве до прямой, проходящей через точку $A(0, \dots, 0)$ и направляющим вектором $\overrightarrow{a_1}(1, 1, \dots, 1)$.

4. Найдите расстояние между двумя прямыми в n-мерном пространстве, проходящими через точки соответственно $A_1(0, 0, \dots, 0)$, $A_2(1, 0, \dots, 0)$ и направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}(1, \dots, 1)$ и $\overrightarrow{a_2}(0, 1, 0, \dots, 0)$.

5. Найдите расстояние от точки $B(1, \dots, 1)$ в n-мерном пространстве до 2-мерного подпространства, проходящего через точки $A_1(0, \dots, 0)$, $A_2(1, 0, \dots, 0)$, $A_3(0, 1, 0\dots, 0)$.

6. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}(1, 1, \dots, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, \dots, 0)$ в n-мерном пространстве.

7. Найдите объём трёхмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}(1, 1, \dots, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, \dots, 0)$, $\overrightarrow{a_3}(0, 1, 0, \dots, 0)$ в n-мерном пространстве.

8. Докажите, что объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве, вершины которого имеют целые координаты, выражается натуральным числом.

9. Найдите объём n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a_1}(0, 1, \dots, 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 0, 1, \dots, 1)$,…, $\overrightarrow{a_n}(1, \dots, 1, 0)$,

10. Найдите объём n-мерного тетраэдра, вершинами которого являются точки $O(0, \dots, 0)$, $A_1(1, 0, \dots, 0)$, …, $A_n(0, \dots, 0, 1)$. Проверьте, что этот объём стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

11*. Найдите объём единичного правильного n-мерного тетраэдра. Проверьте, что этот объём стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

12*. Найдите объём единичного n-мерного октаэдра, представляя его составленным из n-мерных тетраэдров, Проверьте, что этот объём стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1

1. а) 1, 5 и 15; 2 и 13; 7 и 10; 9 и 12; б) 1, 5, 6, 15; 2, 4, 13; 7, 9, 10, 12; 11, 14. **2.** 4. **3.** 12. **4.** 6. **5.** А) $\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE}$; в) $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}$; г) $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** А) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}$. **8.** А) 1; б) 1; в) 2; г) 2; д) $\sqrt{3}$. **9.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB}$. **10.** А) Ромб; б) прямоугольник. **12.** Да.

2

1. а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{CA}$. **2.** А) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB}$. **3.** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BD}$. **4.** А), б), в), д), е) Да; г) нет. **5.** А) $\overrightarrow{AE}$; б) $\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{AD}$. **6.** А) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$; в) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. **7.** А) 5; б) 3; в) 4; г) 6. **8.** А) 1; б) 0; в) 2. **10.** Векторы одинаково направлены. **12.** А) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BC}$. **13.** А) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{AB}$. **14.** А) $\overrightarrow{FB}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AC}$. **15.** А) 10; б) 14; в) 10; г) 5. **16.** А) $\overrightarrow{FC}$; б) $\overrightarrow{AD}$. **17.** А) 1; б) 1; в) 0. **18.** А) $\vec{a} = \vec{b}$; б) $\vec{a} = \vec{0}$. **19.** А) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$. **20.** Векторы одинаково направлены. **21.** $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **23.** А) $t = 1$, $s = \frac{1}{2}$; б) $t = 2$, $s = 2$; в) $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2}$.

3

1. а) $3\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{2}$; в) 3; г) 0; д) – 3; е) $-3\sqrt{3}$. **2.** А) 120°; б) 120°; в) 120°; г) 60°; д) 90°; е) 150°. **3.** А) –0,5; б) –0,5; в) –0,5; г) 0,5; д) 0; е) $-1{,}5$. **4.** А) 0,5; б) –0,5; в) 0,75; г) –0,75; д) 0; е) $-\frac{3}{8}$. **5.** А) 0; б) 64; в) 0; г) 36. **6.** А) 0°; б) 180°. **7.** А) 2; б) –2. **10.** 9.

4

1. $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 1)$, $E(-3, -1)$, $F(-2, -2)$, $G(1, -1)$, $H(2, -2)$. **3.** 3. **4.** 2. **5.** (3, 0). **6.** (0, 2). **7.** (2, 0). **8.** А) $(x, -y)$; б) $(-x, y)$; в) $(-x, -y)$. **9.** А) (-8, 6); б) (8, 6); в) (-8, -6). **10.** $N(-5, 2)$, $M(5, 2)$. **12.** А) (2, 3); б) (3, -1); в) (1, 1). **14.** А) 90°; б) 45°; в) 135°. **15.** (6, 8). **16.** (5, 4). **17.** (2, 1). **19.** А) $\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$; б) (2, 3). **20.** Рисунок О4.1.

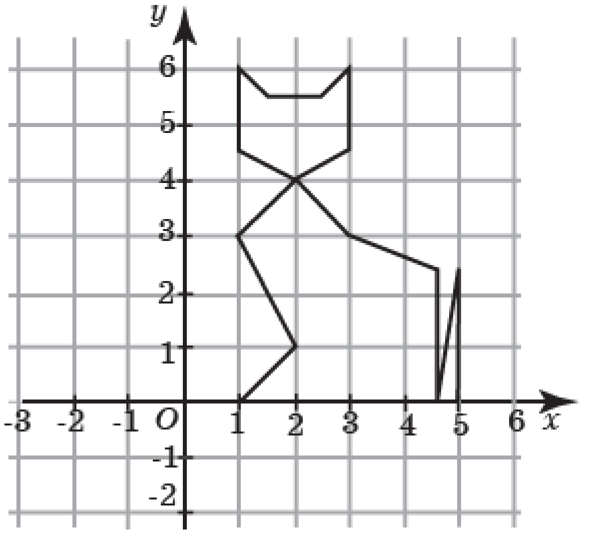


Рис. О4.1

21. Рисунок О4.2.

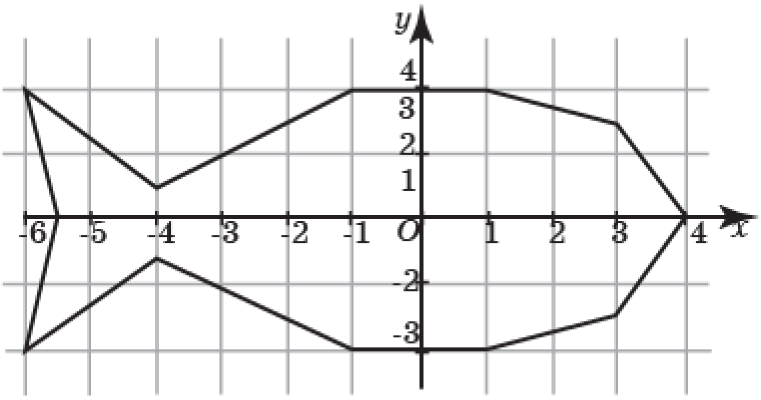


Рис. О4.2

22. Рисунок О4.3.

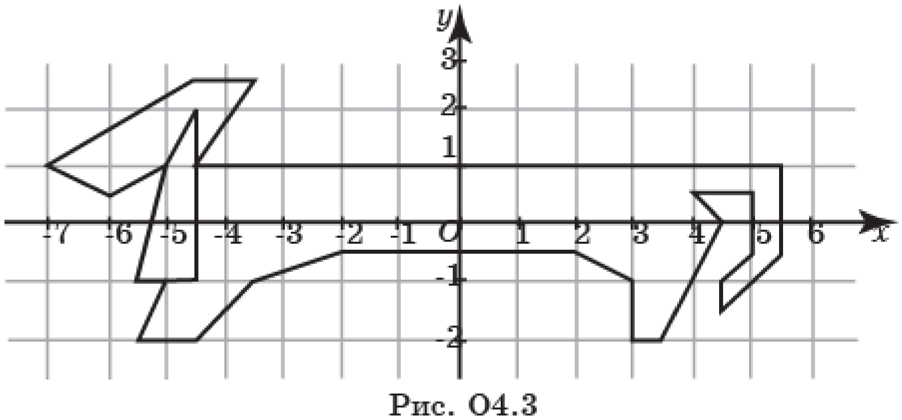


Рис. О4.3

23. Рисунок О4.4.

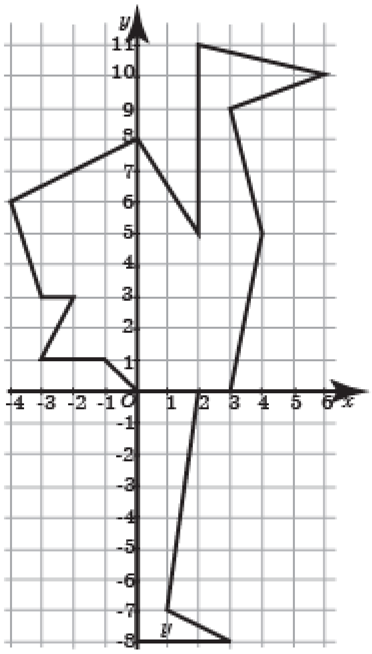


Рис. О4.4

5

1. а) $\sqrt{5}$; б) 5. **2.** А) 2; б) 3. **3.** Одинаково удалённые. **4.** 16. **5.** А) Прямоугольный; б) равнобедренный. **6.** А) Квадрат; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) равнобедренная трапеция. **7.** А) (4, 0); б) (5, 0). **8.** А) (0, 3); б) (0, -4). **9.** А) (1, 1); б) (1, 0). **10.** А) (-5, 2), 4; б) (0, 3), 3. **11.** А) $x^2 + y^2 = 4$; б) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$. **12.** $X^2 + y^2 = 18$. **13.** А), д) Внутри окружности; б), в), г) на окружности. **14.** $X^2 + (y - 3)^2 = 25$. **15.** $(x - 3)^2 + y^2 = 13$. **16.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **17.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$. **18.** 8. **19.** А) (4, 0), 4; б) (-1, 3), $\sqrt{6}$. **20.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2$. **21.** Первое слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки (2, 4). Второе слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки (10, -2). Наименьшее значение принимается в точке $\left(7\frac{1}{3},\ 0\right)$ и равно 10. **22**. Преобразуем выражение к виду $\sqrt{(x-3)^2+7^2}+\sqrt{(x+5)^2+8^2}=17$. Первое слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки A(3, -7). Второе слагаемое равно расстоянию от точки (x, 0) до точки B(-5, 8). Наименьшее значение данной суммы, равное 17, принимается в точке C, для которой $x = -\frac{11}{15}$.

6

1. а) (6, -2); б) (3, 1); в) (3, 0); г) (0, -5). **2.** (-1, 8). **3.** $\sqrt{x^2+y^2}$. **4.** (-6, 5). **5.** (-a, -b). **6.** (0, -2). **7.** (3, 1) и (-3, 1). **8.** А) (-8, 4); б) (2,5, -1,25); в) (14, -7). **9.** 5. **10.** (-2, 0). **11.** -4. **12.** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **14.** $-\frac{2}{3}$. **15.** 60°. **16.** 17. **17.** 3. **18.** 4,5. **19.** Воспользуемся свойствами определителя. Имеем $s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$

$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$. **20.** Разобьём многоугольник на треугольники проведением диагоналей. Применим к каждому получившемуся треугольнику формулу площади из предыдущей задачи. Получим $s = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$.
Учитывая, что слагаемые $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_i & y_i \end{vmatrix}$ сокращаются, получим искомую формулу $S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right)$.

7

1. а) $y = 0$; б) $x = 0$. **2.** $\left(-\frac{c}{a}, 0\right), \left(0, -\frac{c}{b}\right)$. **3.** (2, -3). **4.** $X + 3y - 3 = 0$; $2x - y + 2 = 0$. **5.** А) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = 0{,}5x$; г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -0{,}5x$. **6.** А), б) 90°. **7.** А) $1\frac{1}{2}$; б) -2. **8.** $X - y - 1 = 0$. **9.** $X + y - 1 = 0$. **10.** $X - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1, -2)$. **11.** А) $y = 3$; б) $x = -1$; в) $2x - y + 5 = 0$. **12.** А) $x - y - 1 = 0$; б) $3x + 2y - 8 = 0$. **13.** А) $x + y - 1 = 0$; б) $2x - 3y + 8 = 0$. **14.** $2x - y + 5 = 0$. **15.** А) 1, 3; б) 2, 4. **16.** А) (-1, -2); б) (7, 3). **17.** А) $y = 3$, $6x - y - 7 = 0$, $3x + 2y - 11 = 0$, $\left(1\frac{2}{3}, 3\right)$; б) $x - 4y + 12 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $\left(\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}\right)$; в) $2x - 8y + 19 = 0$, $6x - 4y - 1 = 0$, $x + y - 5 = 0$; г) (2,1, 2,9). **18.** А) 2,4; б) 1,4. **19.** $X - 2y + 10 = 0$. **20.** А) $ax - by + c = 0$; б) $-ax + by + c = 0$; в) $ax + by - c = 0$. **21.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3{,}2$. **22.** $\sqrt{3}x \pm 3y = 2\sqrt{3}$.

8

1. Рисунок О8.1. **4.** А), б) Первой; в) второй. **5.** Прямоугольник.

