О ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКАХ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
i-m-smirnova@yandex.ru

Аннотация: в работе рассматриваются формулировки и доказательства теорем о вписанных и описанных четырёхугольниках, имеющихся в школьных учебниках геометрии. Указываются на некоторые их недостатки, и предлагаются пути их устранения.

Ключевые слова: вписанные и описанные четырёхугольники, необходимые и достаточные условия.

ABOUT INSCRIBED AND DESCRIBED QUADRILATERALS

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Abstract: the paper examines the formulations and proofs of theorems on inscribed and circumscribed quadrilaterals found in school geometry textbooks. Some of their shortcomings are pointed out and ways to eliminate them are suggested.

Keywords: inscribed and described quadrilaterals, necessary and sufficient conditions.

Тема «Вписанные и описанные многоугольники» является одной из основных в курсе геометрии 7-9 классов. На базовом уровне рассматриваются вписанные и описанные треугольники и правильные многоугольники. Доказываются теоремы о том, что:

- в любой треугольник можно вписать окружность;
- около любого треугольника можно описать окружность;
- в любой правильный многоугольник можно вписать окружность;
- около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

На углублённом уровне, кроме этого, рассматриваются вписанные и описанные четырёхугольники. Доказываются теоремы о том, что:

- в четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих углов равны.
- около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны.

Здесь мы рассмотрим формулировки и доказательства теорем о вписанных и описанных четырёхугольниках, имеющиеся в школьных учебниках [1]–[6], укажем на некоторые их недостатки и предложим пути их устранения.

Начнём с теоремы о вписанном четырёхугольнике. Например, в учебнике [2] предлагается следующие формулировка и доказательство этой теоремы.

Теорема. В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Доказательство. Пусть четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность (рис. 1).

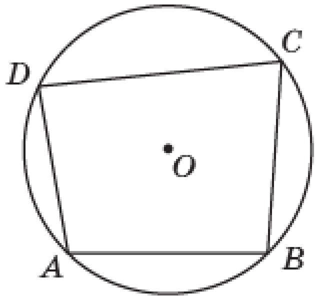

Рис. 1

Поскольку углы A и C являются вписанными, то $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$ и $\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$. Имеем: $\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{DAB} = 360°$. Тогда $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогично можно показать, что $\angle B + \angle D = 180°$.

Заметим, что это доказательство зависит от теоремы о вписанном угле, следовательно, и от аксиомы параллельных. - в любой правильный многоугольник можно вписать окружность;
- около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Конечно, на базовом уровне обучения этих формулировки и доказательства вполне достаточно. Для углублённого уровня обучения предложим формулировку и доказательство этой теоремы, которые, по сравнению с приведёнными, не использует теорему о вписанном угле и аксиому параллельных. Значит, они могут быть распространены на четырёхугольники в геометрии Лобачевского, сферические четырёхугольники на сфере и четырёхгранные углы в пространстве.

Теорема. В любом вписанном четырёхугольнике суммы противолежащих углов равны.

Доказательство. Пусть четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Обозначим *E*, *F*, *G*, *H* середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD*, *AD*. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам этого четырёхугольника. Они пересекутся в центре *O* описанной окружности. Предположим, что точка *O* лежит внутри этого четырёхугольника *ABCD*. Соединим её отрезками с вершинами четырёхугольника.

Треугольники *OAE* и *OBE* равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle OAE = \angle OBE$. Аналогично доказывается, что $\angle OBE = \angle OCF$, $\angle OCG = \angle ODG$, $\angle ODH = \angle OAH$. Если точка O лежит внутри четырёхугольника (рис. 2), то bз этих равенств следуют равенства $\angle A + \angle C = \angle OAE + \angle OAH + \angle OCF + \angle OCG = \angle OBE + \angle ODH + \angle OBF + \angle ODG = \angle B + \angle D$.

