Смирнов В.А., Смирнова И.М.

ГЕОМЕТРИЯ

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

2015

Введение

Данное пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать задачи на доказательство по геометрии. Оно содержит около четырехсот задач, решение которых не только способствует выработке соответствующих умений и навыков, но, что более важно, развивает логическое мышление, учит рассуждать, анализировать, аргументировать, обосновывать, доказывать.

Утверждения, сформулированные в пособии в виде задач на доказательство, могут быть использованы при решении различных вычислительных задач, а сами доказательства при этом будут являться частью их решений.

Все задачи разбиты на три уровня: A, B и C. Задачи уровня A представляют собой теоремы основного курса геометрии, доказательства которых имеются в школьных учебниках по геометрии Федерального перечня. Они направлены на повторение геометрического материала, необходимого для решения последующих задач.

Задачи уровня B, как правило, предполагают непосредственное применение основных теорем геометрии. Они носят подготовительный характер для решения более трудных задач на доказательство.

Уровень C содержит задачи на доказательство повышенной трудности. Основные проблемы при решении задач этого уровня связаны не столько с незнанием необходимых свойств и теорем геометрии, сколько с неумением их применять для решения конкретных задач. Предлагаемые в пособии задачи позволяют преодолеть эти трудности, учат применять полученные знания на практике.

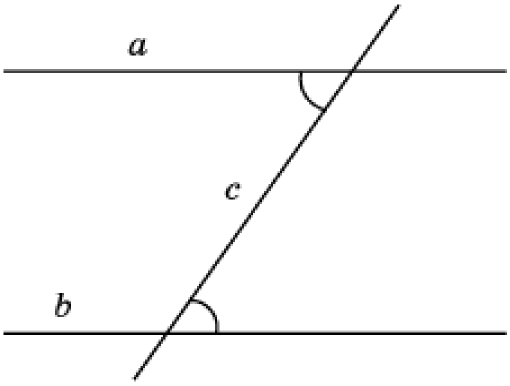
Все задачи сопровождаются рисунками, помогающими лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, при необходимости провести дополнительные построения, наметить план доказательства.

Во второй части пособия даются решения всех задач.

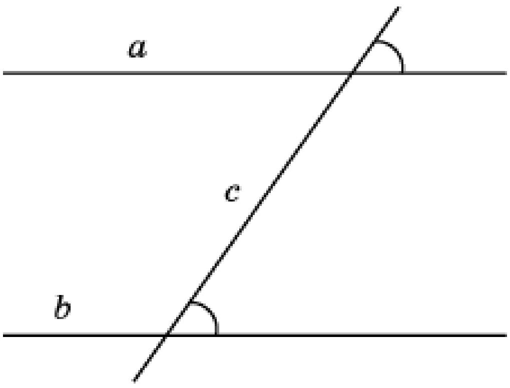
1. Параллельность и перпендикулярность

Уровень А

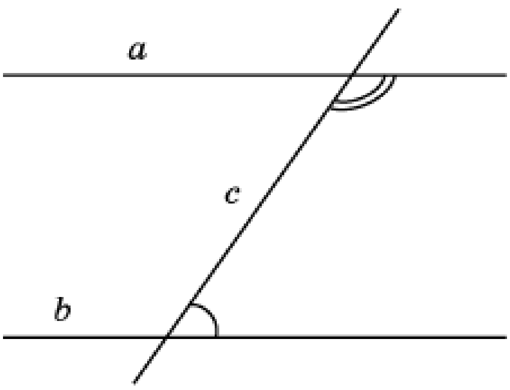
1. Докажите, что если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.



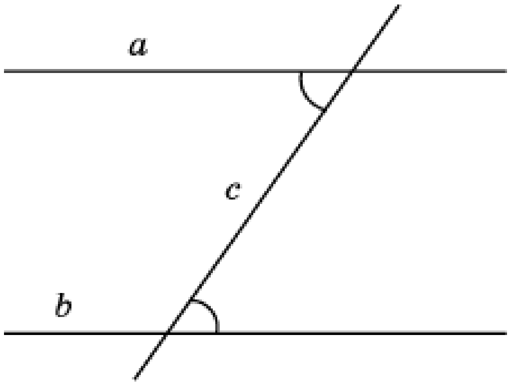
2. Докажите, что если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.



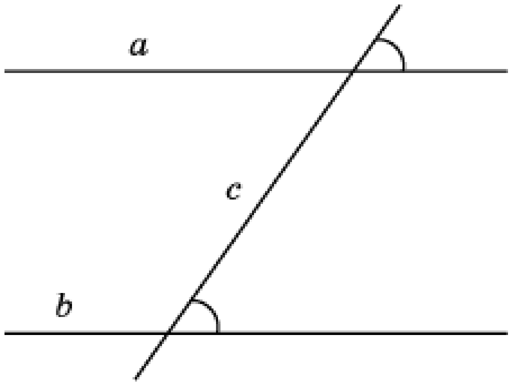
3. Докажите, что если при пересечении двух прямых третьей прямой односторонние углы составляют в сумме 180°, то эти две прямые параллельны.



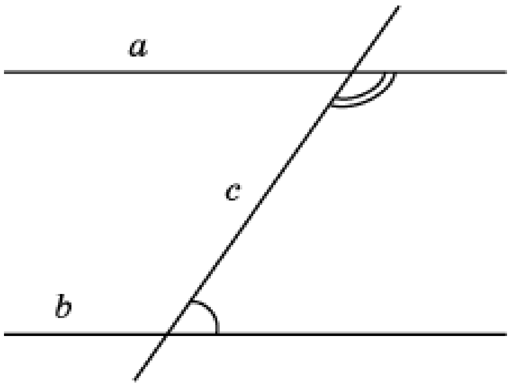
4. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны.



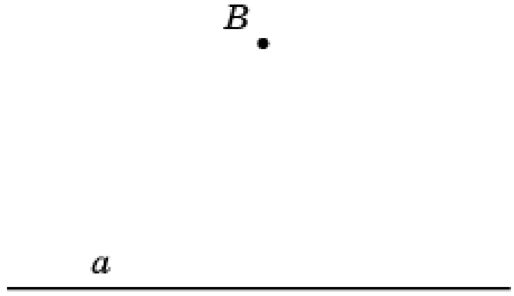
5. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.



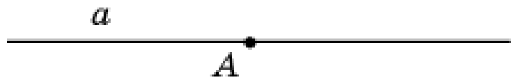
6. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то односторонние углы в сумме составляют 180°.



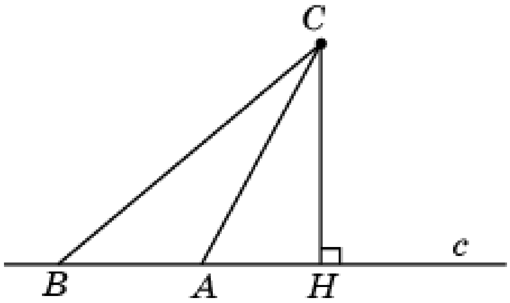
7. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, перпендикулярная этой прямой.



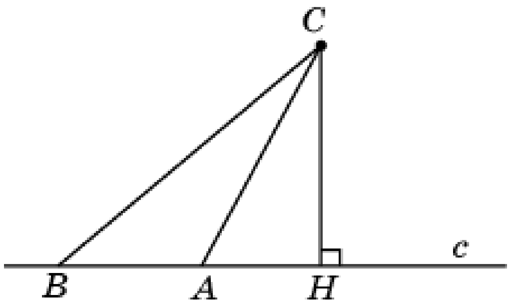
8. Докажите, что через точку, принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, перпендикулярная этой прямой.



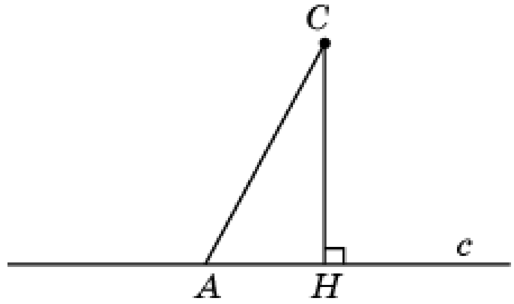
9. Докажите, что из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше.



10. Докажите, что из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, большая наклонная имеет большую проекцию.

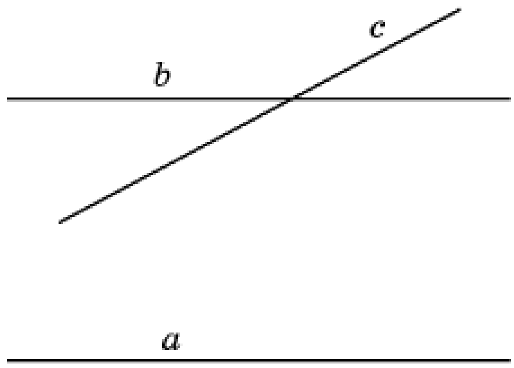


11. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к той же прямой.

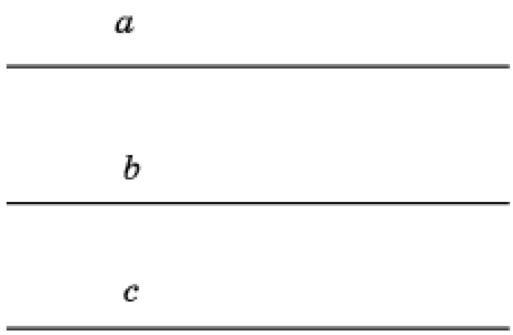


Уровень В

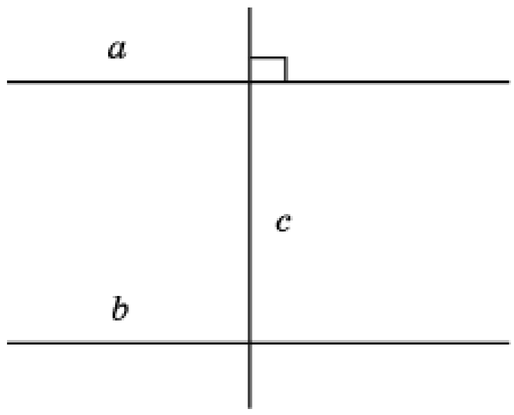
1. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



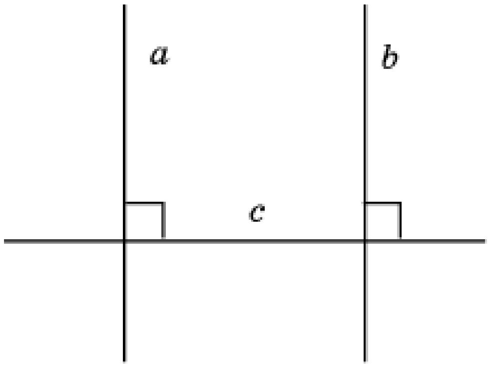
2. Докажите, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



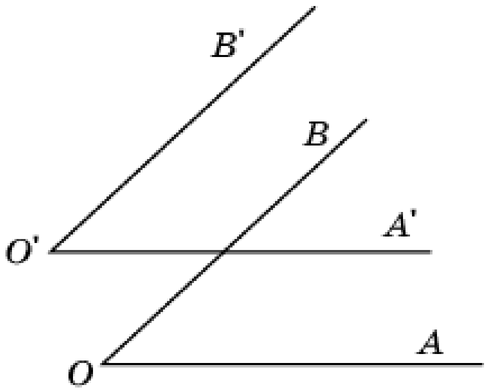
3. Докажите, что прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой.



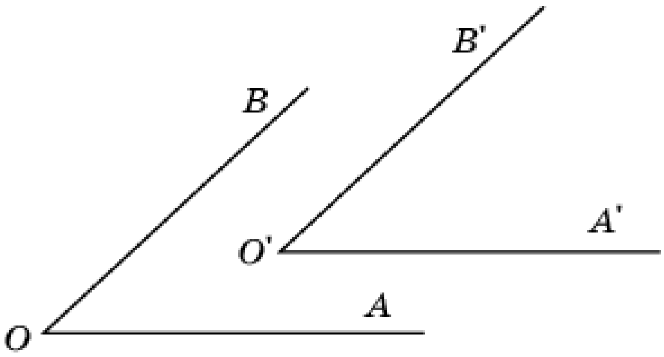
4. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.



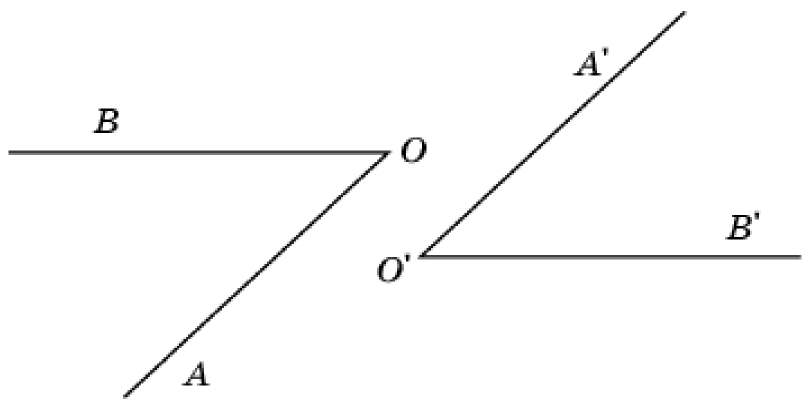
5. Докажите, что углы *AOB* и *A'O'B'* с соответственно параллельными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



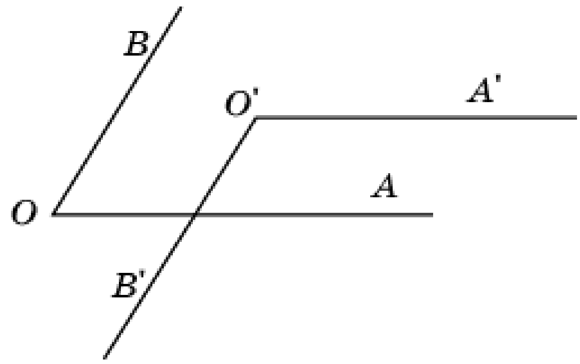
6. Докажите, что углы *AOB* и *A'O'B'* с соответственно параллельными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



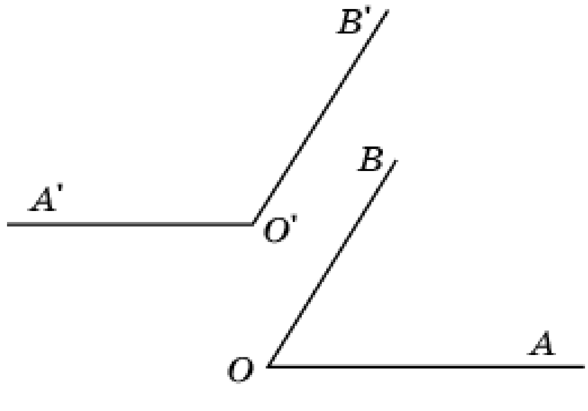
7. Докажите, что углы *AOB* и *A'O'B'* с соответственно параллельными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



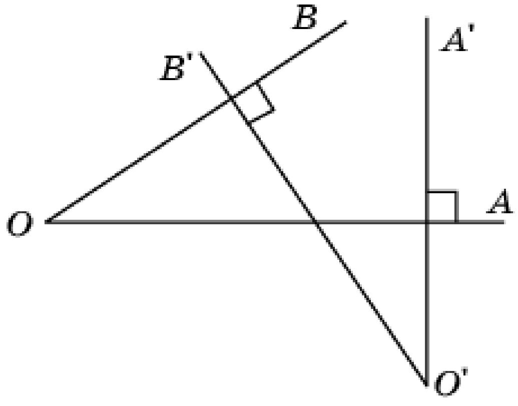
8. Докажите, что углы *AOB* и *A'O'B'* с соответственно параллельными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, в сумме составляют $180°$.



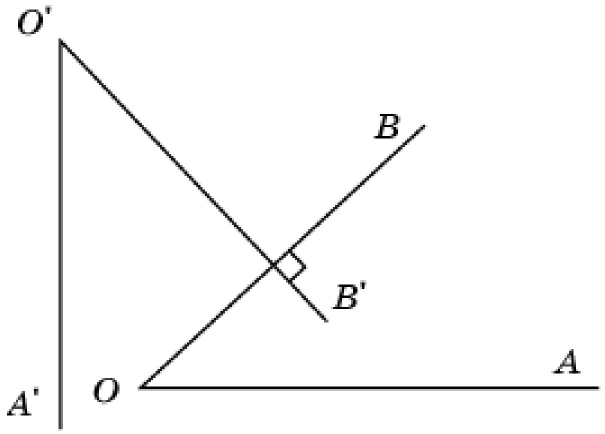
9. Докажите, что углы *AOB* и *A'O'B'* с соответственно параллельными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, в сумме составляют $180°$.



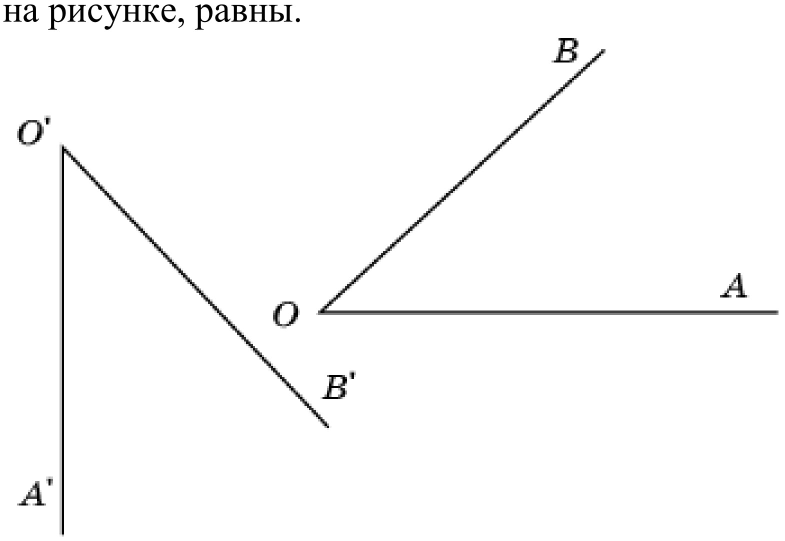
10. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



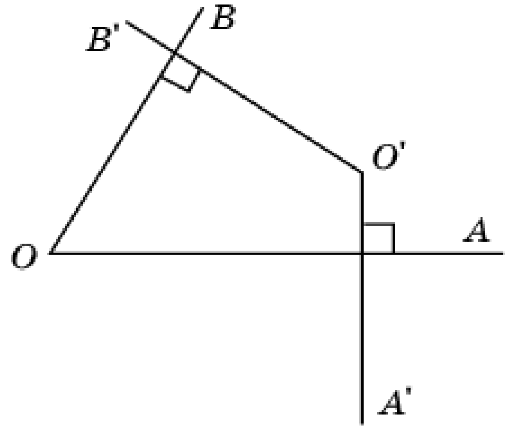
11. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



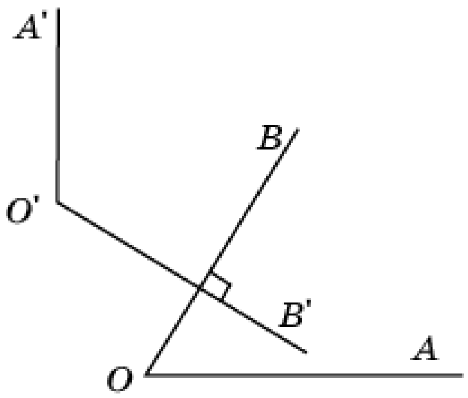
12. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, равны.



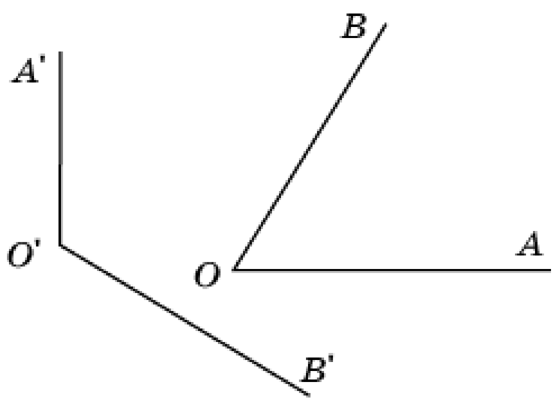
13. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, в сумме составляют $180°$.



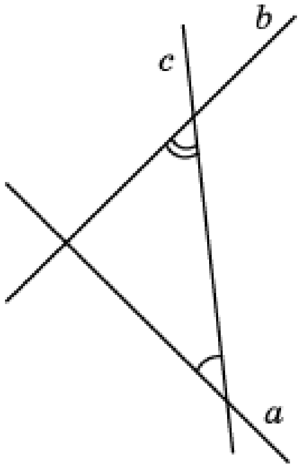
14. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, в сумме составляют $180°$.



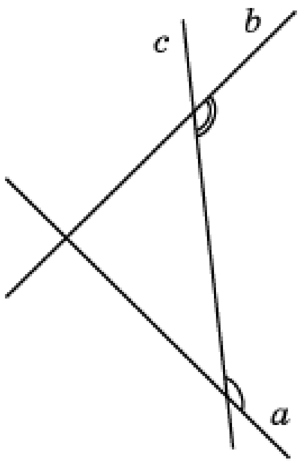
15. Докажите, что углы AOB и $A'O'B'$ с соответственно перпендикулярными сторонами, расположенные так, как показано на рисунке, в сумме составляют $180°$.



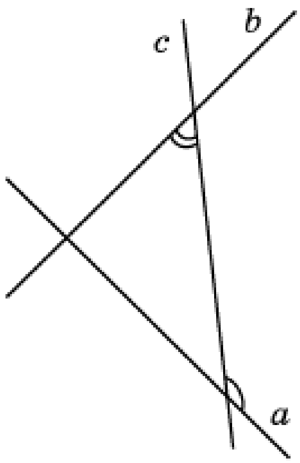
16. Прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что если при этом сумма односторонних углов равна 90^o, то прямые a и b перпендикулярны.



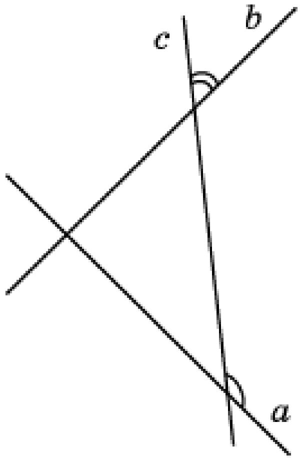
17. Прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что если при этом сумма односторонних углов равна 270^o, то прямые a и b перпендикулярны.



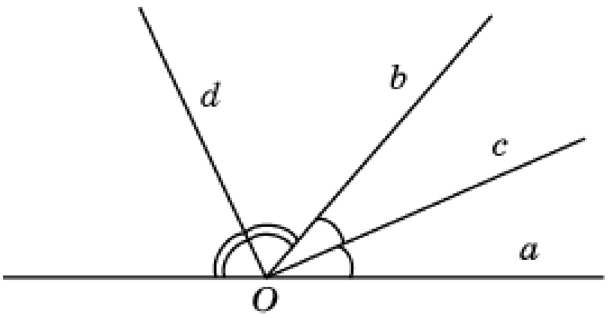
18. Прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что если при этом разность накрест лежащих углов равна 90^o, то прямые a и b перпендикулярны.



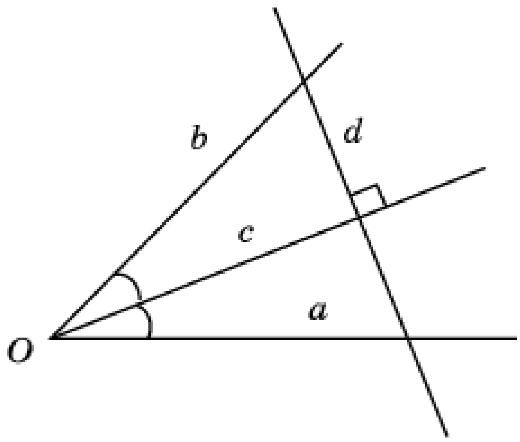
19. Прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что если при этом разность соответственных углов равна 90°, то прямые a и b перпендикулярны.



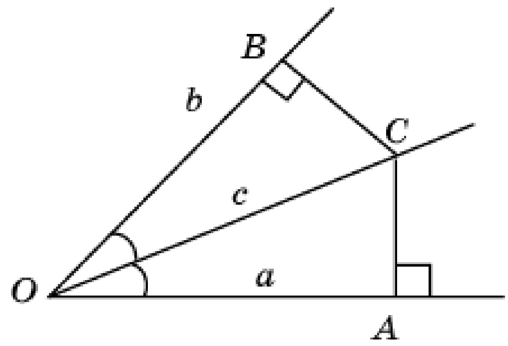
20. Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



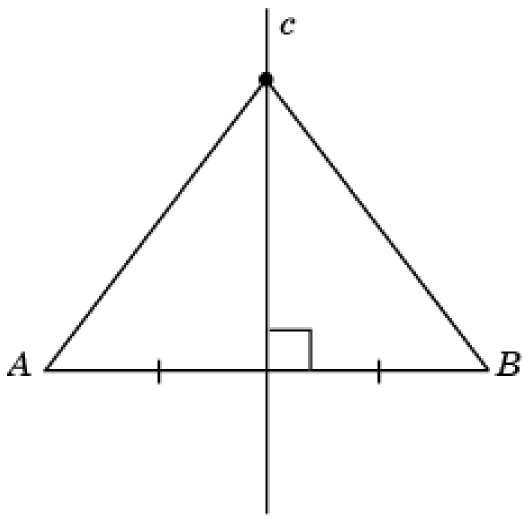
21. Докажите, что прямая, пересекающая стороны угла и перпендикулярная его биссектрисе, отсекает от сторон этого угла равные отрезки.



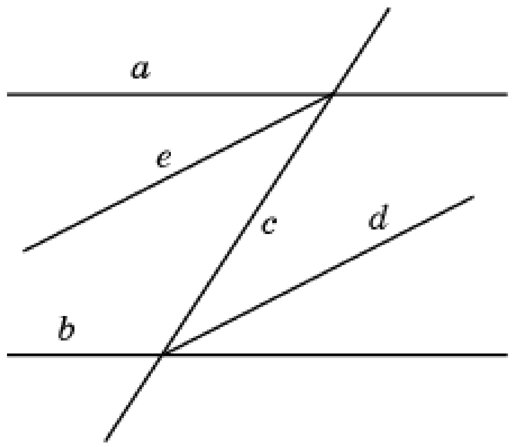
22. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки, принадлежащей биссектрисе угла, на его стороны, равны.



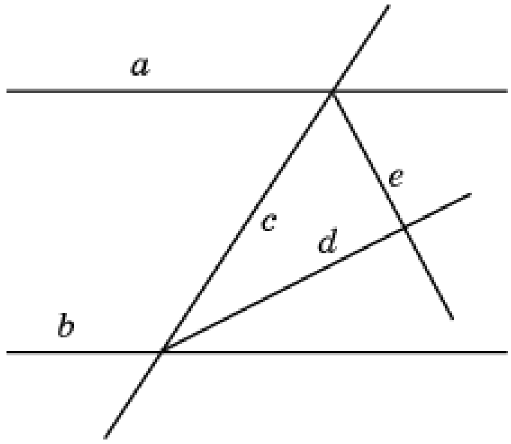
23. Докажите, что любая точка прямой, проведенной перпендикулярно к отрезку через его середину, одинаково удалена от концов данного отрезка.



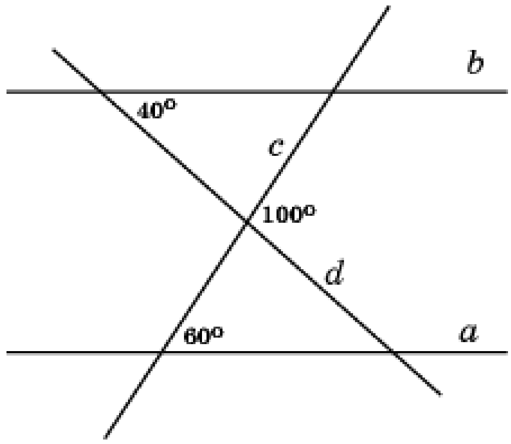
24. Докажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.



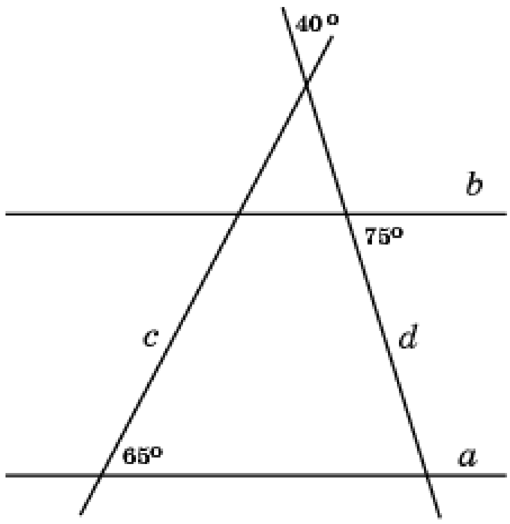
25. Докажите, что биссектрисы односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, перпендикулярны, т.е. лежат на перпендикулярных прямых.



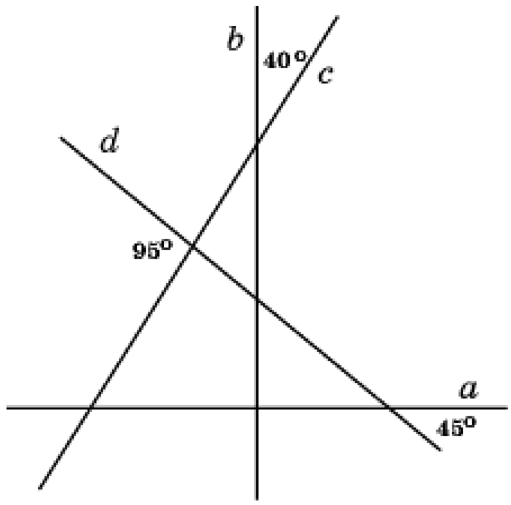
26. Докажите, что прямые *a* и *b*, изображенные на рисунке, параллельны.



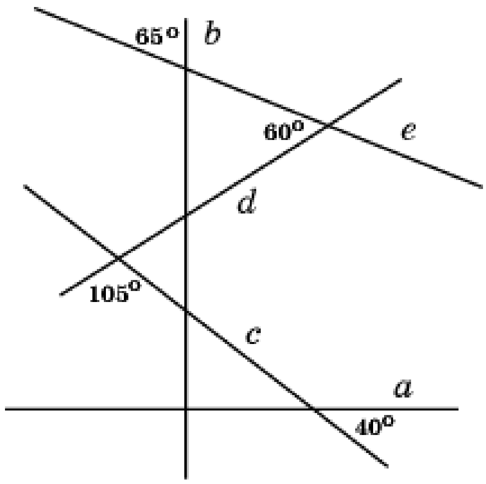
27. Докажите, что прямые *a* и *b*, изображенные на рисунке, параллельны.



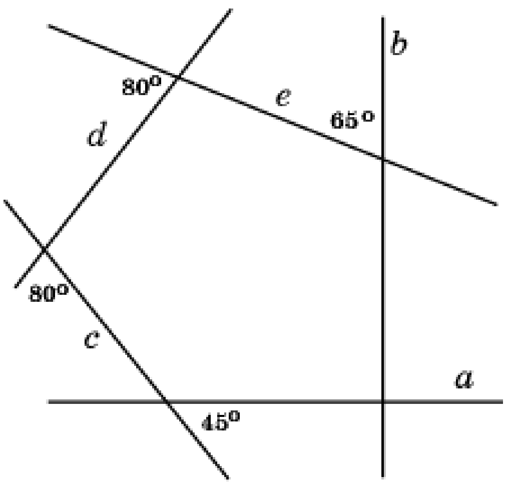
28. Докажите, что прямые *a* и *b*, изображенные на рисунке, перпендикулярны.



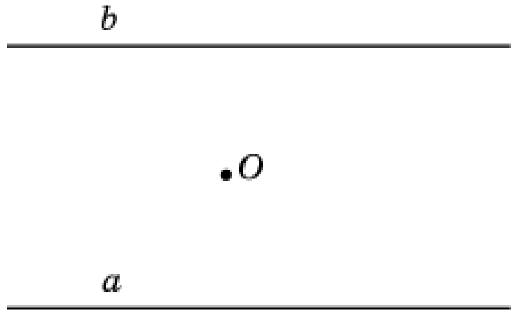
29. Докажите, что прямые *a* и *b*, изображенные на рисунке, перпендикулярны.



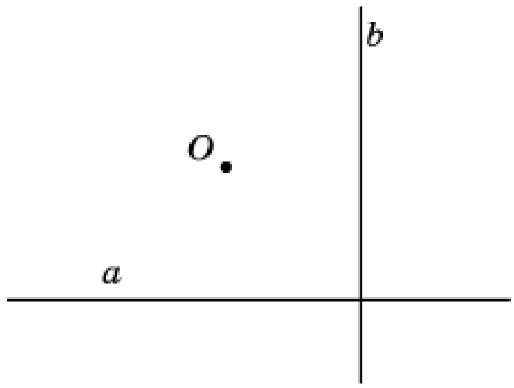
30. Докажите, что прямые *a* и *b*, изображенные на рисунке, перпендикулярны.



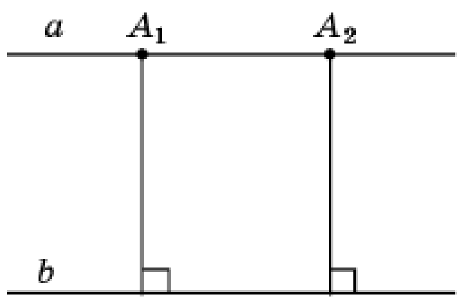
31. Докажите, что центрально-симметричные прямые параллельны.



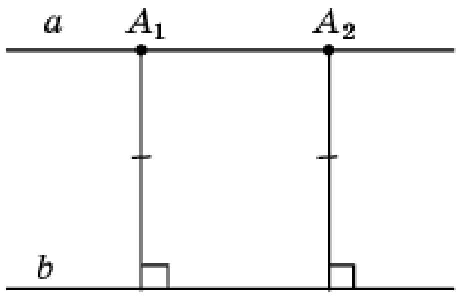
32. Докажите, что прямые a и b, одна из которых получена поворотом другой вокруг некоторой точки O на угол 90°, перпендикулярны.



33. Докажите, что если две прямые параллельны, то расстояния от точек одной прямой до другой равны.



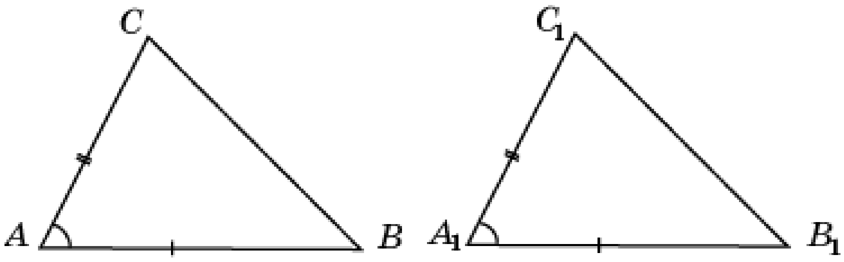
34. Докажите, что если расстояния от двух точек одной прямой до другой прямой равны, то эти прямые параллельны.



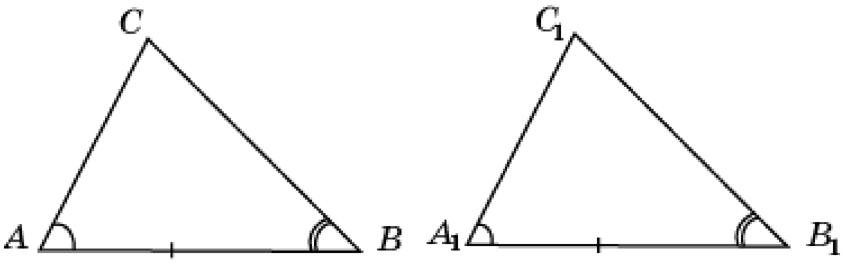
2. Равенство треугольников

Уровень А

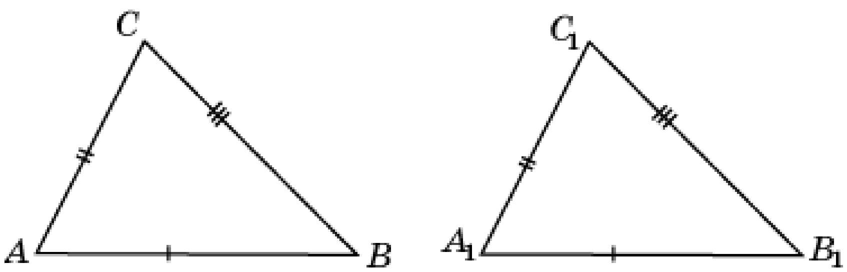
1. Докажите, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



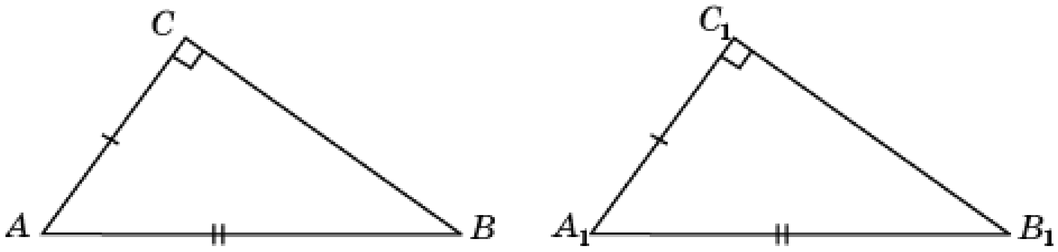
2. Докажите, что если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



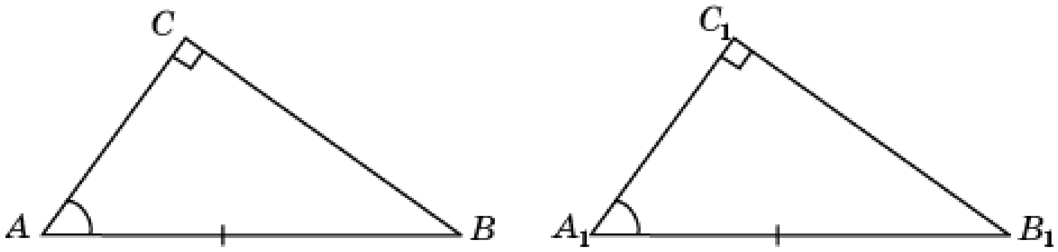
3. Докажите, что если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



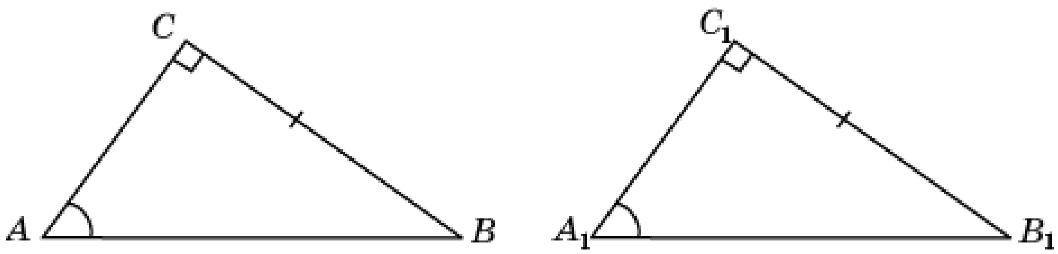
4. Докажите, что если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



5. Докажите, что если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

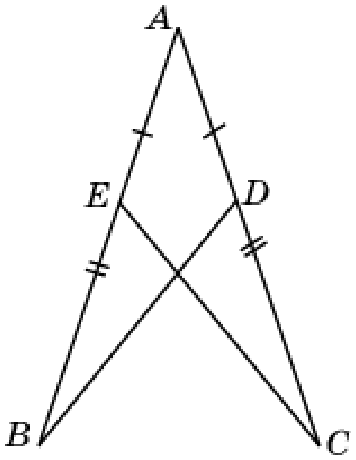


6. Докажите, что если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

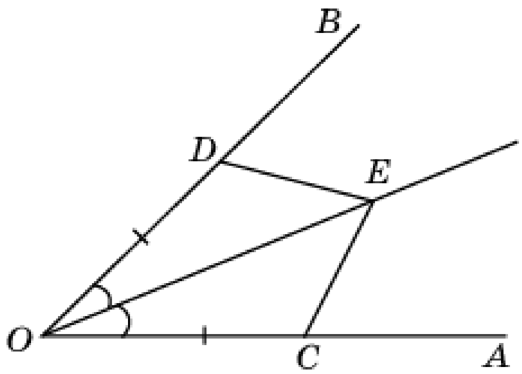


Уровень В

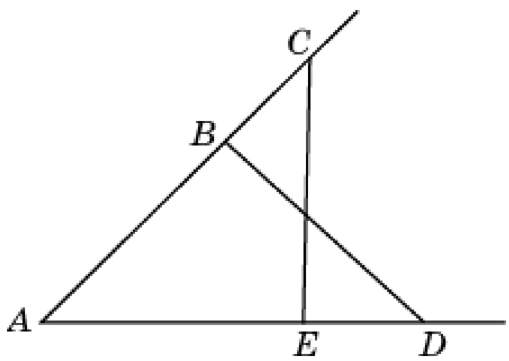
1. На рисунке $AB=AC$, $AE=AD$. Докажите, что $BD=CE$.



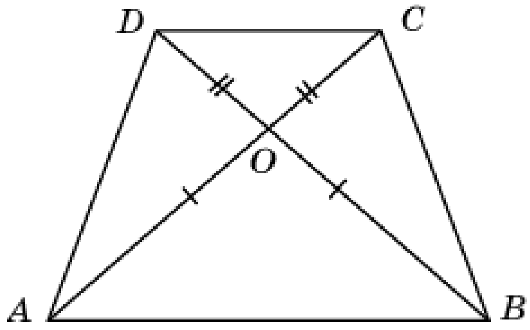
2. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD. Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D. Докажите, что $EC = ED$.



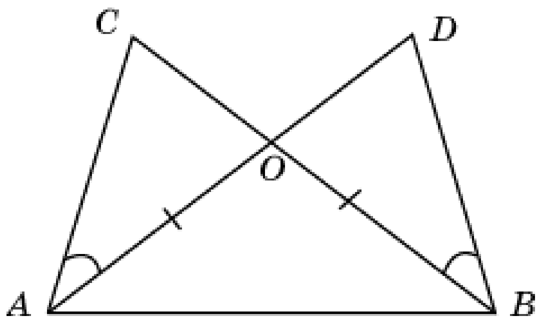
3. На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B прилежит стороне AC, а точка E – стороне AD, причем, $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.



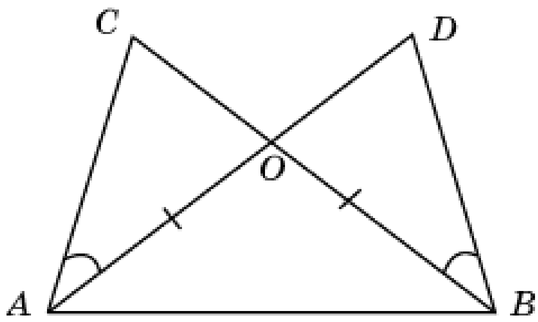
4. На рисунке $AO = OB$ и $DO = OC$. Докажите равенство отрезков AD и BC.



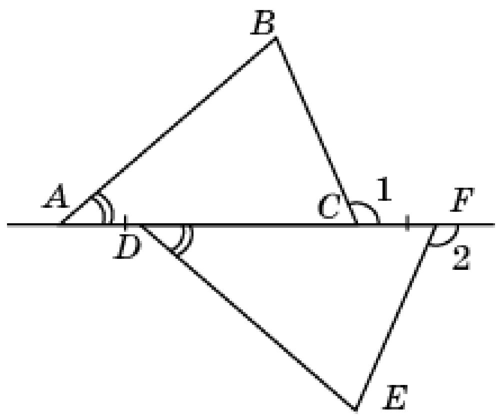
5. На рисунке $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$.



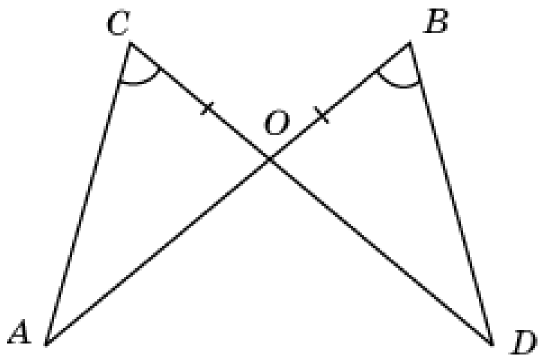
6. На рисунке $\angle DBC = \angle DAC$, $BO = AO$. Докажите, что $AC = BD$.



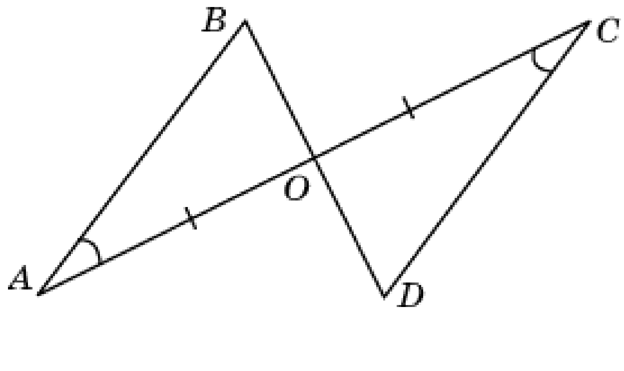
7. На рисунке дана фигура, у которой $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle BAC = \angle EDF$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.



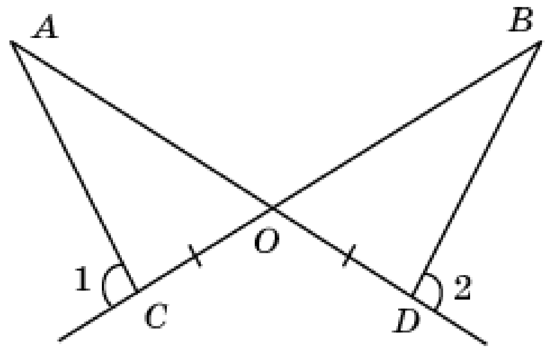
8. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $OB = OC$ и $\angle B = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOC и DOB.



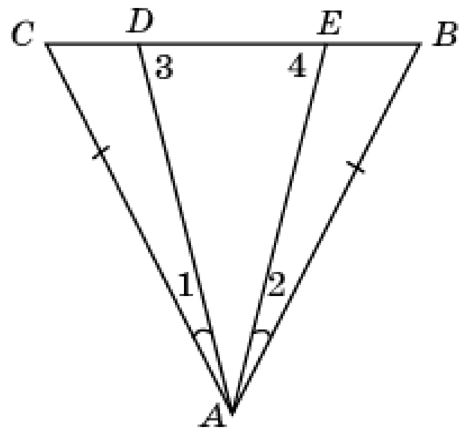
9. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, $AO = OC$ и $\angle A = \angle C$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.



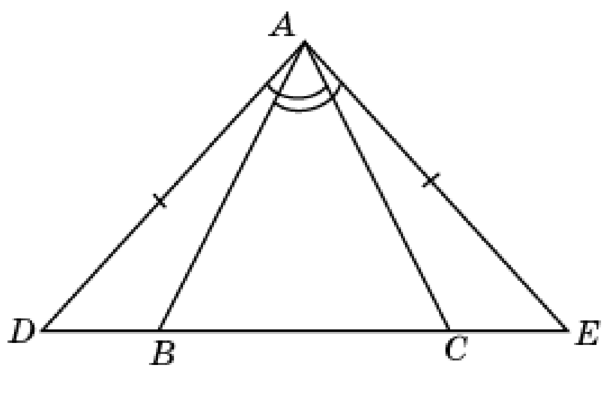
10. Лучи AD и BC пересекаются в точке O, $\angle 1 = \angle 2$, $OC = OD$. Докажите, что $OA = OB$.



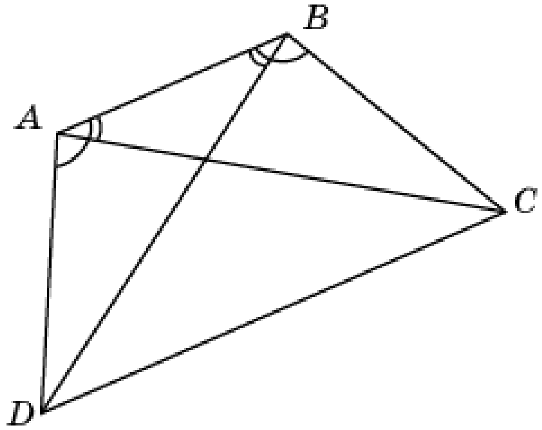
11. В треугольнике ABC $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.



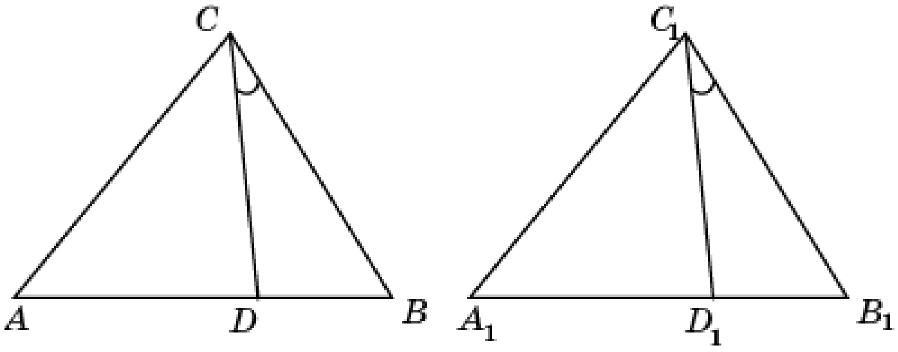
12. На рисунке $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Докажите, что $BD = CE$.



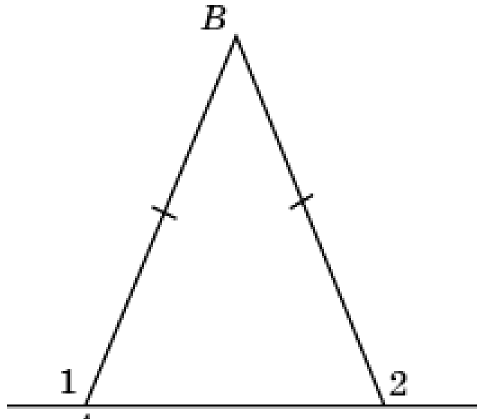
13. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = \angle CBA$ и диагонали AC и BD образуют со стороной AB равные углы. Докажите, что $AC = BD$.



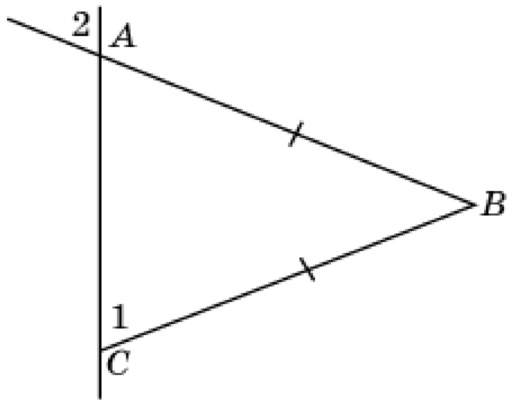
14. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Отрезки CD и C_1D_1 образуют со сторонами соответственно CB и C_1B_1 равные углы. Докажите, что $AD = A_1D_1$.



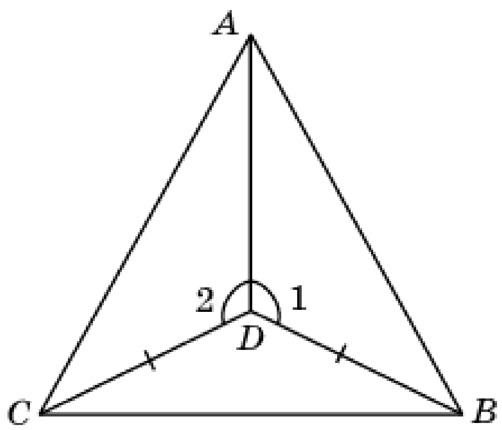
15. В треугольнике ABC $AB = BC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.



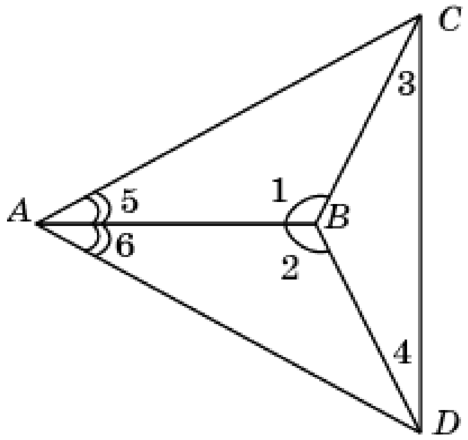
16. В треугольнике ABC $AB = BC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.



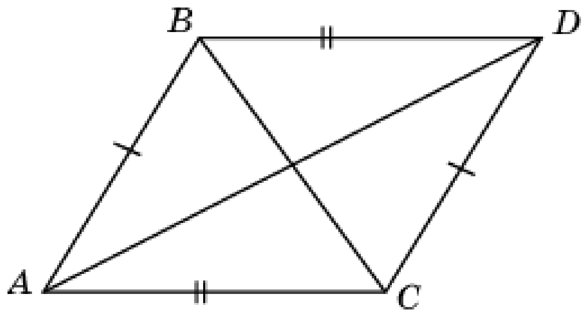
17. На рисунке $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle ACB = \angle ABC$.



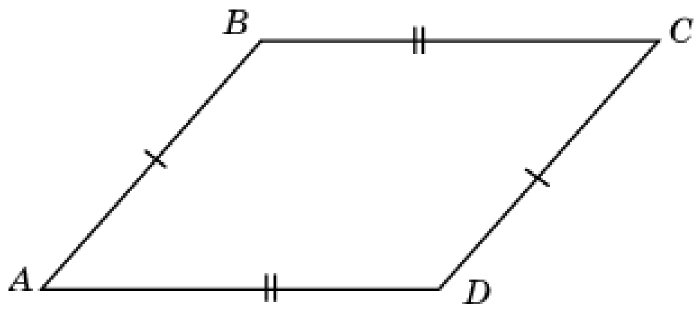
18. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.



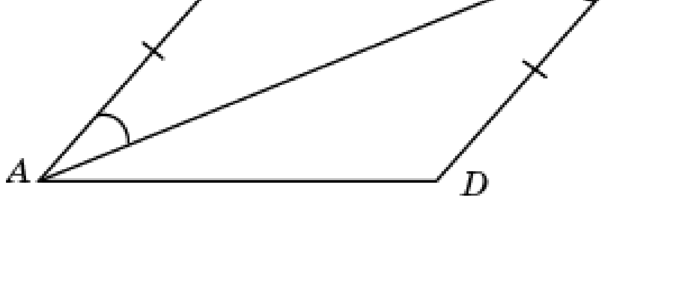
19. На рисунке $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.



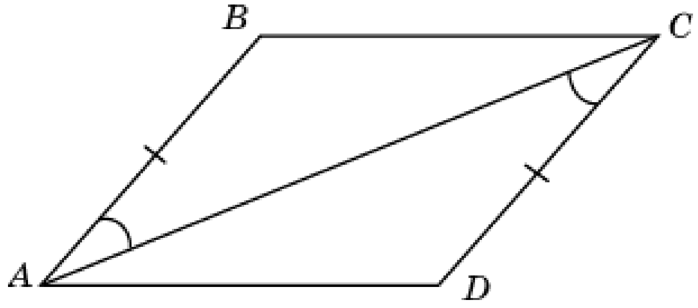
20. На рисунке $AB=DC$ и $BC=AD$. Докажите, что угол B равен углу D.



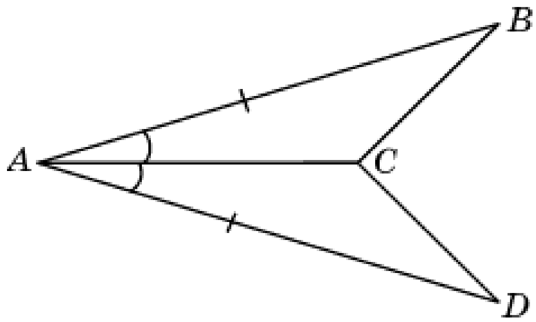
21. На рисунке $AB = DC$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что угол B равен углу D.



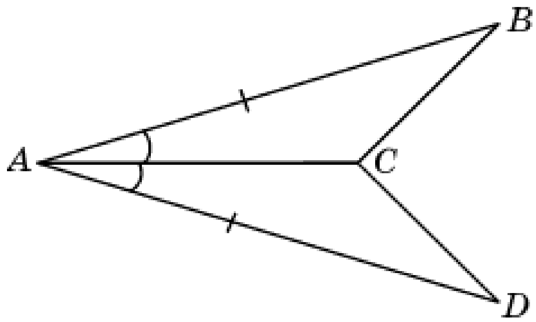
22. На рисунке $AB = DC$ и $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что $AD = BC$.



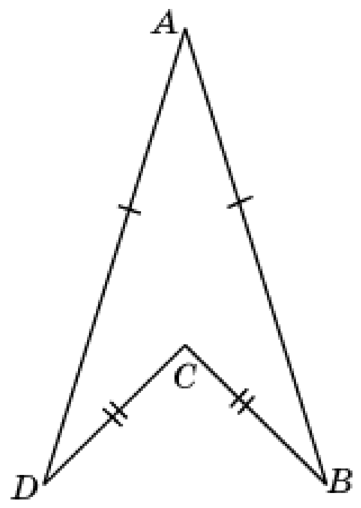
23. На рисунке $AB = AD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $BC = CD$.



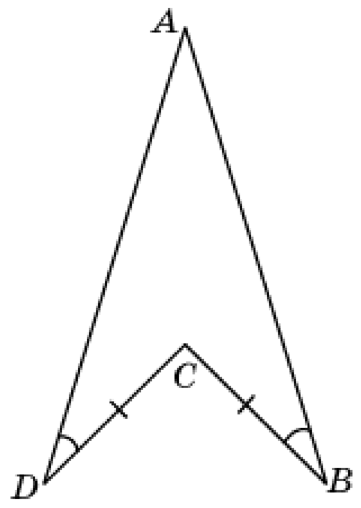
24. На рисунке $AB = AD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.



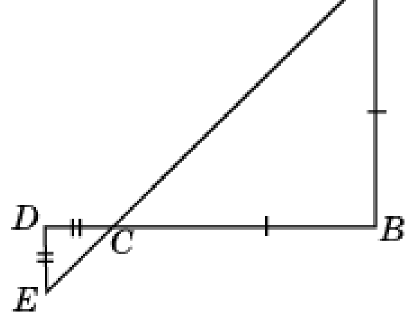
25. На рисунке $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.



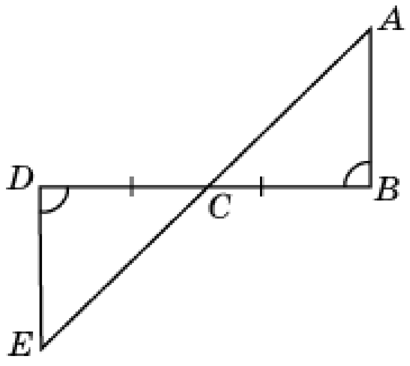
26. На рисунке $DC = BC$ и $\angle B = \angle D$. Докажите, что $AB = AD$.



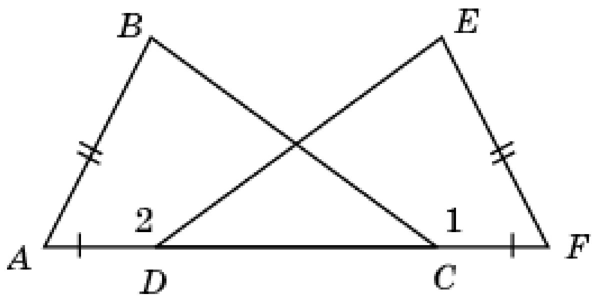
27. На рисунке $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle A = \angle E$.



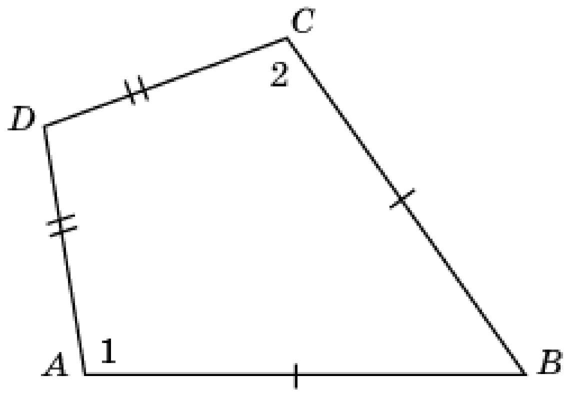
28. На рисунке $BC = CD$, $\angle B = \angle D$. Докажите, что $AC = CE$.



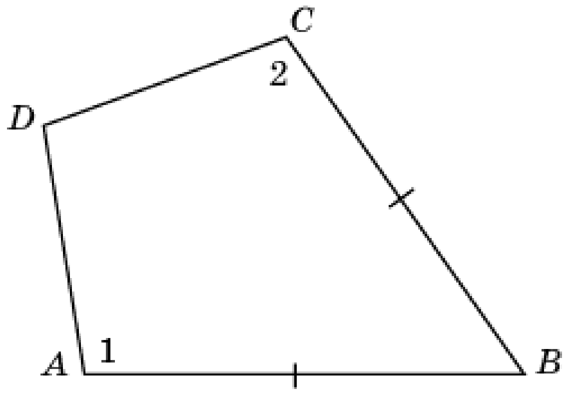
29. На рисунке $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.



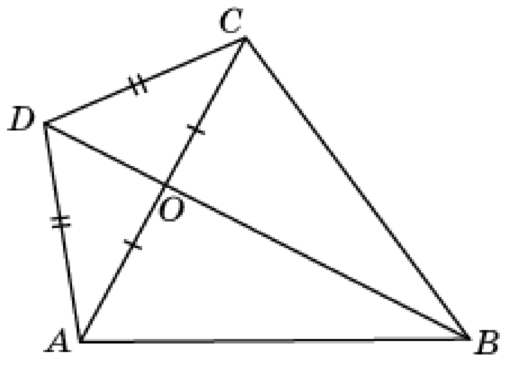
30. На рисунке $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.



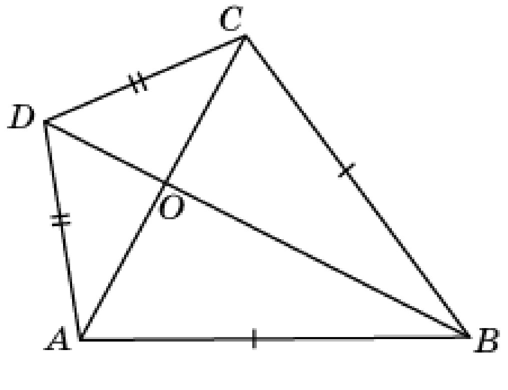
31. На рисунке $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AD = CD$.



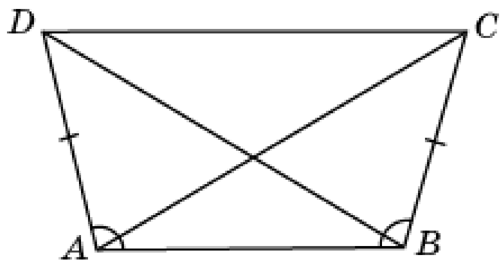
32. На рисунке $AO = OC$, $AD = CD$. Докажите, что $AB = BC$.



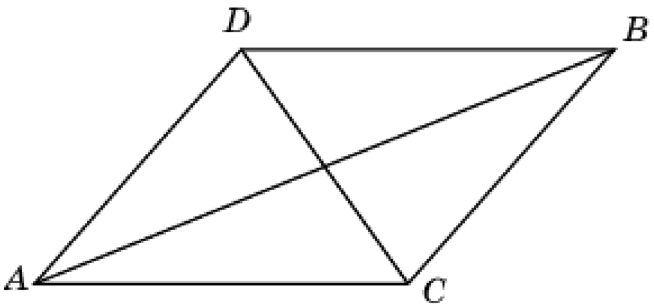
33. На рисунке $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $AO = OC$.



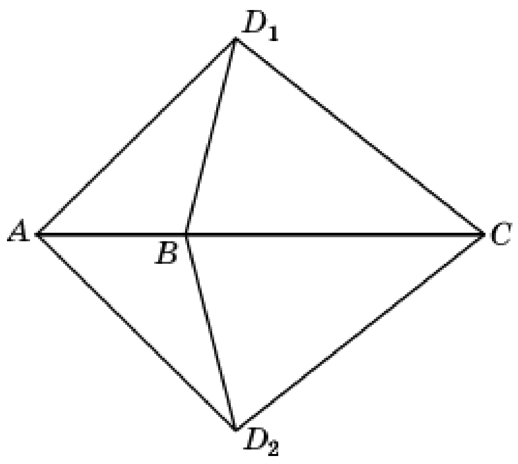
34. На рисунке $\angle A = \angle B$, $AD = BC$. Докажите, что $AC = BD$.



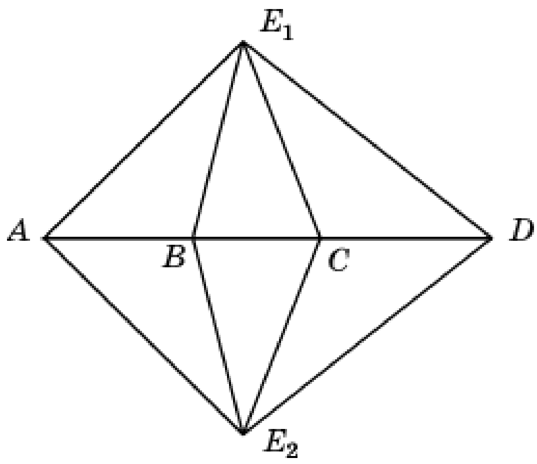
35. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что треугольники CBD и DAC равны.



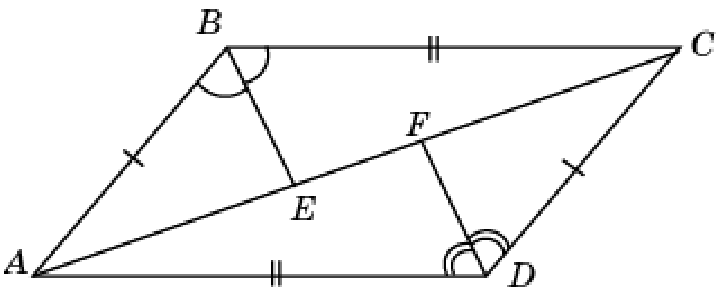
36. Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Точки D_1 и D_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABD_1 и ABD_2 равны, то треугольники BCD_1 и BCD_2 тоже равны.



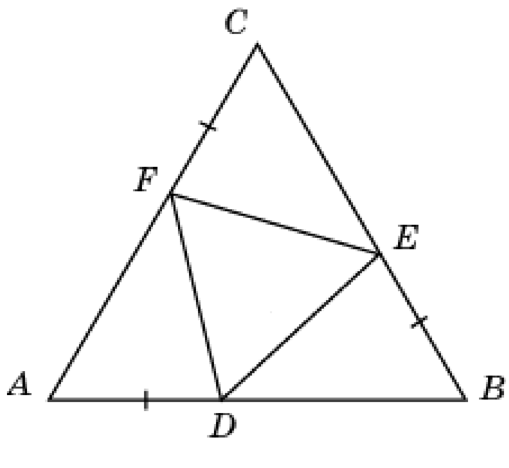
37. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Точки E_1 и E_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.



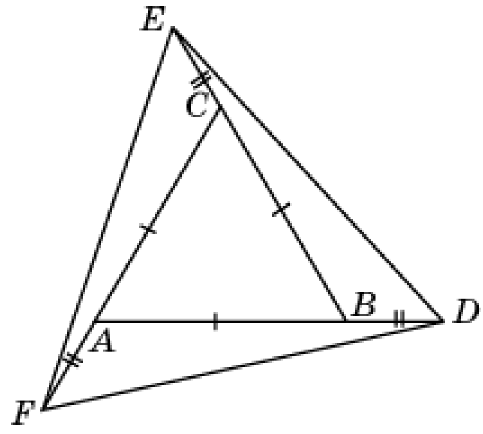
38. На рисунке $AB = CD$, $AD = BC$, BE - биссектриса угла ABC, DF - биссектриса угла ADC. Докажите, что треугольники ABE и CDF равны.



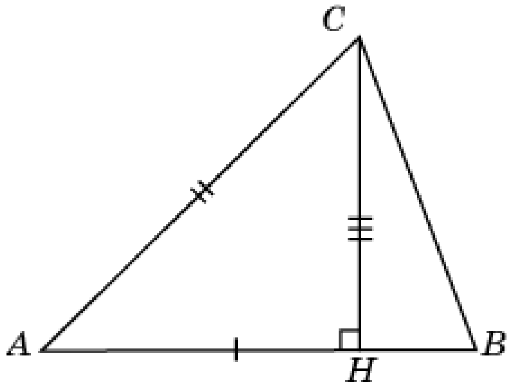
39. На каждой стороне правильного треугольника ABC последовательно отложены равные отрезки AD, BE, CF. Докажите, что треугольник DEF тоже правильный.

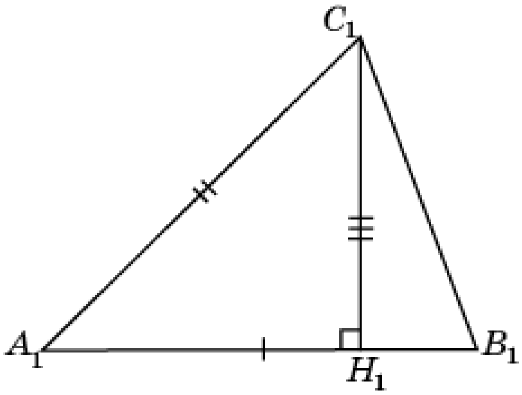


40. На продолжении каждой стороны правильного треугольника *ABC* последовательно отложены равные отрезки *BD*, *CE*, *AF*. Докажите, что треугольник *DEF* тоже правильный.

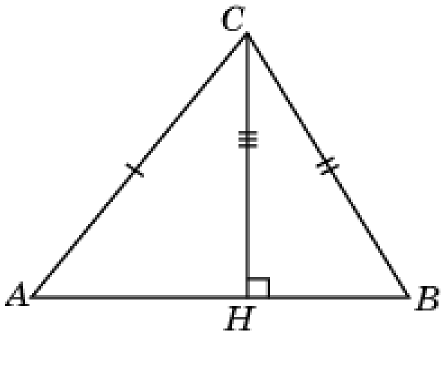


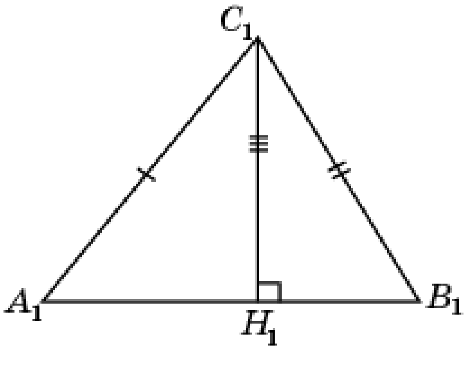
41. Докажите, что если две стороны и высота, опущенная на одну из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



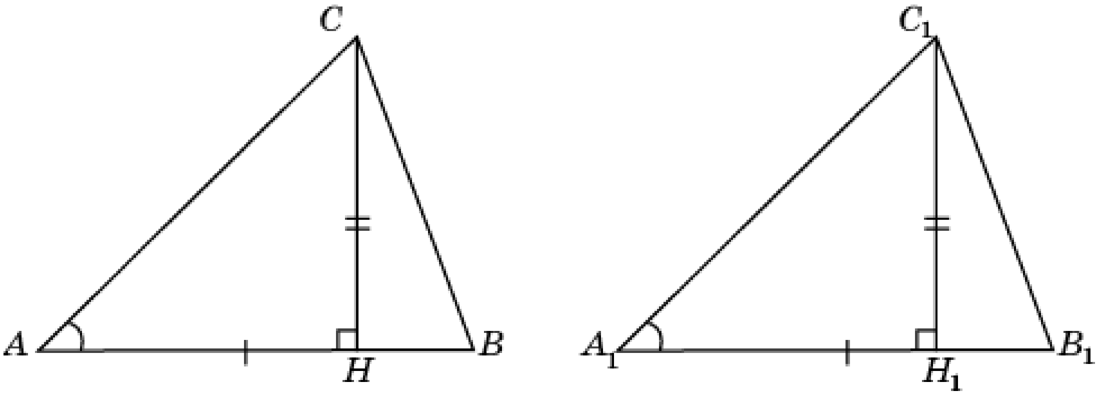


42. Докажите, что если две стороны и высота, опущенная на третью сторону, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

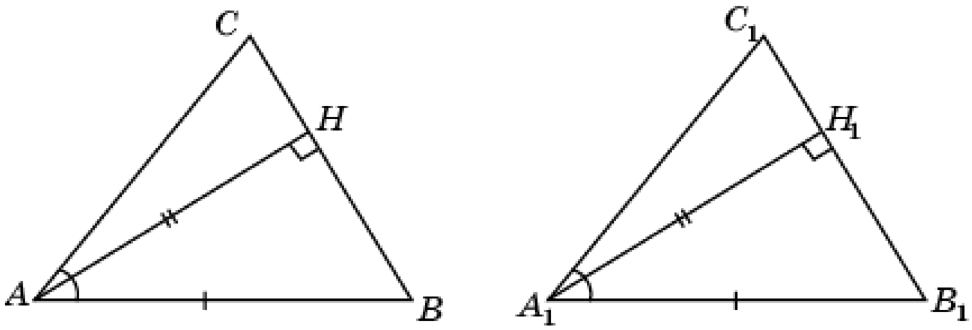




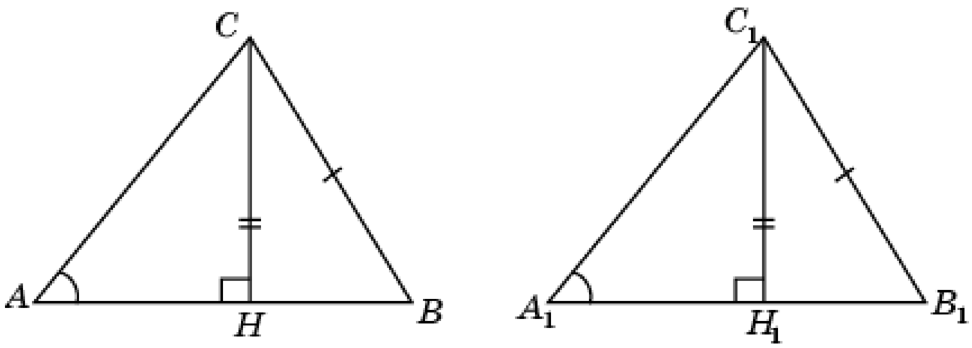
43. Докажите, что если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на эту сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



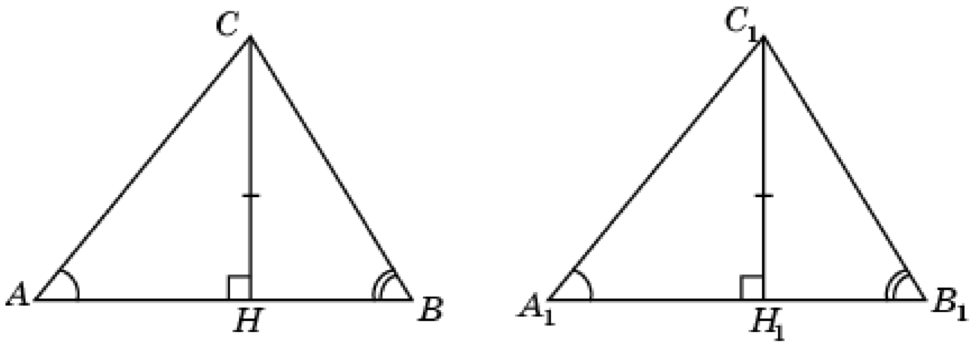
44. Докажите, что если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



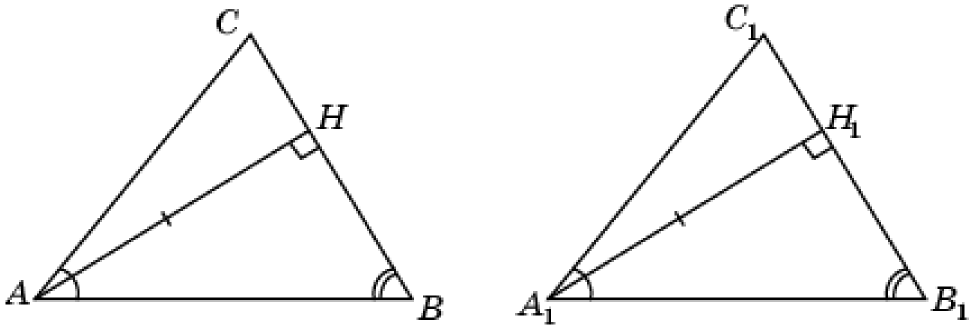
45. Докажите, что если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на сторону, прилежащую к этому углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



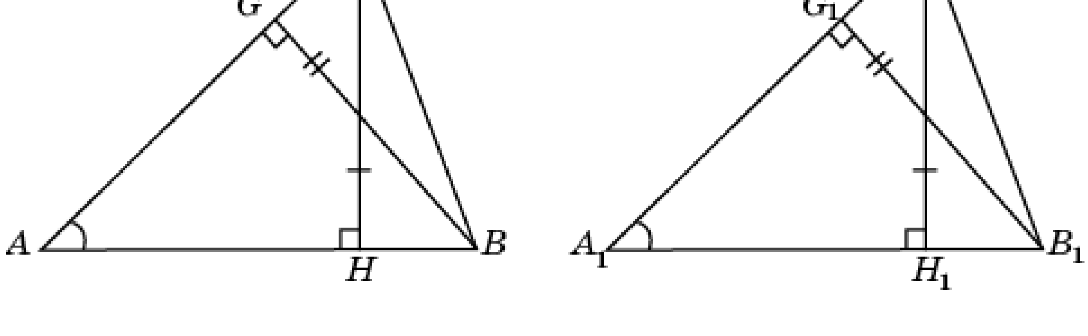
46. Докажите, что если два угла и высота, опущенная на прилежащую к ним сторону, одного треугольника соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



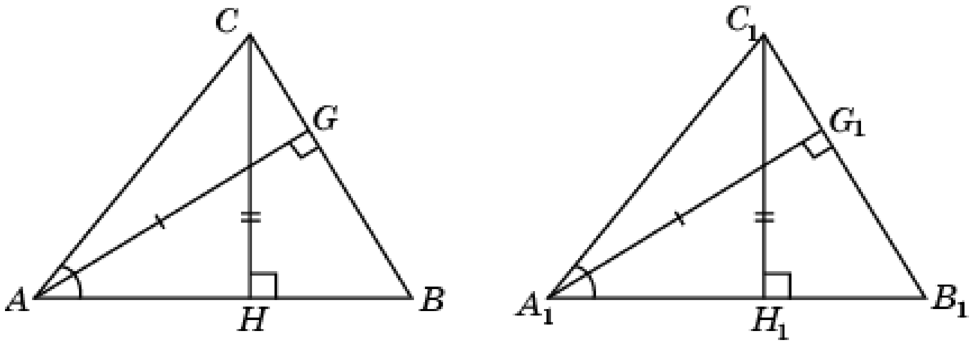
47. Докажите, что если два угла и высота, проведенная из вершины одного из них, одного треугольника соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



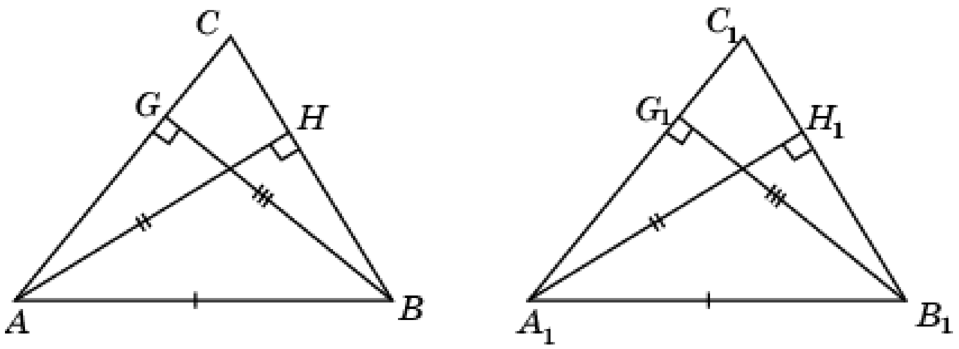
48. Докажите, что если угол и две высоты, опущенные на его стороны, одного треугольника соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.



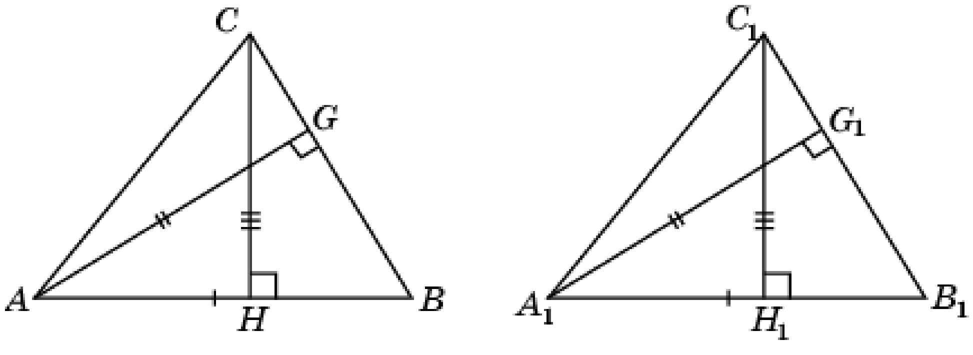
49. Докажите, что если угол и две высоты, одна из которых проведена из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.