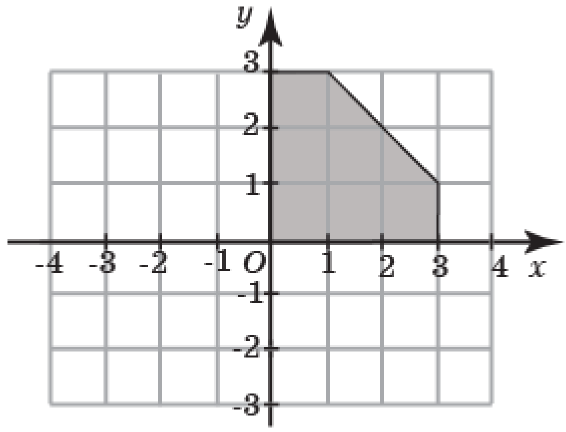


Рис. О8.1

7. $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$ **8.** $|x| + |y| \le 1.$ **9.** А) $\begin{cases} |x| \le 1, \\ 0 \le y \le 1; \end{cases}$ б) $y \le 1 - |x|.$ **10.** Рисунок О8.2. **11.** Рисунок О8.3.

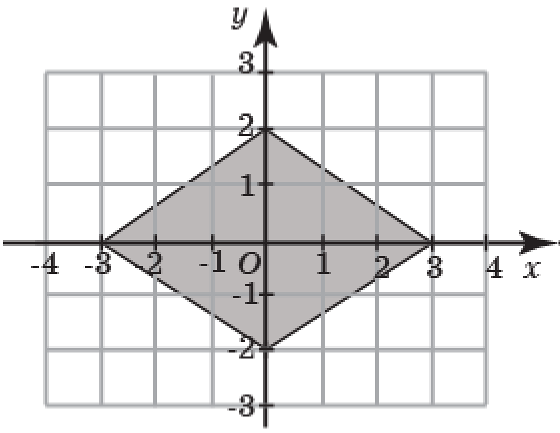


Рис. О8.2

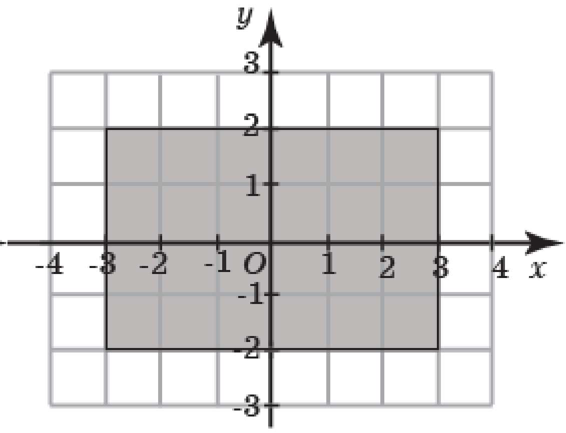


Рис. О8.3

12. $\begin{cases} 2x + 3y \ge 9, \\ 3x + y \le 10, \\ -x + 2y \le 6. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \\ |x + y - 3| \le 2, \\ |y - x| \le 2. \end{cases}$ **14.** А) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ y \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

15. Уравнения задают квадраты (рис. О8.4). Наибольшее число решений системы получается, если 0,5 < a < 1.

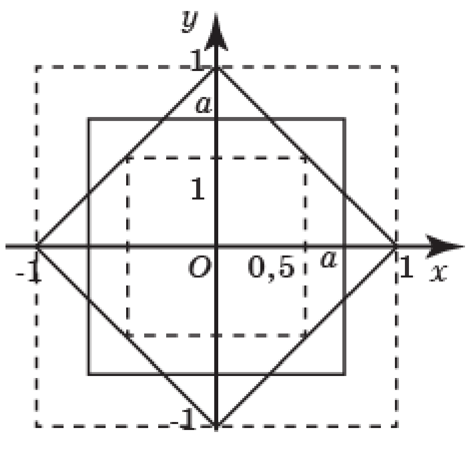


Рис. О8.4

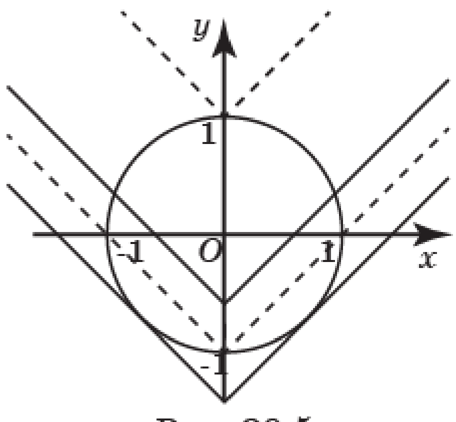


Рис. О8.5

16. Второе уравнение задаёт окружность (рис. О8.5). Два решения получается, если -1 < a < 1, $a = -\sqrt{2}$. **17.** Первое уравнение задаёт квадрат, второе – прямую (рис. О8.6), a = 1,5, a = 4.

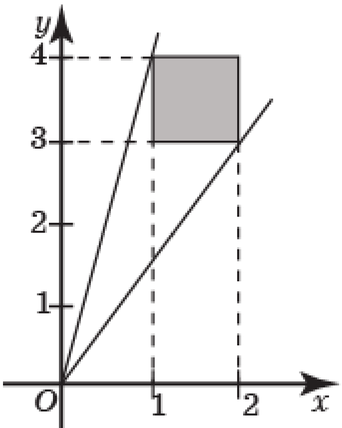


Рис. О8.6

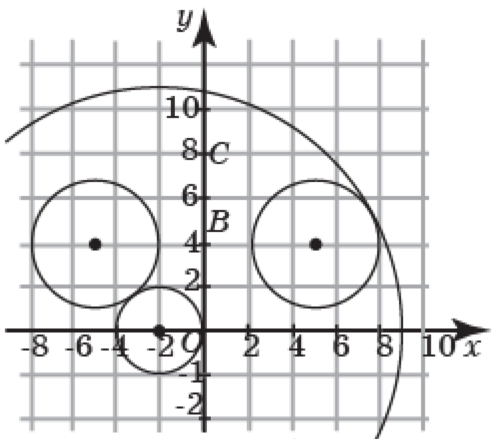


Рис. О8.7

18. Первое уравнение задаёт две окружности с центрами (5, 4) и (-5, 4) и радиусами 3. Второе уравнение задаёт окружность с центром (-2, 0) и радиусом a (рис. О8.7), a = 2, $a = \sqrt{65} + 3$. **19.** 5. **20.** А) 3,5; б) 7.

9

1. а) Рисунок О9.1; б) рисунок О9.2.

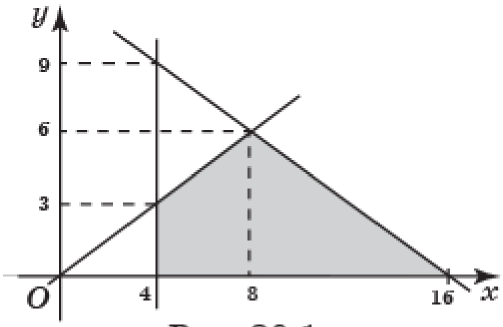


Рис. О9.1

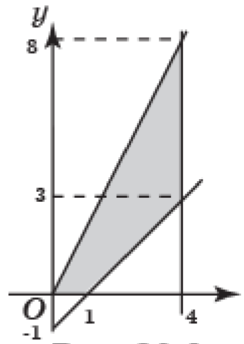


Рис. О9.2

2. 3,5. **3**. -2. **4**. 60; 60. **5.** Наиболее выгодный вариант перевозок указан в таблице

	K_1	K_2	K_3
C_1	20 т	20 т	0 т
C_2	0 т	10 т	20

6. Два обычных и два улучшенных набора удобрений.

10

1. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $y = -\frac{1}{4}$. **2.** $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $x = -\frac{1}{4}$. **3.** $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$, $y = \frac{4ac-b^2-a}{4a^2}$. **4.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$. **6.** $(-\sqrt{2},\ 0)$, $(\sqrt{2},\ 0)$, $y = x$, y = -x. **8.** $(2d - x)y^2 = x(x - d)^2$ (рис. О6.1). **9.** Окружность (рис. О10.2).

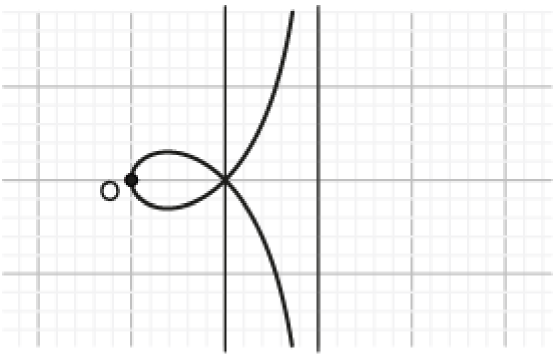


Рис. О10.1

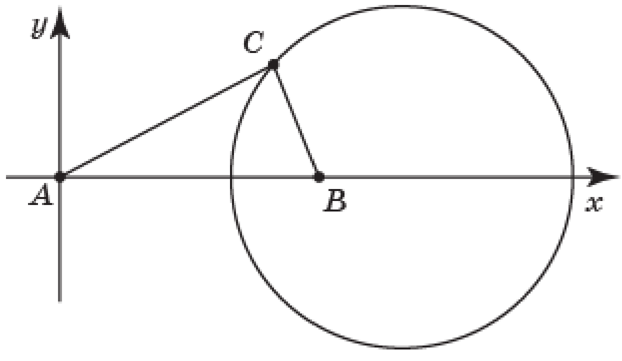


Рис. О10.2

11

1. а) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y', \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$ **2.** А) $\begin{cases} x = y', \\ y = x'; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = x', \\ y = -y' + 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = -y' + 1, \\ y = -x' + 1. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 2, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y' + 1\frac{3}{5}, \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y' + 1\frac{1}{5}. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x' = 2x_0 - x, \\ y' = 2y_0 - x. \end{cases}$ **7.** А) $\begin{cases} x' = x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi\,, \\ y' = x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi\,; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = (x - x_0) \cdot \cos\varphi - (y - y_0) \cdot \sin\varphi + x_0, \\ y' = (x - x_0) \cdot \sin\varphi + (y - y_0) \cdot \cos\varphi + y_0. \end{cases}$ **8.** $(a \cdot \cos\varphi + b \cdot \sin\varphi)x + (a \cdot \sin\varphi + b \cdot \cos\varphi)y + c = 0$.

12

1. $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, парабола. **2.** $y = \frac{1}{6}(x - 3)^2 - 4$, парабола (рис. О12.1). **3.** $\frac{9x^2}{4} + (y - 1)^2 = 1$, эллипс, (рис. О12.2).

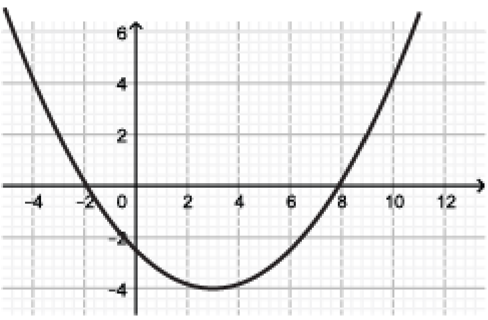


Рис. О12.1

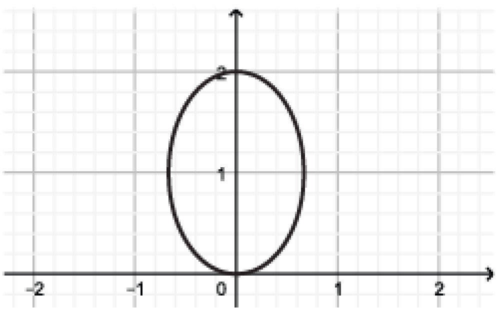


Рис. О12.2

4. $x'^2 - y'^2 = 2$, гипербола (рис. О12.3). **5.** $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 9$, гипербола (рис. О12.4).

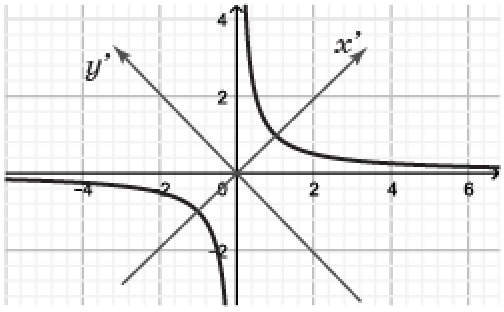


Рис. O12.3

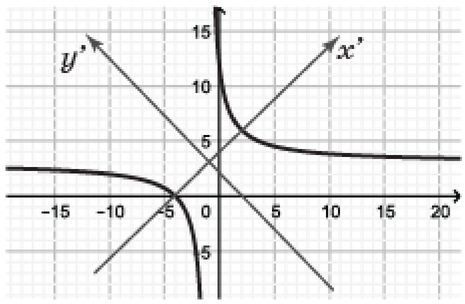


Рис. O12.4

6. $3x'^2 - y'^2 + 2 = 0$, гипербола (рис. O12.5) **7.** $3x'^2 + y'^2 - 2 = 0$, эллипс (рис. O12.6).