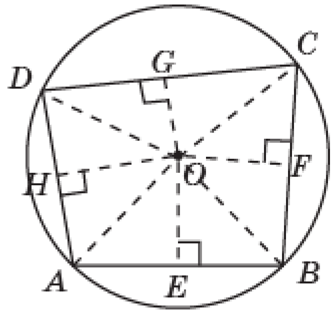

Рис. 2

Аналогичным образом рассматривается случай, когда центр O окружности лежит вне четырёхугольника.

Заметим, что если аксиома параллельных имеет место, то из этой теоремы и формулы для суммы углов выпуклого четырёхугольника непосредственно следует, что суммы противолежащих углов вписанного четырёхугольника равны 180°.

Рассмотрим теперь следующую теорему об описанном четырёхугольнике.

Теорема. Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность,

Отметим, что в школьных учебниках геометрии [1]–[6] доказательства этой теоремы или отсутствуют (учебники [1, 4, 5]), или содержат пробелы и необоснованные выводы (учебники [2, 3, 6]).

Приведём, например, доказательство этой теоремы, предлагаемое в учебнике [3].

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность. Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O. Тогда точка O равноудалена от сторон AD, AB и BC. Следовательно, существует окружность с центром O, которая касается этих трёх сторон. Предположим, что эта окружность не касается стороны CD (рис. 3).

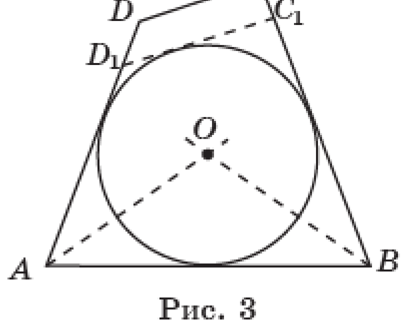

Рис. 3

Тогда возможны два случая.

Случай 1. Сторона CD не имеет общих точек с построенной окружностью.

Случай 2. Сторона CD имеет две общие точки с построенной окружностью.

В обоих случаях проведём касательную C_1D_1 параллельно стороне CD. Четырёхугольник ABC_1D_1 описанный. Тогда для него имеет место равенство $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. По условию имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$. Вычтем из второго равенства первое. Получим $CD = CC_1 + C_1D_1 + D_1D$, которое противоречит теореме о длине ломаной.

Аналогичные доказательства предлагаются в учебниках [2], [6].

Обратим внимание на то, что из того, что точка O является пересечением биссектрис углов A и B четырёхугольника $ABCD$, не следует, что она равноудалена от его сторон AD, AB и BC. Следует только, что она равноудалена от прямых AD, AB и BC.

Не следует также, что можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон. Она может касаться продолжения сторон AD и BC. Соответствующий пример приведён на рисунке 4.

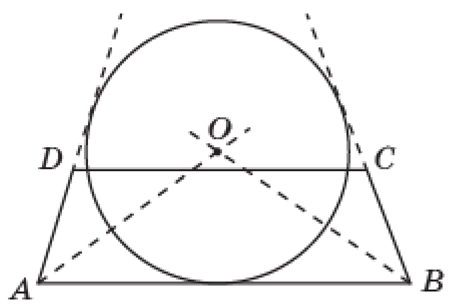

Рис. 4

Конечно, в условиях теоремы так быть не может. Однако это нужно доказывать.

Рассмотрение случаев расположения стороны CD и окружности не обосновано. Такие случаи относятся к взаимному расположению прямой и окружности, а не к отрезку и окружности. Для отрезка могут быть и другие случаи.

В приведённом доказательстве нигде не используется выпуклость четырёхугольника, без которого данное утверждение неверно. Соответствующий пример приведён на рисунке 5.

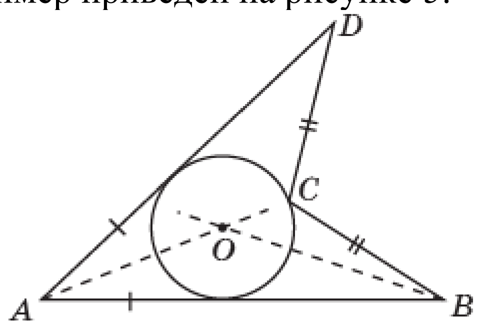

Рис. 5

Приведём уточнение доказательства данной теоремы.