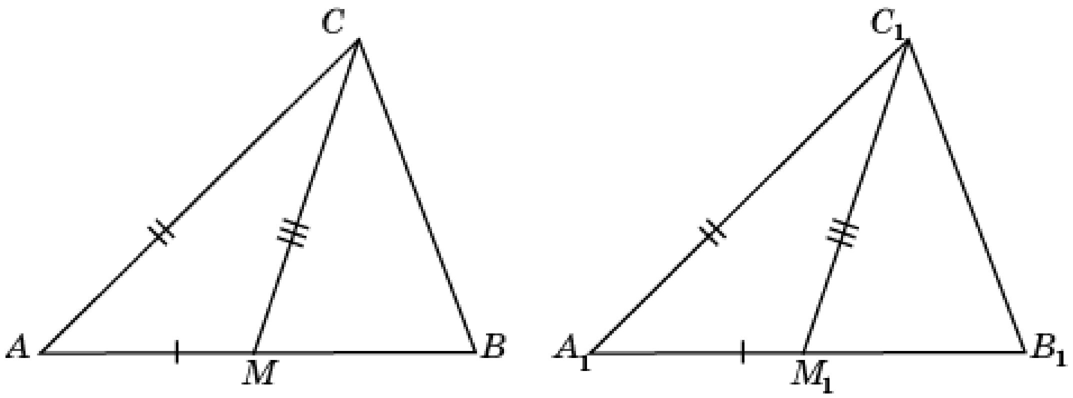
50. Докажите, что если сторона и две высоты, опущенные на другие стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.



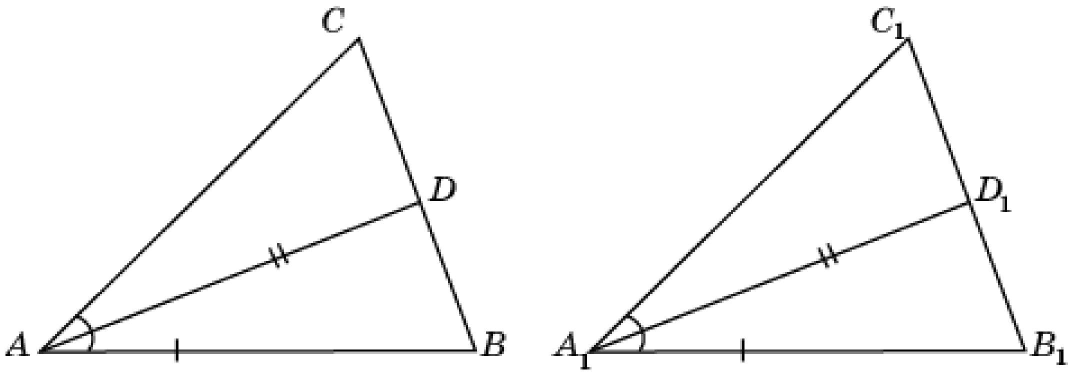
51. Докажите, что если сторона и две высоты, одна из которых опущена на эту сторону, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.



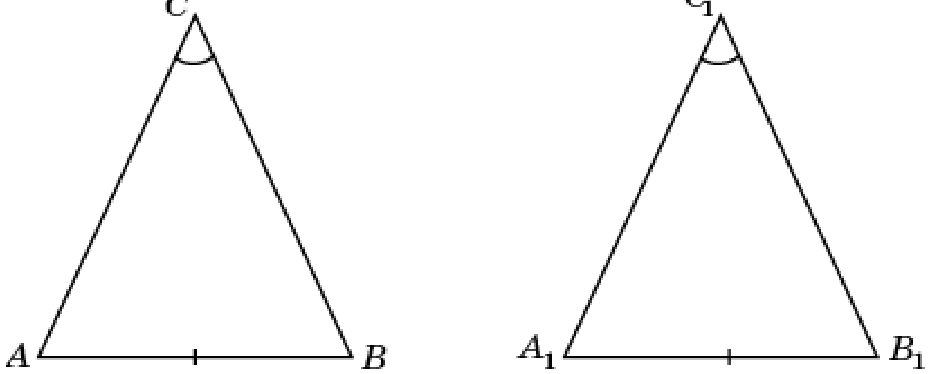
52. Докажите, что если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.



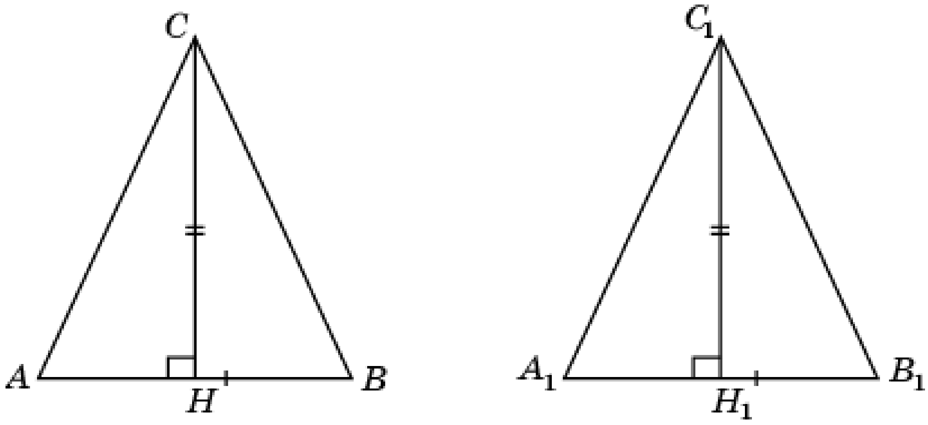
53. Докажите, что если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.



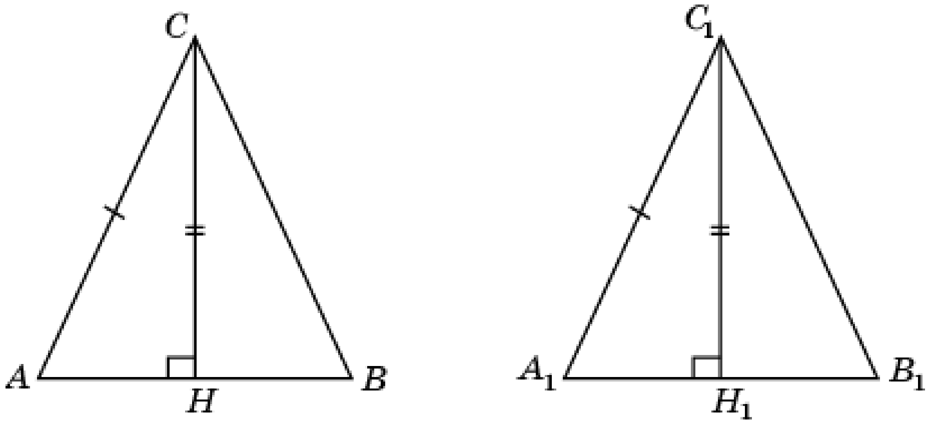
54. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников соответственно равны основания и противолежащие им углы, то такие треугольники равны.



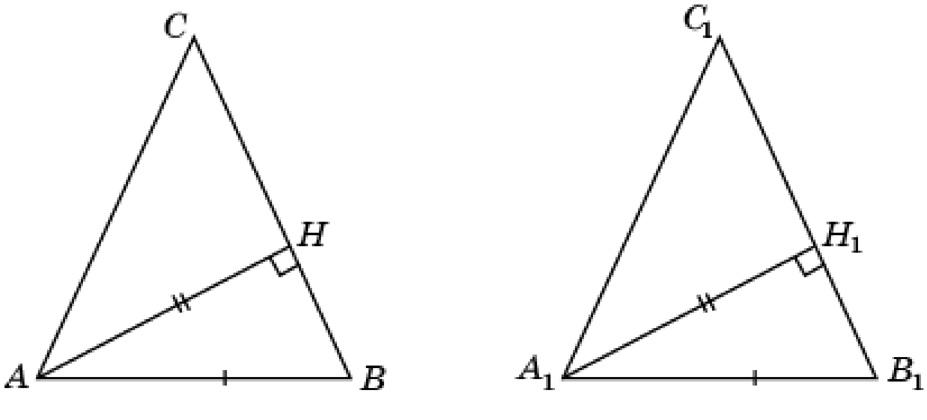
55. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников соответственно равны основания и опущенные на них высоты, то такие треугольники равны.



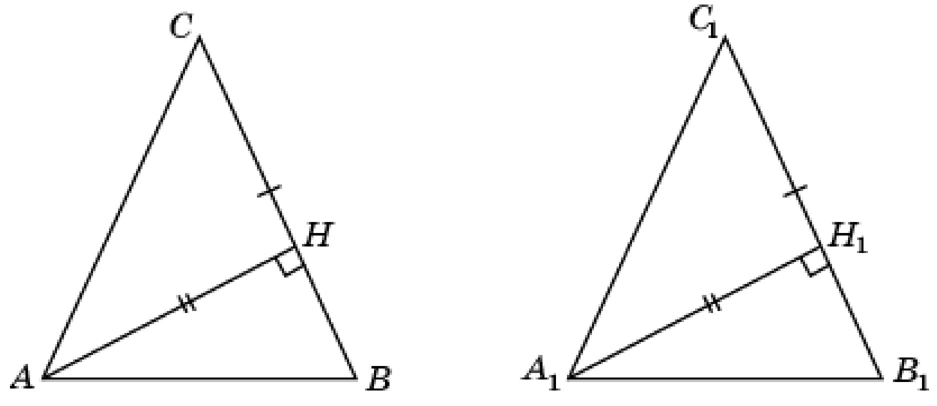
56. Докажите, что если боковая сторона и высота, опущенная на основание, одного равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и высоте другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



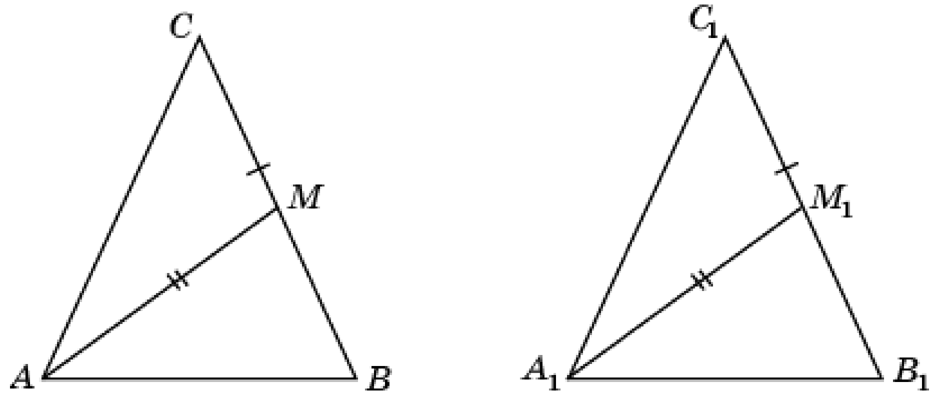
57. Докажите, что если основание и высота, опущенная на боковую сторону, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и высоте другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



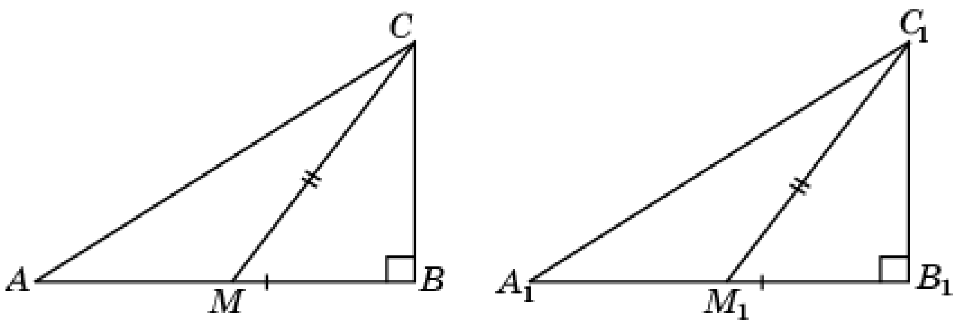
58. Докажите, что если боковая сторона и проведенная к ней высота одного равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и высоте другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



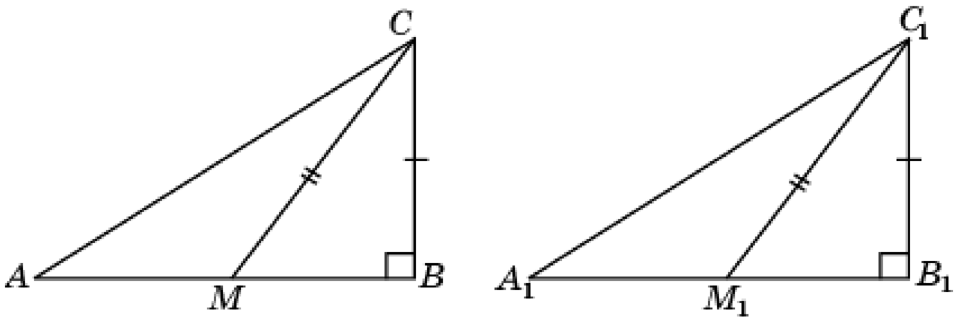
59. Докажите, что если боковая сторона и проведенная к ней медиана одного равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и медиане другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



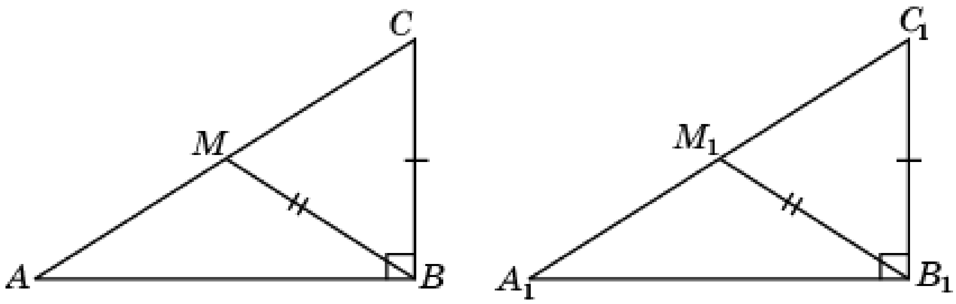
60. Докажите, что если катет и проведенная к нему медиана одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и медиане другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



61. Докажите, что если катет и медиана, проведенная к другому катету, одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и медиане другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



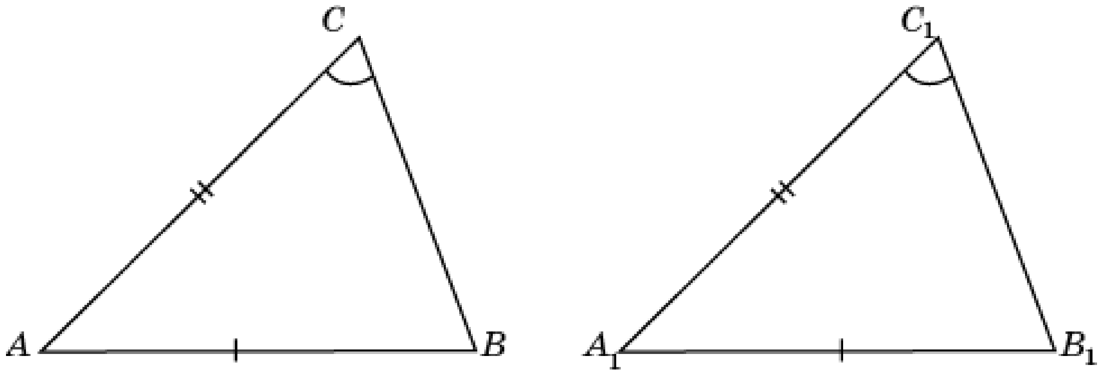
62. Докажите, что если катет и медиана, проведенная к гипотенузе, одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и медиане другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



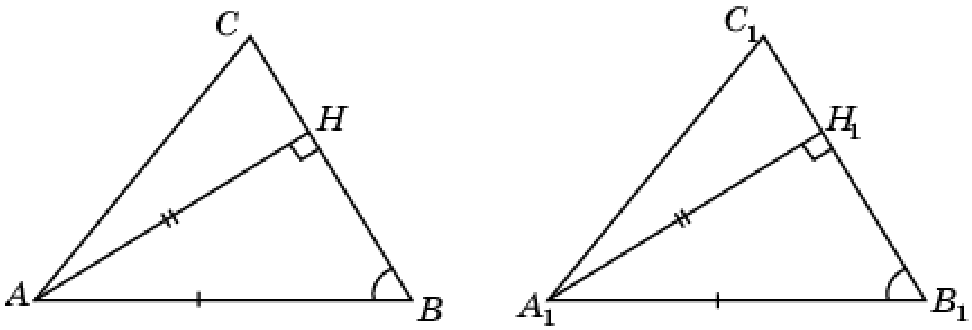
Уровень С

Выясните, верны ли перечисленные ниже утверждения. Если да, докажите, если нет, приведите контрпример.

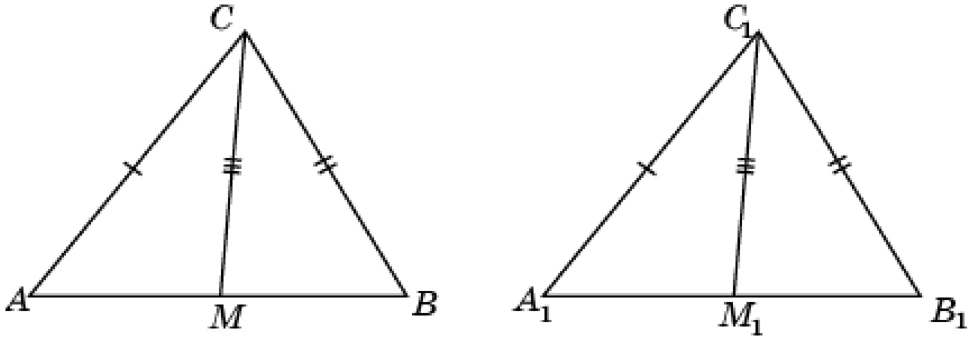
1. Два треугольника равны, если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника.



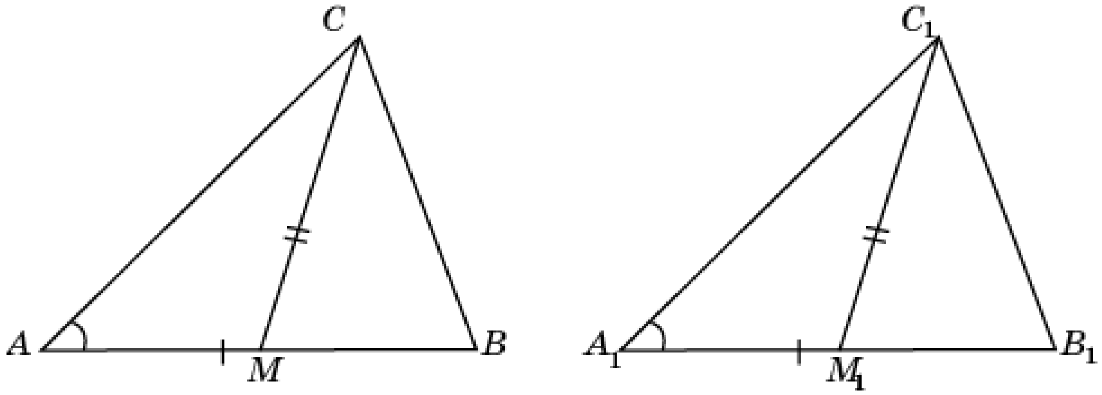
2. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, прилежащую к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



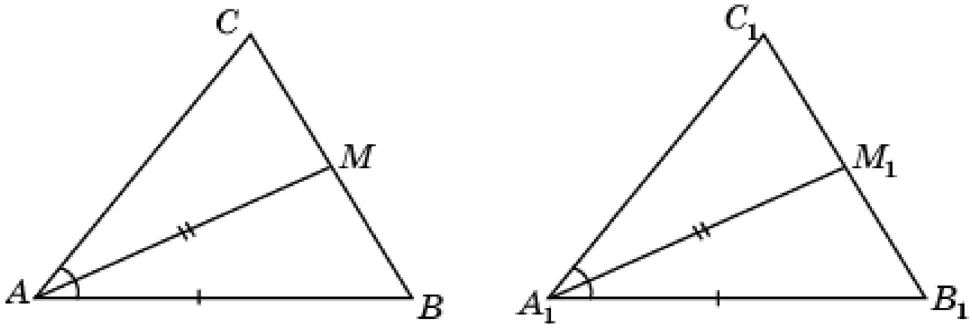
3. Если две стороны и медиана, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.



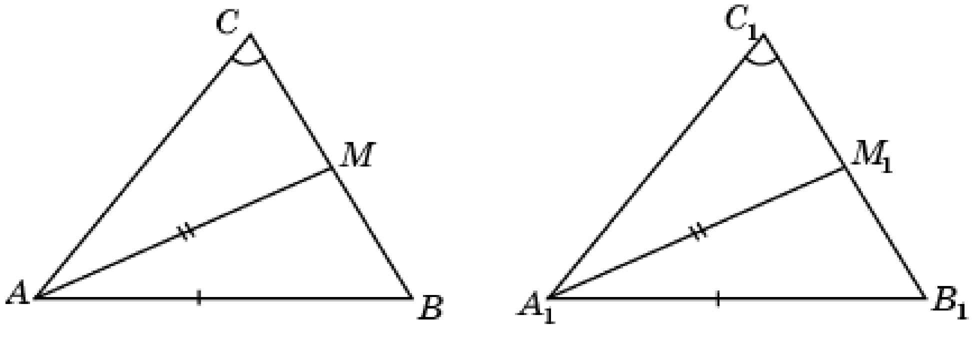
4. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.



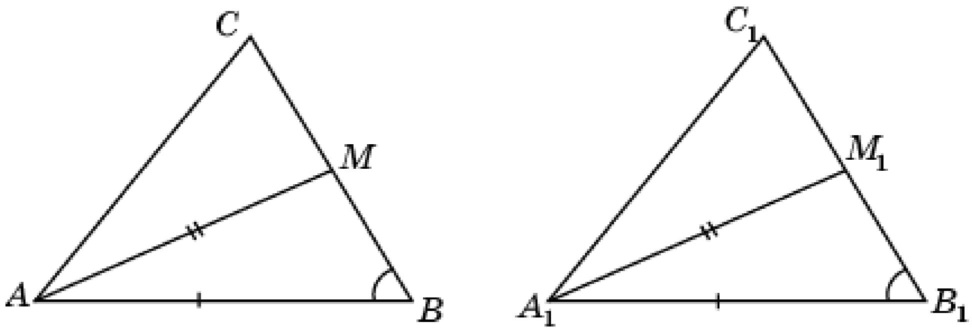
5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к стороне, противолежащей данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.



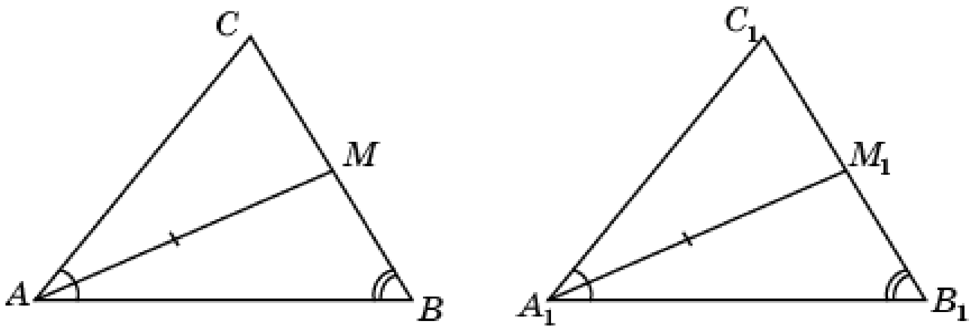
6. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и медиана, проведенная к другой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.



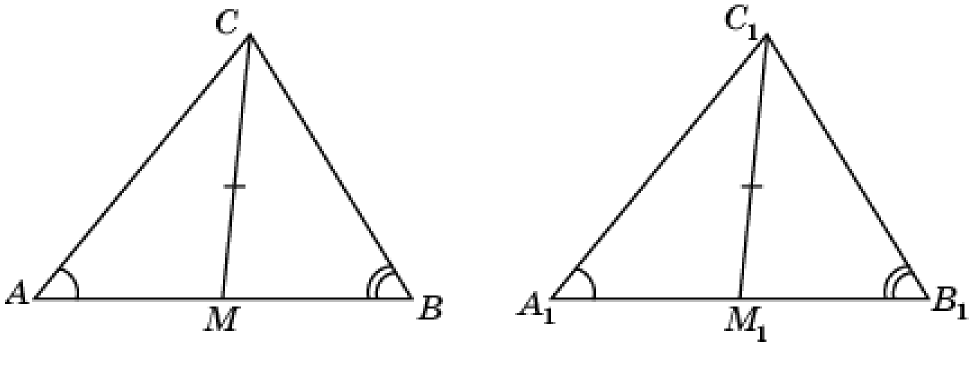
7. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.



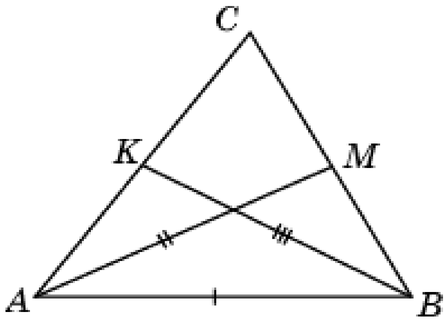
8. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведенная из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.

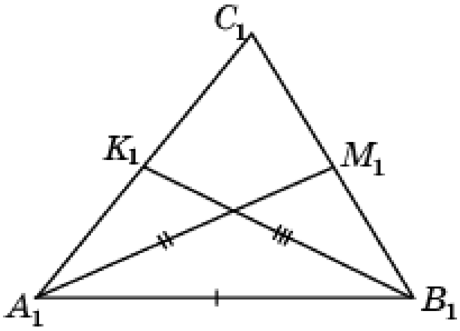


9. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведенная из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.

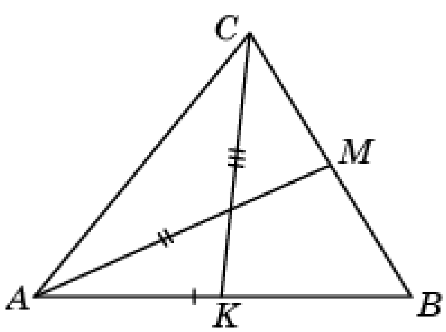


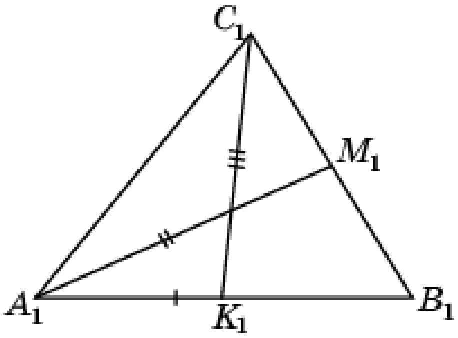
10. Если сторона и две медианы, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.



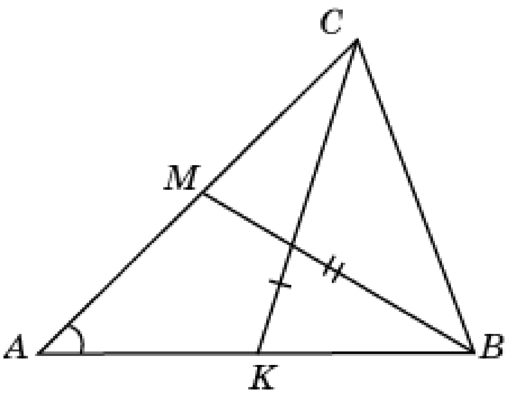


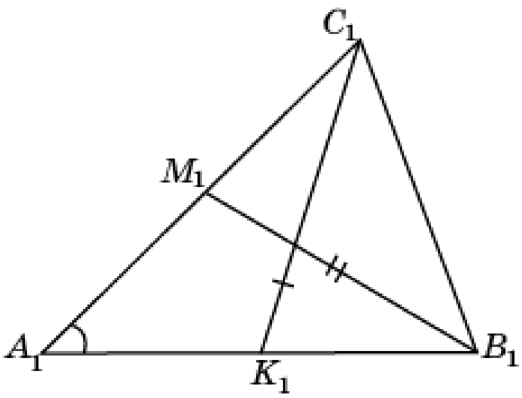
11. Если сторона и две медианы, одна из которых проведена к данной стороне, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.



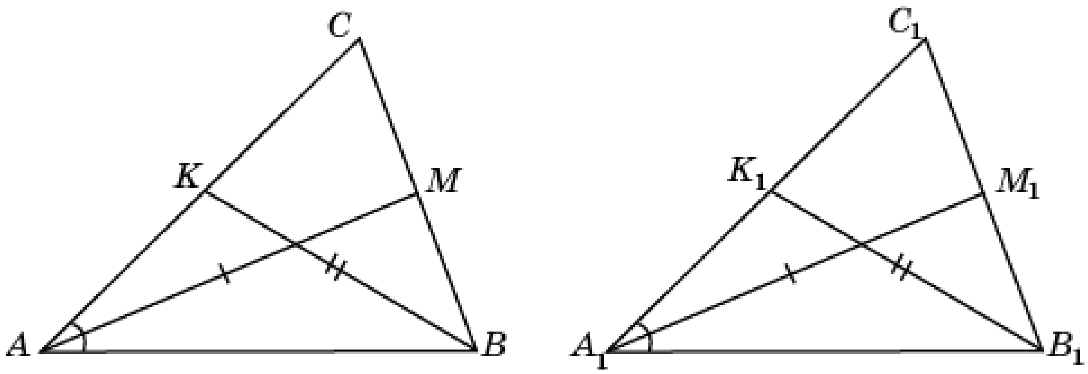


12. Если угол и две медианы, проведенные к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

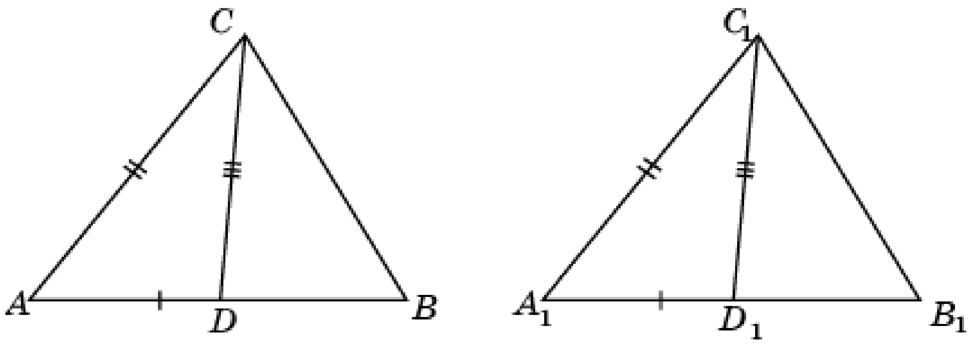




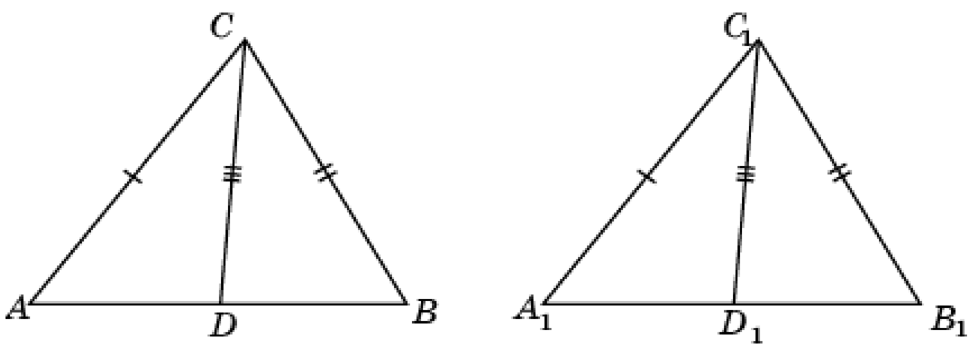
13. Если угол и две медианы, одна из которых проведена из вершины данного угла, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.



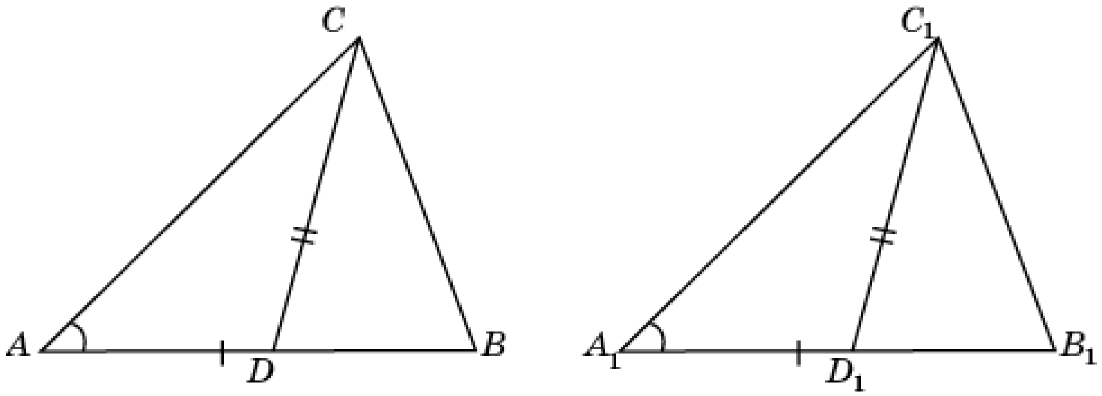
14. Если две стороны и биссектриса, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.



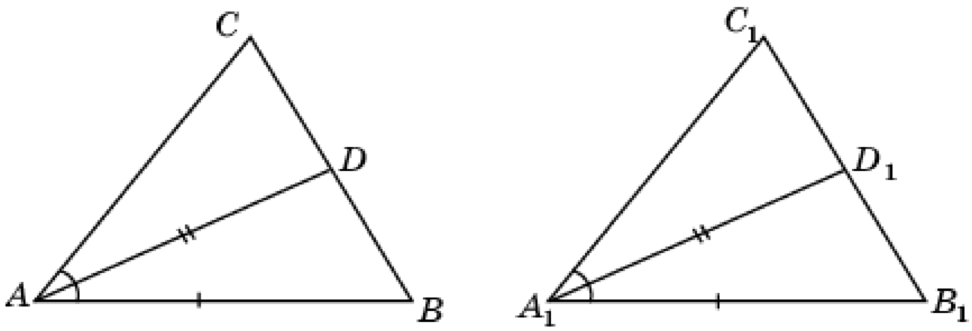
15. Ели две стороны и биссектриса, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.



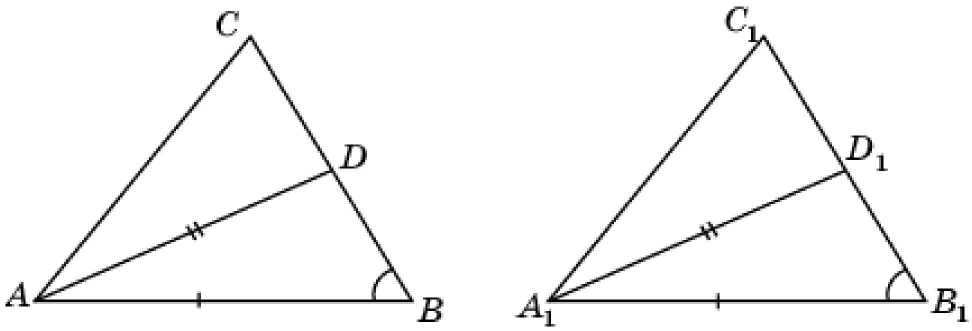
16. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.



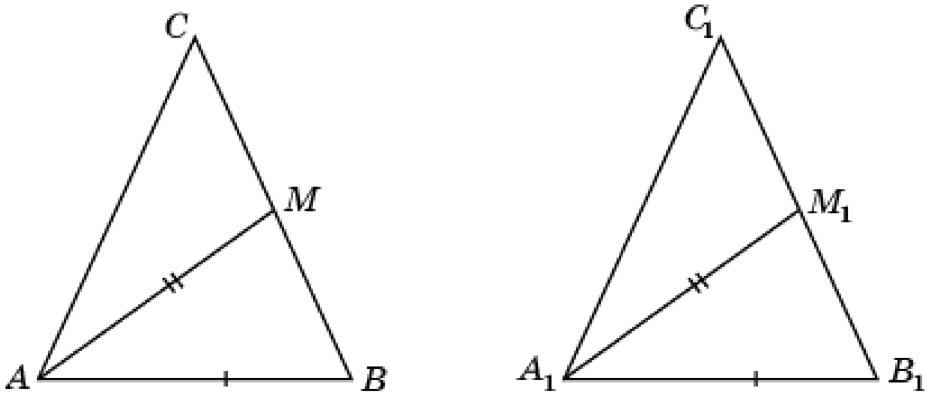
17. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.



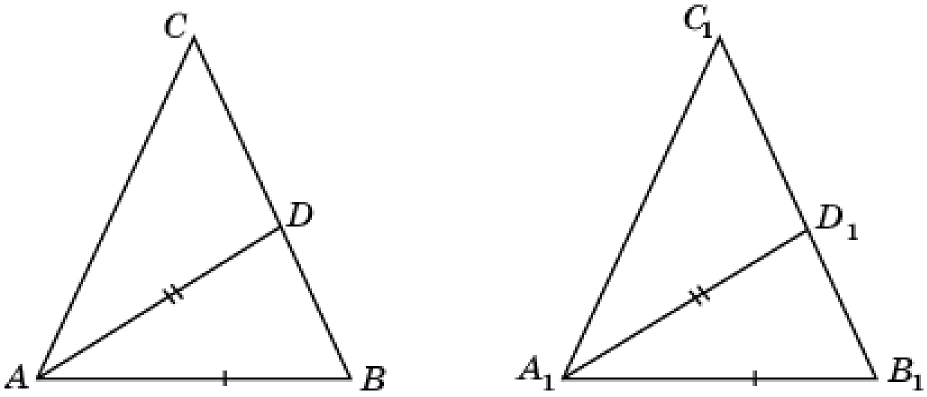
18. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.



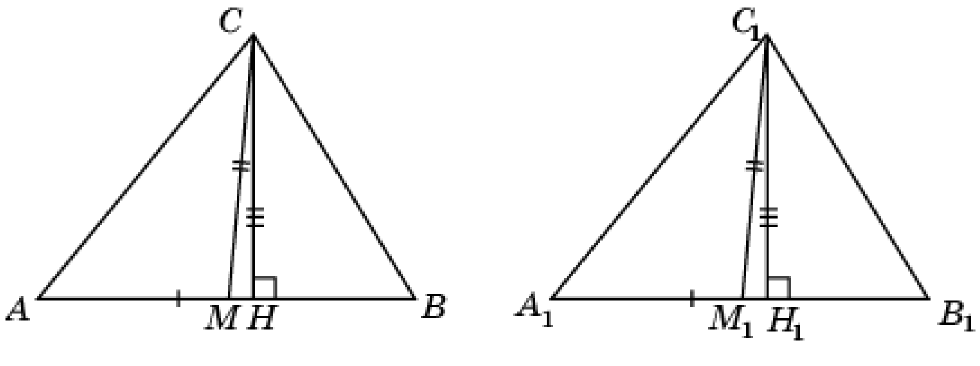
19. Если основание и медиана, проведенная к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и медиане другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



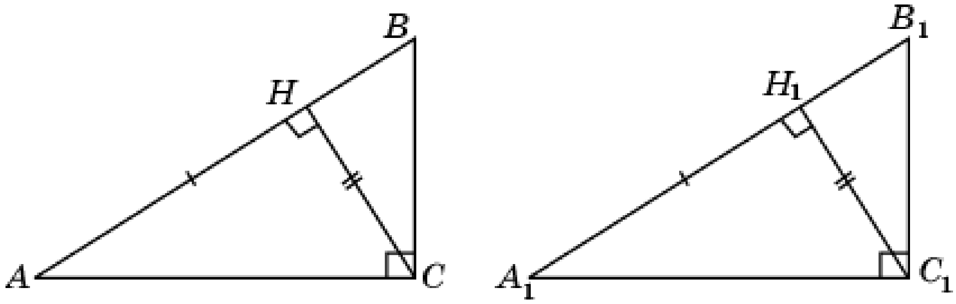
20. Если основание и биссектриса, проведенная к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и биссектрисе другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.



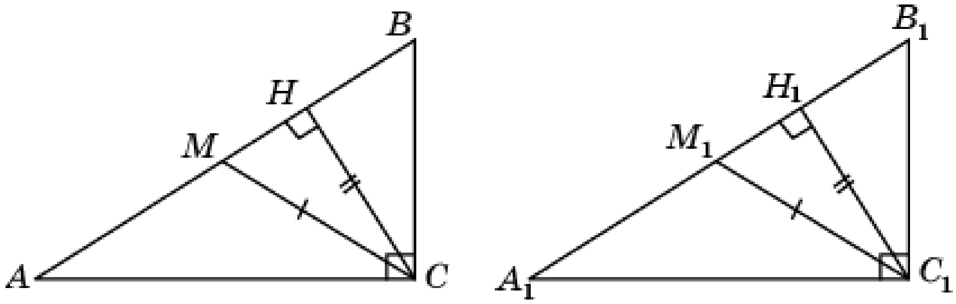
21. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.



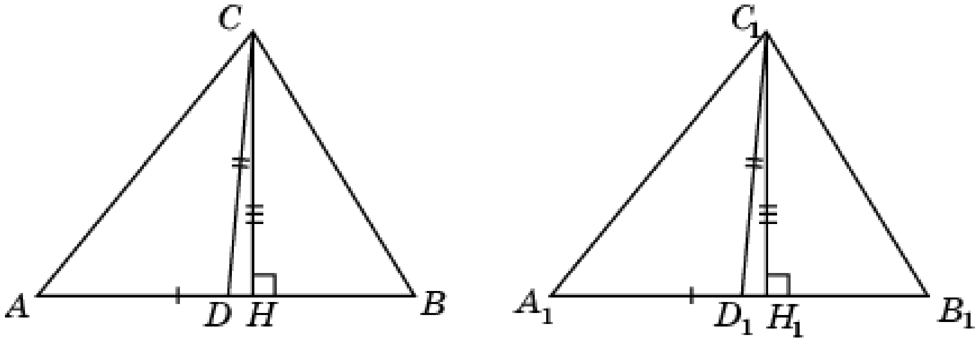
22. Если гипотенуза и опущенная на нее высота одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и высоте другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



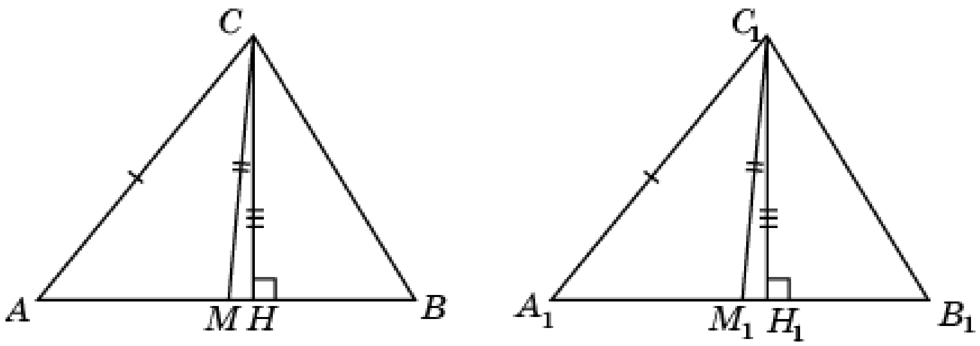
23. Если медиана и высота, опущенные на гипотенузу одного прямоугольного треугольника, соответственно равны медиане и высоте другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



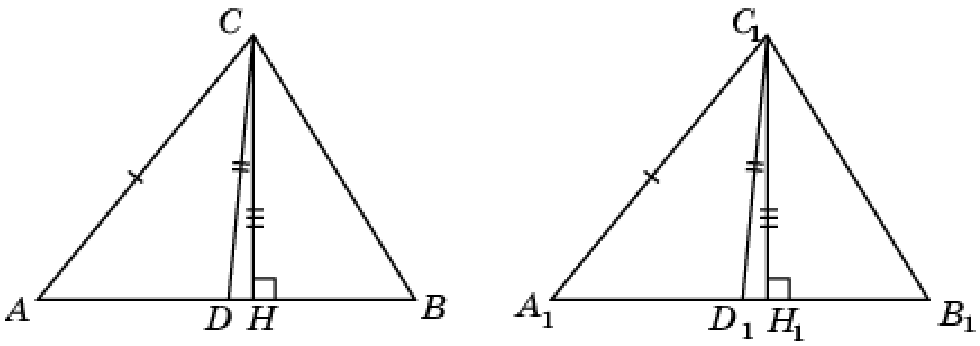
24. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.



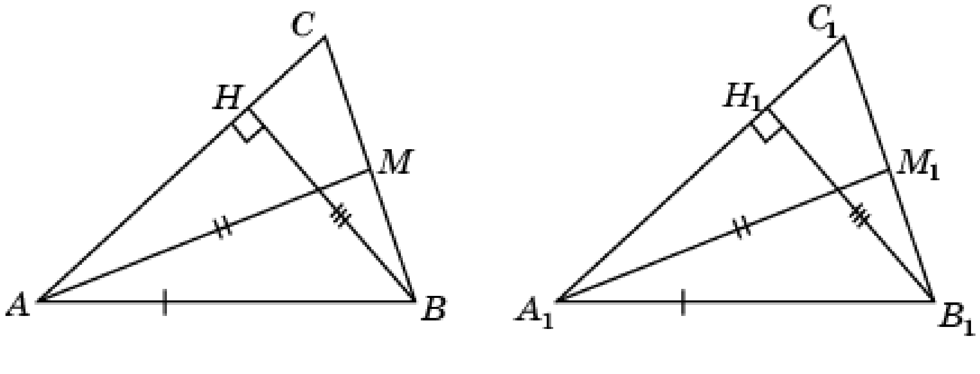
25. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.



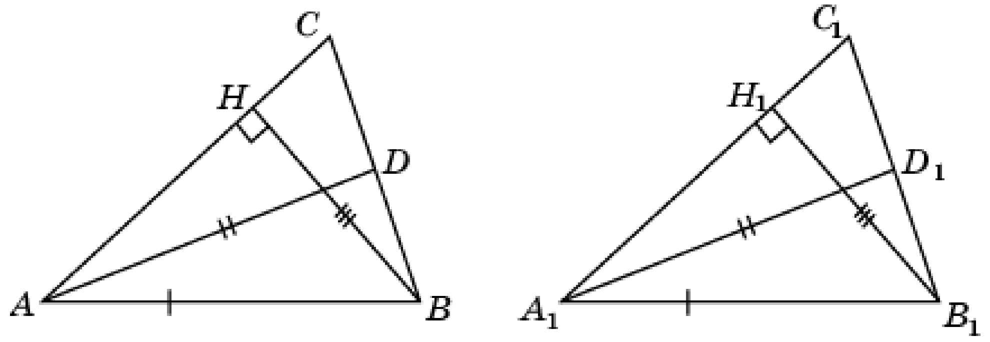
26. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.



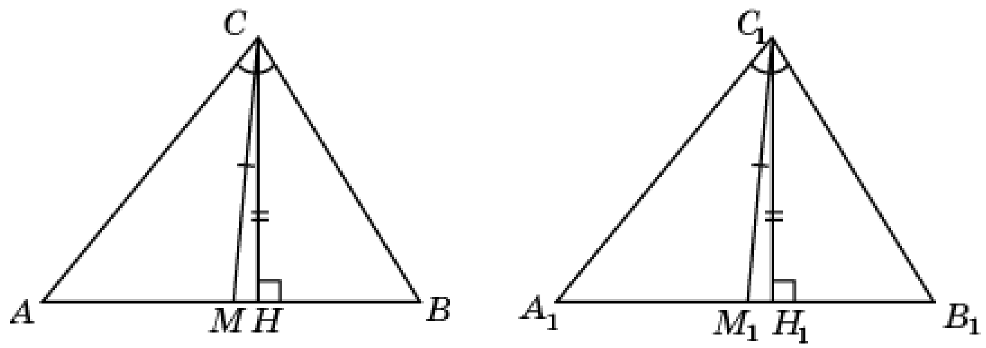
27. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.



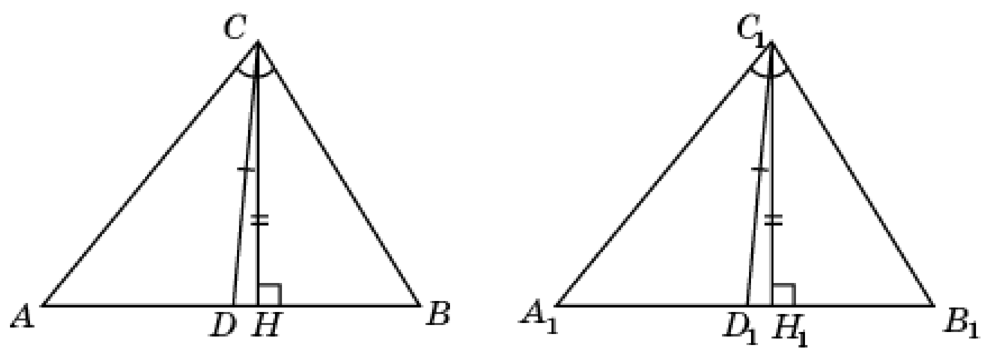
28. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.



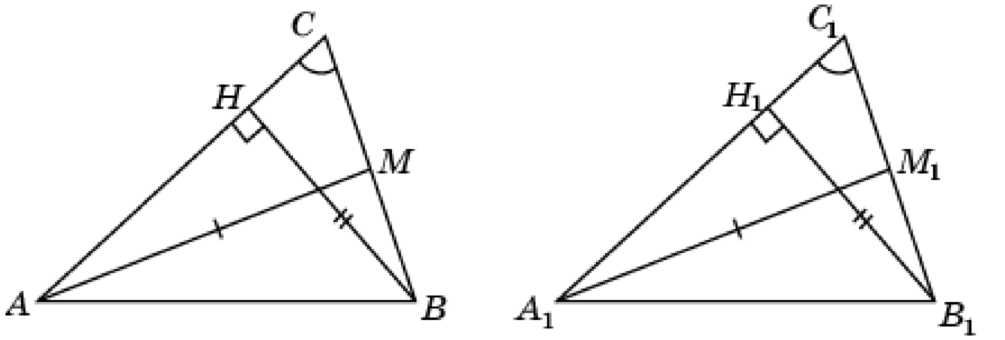
29. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.



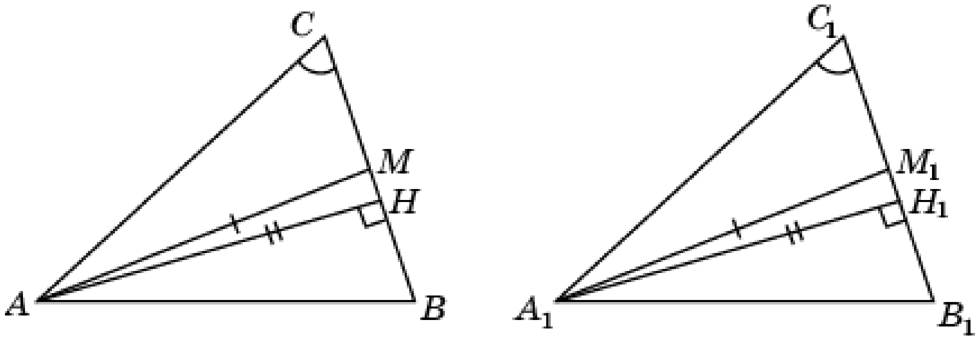
30. Два треугольника равны, если угол, биссектриса и высота, проведенные из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.



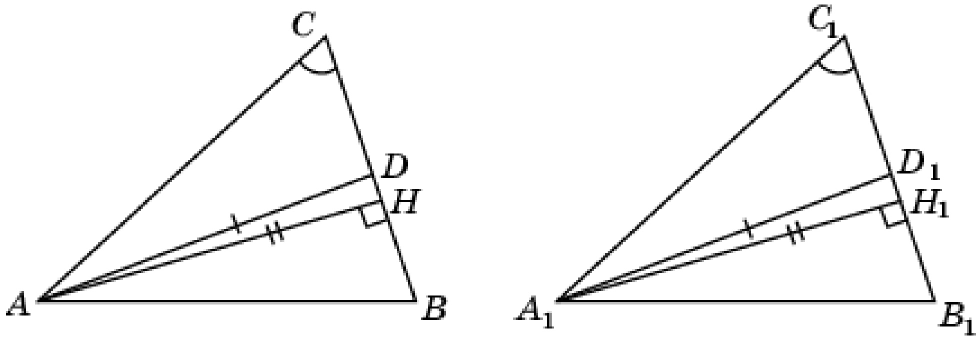
31. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершин двух других углов, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.



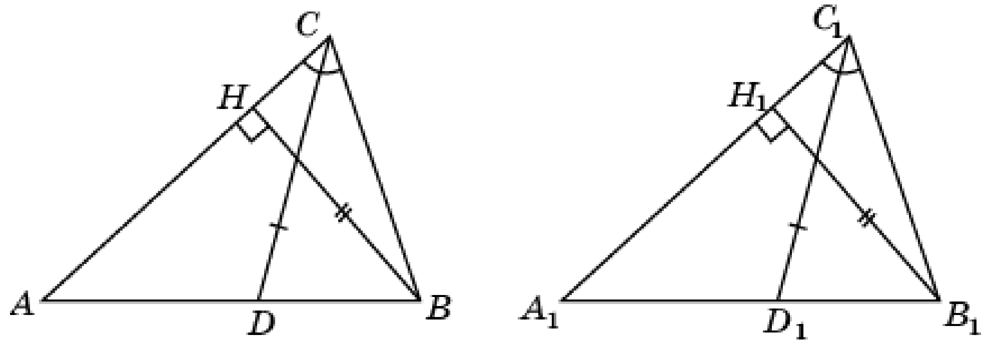
32. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.



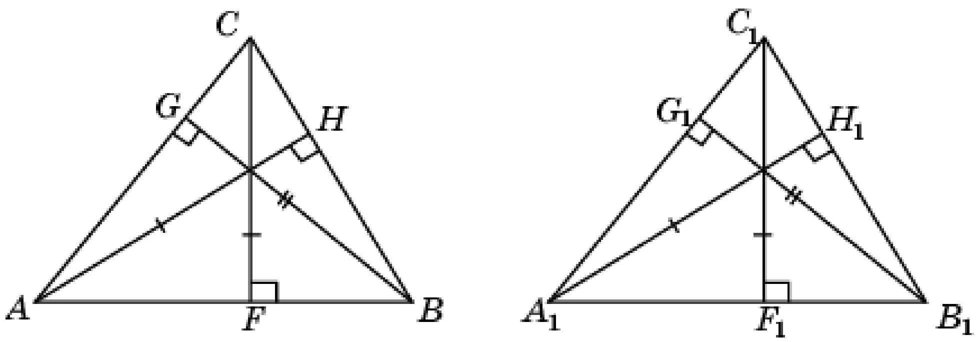
33. Два треугольника равны, если угол, биссектриса и высота, проведенные из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.



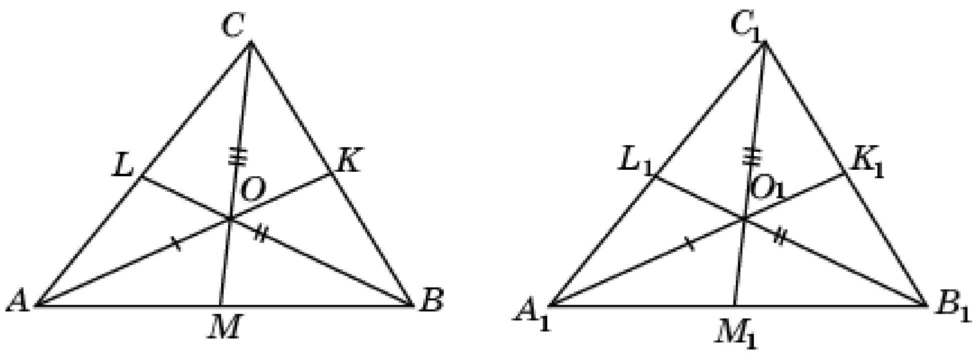
34. Два треугольника равны, если угол, биссектриса, проведенная из его вершины, и высота, опущенная на сторону, прилежащую к этому углу, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.



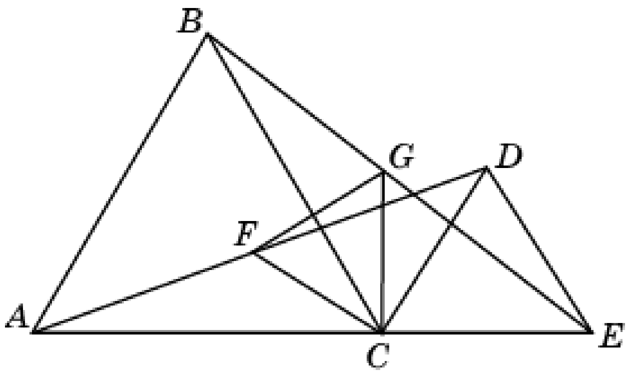
35. Два треугольника равны, если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника.



36. Два треугольника равны, если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника.



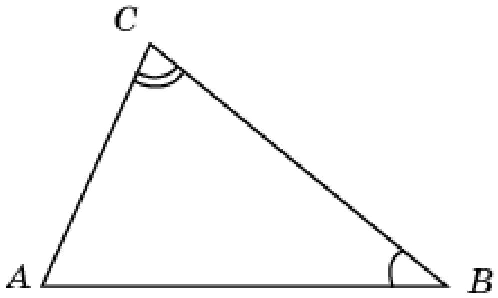
37. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC построен равносторонний треугольник CDE. Докажите, что треугольник CFG, где F и G – середины отрезков соответственно AD и BE, равносторонний.



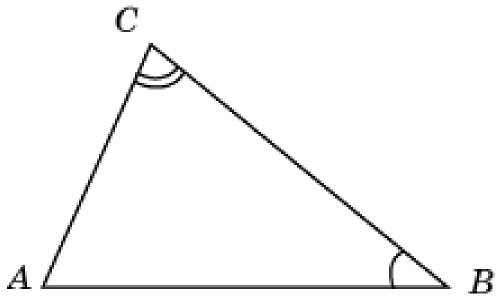
3. Соотношения между элементами треугольника

Уровень А

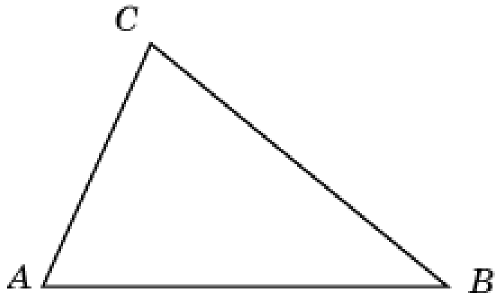
1. Докажите, что в произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.



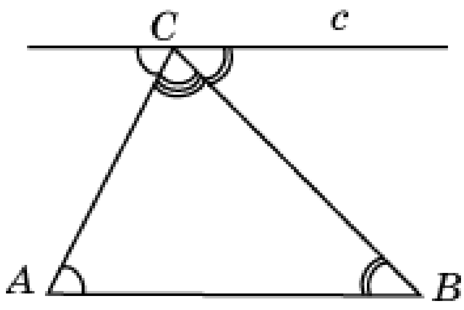
2. Докажите, что в произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.



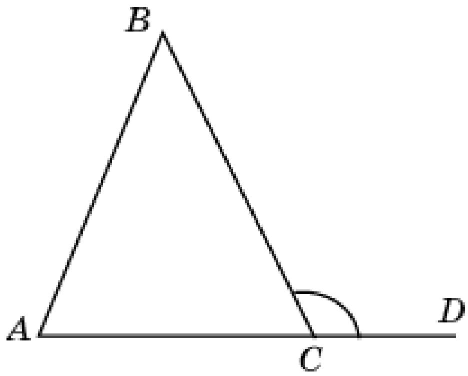
3. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.



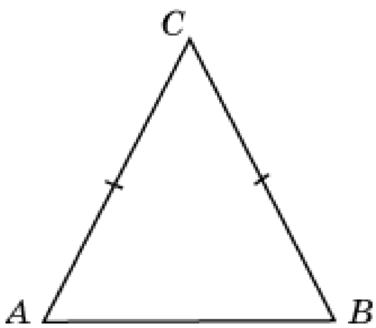
4. Докажите, что сумма углов произвольного треугольника равна $180°$.



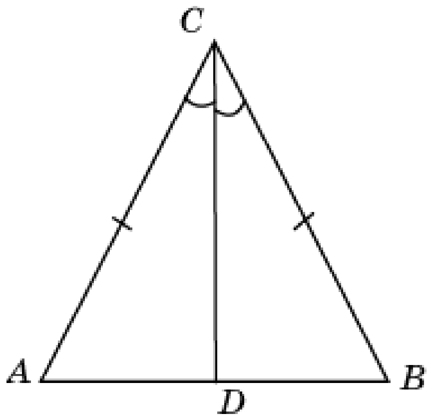
5. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.



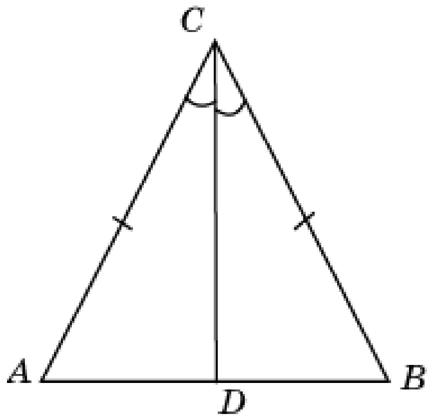
6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



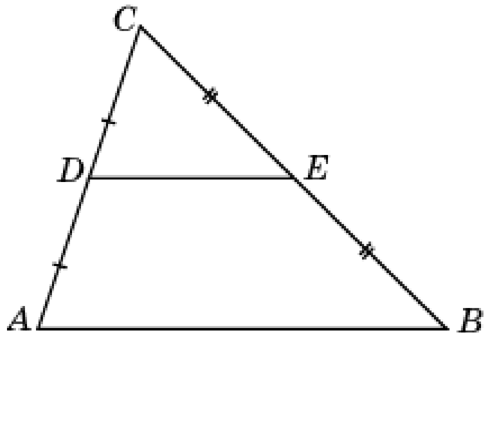
7. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой.



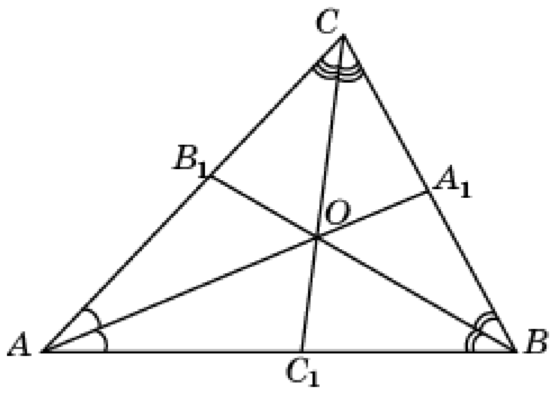
8. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является высотой.



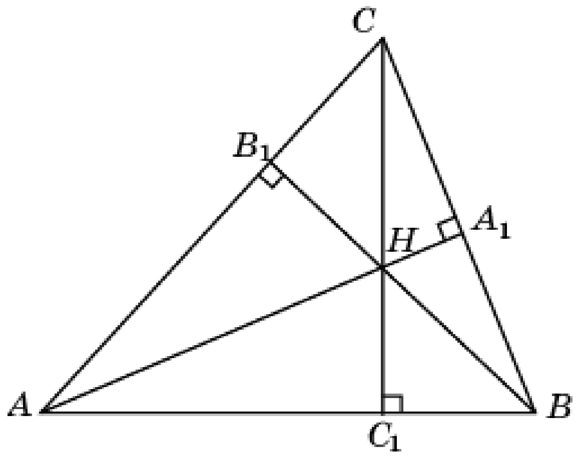
9. Докажите, что средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.



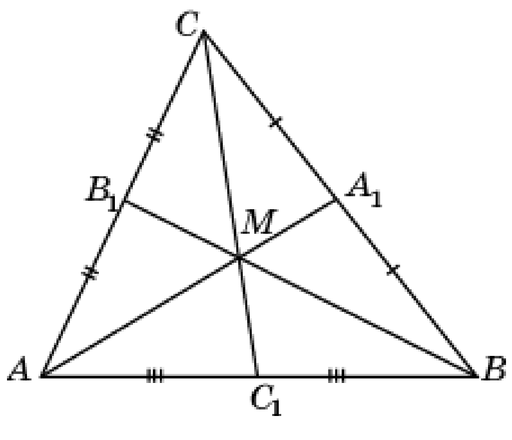
10. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



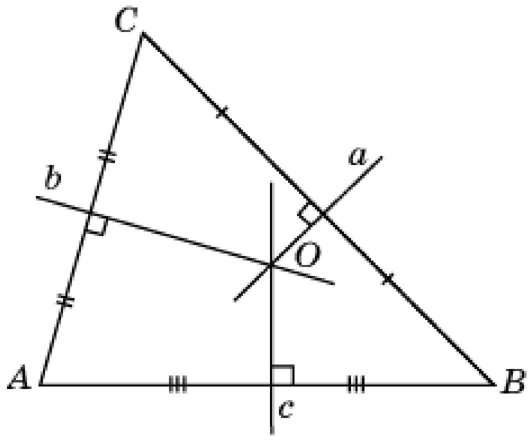
11. Докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.



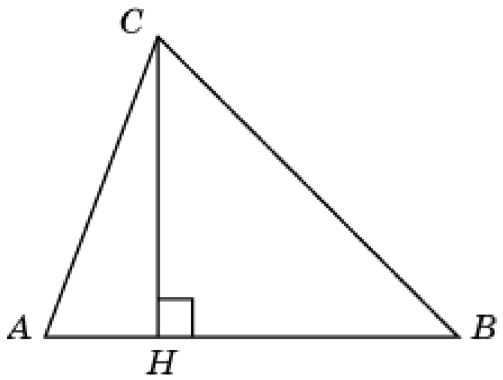
12. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершин.



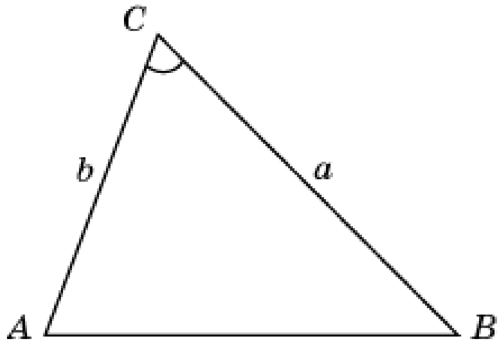
13. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.



14. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

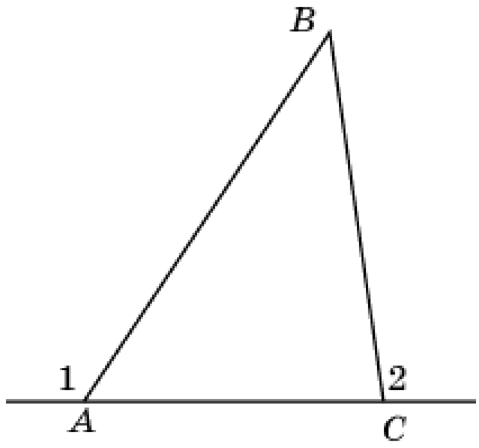


15. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

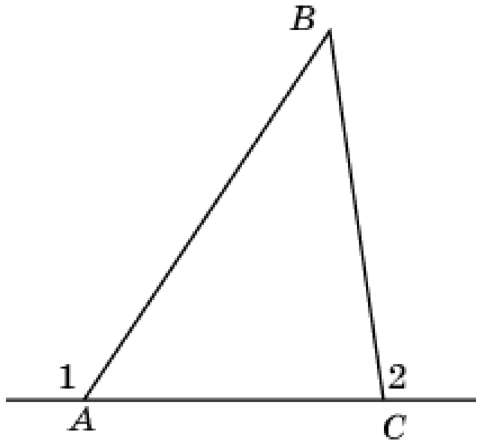


Уровень В

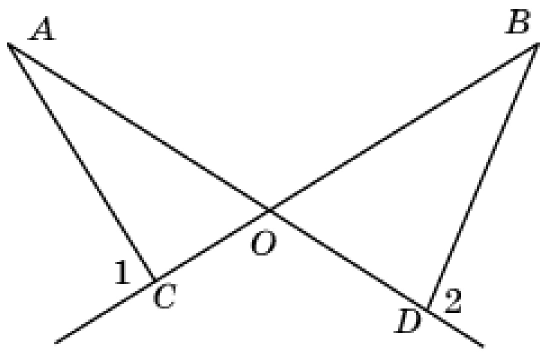
1. На рисунке $AB > BC$. Докажите, что $\angle 1 > \angle 2$.



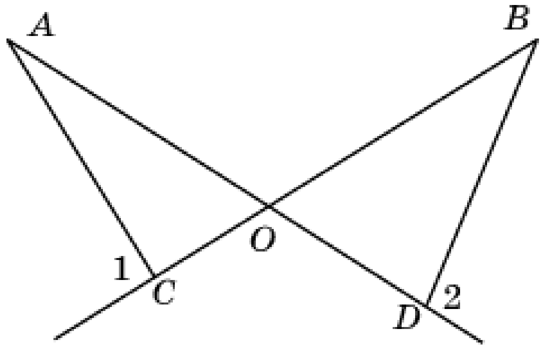
2. На рисунке $\angle 1 > \angle 2$. Докажите, что $AB > BC$.



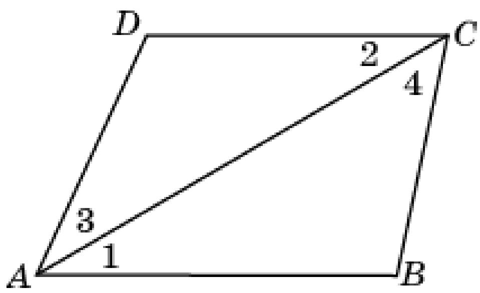
3. На рисунке $\angle 1 < \angle 2$. Докажите, что $\angle A < \angle B$.



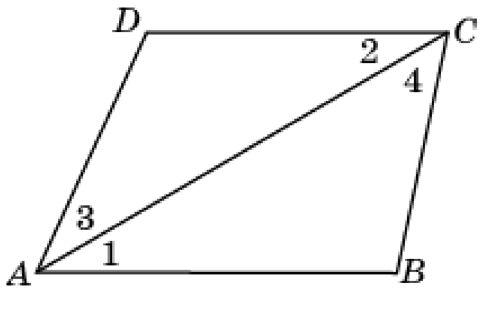
4. На рисунке $\angle A < \angle B$. Докажите, что $\angle 1 < \angle 2$.



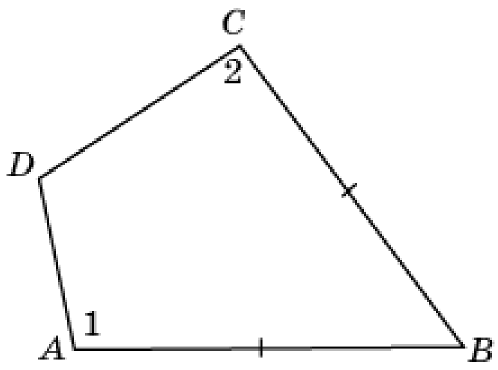
5. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 < \angle 4$. Докажите, что $CD < AB$.



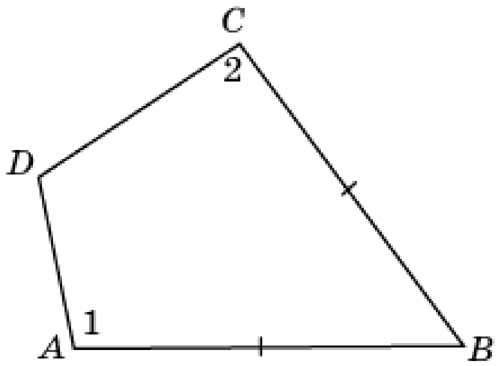
6. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $CD < AB$. Докажите, что $\angle 3 < \angle 4$.



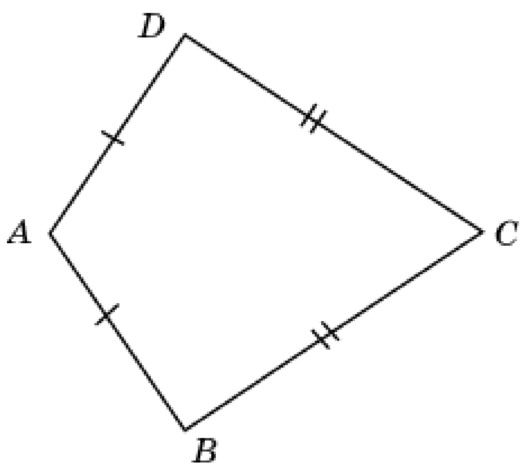
7. На рисунке $AB = BC$, $AD < CD$. Докажите, что $\angle 1 > \angle 2$.



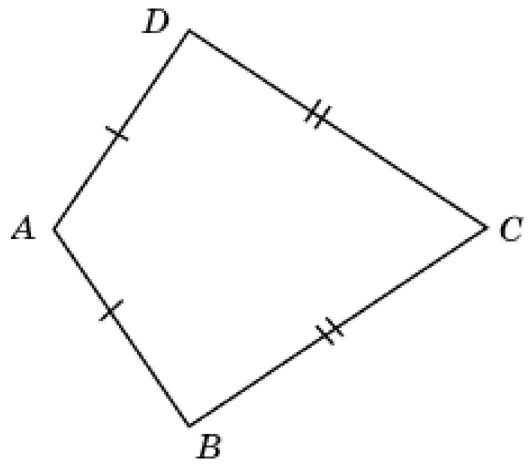
8. На рисунке $AB = BC$, $\angle 1 > \angle 2$. Докажите, что $AD < CD$.



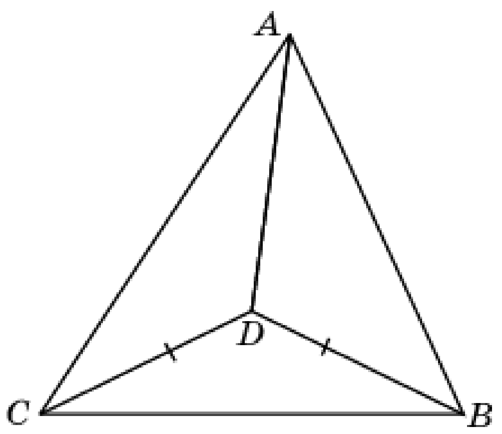
9. На рисунке $AB = AD$, $BC = CD$, $AB < BC$. Докажите, что $\angle A > \angle C$.



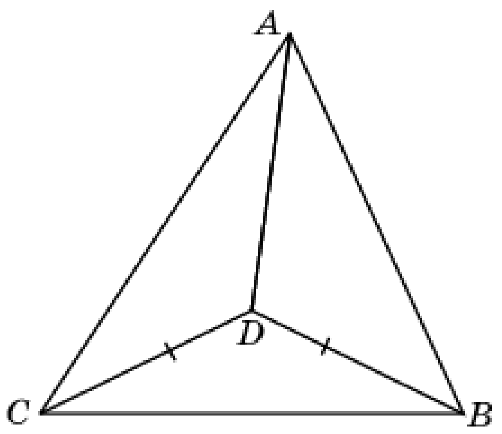
10. На рисунке $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A > \angle C$. Докажите, что $AB < BC$.



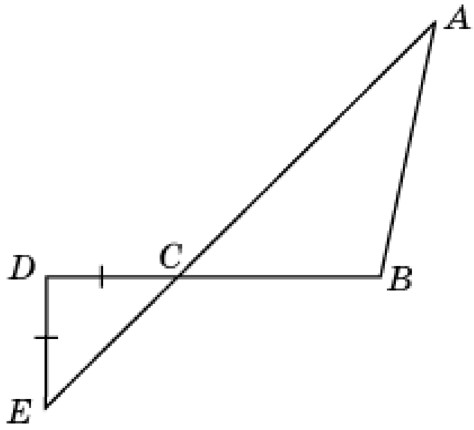
11. На рисунке $AC > AB$, $CD = BD$. Докажите, что $\angle ACD < \angle ABD$.



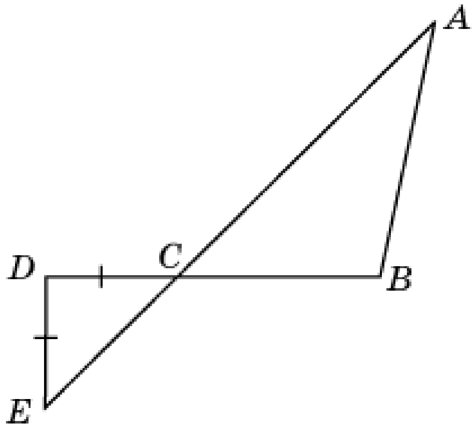
12. На рисунке $CD = BD$, $\angle ACD < \angle ABD$. Докажите, что $AC > AB$.



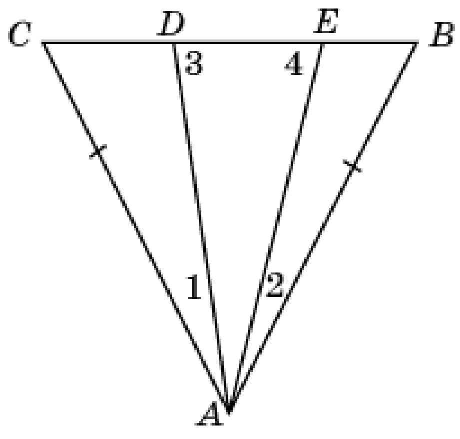
13. На рисунке $AB > BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC < \angle DEC$.



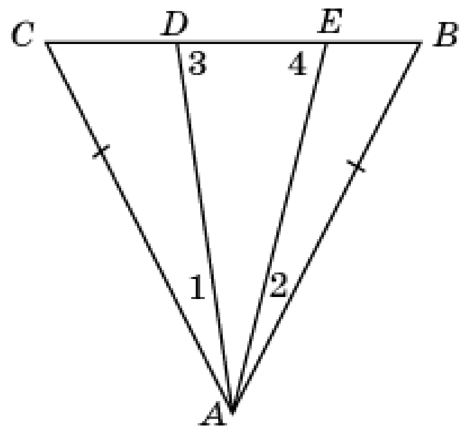
14. На рисунке $CD = DE$, $\angle BAC < \angle DEC$. Докажите, что $AB > BC$.



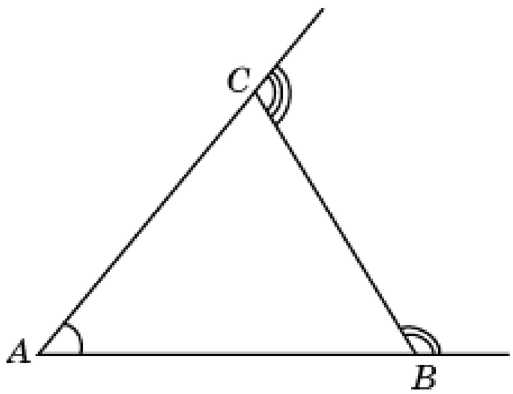
15. На рисунке $AB = AC$ и $\angle 1 > \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 > \angle 4$.



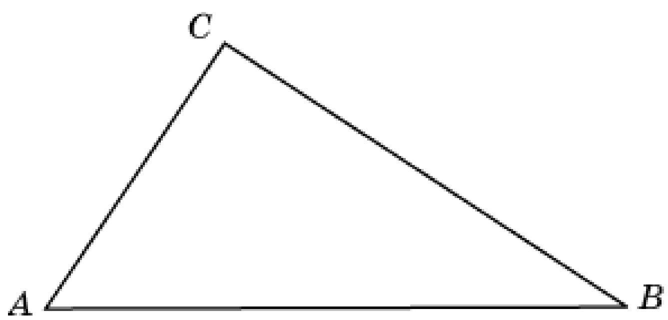
16. На рисунке $AB = AC$ и $\angle 3 > \angle 4$. Докажите, что $\angle 1 > \angle 2$.



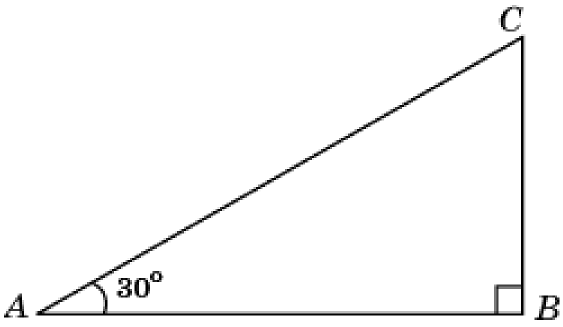
17. Докажите, что сумма двух внешних углов треугольника равна сумме внутреннего угла, не смежного с ними, и 180°.



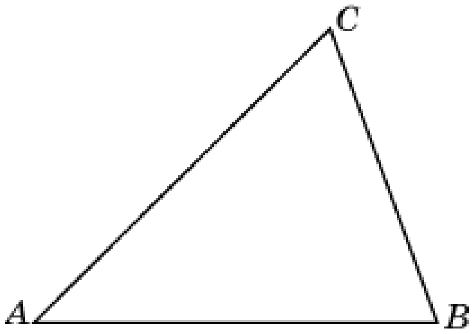
18. Докажите, что если один из углов треугольника равен сумме двух других, то треугольник – прямоугольный.



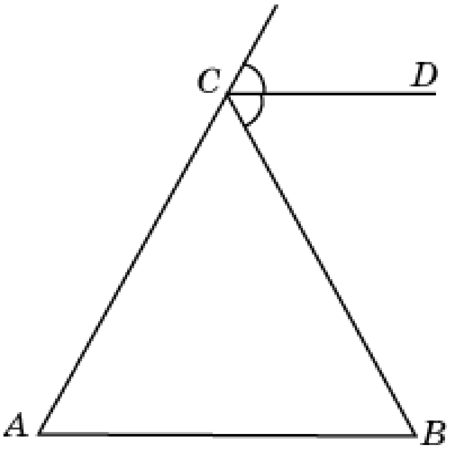
19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.



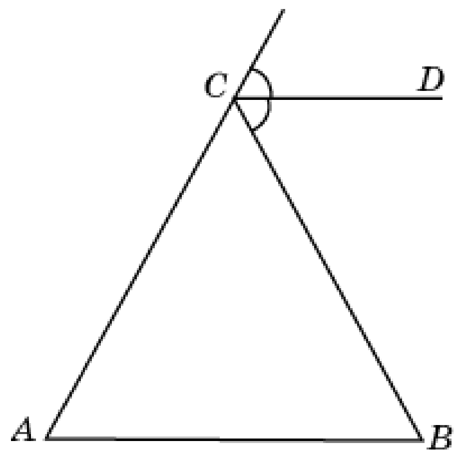
20. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше его полупериметра.