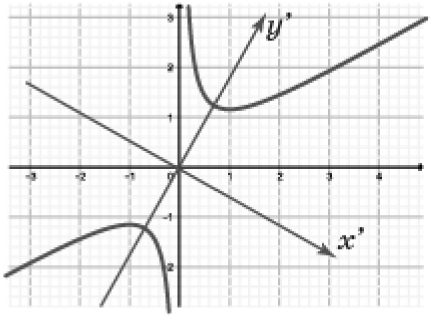


Рис. O12.5

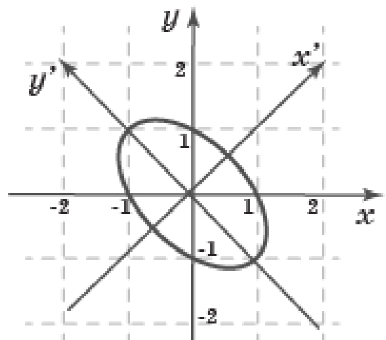


Рис. O12.6

8. Поворотом осей координат на угол $\varphi = 45°$ получаем уравнение $y'^2 - 4y' - 4x' - 4 = 0$. Параллельным переносом начала координат в точку с координатами (0, 2) получаем уравнение $y''^2 - 4x'' = 0$, которое задаёт параболу (рис. 12.7).

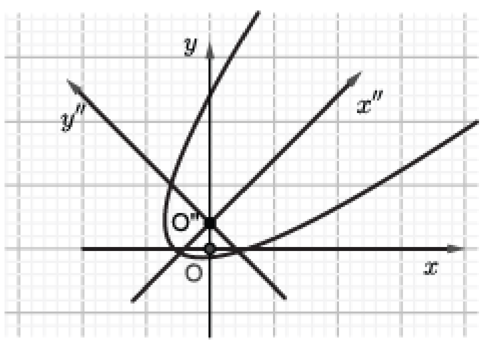


Рис. O12.7

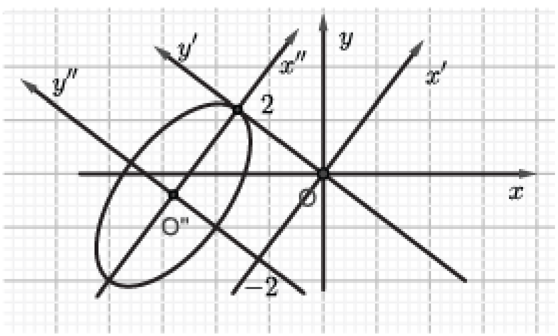


Рис. O12.8

9. Поворотом осей координат на угол φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$ получаем уравнение $x'^2 + 4y'^2 + 4x' - 16y' + 16 = 0$. Параллельным переносом начала координат в точку с координатами (-2, 2) получаем уравнение $x''^2 + 4y''^2 = 4$, которое задаёт эллипс (рис. O12.8). **10.** Если $k = 1$, то данное уравнение задаёт параболу; если k удовлетворяет неравенствам $0 < k < 1$, то данное уравнение задаёт эллипс; если k удовлетворяет неравенству $k > 1$, то данное уравнение задаёт гиперболу. **13.** Окружность, если $d^2 > 2c^2$.

13

1. $\begin{cases} x = x_0 + Rt, \\ y = y_0 + Rt. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$ **3.** Параболу. **4.** Эллипс, заданный параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos t\,, \\ y = \sin t\,, \end{cases}$ показан на рисунке О13.1.

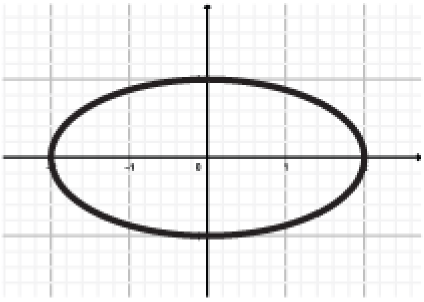


Рис. О13.1

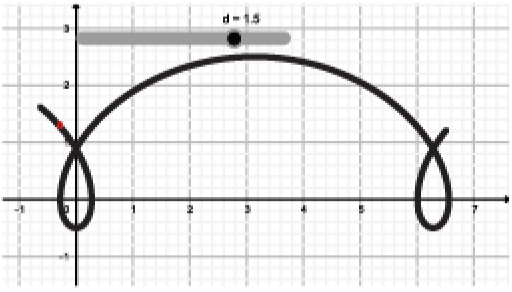


Рис. О13.2

5. Для получения удлинённой циклоиды в программе GeoGebra нужно создать ползунок *d*, изменяющийся от 1 до 2. В строке «Ввод» набрать: кривая(t-d*sin(t),1-d*cos(t),t,0,2Pi) и нажать "Enter". В результате получим укороченную циклоиду на отрезке [0, 2π] (рис. О13.2).

6. Для получения движения точки по удлинённой циклоиде (d> 1) в программе GeoGebra нужно:

1) создать ползунок a, изменяющийся от 0 до 2Pi;

2) построить окружность с центром (a, 1) и радиусом d;

3) отметить на ней точку с координатами (a-d*sin(a), 1-d*cos(a)) и соединить её отрезком с центром окружности;

4) в строке «Ввод» набрать: Кривая(t-d*sin(t),1-t*cos(t),t,0,a) и нажать "Enter";

5) включить анимацию.

В результате окружность будет катиться по оси абсцисс, а точка *B* будет двигаться по удлинённой циклоиде (рис. О13.3).

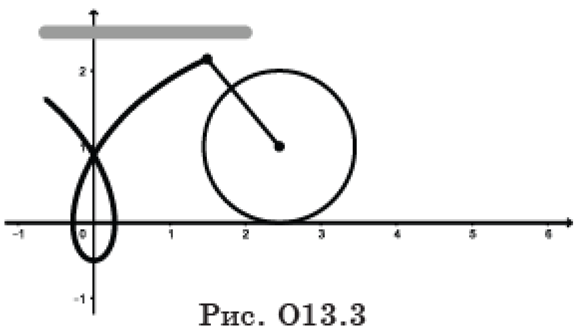


Рис. О13.3

7. Для получения укороченной циклоиды в программе GeoGebra нужно создать ползунок *d*, изменяющийся от 0 до 1. В строке «Ввод» набрать: кривая(t-d*sin(t),1-d*cos(t),t,0,2Pi) и нажать "Enter". В результате получим укороченную циклоиду на отрезке [0, 2π] (рис. О13.4).

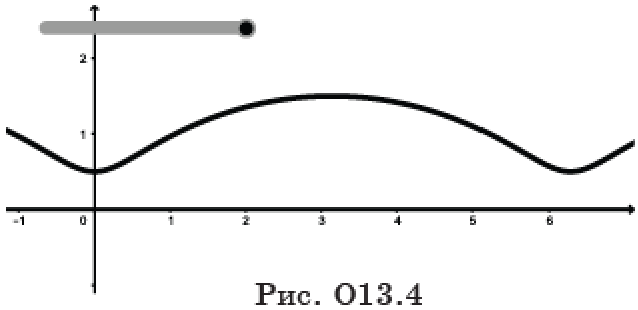


Рис. O13.4

8. Для получения движения точки по укороченной циклоиде (0 < d < 1) в программе GeoGebra нужно:

1) создать ползунок a, изменяющийся от 0 до 2Pi;

2) построить окружность с центром (a, 1) и радиусом d;

3) отметить на ней точку с координатами (a-d*sin(a), 1-d*cos(a)) и соединить её отрезком с центром окружности;

4) в строке «Ввод» набрать: Кривая(t-d*sin(t),1-t*cos(t),t,0,a) и нажать “Enter”;

5) включить анимацию.

В результате окружность будет катиться по оси абсцисс, а точка B будет двигаться по укороченной циклоиде (рис. O13.5).

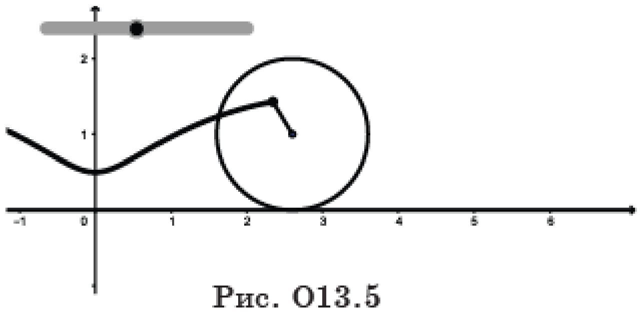


Рис. O13.5

9. Для получения кардиоиды в программе GeoGebra в строке «Ввод» нужно набрать: Кривая($2\cos t\ - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t, t, 0{,}2\mathrm{Pi}$) и нажать “Enter”. В результате получим кардиоиду (рис. O13.6).

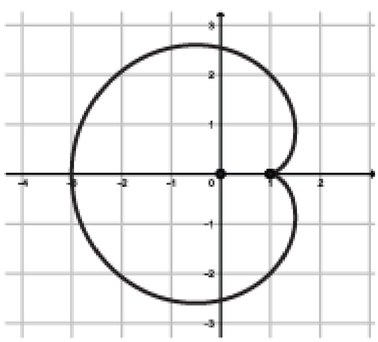


Рис. O13.6

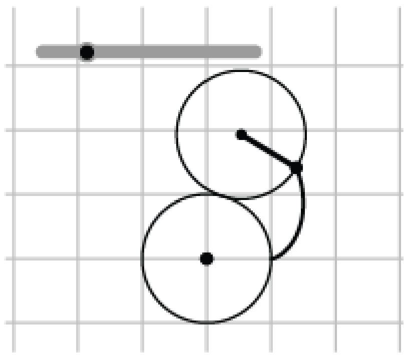


Рис. O13.7

10. Для получения движения точки по кардиоиде нужно:

1) создать ползунок а, изменяющийся от 0 до 2Pi;

2) построить окружность с центром (а, 1) и радиусом 1;

3) отметить на ней точку с координатами $((2\cos a\ - \cos 2a, 2\sin a - \sin 2a))$ и соединить её отрезком с центром окружности;

4) в строке «Ввод» набрать: Кривая$(2\cos t\ - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t, t, 0, a)$ и нажать “Enter”;

5) включить анимацию.

В результате окружность с центром Q будет катиться по окружности с центром O, а точка C будет двигаться по кардиоиде (рис. О13.7).

11. а) Рисунок О13.8; б) рисунок О13.9; в) рисунок О13.10).

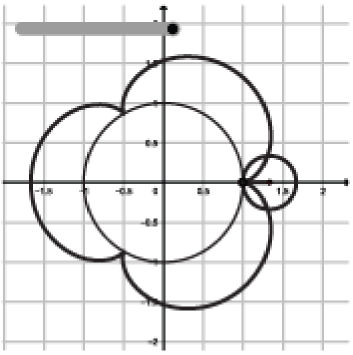


Рис. О13.8

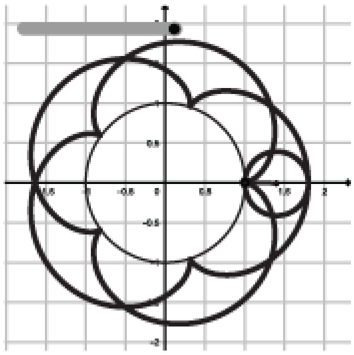


Рис. О13.9

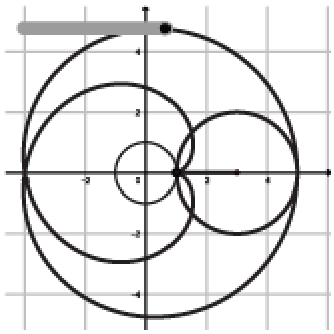


Рис. О13.10

12. а) Рисунок О13.11; б) рисунок О13.12; в) рисунок О13.13.

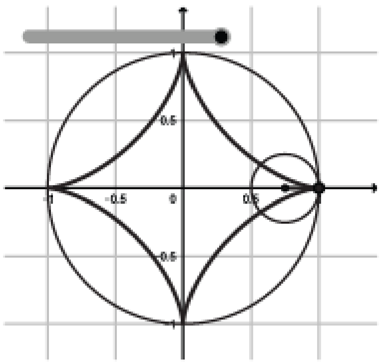


Рис. О13.11

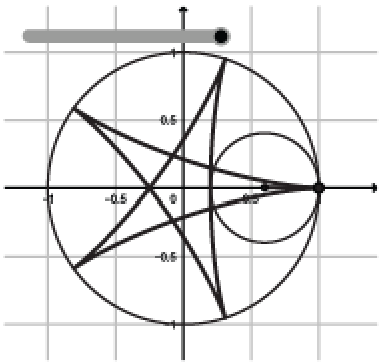


Рис. О13.12

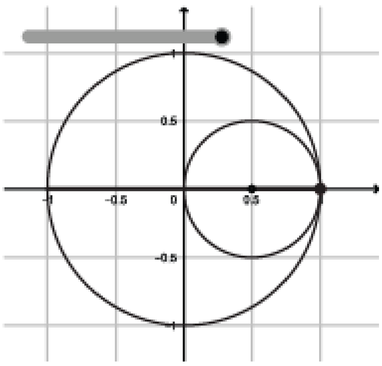


Рис. О13.13

13. Астроида. **14.** Рисунок О13.14. **15.** Рисунок О13.15.