Доказательство. Пусть для выпуклого четырёхугольнике $ABCD$ выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность.

Если для каждой его стороны сумма прилежащих к ней углов равна 180°, то этот четырёхугольник – параллелограмм, а если у него суммы противолежащих сторон равны, то этот параллелограмм – ромб. Значит, в него можно вписать окружность.

В противном случае рассмотрим сторону, для которой сумма прилежащих к ней углов меньше 180°. Пусть это будет сторона AB. Тогда лучи AD и BC пересекаются в некоторой точке E (рис. 6).

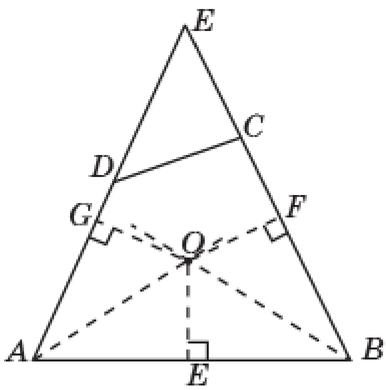

Рис. 6

Из выпуклости четырёхугольника $ABCD$ следует, что точки C и D принадлежат соответственно отрезкам BE и AE. Проведём биссектрисы углов A и B. Обозначим O точку их пересечения. Она будет центром окружности, вписанной в треугольник ABE. Обозначим r радиус этой окружности, d расстояние от точки O до прямой CD. Докажем, что $d = r$. Предположения, что $d > r$ (рис. 7).

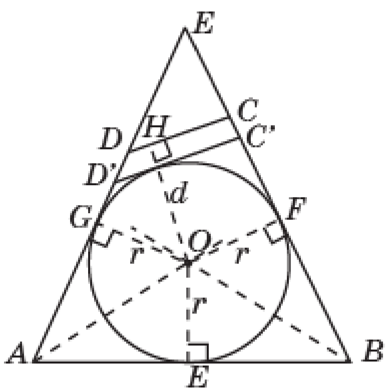

Рис. 7

Проведём прямую, параллельную прямой CD, находящуюся от точки O на расстояние r. Она будет касательной к окружности. Обозначим

C', *D'* точки пересечения этой прямой соответственно с отрезками *BE* и *AE*. Тогда окружность будет вписана в четырёхугольник *ABC'D'*. Следовательно, будет выполняться равенство *AB* + *C'D'* = *BC'* + *AD'*. По условию, выполняется равенство *AB* + *CD* = *BC* + *AD*. Вычитая из второго равенства первое и преобразуя его, получаем равенство *CD* = *C'D'* + *C'C* + *A'D*, которое противоречит теореме о длине ломаной.

Аналогичным образом доказывается, что не может выполняться неравенство $d < r$. Следовательно, выполняется равенство $d = r$, из которого следует, что окружность касается прямой *CD* (рис. 8).

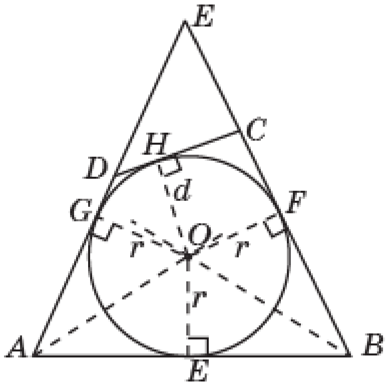

Рис. 8

Так как окружность содержится в треугольнике *ABE*, то точка касания будет принадлежать отрезку *CD*. Значит, окружность будет вписанной в четырёхугольник *ABCD*.

Список источников

1. Александров А. Д. и др. Геометрия. 9 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2014.
2. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2024.
3. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Геометрия. 8 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2021.
4. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2022.
5. Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия. 8 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2022.
6. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2022.