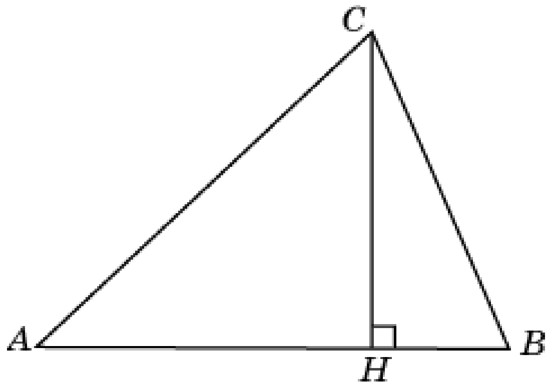
21. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, параллельна этому основанию.



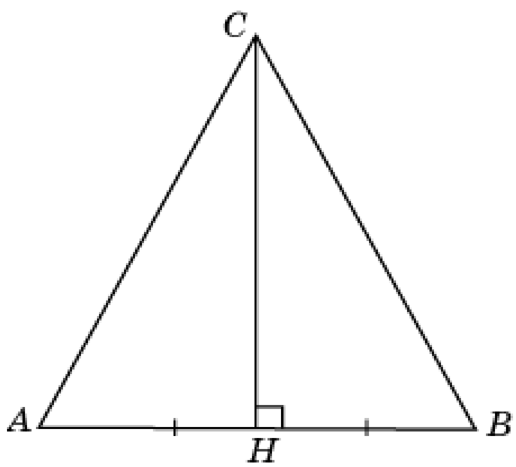
22. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне этого треугольника, то треугольник – равнобедренный.



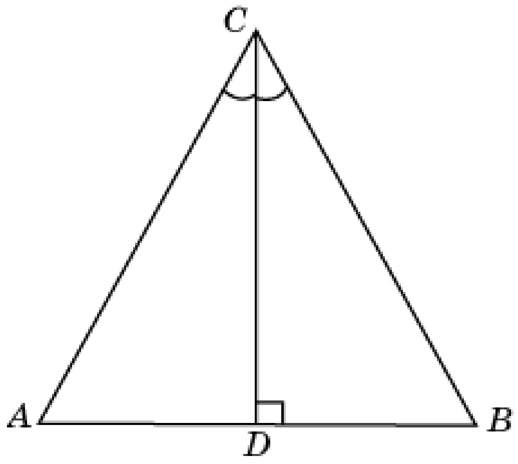
23. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, то для высоты CH выполняется неравенство $\angle ACH > \angle BCH$.



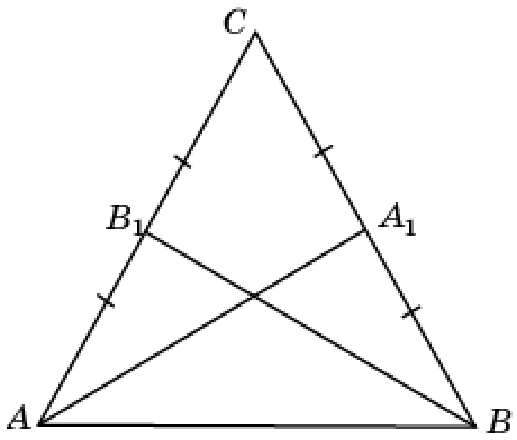
24. Докажите, что если высота и медиана, проведенные из вершины треугольника, совпадают, то треугольник – равнобедренный.



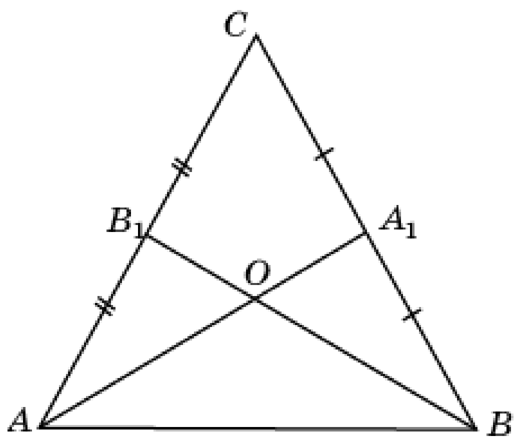
25. Докажите, что если биссектриса и высота, проведенные из вершины треугольника, совпадают, то треугольник – равнобедренный.



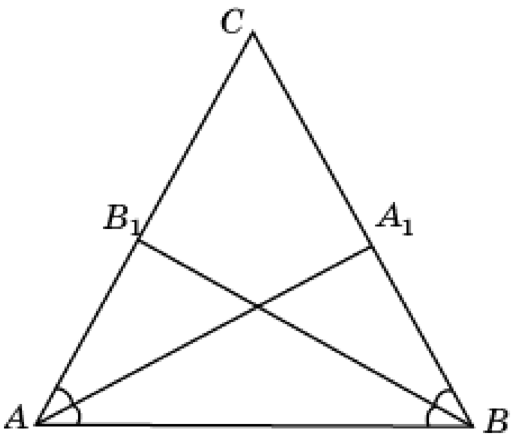
26. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



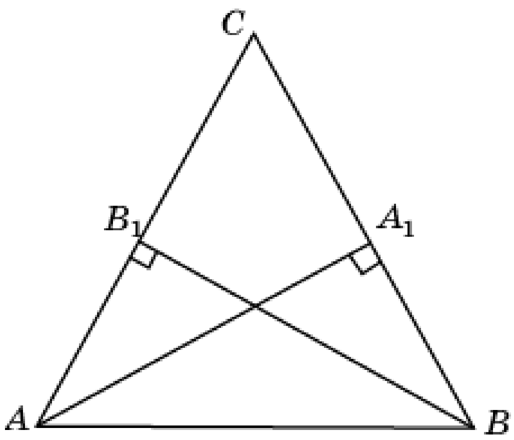
27. Докажите, что если две медианы треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.



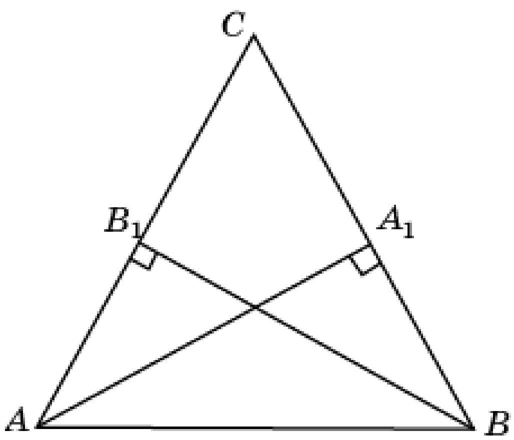
28. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



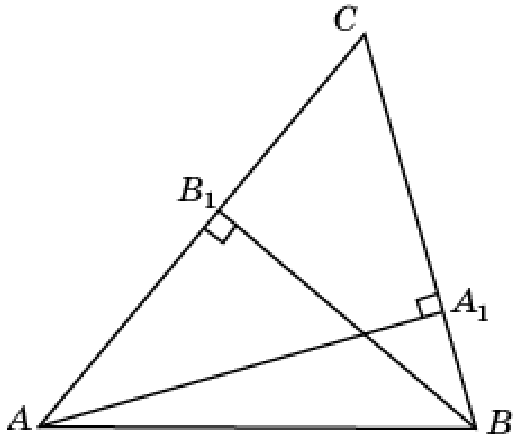
29. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



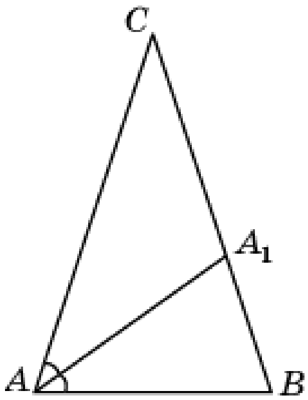
30. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.



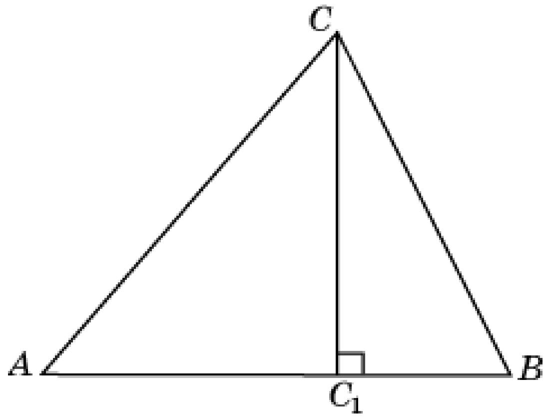
31. Докажите, что из двух высот треугольника больше та, которая опущена на меньшую сторону.



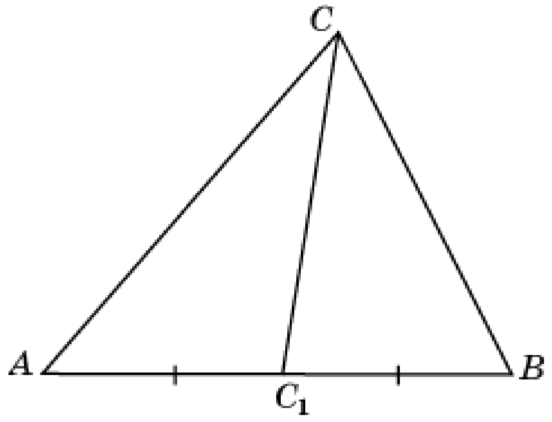
32. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 36°. Докажите, что биссектриса угла при основании делит этот равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника.



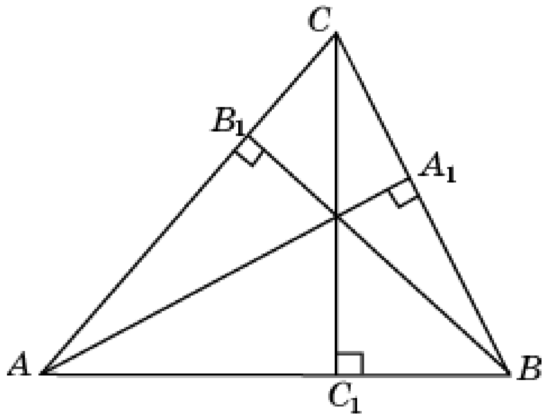
33. Докажите, что высота треугольника меньше полусуммы сторон, прилежащих к ней.



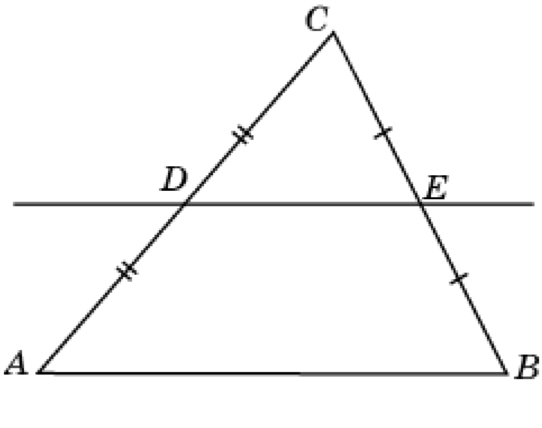
34. Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.



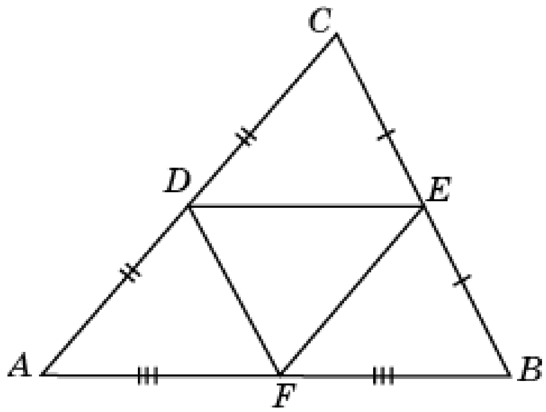
35. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.



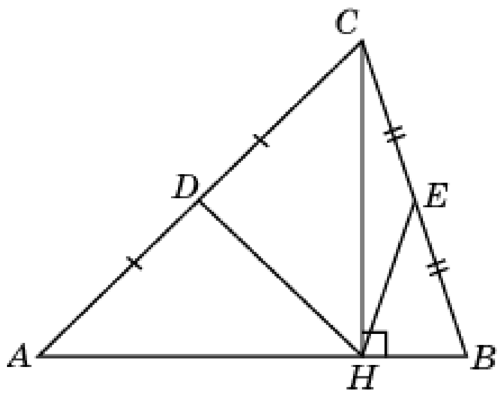
36. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.



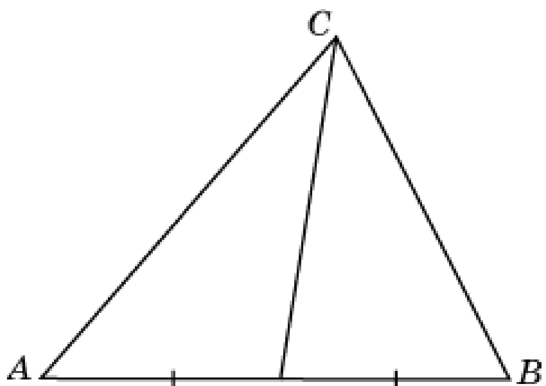
37. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.



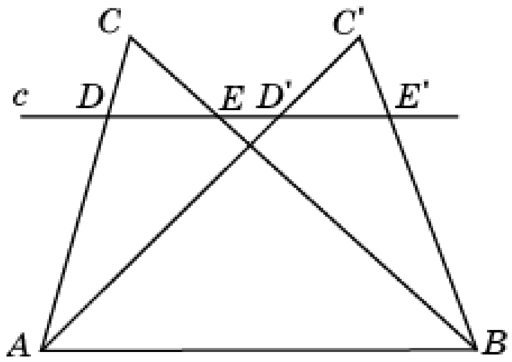
38. В треугольнике *ABC* точки *D* и *E* – середины сторон соответственно *AC* и *BC*, *CH* – высота. Докажите, что угол *C* равен углу *DHE*.



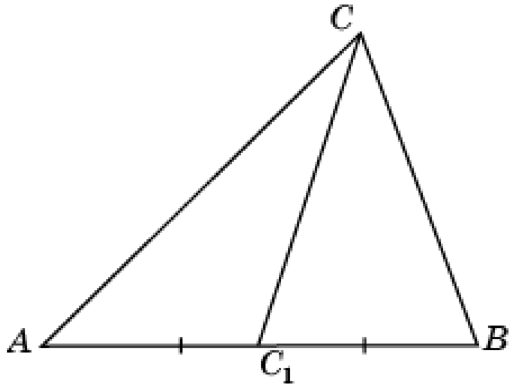
39. Докажите, что две вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей медиану, проведенную из третьей вершины данного треугольника.



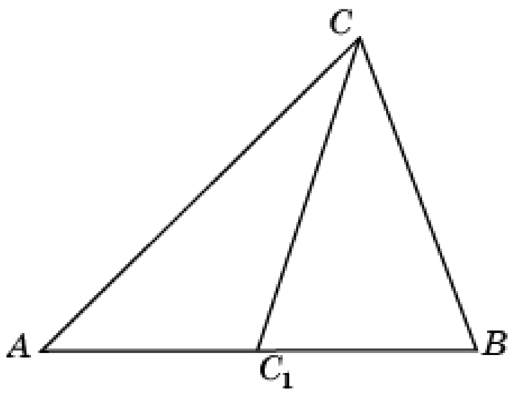
40. Пусть треугольники ABC и ABC' имеют равные высоты, опущенные на сторону AB и расположенные от нее по одну сторону. Прямая c параллельна AB и пересекает остальные стороны треугольников. Докажите, что отрезки DE и $D'E'$ этой прямой, заключенные в треугольниках, равны.



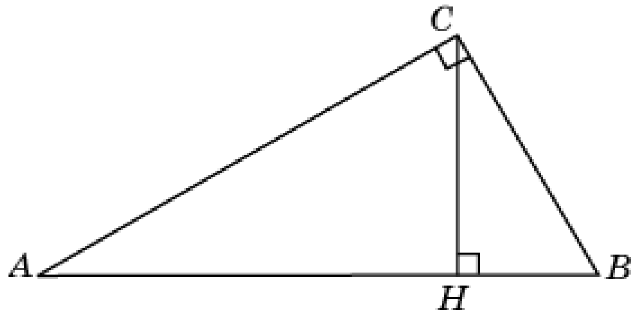
41. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.



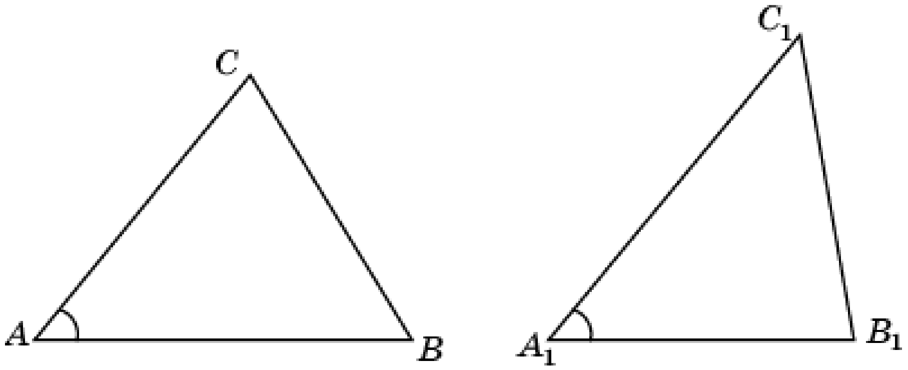
42. Докажите, что если отрезок CC_1, соединяющий вершину C треугольника ABC с точкой, принадлежащей противолежащей стороне этого треугольника, разбивает треугольник ABC на два равновеликих треугольника, то CC_1 – медиана.



43. Докажите, что произведение катетов прямоугольного треугольника равно произведению гипотенузы на высоту, опущенную на гипотенузу.

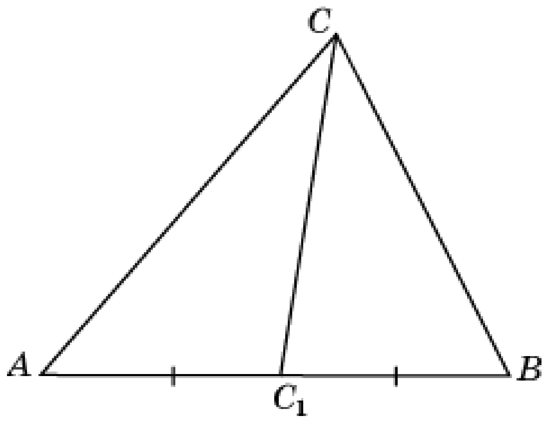


44. Докажите, что если два треугольника имеют по равному углу, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

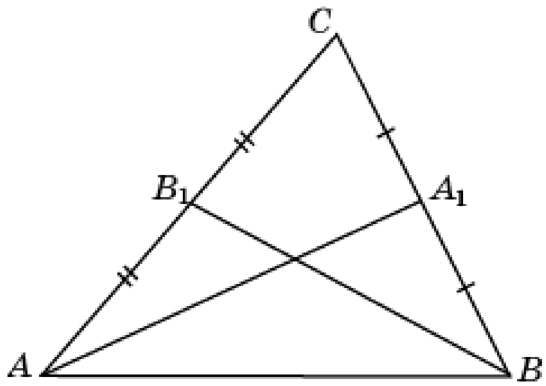


Уровень C

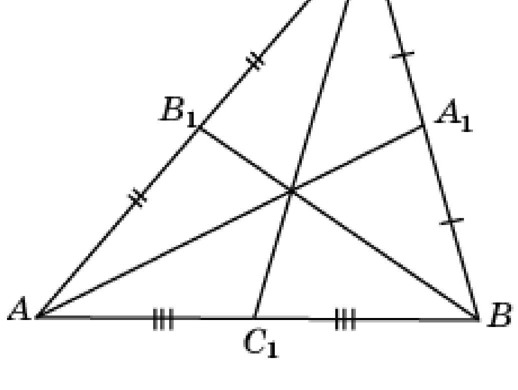
1. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается.



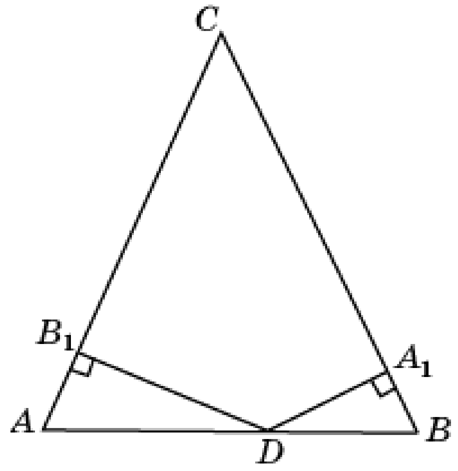
2. Докажите, что для стороны AB треугольника ABC и двух медиан AA_1, BB_1, проведенных к двум другим сторонам, имеет место неравенство $3AB < 2(AA_1 + BB_1)$.



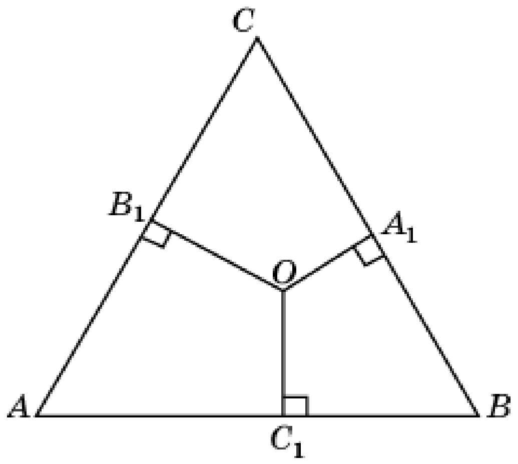
3. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше трех четвертей периметра.



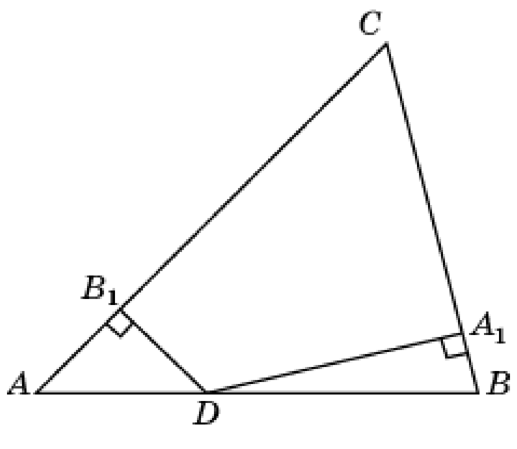
4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте этого треугольника, опущенной на боковую сторону.



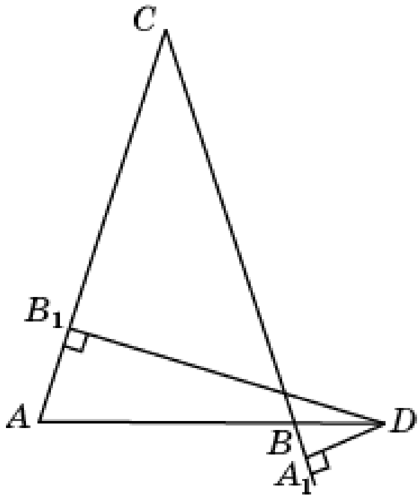
5. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки равностороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.



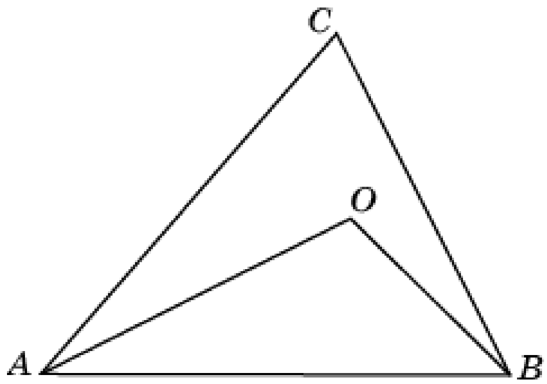
6. Докажите, что если в остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* меньше угла *B*, то из всех точек стороны *AB* наибольшую сумму расстояний от этой точки до сторон *AC* и *BC* имеет вершина *A*.



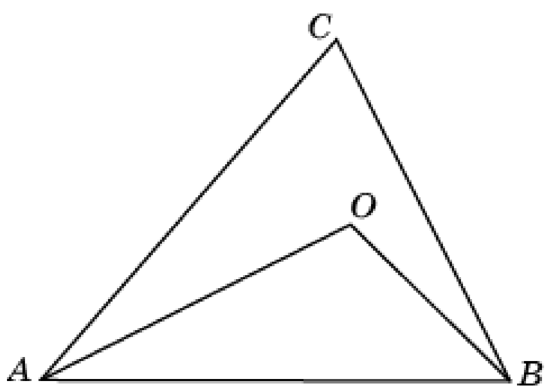
7. На продолжении основания равнобедренного треугольника взята точка. Докажите, что разность расстояний от этой точки до прямых, содержащих боковые стороны, равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону.



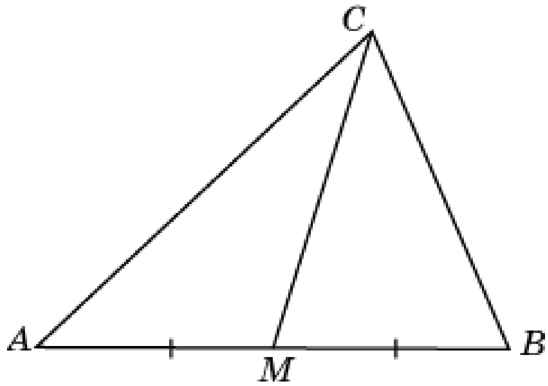
8. Докажите, что для всякой точки *O*, взятой внутри треугольника *ABC*, выполняется неравенство $AC + BC > AO + BO$.



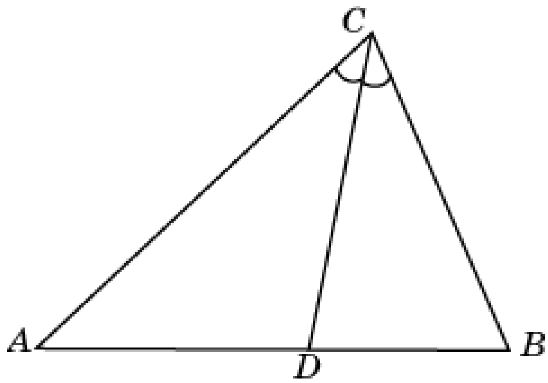
9. Докажите, что для всякой точки *O*, взятой внутри треугольника *ABC*, выполняется неравенство $\angle AOB > \angle ACB$.



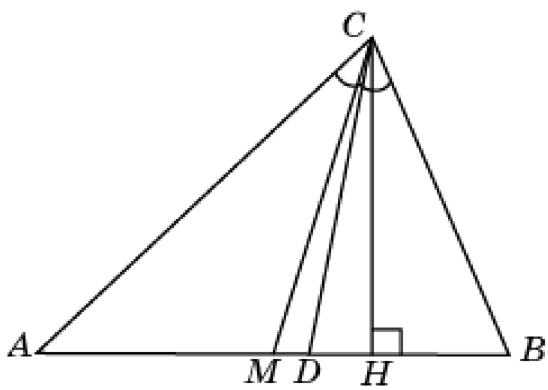
10. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, то для медианы CM выполняется неравенство $\angle BCM > \angle ACM$.



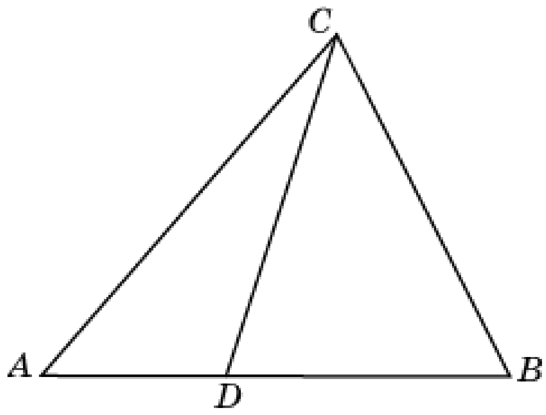
11. Докажите, что если в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > BC$, то для биссектрисы CD выполняется неравенство $AD > DB$.



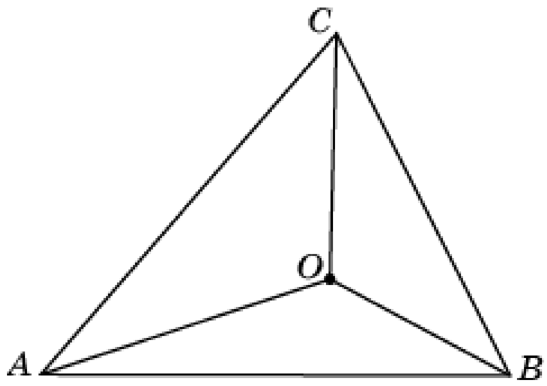
12. Докажите, что биссектриса треугольника лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.



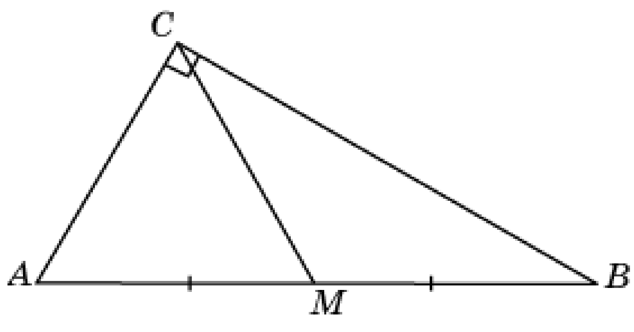
13. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до произвольной внутренней точки противолежащей стороны меньше наибольшей из двух других сторон.



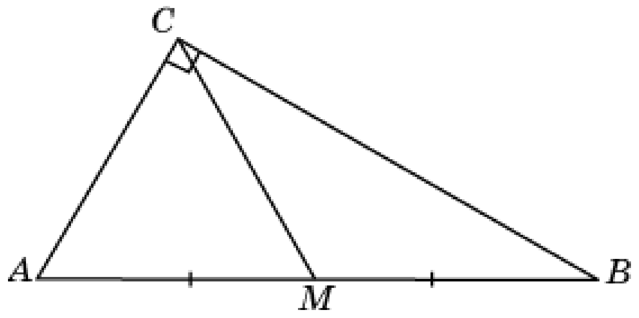
14. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки треугольника до его вершин меньше периметра треугольника и больше его полупериметра.



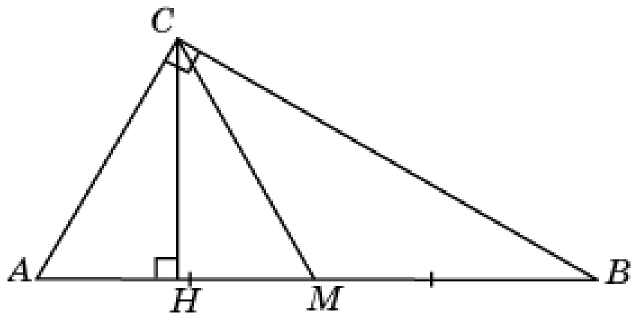
15. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.



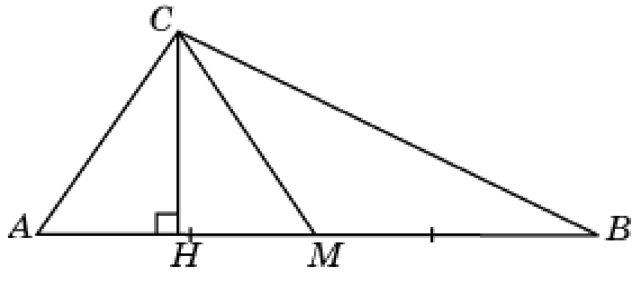
16. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник – прямоугольный.



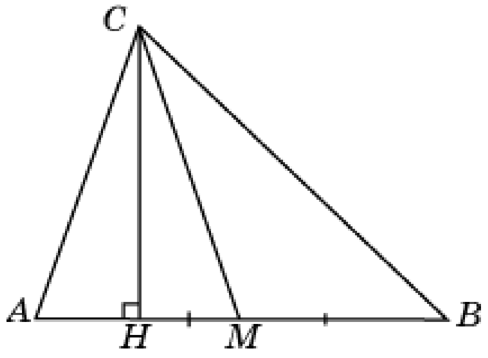
17. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана и высота, проведенные к гипотенузе, образуют угол, равный разности острых углов этого треугольника.



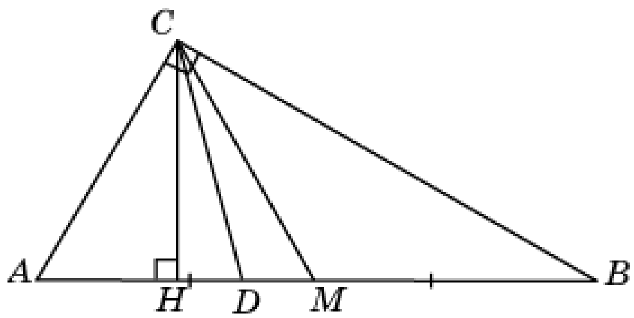
18. Докажите, что в тупоугольном треугольнике угол между медианой и высотой, проведенными из вершины тупого угла, больше разности двух других углов этого треугольника.



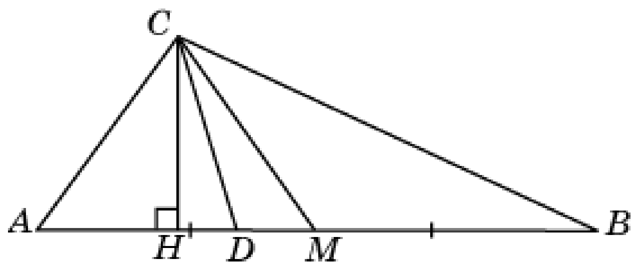
19. Докажите, что в остроугольном треугольнике угол между медианой и высотой, проведенными из вершины одного угла, меньше разности двух других углов этого треугольника.



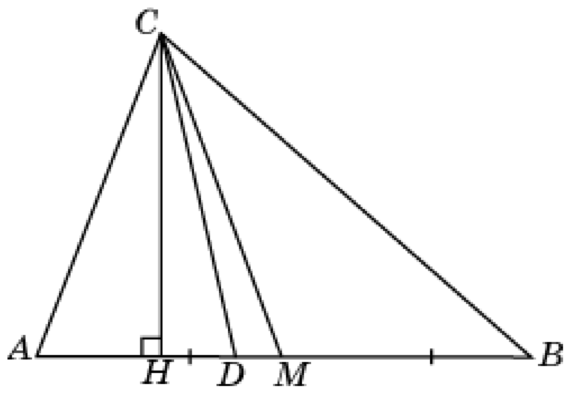
20. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины того же угла.



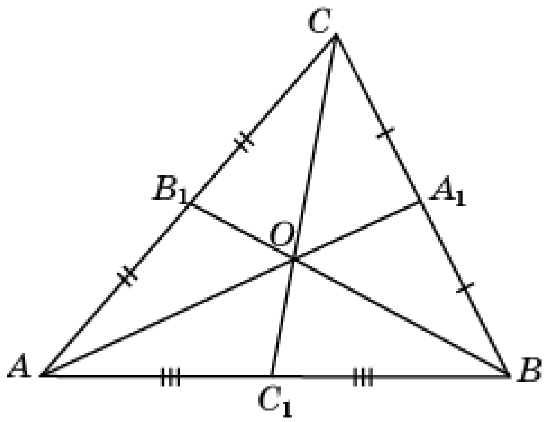
21. Докажите, что в тупоугольном треугольнике угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины тупого угла, больше угла между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины того же угла.



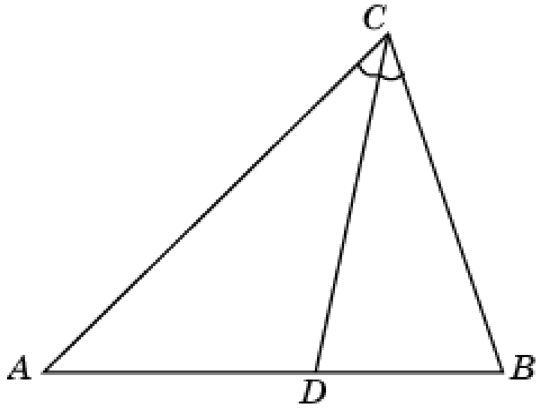
22. Докажите, что в остроугольном треугольнике угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины одного угла, меньше угла между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины того же угла.



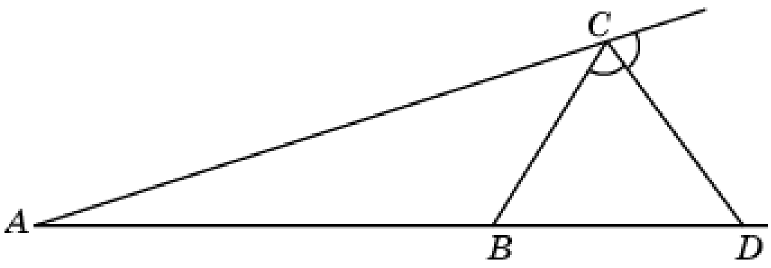
23. Докажите, что медиана треугольника меньше суммы двух других его медиан.



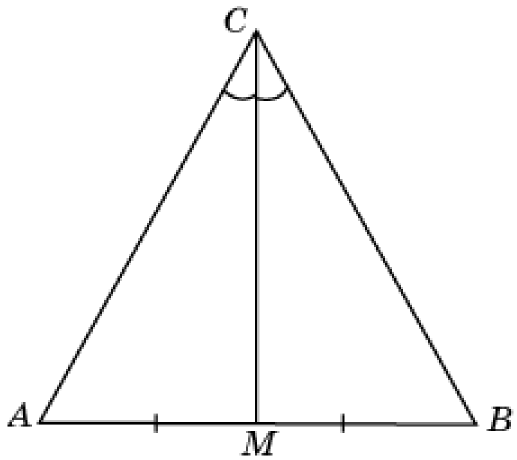
24. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.



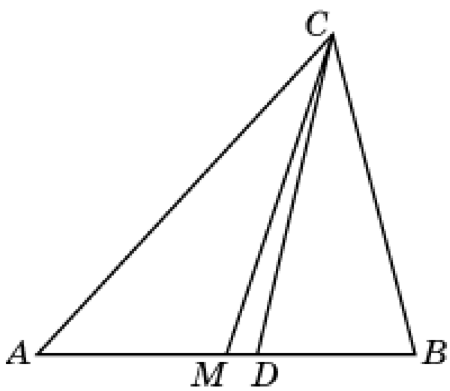
25. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противолежащей стороны, то расстояния от точки пересечения до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.



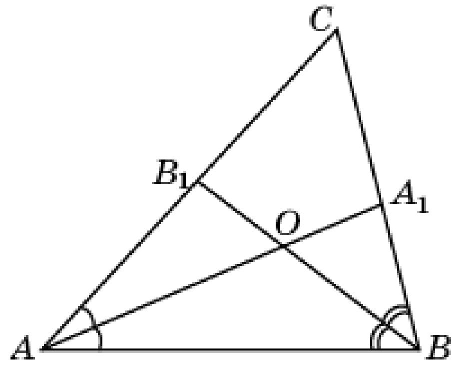
26. Докажите, что если медиана и биссектриса, проведенные из вершины треугольника, совпадают, то этот треугольник – равнобедренный.



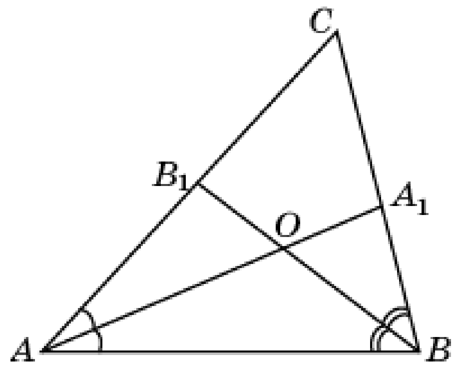
27. Докажите, что биссектриса треугольника не может быть больше медианы, проведенной из той же вершины.



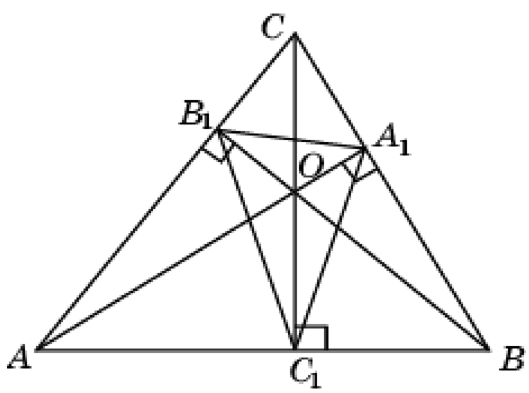
28. Докажите, что никакие две биссектрисы треугольника не могут быть перпендикулярны.



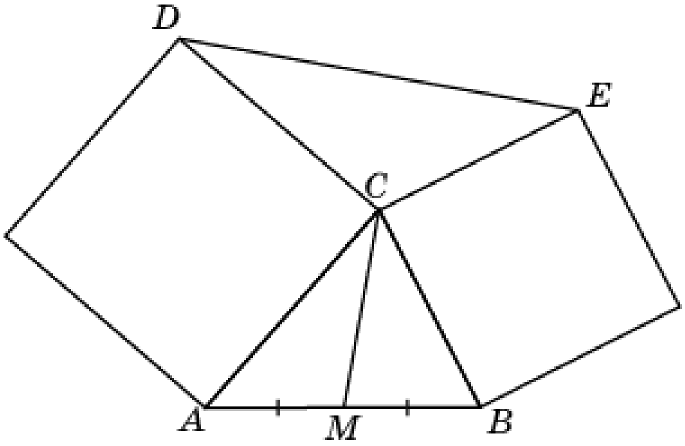
29. Докажите, что биссектриса треугольника не может проходить через середину другой биссектрисы.



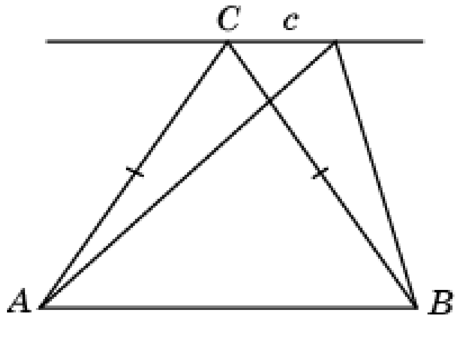
30. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на соответствующих высотах треугольника *ABC*.



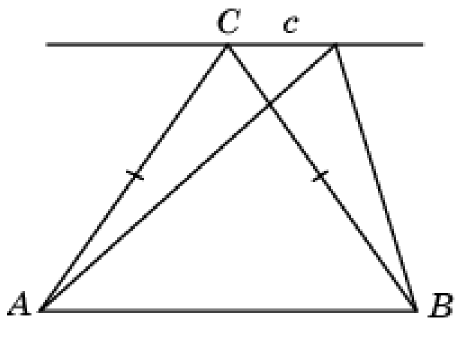
31. На двух сторонах треугольника, вне его, построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.



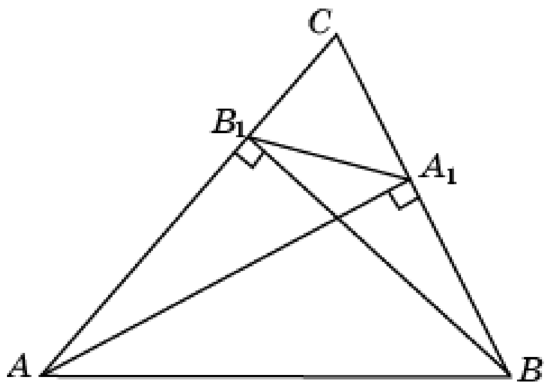
32. Дан отрезок *AB* и прямая *c*, ему параллельная. Докажите, что из всех треугольников *ABC*, у которых вершина *C* принадлежит прямой *c*, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник (*AC* = *BC*).



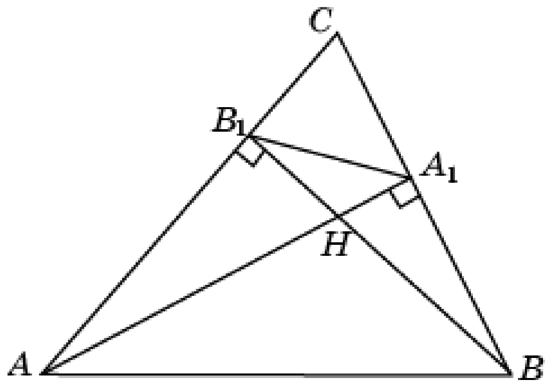
33. Дан отрезок *AB* и прямая *c*, ему параллельная. Докажите, что из всех треугольников *ABC*, у которых вершина *C* принадлежит прямой *c*, наибольший угол *C* имеет равнобедренный треугольник (*AC* = *BC*).



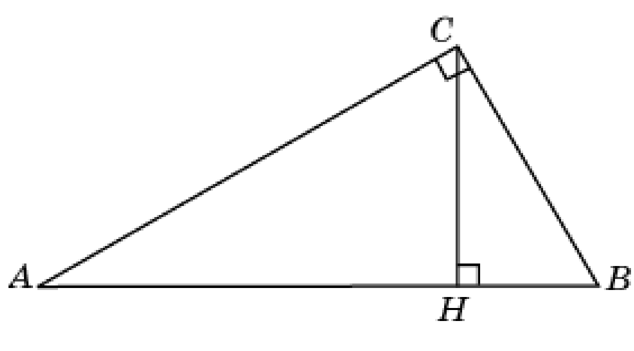
34. Докажите, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.



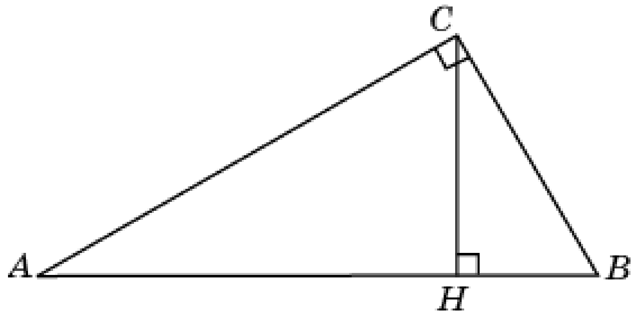
35. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что треугольники HAB и HB_1A_1 подобны.



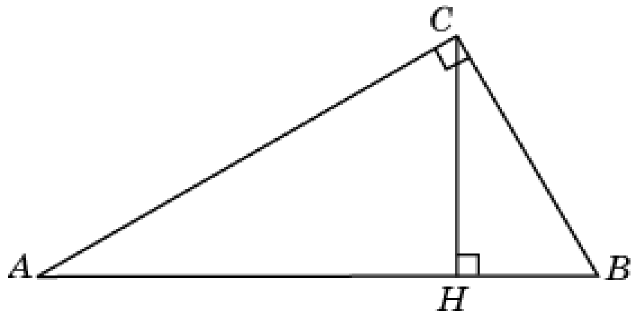
36. Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.



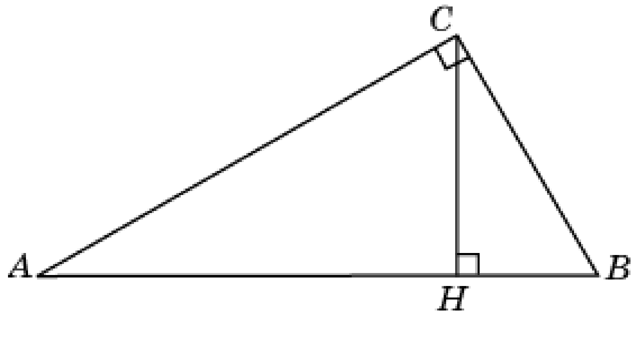
37. Докажите, что сумма величин, обратных квадратам длин катетов прямоугольного треугольника, равна величине, обратной квадрату длины высоты этого треугольника, опущенной на его гипотенузу.



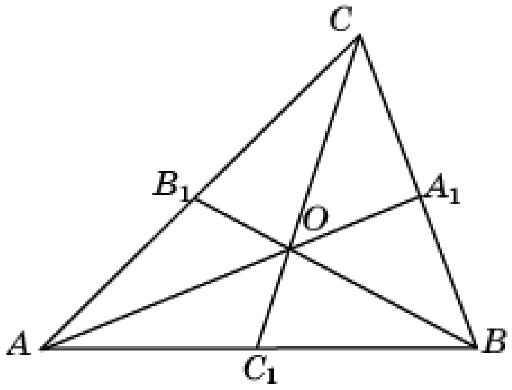
38. Докажите, что каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.



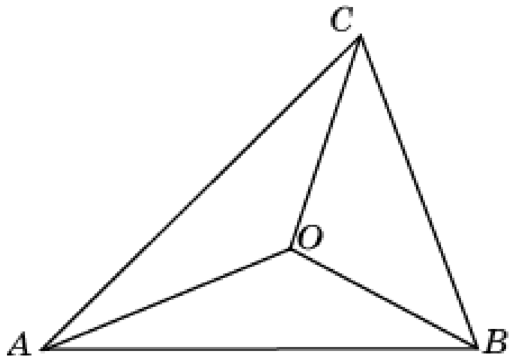
39. Докажите, что отношение проекций катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равно отношению квадратов катетов.



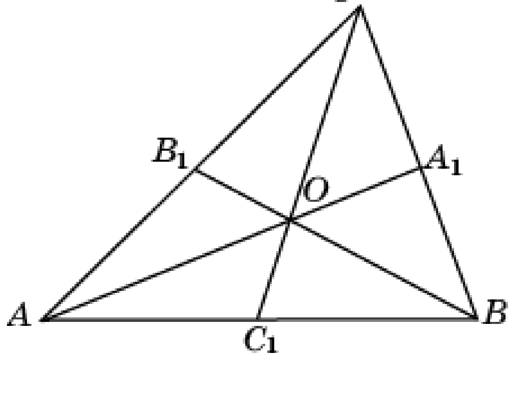
40. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.



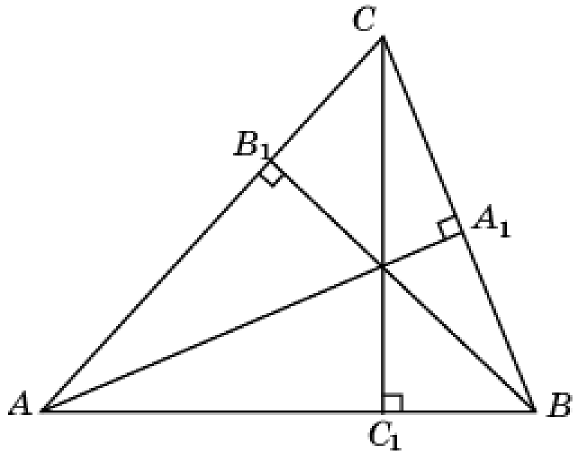
41. Внутри треугольника *ABC* взята точка *O* такая, что площади треугольников *AOB*, *BOC* и *AOC* равны. Докажите, что *O* – точка пересечения медиан данного треугольника.



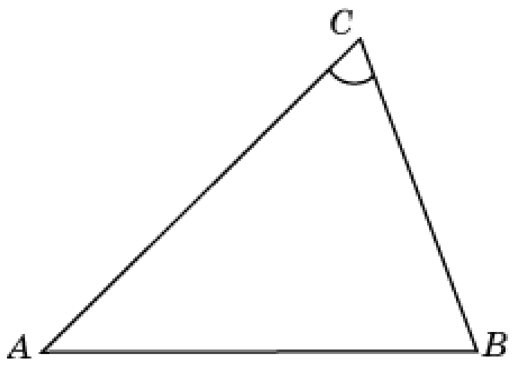
42. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника, равна трем четвертым площади данного треугольника.



43. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны высотам, проведенным к этим сторонам.



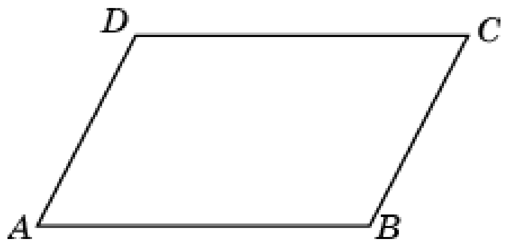
44. Докажите, что из всех треугольников с данной стороной и данным углом, противолежащим этой стороне, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник, основанием которого является данная сторона.



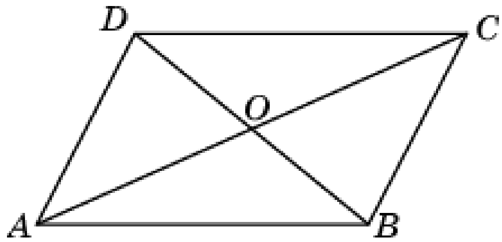
4. Четырехугольники

Уровень А

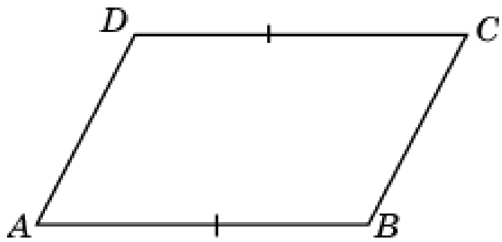
1. Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.



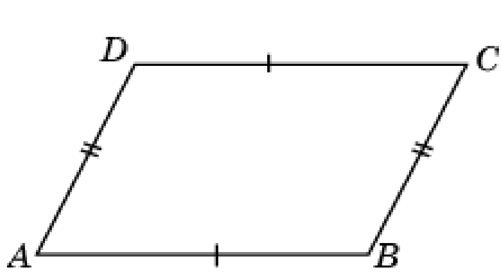
2. Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



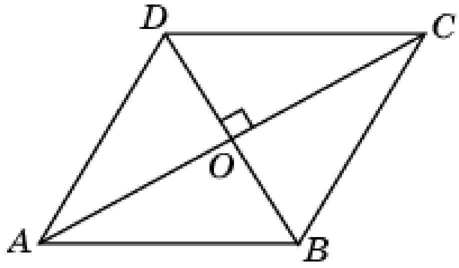
3. Докажите, что если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



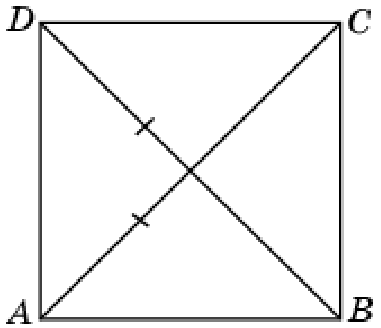
4. Докажите, что если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



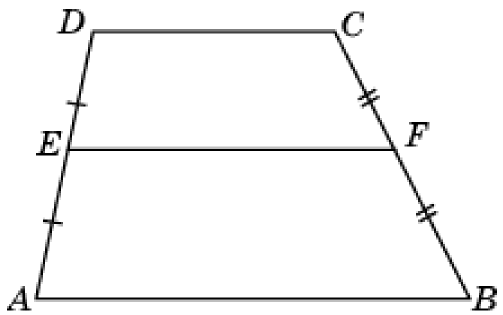
5. Докажите, что если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.



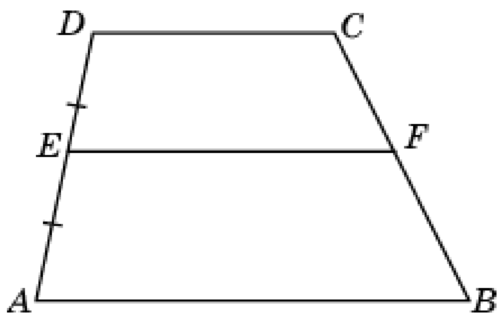
6. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.



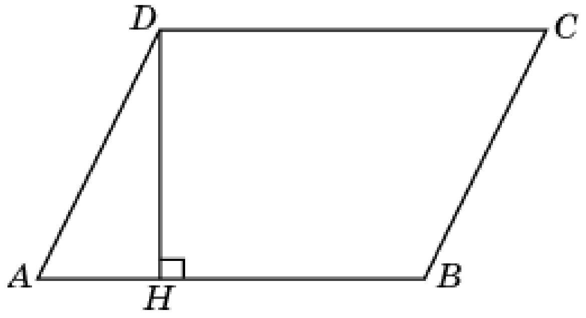
7. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



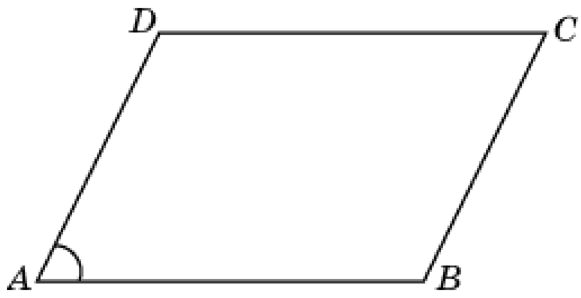
8. Докажите, что прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельная основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.



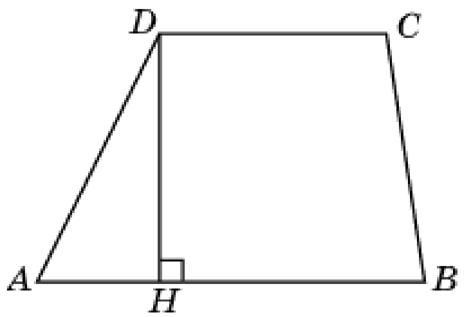
9. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



10. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

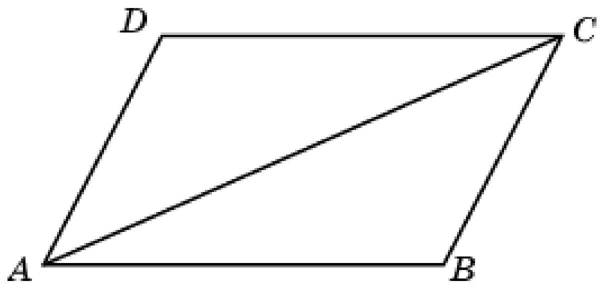


11. Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

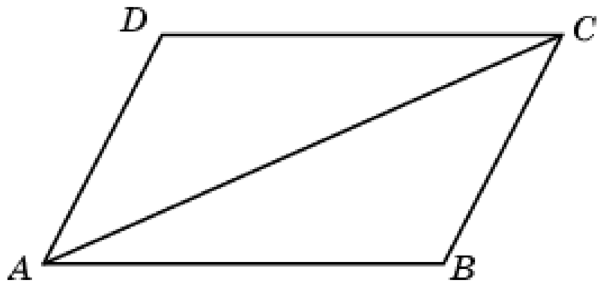


Уровень В

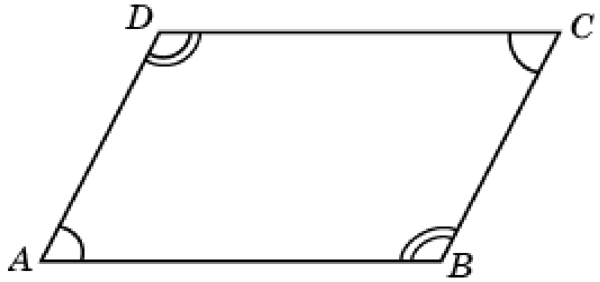
1. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два равных треугольника.



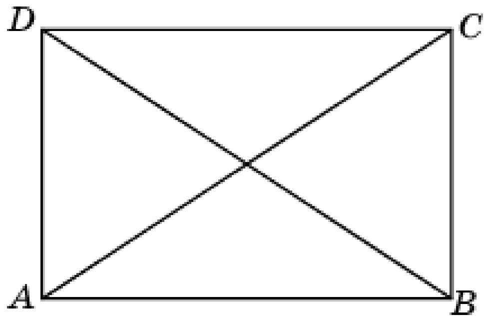
2. Верно ли, что если диагональ четырехугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырехугольник – параллелограмм?



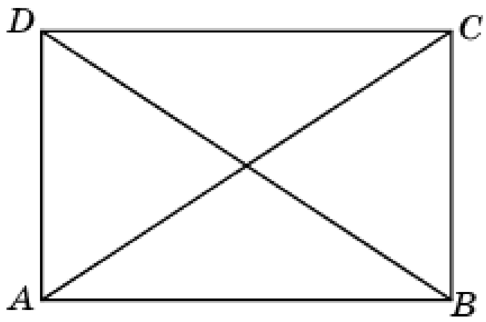
3. Докажите, что если противоположные углы четырехугольника равны, то он – параллелограмм.



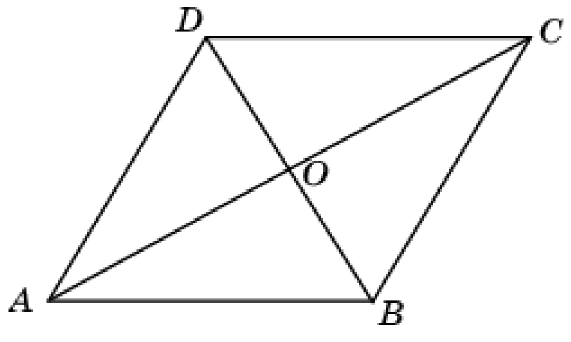
4. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.



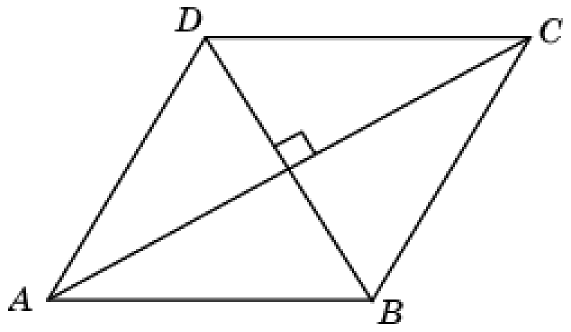
5. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.



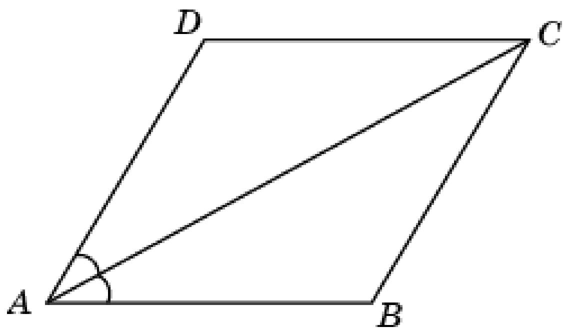
6. Докажите, что у ромба диагонали перпендикулярны.



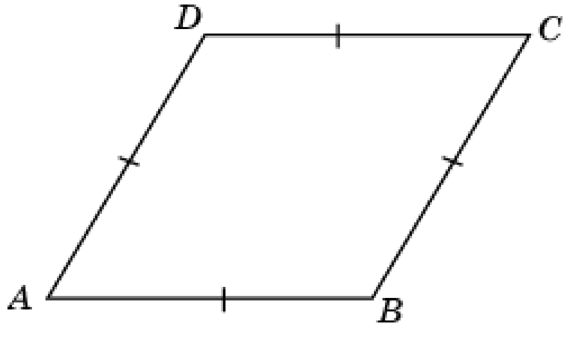
7. Докажите, что если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он является ромбом.



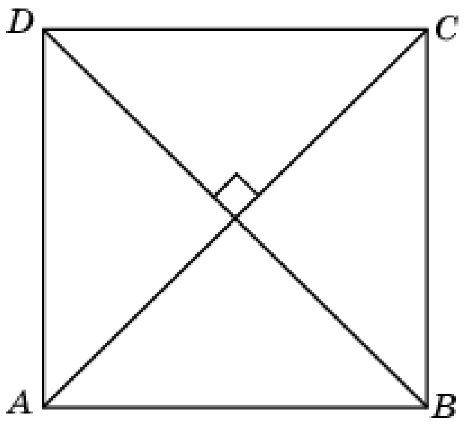
8. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.



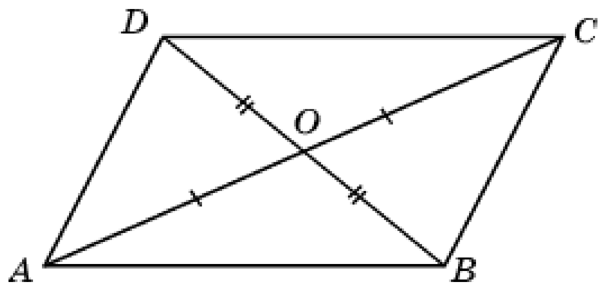
9. Докажите, что если у четырехугольника все стороны равны, то он является ромбом.



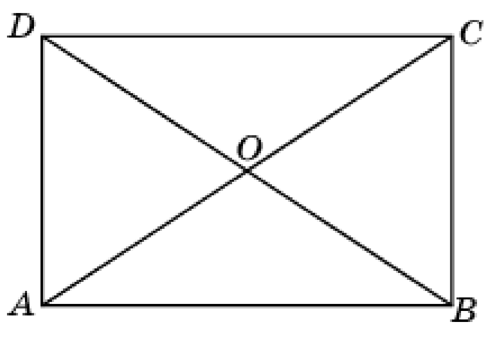
10. Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то он является квадратом.



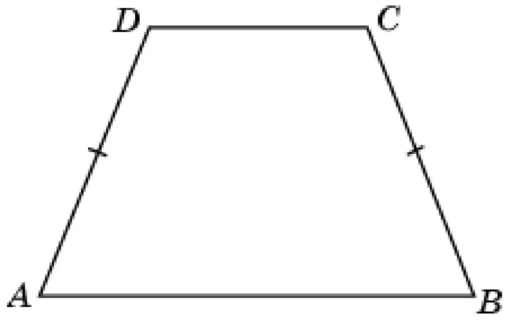
11. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.



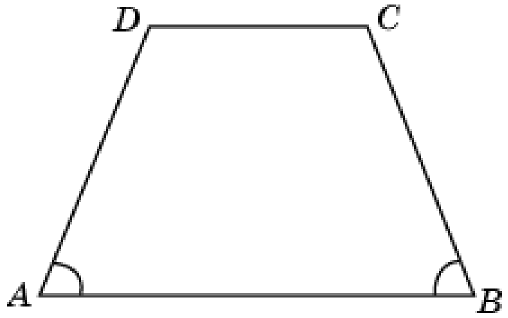
12. Докажите, что если диагонали четырехугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является прямоугольником.



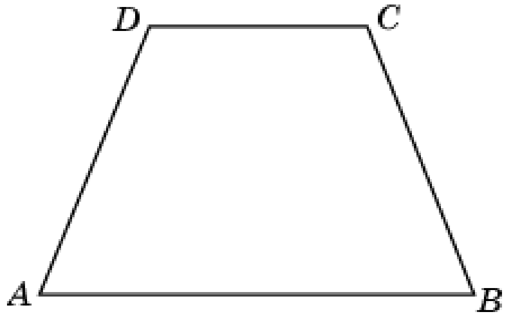
13. Докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.



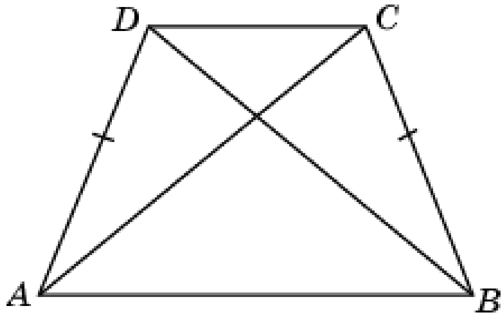
14. Докажите, что если два угла при основании трапеции равны, то трапеция – равнобедренная.



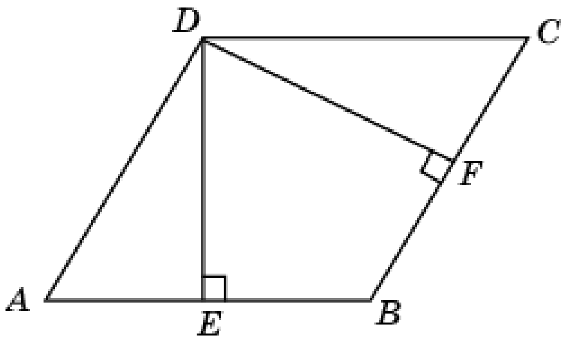
15. Докажите, что если сумма двух противоположных углов трапеции равна 180°, то эта трапеция – равнобедренная.



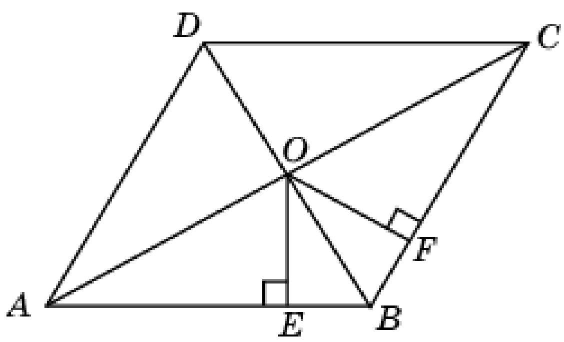
16. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.



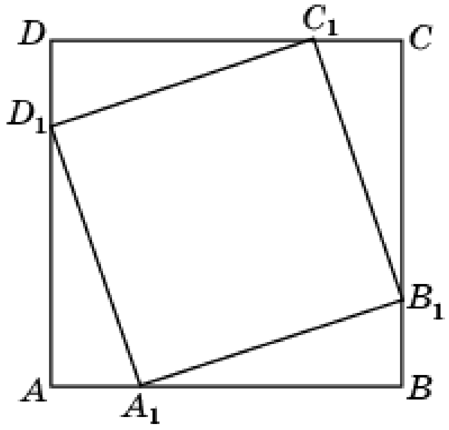
17. Докажите, что высоты ромба равны.



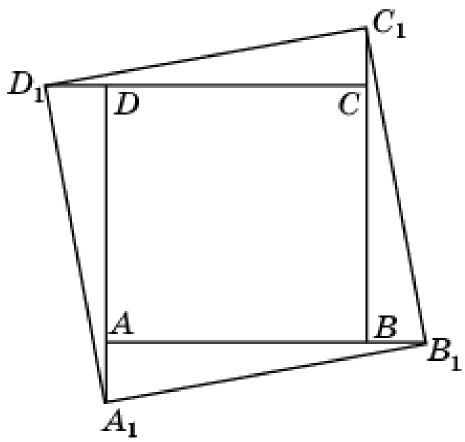
18. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.



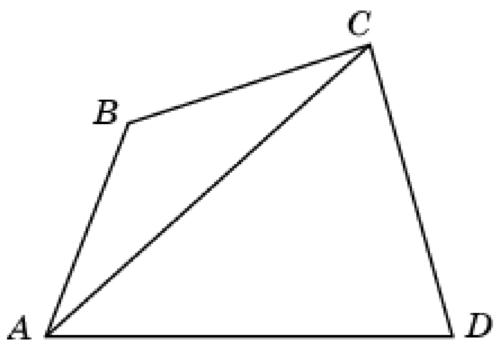
19. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.



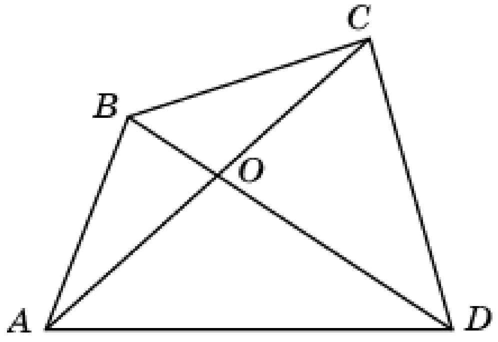
20. На продолжениях сторон квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.



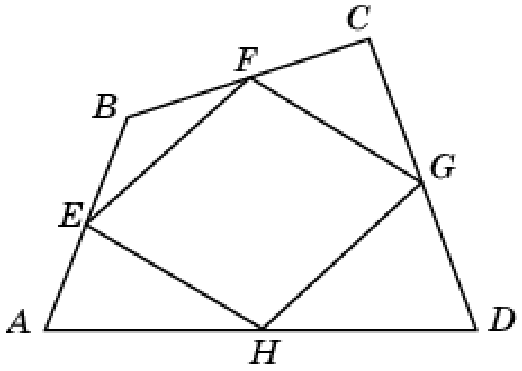
21. Докажите, что диагональ четырехугольника меньше его полупериметра.



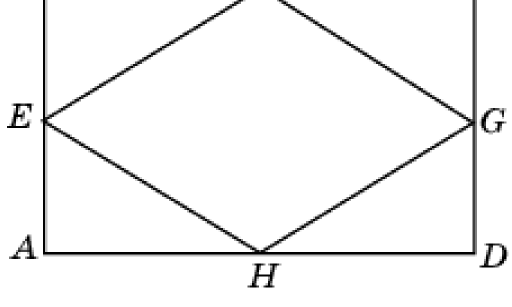
22. Докажите, что сумма противоположных сторон четырехугольника меньше суммы его диагоналей.



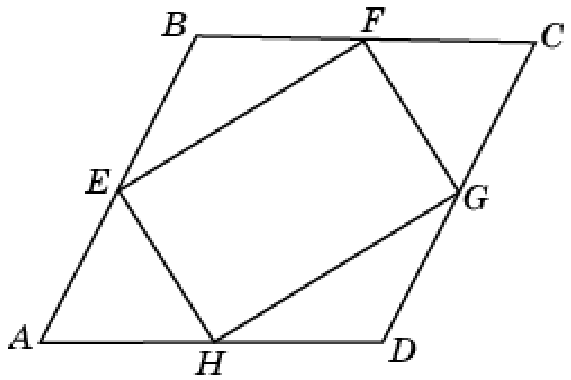
23. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



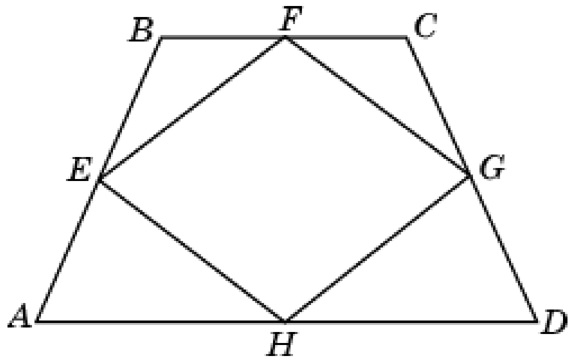
24. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.



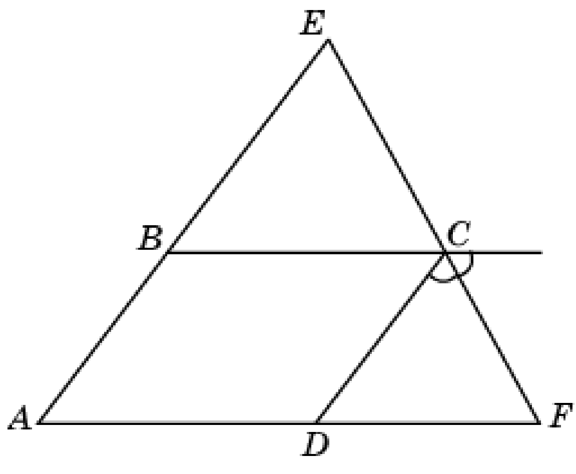
25. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.



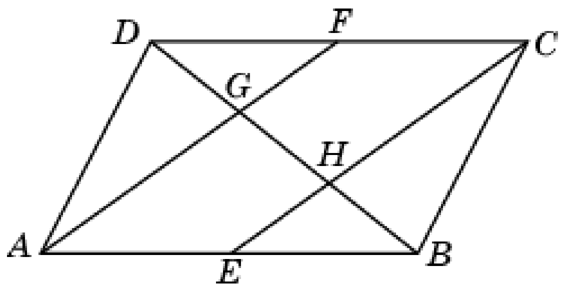
26. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.



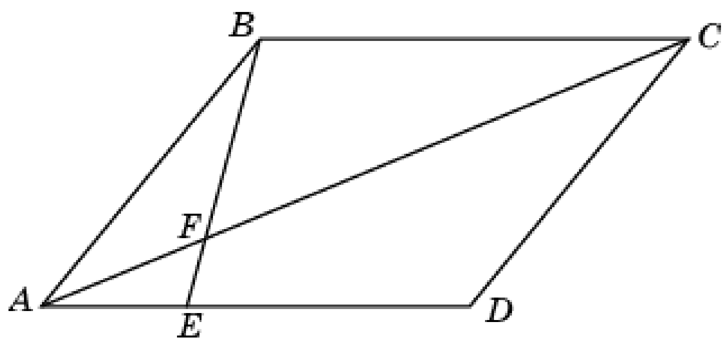
27. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису внешнего угла параллелограмма, и две прямые, содержащие две стороны параллелограмма, не проходящие через вершину этого угла, образуют равнобедренный треугольник, сумма боковых сторон которого равна периметру параллелограмма.



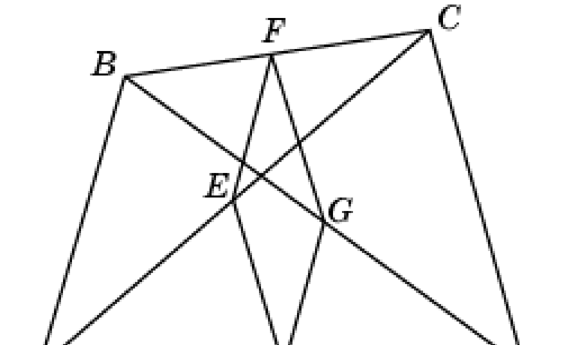
28. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F – середины противоположных сторон AB и CD соответственно. Докажите, что прямые AF и CE делят диагональ BD на три равные части.



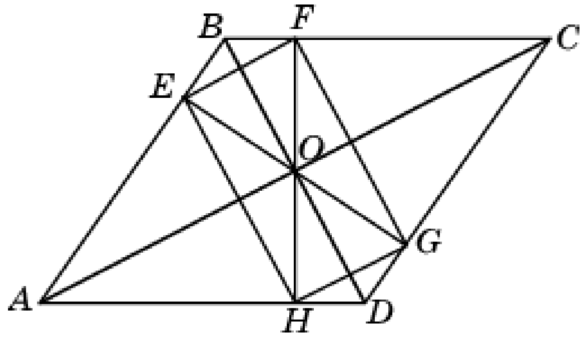
29. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AE = \dfrac{AD}{n}$, F – точка пересечения прямых AC и BE. Докажите, что $AF = \dfrac{AC}{n+1}$.



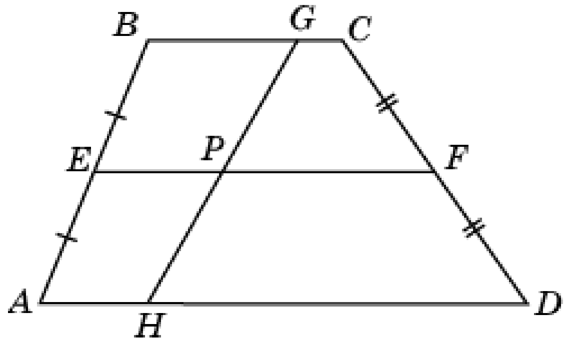
30. Докажите, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами параллелограмма.



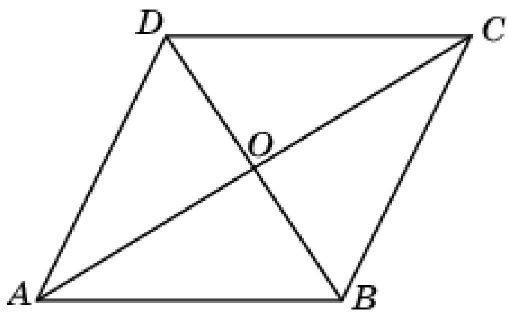
31. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей ромба на его стороны, являются вершинами прямоугольника.



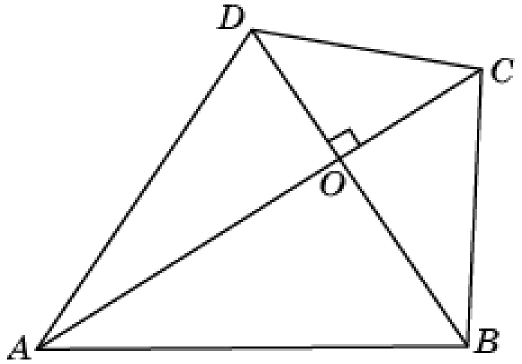
32. Докажите, что любой отрезок, соединяющий какие-нибудь две точки, принадлежащие основаниям трапеции, делится средней линией пополам.



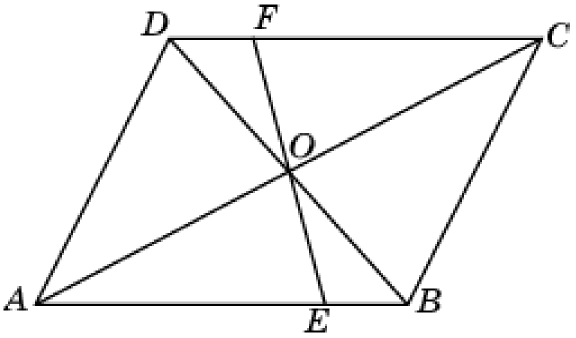
33. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.



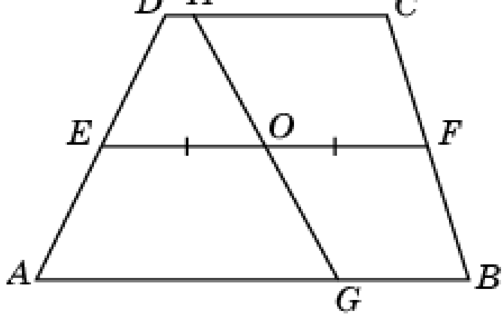
34. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей.



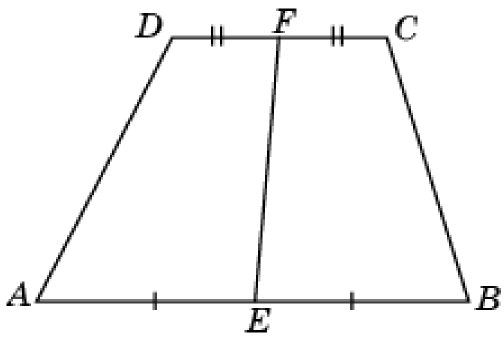
35. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, делит его на две равновеликие части.