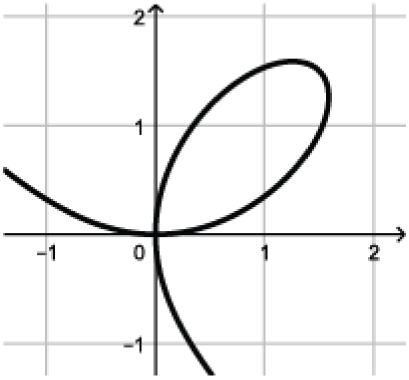


Рис. О13.14

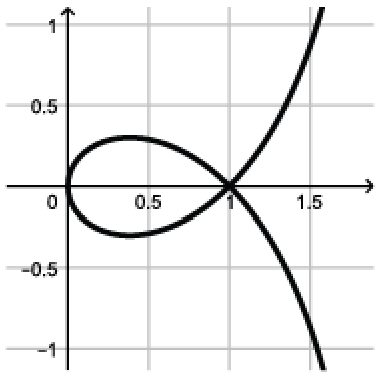


Рис. О13.15

16. а) Рисунок O13.16; б) рисунок O13.17; в) рисунок O13.18.

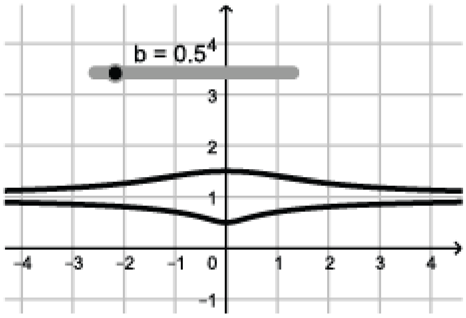


Рис. O13.16

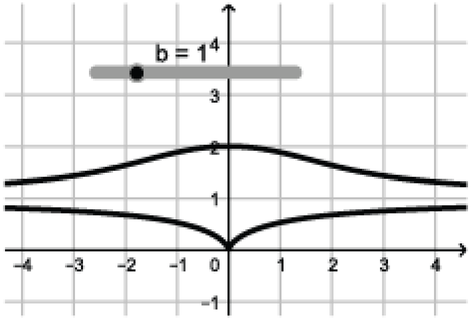


Рис. O13.17

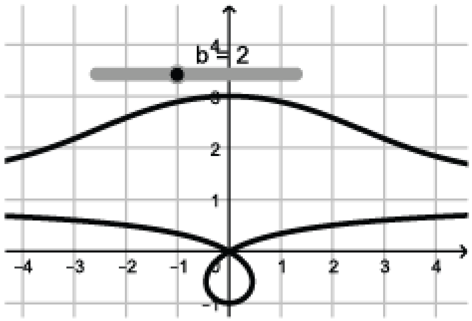


Рис. O13.18

14

1. Рисунок O14.1.

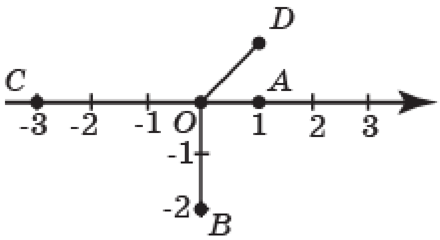


Рис. O14.1

2. $A(1, 0)$, $B(0, -2)$, $C(-3, 0)$, $D(1, 1)$. **3.** $A(2; \frac{\pi}{4})$, $B(10; \pi)$, $C(2; -\frac{\pi}{3})$, $D(2; \frac{5\pi}{6})$. **4.** А) Рисунок O14.2; б) рисунок O14.3; в) рисунок O14.4.

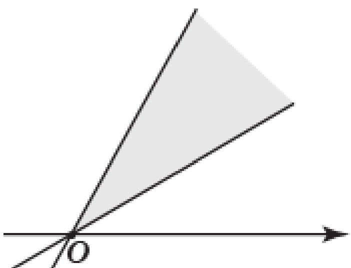


Рис. O14.2

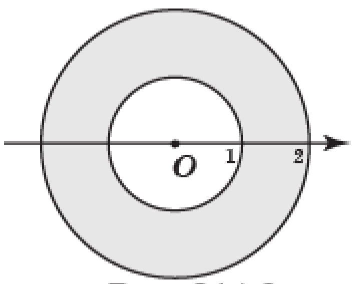


Рис. O14.3

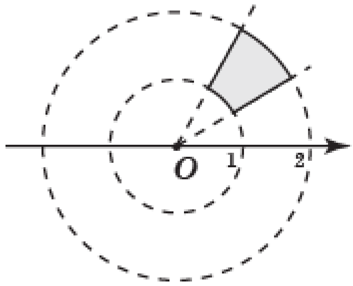


Рис. O14.4

5. Спираль Архимеда. **6.** Рисунок O14.5. **7.** Рисунок O14.6.

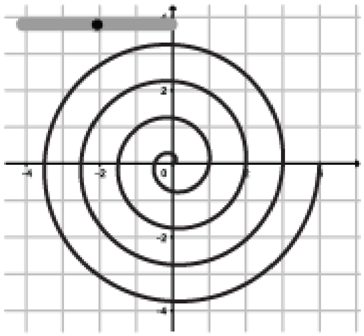


Рис. О14.5

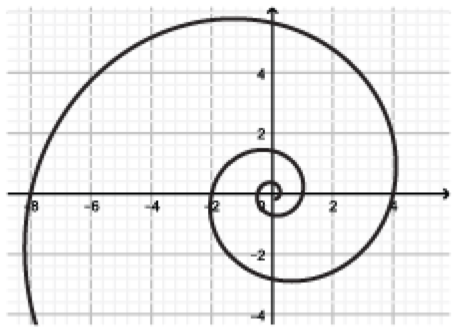


Рис. О14.6

8. Рисунок О14.7.

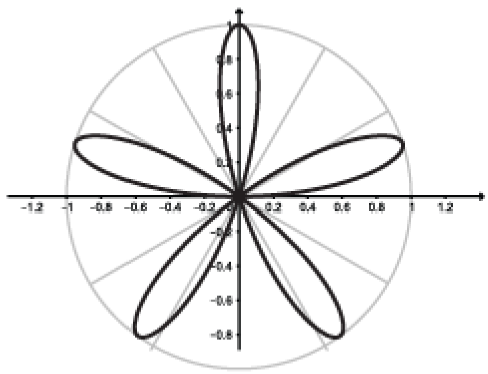
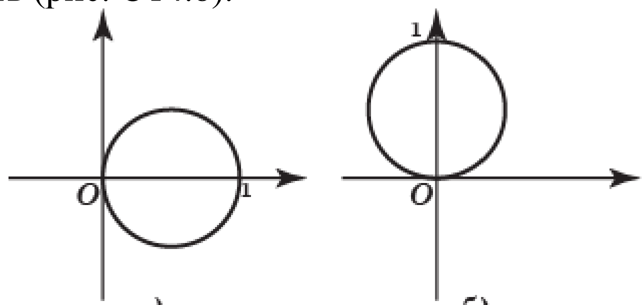


Рис. О14.7

9. а), б) Окружность (рис. О14.8).



а) Рис. О14.8 б)

10. Рисунок О14.9.

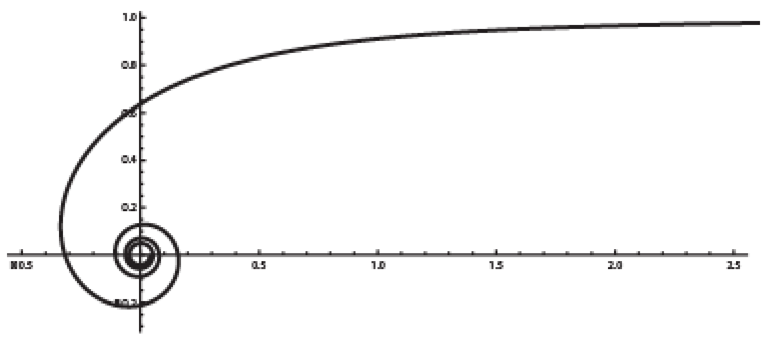


Рис. О14.9

11. Рисунок О14.10. **14.** Рисунок О14.11.

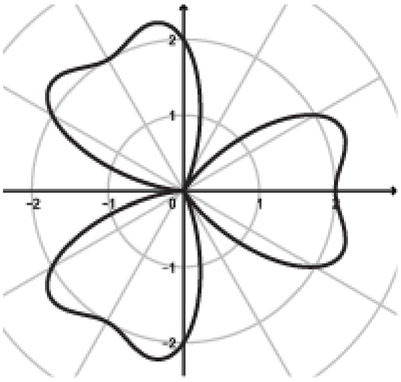


Рис. O14.10

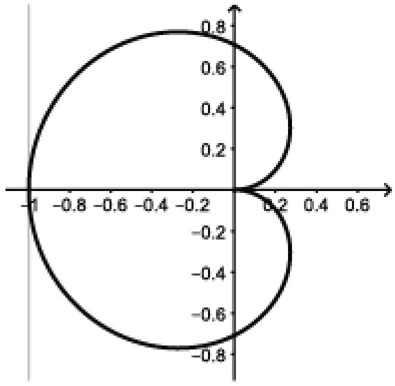


Рис. O14.11

15. Рисунок O14.12. **16.** Рисунок O14.13.

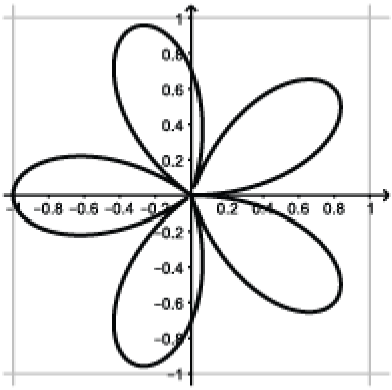


Рис. O14.12

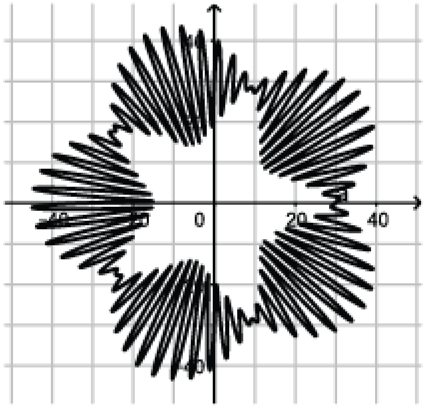


Рис. O14.13

17. $r = \dfrac{2}{\cos\varphi} \pm 2\,\mathrm{tg}\,\varphi$ (рис. O14.14). **18.** $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{d}\cos 2\boldsymbol{\varphi}}{\cos\boldsymbol{\varphi}}$ (рис. O14.15).

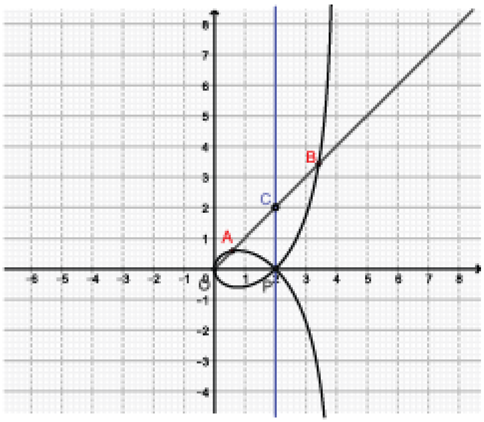


Рис. O14.14

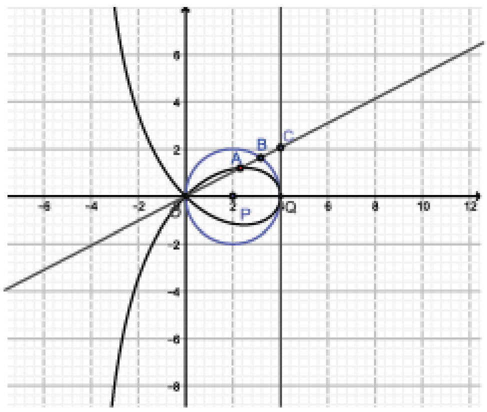


Рис. O14.15

15

1. а) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$. **2.** А) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{C_1C}$, $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$. **3.** А) $\overrightarrow{A_1B_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$. **4.** А) $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{C_1C}$. **5.** А) $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$; б) $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{F_1D_1}$; в)

$\overrightarrow{A_1D_1}$; г) $\overrightarrow{ED_1}$; д) $\overrightarrow{FD_1}$. **6.** Нет. **7.** Да. **8.** А) 6; б) 8; в) 12. **11.** А) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$. **12.** А) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\sqrt{2}$; г) 2; д) $\sqrt{5}$. **19.** 8. **20.** Да.

16

1. а) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1}$; д) $\overrightarrow{AC_1}$. **2.** А) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{FB}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$; г) $\overrightarrow{AF_1}$. **3.** 2. **4.** А) $\overrightarrow{A_1B}$; б) $\overrightarrow{A_1C}$; в) $\overrightarrow{D_1B_1}$; г) $\overrightarrow{AC}$. **5.** А) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1; д) $\sqrt{3}$. **6.** А) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$. **7.** А) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}$. **8.** А) Центр грани *ABCD*; б), в) центр куба. **9.** А) $t = 2, s = 1$; б) $t = 2, s = 2$; в) $t = 1, s = 2$. **10.** $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. **11.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}\right)$. **12.** А) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1}$; б) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1}$. **13.** Да. **15.** 1:3. **17.** А) 90°; б) 90°; в) 60°. **18.** А) 90°; б) 120°. **19.** А) 120°; б) 90°. **20.** А) 60°; б) 60°. **21.** А) 45°; б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 30°; е) 60°; ж) 90°. **22.** А) 0; б) 0; в) 1; г) 1; д) -1. **23.** А) 0; б) $-\frac{1}{2}$. **24.** А) 0,5; б) 0. **25.** А) 2; б) 1. **26.** А) 1; б) 1; в) 0,5; г) -0,5; д) 1,5; е) 1,5; ж) 0. **27.** 1.