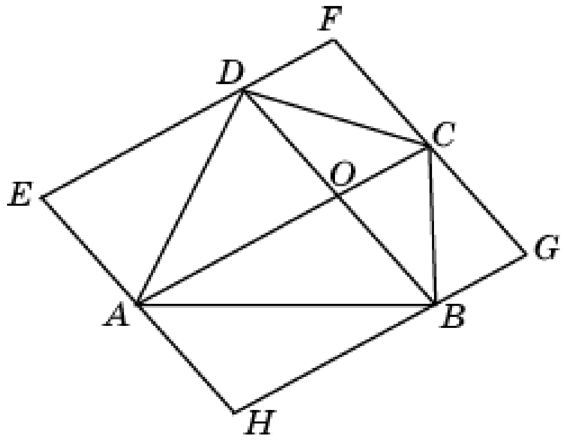
36. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.



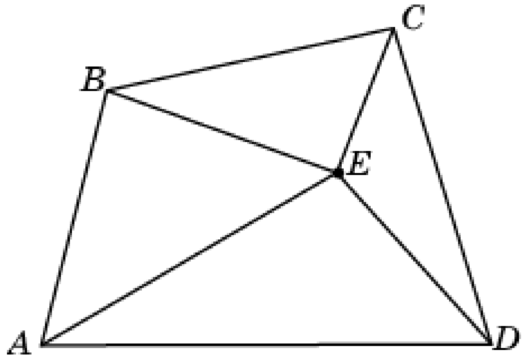
37. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разбивает ее на две равновеликие части.



38. Докажите, что если через вершины выпуклого четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

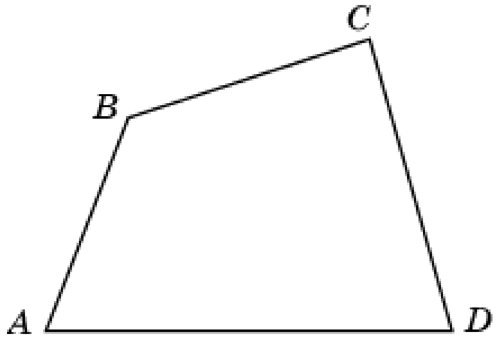


39. Докажите, что наименьшую сумму расстояний от точек плоскости до вершин данного выпуклого четырехугольника имеет точка пересечения его диагоналей.

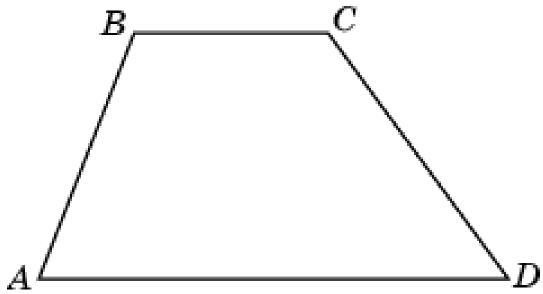


Уровень С

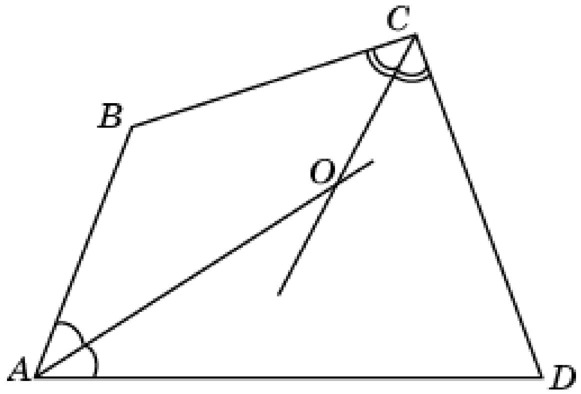
1. Докажите, что сумма двух противоположных сторон четырехугольника больше разности двух других его сторон.



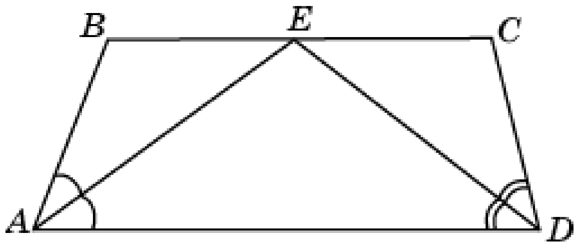
2. Докажите, что разность большего и меньшего оснований трапеции больше разности ее боковых сторон.



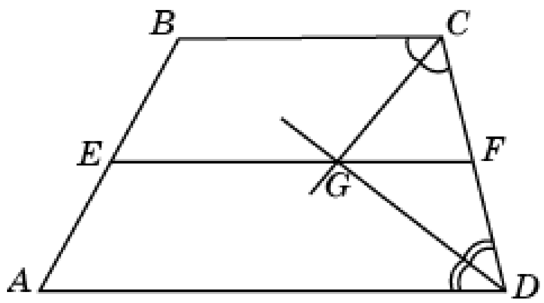
3. Докажите, что угол между биссектрисами двух противоположных углов выпуклого четырехугольника равен полуразности двух других углов.



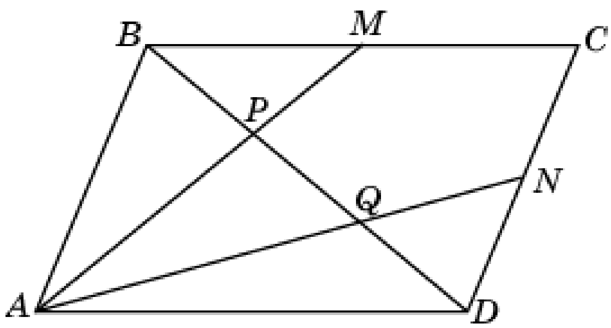
4. Докажите, что если биссектрисы углов при одном из оснований трапеции пересекаются в точке, принадлежащей второму основанию, то это второе основание равно сумме боковых сторон трапеции.



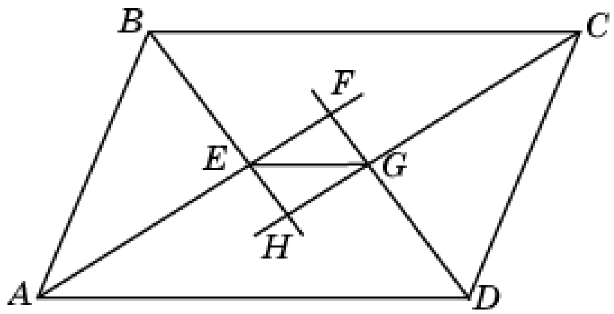
5. Докажите, что биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, принадлежащей средней линии трапеции.



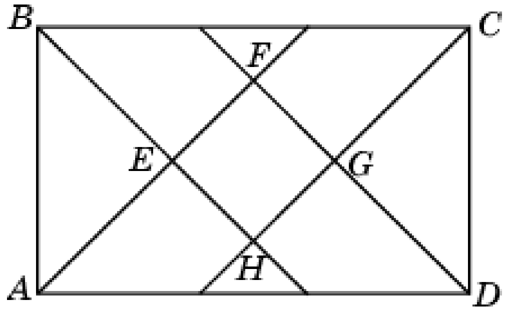
6. В параллелограмме *ABCD* точка *M* – середина *BC*, *N* – середина *CD*. Докажите, что прямые *AM* и *AN* делят диагональ *BD* на три равные части.



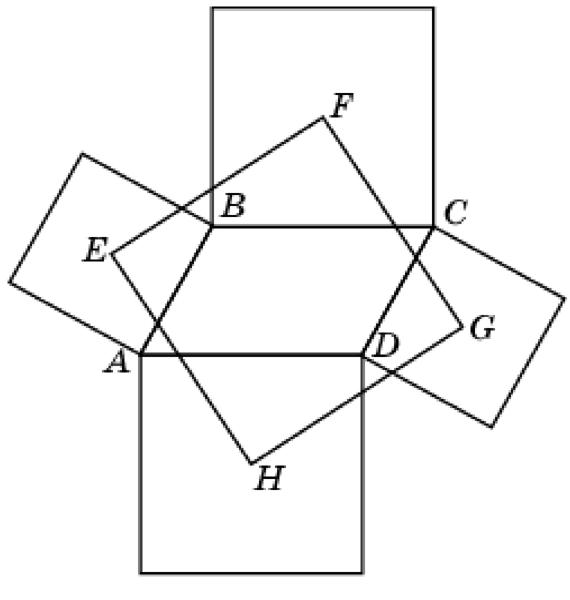
7. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма ограничивают прямоугольник, диагональ которого равна разности соседних сторон параллелограмма.



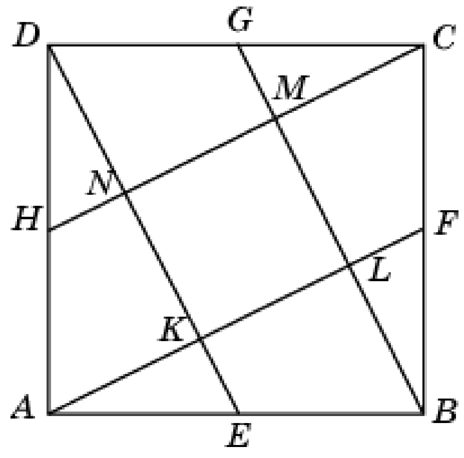
8. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника ограничивают квадрат.



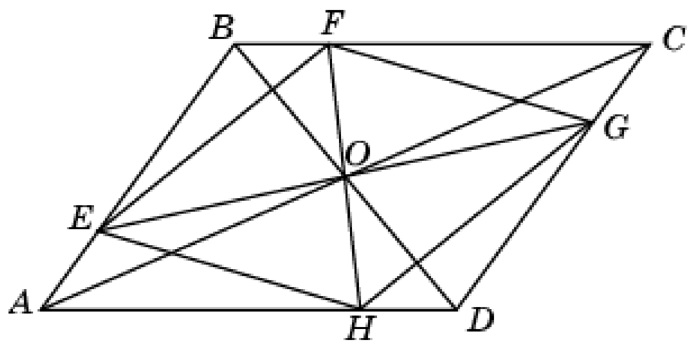
9. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.



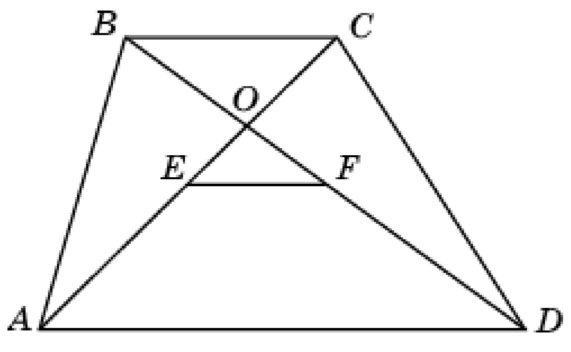
10. Точки E, F, G, H – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$, ограниченный прямыми AF, BG, CH, DE, является квадратом.



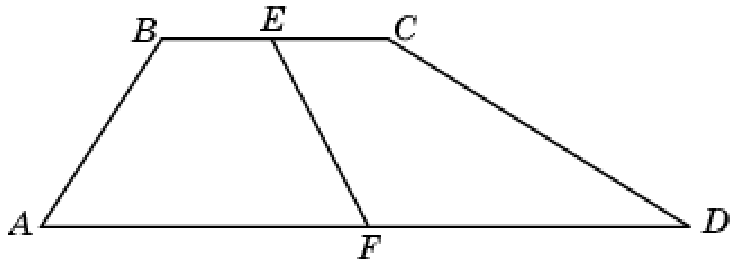
11. Докажите, что два параллелограмма, вписанных один в другой так, что вершины одного принадлежат сторонам другого, имеют общую точку пересечения диагоналей.



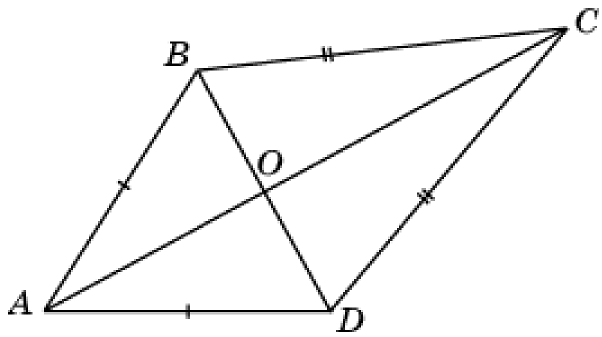
12. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности.



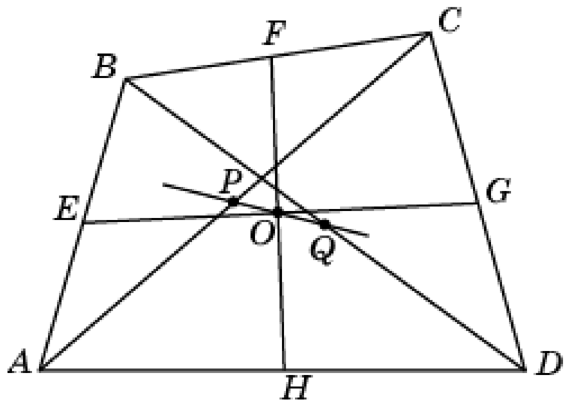
13. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90º. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.



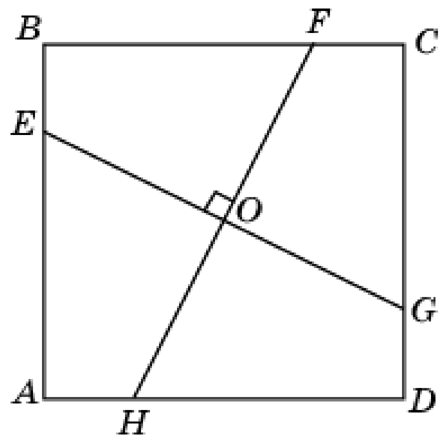
14. Докажите, что если у четырехугольника *ABCD* *AB* = *AD* и *CB* = *CD*, то его диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны.



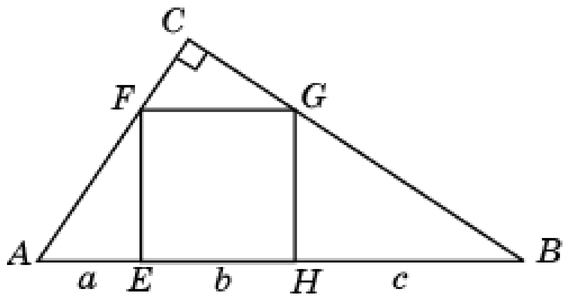
15. Докажите, что точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равноудалена от середин его диагоналей и лежит с ними на одной прямой.



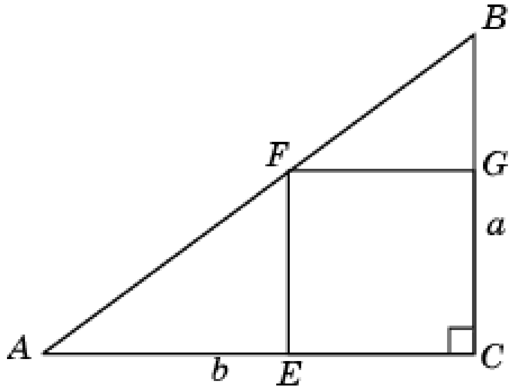
16. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что их отрезки, заключенные внутри квадрата, равны.



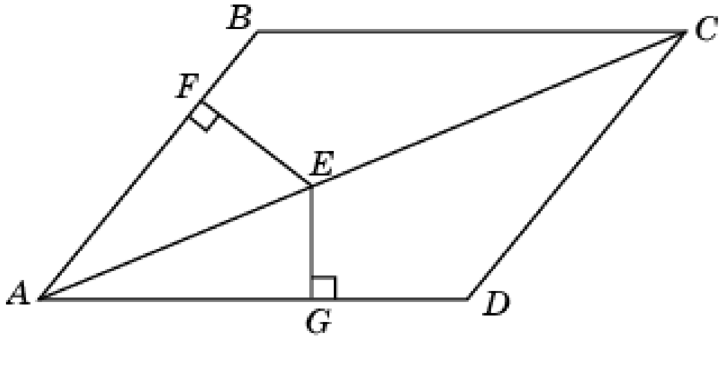
17. В прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что две его вершины принадлежат гипотенузе. Эти вершины делят гипотенузу последовательно на отрезки a, b, c. Докажите, что $b^2=ac$.



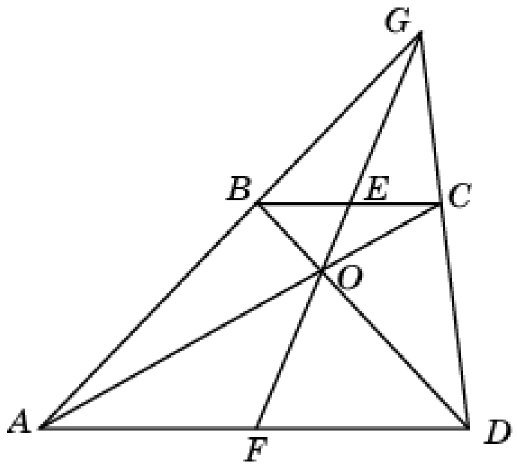
18. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат таким образом, что у них один общий угол и одна из вершин квадрата принадлежит гипотенузе. Сторона квадрата равна c. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.



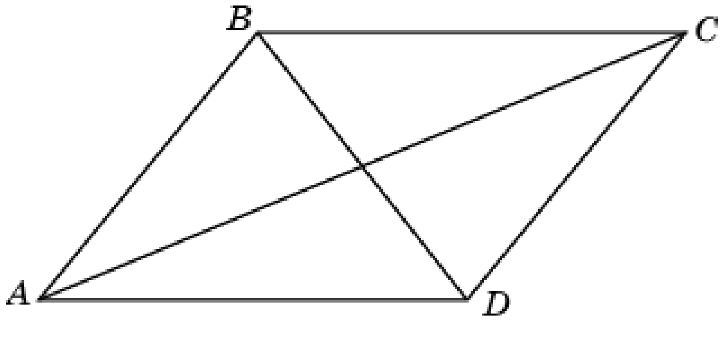
19. Докажите, что если из какой-либо точки диагонали параллелограмма опустить перпендикуляры на стороны, выходящие из общей с диагональю вершины, то длины этих перпендикуляров обратно пропорциональны соответствующим сторонам параллелограмма.



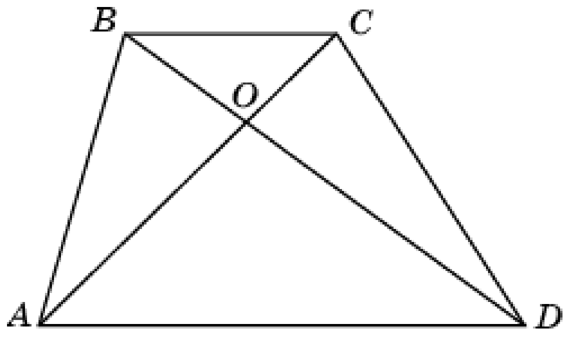
20. Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжения боковых сторон и середины оснований трапеции принадлежат одной прямой.



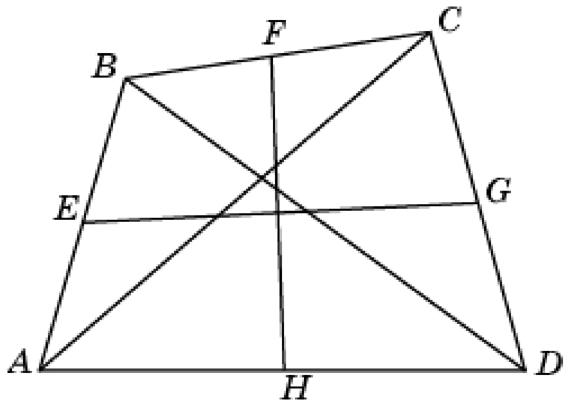
21. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



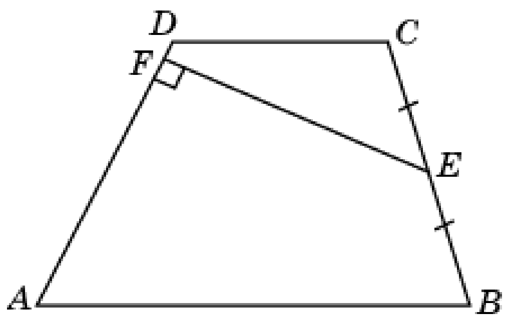
22. Докажите, что в трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований.



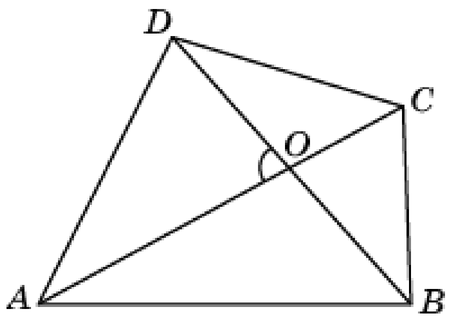
23. Докажите, что в четырехугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.



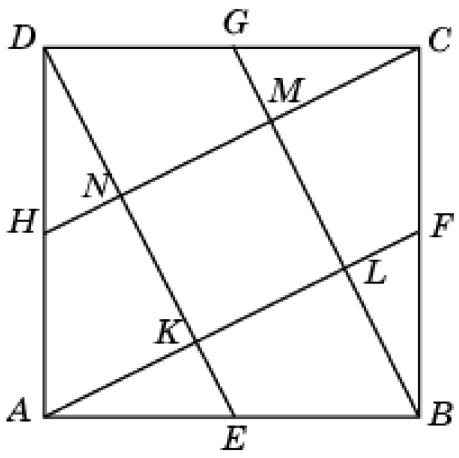
24. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на нее из середины другой боковой стороны.



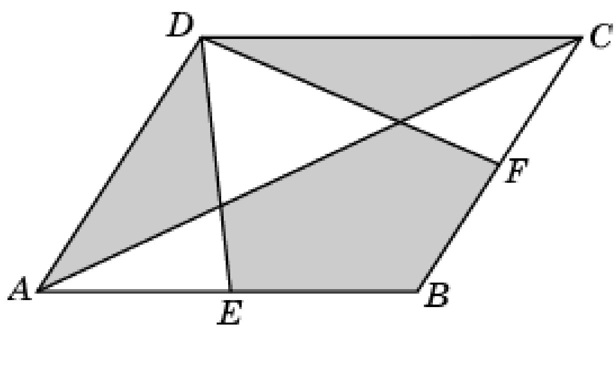
25. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.



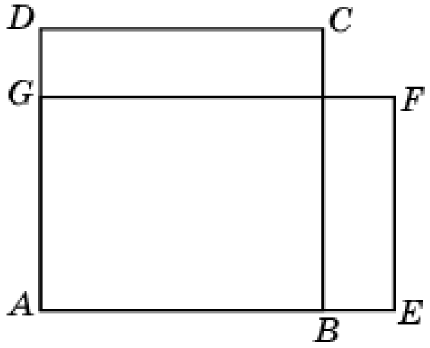
26. Точки E, F, G, H – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Докажите, что площадь квадрата $KLMN$, ограниченного прямыми AF, BG, CH, DE, равна одной пятой площади квадрата $ABCD$.



27. Точки E и F – середины сторон соответственно AB и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что площадь закрашенной части параллелограмма в два раза больше незакрашенной.

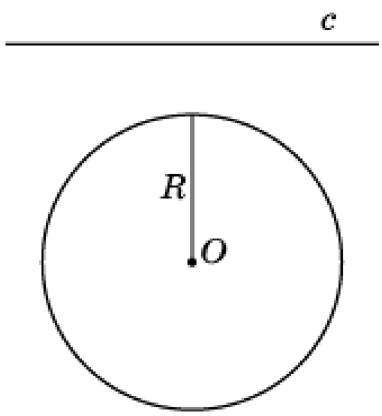


28. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

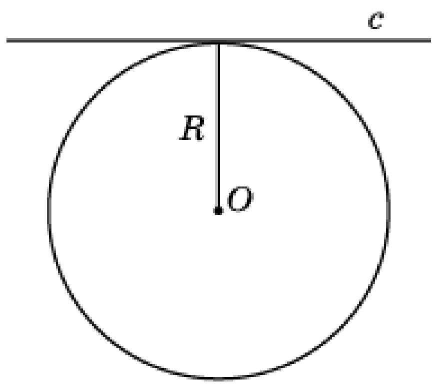


5. Окружность и круг
Уровень А

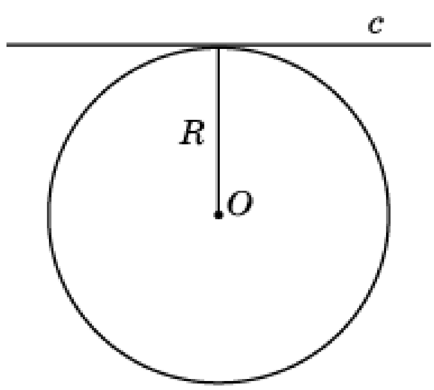
1. Докажите, что если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.



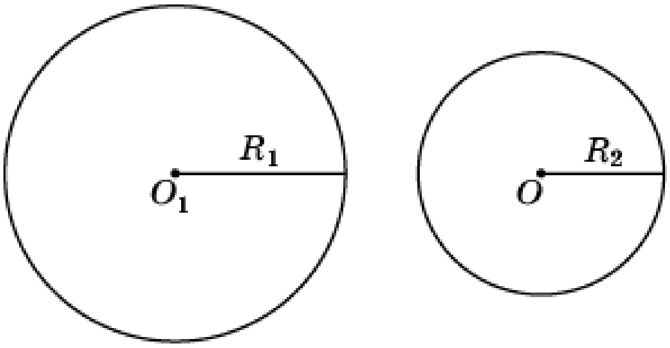
2. Докажите, что если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.



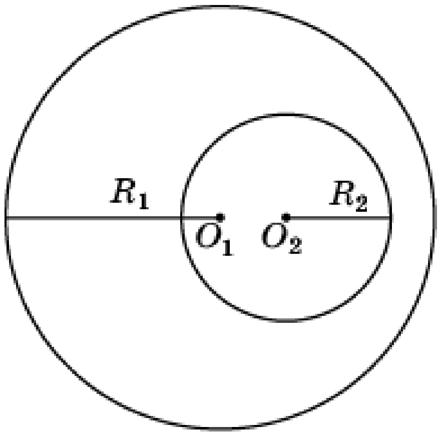
3. Докажите, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.



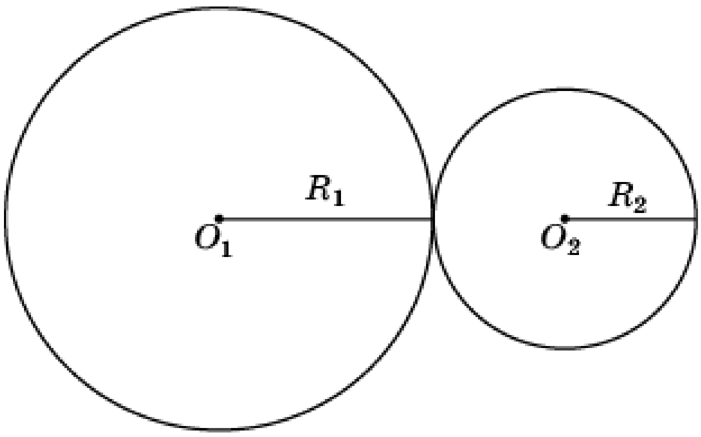
4. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек (одна находится вне другой).



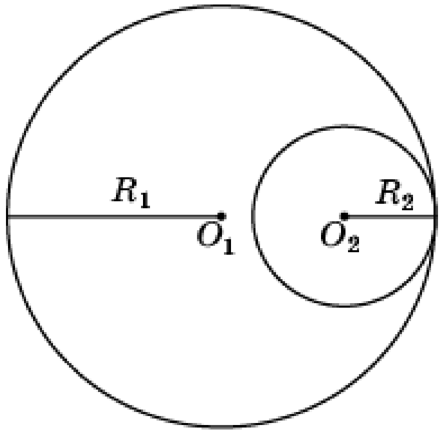
5. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей меньше разности их радиусов, то эти окружности не имеют общих точек (одна находится внутри другой).



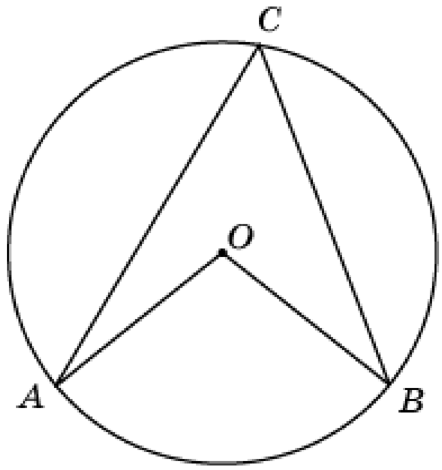
6. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то эти окружности касаются (внешним образом).



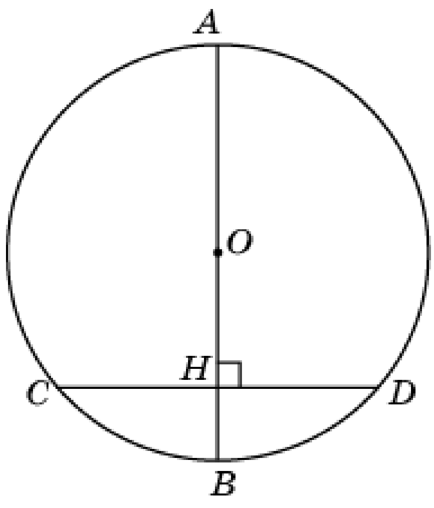
7. Докажите, что если расстояние между центрами двух окружностей равно разности их радиусов, то эти окружности касаются (внутренним образом).



8. Докажите, что вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

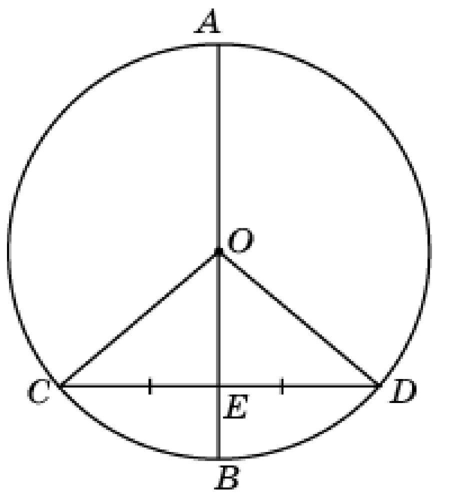


9. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде той же окружности, делит эту хорду пополам.

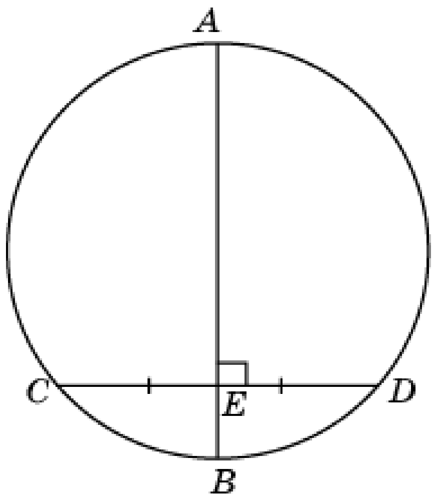


Уровень В

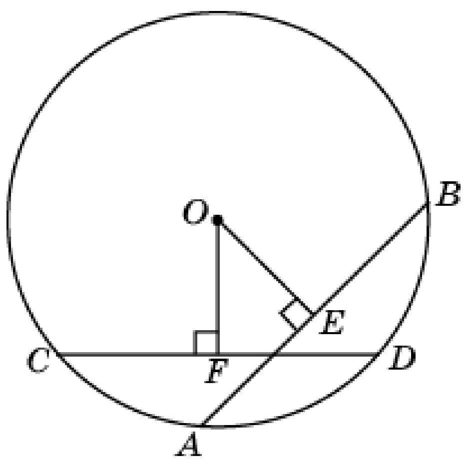
1. Докажите, что диаметр, проведенный через середину хорды той же окружности, отличной от диаметра, перпендикулярен этой хорде.



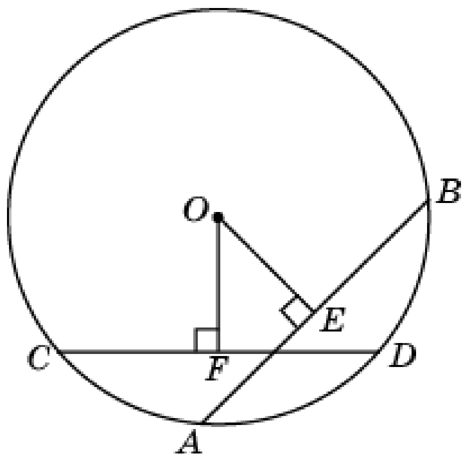
2. Докажите, что если две хорды окружности перпендикулярны и одна из них в точке пересечения делится пополам, то другая является диаметром.



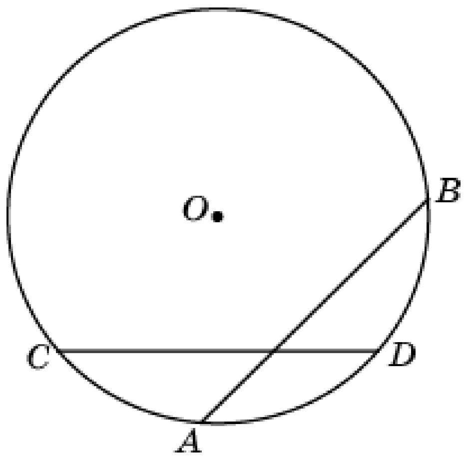
3. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от центра окружности.



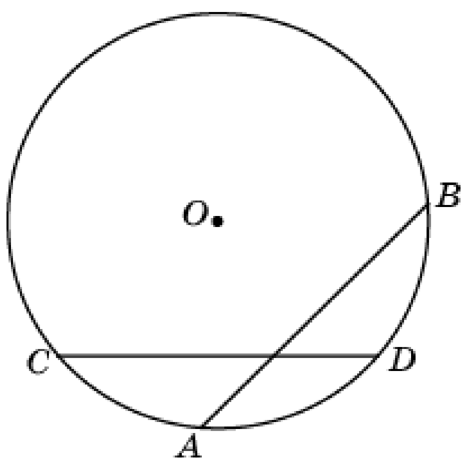
4. Докажите, что если хорды окружности равноудалены от ее центра, то они равны.



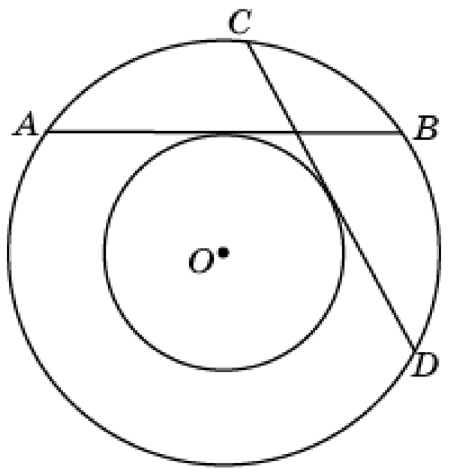
5. Докажите, что равные хорды окружности стягивают равные дуги.



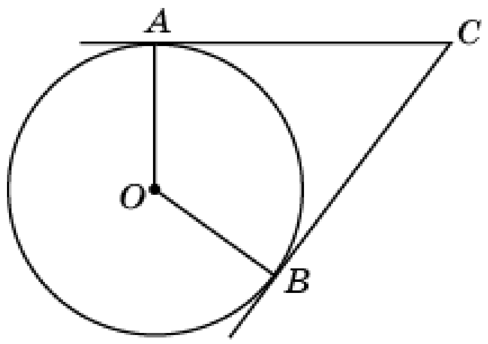
6. Докажите, что равные дуги окружности стягивают равные хорды.



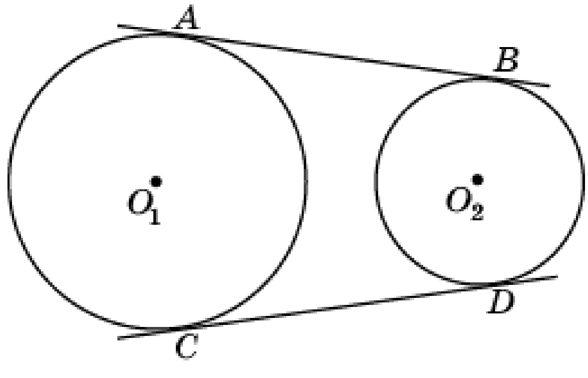
7. Две окружности имеют общий центр. Докажите, что хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности, равны между собой.



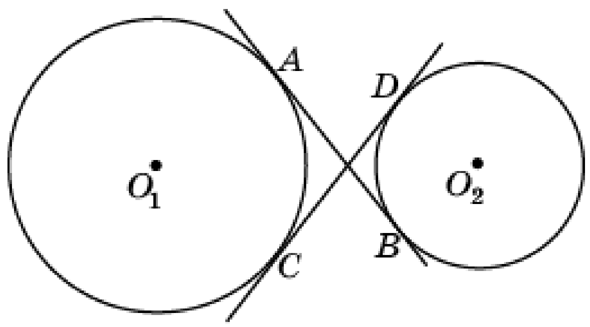
8. Докажите, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.



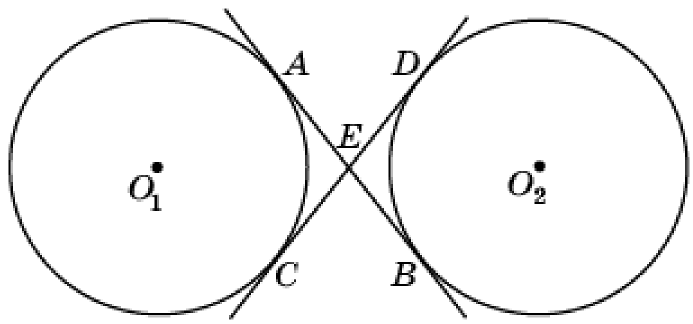
9. Докажите, что отрезки общих внешних касательных к двум окружностям равны.



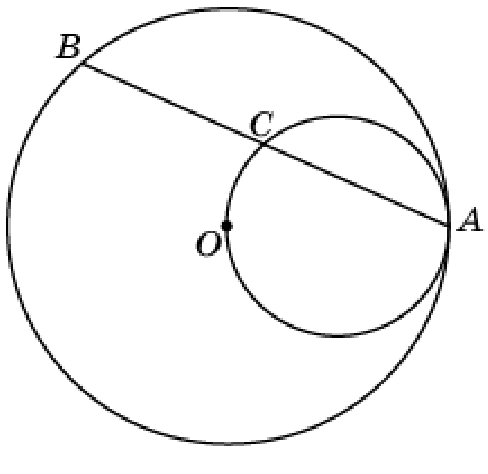
10. Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям равны.



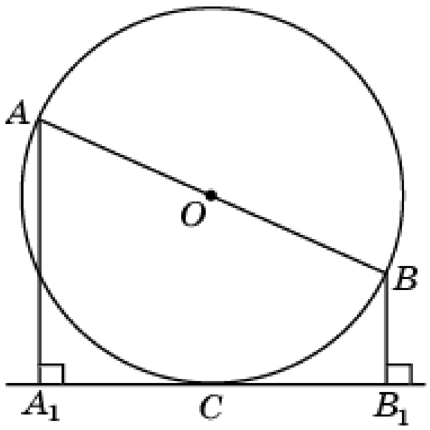
11. Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям одинакового радиуса в точке пересечения делятся пополам.



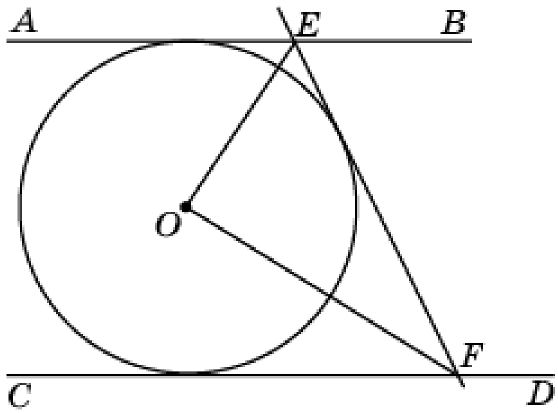
12. Две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что всякая хорда большей окружности, проходящая через точку касания, делится меньшей окружностью пополам.



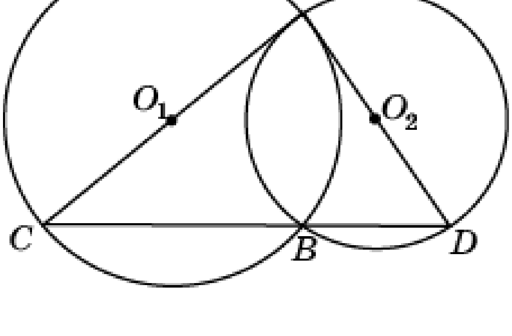
13. Из концов диаметра AB окружности опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на касательную. Докажите, что точка касания C является серединой отрезка A_1B_1.



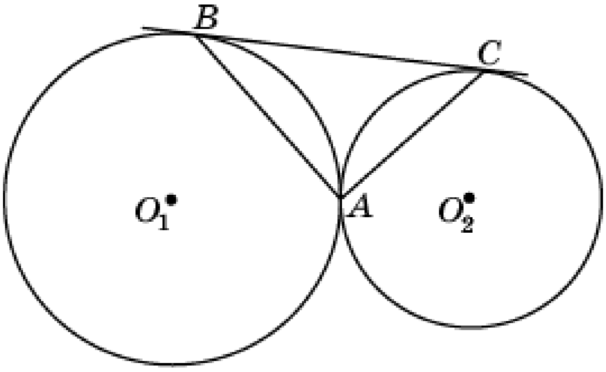
14. К окружности проведены две параллельные касательные. Докажите, что отрезок любой касательной, заключенный между двумя данными параллельными касательными, виден из центра окружности под прямым углом.



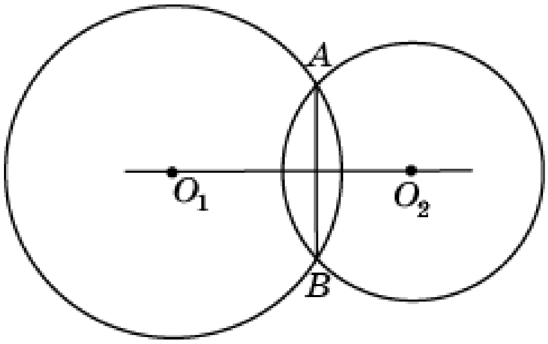
15. Из точки пересечения двух окружностей проведены их диаметры. Докажите, что другие концы диаметров и вторая точка пересечения окружностей принадлежат одной прямой.



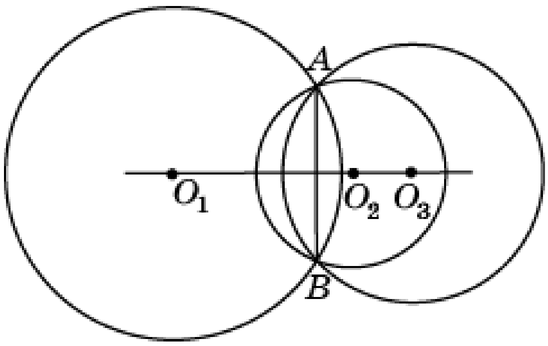
16. К двум окружностям с центрами в точках O_1, O_2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Докажите, что угол BAC – прямой.



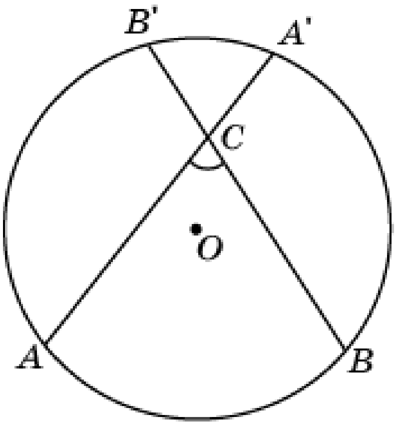
17. Докажите, что если две окружности имеют общую хорду, то прямая, проходящая через центры этих окружностей, перпендикулярна данной хорде и делит ее пополам.



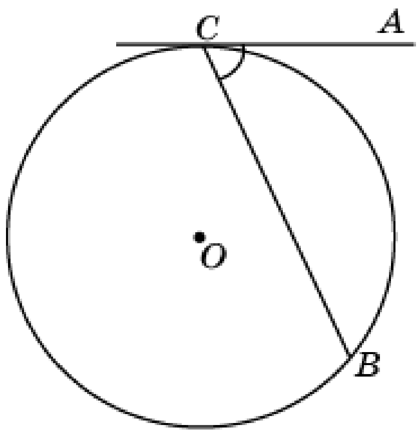
18. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.



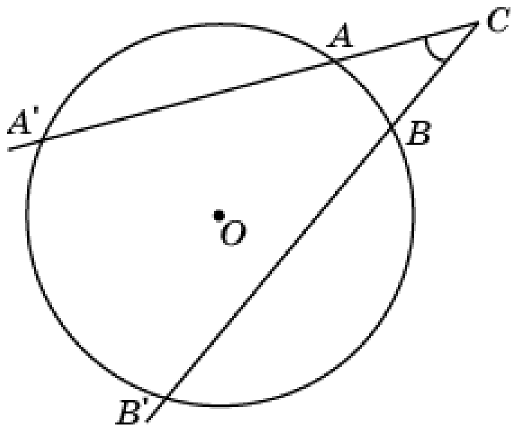
19. Докажите, что угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.



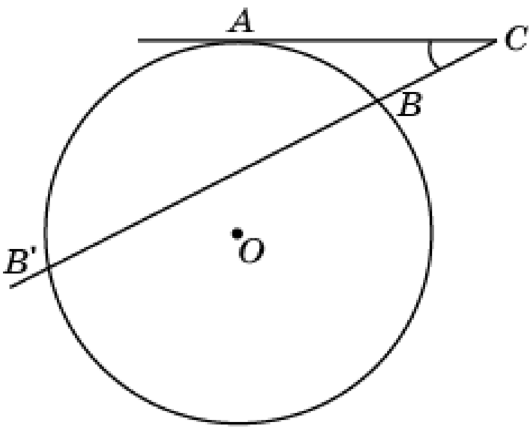
20. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.



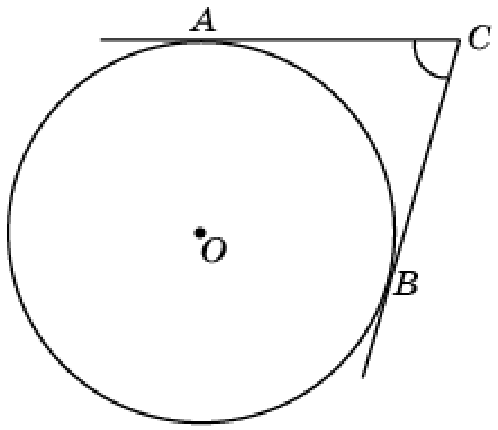
21. Докажите, что угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.



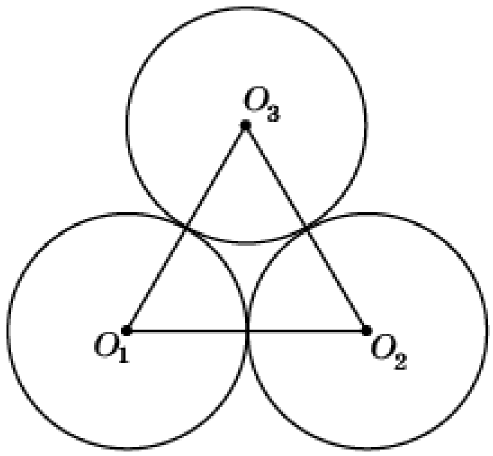
22. Докажите, что угол между касательной и секущей к окружности измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла и разделяемых точкой касания.



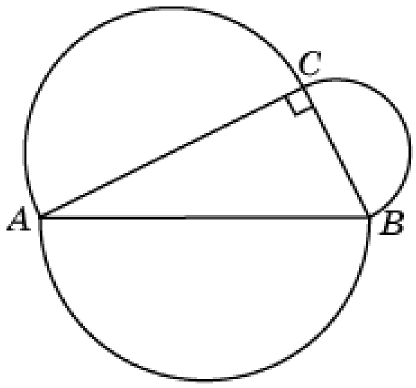
23. Докажите, что угол между двумя касательными к окружности измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.



24. Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

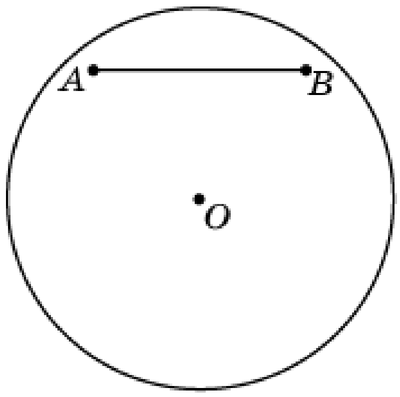


25. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

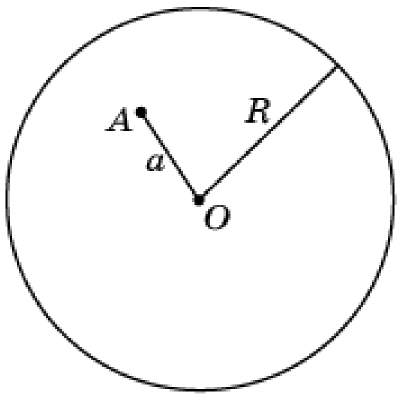


Уровень С

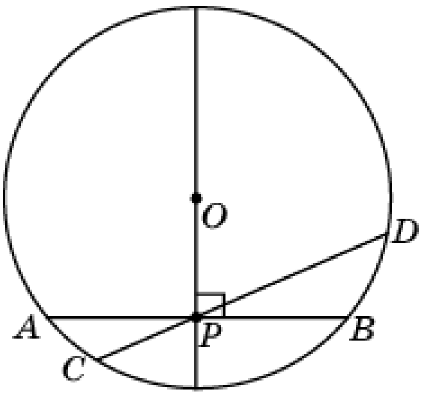
1. Докажите, что если две точки принадлежат кругу, то отрезок, их соединяющий, содержится в данном круге.



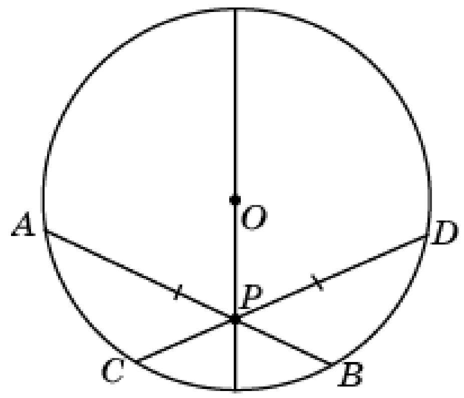
2. Точка A лежит внутри круга с центром O и радиусом R. Расстояние AO равно a. Докажите, что круг с центром A и радиусом $R - a$ содержится в исходном круге.



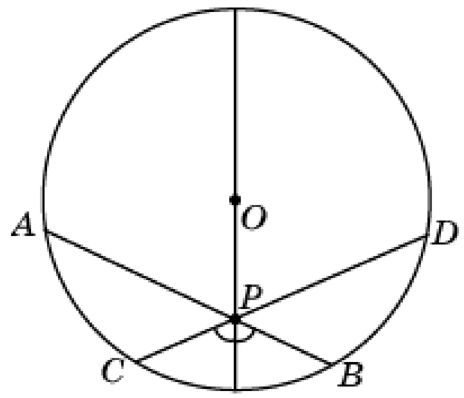
3. Докажите, что из всех хорд, проходящих через данную точку, взятую внутри круга, наименьшей является та, которая перпендикулярна диаметру, проходящему через эту точку.



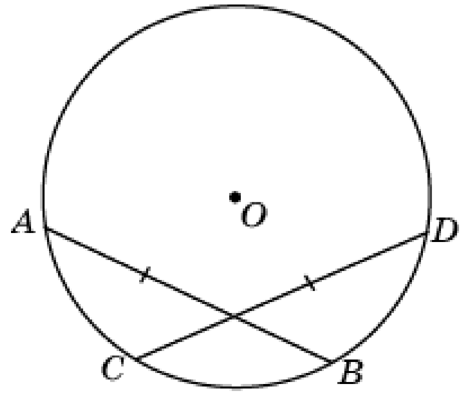
4. Через точку диаметра окружности, отличную от центра, проведены две равные хорды. Докажите, что они одинаково наклонены к диаметру.



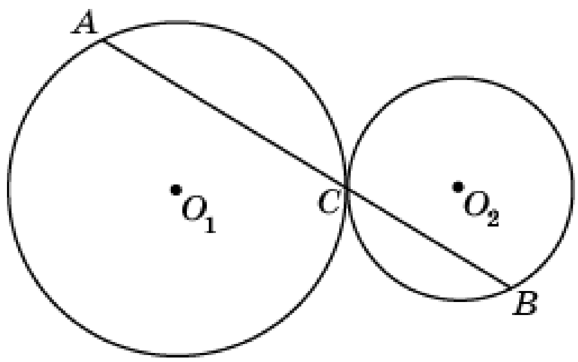
5. Через точку диаметра окружности проведены две хорды, одинаково наклоненные к нему. Докажите равенство этих хорд.



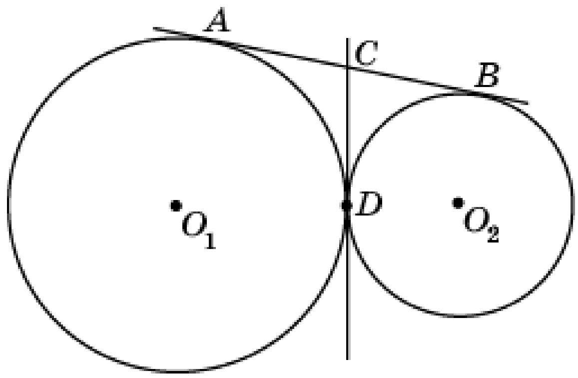
6. Докажите, что все равные хорды, проведенные в данной окружности, касаются некоторой другой окружности.



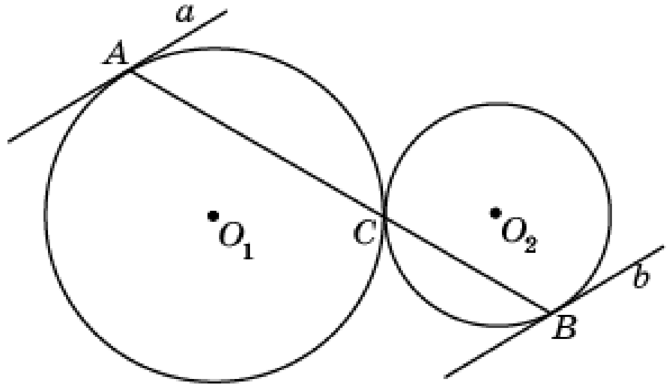
7. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая, которая делит эти окружности на четыре дуги. Докажите, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и лежащие в разных окружностях, имеют одинаковые градусные величины.



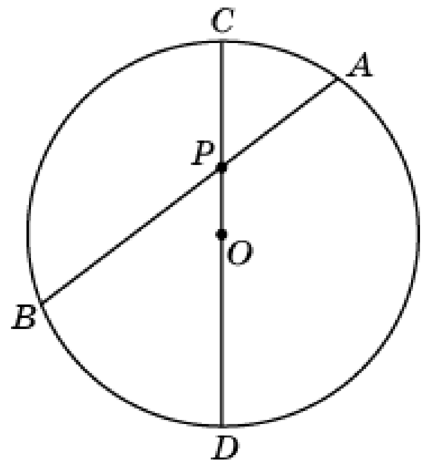
8. Две окружности касаются внешним образом. Через точку их касания проведена к ним общая касательная и, кроме того, проведена общая внешняя касательная. Докажите, что отрезок этой второй касательной между точками касания точкой пересечения с первой касательной делится пополам.



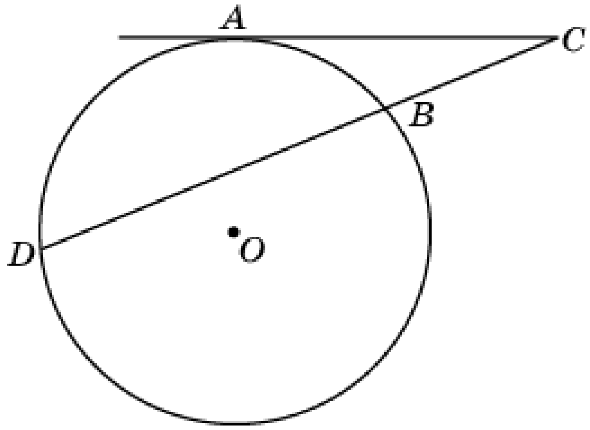
9. Две окружности касаются внешним образом. Через точку их касания проведена секущая. Докажите, что касательные к этим окружностям, проведенные через точки их пересечения с секущей, параллельны.



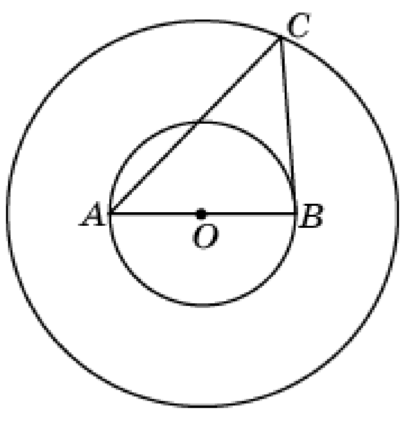
10. Докажите, что всякая хорда, проведенная через внутреннюю точку круга, делится этой точкой на два отрезка, произведение которых постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.



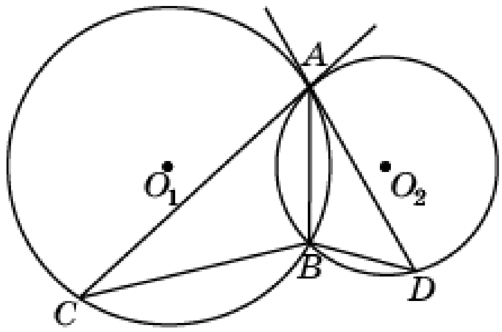
11. Докажите, что если из точки вне окружности проведены секущая и касательная, то произведение отрезка этой секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.



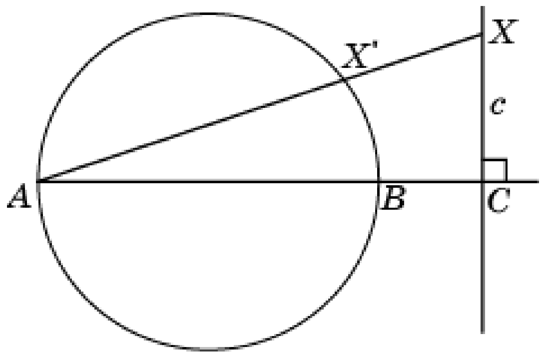
12. Даны две концентрические окружности. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки одной из них до концов какого-нибудь данного диаметра другой есть величина постоянная.



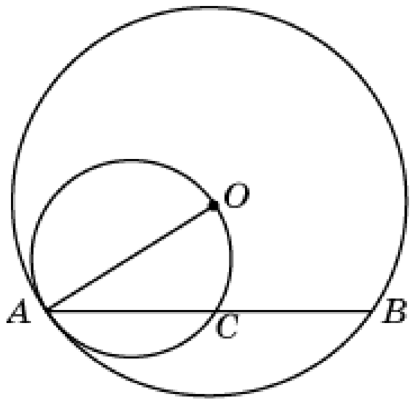
13. Две окружности пересекаются. Через одну из точек пересечения проведены касательные к каждой окружности. Докажите, что отрезки этих касательных, лежащие внутри окружностей, видны из другой точки пересечения под равными углами.



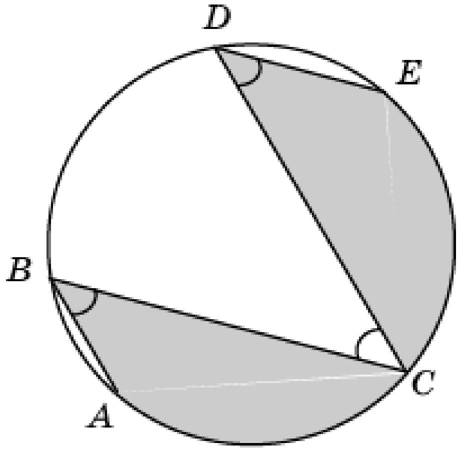
14. Диаметр *AB* окружности продолжен за точку *B*. Через точку *C* этого продолжения проведена прямая *c*, перпендикулярная *AB*. Для произвольной точки *X* прямой *c* обозначим *X'* точку пересечения прямой *AX* с данной окружностью. Докажите, что произведение *AX* и *AX'* постоянно и не зависит от выбора точки *X* на прямой *c*.



15. В круге с центром *O* проведена хорда *AB*. На радиусе *OA*, как на диаметре, описана окружность. Докажите, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой *AB* от обоих кругов, относятся как 4:1.



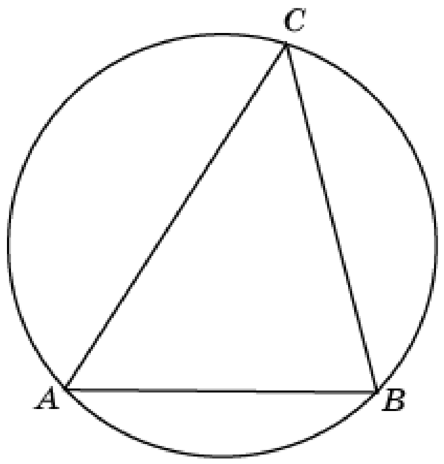
16. Вершины ломаной $ABCDE$ принадлежат окружности. Углы B, C и D равны 45°. Докажите, что площадь заштрихованной части круга равна половине площади круга.



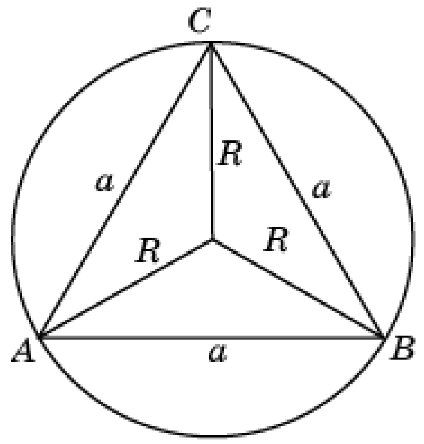
6. Вписанные и описанные многоугольники

Уровень А

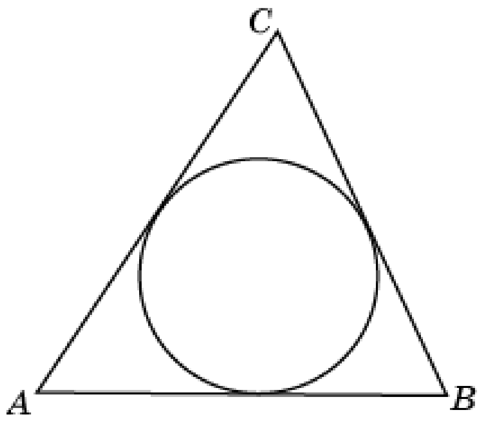
1. Докажите, что около всякого треугольника можно описать единственную окружность.



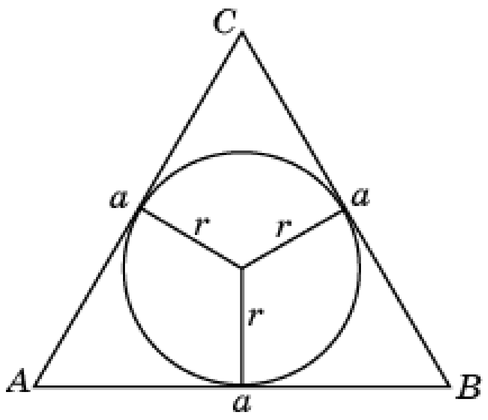
2. Докажите, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a, равен $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



3. Докажите, что в любой треугольник можно вписать единственную окружность.

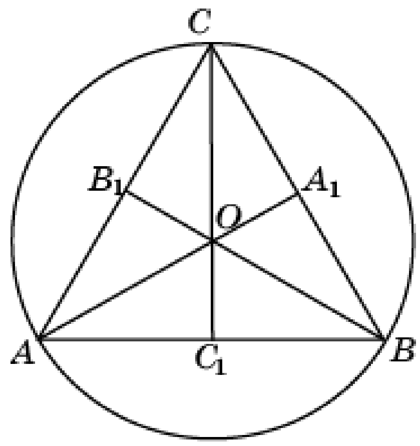


4. Докажите, что радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

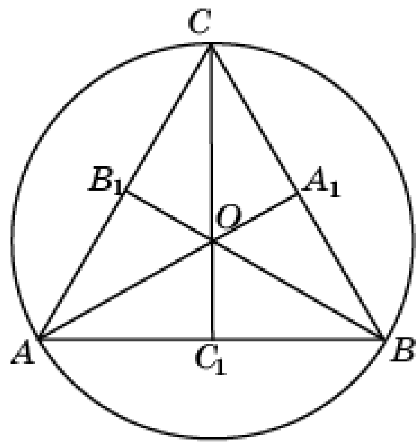


Уровень В

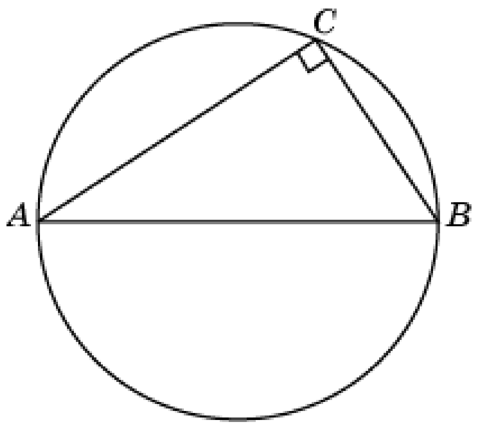
1. Докажите, что если центр описанной окружности треугольника совпадает с точкой пересечения его высот, то треугольник – равносторонний.



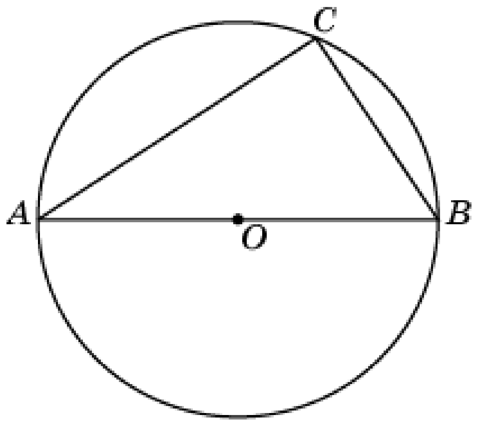
2. Докажите, что если центр описанной окружности треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, то треугольник – равносторонний.



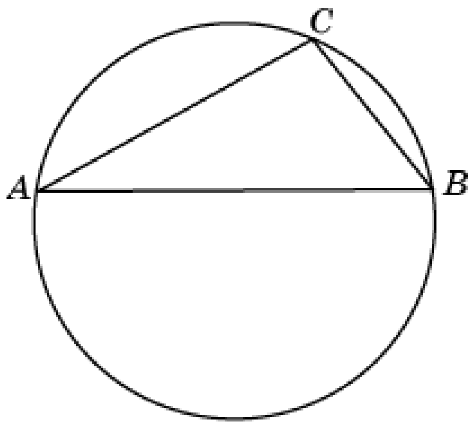
3. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, принадлежит его стороне.



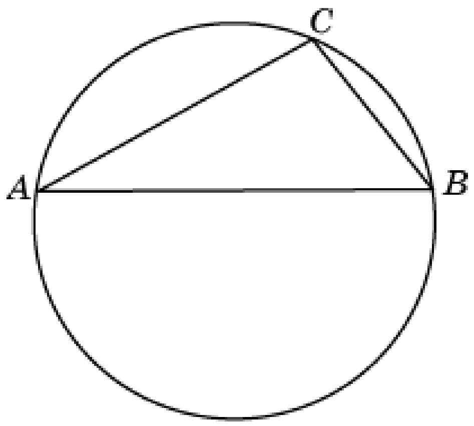
4. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его стороне, то этот треугольник – прямоугольный.



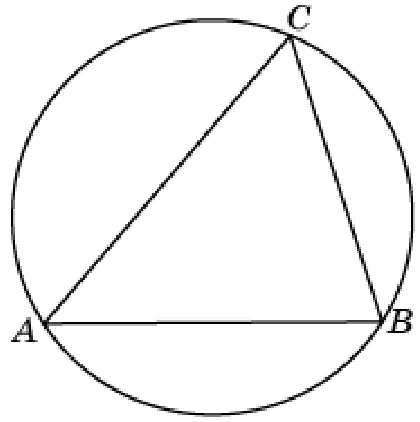
5. Докажите, что центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне этого треугольника.



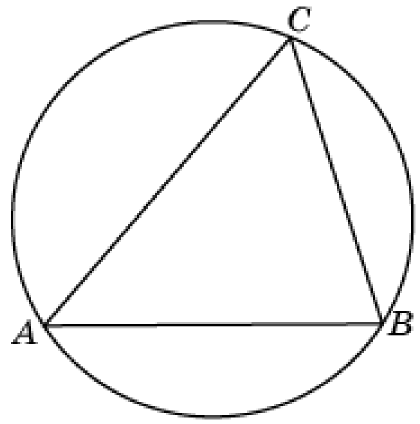
6. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне этого треугольника, то данный треугольник – тупоугольный.



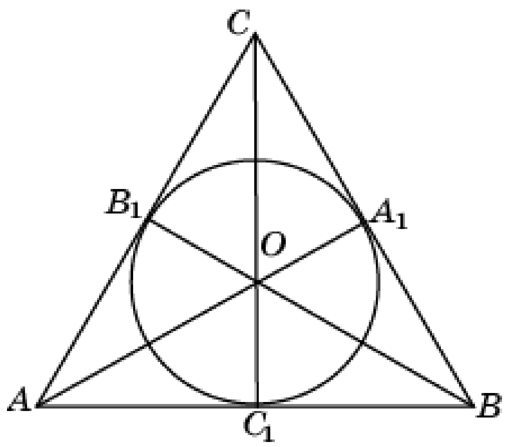
7. Докажите, что центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри этого треугольника.



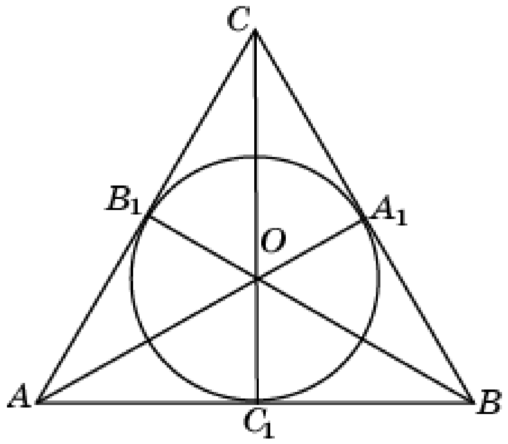
8. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит внутри этого треугольника, то данный треугольник - остроугольный.



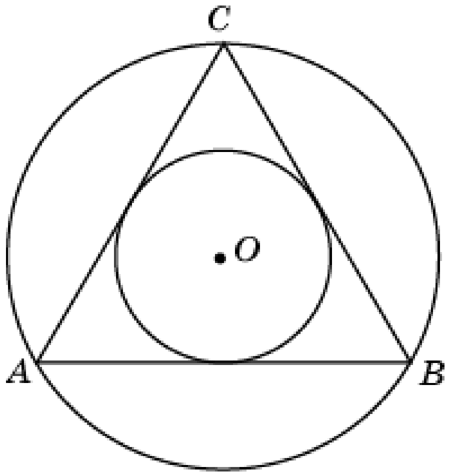
9. Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника совпадает с точкой пересечения его высот, то треугольник – равносторонний.



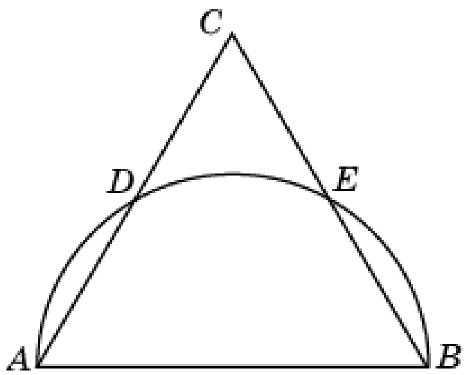
10. Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан, то треугольник – равносторонний.



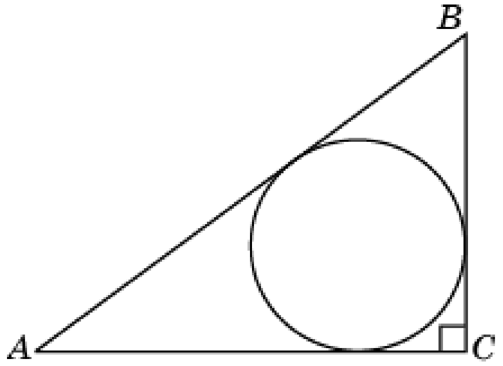
11. Докажите, что если центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник – равносторонний.



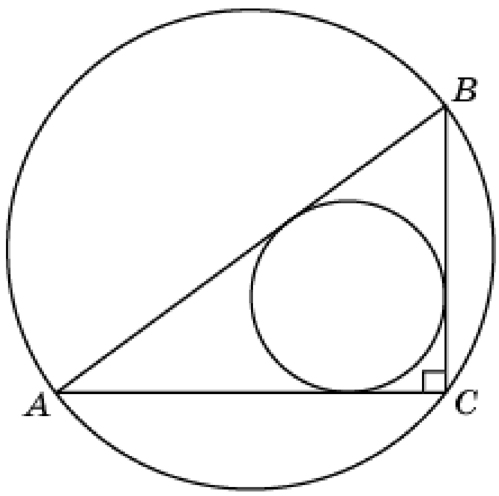
12. На стороне равностороннего треугольника, как на диаметре, построена полуокружность. Докажите, что она делится на три равные части точками ее пересечения с двумя другими сторонами треугольника.



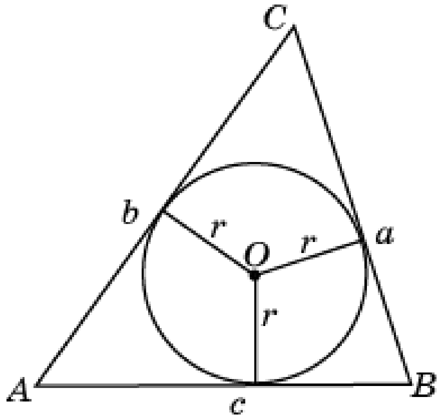
13. Докажите, что диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен разности суммы катетов и гипотенузы.



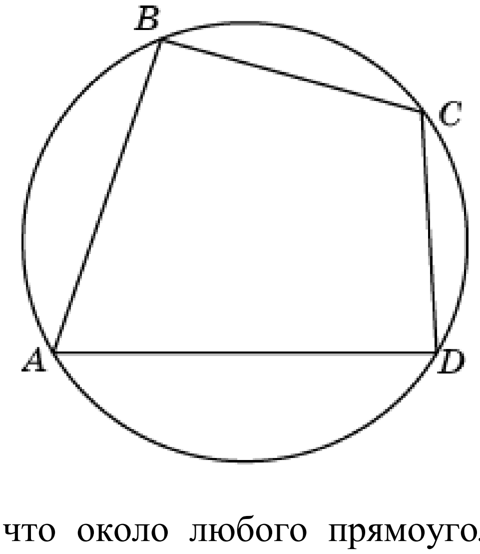
14. Докажите, что сумма диаметров окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него, равна сумме его катетов.



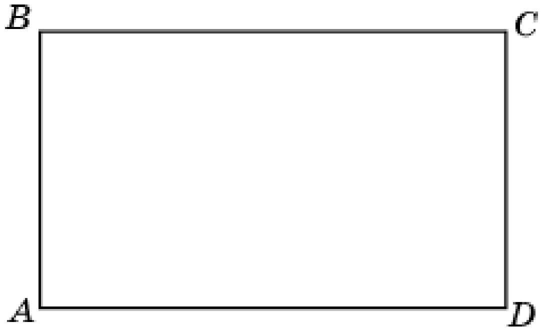
15. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.



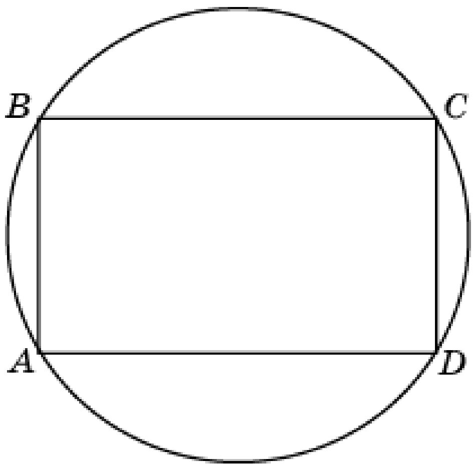
16. Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.



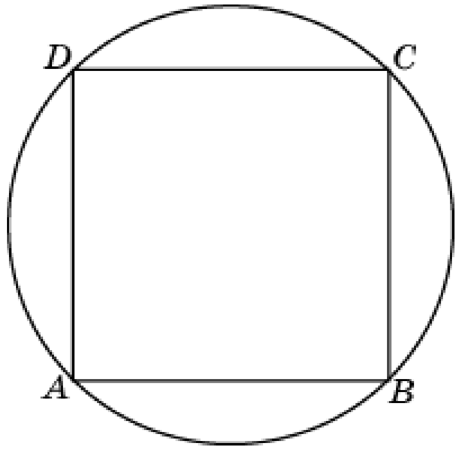
17. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность.



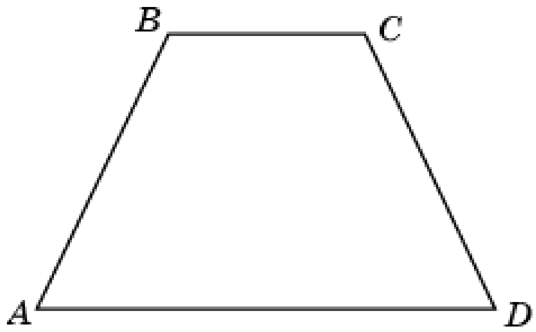
18. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.



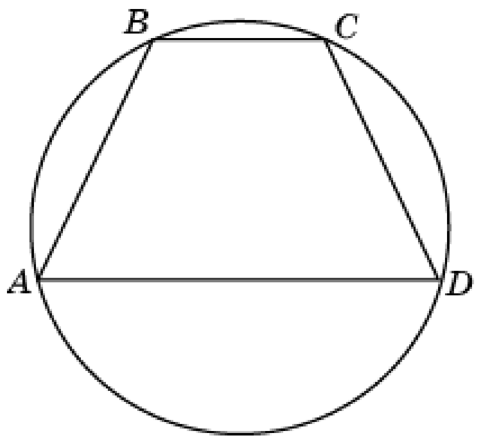
19. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб – квадрат.



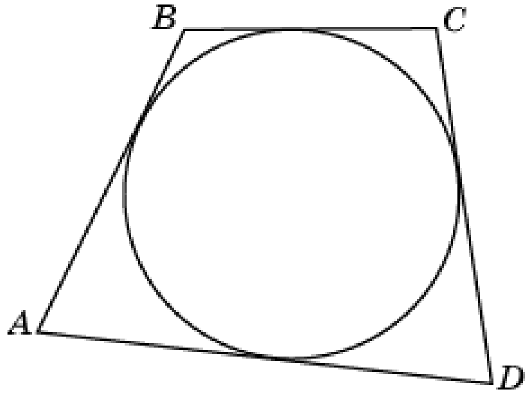
20. Докажите, что около равнобедренной трапеции можно описать окружность.



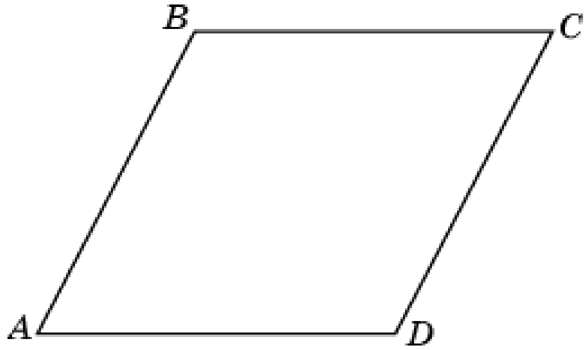
21. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция – равнобедренная.



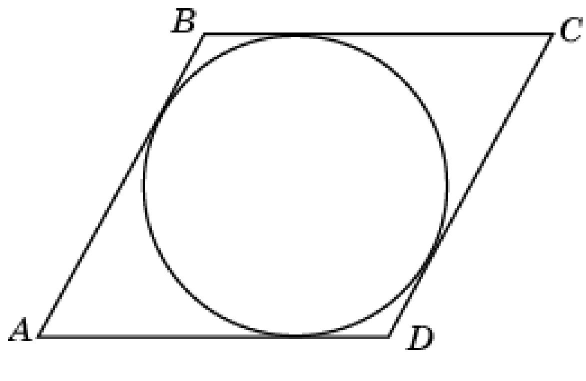
22. Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.



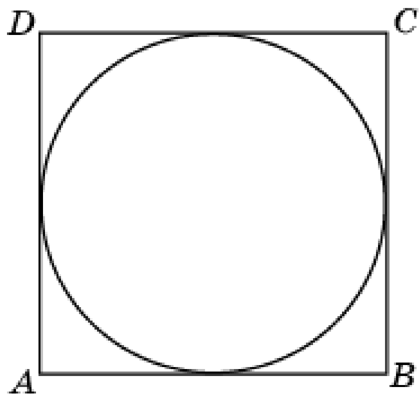
23. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.



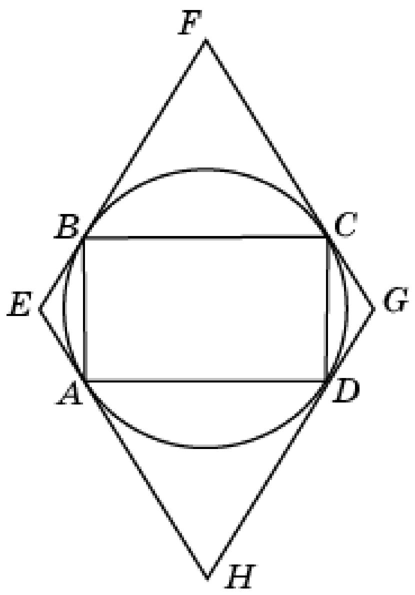
24. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.



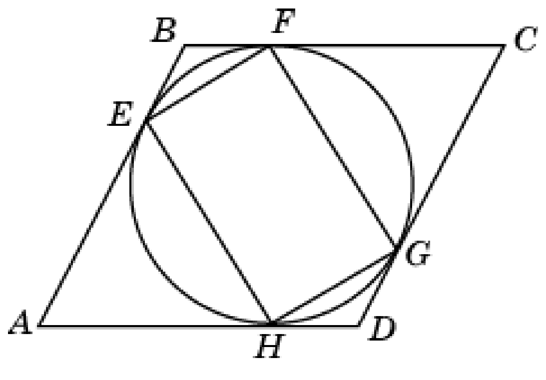
25. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник – квадрат.



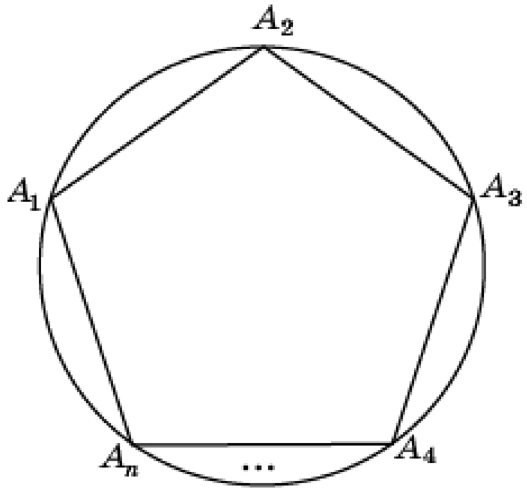
26. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через вершины вписанного в нее прямоугольника, ограничивают ромб.



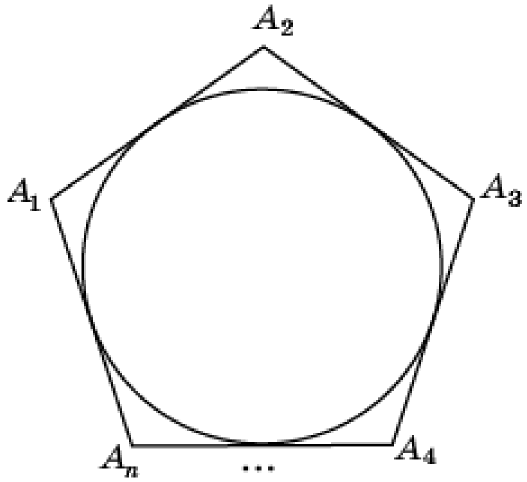
27. Докажите, что точки касания сторон ромба с вписанной в него окружностью являются вершинами прямоугольника.



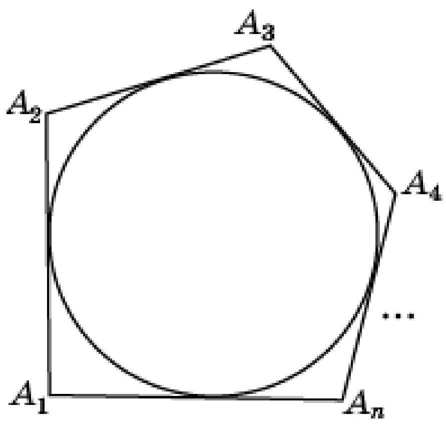
28. Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то этот многоугольник – правильный.



29. Докажите, что если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то этот многоугольник – правильный.

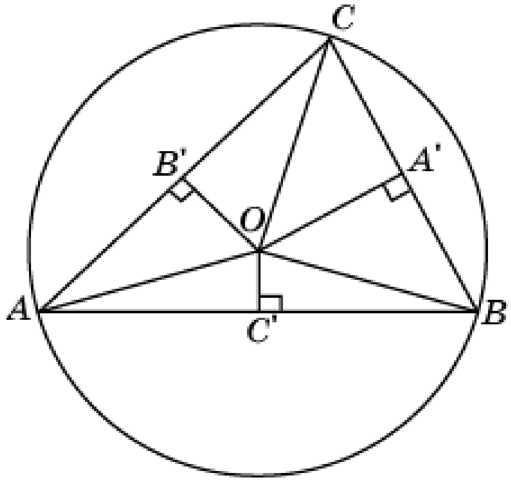


30. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

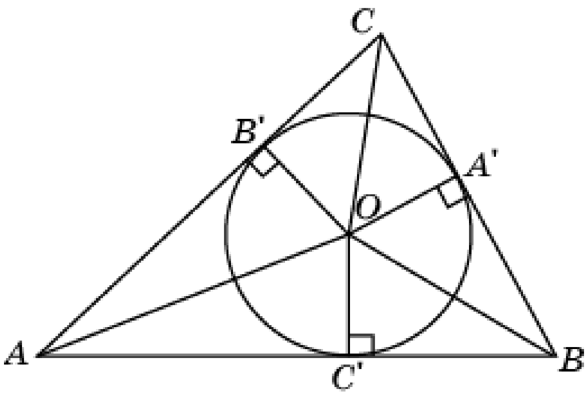


Уровень C

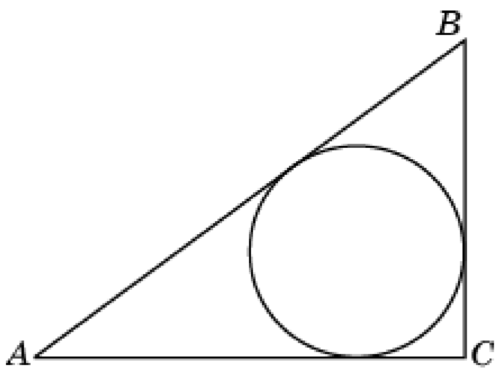
1. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника, расположен ближе к той стороне треугольника, которая больше.



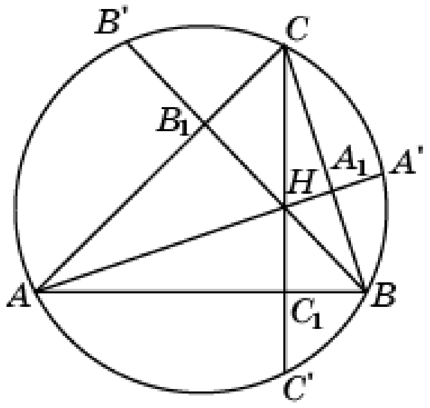
2. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, расположен ближе к той вершине треугольника, которая лежит против большей стороны.



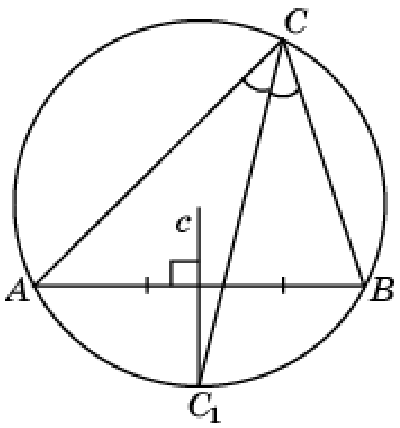
3. Докажите, что если разность между суммой двух сторон треугольника и его третьей стороной равна диаметру вписанной окружности, то один из углов треугольника – прямой.



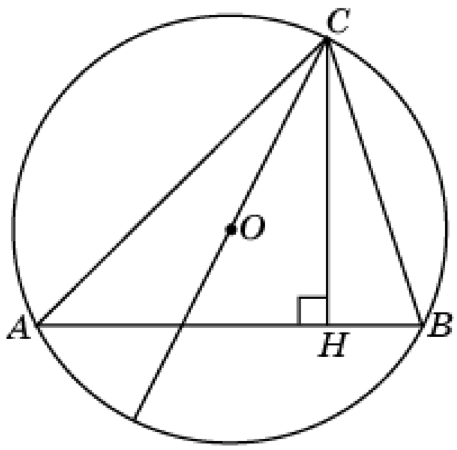
4. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.



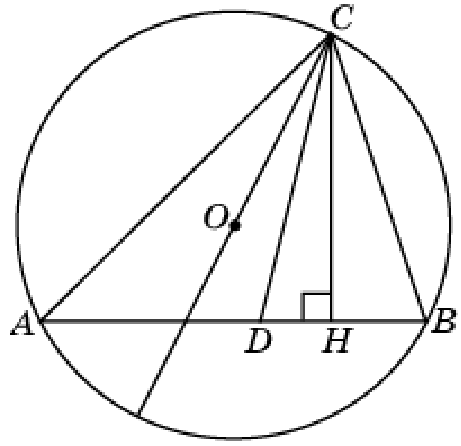
5. Докажите, что биссектриса угла треугольника и серединный перпендикуляр к противоположной стороне пересекаются в точке, принадлежащей окружности, описанной около этого треугольника.



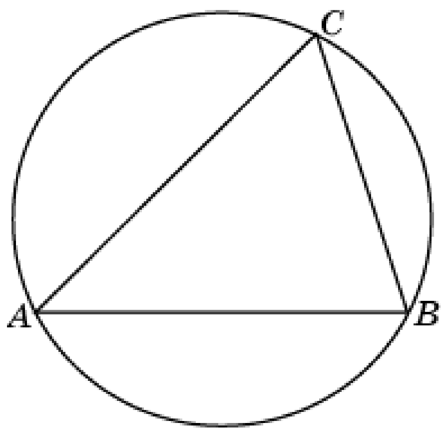
6. Докажите, что угол между высотой треугольника и диаметром описанной окружности, проведенными из вершины одного угла этого треугольника, равен разности двух других его углов.



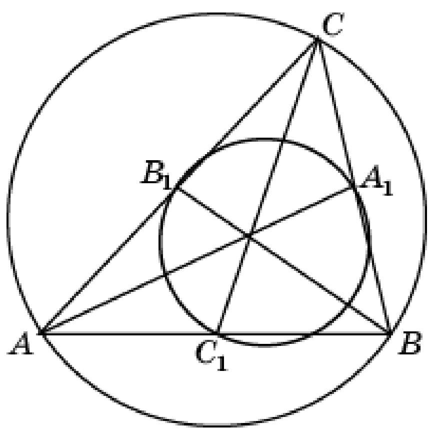
7. Докажите, что биссектриса треугольника делит пополам угол между высотой и диаметром описанной окружности, проведенными из той же вершины.



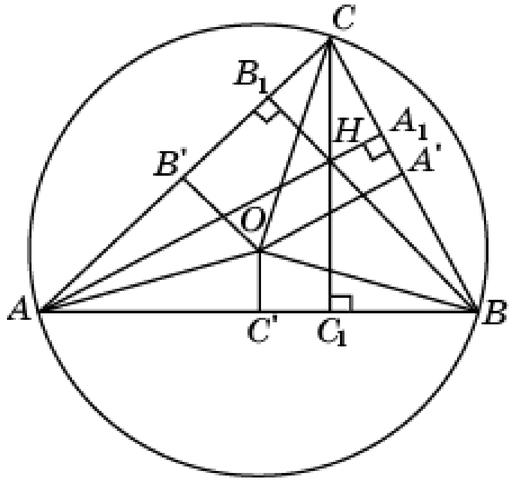
8. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.



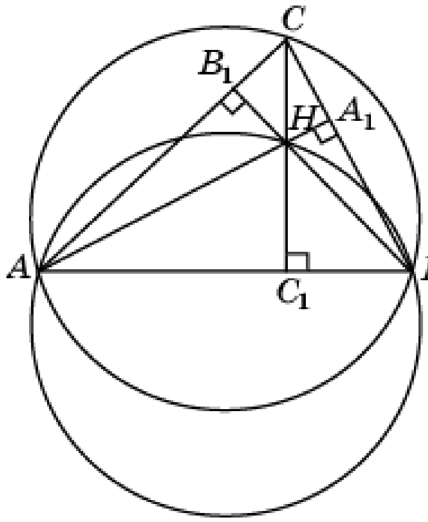
9. Докажите, что радиус окружности, проходящей через основания медиан треугольника, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника.



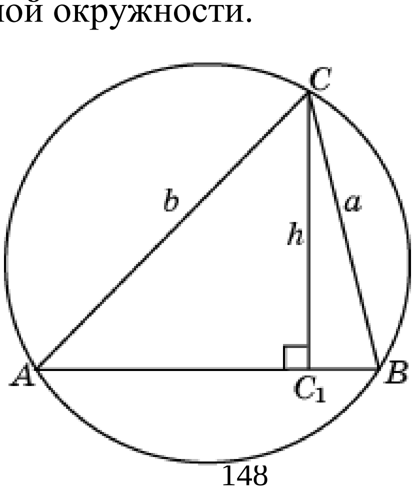
10. Докажите, что расстояние от вершины C треугольника ABC до точки H пересечение его высот в два раза больше расстояния от центра O описанной около него окружности до стороны AB этого треугольника, противоположной данной вершине C.



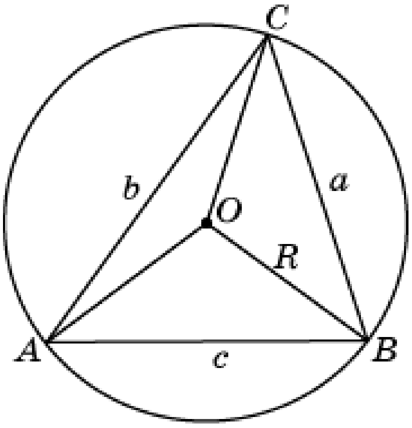
11. Докажите, что окружность, проходящая через две вершины треугольника и точку пересечения его высот, равна окружности, описанной около этого треугольника.



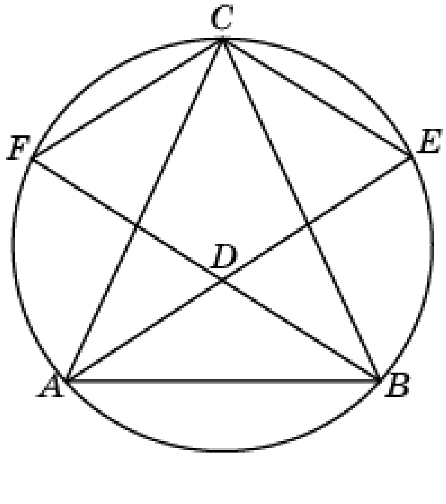
12. Докажите, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанной окружности.



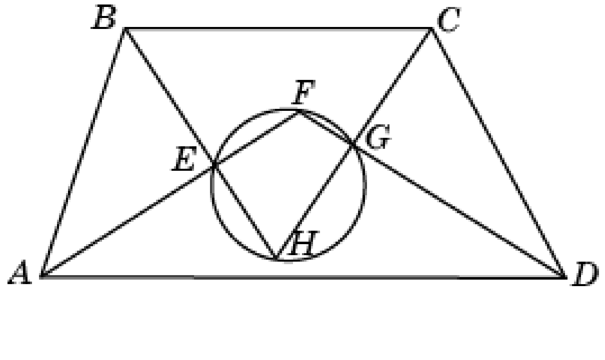
13. Докажите, что радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.



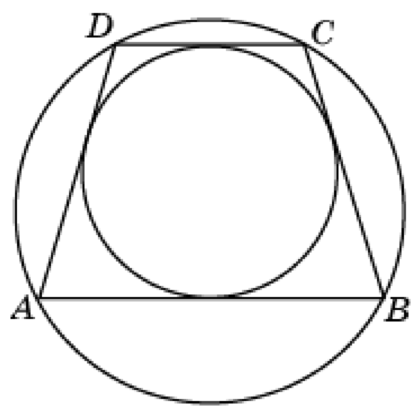
14. Биссектрисы углов A и B при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке D и пересекают окружность, описанную около этого треугольника, в точках соответственно E и F. Докажите, что четырехугольник $CFDE$ – ромб.



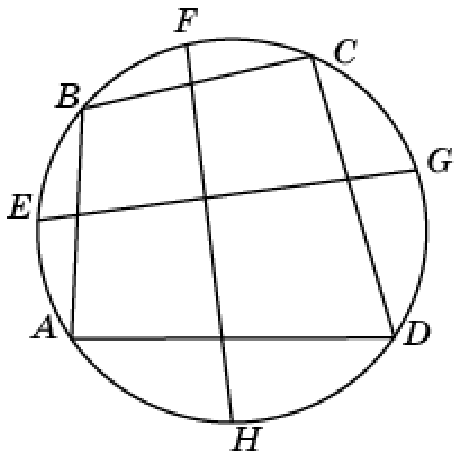
15. Докажите, что вершины четырехугольника, ограниченного биссектрисами углов трапеции принадлежат одной окружности.



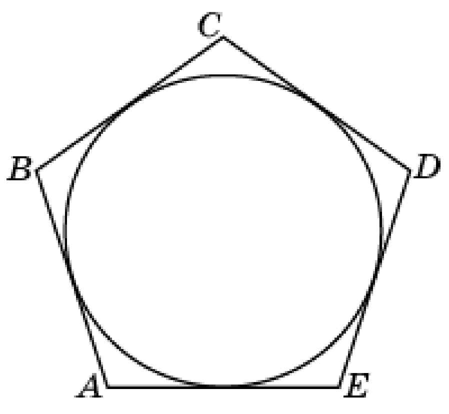
16. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность и в ту же трапецию можно вписать окружность, то боковые стороны этой трапеции равны ее средней линии.



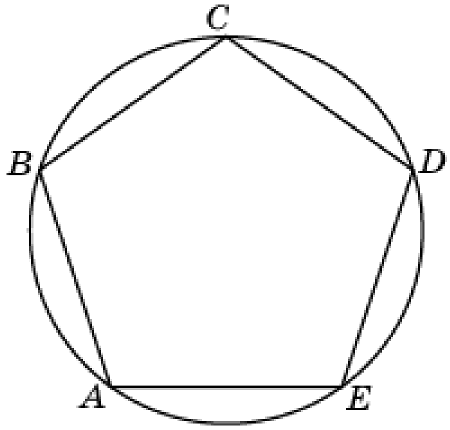
17. Докажите, что прямые, соединяющие середины дуг, стягиваемых противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, перпендикулярны.



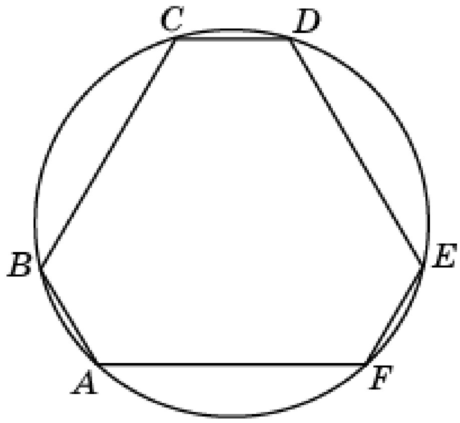
18. Докажите, что если у пятиугольника, описанного около окружности, равны все стороны, то он – правильный.



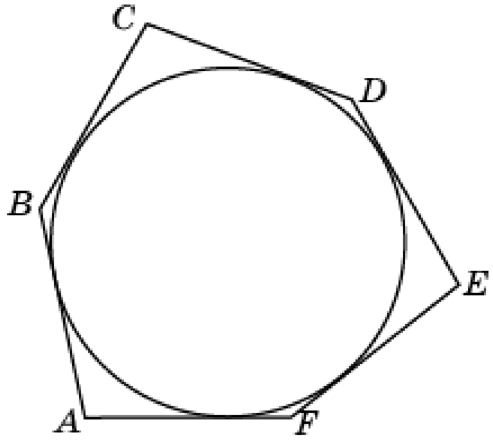
19. Докажите, что если у пятиугольника, вписанного в окружность, равны все углы, то он – правильный.



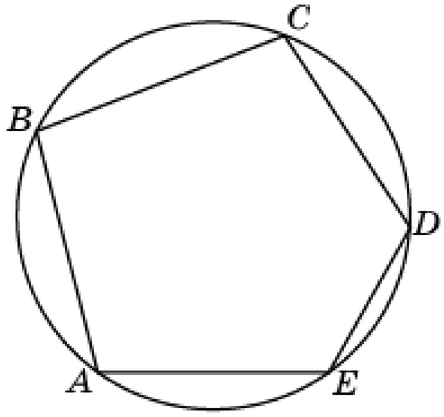
20. Докажите, что если у шестиугольника равны все углы, а стороны равны через одну, то около него можно описать окружность.



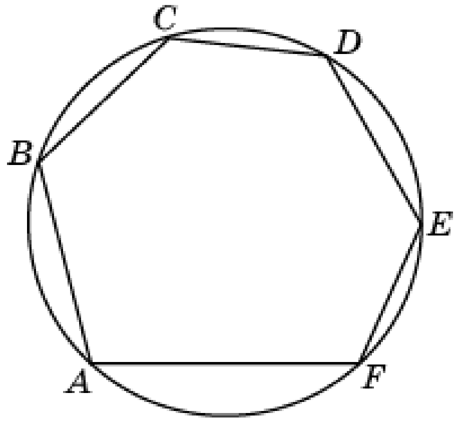
21. Докажите, что если у шестиугольника равны все стороны, а углы равны через один, то в него можно вписать окружность.



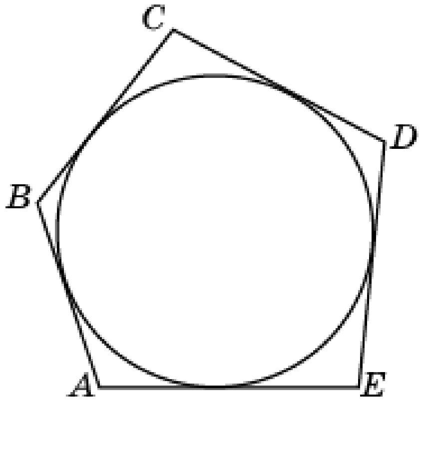
22. Докажите, что сумма любых двух несоседних углов вписанного в окружность пятиугольника больше 180°.



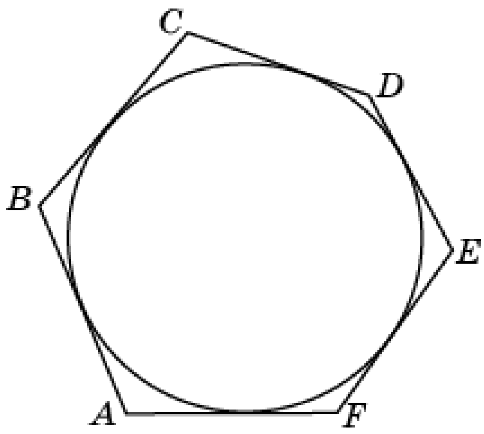
23. Докажите, что сумма любых трех несоседних углов вписанного в окружность шестиугольника равна 360°.



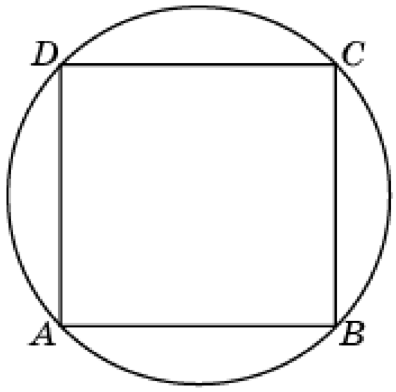
24. Докажите, что сумма любых двух несоседних сторон описанного около окружности пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон.



25. Докажите, что сумма любых трех несоседних сторон описанного около окружности шестиугольника равна сумме трех оставшихся сторон.

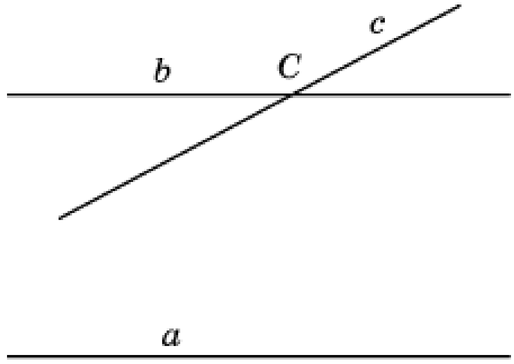


26. Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

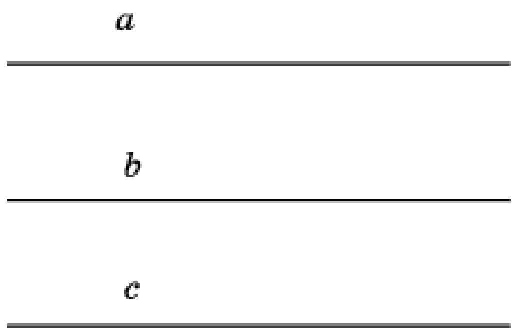


РЕШЕНИЯ
1. Параллельность и перпендикулярность
Уровень B

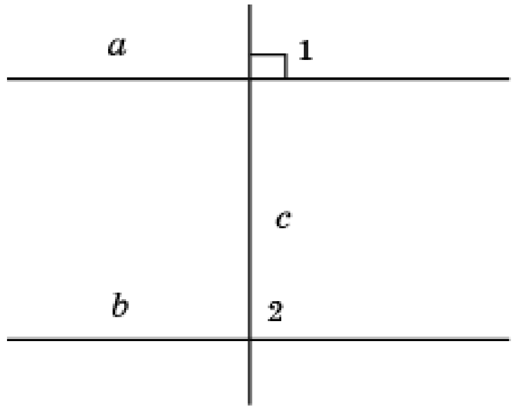
35. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую b в точке C. Докажем, что прямая c пересекает прямую a. Действительно, если бы прямая c была параллельна прямой a, то через точку C проходили бы две прямые, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельных. Следовательно, прямая c должна пересекать прямую a.



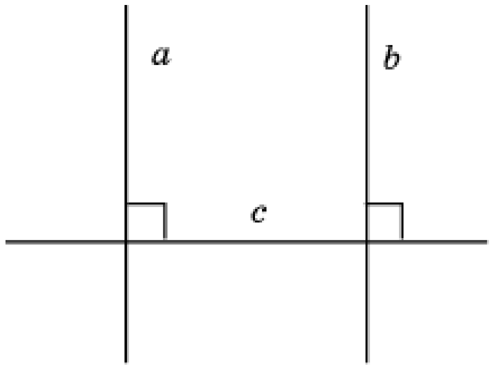
36. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, если бы они пересекались в некоторой точке C, то через эту точку проходили бы две прямые, параллельные прямой c, что противоречит аксиоме параллельных. Следовательно, прямые a и b параллельны.



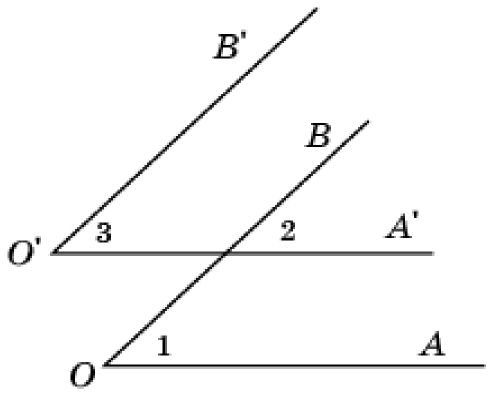
37. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c перпендикулярна прямой a. Докажем, что прямая c перпендикулярна прямой b. Действительно, угол 1 равен 90°. Углы 1 и 2 равны, как соответственные. Следовательно, угол 2 равен 90°, т.е. прямые b и c перпендикулярны.



38. Пусть прямые *a* и *b* перпендикулярны прямой *c*. Тогда соответственные углы равны и, следовательно, прямые *a* и *b* параллельны.

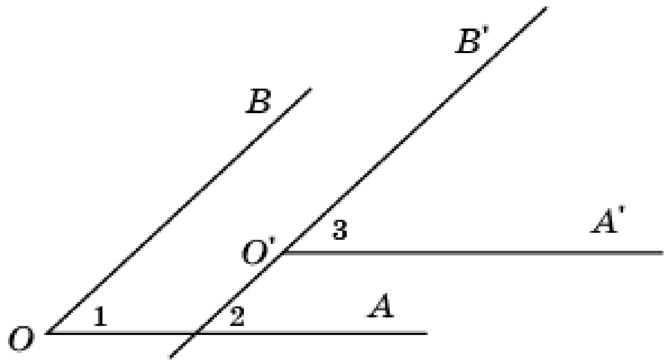


39. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно параллельными сторонами. Так как прямые *OA* и *O'A'* параллельны, то углы 1 и 2 равны, как соответственные. Так как прямые *OB* и *O'B'* параллельны, то углы 2 и 3 равны, как соответственные. Следовательно, данные углы 1 и 3 равны.

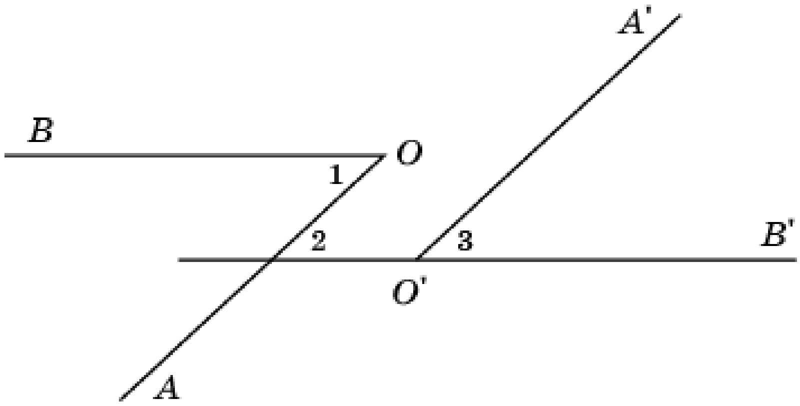


40. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно параллельными сторонами. Продолжим сторону *O'B'* угла *A'O'B'* до

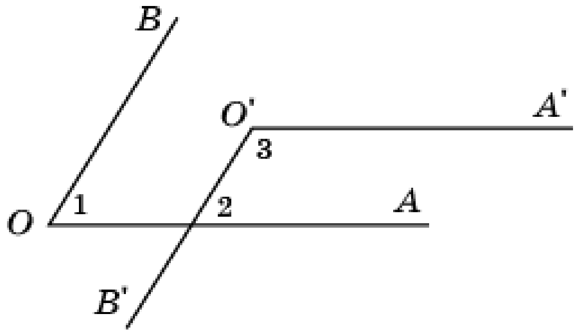
пересечения со стороной *OA* угла *AOB*. Так как прямые *OB* и *O'B'* параллельны, то углы 1 и 2 равны, как соответственные. Так как прямые *OA* и *O'A'* параллельны, то углы 2 и 3 равны, как соответственные. Следовательно, данные углы 1 и 3 равны.



41. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно параллельными сторонами. Продолжим сторону *O'B'* угла *A'O'B'* до пересечения со стороной *OA* угла *AOB*. Так как прямые *OB* и *O'B'* параллельны, то углы 1 и 2 равны, как накрест лежащие. Так как прямые *OA* и *O'A'* параллельны, то углы 2 и 3 равны, как соответственные. Следовательно, данные углы 1 и 3 равны.

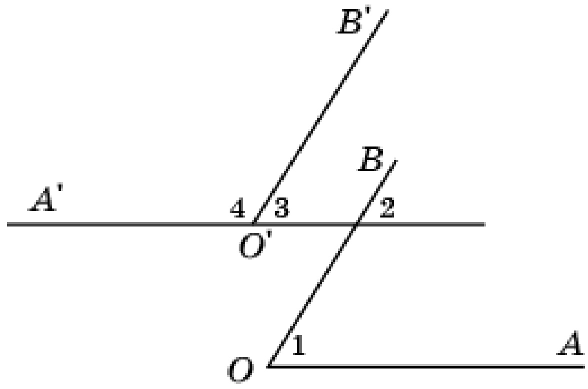


42. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно параллельными сторонами. Так как прямые *OB* и *O'B'* параллельны, то углы 1 и 2 равны, как соответственные. Так как прямые *OA* и *O'A'* параллельны, то углы 2 и 3 в сумме составляют 180°, как односторонние. Следовательно, данные углы 1 и 3 в сумме составляют

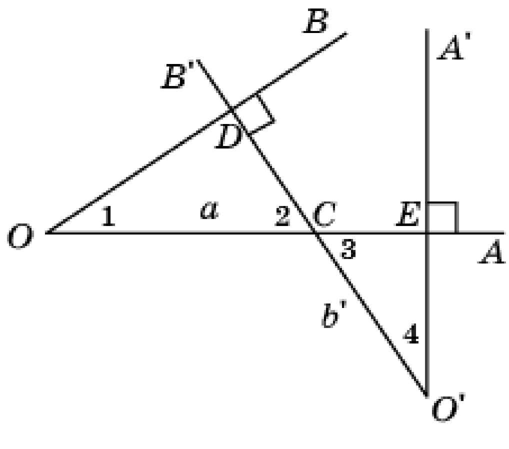


180°.

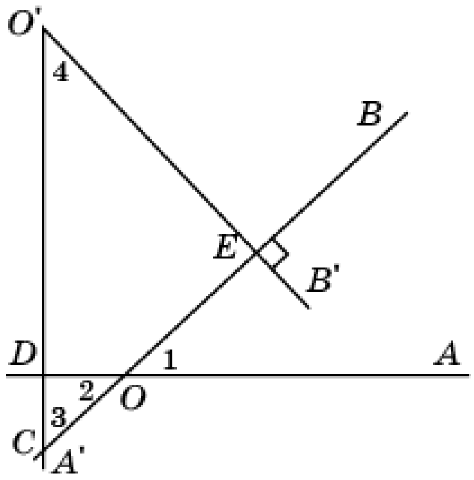
43. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно параллельными сторонами. Продолжим сторону *O'A'* угла *A'O'B'* до пересечения со стороной *OB* угла *AOB*. Так как прямые *OA* и *O'A'* параллельны, то углы 1 и 2 равны, как соответственные. Так как прямые *OB* и *O'B'* параллельны, то углы 2 и 3 равны, как соответственные. Углы 3 и 4 смежные и, следовательно, в сумме составляют $180°$. Значит, данные углы 1 и 4 в сумме составляют $180°$.



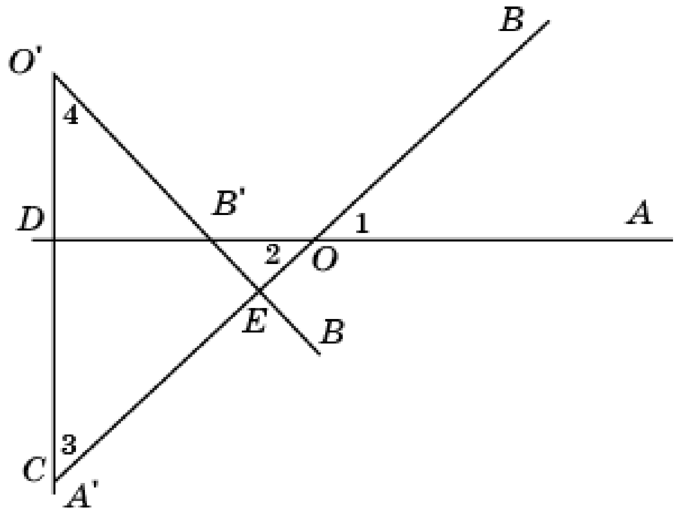
44. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. В прямоугольном треугольнике *ODC* $\angle 1 = 90^o - \angle 2$. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные. В прямоугольном треугольнике *O'EC* $\angle 4 = 90^o - \angle 3$. Следовательно, данные углы 1 и 4 равны.



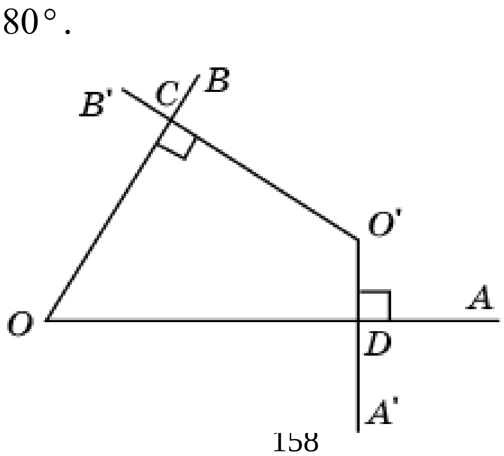
45. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Продолжим стороны угла *AOB* до пересечения со сторонами угла *A'O'B'*. Углы 1 и 2 равны, как вертикальные. В прямоугольном треугольнике *OCD* $\angle 2 = 90^o - \angle 3$. В прямоугольном треугольнике *O'EC* $\angle 4 = 90^o - \angle 3$. Следовательно, данные углы 1 и 4 равны.



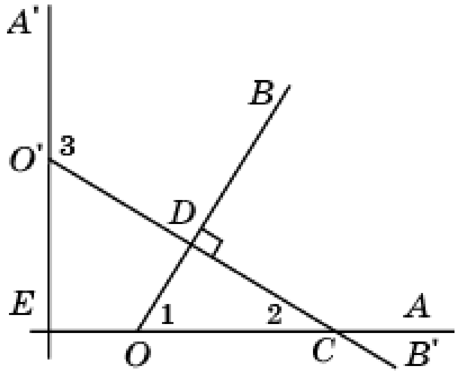
46. Пусть *AOB* и *A’O’B’* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Продолжим стороны угла *AOB* до пересечения со сторонами угла *A’O’B’*. Углы 1 и 2 равны, как вертикальные. В прямоугольном треугольнике *OCD* $\angle 2 = 90^o - \angle 3$. В прямоугольном треугольнике *O’CE* $\angle 4 = 90^o - \angle 3$. Следовательно, данные углы 1 и 4 равны.



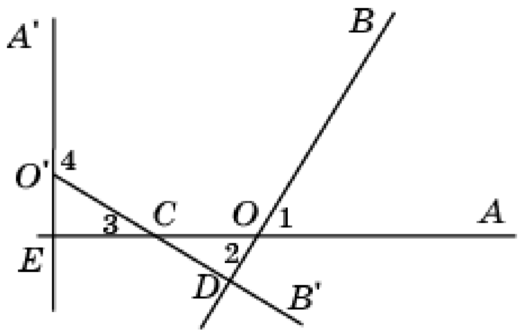
47. Пусть *AOB* и *A’O’B’* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. В четырехугольнике *OCO’D* углы *C* и *D* равны 90^o, а сумма всех углов равна 360^o. Следовательно, сумма углов *O* и *O’* равна 180°.



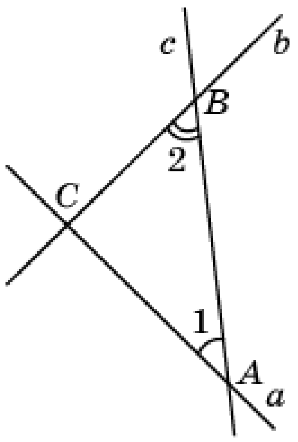
48. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Продолжим стороны углов до пересечения, как показано на рисунке. В прямоугольном треугольнике *OCD* $\angle 1 = 90^o - \angle 2$. $\angle 3 = 90^o + \angle 2$, как внешний угол прямоугольного треугольника *O'EC*. Следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$.



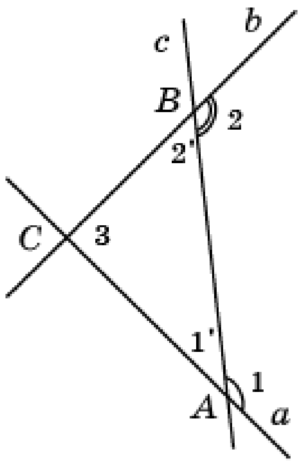
49. Пусть *AOB* и *A'O'B'* – углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Продолжим стороны углов до пересечения, как показано на рисунке. $\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные. $\angle 3 = 90^o - \angle 2$. $\angle 4 = 90^o + \angle 3$, как внешний угол прямоугольного треугольника *O'AC*. Следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.



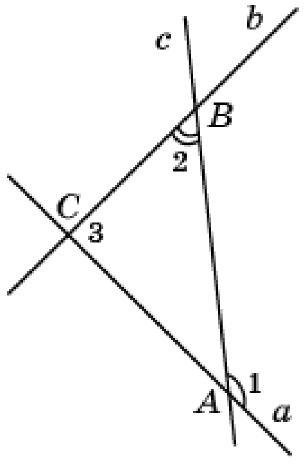
50. Пусть прямые *a* и *b* пересечены прямой *c*, и сумма односторонних углов 1 и 2 равна 90º. Тогда в треугольнике *ABC* сумма углов *A* и *B* равна 90º. Значит, угол *C* равен 90º, т.е. прямые *a* и *b* перпендикулярны.



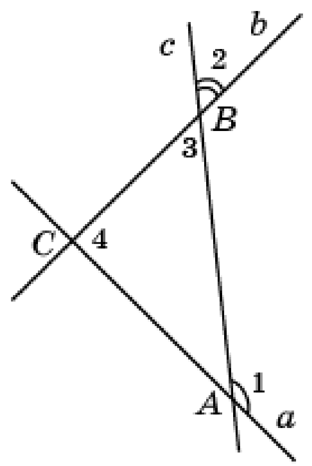
51. Пусть прямые *a* и *b* пересечены прямой *c*, и сумма односторонних углов 1 и 2 равна 270°. Тогда в треугольнике *ABC* $\angle 1' = 180^\circ - \angle 1$, $\angle 2' = 180^\circ - \angle 2$. Следовательно, $\angle 1' + \angle 2' = 90^\circ$. Значит, угол 3 равен 90°, т.е. прямые *a* и *b* перпендикулярны.



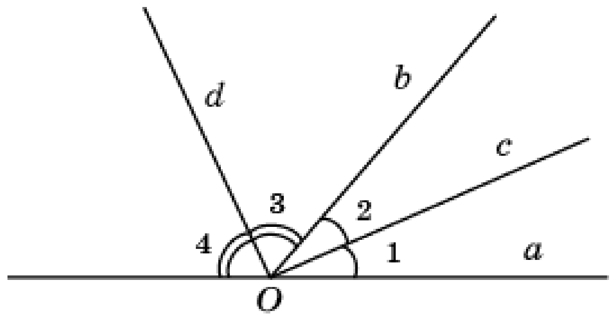
52. Пусть прямые *a* и *b* пересечены прямой *c*, и разность накрест лежащих углов 1 и 2 равна 90°. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то угол 3 равен разности углов 1 и 2 и равен 90°, т.е. прямые *a* и *b* перпендикулярны.



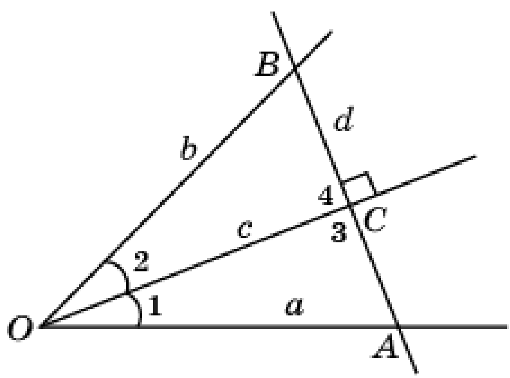
53. Пусть прямые *a* и *b* пересечены прямой *c*, и разность соответственных углов 1 и 2 равна 90°. Углы 2 и 3 равны, как вертикальные. Угол 1 равен сумме углов 3 и 4, как внешний угол треугольника *ABC*. Значит, угол 4 равен разности углов 1 и 3 и равен 90°. Следовательно, прямые *a* и *b* перпендикулярны.



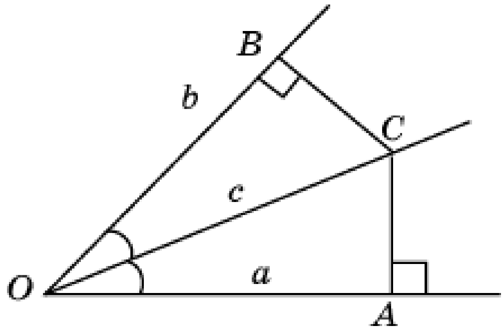
54. Пусть c и d – биссектрисы смежных углов. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Так как $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^o$, то $\angle 2 + \angle 3 = 90^o$, т.е. c и d перпендикулярны.



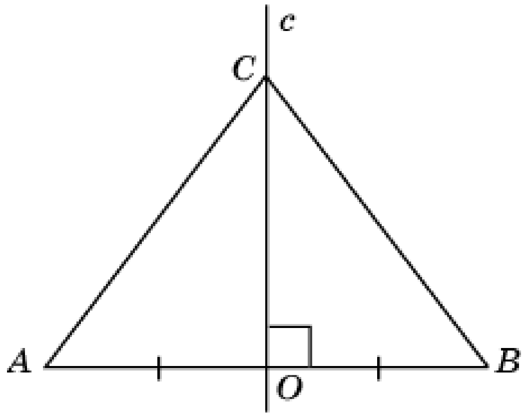
55. Пусть прямая d пересекает стороны угла aOb и перпендикулярна его биссектрисе c. Прямоугольные треугольники OAC и OBC равны по катету и острому углу. Следовательно, $OA = OB$.



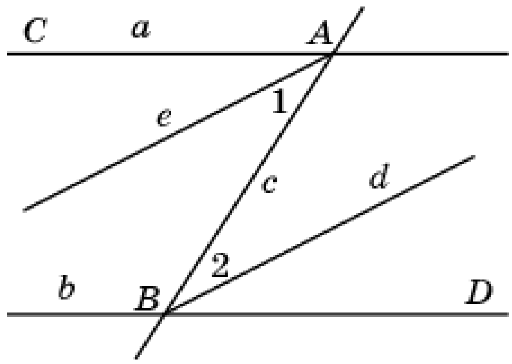
56. Прямоугольные треугольники $OФC$ и OBC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $CA = CB$.



57. Пусть *c* - прямая, проведенная перпендикулярно к отрезку *AB* через его середину *O*. Ясно, что точка *O* одинаково удалена от концов данного отрезка. Если *C* – другая точка прямой *c*, то из равенства прямоугольных треугольников *AOC* и *BOC* (по катетам) следует равенство отрезков *CA* и *CB*.

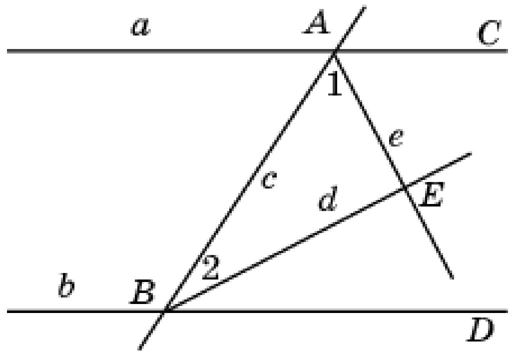


58. Пусть *d* и *e* – прямые, на которых лежат биссектрисы накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными прямыми *a*, *b* и секущей *c*. Угол 1 равен половине угла *CAB*. Угол 2 равен половине угла *ABD*. Так как углы *CAB* и *ABD* равны, как накрест лежащие, то и углы 1 и 2 равны. Эти углы являются накрест лежащими для прямых *d*, *e* и секущей *c*. Следовательно, прямые *d* и *e* параллельны.

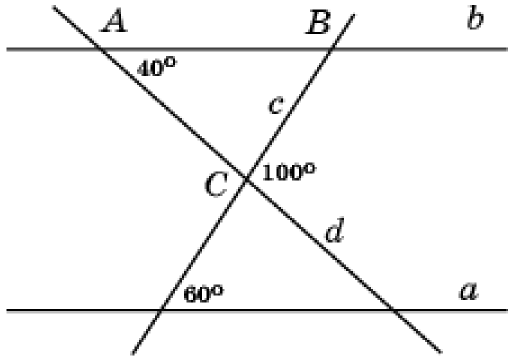


59. Пусть *d* и *e* – прямые, на которых лежат биссектрисы односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми *a* и *b* и секущей *c*. Угол 1 равен половине угла *BAC*. Угол 2 равен

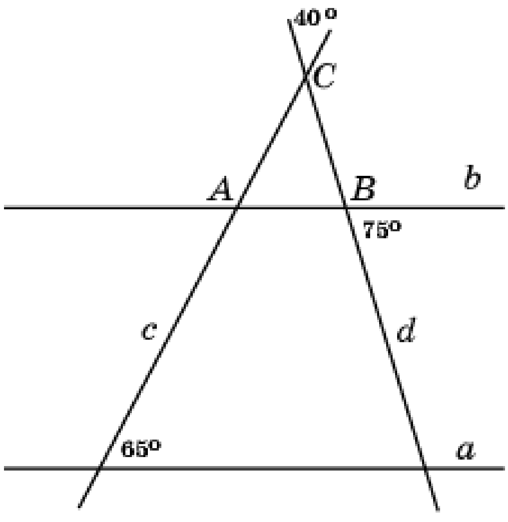
половине угла *ABD*. Так как сумма углов *BAC* и *ABD* равна 180°, то сумма углов 1 и 2 равна 90°. Следовательно, угол *E* в треугольнике *ABE* равен 90°. Значит, прямые *d* и *e* перпендикулярны.



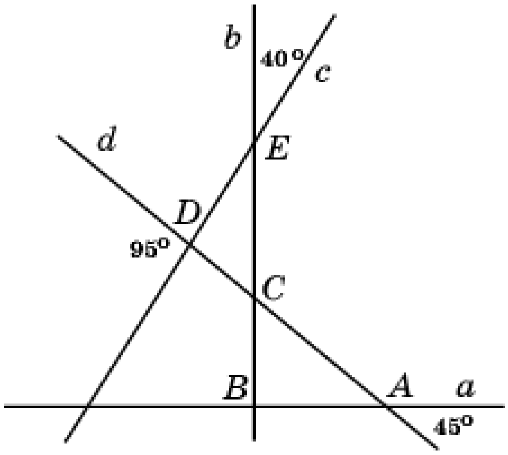
60. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60° (внешний угол при вершине *C* равен 100°, а угол *A* равен 40°). Таким образом, накрест лежащие углы для прямых *a*, *b* и секущей *c* равны. Следовательно, прямые *a* и *b* параллельны.



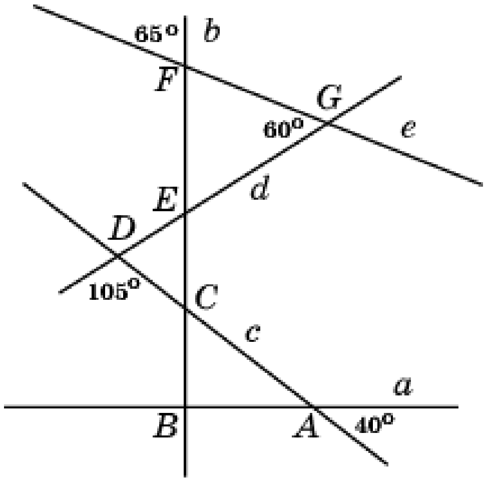
61. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 75°, угол *C* равен 40°. Значит, угол *A* равен 65°. Таким образом, соответственные углы для прямых *a*, *b* и секущей *c* равны. Следовательно, прямые *a* и *b* параллельны.



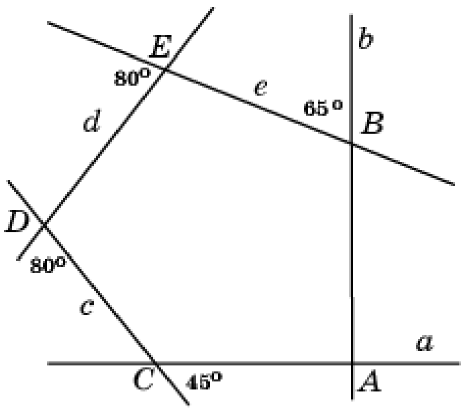
62. В треугольнике *CDE* угол *D* равен 95°, угол *E* равен 40°. Значит, угол *C* равен 45°. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 45°, угол *C* равен 45°. Значит, угол *B* равен 90°. Следовательно, прямые *a* и *b* перпендикулярны.



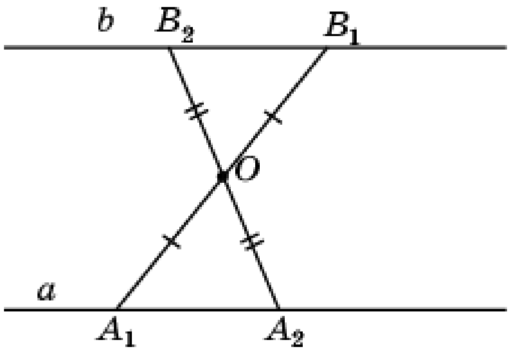
63. В треугольнике *EFG* угол *E* равен 55°. В треугольнике *CDE* угол *C* равен 50°. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 90°. Следовательно, прямые *a* и *b* перпендикулярны.



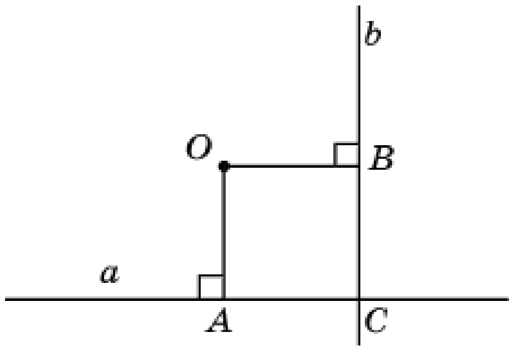
64. В пятиугольнике *ABEDC* $\angle B$ = 115°, $\angle E$ = 100°, $\angle D$ = 100°, $\angle C$ = 135°. Так как сумма углов пятиугольника равна 540°, угол *A* равен 90°. Следовательно, прямые *a* и *b* перпендикулярны.



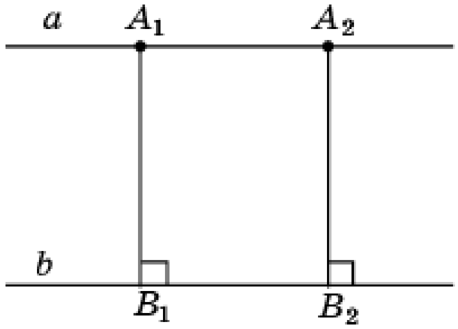
65. Пусть a и b – центрально-симметричные прямые относительно центра O. Точки B_1, B_2 центрально-симметричны соответственно точкам A_1, A_2. Тогда треугольники OA_1A_2 и OB_1B_2 равны (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, угол OA_1A_2 равен углу OB_1B_2. Так как эти углы являются накрест лежащими, прямые a и b параллельны.



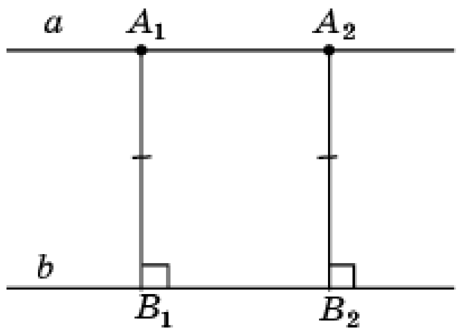
66. Пусть прямая b получена поворотом прямой a вокруг точки O на 90° по часовой стрелке. Опустим из точки O на прямую a перпендикуляр OA. При повороте он перейдет в отрезок OB. Так как поворот сохраняет углы между прямыми, то OB будет перпендикулярен прямой b. В четырехугольнике $AOBC$ три угла прямые, следовательно, угол C также прямой, т.е. прямые a и b перпендикулярны.



67. Пусть a и b – параллельные прямые, A_1B_1, A_2B_2 – перпендикуляры, опущенные из точек прямой a на прямую b. Тогда прямые A_1B_1, A_2B_2 параллельны. Значит, $A_1A_2B_2B_1$ – прямоугольник и, следовательно, отрезки A_1B_1, A_2B_2 равны.



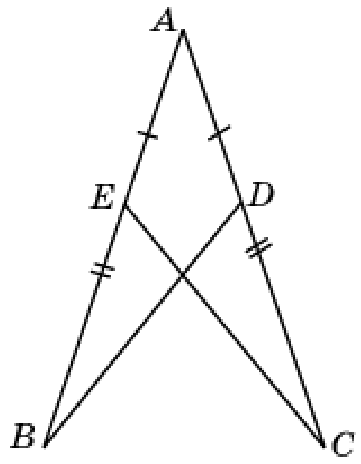
68. Пусть A_1B_1, A_2B_2 – перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2 на прямую b. Из равенства отрезков A_1B_1 и A_2B_2 следует, что $A_1A_2B_1B_2$ – прямоугольник. Следовательно, прямые a и b параллельны.



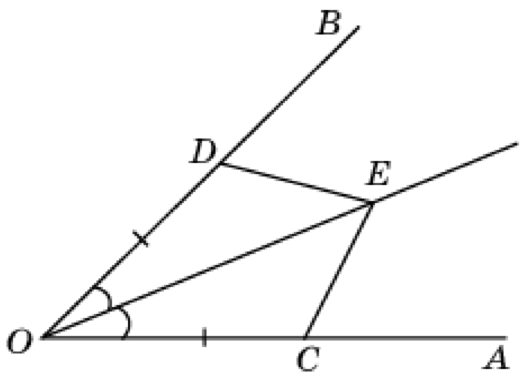
2. Равенство треугольников

Уровень В

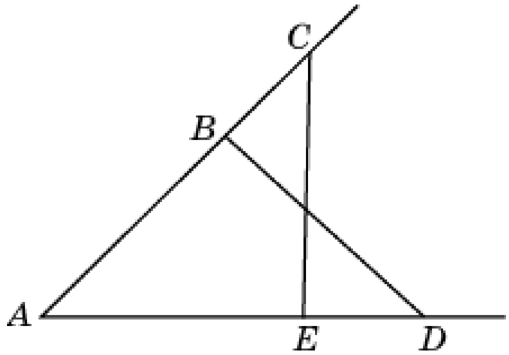
7. Треугольники *ABD* и *ACE* равны по первому признаку равенства треугольников (*AB=AC*, *AD* = *AE*, угол *A* общий). Следовательно, равны соответствующие стороны *BD* и *CE* этих треугольников.



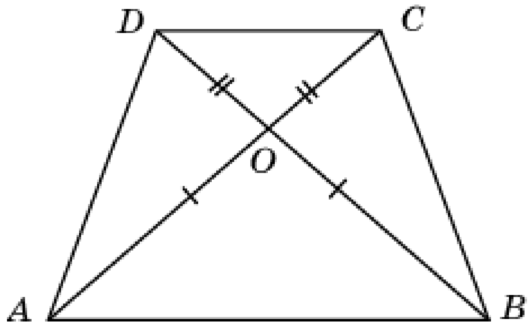
8. Треугольники *OCE* и *ODE* равны по первому признаку равенства треугольников (*OC* = *OD*, $\angle COE = \angle DOE$, сторона *OE* – общая). Следовательно, равны соответствующие стороны *EC* и *ED* этих треугольников.



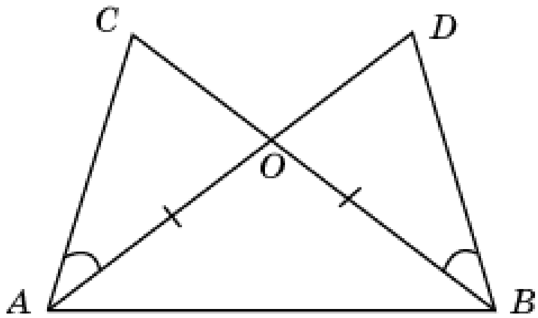
9. Треугольники *ABD* и *ACE* равны по первому признаку равенства треугольников (*AC* = *AD*, *AB=AE*, угол *A* – общий). Следовательно, равны соответствующие углы *ABD* и *AEC*. Из равенства этих углов следует равенство смежных с ними углов *CBD* и *DEC*.



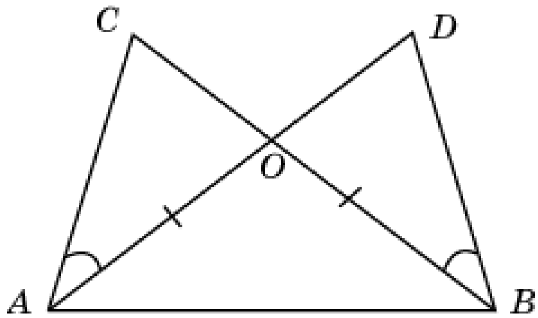
10. Треугольники *AOD* и *BOC* равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = BO$, $DO=CO$, $\angle AOD = \angle BOC$). Следовательно, равны соответствующие стороны *AD* и *BC* этих треугольников.



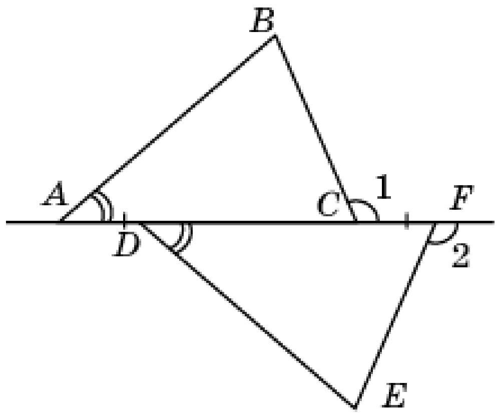
11. Треугольник *AOB* – равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle OBA$. Учитывая равенство углов *DAC* и *DBC*, получаем равенство углов *ABD* и *BAC*. Треугольники *ABC* и *BAD* равны по второму признаку равенства треугольников (*AB* – общая сторона, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle BAC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие углы *C* и *D* этих треугольников.



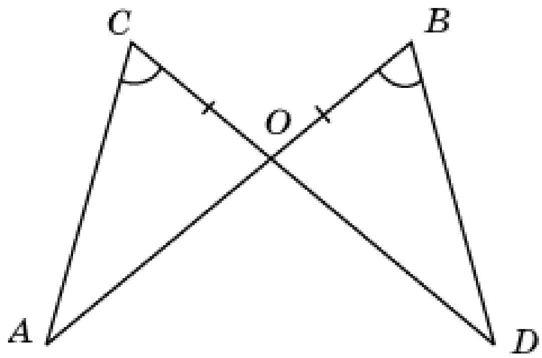
12. Треугольник *AOB* – равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle OBA$. Учитывая равенство углов *DAC* и *DBC*, получаем равенство углов *ABD* и *BAC*. Треугольники *ABC* и *BAD* равны по второму признаку равенства треугольников (*AB* – общая сторона, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle BAC = \angle ABD$). Следовательно, равны соответствующие стороны $AC = BD$ этих треугольников.



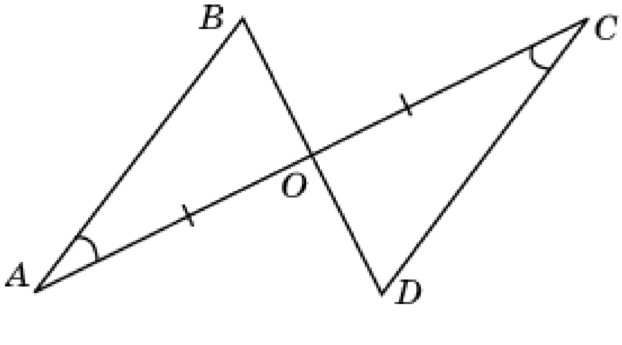
13. Из равенства углов 1 и 2 следует равенство смежных углов *ACB* и *DFE*. Из равенства отрезков *AD* и *CF* следует равенство отрезков *AC* и *DF*. Треугольники *ACB* и *DFE* равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ACB = \angle DFE$).



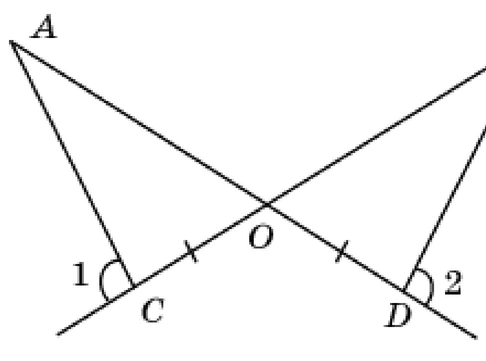
14. Треугольники *AOC* и *DOB* равны по второму признаку равенства треугольников ($OC = OB$, $\angle ACO = \angle DBO$, $\angle AOC = \angle DOB$).



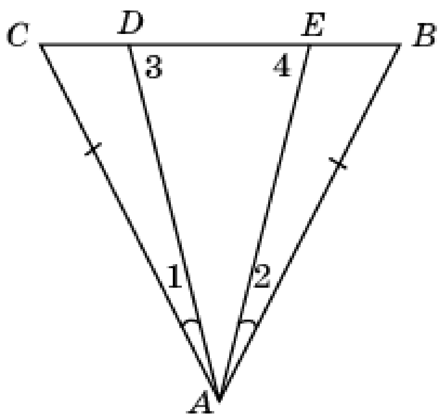
15. Треугольники *AOB* и *COD* равны по второму признаку равенства треугольников ($AO = CO$, $\angle OAB = \angle OCD$, $\angle AOB = \angle COD$).



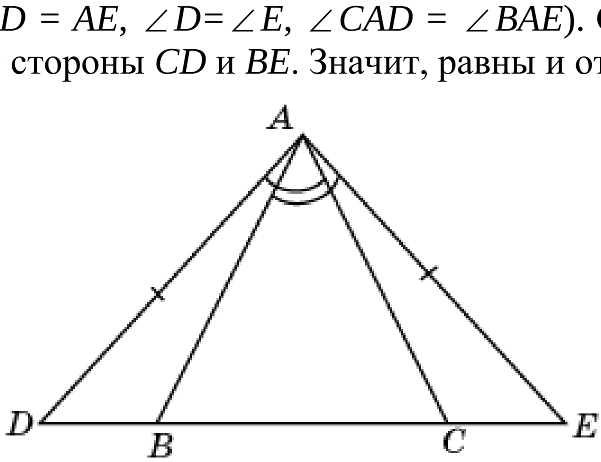
16. Из равенства углов 1 и 2 следует равенство смежных с ними углов ACO и BDO. Треугольники ACO и BDO равны по второму признаку равенства треугольников ($CO = DO$, $\angle ACO = \angle BDO$, $\angle AOC = \angle BOD$). Следовательно, равны соответствующие стороны OA и OB этих треугольников.



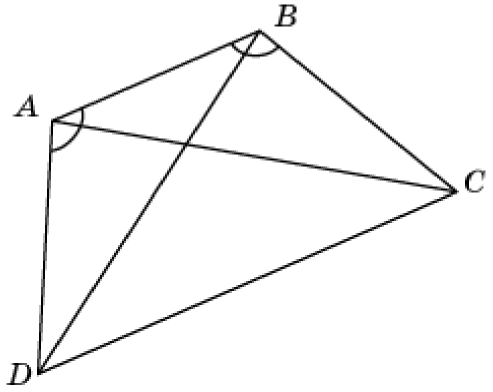
17. Треугольник ABC – равнобедренный. Следовательно, $\angle B = \angle C$. Треугольники ABE и ACD равны по второму признаку равенства треугольников ($AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle B = \angle C$). Следовательно, равны соответствующие стороны AE и AD этих треугольников. Треугольник AED – равнобедренный. Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$.



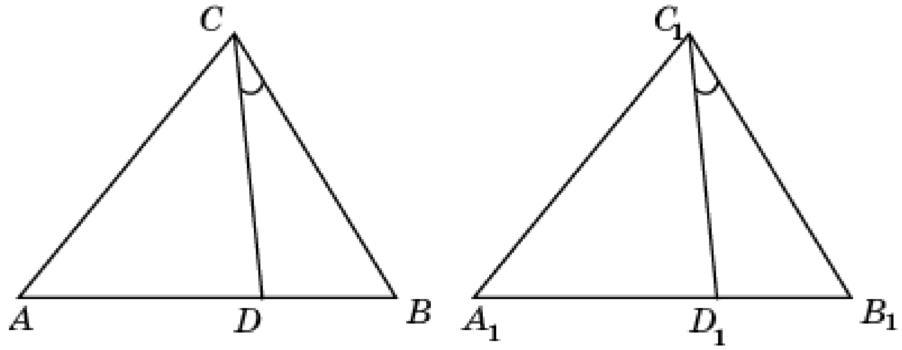
18. Треугольник ADE – равнобедренный. Следовательно, $\angle D = \angle E$. Треугольники ACD и ABE равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$, $\angle CAD = \angle BAE$). Следовательно, равны соответствующие стороны CD и BE. Значит, равны и отрезки BD и CE.



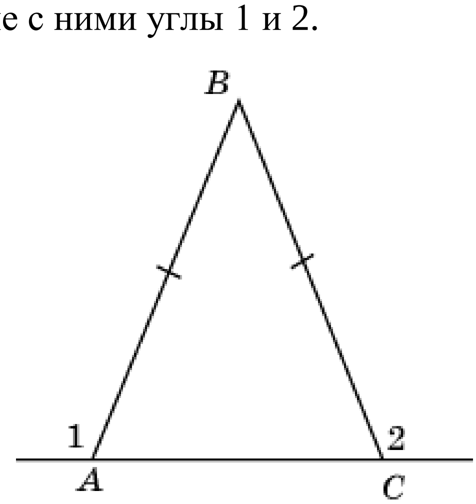
19. Треугольники ABC и BAD равны по второму признаку равенства треугольников (AB – общая сторона, $\angle ABC = \angle BAD$, $\angle BAC = \angle ABD$. Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.



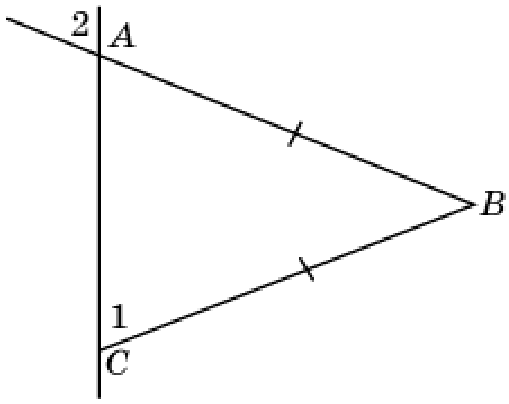
20. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон BC и B_1C_1, а также соответствующих углов B и B_1. Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и B_1D_1 этих треугольников. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон AB и A_1B_1. Следовательно, имеет место равенство отрезков AD и A_1D_1.



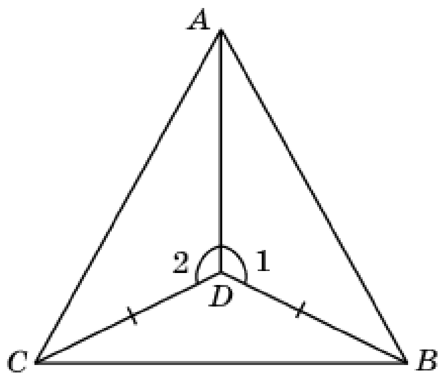
21. Треугольник ABC – равнобедренный. Следовательно, $\angle A = \angle C$. Значит, равны и смежные с ними углы 1 и 2.



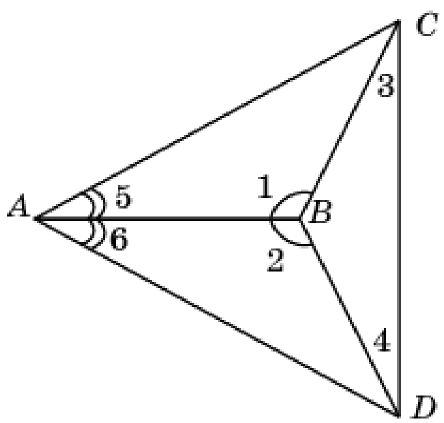
22. Треугольник ABC – равнобедренный. Следовательно, $\angle BAC = \angle 1$. Углы BAC и 2 равны как вертикальные. Значит, $\angle 1 = \angle 2$.



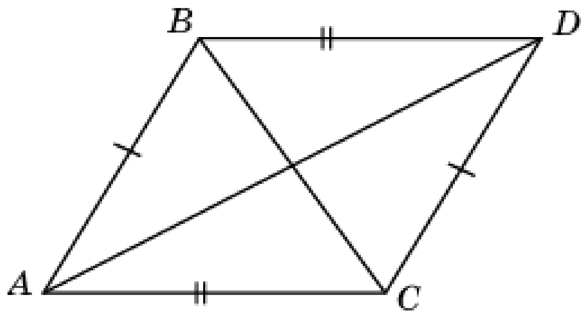
23. Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников (AD – общая сторона, $BD = CD$, $\angle ADB = \angle ADC$). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и AC этих треугольников. Треугольник ABC – равнобедренный и, значит, $\angle ACB = \angle ABC$.



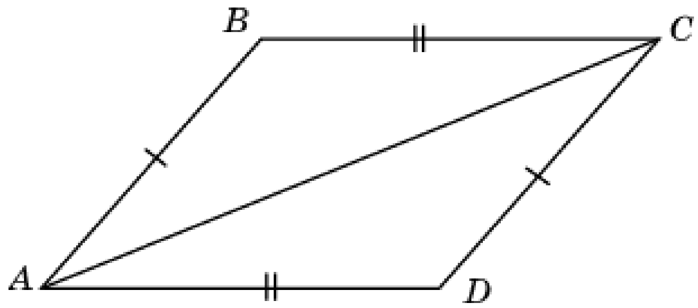
24. Треугольники ABC и ABD равны по второму признаку равенства треугольников (AB – общая сторона, $\angle ABC = \angle ABD$, $\angle BAC = \angle BAD$). Следовательно, равны соответствующие стороны BC и BD этих треугольников. Треугольник BCD – равнобедренный, значит, $\angle 3 = \angle 4$.



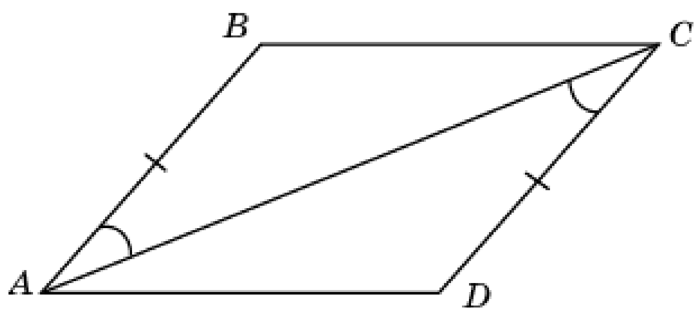
25. Треугольники *ABC* и *DCB* равны по третьему признаку равенства треугольников (*AB* = *DC*, *AC* = *DB*, *BC* – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы *BAC* и *CDB* этих треугольников.



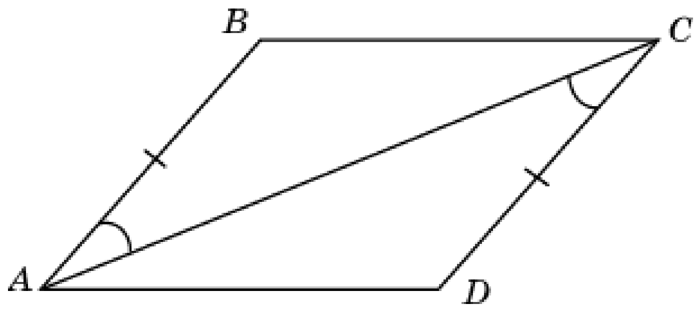
26. В четырехугольнике *ABCD* проведем диагональ *AC*. Треугольники *ABC* и *CDA* равны по третьему признаку равенства треугольников (*AB* = *CD*, *BC* = *DA*, *AC* – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы *ABC* и *CDA* этих треугольников.



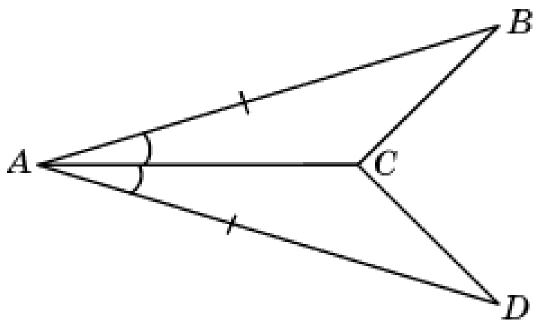
27. Треугольники *ABC* и *CDA* равны по первому признаку равенства треугольников (*AB* = *CD*, *AC* – общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$). Следовательно, равны соответствующие углы *B* и *D* этих треугольников.



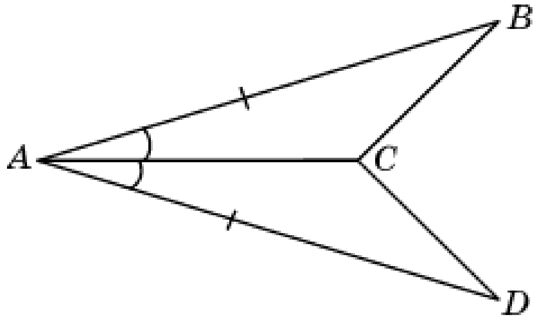
28. Треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, AC – общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$). Следовательно, равны соответствующие стороны AD и BC этих треугольников.



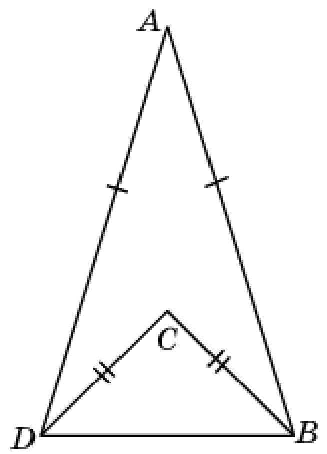
29. Треугольники ABC и ADC равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AD$, AC – общая сторона, $\angle BAC = \angle DAC$). Следовательно, равны соответствующие стороны BC и DC этих треугольников.



30. Треугольники ABC и ADC равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AD$, AC – общая сторона, $\angle BAC = \angle DAC$). Следовательно, равны соответствующие углы B и D этих треугольников.

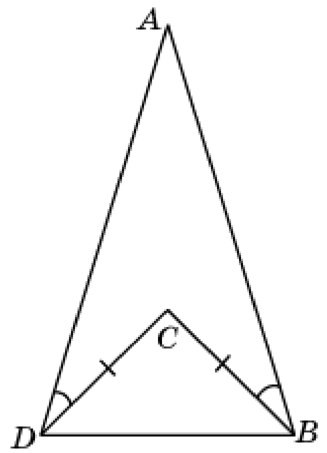


31. Проведем отрезок BD. Треугольник ABD – равнобедренный ($AB = AD$). Следовательно, $\angle ABD = \angle ADB$. Треугольник CBD – равнобедренный ($CB = CD$). Следовательно, $\angle CBD = \angle CDB$. Значит,

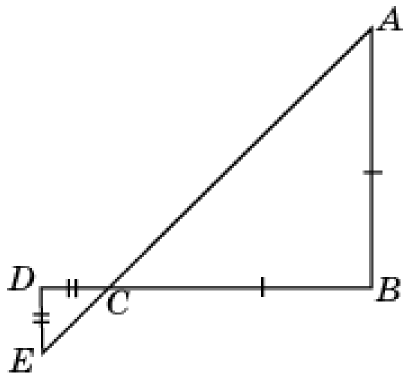


$\angle ABC = \angle ADC$.

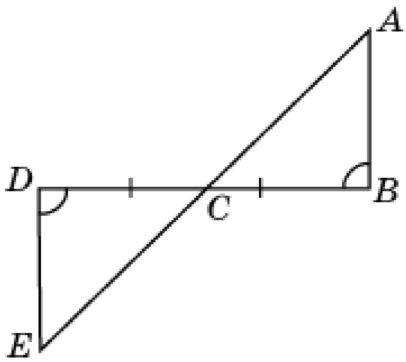
32. Проведем отрезок BD. Треугольник BCD – равнобедренный ($BC = DC$). Следовательно, $\angle DBC = \angle BDC$. Из этого равенства и равенства углов ABC и ADC следует равенство углов ABD и ADB. Значит, треугольник ABD – равнобедренный, следовательно, $AB = AD$.



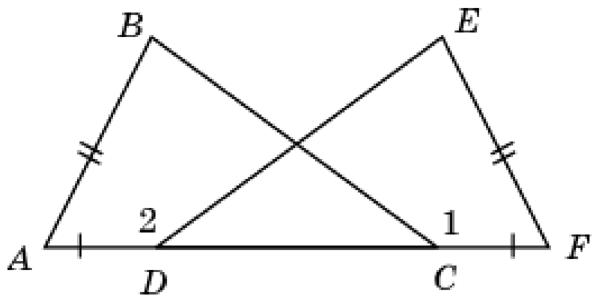
33. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$. Треугольник CDE – равнобедренный, следовательно, $\angle DCE = \angle DEC$. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Следовательно, $\angle BAC = \angle DEC$.



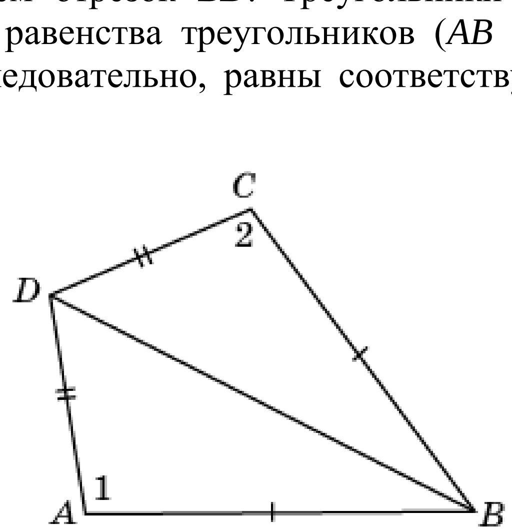
34. Углы *ACB* и *ECD* равны, как вертикальные. Треугольники *ABC* и *EDC* равны по второму признаку равенства треугольников ($BC = DC$, $\angle ABC = \angle EDC$, $\angle ACB = \angle ECD$). Следовательно, равны соответствующие стороны *AC* и *EC* этих треугольников.



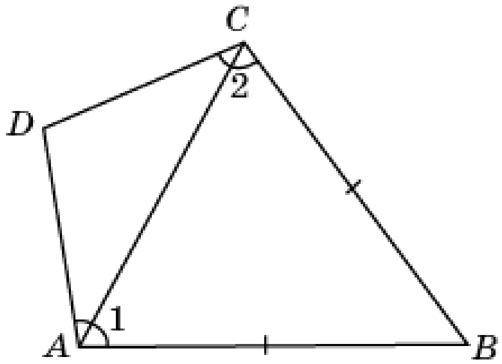
35. Из равенства отрезков *AD* и *CF* следует равенство отрезков *AC* и *DF*. Треугольники *ABC* и *FED* равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы *ACB* и *FDE* этих треугольников, значит, равны и смежные с ними углы 1 и 2.



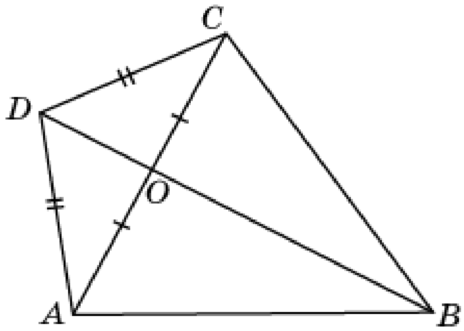
36. Проведем отрезок *BD*. Треугольники *ABD* и *CBD* равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы 1 и 2 этих треугольников.