17

1. а) Координатная плоскость *Oyz*; б) координатная плоскость *Oxy*; в) координатная плоскость *Oxy*; г) ось аппликат; д) ось ординат; е) ось абсцисс; ж) начало координат. **2.** А) Плоскость, проходящая через точку с координатами (1, 0, 0) и перпендикулярная оси абсцисс; б) прямая, проходящая через точку с координатами (1, 1, 0) и параллельная оси аппликат. **3.** $A(0, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 0)$, $A_1(0, 1, 1)$, $B_1(1, 1, 1)$, $C_1(1, 0, 1)$, $D_1(0, 0, 1)$. **4.** $A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $C(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $D(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $A_1(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1)$, $C_1(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $D_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1)$. **5.** $A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $C(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $D(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $S(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. **6.** $A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $C(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $D(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $F(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. **7.** $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $C(-\frac{1}{2}, 0, 0)$, $A_1(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $B_1(\frac{1}{2}, 0, 1)$, $C_1(-\frac{1}{2}, 0, 1)$. **8.** $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $E(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $F(-1, 0, 0)$, $A_1(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $B_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $C_1(1, 0, 1)$, $D_1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $E_1(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $F_1(-1, 0, 1)$. **9.** А) (–1, –2, 3); б) (1, –2, 3); в) (–1, 2, 3); г) (–1, –2, –3); д) (1, 2, 3); е) (1, –2, –3); ж) (–1, 2, –3). **10.** (–1, 2, 4).

18

1. а) 5; б) 3. **2.** А) 3; б) $2\sqrt{5}$. **3.** *A*. **4.** А) 3; б) 2; в) 1. **5.** А) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **6.** А) (2, –5, 0), 3; б) (0, 6, –1), 2. **7.** А) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. **8.** А) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$; б) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$; в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$. **9.** А) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 5$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$; в) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 13$. **10.** $(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 1)^2 = 1$, восемь сфер. **11.** $(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (z \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$, восемь сфер. **12.** $\sqrt{14}$, (1, –2, 3). **13.** $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=12$. **14.** А) Вне сферы; б) на сфере; в) внутри сферы. **15.** Не имеют общих точек. **16.** $R_1=2$, $R_2=4$. **17.** $3-\sqrt{3}$ и $3+\sqrt{3}$. **18.** 2 и 10.

19

1. а) (–2, 3, 1); б) (1, 0, 3); в) (0, –3, 2); г) (4, 0, –5). **2.** А) (–7, 7, –8); б) (5, –7, –3); в) (6, 1, 7). **3.** $(-a, -b, -c)$. **4.** $X_2=tx_1$, $y_2=ty_1$, $z_2=tz_1$. **5.** А) (5, 4, 0); б) (0, 4, 3); в) (5, 0, 3); г) (5, 4, 3); д) (5, 0, 0); е) (5, –4, 0); ж) (5, 0, 3); з) (0, –4, 3); и) (5, –4, 3). **6.** А) $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$; б) $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$; в) $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$; г) $\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$; д) $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$; е) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$; ж) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$; з) $(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$; и) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$. **7.** А) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$; в) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$; г) (1, 0, 1); д) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$; е) (1, 0, 0); ж) (1, 0, 0); з) (1, 0, 1); и) $\left(1\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$. **8.** А) (1, –1, 7); б) (1, 5, –1). **9.** А) (–7, 12, 1); б) $\left(0,\ \frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2}\right)$; в) (7, –11, 9). **10.** (–1, –2, 5). **11.** А) Первые две координаты равны нулю; б) вторая и третья координаты равны нулю. **12.** А) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{2}$. **13.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **14.** А) $\sqrt{41}$; б) 5; в) $\sqrt{34}$; г) $5\sqrt{2}$; д) 5; е) $\sqrt{41}$; ж) $\sqrt{34}$; з) 5; и) $5\sqrt{2}$. **15.** 5. **16.** $\frac{5}{14}$. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** 0. **19.** $-\frac{3}{22}$. **22.** 33.

20

1. $z=0$, $y=0$, $x=0$. **2.** A, C. **3.** (1, 0, 0), $\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)$. **4.** $-x+y+2z-7=0$. **5.** А) $z=3$; б) $y=-2$; в) $x=1$. **6.** $-2x+3y-z-14=0$. **7.** А) $x+y+z=1$; б) $x+y+z=2$. **9.** А) $y=4$; б) $x=5$; в) $z=3$; г) $3y+4z-12=0$; д) $3x+5z-15=0$; е) $4x+5y-20=0$; ж) $12x+15y+20z-60=0$. **10.** А) $x+y+z=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x-y+z=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-x-y+z=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-x+y+z=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.** А) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$; в) $z=1$; г) $2y+\sqrt{3}z-\sqrt{3}=0$; д) $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}z-\sqrt{3}=0$; е) $\sqrt{3}x+3y-\sqrt{3}=0$; ж)) $2\sqrt{3}x+6y+\sqrt{3}z-2\sqrt{3}=0$. **12.** А), в), г). **13.** А) $3x+y-z-8=0$; б) $x-y+3z+10=0$. **14.** А), б) Да; в) нет. **15.** А) $x+z+1=0$; б) $x+y+1=0$; в) $x-y+1=0$. **16.** А) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{6}{13}$. **17.** А) $-ax-by-cz+d=0$; б) $ax+by-cz+d=0$; в) $ax-by+cz+d=0$; г) $-ax+by+cz+d=0$; д) $ax-by-cz+d=0$; е) $-ax+by-cz+d=0$; ж) $-ax-by+cz+d=0$.

21

1. а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 6t. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$ **5.** Перпендикулярны. **6.** $K_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$. **7.** Перпендикулярны. **8.** $(1,\ 1,\ 2)$. **9.** А) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = 4t, \\ z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = 4t, \\ z = 3t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = 4, \\ z = 3t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = 4 - 4t, \\ z = 3t. \end{cases}$ **10.** А) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z = t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ z = t \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}t, \\ z = t. \end{cases}$ **11.** (7, 3, 4). **12.** 3. **13.** $\sqrt{3}$. **14.** $\sqrt{5}\pi$. **16.** $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = |\sin 2t|, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

22

1. а) $\overrightarrow{CA_1}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA}$. **2.** А) 1; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2; д) $\frac{\sqrt{15}}{2}$; е) $\sqrt{7}$; ж) $\sqrt{10}$. **3.** А) (2, -2, 0); б) (-1, 2, -1); в) (6, -1, -1). **4.** А) $\vec{k}$; б) $14\vec{j} + 7\vec{k}$; в) $-\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; г) $2\vec{i} - 14\vec{j} - 22\vec{k}$. **5.** А) (6, 3, 2); б) (1, 1, 1). **6.** А) $6x + 3y + 2z = 6$; б) $x + y + z = 6$. **7.** А) 3,5; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; в) 14. **8.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть коллинеарны. **10.** (2, 11, 7).

23

1. а), б), в) 1. **2.** А), б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0. **3.** А) -2; б) 0; в) 1. **4.** А) 1; б) 21; в) 0. **6.** 16. **7.** 3.

24

1. а) 90º. **2.** 90º. **3.** 90º. **4.** 60º. **5.** 0,2. **6.** 60º. **7.** 90º. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\frac{1}{6}$. **10.** $\frac{3}{4}$. **11.** $\frac{1}{4}$. **12.** 90º. **13.** 90º. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **15.** $\frac{5}{8}$. **16.** 60º. **17.** 90º. **18.** 30º. **19.** $\frac{2}{3}$. **20.** $\frac{5}{6}$. **21.** $\frac{5}{7}$. **22.** $\frac{7}{8}$. **23.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.** $\frac{3\sqrt{51}}{51}$. **25.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **26.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **27.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **28.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **29.** 90º. **30.** 90º. **31.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **32.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **33.** $\frac{7\sqrt{6}}{18}$. **34.** $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$. **35.** $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{2abc}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$. **36.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **37.** $\frac{1}{4}$.

25

1. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **4.** 1. **5.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **7.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **8.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **9.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **10.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **12.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **13.** $\frac{\sqrt{30}}{4}$. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **17.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **18.** 1. **19.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **20.** $\frac{\sqrt{39}}{13}$. **21.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **22.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. **23.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **24.**

$\frac{\sqrt{21}}{7}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **27.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **28.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **29.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **30.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **31.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **32.** $\frac{1}{2}$. **33.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **34.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **36.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **37.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **38.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **39.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **40.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **41.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **42.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **43.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **44.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

26

1. а), б) Первому; в) второму. **2.** Прямоугольный параллелепипед. **3.** Рисунок О26.1. **4.** Рисунок О26.2.

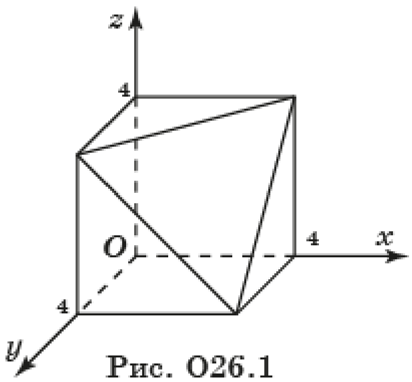


Рис. О26.1

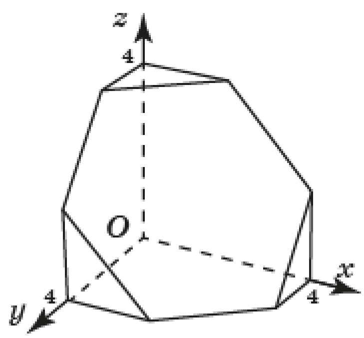


Рис. О26.2

5. Рисунок О26.3. **6.** $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0, \\ x + y + z \leq 2. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} z \geq 0, \\ |x| + |y| + |z| \leq 2. \end{cases}$ **8.** Октаэдр (рис. О26.4).

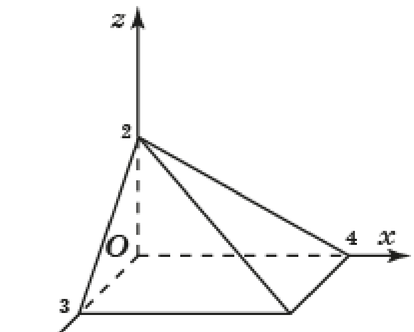


Рис. О26.3

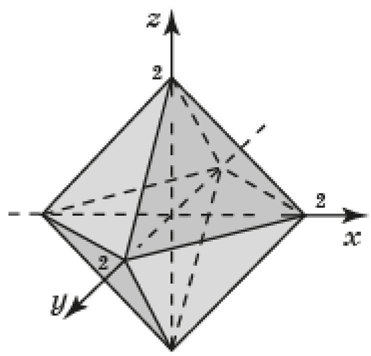


Рис. О26.4

9. Кубооктаэдр (рис. О26.5). **10.** $|x+y|+z\leq 1$, $|x-y|-z\leq 1$. **11.** Усечённый октаэдр (рис. О26.6). **12.** Рисунок О26.7.

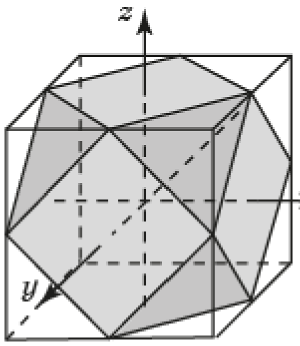


Рис. О26.5

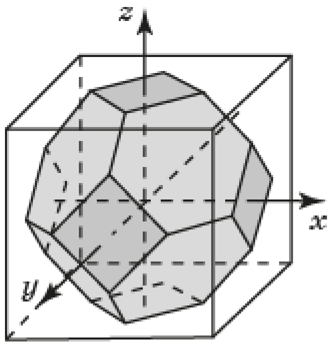


Рис. О26.6

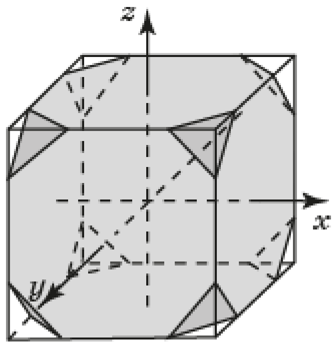


Рис. О26.7

27

1. Плоскость. **2.** Параллелен. **3.** Проходит через начало координат. **4.** А) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. **5.** -2. **6.** С 1-го склада – 10 т, со 2-го – 20 т, с 3-го – 5 т. **7.** С 1-го склада – 0 т, со 2-го и 3-го – 17,5 т. **8.** Хватит. Наименьшее число станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.

28

2. $\begin{cases} x = x' - y', \\ y = x' + y', \\ z = z', \end{cases}$ эллипсоид. **3.** $\begin{cases} x = x' - y', \\ y = x' + y', \\ z = z', \end{cases}$ коническая поверхность. **4.** $\begin{cases} x = a\cos u \cos v, \\ y = b\cos u \sin v \\ z = c\sin u. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x = x(u)\cos v\,, \\ y = x(u)\sin v\,, \\ z = z(u). \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x = (a+\cos u)\cos v, \\ y = (a+\cos u)\sin v \\ z = \sin u. \end{cases}$ **7.** $F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$. **8.** $\left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1$. **9.** $y = a^x$. **10.** $y = \sin x$.