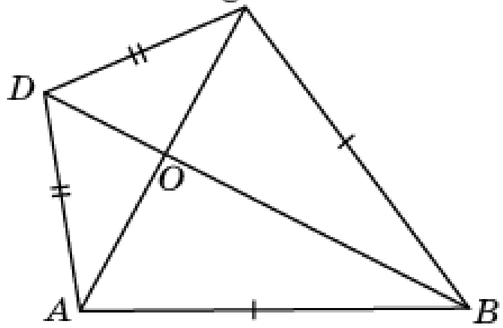
37. Проведем отрезок *AC*. Треугольник *ABC* – равнобедренный (*AB* = *BC*). Следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$. Из этого равенства и равенства углов 1 и 2 следует равенство углов *DAC* и *DCA*. Значит, треугольник *DAC* – равнобедренный, следовательно, *AD* = *CD*.



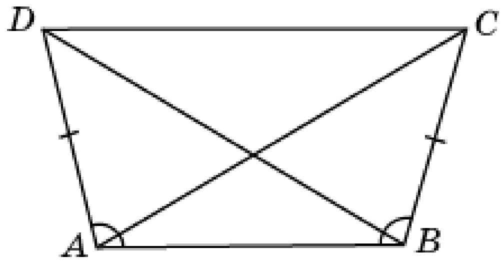
38. Треугольники *AOD* и *COD* равны по третьему признаку равенства треугольников (*AO* = *CO*, *AD* = *CD*, *OD* – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы *ADO* и *CDO*. Треугольники *ABD* и *CBD* равны по первому признаку равенства треугольников (*AD* = *CD*, *BD* – общая сторона, $\angle ADB = \angle CDB$). Следовательно, равны соответствующие стороны *AB* и *CB* этих треугольников.



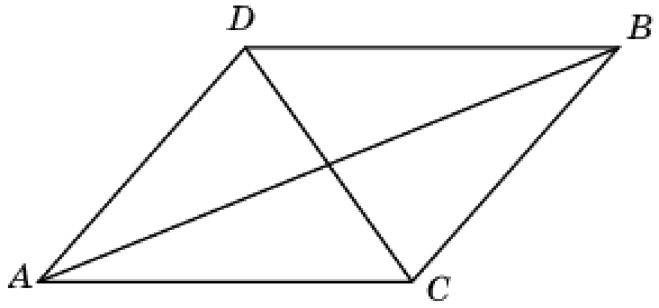
39. Треугольники *ABD* и *CBD* равны по третьему признаку равенства треугольников (*AB* = *CB*, *AD* = *CD*, *BD* – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы *ABO* и *CBO*. Треугольники *ABO* и *CBO* равны по первому признаку равенства треугольников (*AB* = *CB*, *BO* – общая сторона, $\angle ABO = \angle CBO$). Следовательно, равны соответствующие стороны *AO* и *CO* этих треугольников.



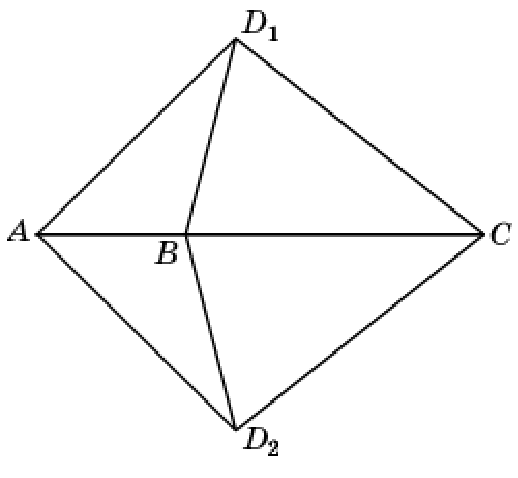
40. Треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников (AB – общая сторона, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.



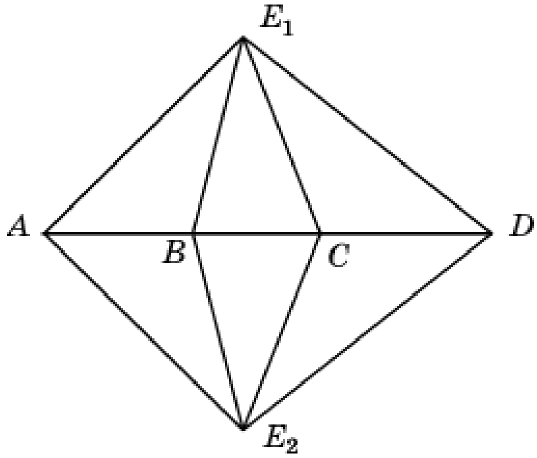
41. Из равенства треугольников ABC и BAD следует равенство соответствующих сторон AC и BD, BC и AD. Треугольники CBD и DAC равны по третьему признаку равенства треугольников ($CB = DA$, $BD = AC$, CD – общая сторона).



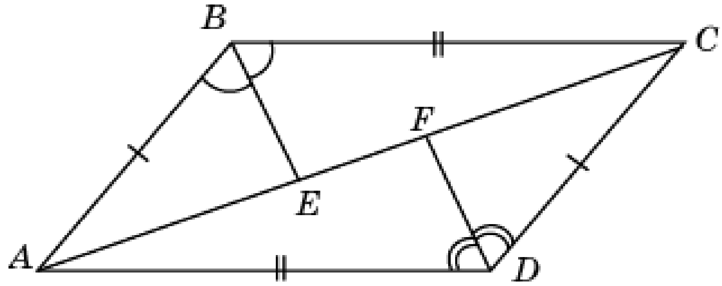
42. Из равенства треугольников ABD_1 и ABD_2 следует равенство соответствующих сторон BD_1 и BD_2, а также равенство соответствующих углов ABD_1 и ABD_2. Из равенства указанных углов следует равенство смежных с ними углов CBD_1 и CBD_2. Треугольники BCD_1 и BCD_2 равны по первому признаку равенства треугольников ($BD_1 = BD_2$, BC – общая сторона, $\angle CBD_1 = \angle CBD_2$).



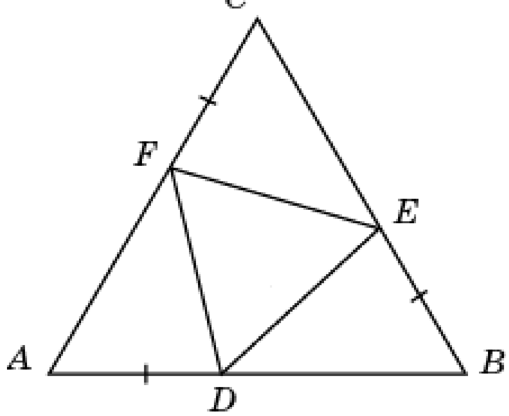
43. Из предыдущей задачи следует, что из равенства треугольников ABE_1 и ABE_2 вытекает равенство треугольников BCE_1 и BCE_2, которое, в свою очередь, влечет равенство треугольников CDE_1 и CDE_2.



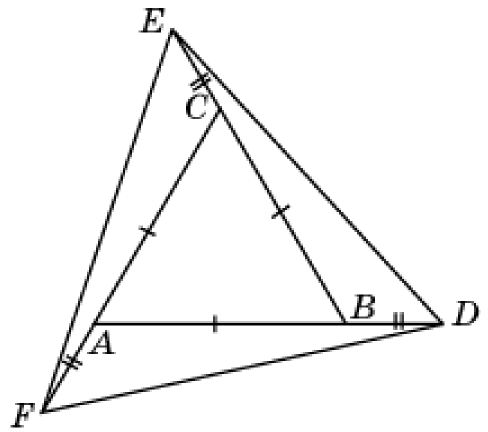
44. Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $BC = DA$, AC – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ABC и CDA, BAC и DCA. Из равенства углов ABC и CDA следует равенство углов ABE и CDF. Треугольники ABE и CDF равны по второму признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $\angle BAE = \angle DCF$, $\angle ABE = \angle CDF$).



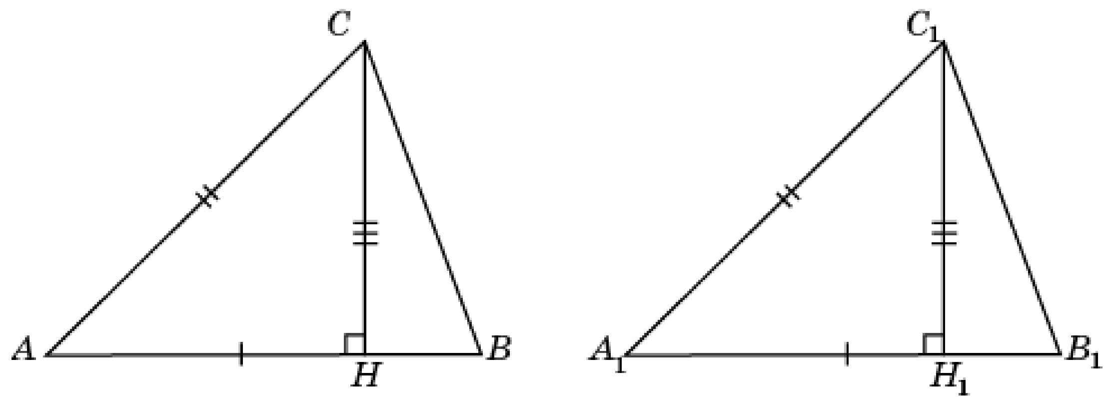
45. Из равенства сторон правильного треугольника и равенства отрезков AD, BE и CF следует равенство отрезков AF, CE и BD. Треугольники ADF, BED и CFE равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, $\angle A = \angle B = \angle C$). Следовательно, равны соответствующие стороны DF, ED и FE этих треугольников. Значит, треугольник DEF тоже правильный.



46. Из равенства сторон правильного треугольника ABC и равенства отрезков BD, CE и AF следует равенство отрезков AD, BE и CF. Из равенства углов правильного треугольника ABC следует равенство углов FAD, DBE и ECF. Треугольники ADF, BED и CFE равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, $\angle FAD = \angle DBE = \angle ECF$). Следовательно, равны соответствующие стороны DF, ED и FE этих треугольников. Значит, треугольник DEF тоже правильный.

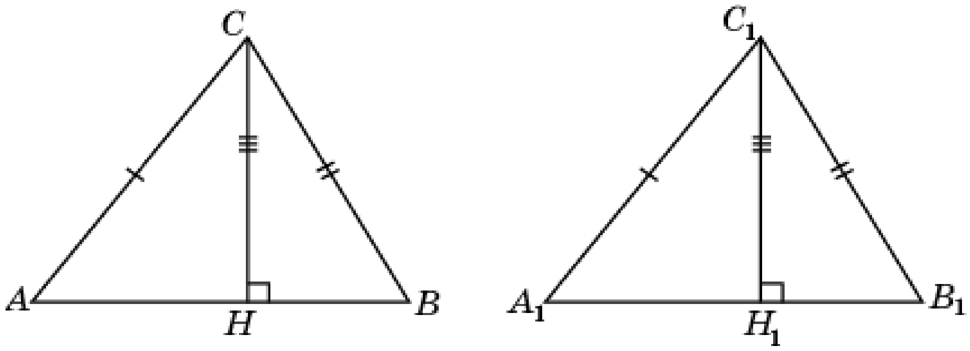


47. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



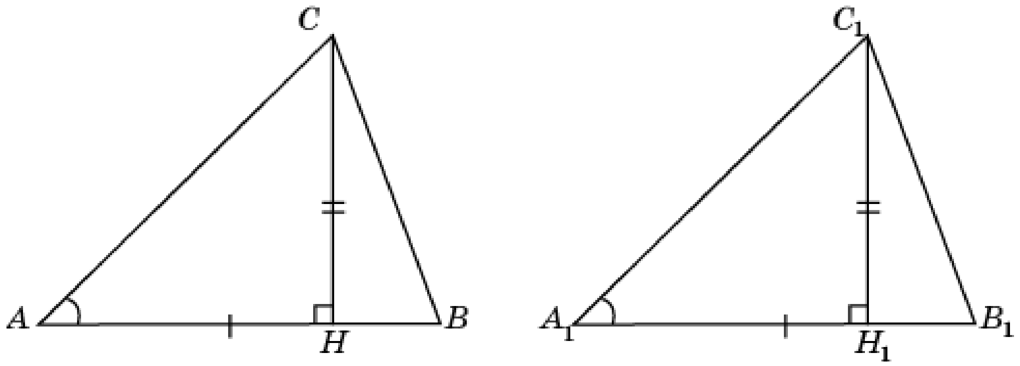
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle A = \angle A_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

48. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



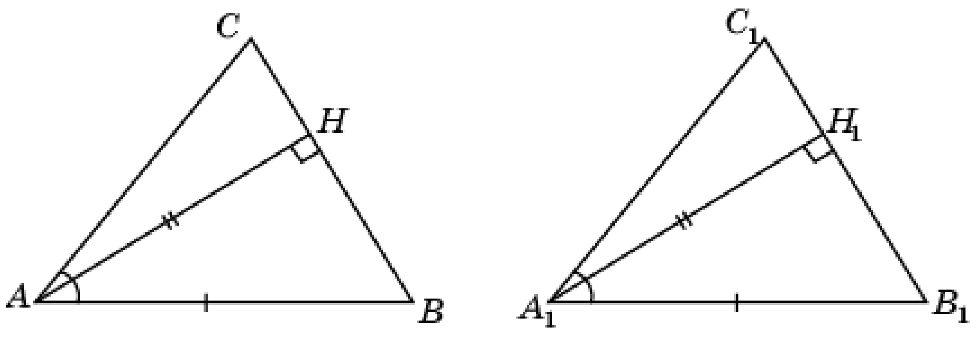
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $BH = B_1H_1$. Следовательно, $AB = A_1B_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

49. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



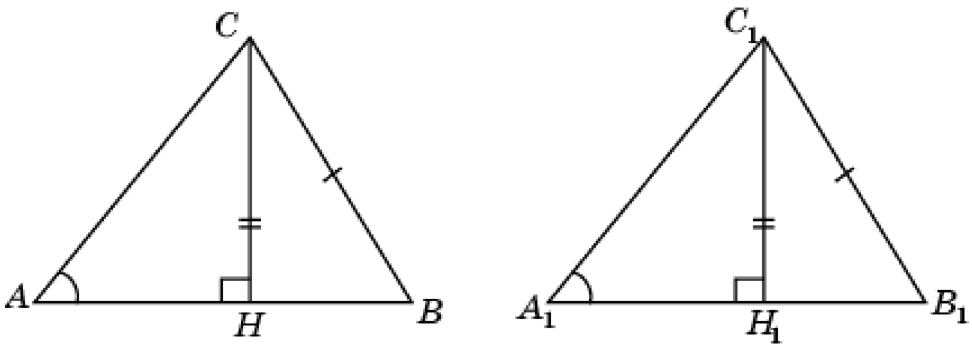
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

50. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



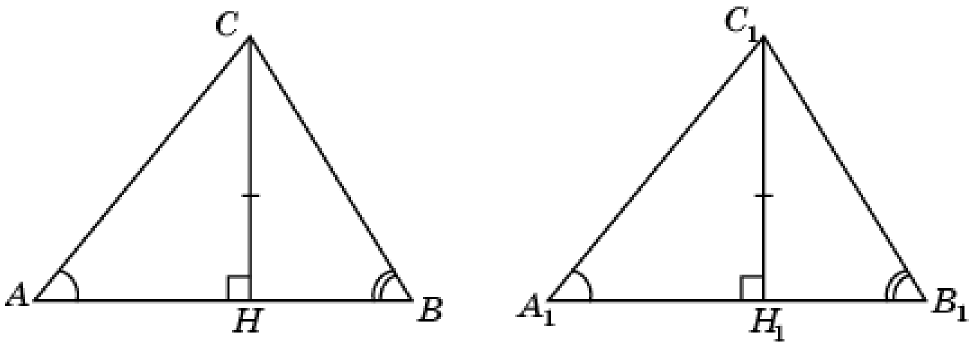
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle B_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

51. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



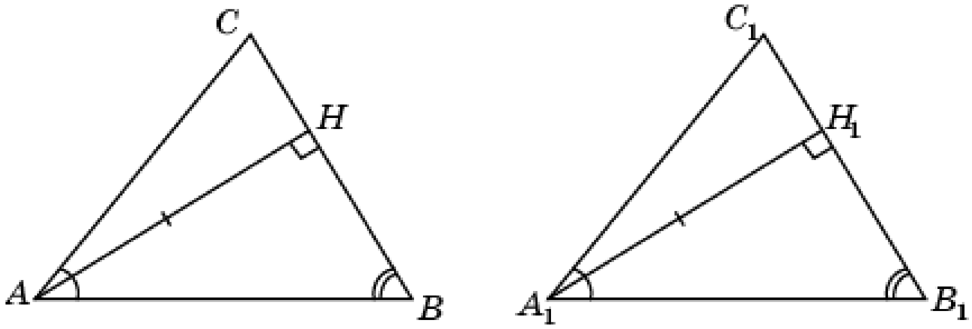
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $BH = B_1H_1$, следовательно, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

52. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



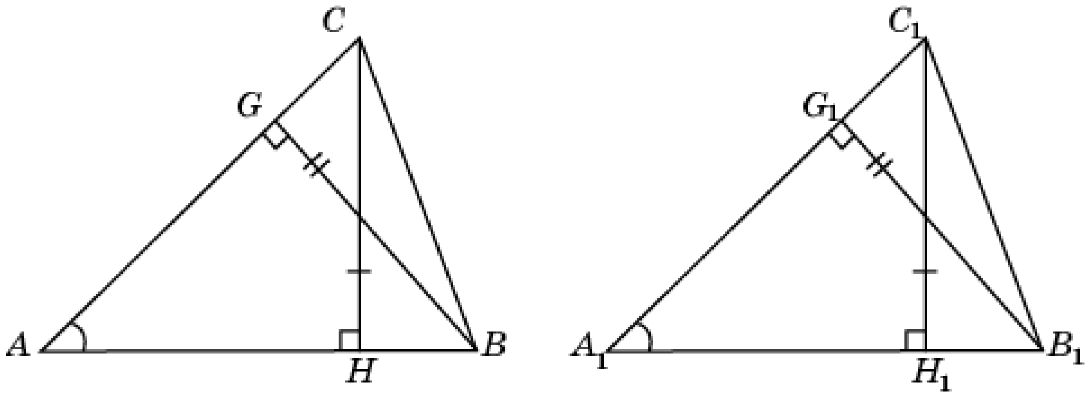
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $BH = B_1H_1$, следовательно, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

53. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

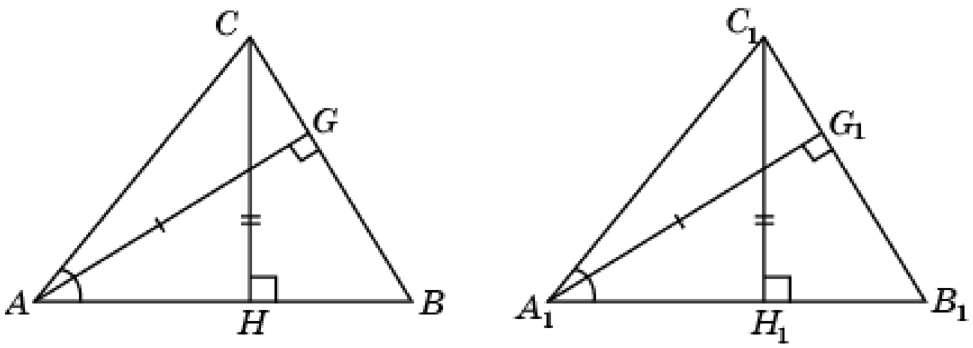
54. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, высота BG равна высоте B_1G_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



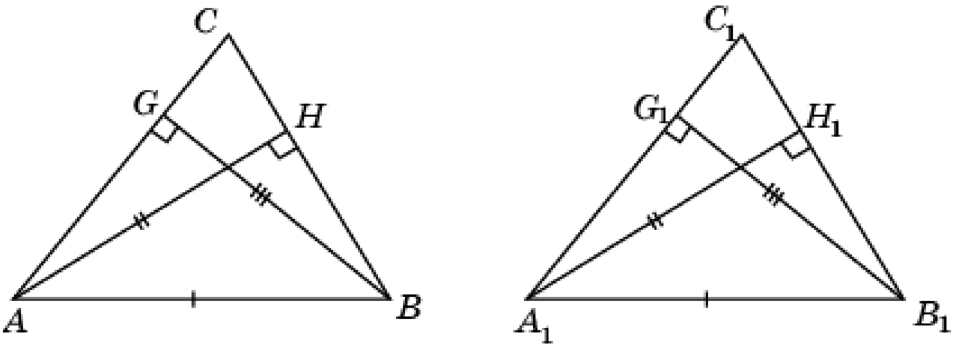
Действительно, прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

55. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Прямоугольные треугольники ACG и $A_1C_1G_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

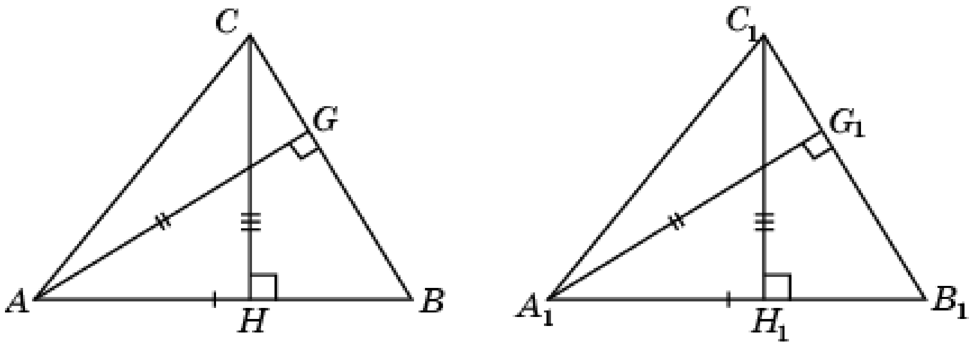


56. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



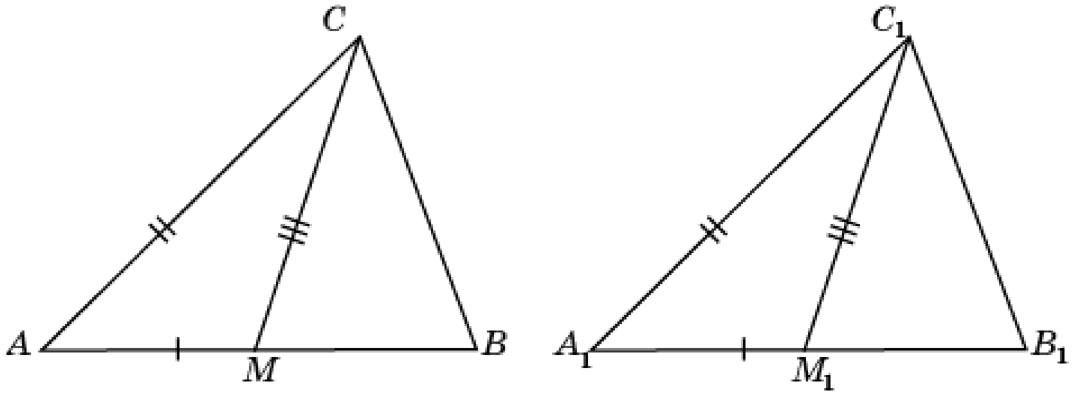
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

57. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



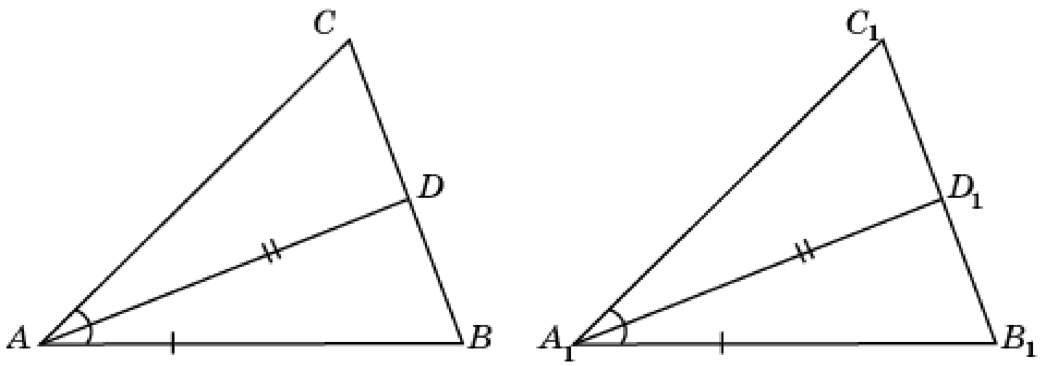
Действительно, прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$. Следовательно, $AH = A_1H_1$, значит, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

58. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle A = \angle A_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

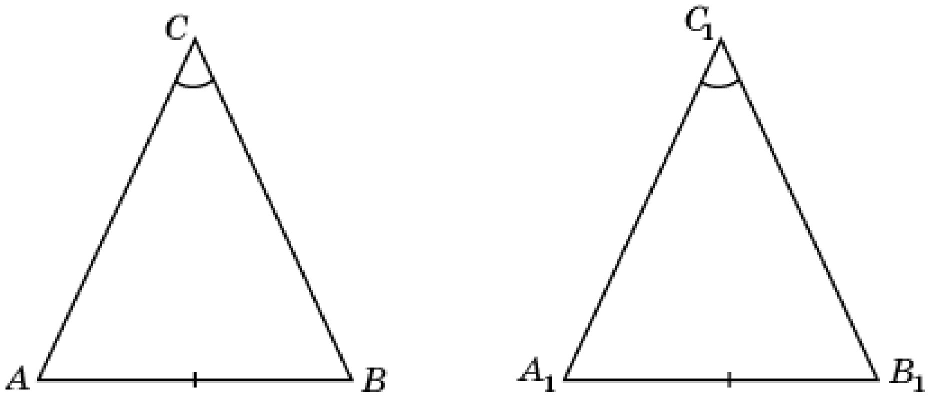
59. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



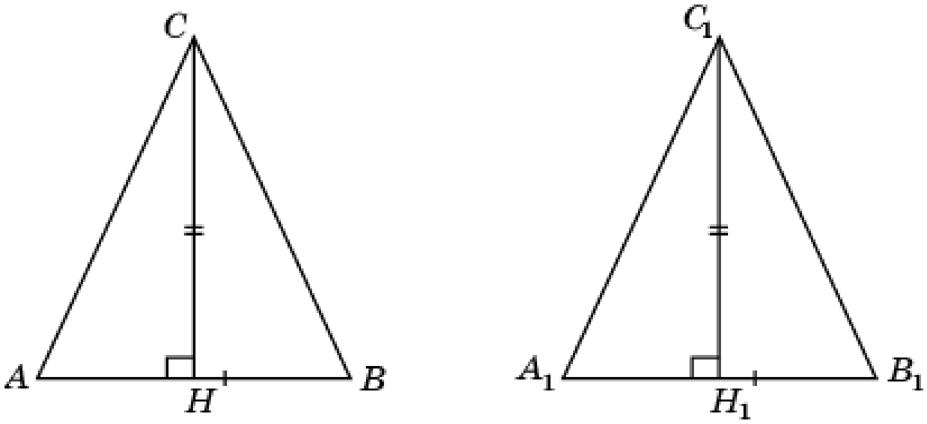
Действительно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

60. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ основание AB равно основанию A_1B_1, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, из равенства углов C и C_1 следует равенство углов при основаниях AB и A_1B_1 треугольников. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

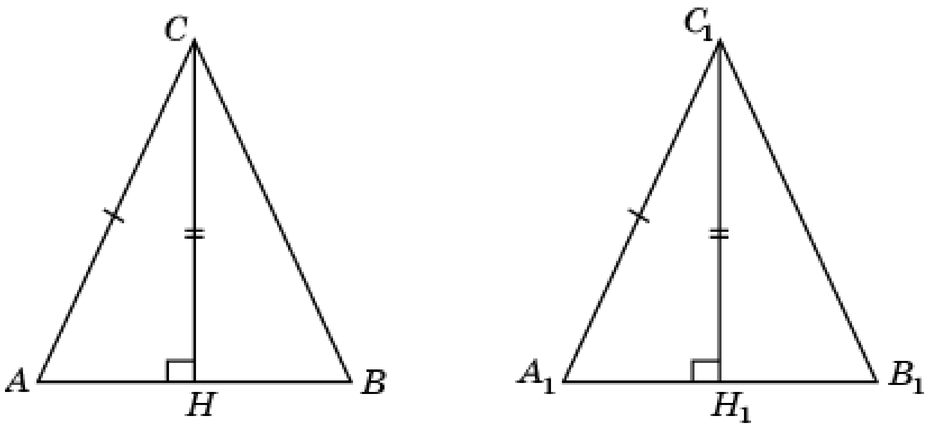


61. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ основание AB равно основанию A_1B_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



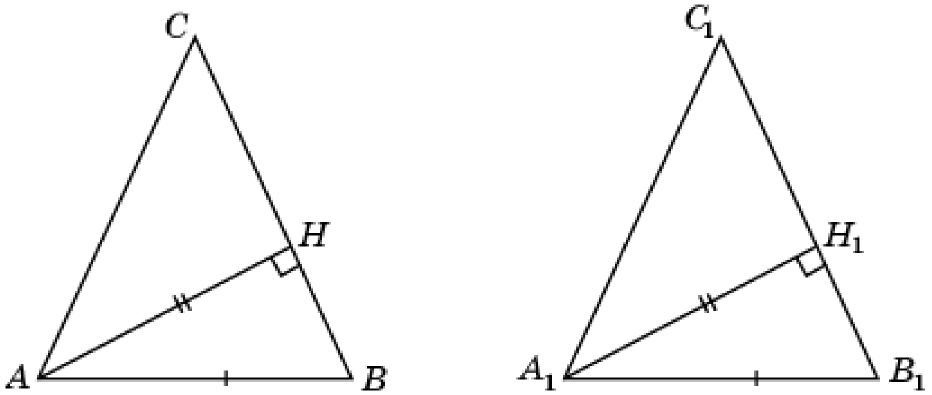
Так как высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой, то прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

62. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны боковые стороны AC и A_1C_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $BH = B_1H_1$ и $AB = A_1B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

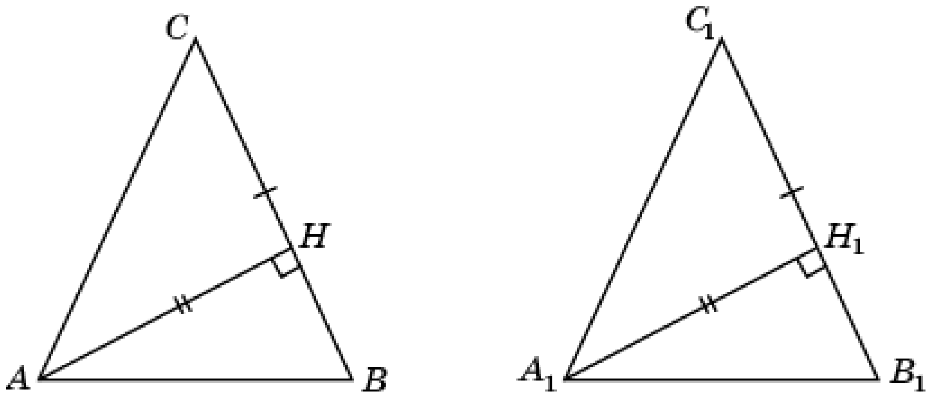
63. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ основание AB равно основанию A_1B_1, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



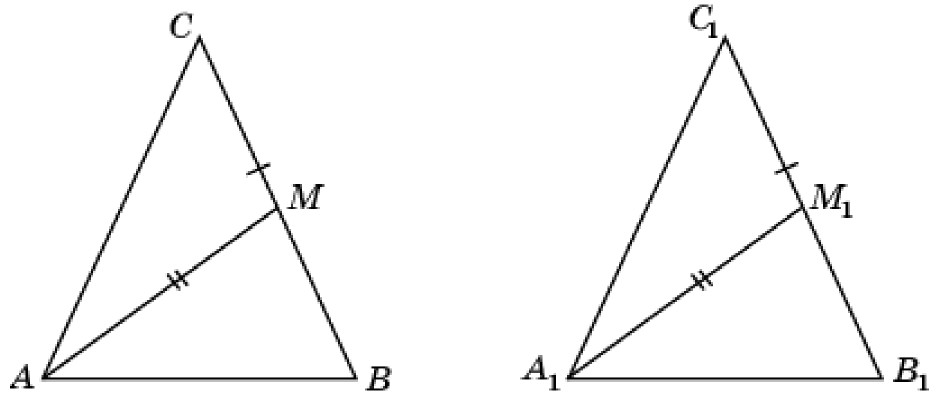
Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

64. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны боковые стороны BC и B_1C_1, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

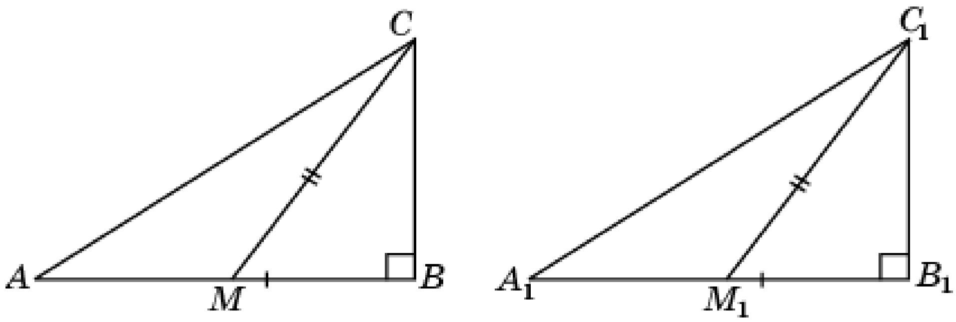


65. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны боковые стороны BC и B_1C_1, медиана AM равна медиане A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



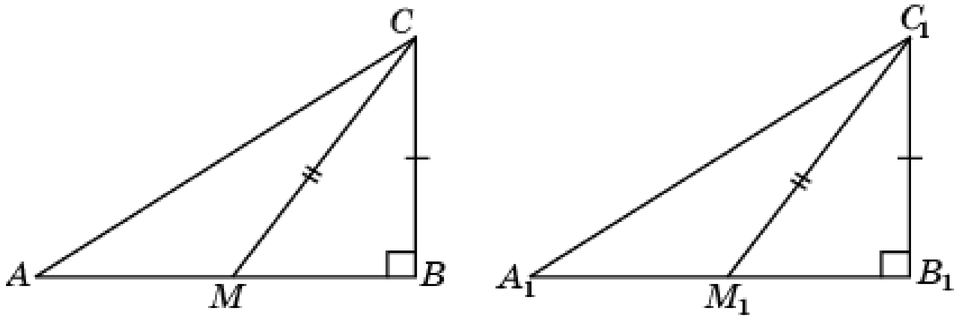
Действительно, треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

66. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle B = \angle B_1 = 90^o$) равны катеты AB и A_1B_1, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



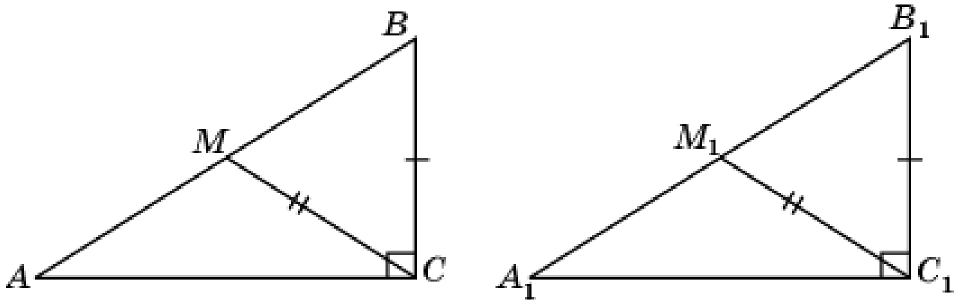
Действительно, прямоугольные треугольники BCM и $B_1C_1M_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $BC = B_1C_1$. Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам.

67. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle B = \angle B_1 = 90^o$) равны катеты BC и B_1C_1, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники BCM и $B_1C_1M_1$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $BM = B_1M_1$ и, следовательно, $AB = A_1B_1$. Таким образом, прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам.

68. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90^o$) равны катеты BC и B_1C_1, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

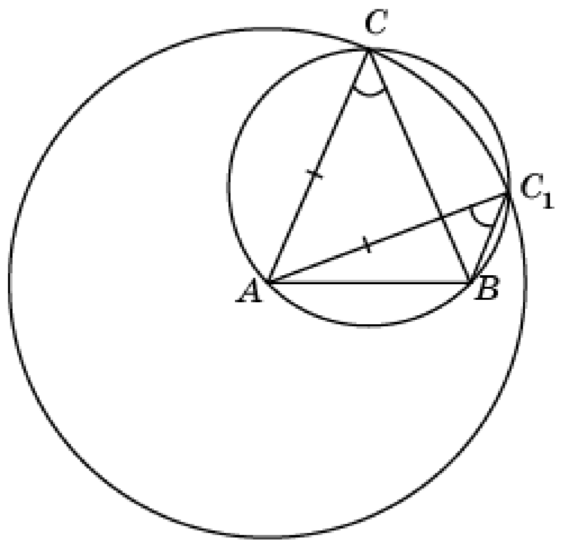


Действительно, так как гипотенуза прямоугольного треугольника в два раза больше медианы, к ней проведенной, то из равенства медиан CM и C_1M_1 следует равенство гипотенуз AB и A_1B_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и катету.

Уровень С

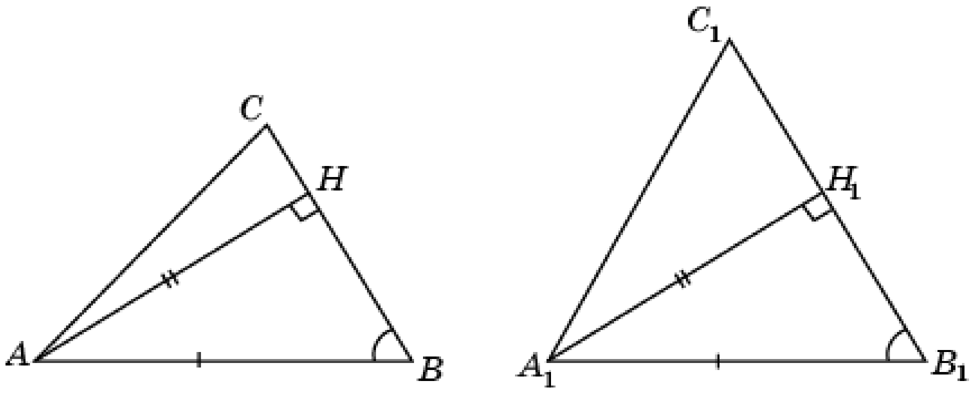
1. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим окружность и ее хорду AB. С центром в точке A проведем другую окружность, пересекающую первую окружность в некоторых точках C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 AB – общая сторона, $AC = AC_1$, $\angle C = \angle C_1$, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.



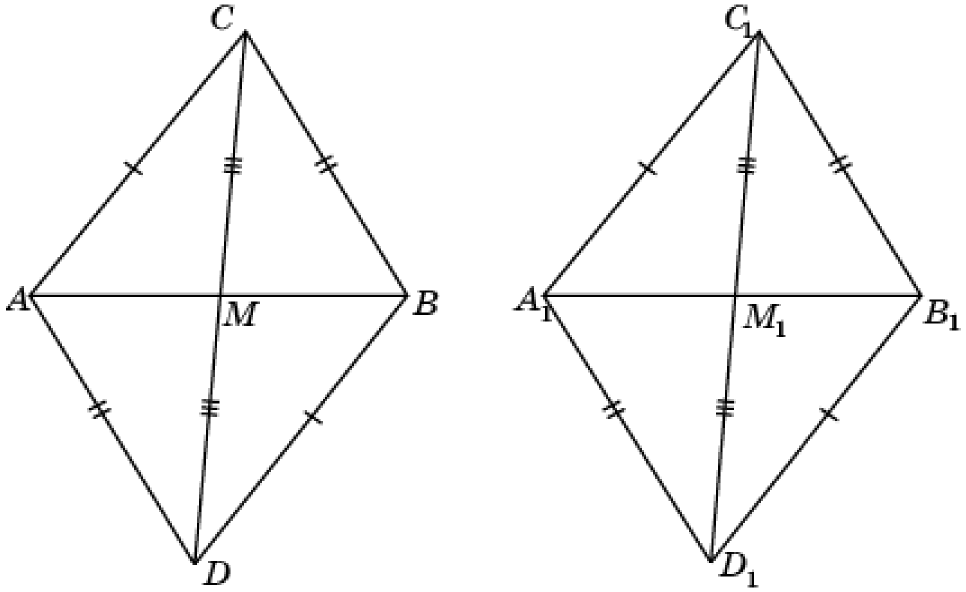
2. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$, в которых $\angle H = \angle H_1 = 90°$, $AH = A_1H_1$, $AB = A_1B_1$. На продолжениях сторон BH и B_1H_1 отложим неравные отрезки соответственно HC и H_1C_1. Тогда в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, высоты AH и A_1H_1 равны, однако сами треугольники не равны.



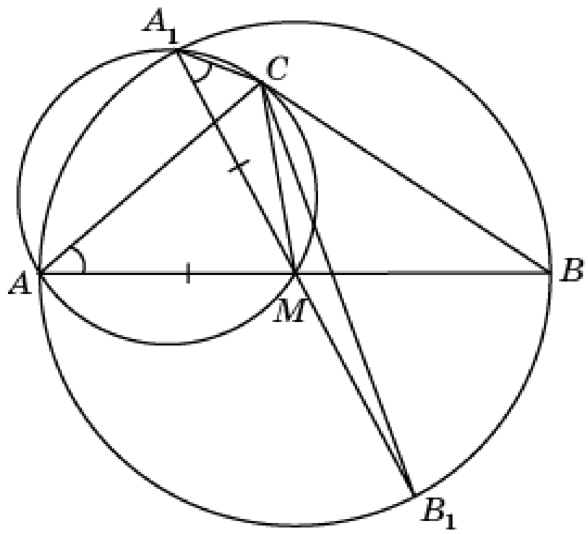
3. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$.



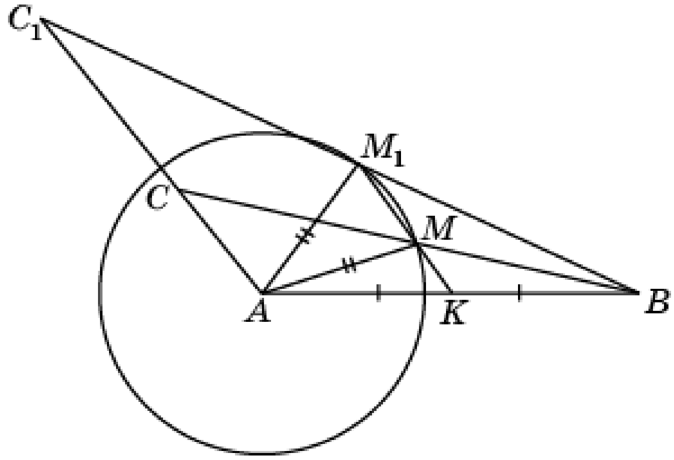
Тогда четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Значит, $\angle C = \angle C_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.

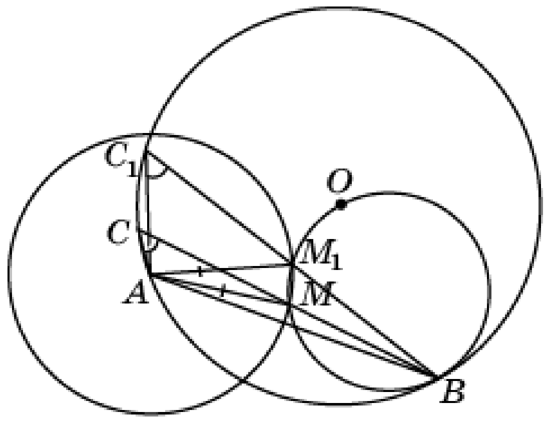


Для этого рассмотрим окружность с центром в точке M. Проведем два диаметра AB и A_1B_1. Через точки A, A_1, M проведем еще одну окружность и выберем на ней точку C, как показано на рисунке. В треугольниках ABC и A_1B_1C $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, медиана CM – общая. Однако треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

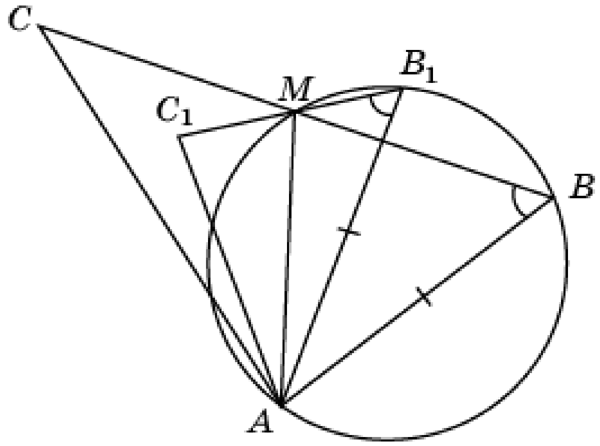
5. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим угол и окружность с центром в вершине A этого угла. На одной стороне угла отложим отрезок AB и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне и пересекающую окружность в точках M и M_1. Через точку B проведем прямые BM и BM_1, пересекающие сторону угла соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 угол A – общий, AB – общая сторона, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.



6. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим окружность с центром в точке O и окружность в два раза меньшего радиуса, касающуюся первой окружности внутренним образом в точке B. Напомним, что эта окружность без точки B является геометрическим местом середин хорд первой окружности, проходящих через точку B. Проведем хорду AB и окружность с центром в точке A, пересекающую вторую окружность в точках M и M_1. Проведем прямые BM и BM_1, пересекающие первую окружность соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB – общая, $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и AM_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

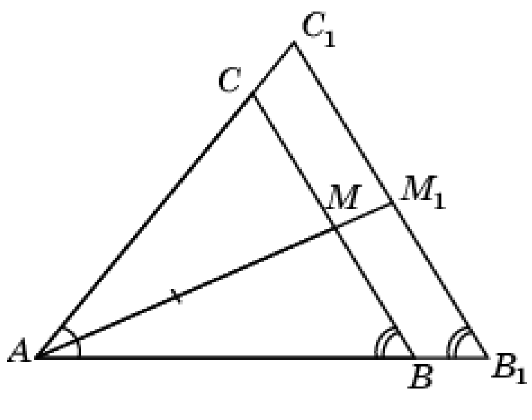


7. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим окружность и проведем равные хорды AB и AB_1. Через точку M окружности проведем прямые BM и B_1M и отложим на них отрезки MC и MC_1, соответственно равные BM и B_1M. В треугольниках ABC и AB_1C_1 $AB = AB_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM – общая, однако треугольники ABC и AB_1C_1 не равны.



8. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, из равенства углов следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Напомним, что преобразование подобия переводит медиану в медиану. Если бы $AB \neq A_1B_1$, то $AM \neq A_1M_1$, что противоречит условию. Значит, $AB = A_1B_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

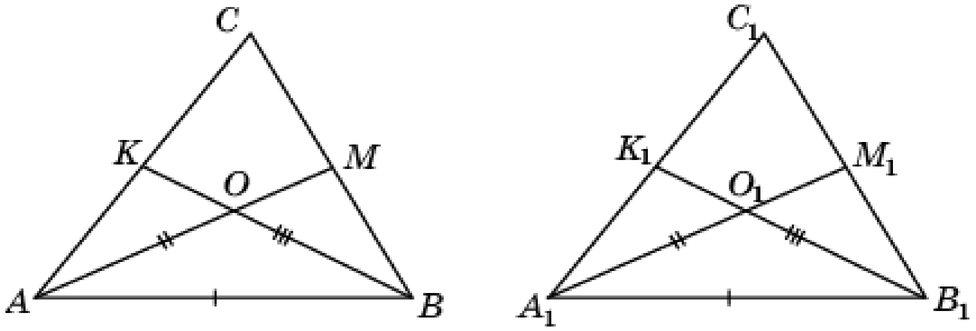


9. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

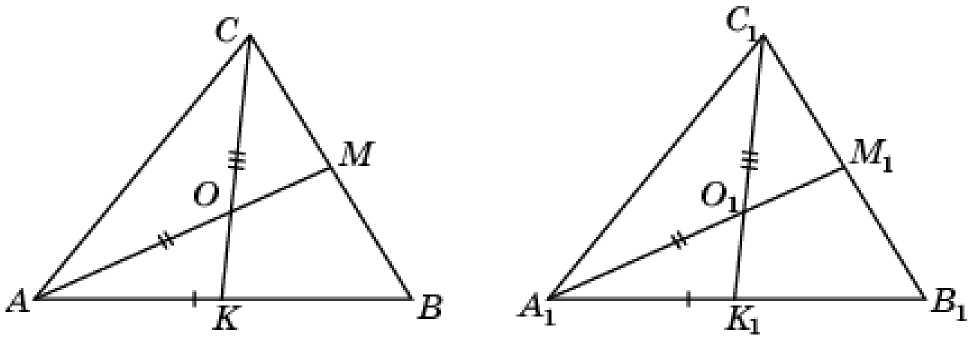
10. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана BK равна медиане B_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, пусть O, O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то треугольники ABO и $A_1B_1O_1$

равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$, значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.



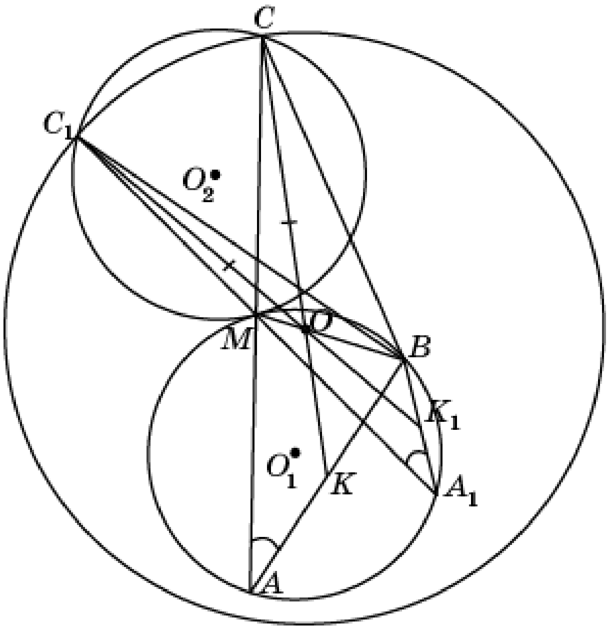
11. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана CK равна медиане C_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



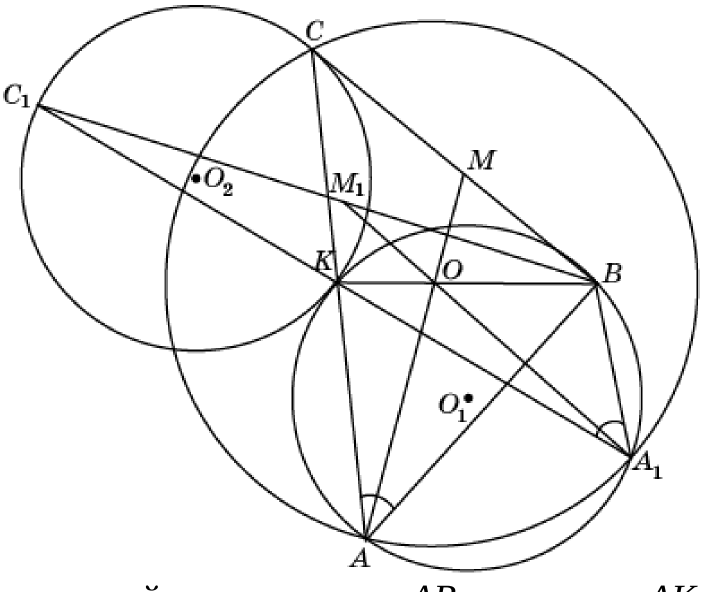
Действительно, пусть O, O_1 – точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то треугольники AKO и $A_1K_1O_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle KAO = \angle K_1A_1O_1$, значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $MB = M_1B_1$, следовательно, $BC = B_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

12. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке M. Проведем в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану CK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2:1, считая от вершины C. Проведем окружность с центром в точке O радиуса OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведем прямую C_1M и обозначим A_1 точку ее пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и

A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, так как равны отрезки CO и C_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BM – общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.



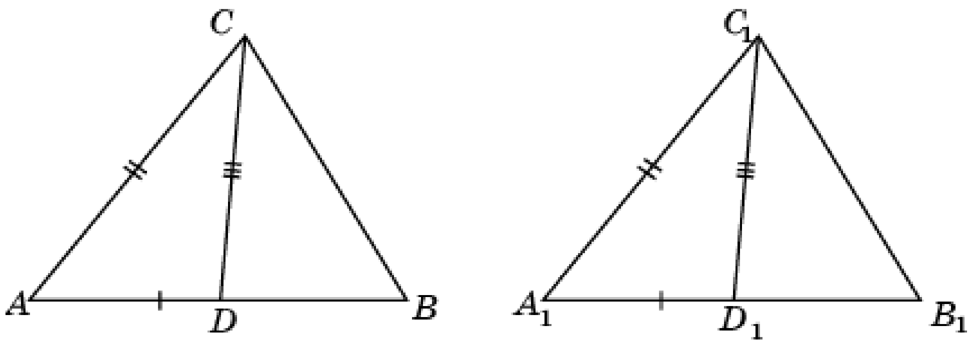
13. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке K.



Проведем в одной из них хорду AB и прямую AK, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану BK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2:1, считая от вершины B. Проведем окружность с центром в точке O радиуса OA, пересекающую первую окружность в точке A_1. Проведем прямую A_1K и обозначим C_1 точку ее пересечения со второй окружностью. Получим треугольник A_1BC_1, в котором O – точка пересечения медиан. В треугольниках ABC и A_1BC_1

$\angle A = \angle A_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, так как равны отрезки AO и A_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BK – общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

14. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Обозначим $AB = A_1B_1 = c$, $AC = A_1C_1 = b$, $CD = C_1D_1 = l$, $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$. Докажем, что $a = a_1$. Из этого будет следовать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Воспользуемся формулой для биссектрисы треугольника

$$l^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2}.$$

Покажем, что при фиксированных b и c большему значению a соответствует большее значение l биссектрисы. Производная правой части, как функции от a, равна

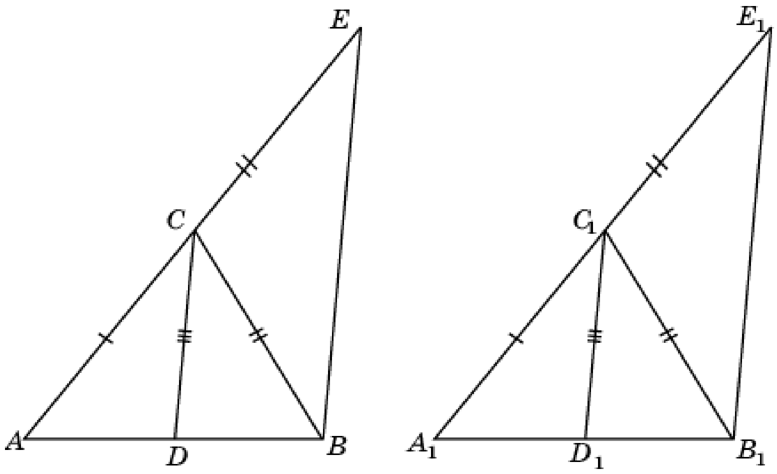
$$b - \frac{c^2b(b-a)}{(a+b)^3}.$$

Из неравенства треугольника следует, что $b - a < c$ и $a + b > c$. Откуда получаем, что производная больше нуля, значит, функция строго возрастает, т.е. большему значению a соответствует большее значение l. Таким образом, из равенства биссектрис следует равенство сторон a и a_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

15. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

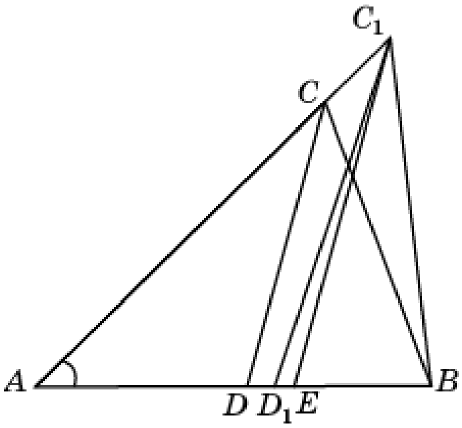
Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$. Тогда $BE = CD\dfrac{AE}{AC}$, $B_1E_1 = C_1D_1\dfrac{A_1E_1}{A_1C_1}$.

Треугольники BCE и $B_1C_1E_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$. Треугольники ABE и $A_1B_1E_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.



16. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

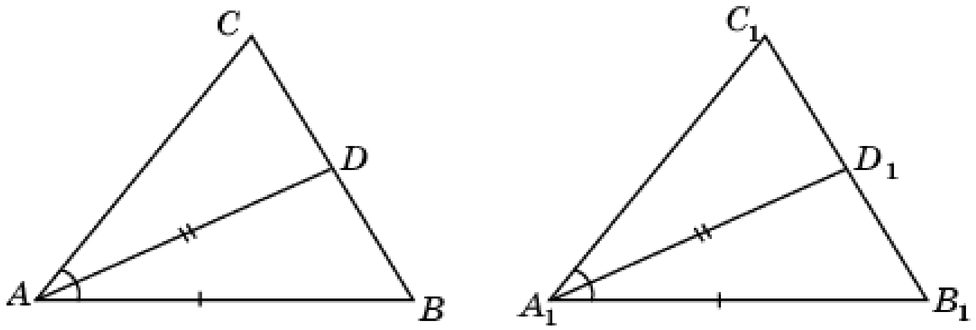
Отложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.



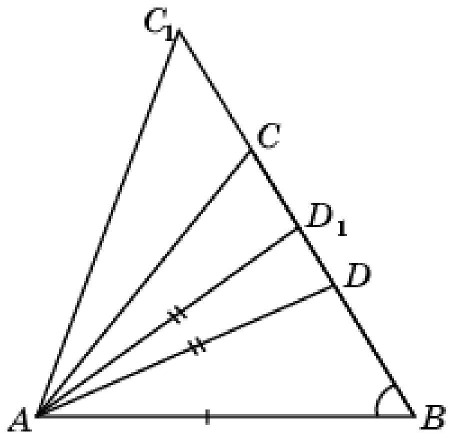
Предположим, что $AC \geq BC$. Через вершину C_1 проведем прямую C_1E, параллельную прямой CD. Точка D_1 будет лежать между точками D и E. При этом $CD < C_1E < C_1D_1$. Аналогично доказывается, что $CD < C_1D_1$ в случае, если $AC < BC$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать, значит, данные треугольники равны.

17. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.



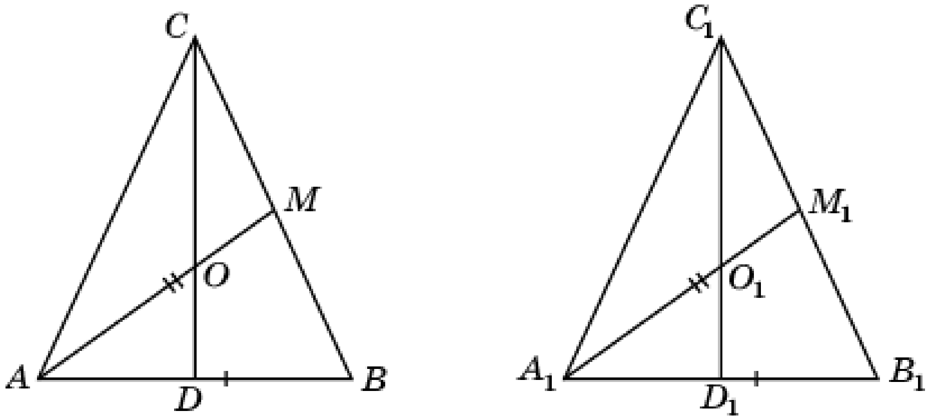
18. Пример треугольников, изображенных на рисунке, показывает, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.



Действительно, в треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ – общий, AB – общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

19. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и медианы AM, A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

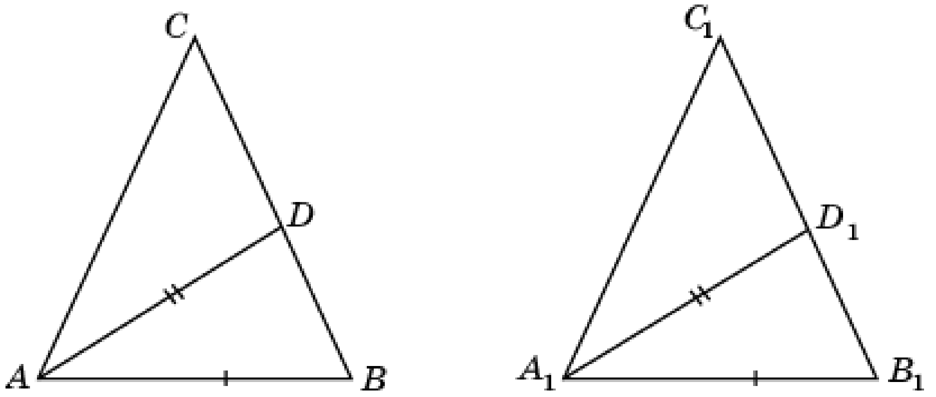
Проведем медианы CD и C_1D_1. Точки их пересечения с медианами AM и A_1M_1 обозначим соответственно O и O_1.



Прямоугольные треугольники AOD и $A_1O_1D_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle OAD = \angle O_1A_1D_1$. Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B = \angle B_1$.

Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

20. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и биссектрисы AD, A_1D_1. Докажем, что эти треугольники равны.



Для этого докажем, что при увеличении боковой стороны равнобедренного треугольника и постоянном основании биссектриса, проведенная к боковой стороне, увеличивается. Предположим, что $AB = 1$, $AC = a$. Тогда для биссектрисы l имеет место формула

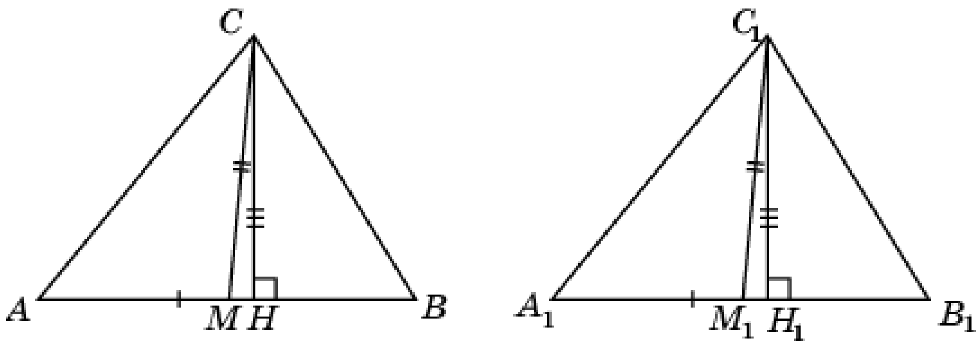
$$l^2 = a - \frac{a^3}{(a+1)^2}.$$

Производная функции, стоящей в правой части этого равенства, равна

$$1 - \frac{a^3 + 3a^2}{(a+1)^3}.$$

Эта производная больше нуля для всех положительных a. Следовательно, большей боковой стороне соответствует большая биссектриса. Равенство биссектрис равнобедренных треугольников с равными основаниями возможно только в случае равенства боковых сторон, т.е. в случае равенства самих треугольников.

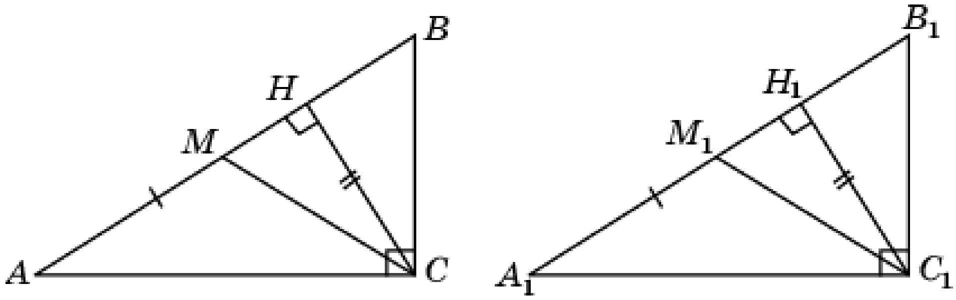
21. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CMH = \angle C_1M_1H_1$ и, значит, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

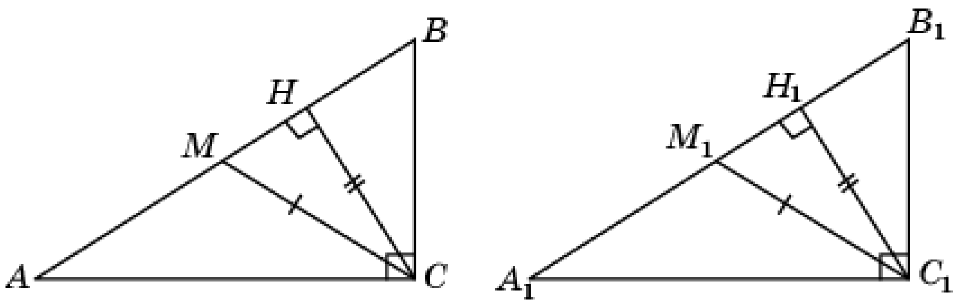
22. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90^o$) $AB = A_1B_1$, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Проведем медианы CM и C_1M_1. Они равны, так как составляют половины гипотенуз. В силу решения задачи 21, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



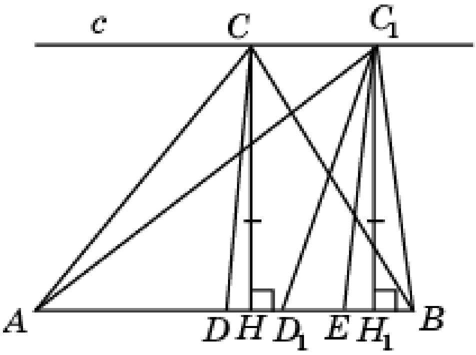
23. Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90^o$) медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, гипотенузы $AB = A_1B_1$ равны, так как они в два раза больше соответствующих медиан. В силу решения задачи 21, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



24. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

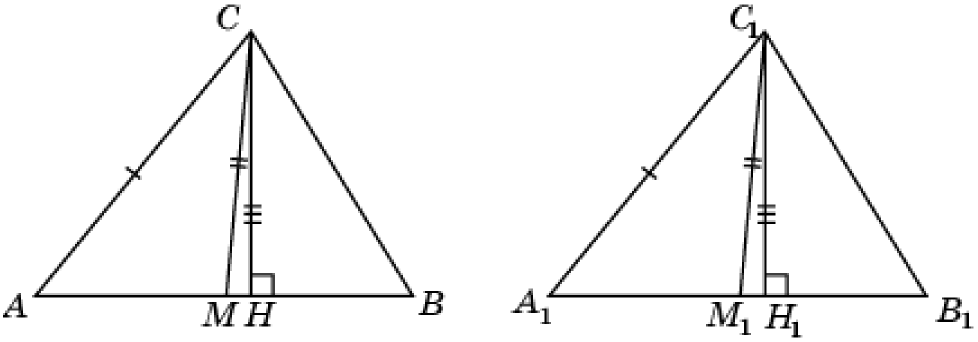
Предположим, что $AC \geq BC$ и $A_1C_1 \geq B_1C_1$. Отложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.



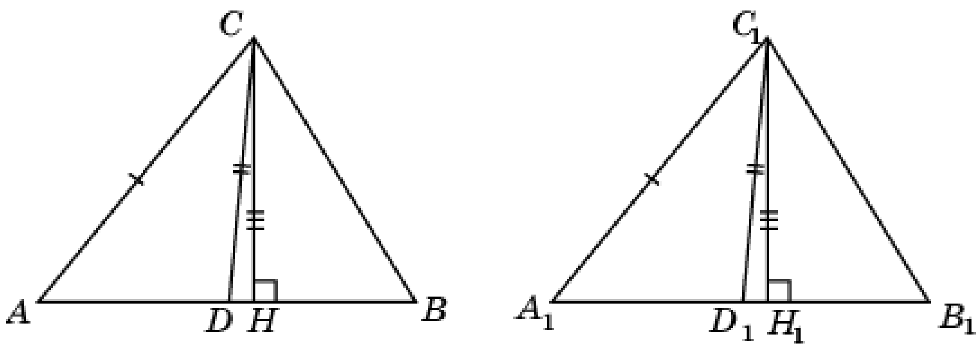
Проведем прямую C_1E, параллельную CD. Угол ACB больше угла AC_1B, угол AC_1E больше угла ACD. Следовательно, угол AC_1E больше угла BC_1E, значит, точка D_1 лежит между точками A и E. Следовательно, $DH < D_1H_1$, значит, $CD < C_1D_1$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать и, значит, данные треугольники равны.

25. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $MH = M_1H_1$, откуда $AM = A_1M_1$, значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.



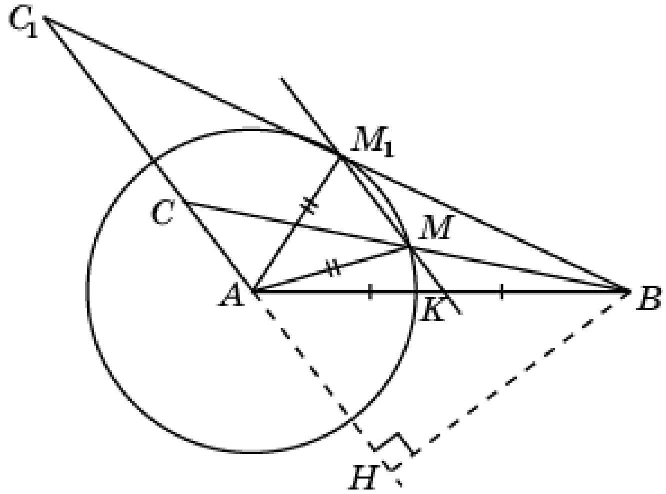
26. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, биссектрисы CD, C_1D_1 равны, высоты CH, C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Прямоугольные треугольники DCH и $D_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle DCH = \angle D_1C_1H_1$, откуда $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

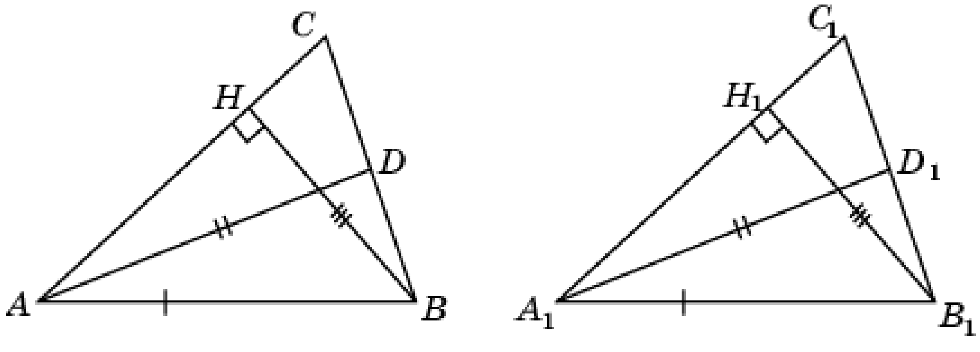
27. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

Рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности. Отложим на его стороне отрезок AB, больший диаметра, и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1.



Проведем прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB – общая, высота BH – общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

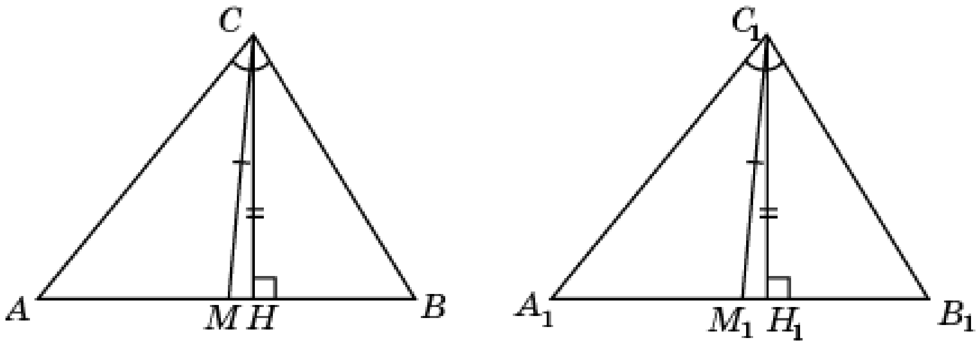
28. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B$

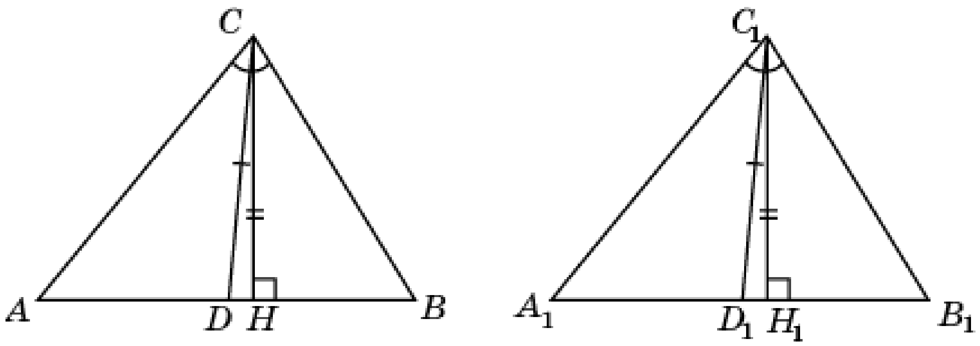
$= \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

29. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Действительно, прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Если отрезок AM был бы, например, больше отрезка A_1M_1, то угол ACM был бы больше угла $A_1C_1M_1$. Так как $AM = BM$ и $A_1M_1 = B_1M_1$, то в этом случае BM был бы больше B_1M_1, значит, угол BCM был бы больше угла $B_1C_1M_1$. Следовательно, угол C был бы больше угла C_1, что противоречит условию. Аналогично показывается, что отрезок AM не может быть меньше отрезка A_1M_1. Таким образом, $AM = A_1M_1$ и $BM = B_1M_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$, BMC и $B_1M_1C_1$, равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

30. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

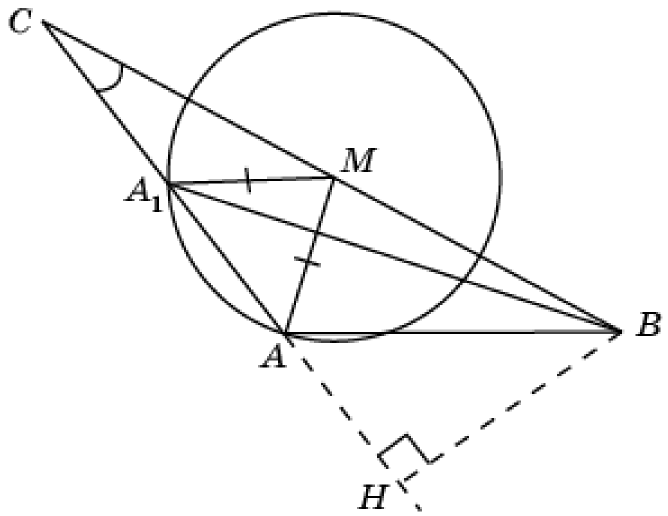


Действительно, прямоугольные треугольники CDH и $C_1D_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CDH = \angle C_1D_1H_1$. Значит, $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

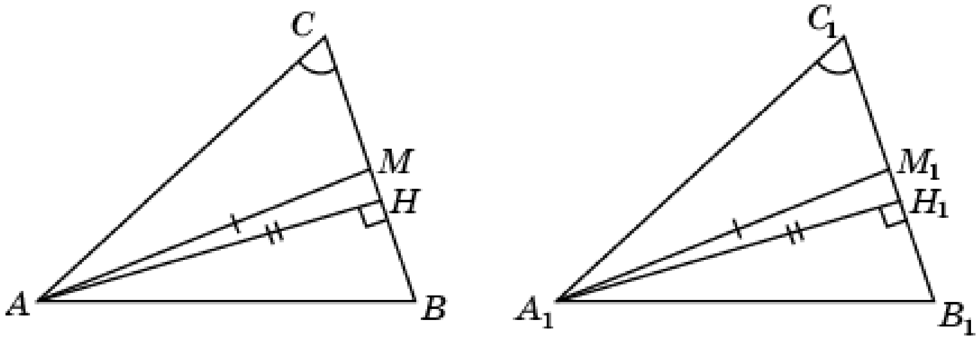
31. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

Рассмотрим треугольник ABC. Проведем окружность с центром в середине M стороны BC и радиусом AM. Обозначим A_1 точку пересечения этой окружности со стороной AC. В треугольниках ABC и A_1BC $\angle C$ – общий, медианы AM и A_1M равны, высота BH – общая. Однако треугольники ABC и A_1BC не равны.



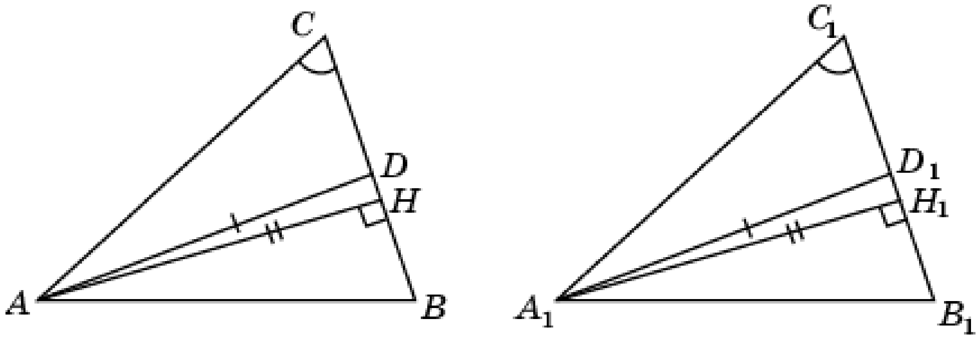
32. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольниках ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $CH = C_1H_1$. Прямоугольные треугольниках AMH и $A_1M_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $MH = M_1H_1$, значит, $CM = C_1M_1$. Тогда $BC = B_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.



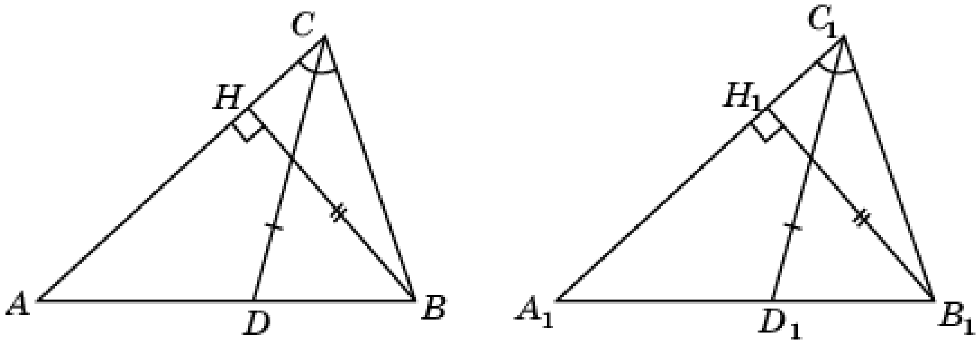
33. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$. Прямоугольные треугольники ADH и $A_1D_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $\angle DAH = \angle D_1A_1H_1$. Значит, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, тогда и $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.



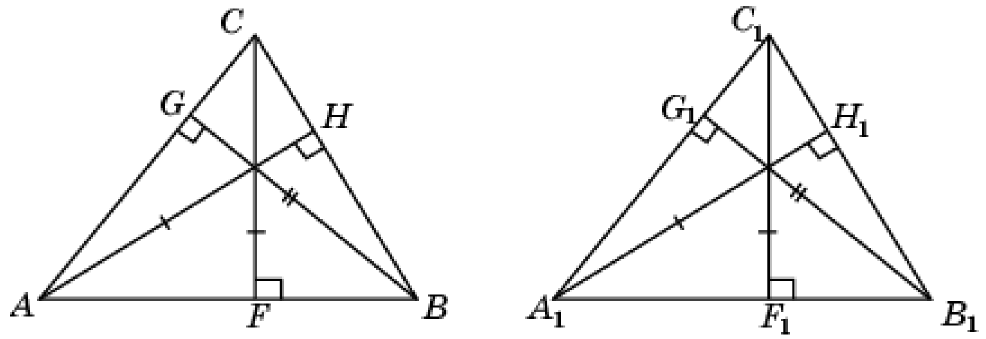
34. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Действительно, прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $BC = B_1C_1$. Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

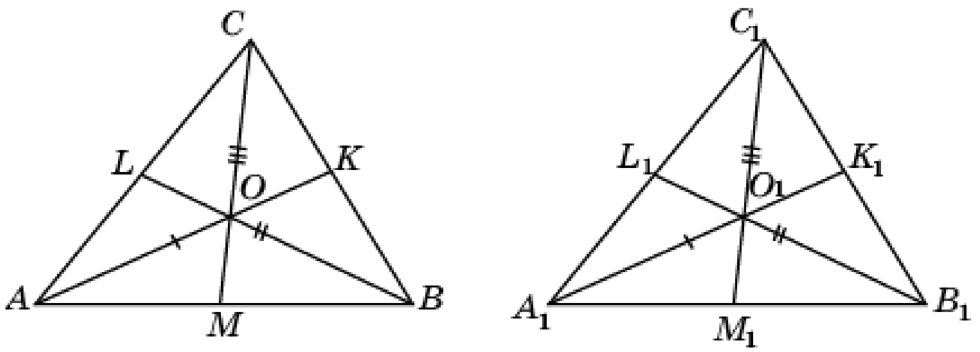


35. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны высоты AH и A_1H_1, BG и B_1G_1, CF и C_1F_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

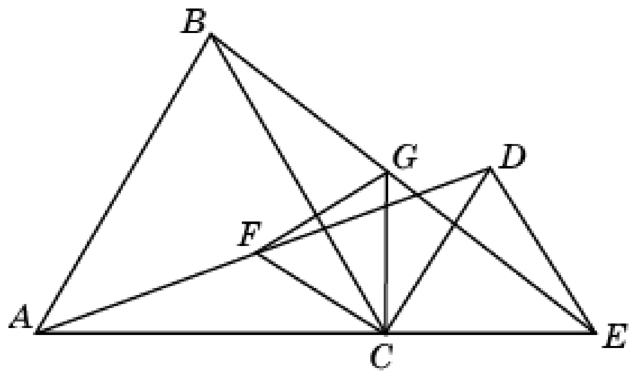
Обозначим стороны треугольников соответственно a, b, c и a_1, b_1, c_1, а соответствующие высоты h_a, b_b, h_c и h_{1a}, h_{1b}, h_{1c}. Имеют место равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ и $a_1h_{1a} = b_1h_{1b} = c_1h_{1c}$. Разделив почленно первые равенства на вторые, получим равенства $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, из которых следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Так как соответствующие высоты этих треугольников равны, то они не только подобны, но и равны.



36. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны медианы AK и A_1K_1, BL и B_1L_1, CM и C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Медианы OM и O_1M_1 треугольников ABO и $A_1B_1O_1$ равны, так как они составляют одну третью часть соответствующих медиан данных треугольников. По признаку равенства треугольников (см. задачу 3 данного раздела) треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны, значит, $AB = A_1B_1$. Аналогично доказывается, что $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.



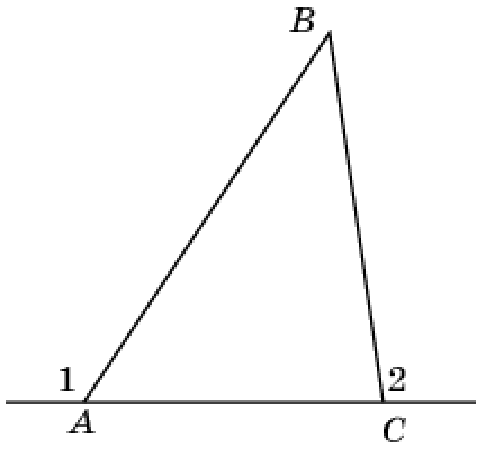
37. Повернем треугольник ACD вокруг вершины C на угол 60^o против часовой стрелки. Вершина A перейдет в вершину B, а D – в E. Середина F отрезка AD перейдет в середину G отрезка BE. Следовательно, треугольник CFG – равнобедренный с углом C, равным 60^o. Значит, он равносторонний.



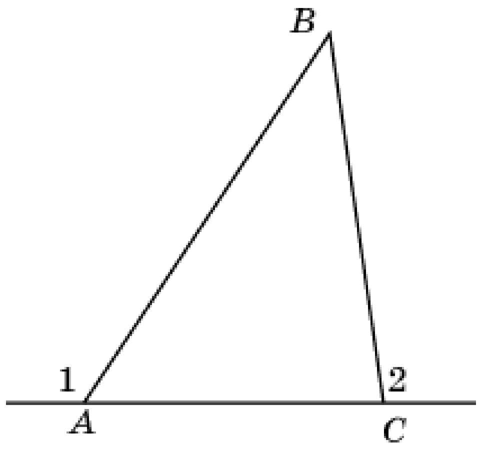
3. Соотношения между элементами треугольника

Уровень B

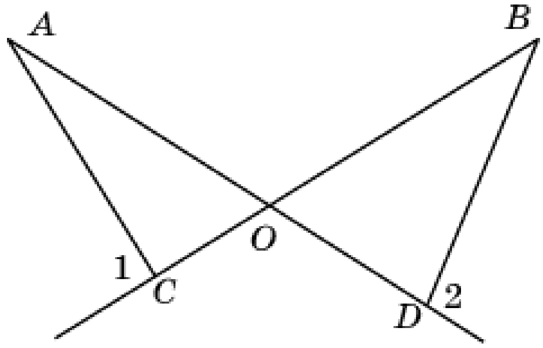
45. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то из неравенства $AB > BC$ следует неравенство $\angle BAC < \angle BCA$. Значит, для соответствующих смежных углов выполняется неравенство $\angle 1 > \angle 2$.



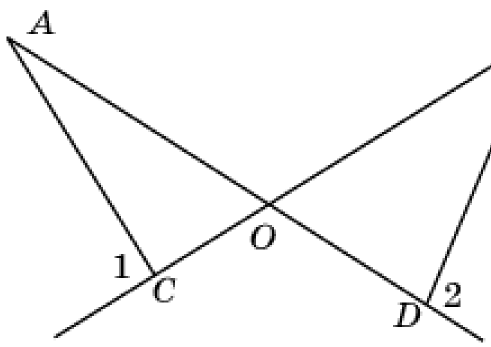
46. Из неравенства $\angle 1 > \angle 2$ следует неравенство $\angle BAC < \angle BCA$. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то выполняется неравенство $AB > BC$.



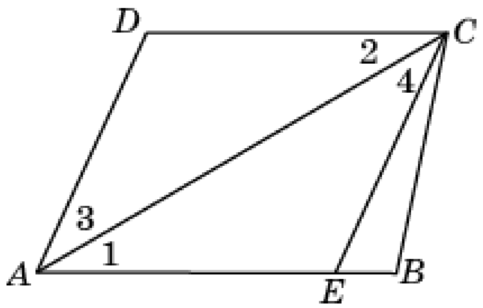
47. В треугольниках AOC и BOD углы AOC и BOD равны как вертикальные. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов, то из неравенства $\angle 1 < \angle 2$ следует неравенство $\angle A < \angle B$.



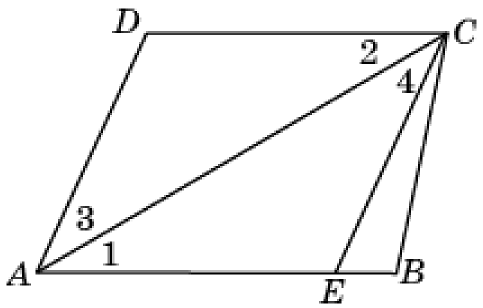
48. В треугольниках AOC и BOD углы AOC и BOD равны как вертикальные. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов, то из неравенства $\angle A < \angle B$ следует неравенство $\angle 1 < \angle 2$.



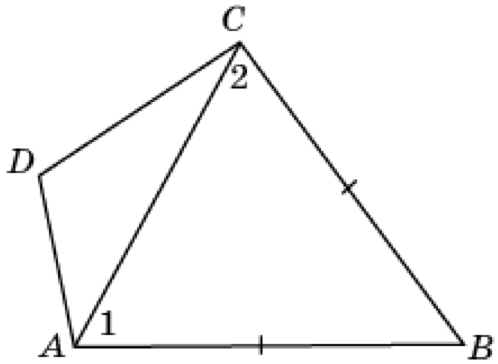
49. Через точку C проведем прямую, параллельную AD, и ее точку пересечения с прямой AB обозначим E. Так как $\angle 3 < \angle 4$ и $\angle 3 = \angle ACE$, то точка E будет внутренней точкой отрезка AB. Четырехугольник $ADCE$ – параллелограмм, следовательно, $CD = AE < AB$.



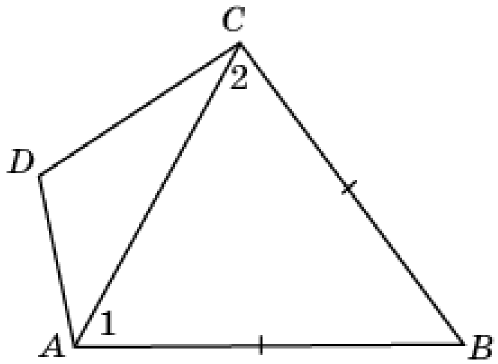
50. На отрезке AB возьмем точку E так, что $AE = CD$. Четырехугольник $ADCE$ – параллелограмм. Следовательно, $\angle 3 = \angle ACE$, значит, $\angle 3 < \angle 4$.



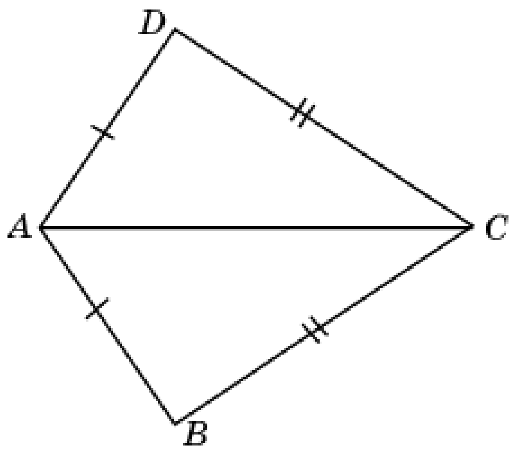
51. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$. В треугольнике ACD $AD < CD$, следовательно, $\angle DAC > \angle DCA$. Значит, $\angle 1 > \angle 2$.



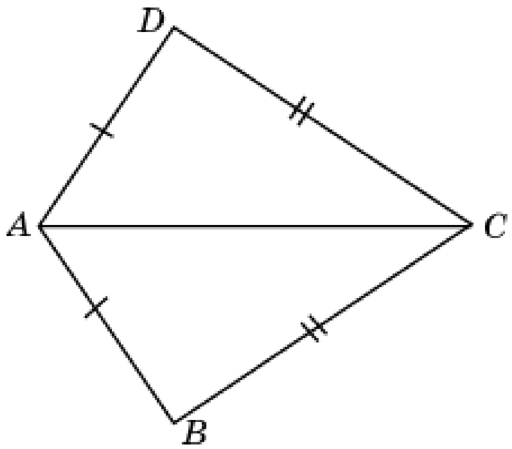
52. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$. Из неравенства $\angle 1 > \angle 2$ следует неравенство $\angle DAC > \angle DCA$. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ACD выполняется неравенство $AD < CD$.



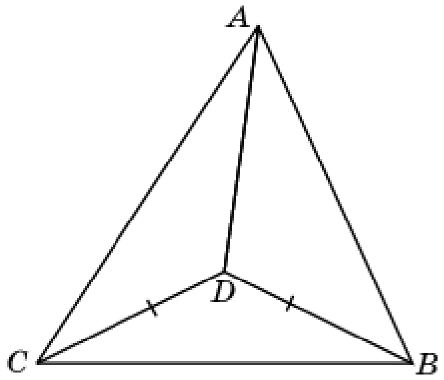
53. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то $\angle DAC > \angle DCA$ и $\angle BAC > \angle BCA$. Значит, в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A > \angle C$.



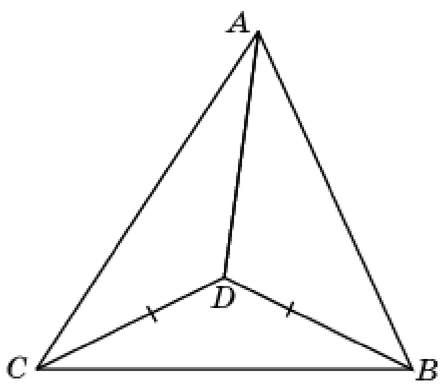
54. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC. Треугольники ABC и ADC равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle DCA$. Значит, из неравенства $\angle A > \angle C$ следует неравенство $\angle BAC > \angle BCA$. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AB < BC$.



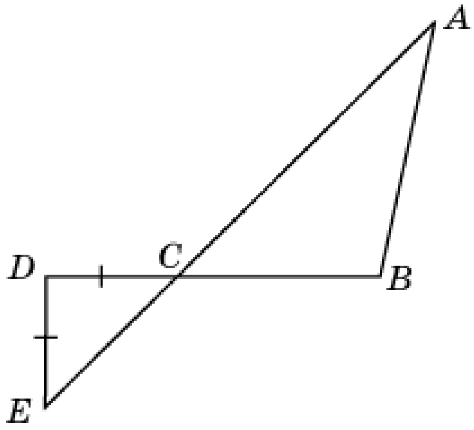
55. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $\angle ACB < \angle ABC$. Треугольник BCD – равнобедренный, следовательно, $\angle DCB = \angle DBC$. Значит, $\angle ACD < \angle ABD$.



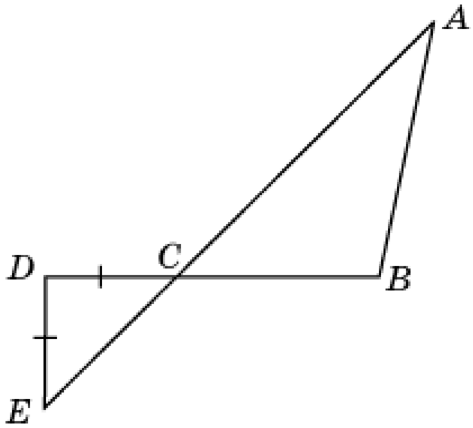
56. Треугольник BCD – равнобедренный, следовательно, $\angle DCB = \angle DBC$. Значит, $\angle ACB < \angle ABC$. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > AB$.



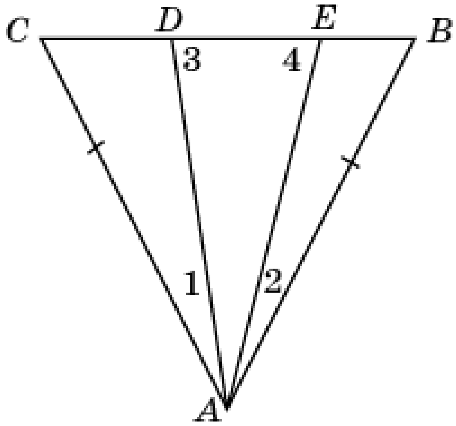
57. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $\angle BAC < \angle BCA$. Треугольник CDE – равнобедренный, следовательно, $\angle DEC = \angle DCE$. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Значит, $\angle BAC < \angle DEC$.



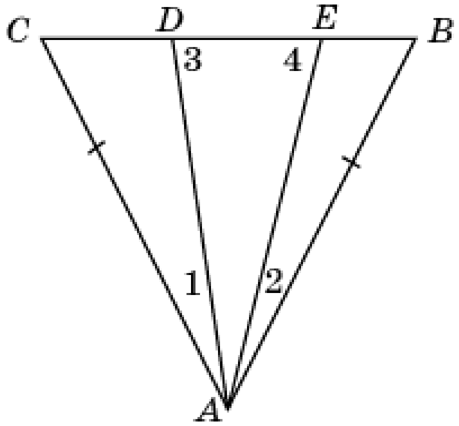
58. Треугольник CDE – равнобедренный, следовательно, $\angle DEC = \angle DCE$. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Значит, $\angle BAC < \angle BCA$. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике ABC выполняется неравенство $AB > BC$.



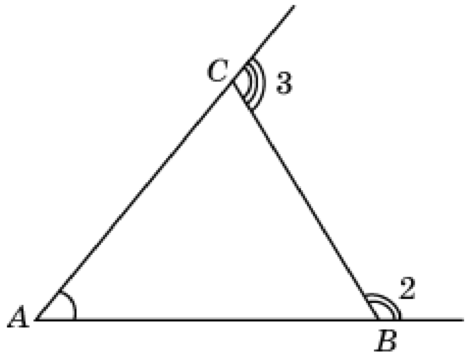
59. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle B = \angle C$. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов, то из равенства углов B, C и неравенства $\angle 1 > \angle 2$ следует неравенство $\angle 3 > \angle 4$.



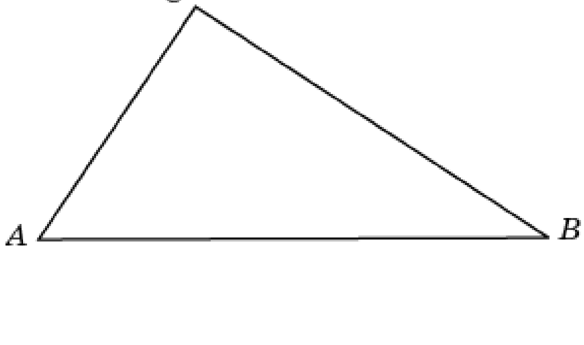
60. Треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, $\angle B = \angle C$. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов, то из равенства углов B, C и неравенства $\angle 3 > \angle 4$ следует неравенство $\angle 1 > \angle 2$.



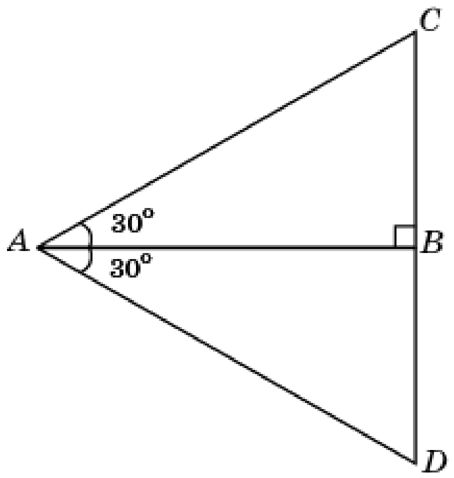
61. Обозначим внешние углы треугольника ABC при вершинах B и C соответственно 2 и 3. Тогда $\angle 3 = \angle A + \angle B = \angle A + (180^{\circ} - \angle 2)$. Откуда $\angle 2 + \angle 3 = \angle A + 180^{\circ}$.



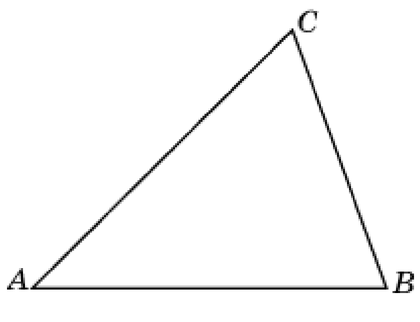
62. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = \angle A + \angle B$. Учитывая, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$, получаем $2\angle C = 180^{\circ}$, следовательно, $\angle C = 90^{\circ}$, т.е. треугольник ABC – прямоугольный.



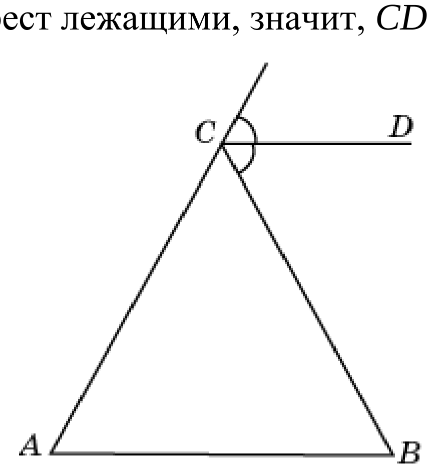
63. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 30^o$, AC – гипотенуза. Рассмотрим треугольник ABD, равный треугольнику ABC, такой, что вершины C и D лежат по разные стороны от прямой AB. В треугольнике ACD $AC = AD$, $\angle CAD = 60^o$. Следовательно, этот треугольник – равносторонний. Так как отрезок BC равен половине CD, а $CD = AC$, то BC равен половине AC.



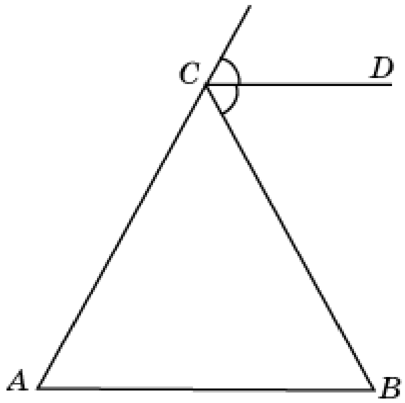
64. Воспользуемся тем, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. В треугольнике ABC имеем: $AB < AC + BC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства AB, получим $2AB < AB + AC + BC$. Следовательно, $AB < \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.



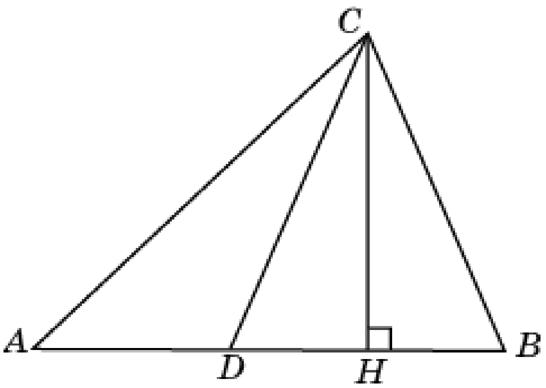
65. Пусть CD – биссектриса внешнего угла при вершине C равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$). Так как этот внешний угол равен сумме равных углов A и B, то угол BCD равен углу B. Эти углы являются накрест лежащими, значит, CD параллельна AB.



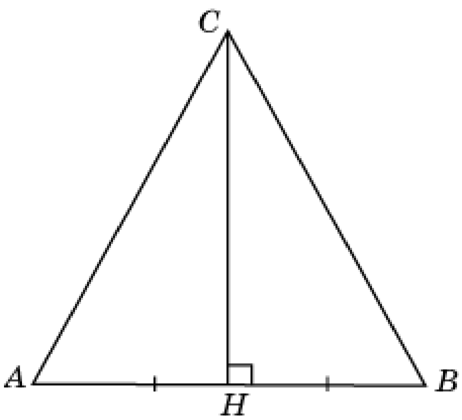
66. Пусть CD – биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC. Так как CD параллельна AB, то угол B равен углу BCD и равен половине внешнего угла при вершине C. Так как этот внешний угол равен сумме углов A и B, то угол A также равен половине внешнего угла. Следовательно, углы A и B равны, значит, треугольник ABC – равнобедренный.



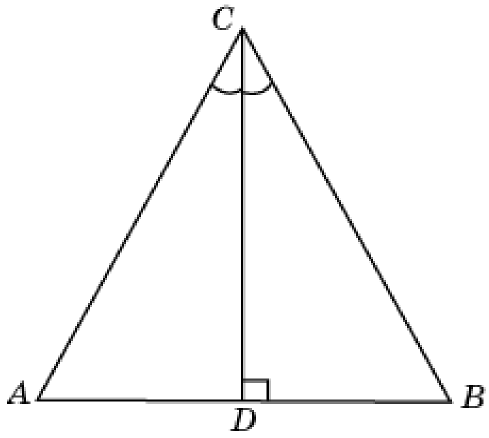
67. Из неравенства $AC > BC$ для наклонных следует неравенство $AH > BH$ для их проекций. На отрезке AH отложим отрезок HD, равный HB. Прямоугольные треугольники BCH и DCH равны по двум катетам, следовательно, $\angle BCH = \angle DCH$, значит, $\angle ACH > \angle BCH$.



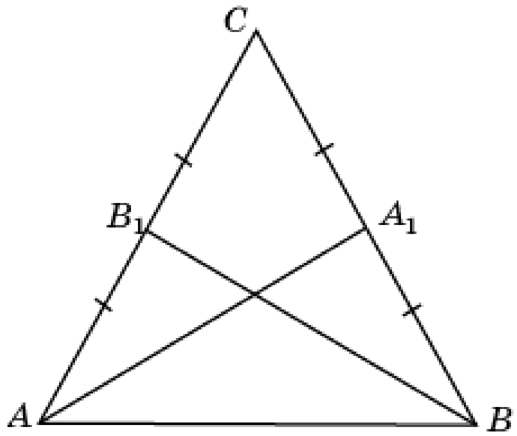
68. Пусть в треугольнике ABC высота CH совпадает с медианой. Тогда прямоугольные треугольники ACH и BCH равны по двум катетам. Следовательно, $AC = BC$, значит, треугольник ABC – равнобедренный.



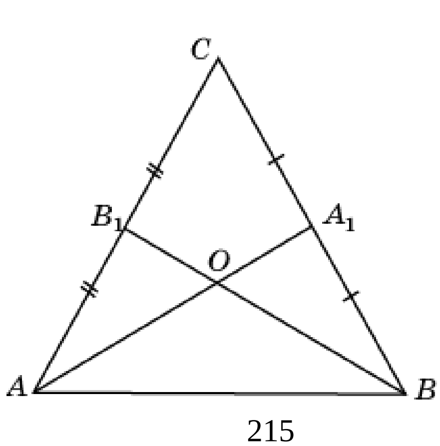
69. Пусть в треугольнике ABC биссектриса CD совпадает с высотой. Прямоугольные треугольники ACD и BCD равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = BC$, значит, треугольник ABC – равнобедренный.



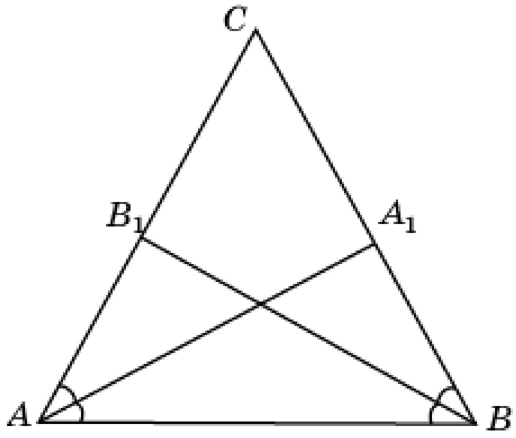
70. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – медианы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках AA_1C и BB_1C угол C – общий, $AC = BC$, $A_1C = B_1C$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AA_1 = BB_1$.



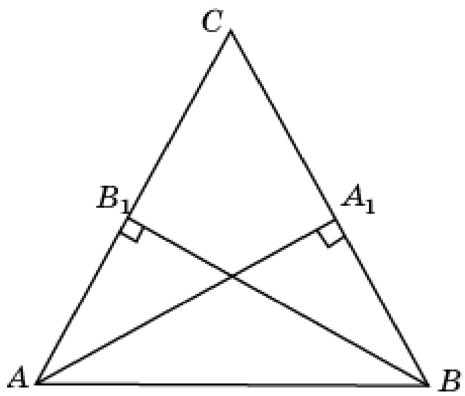
71. Пусть в треугольнике ABC равны медианы AA_1 и BB_1. Так как медианы в точке пересечения O делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то треугольник AOB – равнобедренный, значит, $\angle ABO = \angle BAO$. Треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle A = \angle B$, значит, треугольник ABC – равнобедренный.



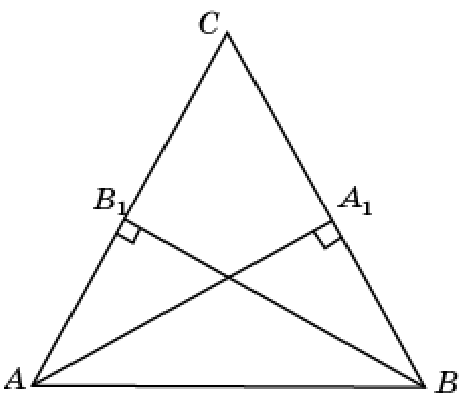
72. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – биссектрисы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках ABB_1 и BAA_1 сторона AB – общая, $\angle A = \angle B$, $\angle ABB_1 = \angle BAA_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AA_1 = BB_1$.



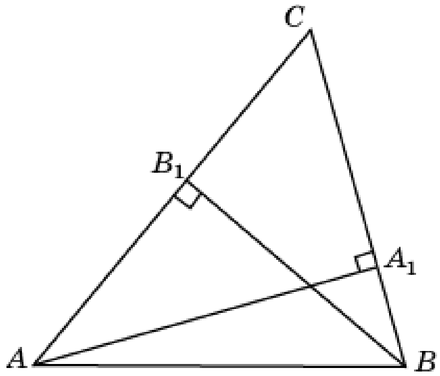
73. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – высоты, проведенные к боковым сторонам. Прямоугольные треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $AA_1 = BB_1$.



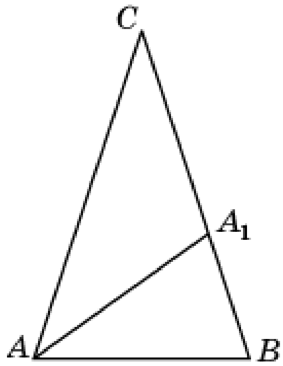
74. Пусть в треугольнике ABC равны высоты AA_1 и BB_1. Прямоугольные треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle B$, значит, треугольник ABC – равнобедренный.



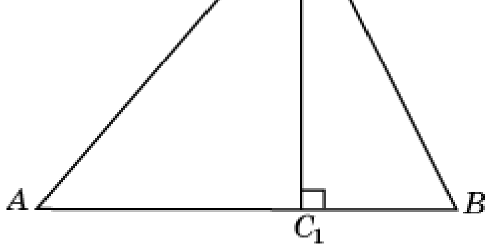
75. Пусть в треугольнике ABC $AC > BC$, AA_1, BB_1 – высоты. Воспользуемся тем, что площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, опущенную на эту сторону. Получим равенство $\frac{1}{2}BC \cdot AA_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1$. Из этого равенства и неравенства $AC > BC$, следует, что $AA_1 > BB_1$.



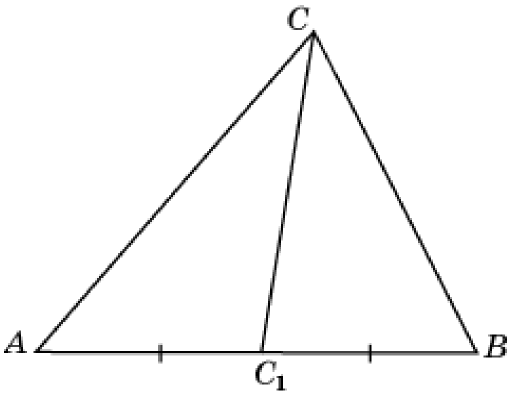
76. Пусть угол C при вершине, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 36^o, AA_1 – биссектриса. Тогда $\angle A = \angle B = 72^o$. Значит, $\angle CAA_1 = 36^o$, следовательно, треугольник ACA_1 – равнобедренный. Так как $\angle BAA_1 = 36^o$ и $\angle B = 72^o$, то $\angle AA_1B = 72^o$. Значит, треугольник ABA_1 – равнобедренный.



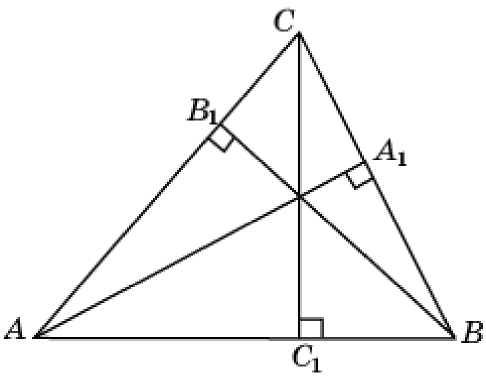
77. Пусть CC_1 – высота треугольника ABC. Воспользуемся тем, что перпендикуляр короче наклонной, проведенной из той же точки к той же прямой. Тогда $CC_1 < AC$ и $CC_1 < BC$. Складывая эти два неравенства, получим $2CC_1 < AC + BC$, или $CC_1 < \frac{1}{2}(AC + BC)$.



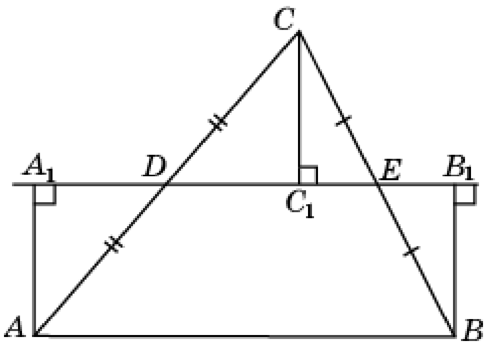
78. Пусть CC_1 – медиана треугольника ABC. Воспользуемся тем, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Тогда $CC_1 < AC + AC_1$, $CC_1 < BC + BC_1$. Складывая эти неравенства, получим $2CC_1 < AC + BC + AB$, или $CC_1 < \frac{1}{2}(AC + BC + AB)$.



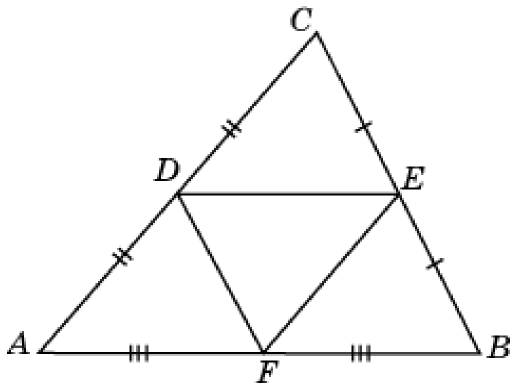
79. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC. В силу решения задачи 33, имеем: $2CC_1 < AC + BC$, $2BB_1 < AB + BC$, $2AA_1 < AC + AB$. Складывая эти неравенства, получим $AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + AC$.



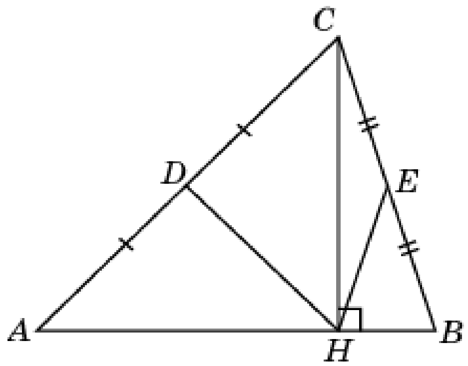
80. Пусть DE – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Опустим перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 из вершин треугольника на прямую DE. Прямоугольные треугольники ADA_1 и CDC_1 равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $AA_1 = CC_1$. Прямоугольные треугольники BEB_1 и CEC_1 равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $BB_1 = CC_1$. Таким образом, $AA_1 = BB_1 = CC_1$.



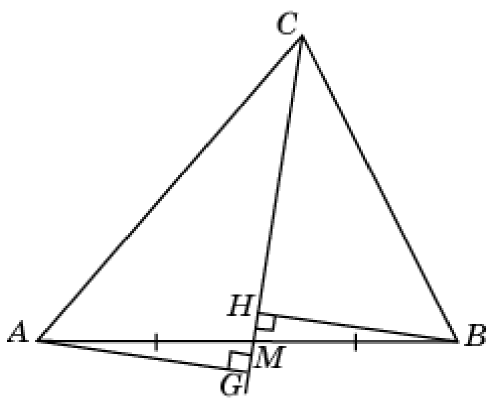
81. Пусть D, E, F – середины сторон соответственно AC, BC, AB. Стороны треугольников AFD, FBE, DEC и EDF в два раза меньше соответствующих сторон треугольника ABC. Следовательно, эти четыре треугольника равны по трем сторонам.



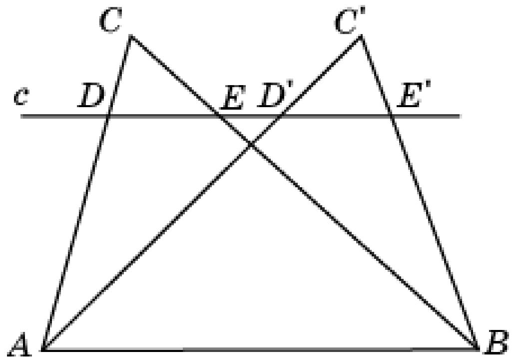
82. Пусть точки D и E – середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC, CH – высота. Воспользуемся тем, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине этой гипотенузе. Тогда треугольники CDH и CEH – равнобедренные, следовательно, $\angle DCH = \angle DHC$, $\angle ECH = \angle EHC$. Складывая эти равенства, получим $\angle DCE = \angle DHE$.



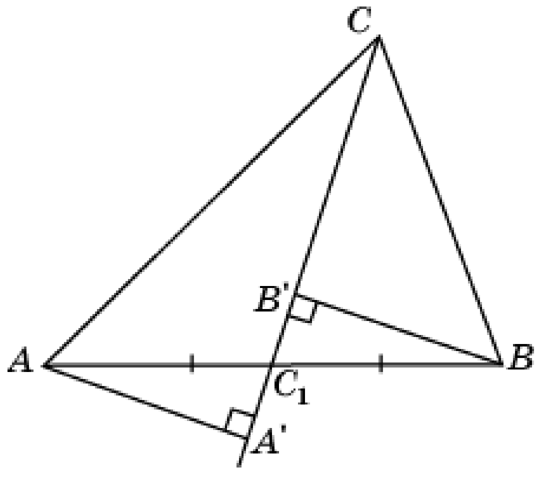
83. Пусть CM – медиана треугольника ABC. AG и BH – перпендикуляры, опущенные на прямую CM. Прямоугольные треугольники AGM и BHM равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $AG = BH$.



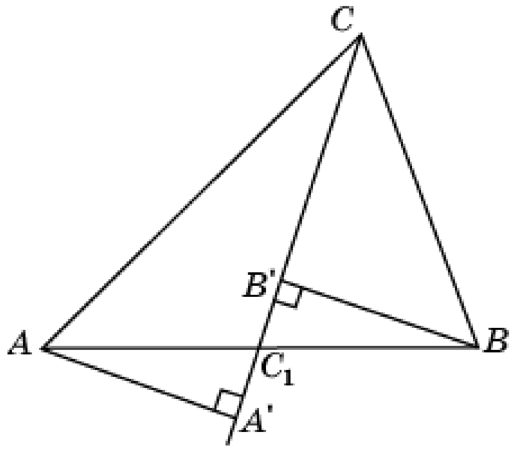
84. Треугольники *CDE* и *CAB* подобны и коэффициент подобия *k* равен отношению расстояний от точки *C* до прямых *c* и *AB*. Следовательно, *DE* = *kAB*. Аналогично, треугольники *C'D'E'* и *C'AB* подобны и коэффициент подобия также равен отношению расстояний от точки *C'* до прямых *c* и *AB*. Следовательно, *D'E'* = *kAB*. Значит, *DE* = *D'E'*.



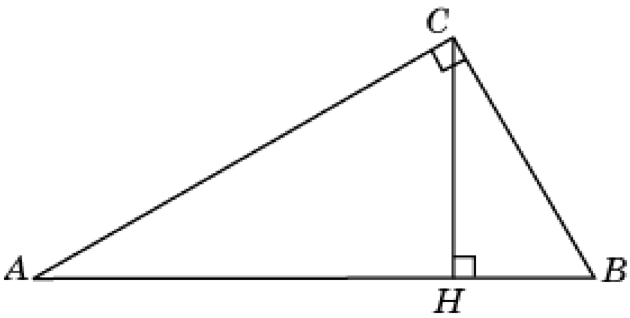
85. Пусть CC_1 – медиана треугольника *ABC*. Опустим из вершин *A* и *B* перпендикуляры *AA'* и *BB'* на прямую CC_1. Прямоугольные треугольники $AA'C_1$ и $BB'C_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, *AA'* = *BB'*. Треугольники ACC_1 и BCC_1 имеют общую сторону CC_1 и равные высоты, опущенные на нее. Следовательно, эти треугольники равновелики.



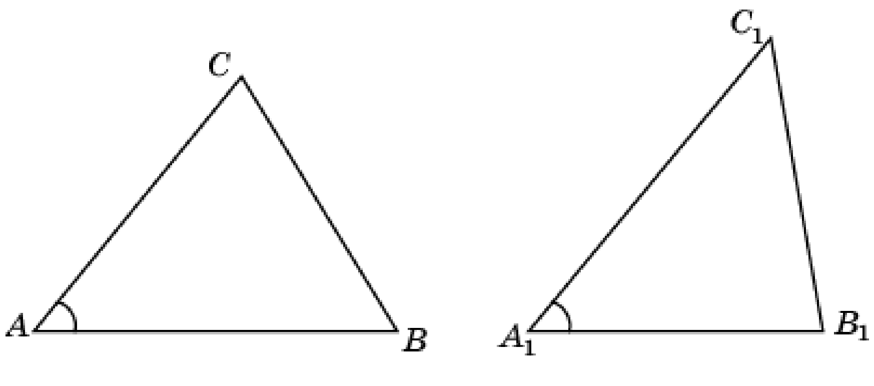
86. Пусть отрезок CC_1, соединяющий вершину треугольника *ABC* с точкой, принадлежащей противолежащей стороне, разбивает этот треугольник на два равновеликих треугольника ACC_1 и BCC_1. Опустим из вершин *A* и *B* перпендикуляры *AA'* и *BB'* на прямую CC_1. Из равенства площадей треугольников ACC_1 и BCC_1 следует равенство высот *AA'* и *BB'*. Прямоугольные треугольники $AA'C_1$ и $BB'C_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC_1 = BC_1$, т.е. CC_1 – медиана треугольника *ABC*.



43. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, CH – высота, опущенная на гипотенузу. Треугольники ABC и CBH подобны по трем углам, следовательно, AC : AB = CH : BC. Откуда $AC \cdot BC = AB \cdot CH$.

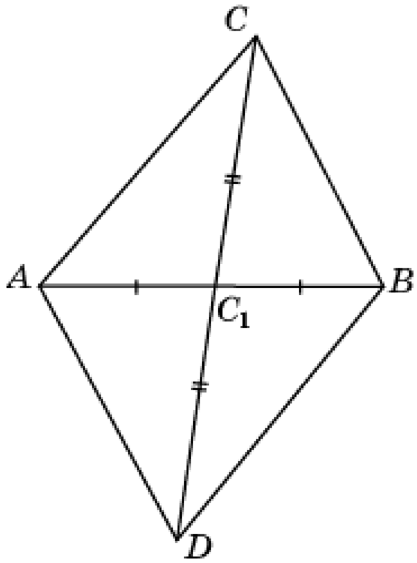


44. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = c$, $A_1B_1 = c_1$, $AC = b$, $A_1C_1 = b_1$. Тогда площади этих треугольников равны соответственно $\frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A$ и $\frac{1}{2}b_1 \cdot c_1 \cdot \sin A_1$. Следовательно, их отношение равно $\frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1}$.

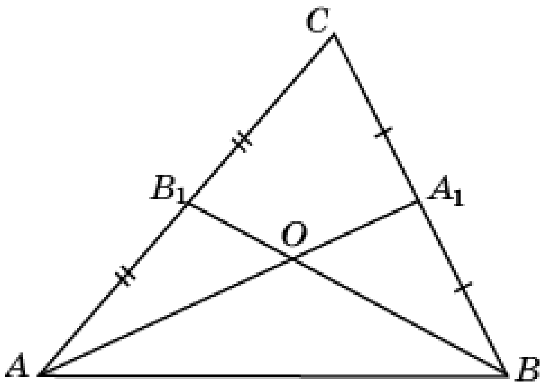


Уровень С

1. Пусть CC_1 – медиана треугольника ABC. Отложим на продолжении этой медианы отрезок C_1D, равный CC_1. В четырехугольнике $ACBD$ $AD = BC$. Воспользуемся тем, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Тогда $CD < AC + AD$, следовательно, $2CC_1 < AC + BC$, или $CC_1 < \frac{1}{2}(AC + BC)$.

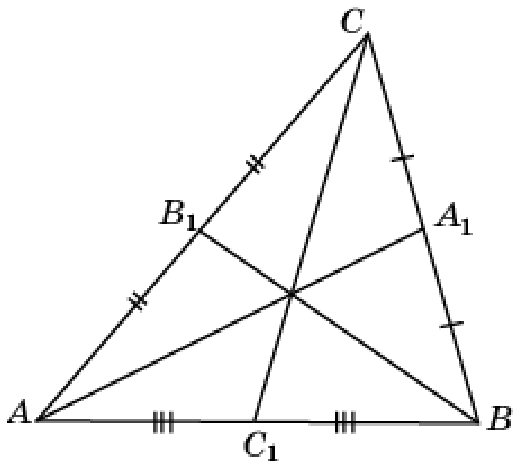


2. Пусть O – точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC. Тогда $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$. Для треугольника ABO имеем неравенство $AB < AO + BO$, следовательно, имеем неравенство $AB < \frac{2}{3}(AA_1 + BB_1)$, из которого непосредственно следует неравенство $3AB < 2(AA_1 + BB_1)$.

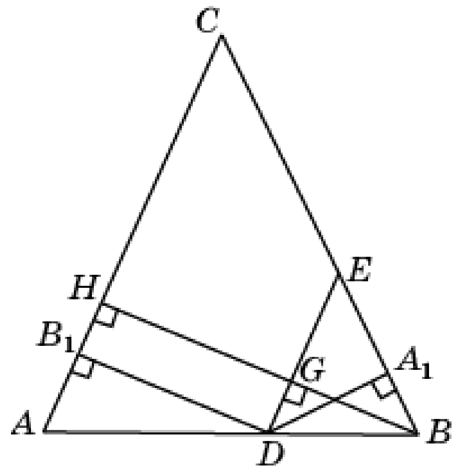


3. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. Воспользуемся неравенствами, доказанными в первой задаче: $2AA_1 < AB + AC$, $2BB_1 < AB + BC$, $2CC_1 < AC + BC$. Складывая их, получим $AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + AC$. Воспользуемся неравенствами, доказанными во второй задаче: $2(AA_1 + BB_1) > 3AB$, $2(AA_1 + CC_1) > 3AC$,

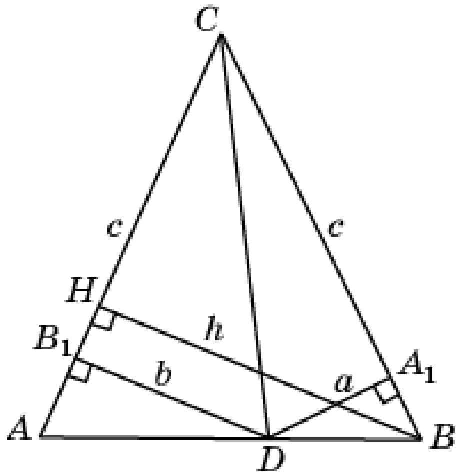
$2(BB_1 + CC_1) > 3BC$. Складывая их, получим $AA_1 + BB_1 + CC_1 > \frac{3}{4}(AB + BC + AC)$.



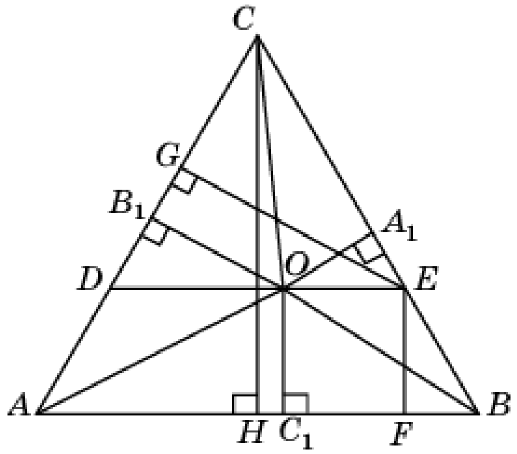
4. Пусть D – точка, принадлежащая основанию AB равнобедренного треугольника ABC. DB_1 и DA_1 – перпендикуляры, опущенные соответственно на стороны AC и BC. Через точку D проведем прямую, параллельную AC, и ее точку пересечения со стороной BC обозначим E. Из точки B опустим высоту BH и ее точку пересечения с отрезком DE обозначим G. Треугольник DBE – равнобедренный, $DA_1 = BG$, как высоты, опущенный на боковые стороны. Четырехугольник DB_1HG – прямоугольник, следовательно, $DB_1 = GH$. Значит, $DA_1 + DB_1 = BH$.



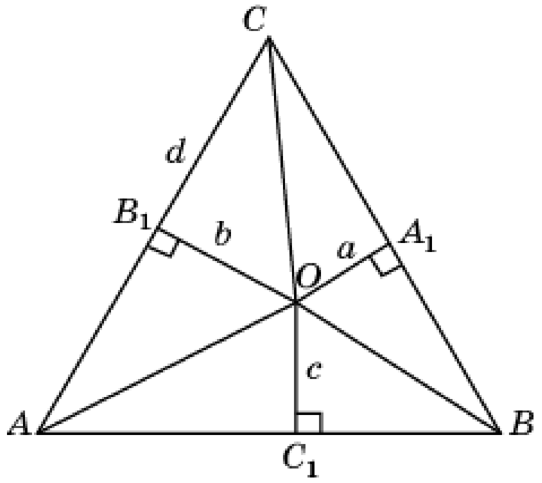
Приведем еще одно доказательство, использующее площадь. Пусть боковые стороны данного равнобедренного треугольника равны c, высота, опущенная на боковую сторону, равна h, $DA_1 = a$, $DB_1 = b$. Воспользуемся тем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ADC и BDC, а также формулой площади треугольника. Получим равенство $\frac{1}{2}c \cdot a + \frac{1}{2}c \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h$, из которого следует требуемое равенство $a + b = h$.



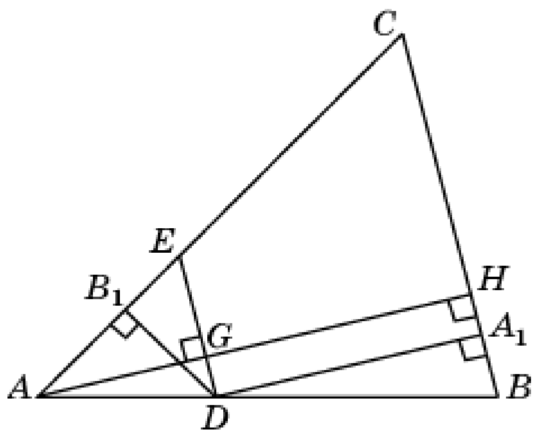
5. Через данную точку O треугольника ABC проведем прямую, параллельную AB, и ее точки пересечения со сторонами AC и BC обозначим соответственно D и E. Тогда, в силу предыдущей задачи, сумма перпендикуляров OA_1 и OB_1, опущенных на стороны CE и CD треугольника DEC, равна высоте EG этого треугольника. Применяя теперь результат предыдущей задачи к треугольнику ABC и точке E, получаем, что сумма перпендикуляров, опущенных из точки E на стороны AB и AC, равна высоте CH треугольника ABC. Так как $OC_1 = EF$, окончательно получаем $OA_1 + OB_1 + OC_1 = CH$.



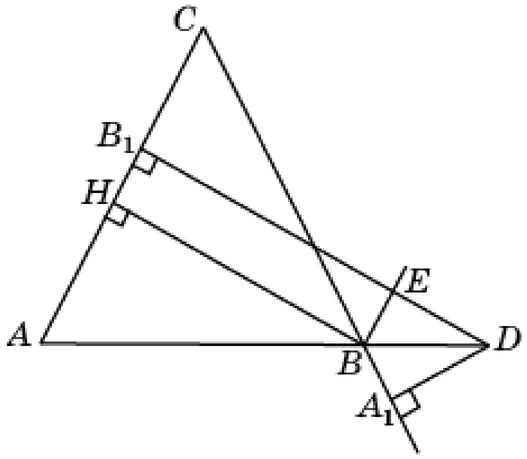
Приведем еще одно доказательство, использующее площадь. Пусть стороны равностороннего треугольника ABC равны d, высота равна h, O – внутренняя точка треугольника, перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1, опущенные на стороны треугольника, равны соответственно a, b, c. Воспользуемся тем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BOC, AOC и AOB, а также формулой площади треугольника. Получим равенство $\frac{1}{2}d \cdot a + \frac{1}{2}d \cdot b + \frac{1}{2}d \cdot c = \frac{1}{2}d \cdot h$, из которого следует требуемое равенство $a + b + c = h$.



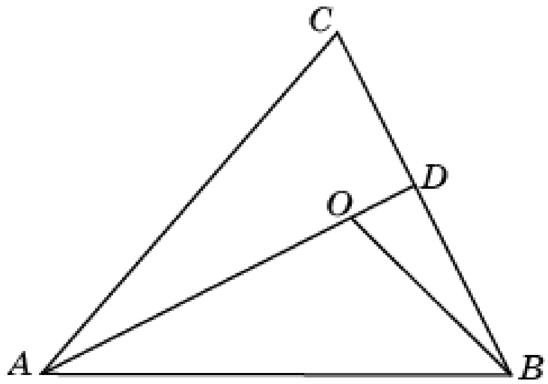
6. Пусть в остроугольном треугольнике ABC угол A меньше угла B. Из точки D, принадлежащей стороне AB, опущены перпендикуляры DA_1 и DB_1 соответственно на стороны BC и AC. AH – высота, опущенная на сторону BC. Докажем, что $AH > DA_1 + DB_1$. Через точку D проведем прямую, параллельную BC, и ее точку пересечения со стороной AC обозначим E. Точку пересечения высоты AH и DE обозначим G. Четырехугольник DA_1HG – прямоугольник, следовательно, $DA_1 = GH$. В треугольнике ADE $AE > DE$ и, по доказанному в задаче В31, $AG > DB_1$. Таким образом, имеем $AH = GH + GA > DA_1 + DB_1$.



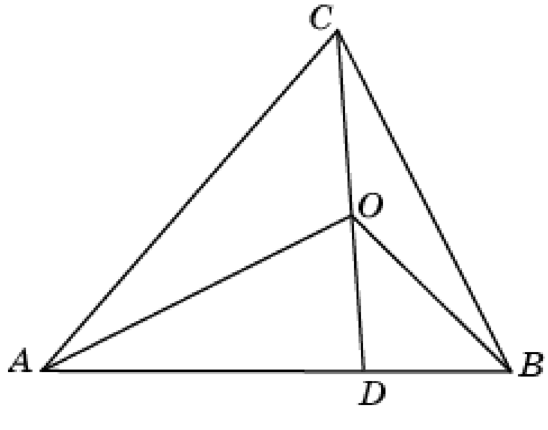
7. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Из точки D, принадлежащей продолжению стороны AB, опущены перпендикуляры DA_1 и DB_1 соответственно на прямые BC и AC. BH – высота, опущенная на боковую сторону. Докажем, что $DB_1 – DA_1 = BH$. Через точку B проведем прямую, параллельную AC, и ее точку пересечения с DB_1 обозначим E. Четырехугольник BEB_1H – прямоугольник, следовательно, $BH = EB_1$. Прямоугольные треугольники DBA_1 и DEB равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $DA_1 = DE$. Значит, $DB_1 – DA_1 = DB_1 – DE = EB_1 = BH$.



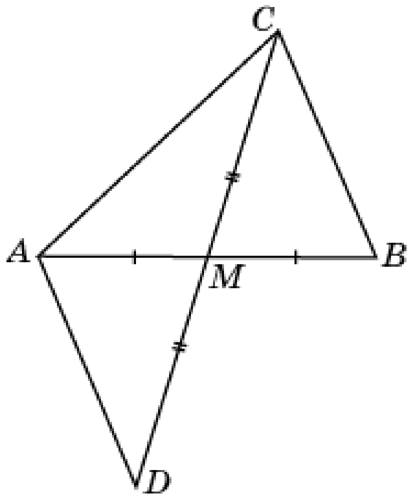
8. Пусть O – внутренняя точка треугольника ABC. Докажем, что выполняется неравенство $AC + BC > AO + BO$. Обозначим D точку пересечения прямых AO и BC. Тогда $AC + BC = AC + CD + DB > AD + DB = AO + OD + DB > AO + OB$.



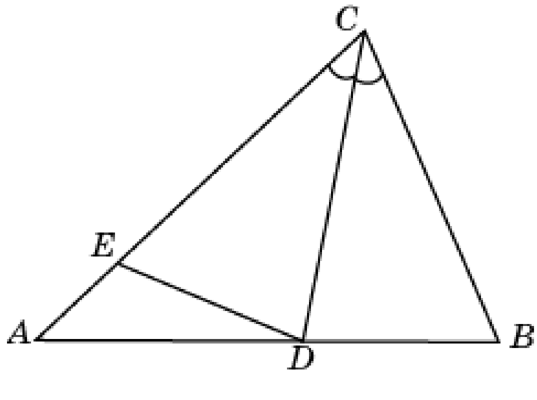
9. Пусть O – внутренняя точка треугольника ABC. Проведем луч CO и точку его пересечения с AB обозначим D. Тогда $\angle AOD > \angle ACD$, $\angle BOD > \angle BCD$ (по теореме о внешнем угле треугольника). Складывая эти два неравенства, получим требуемое неравенство $\angle AOB > \angle ACB$,



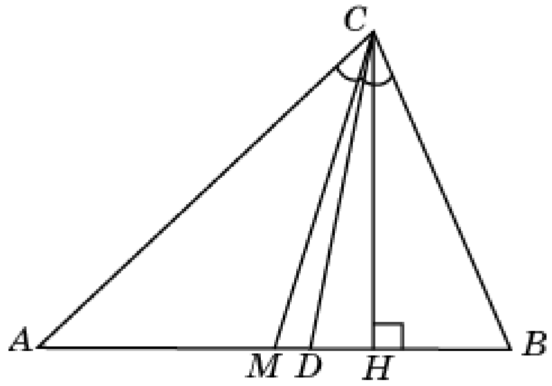
10. Продолжим медиану CM на отрезок MD, равный CM, и соединим точки A и D. Треугольники ADM и BCM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AD = BC$, $\angle ADM = \angle BCM$. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то $\angle ADM > \angle ACM$ или $\angle BCM > \angle ACM$



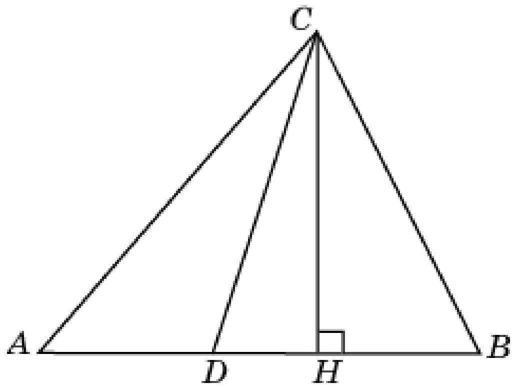
11. Отложим на стороне AC отрезок CE, равный CB, и соединим точки D и E. Треугольники BCD и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $DB = DE$, $\angle DBC = \angle DEC$. Угол AED равен внешнему углу треугольника ABC при вершине B, который больше внутреннего угла A. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AD > DE = DB$.



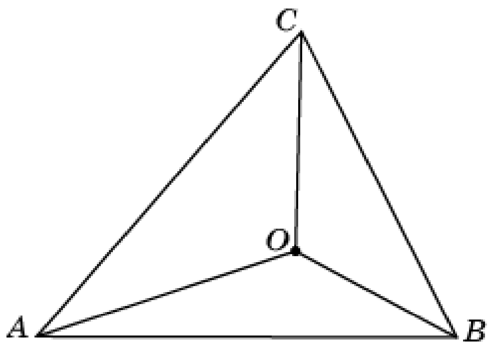
12. Если треугольник ABC равнобедренный ($AC = BC$), то биссектриса, медиана и высота, проведенные из вершины C, совпадают. Пусть в треугольнике ABC $AC > BC$, CD – биссектриса, CM – медиана, CH – высота. Тогда $\angle A < \angle B$, $\angle ACM < \angle BCM$ и $\angle ACH > \angle BCH$ (см. задачи С10 и В23). Следовательно, биссектриса CM лежит между медианой CM и высотой CH.



13. Пусть D – внутренняя точка стороны AB треугольника ABC. Проведем высоту CH. Предположим, что $AC \geq BC$, тогда отрезок AH больше или равен BH. Тогда $DH < AH$. Так как из двух наклонных, проведенных из одной точки, меньше та, проекция которой меньше, то $CD < CA$.

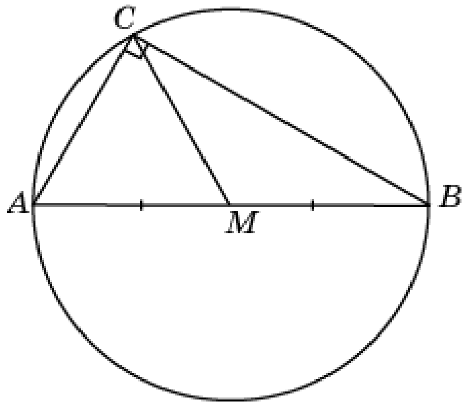


14. Пусть O – внутренняя точка треугольника ABC. Докажем, что выполняются неравенства $\frac{1}{2}(AB + BC + AC) < OA + OB + OC < AB + BC + AC$. Имеем неравенства $AB < OA + OB < AC + BC$, $BC < OB + OC < AB + AC$, $AC < OA + OC < AB + BC$. Складывая их, получим неравенства $AB + BC + AC < 2(OA + OB + OC) < 2(AB + BC + AC)$, из которых непосредственно следуют требуемые неравенства.

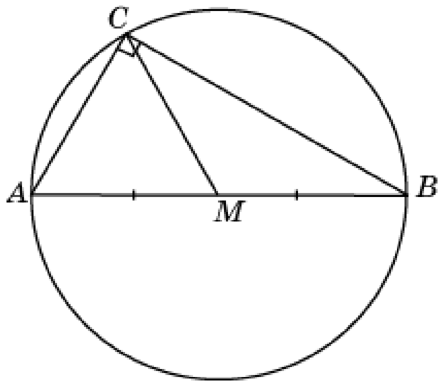


15. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, AB – гипотенуза. Окружность, описанная около этого треугольника, имеет своим

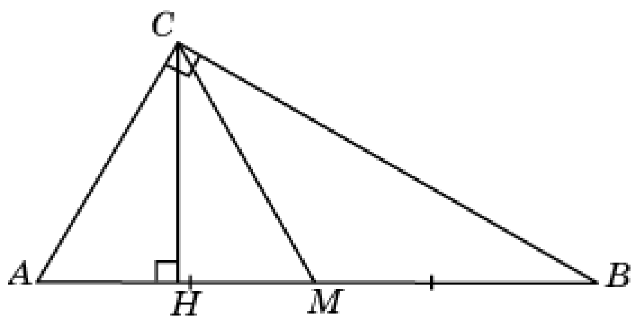
диаметром AB. Следовательно, медиана CM равна радиусу этой окружности и равна половине AB.



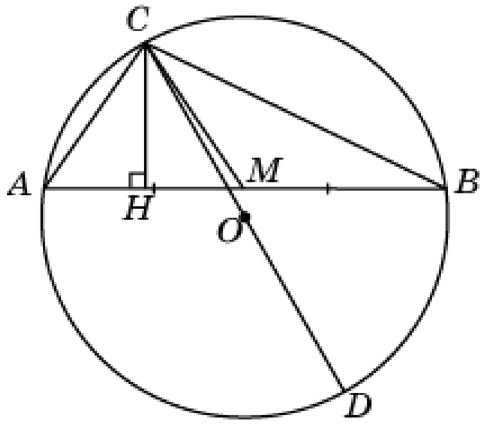
16. Пусть CM – медиана треугольника ABC, равная половине стороны AB. С центром в точке M опишем окружность диаметра AB. Она пройдет через вершину C. Вписанный угол C опирается на диаметр окружности, следовательно, равен 90°. Значит, треугольник ABC – прямоугольный.



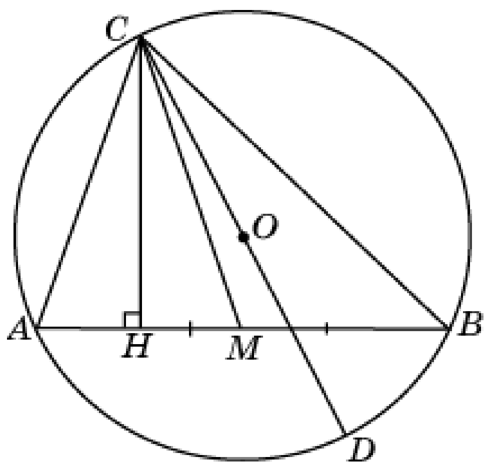
17. $\angle ACH = \angle B$, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. $\angle ACM = \angle A$, как углы при основании равнобедренного треугольника ACM. Следовательно, $\angle MCH = \angle ACM - \angle ACH = \angle A - \angle B$.



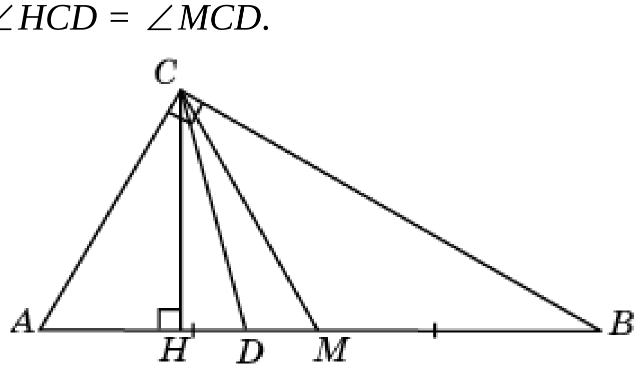
18. Пусть ABC – тупоугольный треугольник ($\angle C > 90^o$), CM – медиана, CH – высота. Опишем около этого треугольника окружность с центром O. Так как угол C – тупой, то угол OCH составляет часть угла MCH и равен разности углов A и B (см. задачу С6 параграфа 6). Следовательно, угол MCH больше разности углов A и B.



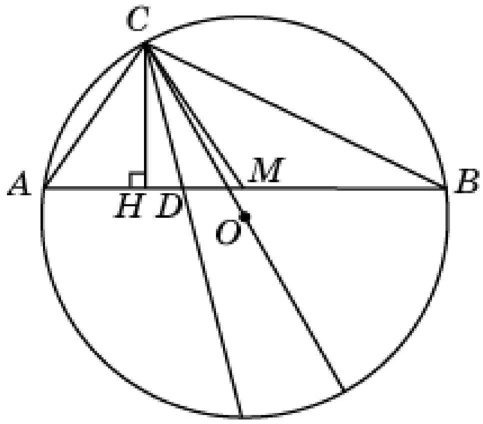
19. Пусть ABC – остроугольный треугольник, CM – медиана, CH – высота. Опишем около этого треугольника окружность с центром O. Так как угол C – острый, то угол MCH составляет часть угла OCH, который равен разности углов A и B (см. задачу С6 параграфа 6). Следовательно, угол MCH меньше разности углов A и B.



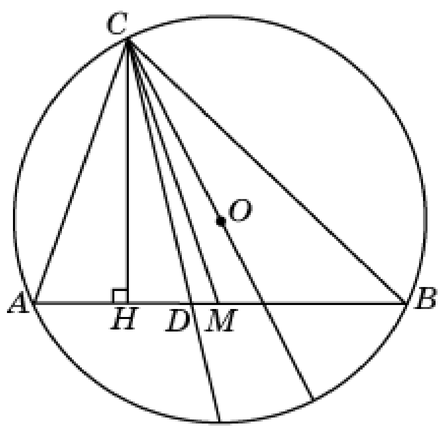
20. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, $\angle C = 90^o$, CM – медиана, CH – высота, CD – биссектриса. Имеем: $\angle HCD = \angle ACD - \angle ACH = 45^o - \angle B$, $\angle MCD = \angle BCD - \angle BCM = 45^o - \angle B$. Следовательно, $\angle HCD = \angle MCD$.



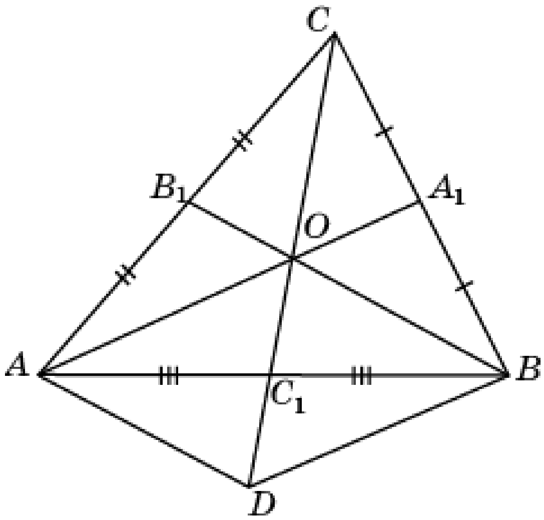
21. Пусть *ABC* – тупоугольный треугольник, *CM* – медиана, *CH* – высота, *CD* - биссектриса. Опишем около этого треугольника окружность с центром *O*. Так как угол *C* – тупой, то угол *MCH* больше угла *OCH*, который делится пополам биссектрисой *CD* (см. задачу С7 параграфа 6). Следовательно, угол *MCD* больше угла *DCH*.



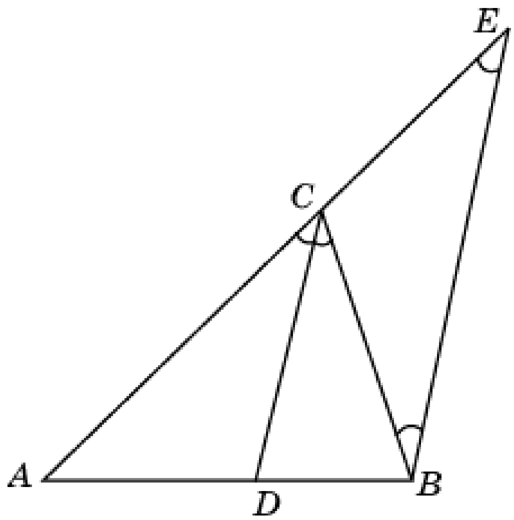
22. Пусть *ABC* – остроугольный треугольник, *CM* – медиана, *CH* – высота, *CD* - биссектриса. Опишем около этого треугольника окружность с центром *O*. Так как угол *C* – острый, то угол *MCH* составляет часть угла *OCH*, который делится пополам биссектрисой *CD* (см. задачу С7 параграфа 6). Следовательно, угол *MCD* меньше угла *DCH*.



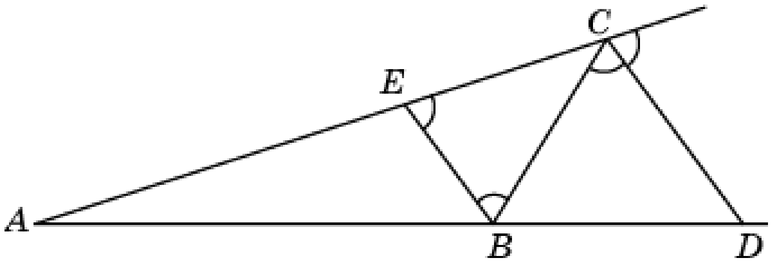
23. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника *ABC*, пересекающиеся в точке *O*. Продолжим CC_1 и отложим $C_1D = OC_1$. В треугольнике *AOD* $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $AD = BO = \frac{2}{3}BB_1$, $OD = \frac{2}{3}CC_1$. Используя неравенство треугольника, примененное к треугольнику *AOD*, получим $OD < AO + AD$ и, следовательно, $CC_1 < AA_1 + BB_1$.



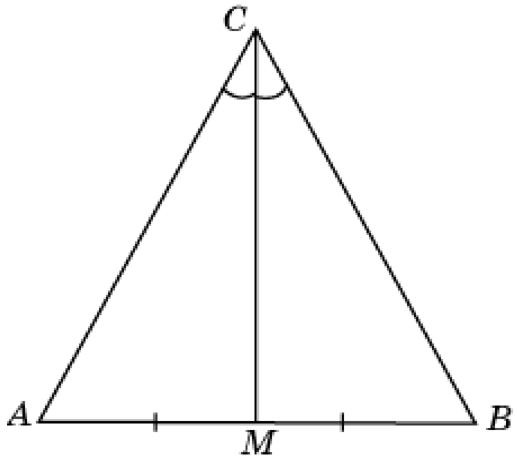
24. Пусть *CD* – биссектриса треугольника *ABC*. Через точку *B* проведем прямую, параллельную *CD*, и ее точку пересечения с прямой *AC* обозначим *E*. В треугольнике *BCE* угол *B* равен углу *E* и, следовательно, *BC* = *CE*. Так как *BE* параллельна *CD*, то по теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CE}=\frac{AC}{BC}$, следовательно, биссектриса угла *C* треугольника *ABC* делит сторону *AB* на части, пропорциональные прилежащим сторонам *AC* и *BC*.



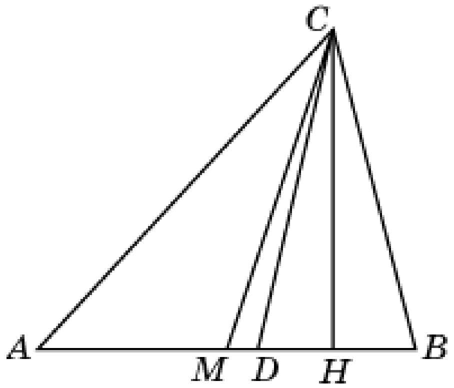
25. Пусть *CD* – биссектриса внешнего угла при вершине *C* треугольника *ABC*. Через точку *B* проведем прямую, параллельную *CD*, и ее точку пересечения с прямой *AC* обозначим *E*. В треугольнике *BCE* угол *B* равен углу *E* и, следовательно, *BC* = *CE*. Так как *BE* параллельна *CD*, то по теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CE}=\frac{AC}{BC}$, следовательно, расстояния от точки *D* до концов стороны *AB* треугольника *ABC* пропорциональны прилежащим сторонам *AC* и *BC*.



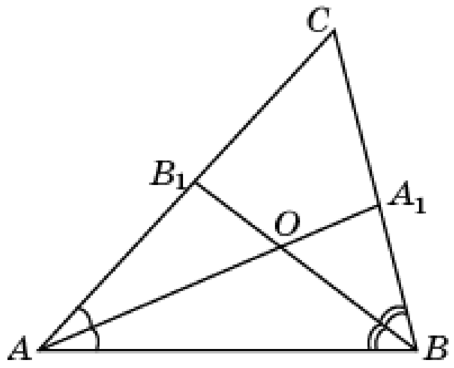
26. Пусть медиана CM треугольника ABC совпадает с его биссектрисой. В силу задачи 24, отношение сторон AC и BC равно 1. Следовательно, треугольник ABC – равнобедренный.



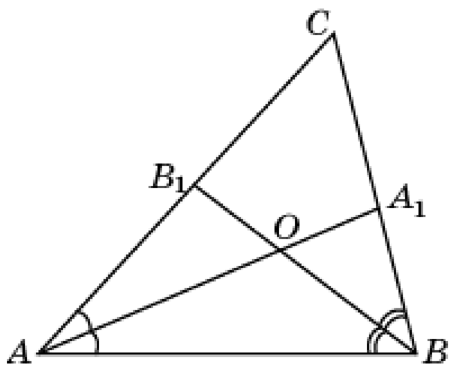
27. Пусть CD – биссектриса, CM – медиана, CH – высота треугольника ABC. Если $AC = BC$, то треугольник ABC – равнобедренный, следовательно, биссектриса совпадает с медианой. Если $AC > BC$, то биссектриса лежит между медианой и высотой (см. задачу 12). Тогда угол CDM – тупой и, следовательно, $CD < CM$.



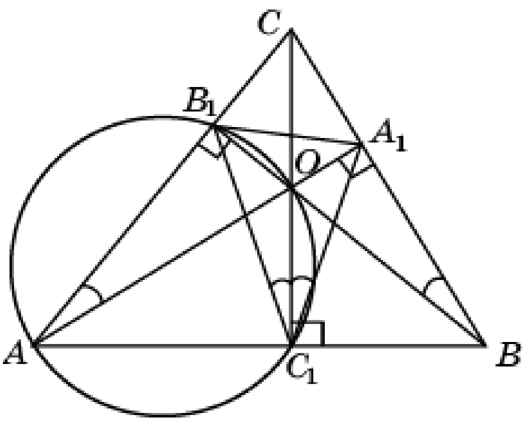
28. Пусть AA_1 и BB_1 – биссектрисы треугольника ABC, пересекающиеся в точке O. Если бы AA_1 и BB_1 были перпендикулярны, то треугольники AOB и AOB_1 были бы равны и, следовательно, $\angle AB_1O = \angle ABO = \angle OBA_1$. В этом случае прямые AB_1 и BA_1 должны быть параллельны, что не так. Значит, биссектрисы AA_1 и BB_1 не могут быть перпендикулярны.



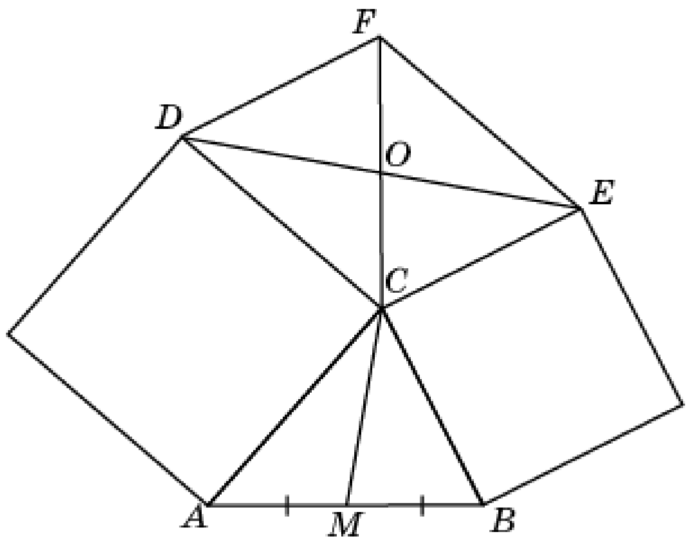
29. Пусть AA_1 и BB_1 – биссектрисы треугольника ABC, пересекающиеся в точке O. Если бы O была серединой BB_1, то треугольники AOB и AOB_1 были бы равны и, следовательно, $\angle AB_1O = \angle ABO = \angle OBA_1$. В этом случае прямые AB_1 и BA_1 должны быть параллельны, что не так. Значит, биссектриса AA_1 не может проходить через середину биссектрисы BB_1.



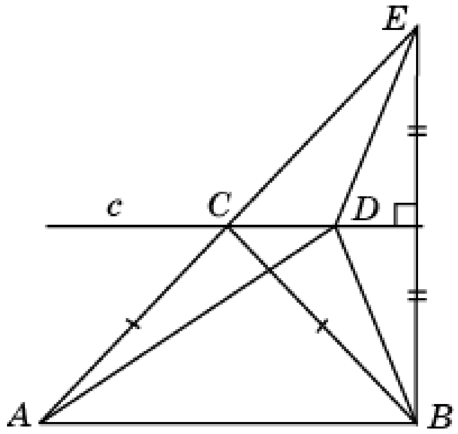
30. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке O. Докажем, что биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$, проведенная из вершины C_1, лежит на высоте CC_1 треугольника ABC. Действительно, углы OAC и OBC равны, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Построим окружность с диаметром AO. Точки B_1 и C_1 принадлежат этой окружности. Углы OAB_1 и OC_1B_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично доказывается, что углы OBA_1 и OC_1A_1 равны. Следовательно, углы OC_1B_1 и OC_1A_1 равны.



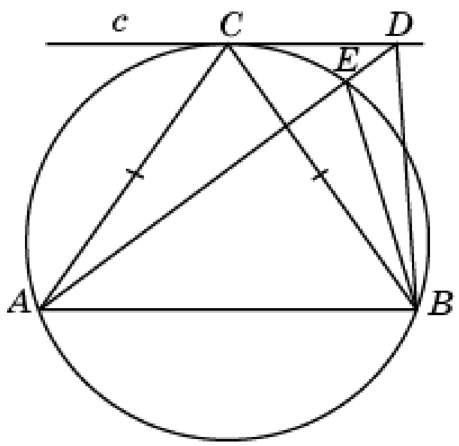
31. Пусть CM – медиана треугольника ABC, DE – отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, построенных на сторонах AC и BC. Достроим треугольник CDE до параллелограмма $CDFE$. Проведем диагональ CF и ее точку пересечения с DE обозначим O. Так как $\angle DCE = 180^\circ - \angle ACB$, то $\angle CEF = \angle ACB$. Треугольники ABC и FCE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $CM = EO = \frac{1}{2}DE$.



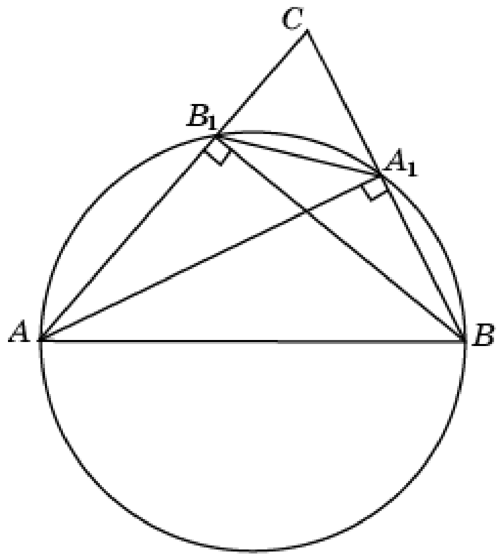
32. Пусть AB – отрезок, c – параллельная ему прямая. Точки C и D принадлежат прямой c, причем ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Рассмотрим точку E, симметричную точке B относительно прямой c. Тогда $AB + BD = AB + DE > AE = AC + CE = AC + BC$. Следовательно, периметр треугольника ABD больше периметра треугольника ABC.



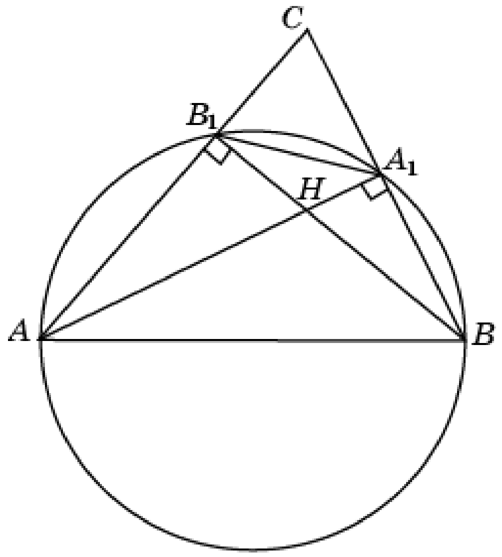
33. Пусть AB – отрезок, c – параллельная ему прямая. Точки C и D принадлежат прямой c, причем ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$). Опишем около треугольника ABC окружность. Прямая c является касательной к окружности. Обозначим E точку пересечения окружности и AD. Тогда $\angle C = \angle E$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Угол E больше угла D, как внешний угол треугольника BDE. Следовательно, $\angle C > \angle D$.



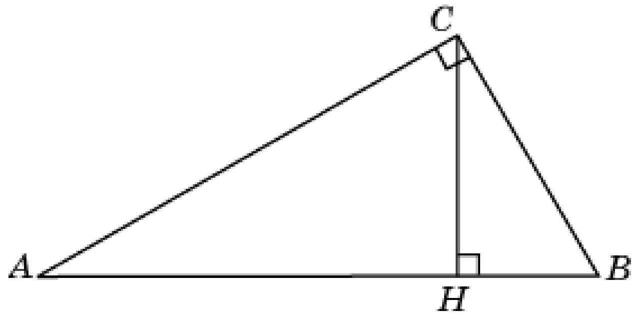
34. Пусть AA_1, BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Построим окружность с диаметром AB. Углы ABB_1 и AA_1B_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Угол CAB равен 90° минус угол ABB_1. Угол CA_1B_1 равен 90° минус угол AA_1B_1. Следовательно, углы CAB и CA_1B_1 равны, значит, треугольники ABC и A_1B_1C подобны по углам.