29

1. $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0, -\sqrt{3}, -1)$, (0,0,1). **2.** *A*: $r = \sqrt{3}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *B*($\sqrt{2}$; 180°; 45°); *C*(2; 0°; 90°). **3.** (0; 0°; 0°); (1; 0°; 0°); ($\sqrt{2}$; 45°; 0°); (1; 90°; 0°); (1; 0°; 90°); ($\sqrt{2}$; 0°; 45°); ($\sqrt{3}$; φ; ψ), $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ($\sqrt{2}$; 90°; 45°). **4.** А) (*r*; φ; $-\psi$), (*r*; $180° - \varphi$; ψ), (*r*; $-\varphi$; ψ); б) (*r*; -φ; -ψ), (*r*; 180°-φ; -ψ), (*r*; $180° + \varphi$; ψ); в) (*r*; $180° + \varphi$; $-\psi$). **5.** ≈785 км. **6.** На полюсах. **7.** А) Сфера; б) коническая поверхность; в) полуплоскость. **8**. А) Полушар; б) полушар; в) четверть шара. **9**. 2. **10.** $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = t, \\ \psi = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} r = 1, \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, \\ \psi = t. \end{cases}$ **12.** Рисунок О29.1.

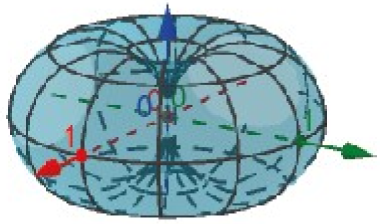


Рис. О29.1

30

1. Ответ. $\sqrt{n}$. **2.** Скалярное произведение этих векторов равно 1. Длина вектора $\vec{a}$ равна $\sqrt{n}$. Длины координатных векторов равны 1. Следовательно, косинус углов между вектором $\vec{a}(1, \dots, 1)$ и координатными векторами равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **3.** $B(2, 1, \dots, 1)$. **4.** Если $a_1 \neq 0$, то можно взять вектор $\vec{b}(a_2, -a_1, 0, \dots, 0)$. Если $a_1 = 0$, то можно взять вектор $\vec{b}(1, 0, \dots, 0)$. **5.** а) Первая координата вектора $\vec{a}$ равна 0; б) первая и вторая координаты вектора $\vec{a}$ равны 0. **6.** Воспользуемся свойствами скалярного произведения. Имеем $(t\vec{a} + s\vec{b})\vec{c} = t\vec{a}\vec{c} + s\vec{b}\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $t\vec{a} + s\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$. **7.** $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. **8.** Воспользуемся равенством $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$ и неравенством Коши-Буняковского. Получим $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + \left|\vec{b}\right|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$. Следовательно, имеет место неравенство $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$, из которого непосредственно получаем искомое неравенство $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Это выполняется, если существует такое число $t > 0$, для которого $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. **9.** Данное неравенство можно переписать в виде двух неравенств $-\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| - \left|\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$. Левое неравенство следует из неравенства треугольника, применённого к векторам $-\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$. Правое неравенство следует из неравенства треугольника, применённого к векторам $\vec{a} + \vec{b}$ и $-\vec{b}$. **10.** Доказательство следует из того, что $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $d(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, $d(A,C) = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|$.

31

1. а) $x_1 = 1$; б) $x_n = 0$; в) $x_1 + \dots + x_n = 1$. **2.** $x_1 + \dots + x_n = n$-1. **3.** $\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$.

4. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **6.** а) $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 0, \\ \dots, \\ x_n = 0. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ \dots, \\ x_{n-1} = 0, \\ x_n = t. \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t, \\ \dots, \\ x_n = t. \end{cases}$. **7.** $\begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ \dots, \\ x_n = 1 + t. \end{cases}$ **8.**

$\begin{cases} x_1 = 2 + t, \\ \dots, \\ x_n = 2 + t. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x_1 = 2 + t, \\ \dots, \\ x_n = 2 + t. \end{cases}$ **10.** $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$. **11.** Уравнения $\begin{cases} x_1 = a_{11} + t(a_{21} - a_{11}), \\ \dots, \\ x_n = a_{1n} + t(a_{2n} - a_{1n}), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$, задающие отрезок, можно переписать в виде $\begin{cases} x_1 = (1-t)a_{11} + ta_{21}, \\ \dots, \\ x_n = (1-t)a_{1n} + ta_{2n}. \end{cases}$ Эти равенства равносильны равенству $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$, где $O(0, \dots, 0)$ – начало координат, $A(x_1, \dots, x_n)$ – точка, принадлежащая отрезку, t изменяется от нуля до единицы. **12.** Как было доказано, если точка A принадлежит отрезку A_1A_2, то выполняется равенство $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$, где $O(0, \dots, 0)$ – начало координат. Для точки A_0 имеем равенства $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{A_0O} + t\overrightarrow{A_0O} + (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2} = (1-t)\left(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_2}\right) = (1-t)\overrightarrow{A_0A_1} + t\overrightarrow{A_0A_2}$, Следовательно, выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A_1} + t\overrightarrow{A_0A_2}$, Аналогично доказывается, что верно и обратное, а именно, если выполняется равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A_1} + t\overrightarrow{A_0A_2}$, то выполняется равенство $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$. Следовательно, точка A принадлежит отрезку A_1A_2. **13.** $\frac{n-2}{n}$. **14.** Обозначим BC перпендикуляр, опущенный из точки B на данную прямую. Косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ выражается формулой $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{l}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{l}|}$. Синус этого угла выражается формулой

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot \left|\vec{l}\right|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\vec{l})^2}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{l}|}.$$

Расстояние BC от точки B до данной прямой будет выражаться формулой $BC = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot\left|\vec{l}\right|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\vec{l})^2}}{|\vec{l}|}$. **15.** $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. **16.** $\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = 0, \\ \dots, \\ x_n = 0. \end{cases}$ **17.** Два k-мерных подпространства n-мерного пространства называются параллельными, если они лежат в одном (k+1)-мерном подпространстве и существуют наборы направляющих векторов этих k-мерных подпространств, состоящие из попарно коллинеарных векторов.

32

1. Данное уравнение равносильно уравнению $(x_1+1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3+3)^2 + (x_4-4)^2 = 25$. Оно задаёт трёхмерную сферу с центром в точке A(-1, 2, -3, 4) и радиусом 5. **2.** $(x_1-1)^2 + \dots + (x_n-1)^2 = n$. **3.** Точка A_1 расположена вне (n-1)-мерной сферы; точка A_2 – на (n-1)-мерной сфере; точка A_3 – внутри

(n-1)-мерной сферы. **4.** Если n = 2, 3, то данные n-мерные сферы пересекаются; если n = 4, то они касаются; если n > 4, то они не имеют общих точек. **5.** $R_1 = \sqrt{n} - 1$, $R_2 = \sqrt{n} + 1$, **6.** а) $|a| < \sqrt{n}$; б) $|a| = \sqrt{n}$; в) $|a| > \sqrt{n}$. **7.** Расстояние от точки A до данного (n-1)-мерного пространства равно $\frac{n-1}{\sqrt{n}}$. Искомое уравнение сферы имеет вид $(x_1-1)^2 + \dots + (x_n-1)^2 = \frac{(n-1)^2}{n}$. **8.** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. **9.** Обозначим P основание перпендикуляра, опущенного из точки O(0, … , 0) на данное (n-1)-мерное подпространство (рис. О32.1).

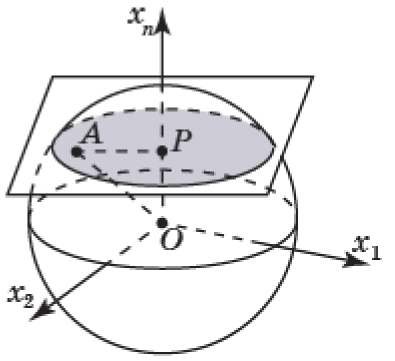


Рис. О32.1

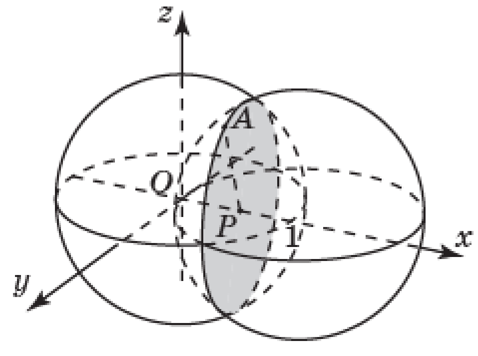


Рис. О32.2

Точка P имеет координаты $(0, \dots, 0,\ 1)$. Для точки A, принадлежащей пересечению (n-1)-мерной сферы и (n-1)-мерного подпространства, рассмотрим прямоугольный треугольник OAP, в котором гипотенуза OA равна 2, катет OP равен 1. По теореме Пифагора находим $AP = \sqrt{3}$. Следовательно, точка A принадлежит (n-2)-мерной сфере с центром P и радиусом $\sqrt{3}$. Таким образом, пересечением данных (n-1)-мерных сферы и (n-1)-мерного подпространства является (n-2)-мерная сфера в (n-1)-мерном подпространстве, заданном уравнением x_n = 1, с центром P(0, …, 0, 1) и радиусом $\sqrt{3}$. **10.** Пересечение (n-1)-мерных сфер, заданных уравнениями ${x_1}^2 + {x_2}^2 \dots + {x_n}^2 = 1$, $(x_1-1)^2 + {x_2}^2 \dots + {x_n}^2 = 1$, состоит из точек A(x_1, …, x_n), для которых $x_1 = \frac{1}{2}$ и ${x_2}^2 \dots + {x_n}^2 = \frac{3}{4}$. Эти точки образуют ($n$-2)-мерную сферу в ($n$-1)-мерном подпространстве, заданном уравнением $x_1 = \frac{1}{2}$, с центром $P(\frac{1}{2}$, 0, … , 0) и радиусом $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. О32.2).

33

1. Для подсчёта количества k-мерных граней нужно выбрать k координат. Это можно сделать C_n^k способами. Каждая из оставшихся $n - k$ координат равна 0 или a. Число способов расстановки чисел 0, a в этих координатах равно 2^{n-k}. Следовательно, число k-мерных граней у n-мерного куба равно $C_n^k 2^{n-k}$. В частности, число вершин равно 2^n, число рёбер равно $n2^{n-1}$. **2.** Длина диагонали равна расстоянию между вершинами (0, …, 0) и (1, …, 1) единичного n-мерного куба. Это расстояние равно $\sqrt{n}$. **3.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **4.** Имеем: A(0, 0, 0, 0), B(1, 0, 0, 0), G(1, 1, 1, 0), D_1(0, 1, 0, 1), G_1(1, 1, 1, 1), E_1(0, 0, 1, 1), H(0, 1, 1, 0); $\overrightarrow{AG}(1,1,1,0)$, $\overrightarrow{BD_1}(-1,1,0,1)$, $\overrightarrow{BG_1}(0,1,1,1)$, $\overrightarrow{BE_1}(-1,0,1,1)$,

$\overrightarrow{BH}(-1,1,1,0)$, Косинусы искомых углов равны: а), в) 0; б) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. **5.** Рассмотрим единичный n-мерный куб, заданный неравенствами $\begin{cases} 0 \le x_1 \le 1, \\ \quad \dots \\ 0 \le x_n \le 1. \end{cases}$ Пусть $A(0, \dots, 0)$, $B(1, \dots, 1)$. Рассмотрим вершину C, координаты которой с номерами $i_1, \dots, i_k$ равны 0, а остальные координаты равны 1. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет такие же координаты. Для вектора $\overrightarrow{BC}$ координаты с номерами $i_1, \dots, i_k$ равны 1, а остальные координаты равны 0. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ равно нулю. Следовательно, $\angle ACB = 90°$. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 1. **7.** $A_1B_1C_1D_1$, $EFGH$, $E_1F_1G_1H_1$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** Радиус описанной (n-1)-мерной сферы равен $\frac{\sqrt{n}}{2}$. При n стремящемся к бесконечности он стремится к бесконечности. **10.** $\frac{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}{2}$. **11.** Прямоугольный параллелепипед $ABCDE_1F_1G_1H_1$ (рис. О33.1).

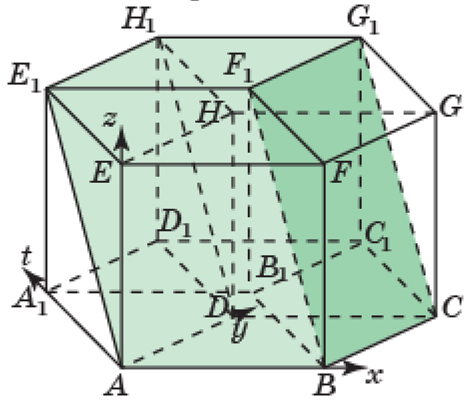


Рис. О33.1

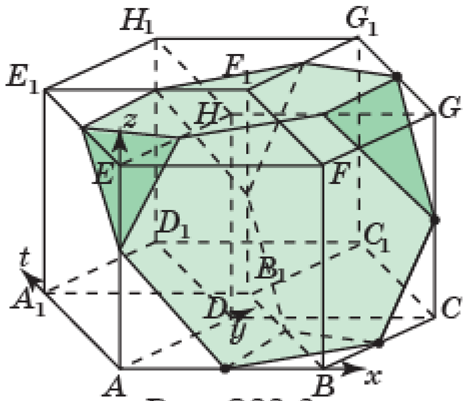


Рис. О33.2

12. Усечённый тетраэдр (рис. О33.2), гранями которого являются четыре правильных треугольника и четыре правильных шестиугольника.

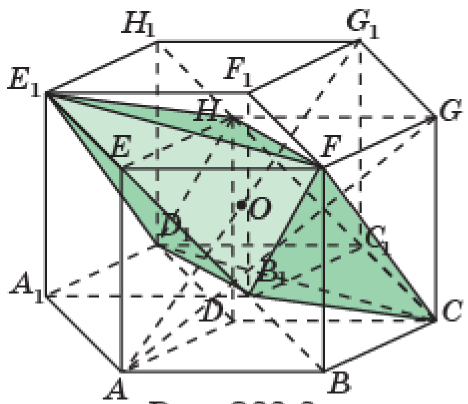


Рис. О33.3

13. Октаэдр (рис. О33.3). **14.** Рассмотрим k-мерный параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Пусть точки A', A'' принадлежат этому k-мерному параллелепипеду. Следовательно, для них выполняются равенства

$$\overrightarrow{A_0A'} = t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k},$$
$$\overrightarrow{A_0A''} = t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k},$$
где $t'_1, \dots, t'_k$, $t''_1, \dots, t''_k$ – числа, изменяющиеся от 0 до 1. Для точки A, принадлежащей отрезку $A'A''$, для некоторого t $0 \le t \le 1$) будет выполняться равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A'} + t\overrightarrow{A_0A''}$. Следовательно, для неё будут выполняться равенства
$$\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\left(t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) + t\left(t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) =$$
$$= \left((1-t)t'_1 + tt''_1\right)\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \left((1-t)t'_k + tt''_k\right)\overrightarrow{A_0A_k}.$$

Коэффициенты выражения, стоящего в правой части последнего равенства, изменяются от 0 до 1. Значит, точка A принадлежит данному k-мерному параллелепипеду. **14.** Рассмотрим n-мерный единичный куб. Пусть AB – его диагональ, AC – ребро. Тогда $AB = \sqrt{n}$, $AC = 1$, $\angle ACB = 90°$. Следовательно, косинус искомого угла BAC равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$. При n стремящемся к бесконечности величина этого угла стремится к 90°.

34

1. Для подсчёта количества k-мерных граней нужно выбрать $k + 1$ координат. Это можно сделать C_{n+1}^{k+1} способами. Следовательно, число k-мерных граней у n-мерного тетраэдра равно C_{n+1}^{k+1}. В частности, число вершин равно n+1, число рёбер равно $C_{n+1}^{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. **2.** $x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$, $x_1 + \cdots + x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** Требуемое равенство $\overrightarrow{OA} = t_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + t_{n+1}\overrightarrow{OA_{n+1}}$ можно переписать в виде системы равенств $\begin{cases} x_1 = t_1a, \\ \dots, \\ x_{n+1} = t_{n+1}a. \end{cases}$ Если для координат точки A выполняется равенство $x_1 + \dots + x_{n+1} = a$, то будет выполняться и требуемое равенство. **4.** Напомним, как находится угол, образованный соседними гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ трёхмерного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Обозначим P середину их общего ребра A_1A_2 (рис. О34.1). Прямые A_3P и A_4P будут перпендикулярны ребру A_1A_2. Искомый угол φ равен линейному углу A_3PA_4. Его косинус можно найти, используя теорему косинусов, применённую к треугольнику A_3PA_4. Он равен $\frac{1}{3}$.

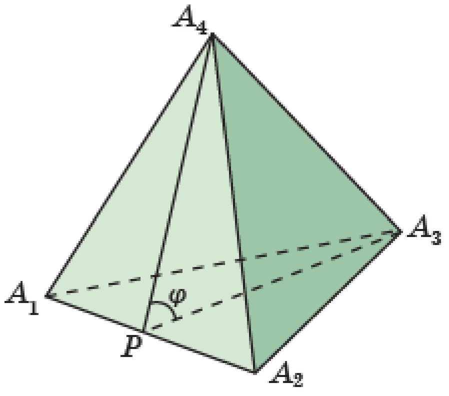


Рис. О34.1

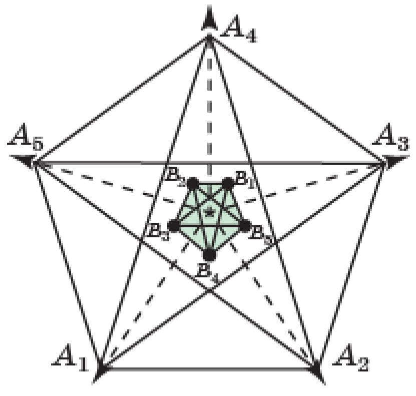


Рис. О34.2

Рассмотрим теперь n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$. В качестве его ($n$-1)-мерных граней возьмём грани, вершинами которых являются точки $A_1, \dots, A_n$ и $A_1, \dots, A_{n-1}, A_{n+1}$. Их общей ($n$-2)-мерной гранью является (n-2)-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1, \dots, A_{n-1}$. Обозначим P центр (n-3)-мерной сферы, описанной около этого (n-2)-мерного тетраэдра. Он имеет координаты $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0, 0\right)$. Прямые A_nP и $A_{n+1}P$ будут перпендикулярны общей (n-2)-мерной грани. Искомый угол φ равен углу между векторами $\overrightarrow{PA_n}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 1, 0\right)$ и $\overrightarrow{PA_{n+1}}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 0, 1\right)$. Воспользуемся формулой $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{PA_n}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}}{|\overrightarrow{PA_n}|\cdot|\overrightarrow{PA_{n+1}}|}$. Получим $\cos\varphi = \frac{1}{n}$. **5.** Рассмотрим правильный n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$. Непосредственная проверка показывает, что точка $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$ одинаково удалена от всех вершин данного n-мерного тетраэдра. Следовательно, она является центром описанной (n-1)-мерной сферы. Радиус этой (n-1)-мерной сферы равен расстоянию между точками $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$ и $A_1(1, 0, \dots, 0)$, следовательно, равен $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Искомый радиус R_n (n-1)-мерной сферы, описанной около единичного n-мерного тетраэдра, равен $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. **6.** Рассмотрим правильный n-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$, а рёбра равны $\sqrt{2}$. Заметим, что точка $P\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$, равноудалённая от вершин n-мерного тетраэдра, будет равноудалена и от его граней. Следовательно, она будет центром вписанной (n-1)-мерной сферы. Обозначим $Q\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0\right)$ центр (n-2)-мерной сферы, описанной около (n-1)-мерного тетраэдра, вершинами которого являются точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_n(0, \dots, 1, 0)$. Радиус ($n$-1)-мерной сферы, вписанной в рассмотренный n-мерный тетраэдр, равен расстоянию между точками P и Q. Найдём его, используя теорему Пифагора, применённую к прямоугольному треугольнику A_1PQ, в котором $A_1P = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $A_1Q = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Получим $PQ = \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}$. Искомый радиус r_n (n-1)-мерной сферы, вписанной в единичный n-мерный тетраэдр, равен $\sqrt{\frac{1}{2n(n+1)}}$. При n стремящемся к бесконечности он стремится к нулю. **7.** Рассмотрим правильный n-мерный тетраэдр в (n+1)-мерном пространстве, образованный всеми точками, координаты которых неотрицательны и удовлетворяют уравнению $x_1 + \dots + x_{n+1} = 1$. Его вершинами являются точки, все координаты которых, за исключением одной, равны 0, т. е. точки $A_1(1, 0, \dots, 0), \dots, A_{n+1}(0, \dots, 0, 1)$, а рёбра равны $\sqrt{2}$ (рис. О34.2). Центрами его граней являются точки

$B_1\left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, …, $B_n\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0\right)$. Расстояния между любыми двумя такими точками равно $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Следовательно, эти точки являются вершинами n-мерного тетраэдра, рёбра которого равны $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Значит, для n-мерного тетраэдра, рёбра которого равны 1, рёбра соответствующего n-мерного тетраэдра будут равны $\frac{1}{n}$. **8.** Высота h_n единичного правильного n-мерного тетраэдра равна сумме радиусов описанной и вписанной (n-1)-мерных сфер. Следовательно, имеет место равенство $h_n = R_n + r_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} + \sqrt{\frac{1}{2n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **10.** $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{n}}{2}$. **11.** $\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$, $r = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. **12.** Правильная треугольная призма (рис. О34.3). **13.** Правильный (n-1)-мерный тетраэдр (рис. О34.4).

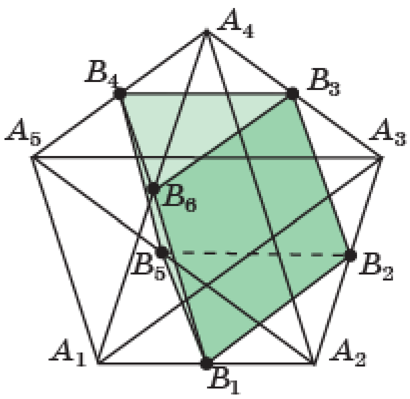


Рис. О34.3

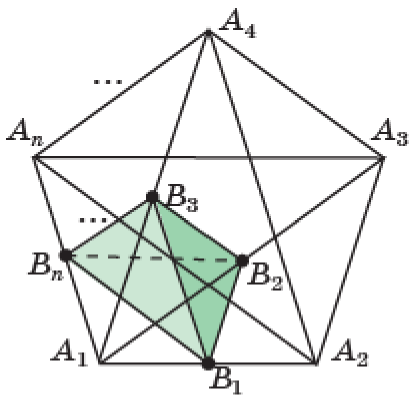


Рис. О34.4

14. Если куб задаётся системой неравенств $\begin{cases} 0 \le x_1 \le a, \\ \dots \\ 0 \le x_n \le a, \end{cases}$ то (n-1)-мерное подпространство, проходящее через концы рёбер, выходящих из вершины с координатами (0, …, 0), задаётся уравнением $x_1 + \dots + x_n = a$. Пересечением этого (n-1)-мерного подпространства и n-мерного куба является правильный (n-1)-мерный тетраэдр. На рисунке О34.5 показан трёхмерный правильный тетраэдр $BDEA_1$, являющийся сечением четырёхмерного куба.

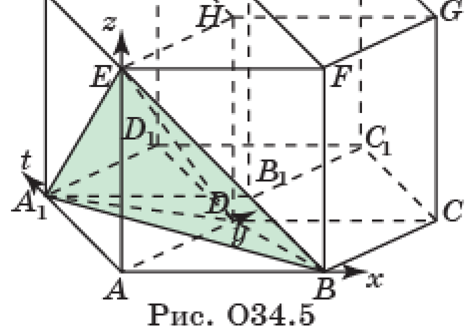


Рис. О34.5

15. Правильный (n-1)-мерный тетраэдр, подобный правильному тетраэдру из предыдущей задачи. **16.** Рассмотрим k-мерный тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Пусть точки A', A'' принадлежат этому k-мерному тетраэдру. Следовательно, для них выполняются равенства

$$\overrightarrow{A_0A'} = t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k},$$
$$\overrightarrow{A_0A''} = t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k},$$

где $t'_1, \dots, t'_k$, $t''_1, \dots, t''_k$ – неотрицательные числа, для которых $t'_1 + \cdots + t'_k \leq 1$, $t''_1 + \cdots + t''_k \leq 1$. Для точки A, принадлежащей отрезку $A'A''$, для некоторого t $(0 \leq t \leq 1)$ будет выполняться равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A'} + t\overrightarrow{A_0A''}$. Следовательно, для неё будут выполняться равенства

$$\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\left(t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) + t\left(t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) =$$
$$= \left((1-t)t'_1 + tt''_1\right)\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \left((1-t)t'_k + tt''_k\right)\overrightarrow{A_0A_k}.$$

Коэффициенты выражения, стоящие в правой части последнего равенства, неотрицательны, и их сумма равна 1. Значит, точка A принадлежит данному k-мерному тетраэдру.

35

1. $2n$. **2.** Для подсчёта количества k-мерных граней нужно выбрать $k+1$ координату. Это можно сделать C_n^{k+1} способами. Каждая из них может равняться -1 или 1. Следовательно, число k-мерных граней у n-мерного октаэдра равно $2^{k+1}C_n^{k+1}$. В частности, число вершин равно $2n$, число рёбер равно $4C_n^2 = 2n(n-1)$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** Напомним, как находится угол, образованный соседними гранями трёхмерного октаэдра. Обозначим C середину общего ребра соседних граней октаэдра, A и B – противолежащие вершины этих граней. (рис. О35.1).

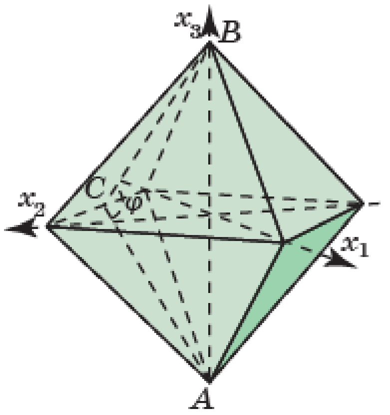


Рис. О35.1

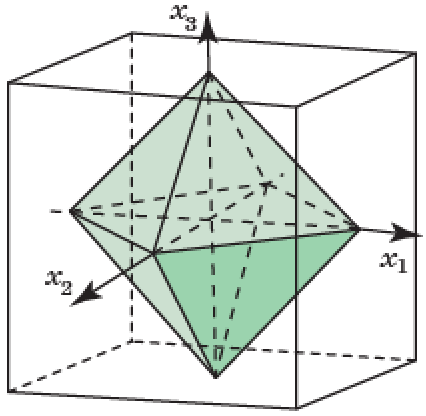


Рис. О35.2

Искомый угол φ равен линейному углу ACB. Его косинус можно найти, используя теорему косинусов, применённую к треугольнику ACB. Он равен $-\frac{1}{3}$.

Рассмотрим теперь n-мерный октаэдр, который задаётся неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$. В качестве его соседних (n-1)-мерных граней возьмём (n-1)-мерные тетраэдры, вершинами которых являются точки с координатами (1, 0, …, 0), …, (0, …, 0, 1) и (1, 0, …, 0), …, (0, …, 1, 0), (0, …, 0, -1). Их общей (n-2)-мерной гранью является (n-2)-мерный тетраэдр, вершинами которого являются точки с координатами (1, 0, …, 0), …, (0, …, 1, 0), Обозначим C центр (n-3)-мерной сферы, описанной около этого (n-2)-мерного тетраэдра. Как было доказано ранее, он имеет координаты $\left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0\right)$. Обозначим A и B точки с координатами соответственно (0, …, 0, 1) и (0, …, 0, -1). Искомый угол φ равен углу между векторами. $\overrightarrow{CA}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, 1\right)$ и $\overrightarrow{CB}\left(-\frac{1}{n-1}, \dots, -\frac{1}{n-1}, -1\right)$. Косинус этого угла равен $\frac{2-n}{n}$. **5.** На рисунке O35.2 показан куб в трёхмерном пространстве, центрами граней которого являются вершины октаэдра. Рассмотрим n-мерный куб, заданный системой неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ \dots \\ -1 \leq x_n \leq 1. \end{cases}$$

Его рёбра равны 2, а (n-1)-мерные грани состоят из точек n-мерного куба, одна из фиксированных координат которых, равна 1 или -1. Число таких (n-1)-мерных граней равно 2n. Их центрами являются точки, все координаты которых, за исключением одной фиксированной координаты, равны 0, а эта фиксированная координата равна 1 или -1. Такие точки являются вершинами n-мерного октаэдра, рёбра которого равны $\sqrt{2}$. Если рёбра n-мерного куба равны 1, то рёбра соответствующего n-мерного октаэдра будут равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** На рисунке O35.3 показан октаэдр в трёхмерном пространстве, центрами граней которого являются вершины куба.

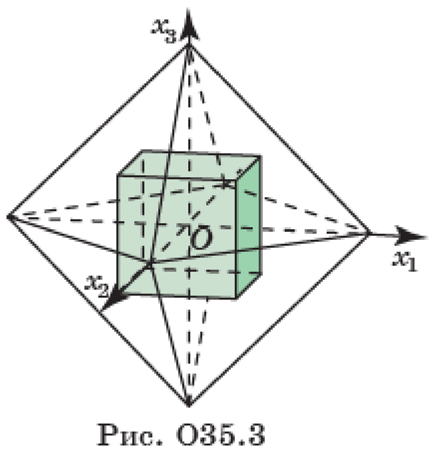


Рис. O35.3

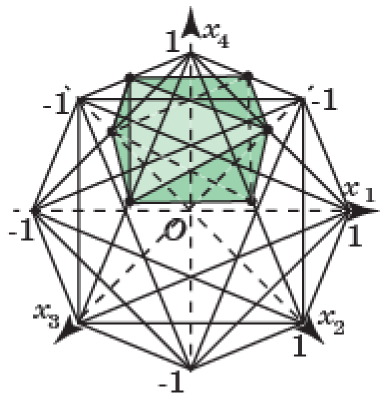


Рис. O35.4

Рассмотрим n-мерный октаэдр, заданный неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$. Его рёбра равны $\sqrt{2}$. Центрами его граней являются точки, каждая координата которых равна $\frac{1}{n}$ или $-\frac{1}{n}$. Эти точки являются вершинами n-

мерного куба, рёбра которого равны $\frac{2}{n}$. Значит, для n-мерного октаэдра, рёбра которого равны 1, рёбра соответствующего n-мерного куба будут равны $\frac{\sqrt{2}}{n}$. **7.** Центром искомой описанной (n-1)-мерной сферы является точка O(0, …, 0). Её радиус равен расстоянию от точки O до вершины с координатами (1, 0, …, 0). Он равен 1. **8.** Центром искомой вписанной (n-1)-мерной сферы является точка O(0, …, 0). Радиус этой сферы равен расстоянию от точки O до (n-1)-мерного подпространства, заданного уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Это расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Следовательно, радиус вписанной (n-1)-мерной сферы равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$. При n стремящемся к бесконечности он стремится к нулю. **9.** Пусть n-мерный октаэдр, задаётся неравенством $|x_1| + \ldots + |x_n| \leq 1$. Рассмотрим диагональ, соединяющую вершины (0, …, 0, 1) и (0, …, 0, -1). (n-1)-мерное подпространство, перпендикулярное этой диагонали и проходящее через её середину, задаётся уравнением $x_n = 0$. Искомым сечением будет (n-1)-мерный октаэдр, лежащий в этом (n-1)-мерном подпространстве и задаваемый неравенством $|x_1| + \ldots + |x_{n-1}| \leq 1$. **10.** ($n$-1)-мерный октаэдр, подобный октаэдру из предыдущей задачи. На рисунке О35.4 показан трёхмерный октаэдр, являющийся сечением четырёхмерного октаэдра. **11.** Рассмотрим n-мерный октаэдр в n-мерном пространстве, заданный неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1$. Пусть точки $A'(x'_1, \ldots, x'_n), A''(x''_1, \ldots, x''_n$ принадлежат этому n-мерному октаэдру. Следовательно, для них выполняются неравенства $|x'_1| + \cdots + |x'_n| \leq 1, |x''_1| + \cdots + |x''_n| \leq 1$. Для точки A(x_1, …, x_n), принадлежащей отрезку $A'A''$, для некоторого t $(0 \leq t \leq 1)$ будет выполняться равенство $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{OA''}$. В координатной форме это равенство можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x_1 = (1-t)x'_1 + tx''_1, \\ \ldots, \\ x_n = (1-t)x'_n + tx''_n. \end{cases}$$

Для этих координат выполняются неравенства $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq (1-t)(|x'_1| + \cdots + |x'_n|) + t(|x''_1| + \cdots + |x''_n|) \leq (1-t) + t = 1$. Следовательно, точка A принадлежит данному n-мерному октаэдру.

36

1. пусть точки A’$(x'_1, \ldots, x'_n)$ и A’’’$(x''_1, \ldots, x''_n)$ принадлежат этому (n-1)-мерному подпространству, задаваемому уравнением $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + k = 0$. Рассмотрим точку $A(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащую отрезку $A’A’’$. Её координаты выражаются формулами

$$\begin{cases} x_1 = (1-t)x'_1 + tx''_1, \\ \ldots, \\ x_n = (1-t)x'_n + tx''_n, \end{cases}$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Непосредственная подстановка показывает, что если для точек $A'(x'_1, \dots, x'_n)$ и $A'''(x''_1, \dots, x''_n)$ выполняются равенства $m_1x'_1 + \dots + m_nx'_n + k = 0$, $m_1x''_1 + \dots + m_nx''_n + k = 0$, то для точки $A(x_1, \dots, x_n)$ будет выполнятся равенство $m_1x_1 + \dots + m_nx_n + k = 0$, т. е. точка A будет принадлежать данному подпространству. **2.** Пусть Φ_i – являются выпуклыми фигурами, Φ – их пересечение. Если точки A' и A'' принадлежат Φ, то они принадлежат каждой фигуре Φ_i. В силу выпуклости фигур Φ_i, отрезок $A'A''$ содержится в каждой фигуре Φ_i. Следовательно, он содержится и в их пересечении Φ. Значит, фигура Φ выпуклая. **3.** Нет. **4.** Пусть точки A' и A'' принадлежат n-мерному шару с центром $O(0, \dots, 0)$ и радиусом R. Тогда для них выполняются неравенства $\left|\overrightarrow{OA'}\right| \le R$, $\left|\overrightarrow{OA''}\right| \le R$. Для точки A, принадлежащей отрезку $A'A''$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}$, где $0 \le t \le 1$. Воспользуемся неравенством треугольника. Получим $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|(1-t)\overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{OA''}\right| \le (1-t)\left|\overrightarrow{OA'}\right| + t\left|\overrightarrow{OA}\right| \le (1-t)R + tR = R$. Следовательно, точка A принадлежит данному n-мерному шару. Значит, этот n-мерный шар является выпуклой фигурой. **5.** Нет. **6.** Рассмотрим k-мерный параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Пусть точки A', A'' принадлежат этому k-мерному параллелепипеду. Следовательно, для них выполняются равенства

$$\overrightarrow{A_0A'} = t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k},$$
$$\overrightarrow{A_0A''} = t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k},$$

где $t'_1, \dots, t'_k$, $t''_1, \dots, t''_k$ – числа, изменяющиеся от 0 до 1. Для точки A, принадлежащей отрезку $A'A''$, для некоторого t $0 \le t \le 1)$ будет выполняться равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A'} + t\overrightarrow{A_0A''}$. Следовательно, для неё будут выполняться равенства

$$\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\left(t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) + t\left(t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) =$$
$$= \left((1-t)t'_1 + tt''_1\right)\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \left((1-t)t'_k + tt''_k\right)\overrightarrow{A_0A_k}.$$

Коэффициенты выражения, стоящего в правой части последнего равенства, изменяются от 0 до 1. Значит, точка A принадлежит данному k-мерному параллелепипеду. **7.** Рассмотрим k-мерный тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$, отложенных от одной точки. Пусть точки A', A'' принадлежат этому k-мерному тетраэдру. Следовательно, для них выполняются равенства

$$\overrightarrow{A_0A'} = t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k},$$
$$\overrightarrow{A_0A''} = t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k},$$

где $t'_1, \dots, t'_k$, $t''_1, \dots, t''_k$ – неотрицательные числа, для которых $t'_1 + \cdots + t'_k \le 1$, $t''_1 + \cdots + t''_k \le 1$. Для точки A, принадлежащей отрезку $A'A''$, для некоторого t $(0 \le t \le 1)$ будет выполняться равенство $\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\overrightarrow{A_0A'} + t\overrightarrow{A_0A''}$. Следовательно, для неё будут выполняться равенства

$$\overrightarrow{A_0A} = (1-t)\left(t'_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t'_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) + t\left(t''_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots t''_k\overrightarrow{A_0A_k}\right) =$$
$$= \left((1-t)t'_1 + tt''_1\right)\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \left((1-t)t'_k + tt''_k\right)\overrightarrow{A_0A_k}.$$

Коэффициенты выражения, стоящие в правой части последнего равенства, неотрицательны, и их сумма равна 1. Значит, точка A принадлежит данному k-мерному тетраэдру. **8.** n-мерный октаэдр в n-мерном пространстве, заданный неравенством $|x_1| + \cdots + |x_n| \le 1$, можно задать как пересечение n-мерных полупространств, задаваемых неравенствами, одним из которых является неравенство $x_1 + \cdots + x_n \le 1$. Остальные неравенства получаются этого неравенства расстановкой знаков + или – перед $x_1, \ldots, x_n$. **9.** $\begin{cases} |x_1| + \cdots + |x_n| \le n-1 \\ |x_1| \le 1, \ldots, |x_1| \le 1. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \le R^2, \\ 0 \le x_n \le h. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \frac{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}}{R} + \frac{x_n}{h} \le 1, \\ x_n \ge 0. \end{cases}$

37*

1. В определителе $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ вычтем из первой строки вторую, из второй строки – третью, из третьей строки – четвёртую, из четвёртой - пятую. Получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, равный исходному. Он равен 5. **2.** (1, 1, 1, -2). **3.** -3. **4.** $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$. **5.** $x_1 + \ldots + x_n = n - 1$. **12.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, |A \cdot B| = |B \cdot A| = 36, |A| = -18, |B| = -2.$

38*

1. $\overrightarrow{b_1}(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{b_2}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{b_3}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, **2.** 9. **3.** $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. **4.** $\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$. **5.** $\sqrt{n-2}$. **6.** $\sqrt{n-1}$. **7.** $\sqrt{n-2}$. **8.** Объём n-мерного параллелепипеда равен модулю смешанного произведения соответствующих векторов. Если вершины n-мерного параллелепипеда имеют целые координаты, то эти векторы тоже имеют целые координаты. Значит, их смешанное произведение является целым числом. Следовательно, его модуль является натуральным числом. **9.** $n - 1$. **10.** $\frac{1}{n!}$. **11.** $\frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$. **12.** $\frac{2^n}{n!}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