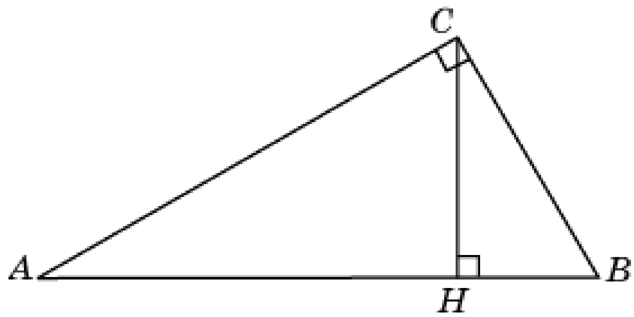
35. Пусть AA_1, BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC, пересекающиеся в точке H. Построим окружность с диаметром AB. Углы BAA_1 и BB_1A_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Аналогично, углы ABB_1 и AA_1B_1 равны. Следовательно, треугольники ABH и B_1A_1H подобны по углам.



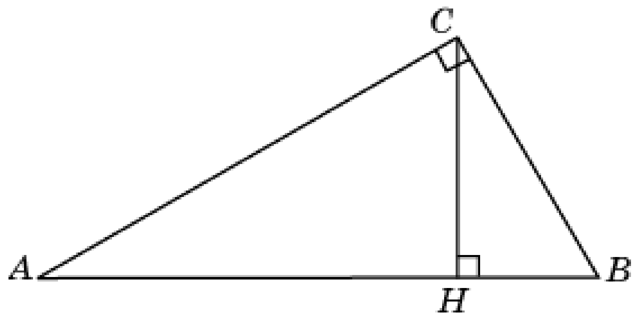
36. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, CH – высота, опущенная на гипотенузу. Треугольники ACH и CBH подобны по углам, следовательно, $CH : AH = BH : CH$. Откуда $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$.



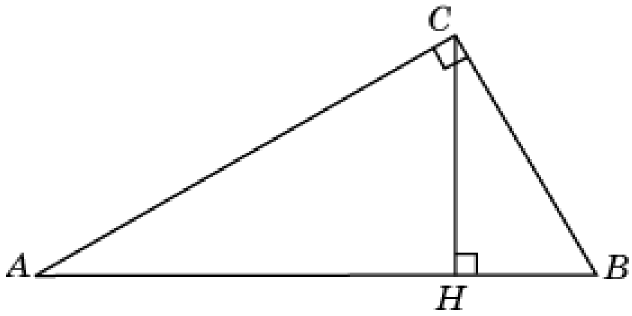
37. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, CH – высота, опущенная на гипотенузу. Обозначим $AC = b$, $BC = a$, $CH = h$. Треугольники ACH и CBH подобны по углам, следовательно, $CH : AC = BH : BC$. Откуда $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим требуемое равенство $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.



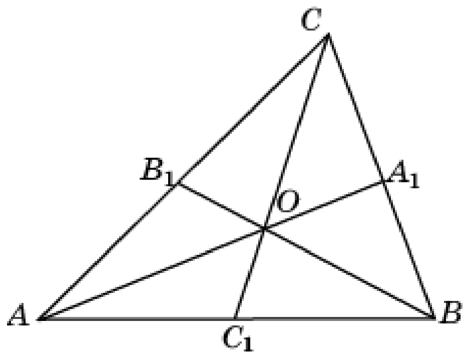
38. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, CH – высота, опущенная на гипотенузу. Треугольники ABC и ACH подобны по углам и, следовательно, $AC : AB = AH : AC$. Откуда $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$. Аналогично, $BC = \sqrt{AB \cdot BH}$.



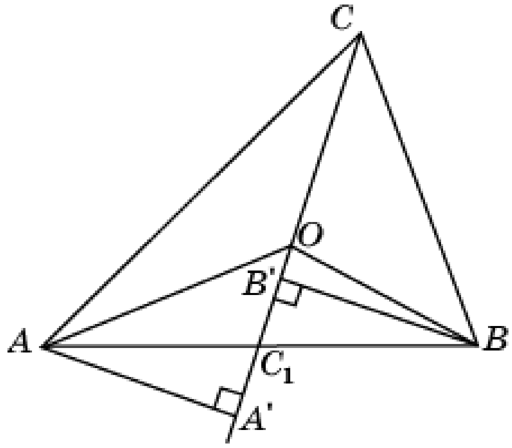
39. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, CH – высота, опущенная на гипотенузу. Из предыдущей задачи следует, что $AH = \frac{AC^2}{AB}$ и $BH = \frac{BC^2}{AB}$. Откуда $\frac{AH}{BH} = \frac{AC^2}{BC^2}$.



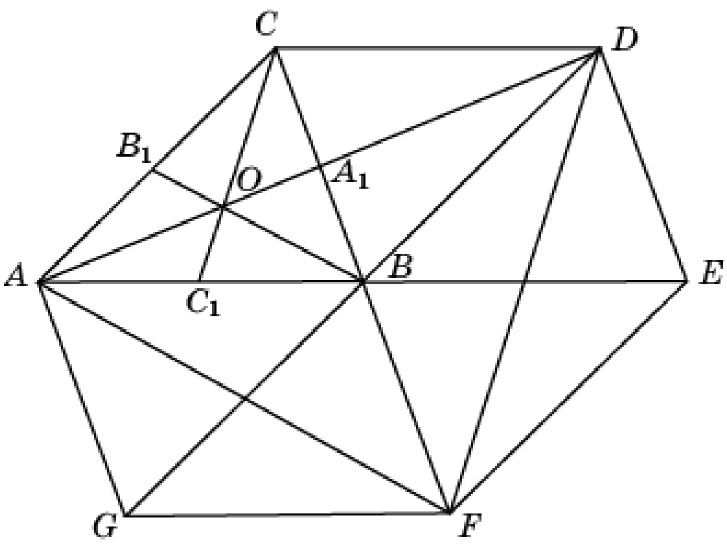
40. Пусть в треугольнике ABC AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, пересекающиеся в точке O. В треугольнике AC_1O сторона AC_1 равна половине стороны AB, а высота, опущенная из вершины O, равна одной третьей высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C. Следовательно, площадь треугольника AC_1O равна одной шестой площади треугольника ABC. Аналогично, площади всех остальных треугольников, на которые делится треугольник ABC своими медианами, равны одной шестой площади треугольника ABC, т.е. все эти шесть треугольников равновелики.



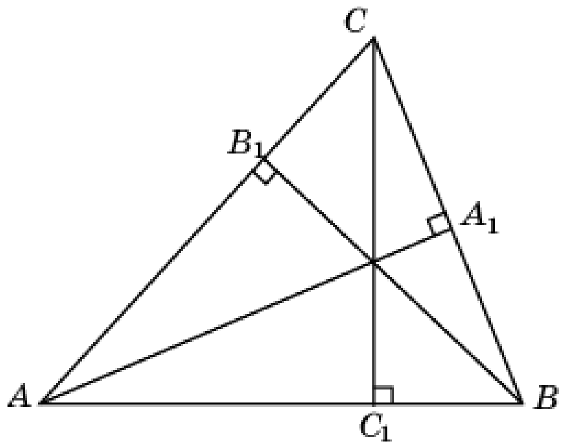
41. Пусть O – точка внутри треугольника ABC такая, что площади треугольников AOB, BOC и AOC равны. Продолжим CO до пересечения со стороной AB в точке C_1. Из вершин A и B опустим на прямую CC_1 перпендикуляры соответственно AA' и BB'. Так как площади треугольников AOC и BOC равны, а сторона OC – общая, то равны и их высоты AA' и BB'. Прямоугольные треугольники $AA'C_1$ и $BB'C_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC_1 = BC_1$. Значит, точка O принадлежит медиане CC_1 треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точка O принадлежит двум другим медианам.



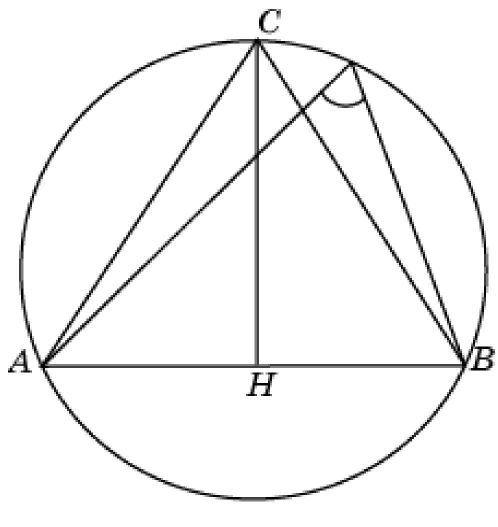
42. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Достроим треугольник ABC до шестиугольника $ACDEFG$, противоположные стороны которого равны и параллельны. Стороны треугольника ADF равны удвоенным медианам треугольника ABC и его площадь равна трем площадям треугольника ABC. Следовательно, площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника, равна трем четверым площади данного треугольника.



43. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Воспользуемся тем, что произведение стороны треугольника на высоту, опущенную на эту сторону, равно удвоенной площади треугольника. Тогда $AB \cdot CC_1 = AC \cdot BB_1 = BC \cdot AA_1$. Откуда $\frac{AB}{\frac{1}{CC_1}} = \frac{AC}{\frac{1}{BB_1}} = \frac{BC}{\frac{1}{AA_1}}$, т.е. стороны треугольника обратно пропорциональны высотам, проведенным к этим сторонам.



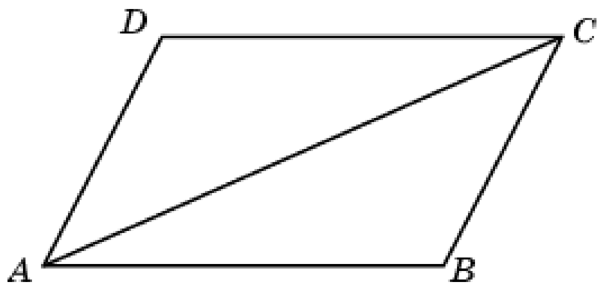
44. Рассмотрим треугольники ABC с данной стороной AB и данным углом C. Вершины C таких треугольников принадлежат одной окружности. При этом высота CH будет наибольшей в случае, если C принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB, т.е. в случае, если $AC = BC$.



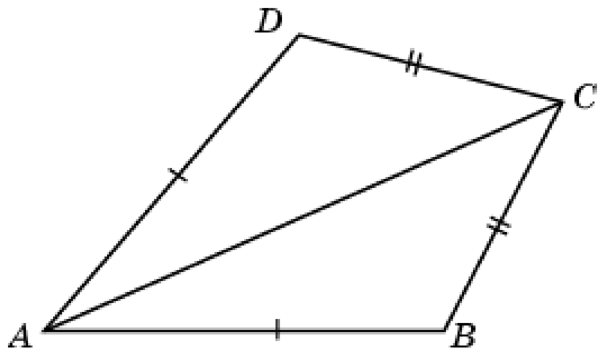
4. Четырехугольники

Уровень В

40. Пусть *ABCD* – параллелограмм, *AC* – диагональ. В треугольниках *ABC* и *CDA* сторона *AC* – общая. Угол *CAB* равен углу *ACD* как накрест лежащие при параллельных прямых *AB, CD* и секущей *AC*. Угол *ACB* равен углу *CAD* как накрест лежащие при параллельных прямых *AD, BC* и секущей *AC*. Следовательно, треугольники *ABC* и *CDA* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

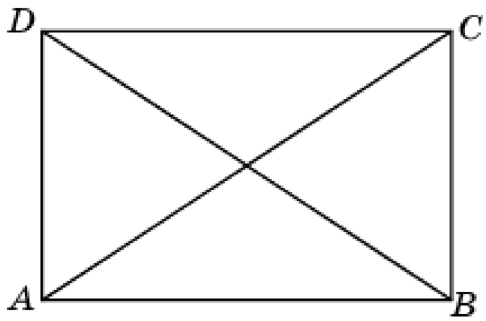


41. Нет. Пример приведен на рисунке.

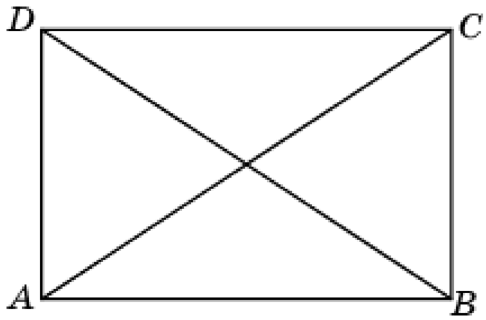


42. Пусть *ABCD* – четырехугольник, у которого противоположные углы равны. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то сумма двух односторонних углов будет равна 180° и, следовательно, противоположные стороны этого четырехугольника параллельны, т.е. он – параллелограмм.

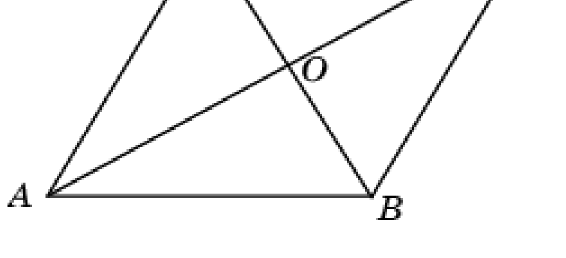
43. Пусть в прямоугольнике *ABCD* проведены диагонали *AC* и *BD*. Прямоугольные треугольники *ABC* и *BAD* равны по двум катетам. Следовательно, *AC* = *BD*.



44. Пусть в прямоугольнике *ABCD* проведены диагонали *AC* и *BD*. Треугольники *ABC* и *BAD* равны по трем сторонам. Следовательно, угол *ABC* равен углу *BAD*. В сумме эти углы составляют 180°, как односторонние углы при параллельных *BC* и *AD* и секущей *AB*. Следовательно, эти углы равны 90° и, значит, *ABCD* – прямоугольник.

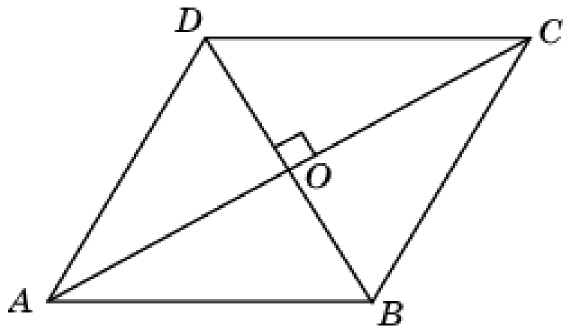


45. Пусть диагонали ромба *ABCD* пересекаются в точке *O*. В равнобедренном треугольнике *ABD AO* является медианой и, следовательно, высотой. Значит, диагонали *AC* и *BD* ромба перпендикулярны.

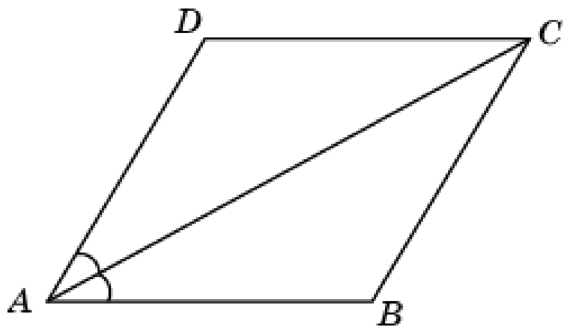


46. Пусть диагонали параллелограмма *ABCD* перпендикулярны и пересекаются в точке *O*. Прямоугольные треугольники *AOB* и *AOD*

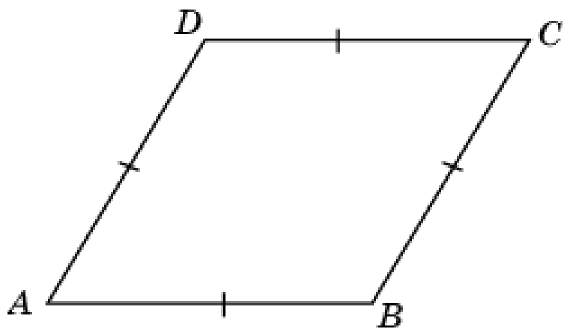
равны по двум катетам. Следовательно, AB = AD и, значит, параллелограмм $ABCD$ является ромбом.



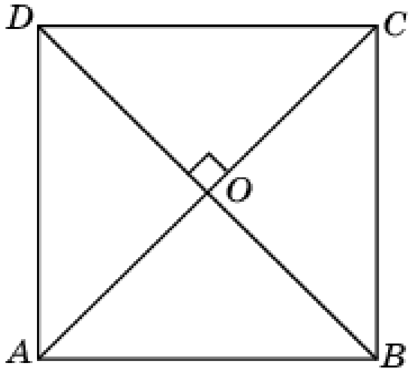
47. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, AC – диагональ. В треугольнике ABC угол ACB равен углу CAD и равен углу BAC. Следовательно, этот треугольник равнобедренный, AB = BC. Значит, параллелограмм $ABCD$ является ромбом.



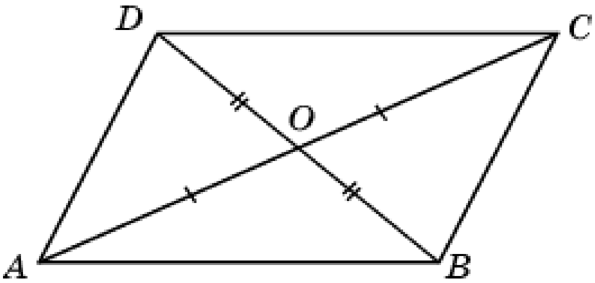
48. Так как противоположные стороны четырехугольника равны, то он является параллелограммом. Так как все его стороны равны, то этот параллелограмм – ромб.



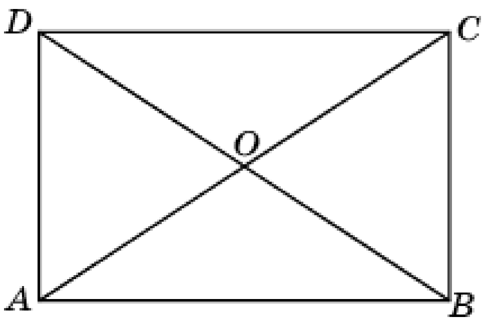
49. Пусть диагонали прямоугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Прямоугольные треугольники AOB и AOD равны по двум катетам. Следовательно, AB = AD и, значит, $ABCD$ – квадрат.



50. Пусть диагонали четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *O*. Треугольники *AOB* и *COD* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол *OAB* равен углу *OCD* и, значит, отрезки *AB* и *CD* равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм.

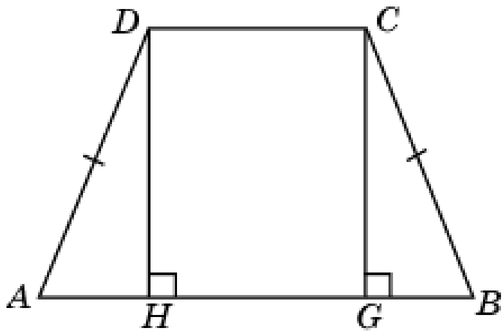


51. Из того, что диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, следует, что этот четырехугольник является параллелограммом. Из того, что диагонали параллелограмма равны, следует, что он является прямоугольником.

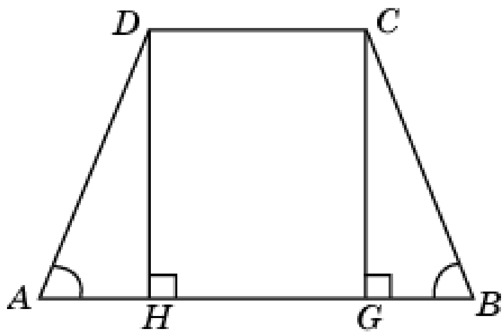


52. Пусть *ABCD* – равнобедренная трапеция (*AB* || *DC*). Из вершин *C* и *D* опустим высоты *CG* и *DH* на основание *AB*.

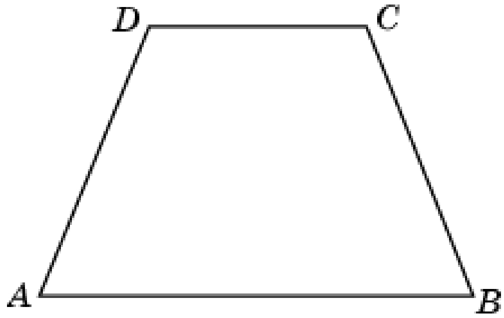
Прямоугольные треугольники *BCG* и *ADH* равны по гипотенузе и катету. Следовательно, углы *A* и *B* равны.



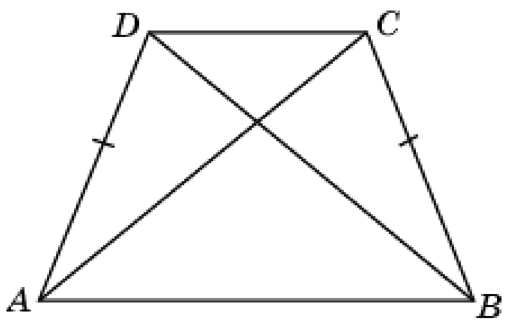
53. Пусть в трапеции *ABCD* (*AB* || *DC*) равны острые углы *A* и *B*. Из вершин *C* и *D* опустим высоты *CG* и *DH* на основание *AB*. Прямоугольные треугольники *BCG* и *ADH* равны по катету и острому углу. Следовательно, *BC* = *AD* и, значит, трапеция *ABCD* – равнобедренная.



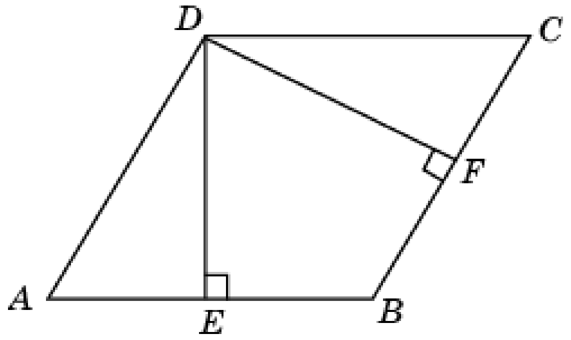
54. Воспользуемся тем, что сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции равна 180°. Из того, что сумма двух противоположных углов трапеции равна 180°, следует, что углы при основании трапеции равны и, значит, трапеция – равнобедренная.



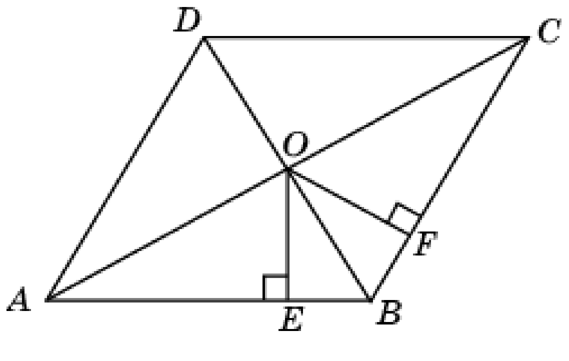
55. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция ($AB \parallel CD$), AC и BD – диагонали. Треугольники ABC и BAD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = BD$.



56. Пусть $ABCD$ – ромб, DE и DF – его высоты. Прямоугольные треугольники ADE и CDF равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $DE = DF$.

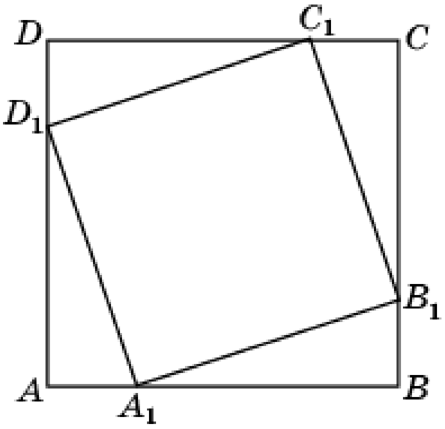


57. Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до его стороны равно половине высоты ромба, опущенной на эту сторону. Из равенства высот ромба следует равенство расстояний OE и OF.

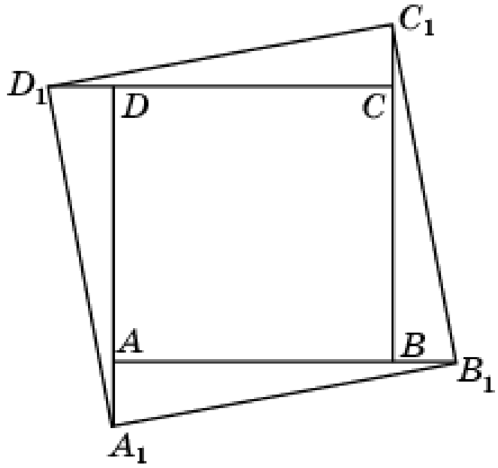


58. Все четыре прямоугольных треугольника равны по двум катетам. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – ромб. Кроме того, каждый угол этого четырехугольника равен 180° минус сумма

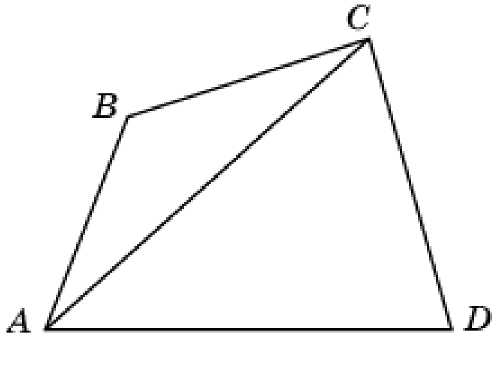
острых углов прямоугольного треугольника, т.е. равен 90°. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.



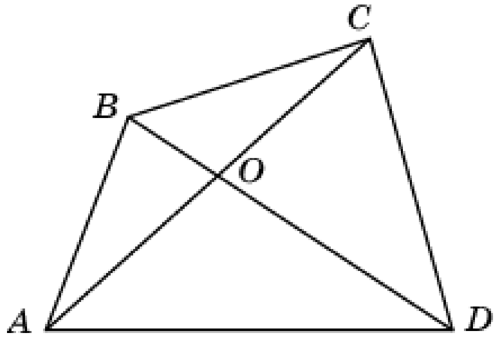
59. Все четыре прямоугольных треугольника равны по двум катетам. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – ромб. Кроме того, каждый угол этого четырехугольника равен суммt острых углов прямоугольного треугольника, т.е. равен 90°. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.



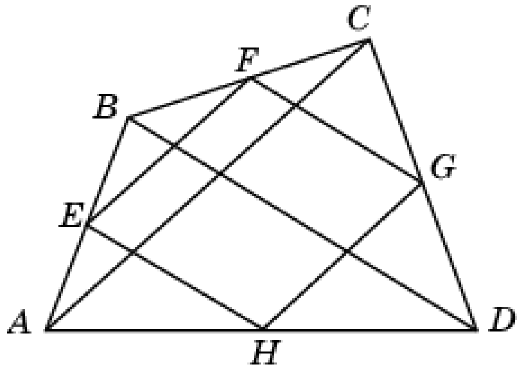
60. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. В силу неравенства треугольника имеем $AC < AB + BC$ и $AC < AD + CD$. Складывая эти неравенства, получим $AC < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$.



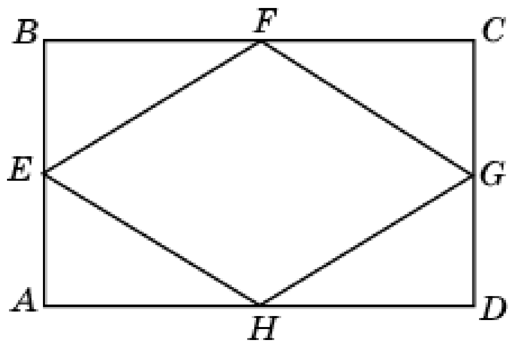
61. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. В силу неравенства треугольника имеем $AD < AO + OD$ и $BC < BO + OC$. Складывая эти неравенства, получим $AD + BC < AC + BD$.



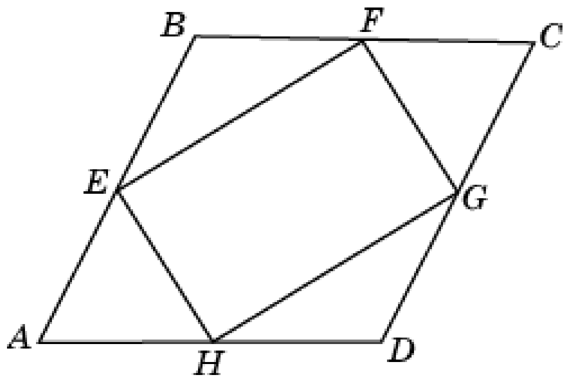
62. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, G, H являются серединами сторон соответственно AB, BC, CD, DA. В треугольнике ABC EF – средняя линия и, значит, параллельна AC. Аналогично GH параллельна AC. Следовательно, EF параллельна GH. Аналогично FG параллельна EH. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $EFGH$ параллельны и, следовательно, он является параллелограммом.



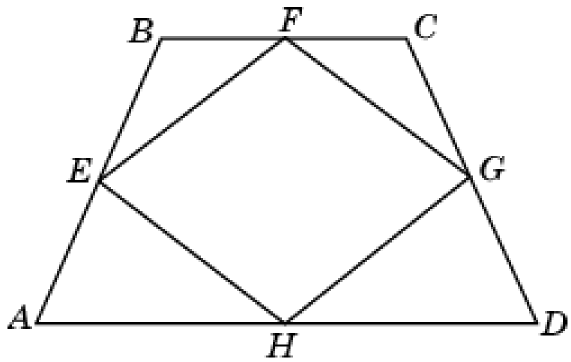
63. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ точки E, F, G, H являются серединами сторон соответственно AB, BC, CD, DA. Все прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Значит, стороны четырехугольника $EFGH$ равны и, следовательно, он является ромбом.



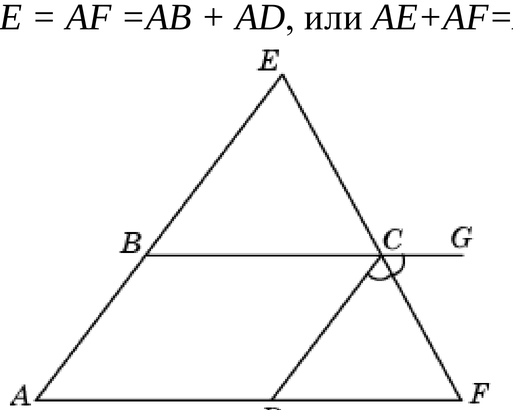
64. Пусть в ромбе *ABCD* точки *E*, *F*, *G*, *H* являются серединами сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. В силу задачи 23 четырехугольник *EFGH* является параллелограммом. Его стороны параллельны диагоналям ромба и, следовательно, перпендикулярны. Значит, четырехугольник *EFGH* – прямоугольник.



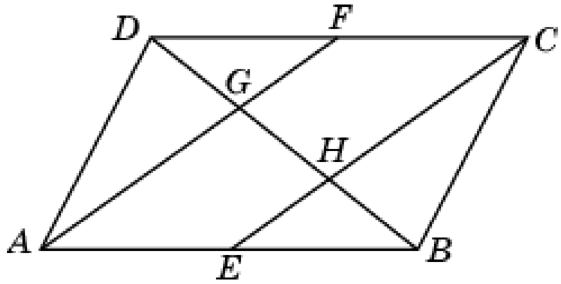
65. Пусть в равнобедренной трапеции *ABCD* ($AD \parallel BC$) точки *E, F, G, H* являются серединами сторон соответственно *AB, BC, CD, DA*. В силу задачи 23 четырехугольник *EFGH* – параллелограмм. Кроме того, треугольники *AHE* и *DHG* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $EH = HG$ и, значит, *EFGH* – ромб.



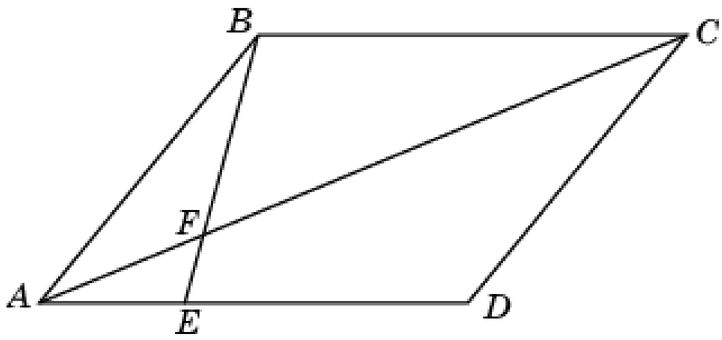
66. Пусть *ABCD* – параллелограмм, *AEF* – треугольник, образованный прямыми *AB*, *AD*, и прямой, содержащей биссектрису внешнего угла *DCG* при вершине *C*. Тогда $\angle DFC = \angle GCF = \angle DCF$ и, следовательно, треугольник *DCF* – равнобедренный, $DC = DF$. Аналогично треугольник *BCE* – равнобедренный, $BC = BE$. Значит, в треугольнике *AEF* $AE = AF = AB + AD$, или $AE+AF=AB+BC+CD+DA$.



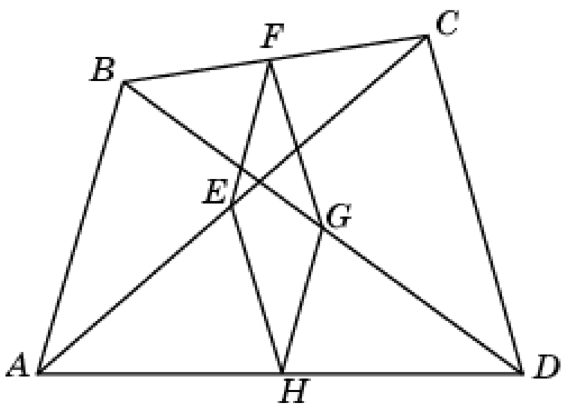
67. В треугольнике ABG EH – средняя линия. Следовательно, $BH = HG$. Аналогично в треугольнике CDH FG – средняя линия. Следовательно, $DG = GH$. Таким образом, прямые AF и CE делят диагональ BD на три равные части.



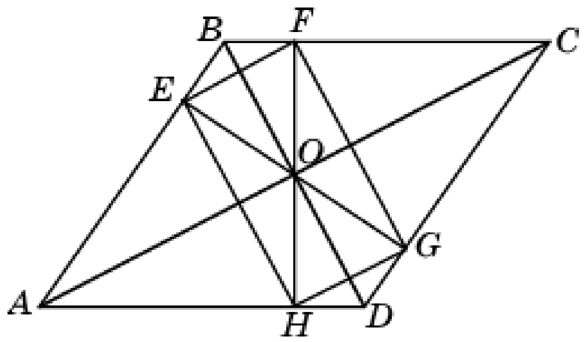
68. Треугольник AFE подобен треугольнику CFB. Следовательно, $\frac{AE}{BC} = \frac{1}{n}$, значит, $AF = \frac{AC}{n+1}$.



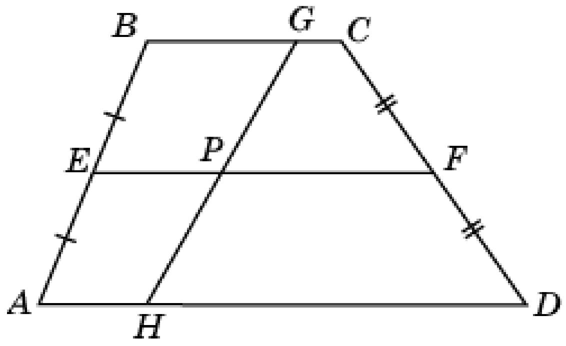
69. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, E, G – середины диагоналей соответственно AC и BD, F, H – середины сторон соответственно BC и AD. Тогда EF – средняя линия треугольника ABC. Следовательно, она параллельна стороне AB и равна ее половине. Аналогично GH параллельна AB и равна ее половине. Значит, $EFGH$ – параллелограмм.



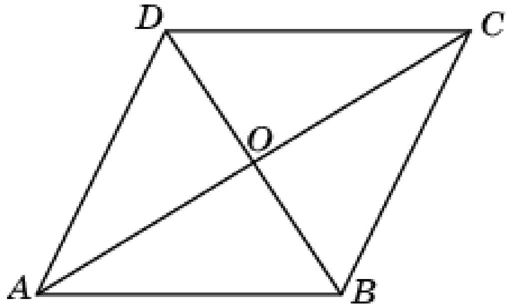
70. Пусть диагонали ромба *ABCD* пересекаются в точке *O*, точки *E*, *F*, *G*, *H* – основания перпендикуляров, опущенных из нее на соответствующие стороны ромба. В силу задачи 18, отрезки *EG* и *FH* равны и в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, *EFGH* – прямоугольник.



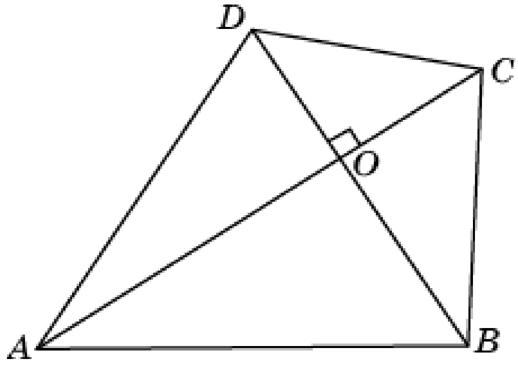
71. Пусть *ABCD* – трапеция, (*AD* || *BC*), точки *G* и *H* принадлежат основаниям трапеции. Четырехугольник *ABGH* – трапеция, *EP* – средняя линия. Следовательно, отрезок *GH* делится средней линией *EF* пополам.



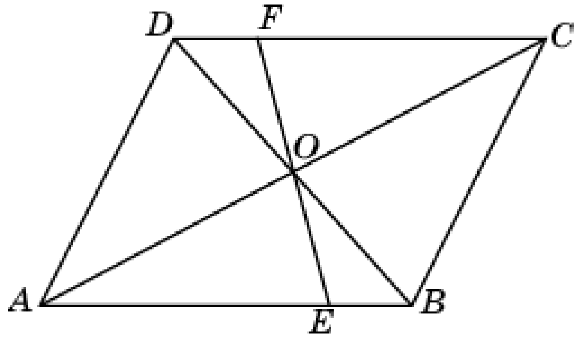
72. Пусть *ABCD* – ромб. Воспользуемся тем, что диагонали *AC* и *BD* ромба перпендикулярны и в точке пересечения *O* делятся пополам. Площадь треугольника *ABC* равна половине произведения *AC* на *OB*. Площадь треугольника *ADC* равна половине произведения *AC* на *OD*. Следовательно, площадь ромба *ABCD* равна половине произведения *AC* на *BD*.



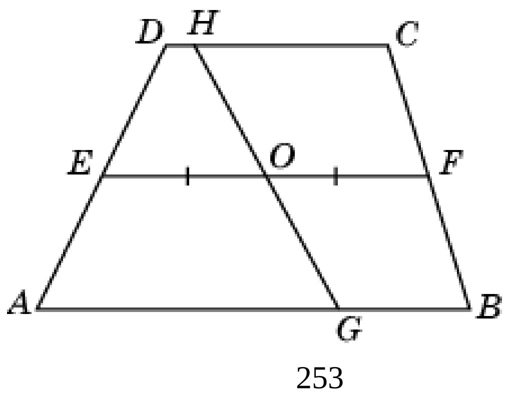
73. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. Рассмотрим диагональ AC, разбивающую четырехугольник на два треугольника. Площадь треугольника ABC равна половине произведения AC на OB. Площадь треугольника ADC равна половине произведения AC на OD. Следовательно, площадь четырехугольника $ABCD$ равна половине произведения AC на BD.



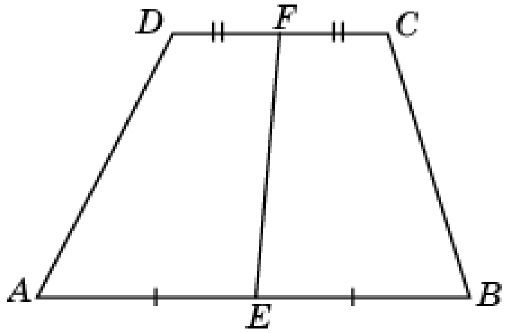
74. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей. Прямая, проходящая через точку O, делит параллелограмм на две трапеции, средние линии которых равны половине стороны параллелограмма, а высоты – высоте параллелограмма. Следовательно, эти трапеции имеют равные площади.



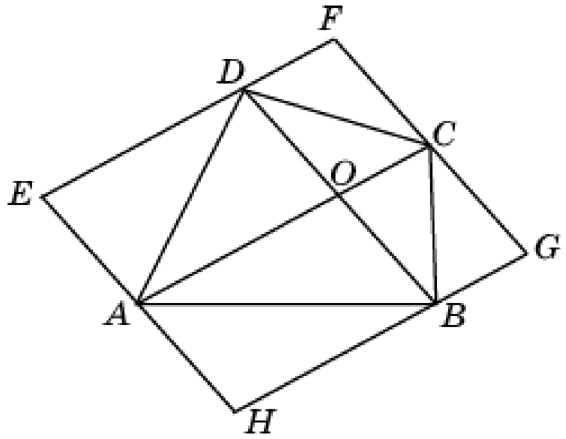
75. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AB \parallel DC$), O – середина средней линии EF. Прямая, проходящая через точку O, делит трапецию на две трапеции, средние линии которых равны половине средней линии данной трапеции, а высоты – высоте трапеции. Следовательно, эти трапеции имеют равные площади.



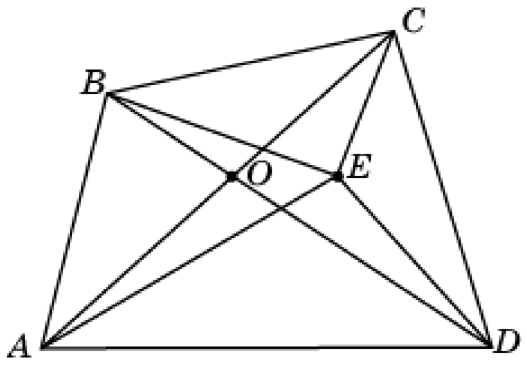
76. Пусть *ABCD* – трапеция (*AB* || *DC*). Прямая, проходящая через середины оснований, делит ее на две трапеции с соответственно равными основаниями и высотами. Следовательно, эти трапеции имеют равные площади.



77. Пусть *ABCD* – выпуклый четырехугольник, *O* – точка пересечения диагоналей, *EFGH* – параллелограмм, образованный прямыми, проведенными через его вершины и параллельные диагоналям. Диагонали *AC* и *BD* разбивают четырехугольник *ABCD* на четыре треугольника, а параллелограмм *EFGH* на четыре параллелограмма, площадь каждого из которых вдвое больше площади соответствующего треугольника. Следовательно, площадь параллелограмма вдвое больше площади данного четырехугольника.

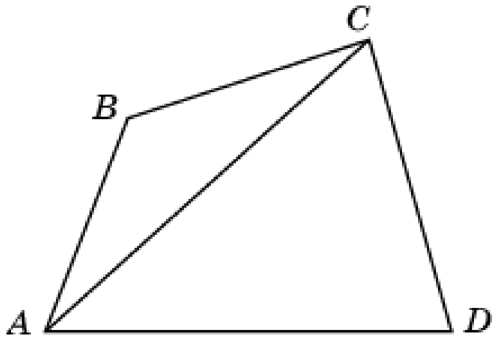


78. Пусть *ABCD* – выпуклый четырехугольник, *O* – точка пересечения его диагоналей, *E* – произвольная точка плоскости. Из неравенства треугольника следует, что наименьшее значение сумма *EA* + *EC* принимает, если точка *E* принадлежит диагонали *AC*. Аналогично наименьшее значение сумма *EB* + *ED* принимает, если точка *E* принадлежит диагонали *BD*. Следовательно, наименьшее значение сумма *EA* + *EB* + *EC* + *ED* принимает, если точка *E* является точкой пересечения диагоналей.

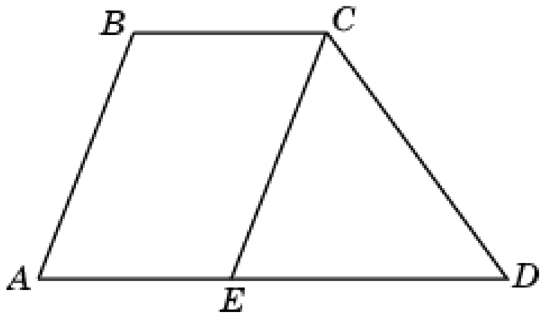

C
B
O
E
A
D

Уровень С

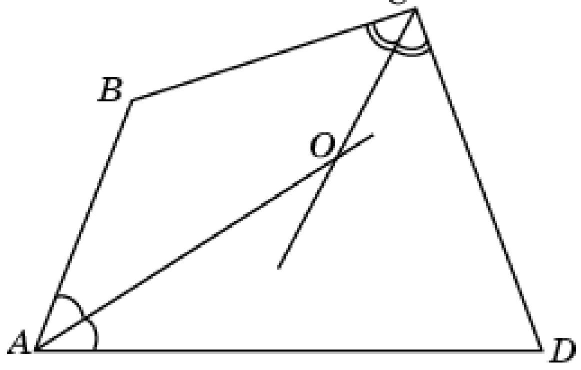
1. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC. Имеем $AB > AC - BC$, $CD > AD - AC$. Складывая эти неравенства, получим $AB + CD > AD - BC$.



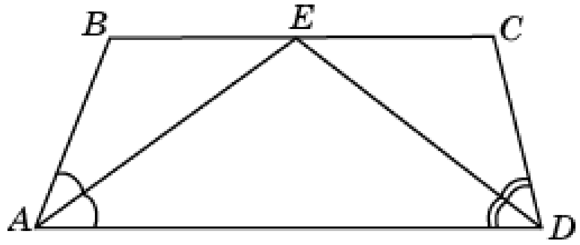
2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведем прямую CE параллельную боковой стороне AB. Тогда $DE > CD - CE$ и, следовательно, $AD - BC > CD - AB$.



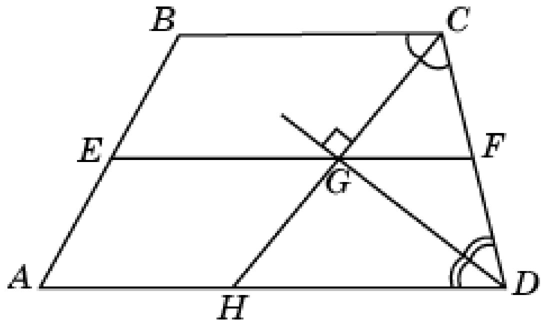
3. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Обозначим x острый угол между биссектрисами AO и CO. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то $\angle A/2 + \angle B + \angle C/2 + 180^\circ - x = 360^\circ$ и $\angle A/2 + \angle B/2 + \angle C/2 + \angle D/2 = 180^\circ$. Откуда $x = \angle B/2 - \angle D/2$.



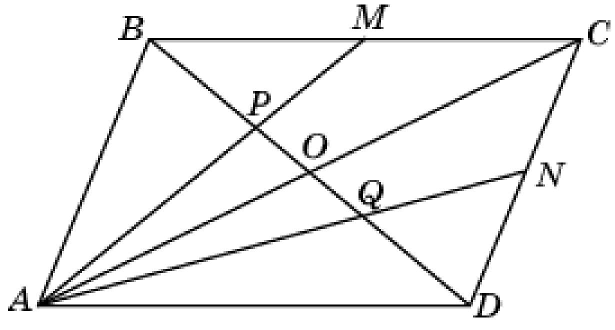
4. Пусть *ABCD* – трапеция (*AD* || *BC*), *AE* и *DE* – биссектрисы углов при основании. Так как углы *DAE* и *BEA* равны как накрест лежащие, то треугольник *ABE* – равнобедренный и, следовательно, *AB* = *BE*. Аналогично *CD* = *CE*. Значит, *BC* = *AB* + *CD*.



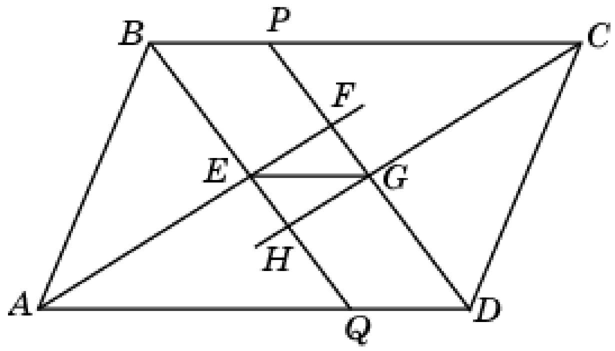
5. Пусть *ABCD* – трапеция (*AD* || *BC*), *CG* и *DG* – биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции. Так как сумма углов *C* и *D* трапеции равна 180°, то сумма углов *CDG* и *DCG* равна 90° и, следовательно, биссектрисы пересекаются под прямым углом. Обозначим *H* точку пересечения биссектрисы *CG* с *AD*. Угол *CHD* равен углу *HCD* и, значит, треугольник *CHD* – равнобедренный. Следовательно, высота *DG* является медианой этого треугольника, т.е. *CG* = *GH*. Из этого следует, что точка *G* принадлежит средней линии трапеции *ABCH* и, значит, средней линии трапеции *ABCD*.



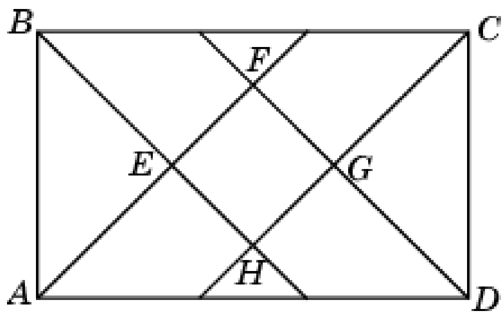
6. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *ABCD*, *P*, *Q* – точки пересечения диагонали *BD* и прямых *AM* и *AN* соответственно. Тогда *P* – точка пересечения медиан *BO* и *AM* треугольника *ABC*. Следовательно, *BP*=2*PO*. Аналогично *DQ*=2*QO*. Кроме того, *BO* = *OD* и, следовательно, *BP* = *PQ* = *QD*.



7. Пусть $EFGH$ – четырехугольник, ограниченный биссектрисами углов параллелограмма $ABCD$. Обозначим P и Q точки пересечения биссектрис углов D и B соответственно со сторонами BC и AD. Так как биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, то четырехугольник $EFGH$ – прямоугольник. В треугольнике ABQ $\angle B = \angle Q$, следовательно, этот треугольник – равнобедренный, $AB = AQ$. Биссектриса AE этого треугольника является медианой и, значит, отрезок EQ равен половине BQ. Аналогично отрезок DG равен половине DP. Из равенства отрезков BQ и DP следует равенство отрезков EQ и DG. Таким образом, четырехугольник $DGEQ$ – параллелограмм и, следовательно, $EG = DQ = AD – AB$.

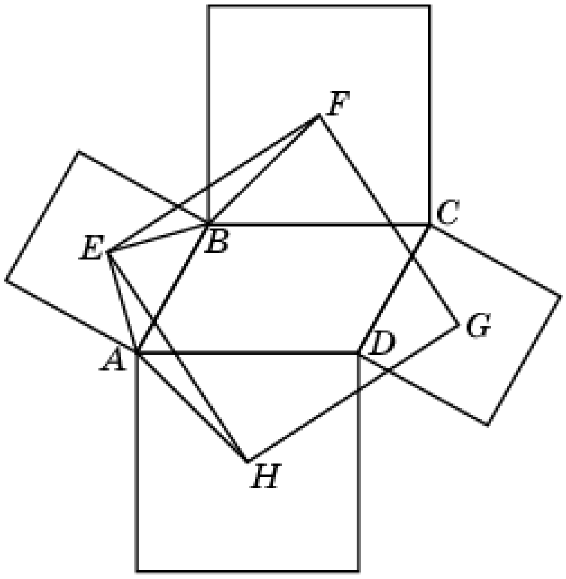


8. Пусть $EFGH$ – четырехугольник, ограниченный биссектрисами углов прямоугольника $ABCD$. Треугольник ADF – равнобедренный прямоугольный с острыми углами, равными 45°. Следовательно, $AF = DF$. Прямоугольные треугольники ABE и CDG равны и, следовательно, $AE = DG$. Вычитая из первого равенства второе, получим равенство $EF = FG$. Аналогично доказывается, что в четырехугольнике $EFGH$ равны другие стороны и углы равны 90°, значит $EFGH$ – квадрат.

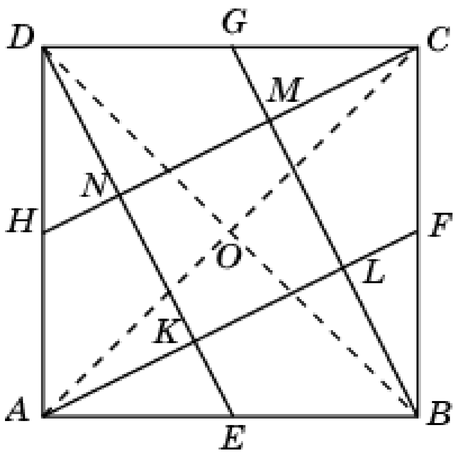


9. Пусть на сторонах параллелограмма $ABCD$ вне его построены квадраты. E, F, G, H – их центры. Треугольники AEH, BEF равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $EH = EF$ и $\angle AEH = \angle BEF$. Из равенства этих углов и того, что угол AEB равен 90°, следует, что $\angle HEF$ = 90°. Аналогично доказывается, что в

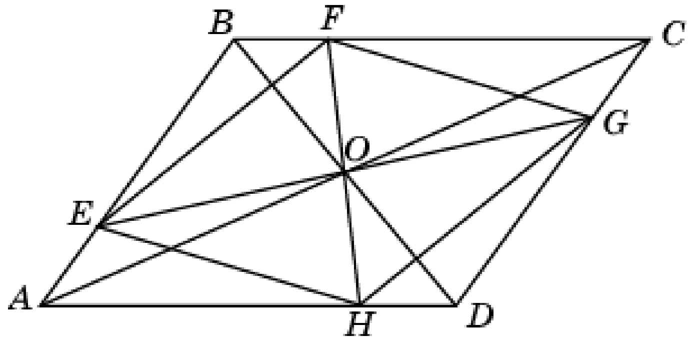
четырехугольнике *EFGH* равны другие соседние стороны и углы между ними равны 90°. Значит, четырехугольник *EFGH* – квадрат.



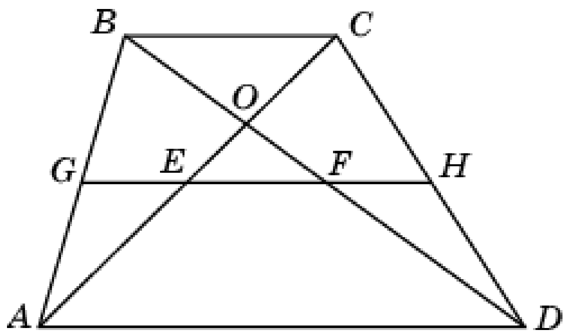
10. При повороте квадрата *ABCD* вокруг точки *O* пересечения его диагоналей на угол 90° вершины перейдут в вершины, середины сторон перейдут в середины сторон. Следовательно, четырехугольник *KLMN* перейдет сам в себя. Значит, у него равны все стороны и все углы, т.е. четырехугольник *KLMN* – квадрат.



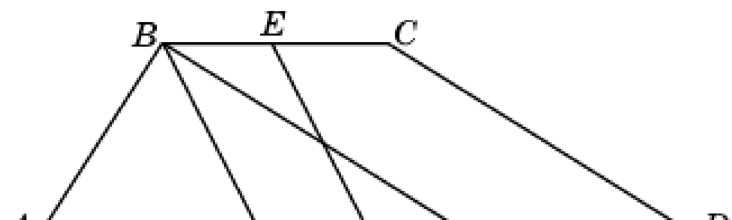
11. Пусть параллелограмм *EFGH* вписан в параллелограмм *ABCD*. Докажем, что диагонали *BD* и *FH* пересекаются в точке *O*, являющейся их серединами. Треугольники *BFE* и *DGH* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, *BF* = *DH*. Треугольники *OBF* и *ODH* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, *OB* = *OD* и *OF* = *OH*. Аналогично доказывается, что диагонали *AC* и *EG* пересекаются в точке, являющейся их серединами. Значит, данные параллелограммы имеют общую точку пересечения диагоналей.



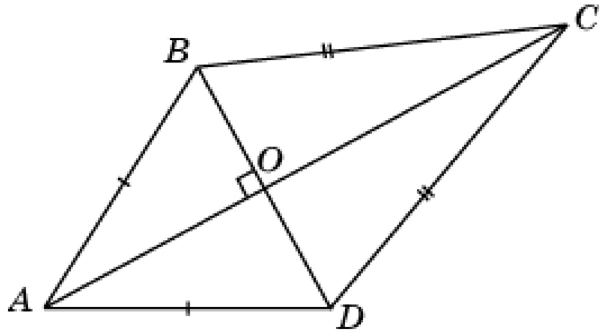
12. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$), EF – отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD. Средняя линия GH трапеции содержит среднюю линию треугольника ABD и, следовательно, проходит через точку F. Аналогично, она проходит через точку E. Тогда $EF = GF - GE = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC)$.



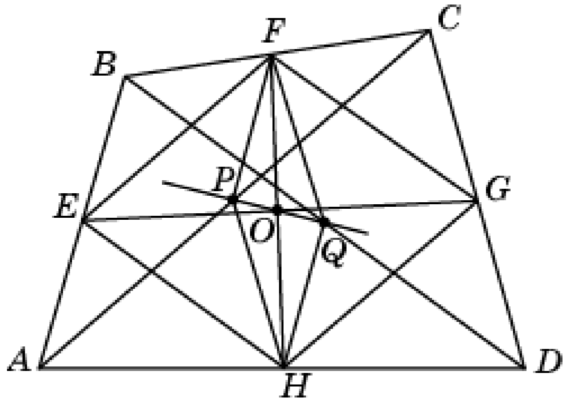
13. Пусть $ABCD$ – трапеция, EF – отрезок, соединяющий середины оснований BC и AD. Сумма углов при основании AD равна 90°. Проведем отрезок BG, параллельный и равный CD, и отрезок BH, параллельный и равный EF. Треугольник ABG – прямоугольный, $AG = AD - BC$. BH – медиана этого треугольника и, следовательно, равна половине гипотенузы AG. Таким образом, $EF = \frac{1}{2}(AD - BC)$.



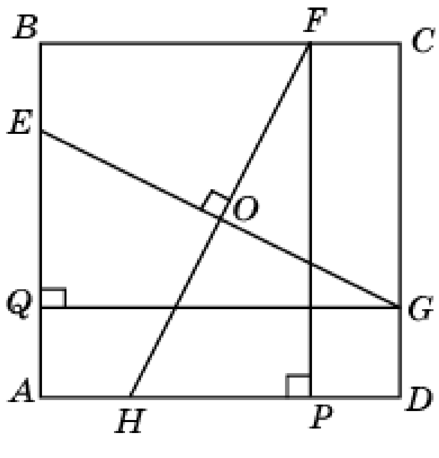
14. Пусть *ABCD* четырехугольник, *AB* = *AD*, *BC* = *DC*. Треугольники *ABC* и *ADC* равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BAO$ = $\angle DAO$. В равнобедренном треугольнике *ABD* *AO* – биссектриса и, следовательно, высота. Значит, диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны.



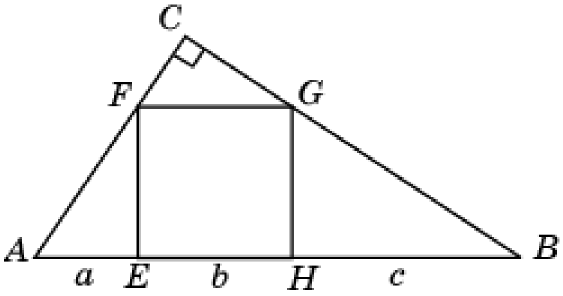
15.Пусть *ABCD* – выпуклый четырехугольник, *P, Q* – середины его диагоналей соответственно *AC* и *BD*, *E, F, G, H* – середины соответствующих сторон. Четырехугольники *EFGH* и *PFQH* – параллелограммы. Следовательно, диагональ *PQ* пересекает *FH* в ее середине и делится в ней пополам.



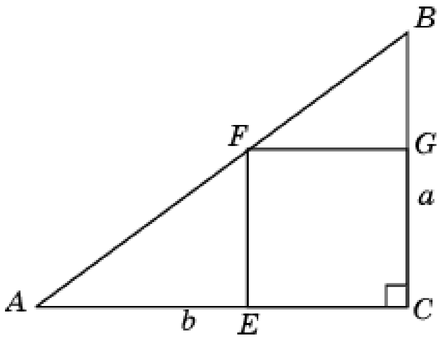
16. Пусть *ABCD* – квадрат, *EG, FH* – две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через его центр *O*. Из точек *F* и *G* опустим перпендикуляры *FP* и *GQ* на противоположные стороны квадрата. Прямоугольные треугольники *EGQ* и *HFP* равны по катету и острому углу. Следовательно, *EG* = *FH*.



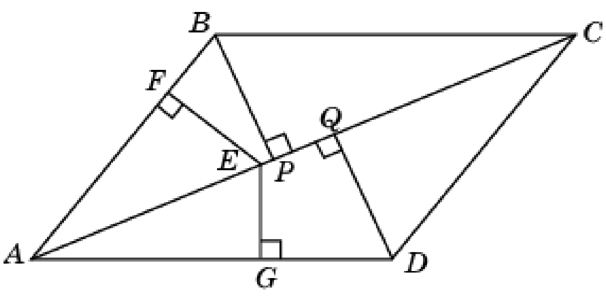
17. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, $EFGH$ – вписанный в него квадрат. $AE = a$, $EH = b$, $HB = c$. Треугольники AFE и GBH подобны по углам. Следовательно, $FE : AE = BH : GH$, т.е. $b : a = c : b$, значит, $b^2=ac$.



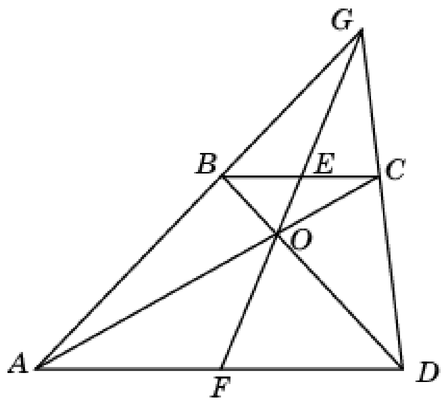
18. Пусть ABC – прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), $EFGC$ – вписанный в него квадрат со стороной c, $AC = b$, $BC = a$. Треугольники AFE и FBG подобны по углам. Следовательно, $FE : AE = BG : FG$, т.е. $c : (b - c) = (a - c) : c$ и, значит, $bc + ac = ab$. Разделив обе части последнего равенства на abc, получим равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.



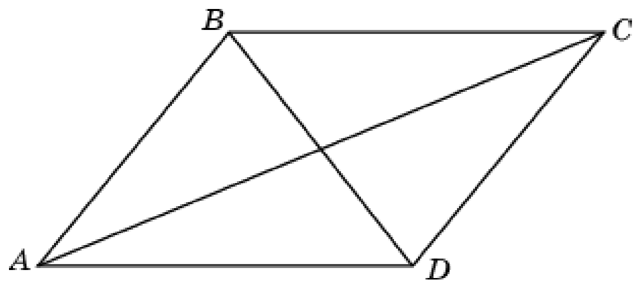
19. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, EF и EG – перпендикуляры, опущенные из точки E диагонали AC на стороны AB и AD соответственно. Опустим перпендикуляры BP и DQ на диагональ AC. Прямоугольные треугольники AFE и APB подобны и, следовательно, $EF : AE = BP : AB$. Аналогично прямоугольные треугольники AGE и AQD подобны и, следовательно, $EG : AE = DQ : AD$. Разделив первое равенство на второе и, учитывая, что $BP = DQ$, получим $EF : EG = AD : AB$, т.е. длины перпендикуляров EF и EG обратно пропорциональны сторонам AB и AD параллелограмма.



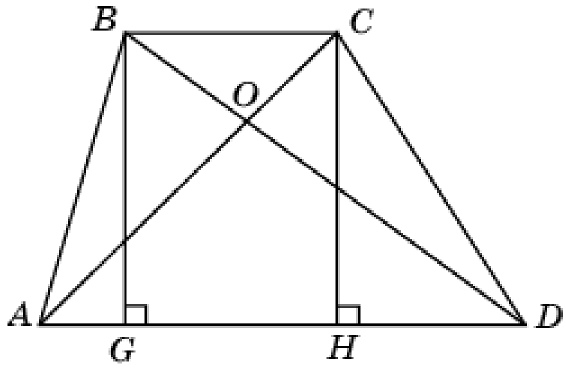
20. Пусть $ABCD$ трапеция ($AD \parallel BC$), G – точка пересечения продолжения боковых сторон AB и CD, E – середина основания BC. Проведем прямую GE и обозначим F ее точку пересечения с AD. Из подобия треугольников AGF и BGE, DGF и CGE, AGD и BGC следует, что $AF : BE = AG : BG = DG : CG = DF : CE$. Из этих равенств и равенства $BE = CE$ получаем равенство $AF = FD$, т.е. точка F является серединой AD. Аналогично доказывается, что прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей и точку E, проходит через точку F и, следовательно, точки G, E, O, F принадлежат одной прямой.



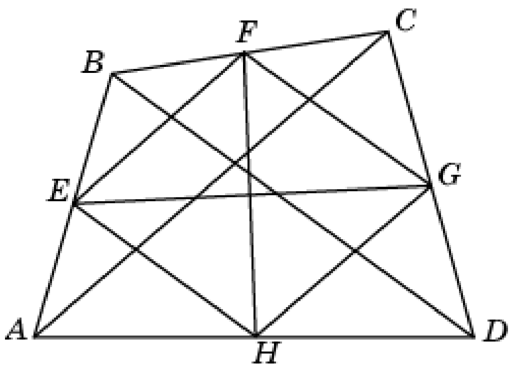
21. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, AC, BD – диагонали. По теореме косинусов, примененной к треугольнику ABD, имеем $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$. По теореме косинусов, примененной к треугольнику ABC, имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$. Складывая эти два равенства, и учитывая, что $\cos B = -\cos A$, получим $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.



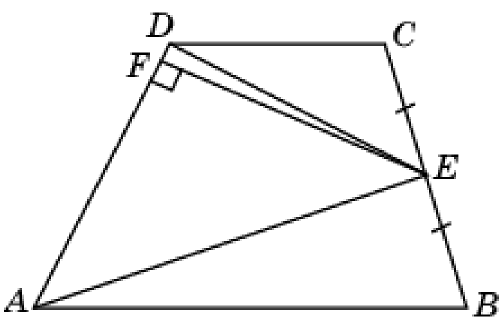
22. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$), AC, BD – диагонали. Опустим перпендикуляры BG и CH на основание AD. По теореме косинусов, примененной к треугольнику ABC, имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$. По теореме косинусов, примененной к треугольнику BCD, имеем $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C$. Складывая эти неравенства, получим $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B - 2BC \cdot CD \cdot \cos C$. Вынося в последних трех слагаемых $2BC$ за скобки и учитывая, что $-AB \cdot \cos B = AG$, $-CD \cdot \cos C = HD$, получим $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC \cdot AD$.



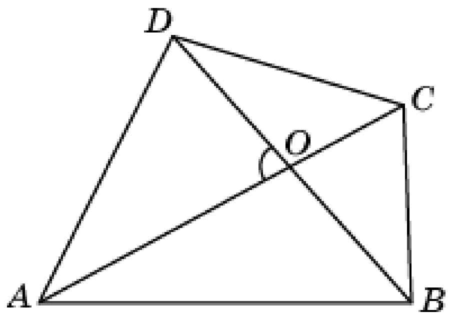
23. Пусть $ABCD$ – четырехугольник, E, F, G, H – середины его сторон. Тогда $EFGH$ – параллелограмм, и сумма квадратов его диагоналей EG и FH равна сумме квадратов его сторон. Учитывая, что стороны этого параллелограмма вдвое меньше диагоналей AC и BD четырехугольника, получаем, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.



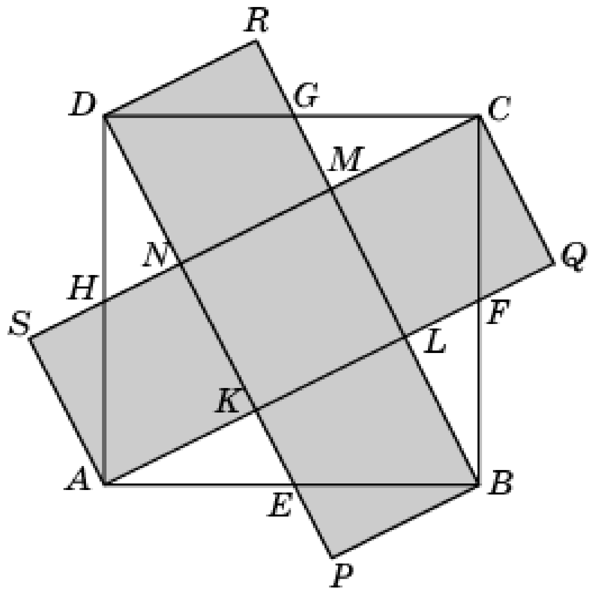
24. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AB \parallel CD$), E – середина боковой стороны BC, EF – перпендикуляр, опущенный на боковую сторону AD. Проведем отрезки AE и DE. Обозначим h высоту трапеции. Тогда площадь треугольника ABE равна произведению половины стороны AB на половину высоты h. Площадь треугольника CDE равна произведению половины стороны CD на половину высоты h. Следовательно, сумма площадей треугольников ABE и CDE равна половине площади трапеции. Значит, произведение AD и FE равно площади трапеции $ABCD$.



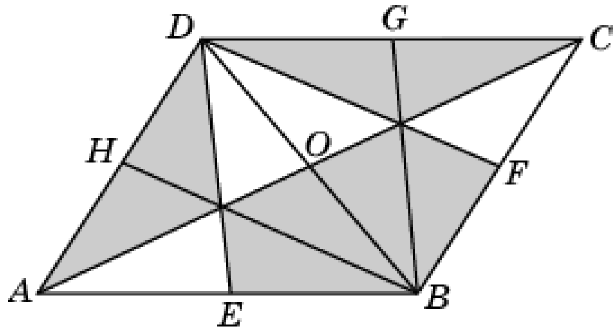
25. Пусть *ABCD* – выпуклый четырехугольник, диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Площадь треугольника *AOD* равна половине произведения *AO* и *DO* на синус угла *AOD*. Площадь треугольника *COD* равна половине произведения *CO* и *DO* на синус угла *COD*. Учитывая, что синусы углов *AOD* и *COD* равны, получаем, что площадь треугольника *ACD* равна половине произведения *AC* и *OD* на синус угла между ними. Аналогично площадь треугольника *ABC* равна половине произведения *AC* и *OB* на синус угла между ними. Следовательно, площадь четырехугольника *ABCD* равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.



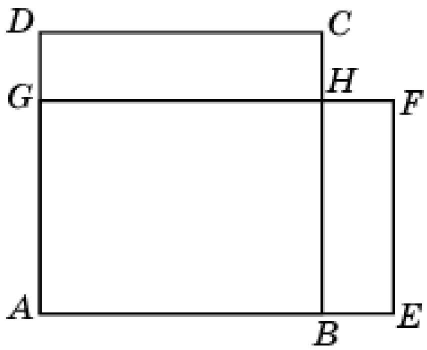
26. Прямоугольные треугольники *AKE* и *BPE, BLF* и *CQF, CMG* и *DRG, DNH* и *ASH* равны. Заштрихованный многоугольник (греческий крест) равновелик с квадратом *ABCD* и состоит из пяти квадратов, равных квадрату *KLMN*. Следовательно, площадь квадрата *KLMN* равна одной пятой площади квадрата *ABCD*.



27.Пусть *ABCD* – параллелограмм, *G* и *H* – середины сторон соответственно *CD* и *DA, O* – точка пересечения его диагоналей. В треугольнике *ABD* отрезки *AO*, *BH*, *DE* – медианы. Так как медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников, то площадь закрашенной части треугольника *ABD* в два раза больше незакрашенной. Аналогично, площадь закрашенной части треугольника *BCD* в два раза больше незакрашенной. Значит, площадь закрашенной части параллелограмма *ABCD* в два раза больше незакрашенной.



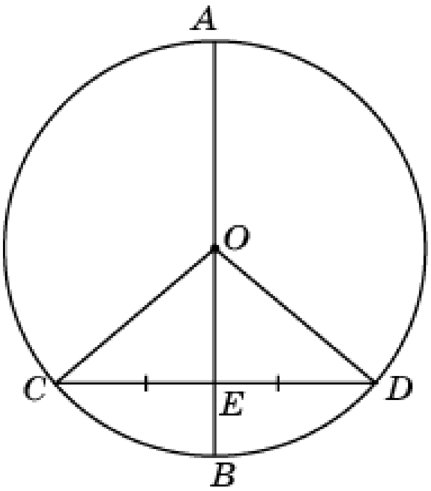
28. Пусть *ABCD* – квадрат, *AEFG* – прямоугольник, *AE* > *AG*. Из равенства периметров квадрата и прямоугольника следует, что *BE* = *DG*. Откуда площадь прямоугольника *GHCD* больше площади прямоугольника *BEFH*. Квадрат *ABCD* составлен из прямоугольника *ABHG* и прямоугольника *GHCD*. Прямоугольник *AEFG* составлен из прямоугольника *ABHG* и прямоугольника *BEFH*. Следовательно, площадь квадрата *ABCD* больше площади прямоугольника *AEFG*.



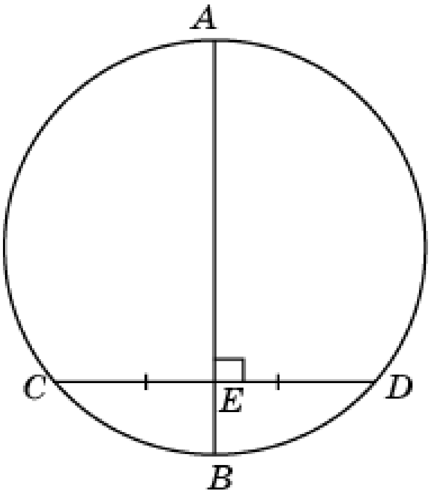
5. Окружность и круг
Уровень В

26. Пусть AB – диаметр окружности с центром O, проходящий через середину E хорды CD, отличной от диаметра. Докажем, что прямые AB и CD перпендикулярны.

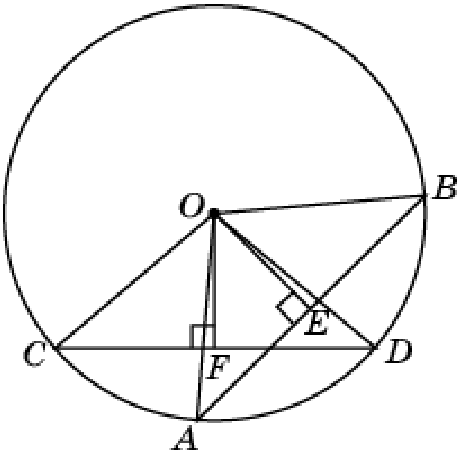
Действительно, в равнобедренном треугольнике OCD отрезок OE является медианой и, следовательно, высотой. Значит, AB перпендикулярна CD.



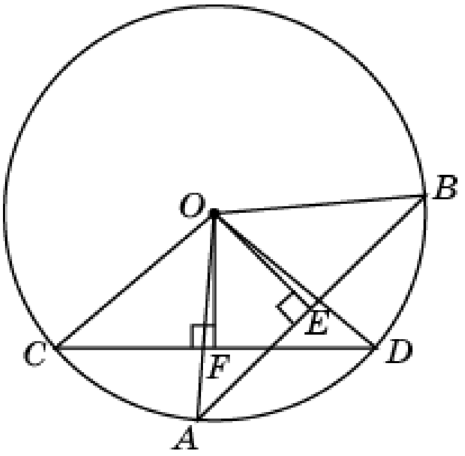
27. Пусть хорды AB и CD перпендикулярны, CD в точке пересечения E делится пополам и не является диаметром. Докажем, что AB является диаметром. Через точку E проведем диаметр. По предыдущей задаче, он будет перпендикулярен CD. Поскольку через точку E проходит единственная прямая, перпендикулярная CD, то этот диаметр совпадает с AB.



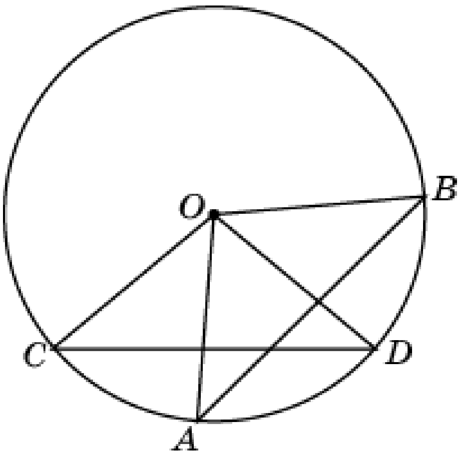
28. Пусть AB и CD – равные хорды окружности с центром O. OE, OF – перпендикуляры, опущенные соответственно на AB и CD. Докажем, что $OE = OF$. Действительно, треугольники OAB и OCD – равнобедренные и равны по трем сторонам. Следовательно, их соответствующие высоты OE и OF также равны.



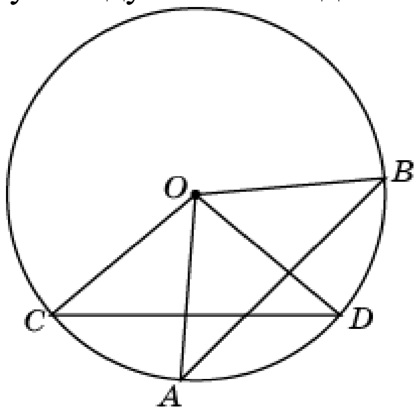
29. Пусть хорды *AB* и *CD* окружности с центром *O* равноудалены от ее центра *O* (*OE* = *OF*). Докажем, что они равны. Действительно, прямоугольные треугольники *OAE* и *OCF* равны по гипотенузе и катету. Следовательно, *AE* = *CF*. Аналогично, *BE* = *DF*. Складывая эти равенства, получим *AB* = *CD*.



30. Пусть *AB* и *CD* – равные хорды окружности с центром *O*. Треугольники *OAB* и *OCD* равны по трем сторонам. Следовательно, центральные углы *AOB* и *COD* равны. Так как дуга окружности измеряется центральным углом, то из равенства центральных углов следует равенство соответствующих дуг.

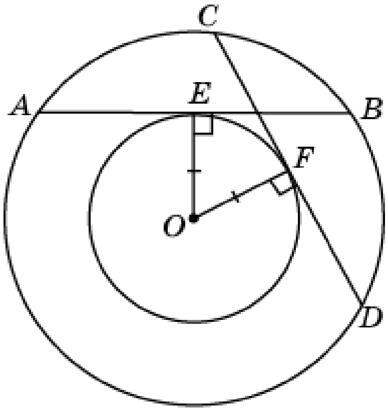


31. Пусть AB и CD – хорды окружности с центром O, стягивающие равные дуги. Так как дуга окружности измеряется центральным углом, то из равенства дуг следует равенство соответствующих центральных углов. Треугольники OAB и OCD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, хорды AB и CD

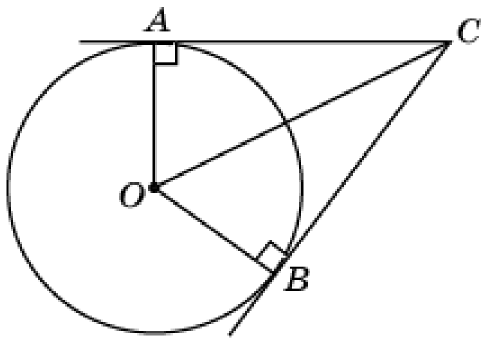


равны.

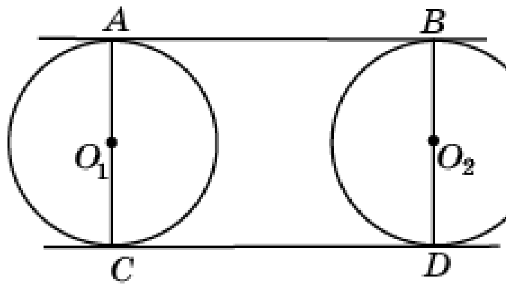
32. Пусть AB и CD – хорды окружности, касающиеся концентрической с ней меньшей окружности. Докажем, что $AB = CD$. Проведем отрезки OE и OF, соединяющие центр окружности с точками касания. Они будут равны и перпендикулярны соответствующим хордам. В силу задачи 4, хорды AB и CD будут равны.



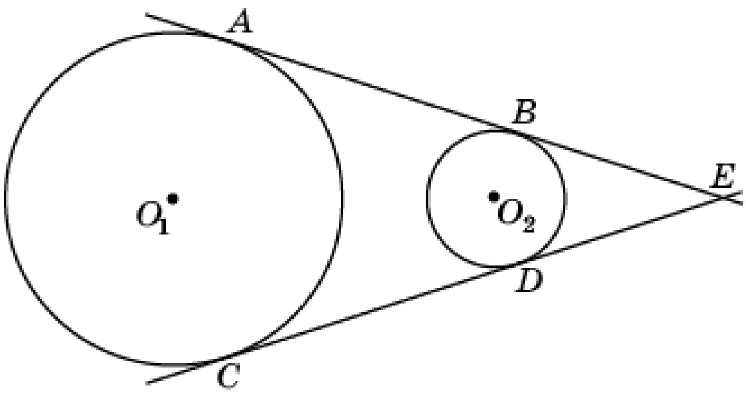
33. Пусть CA и CB – отрезки касательных, проведенных к окружности с центром в точке O. Докажем, что отрезки CA и CB равны. Действительно, прямоугольные треугольники OAC и OBC равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $CA = CB$.



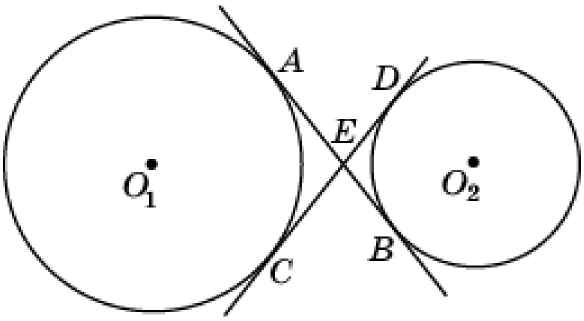
34. Пусть AB и CD – отрезки общих внешних касательных к двум окружностям с центрами O_1 и O_2. Докажем, что $AB = CD$. Возможны два случая. Если окружности одинакового радиуса, то $ABDC$ – прямоугольник и, следовательно, $AB = CD$.



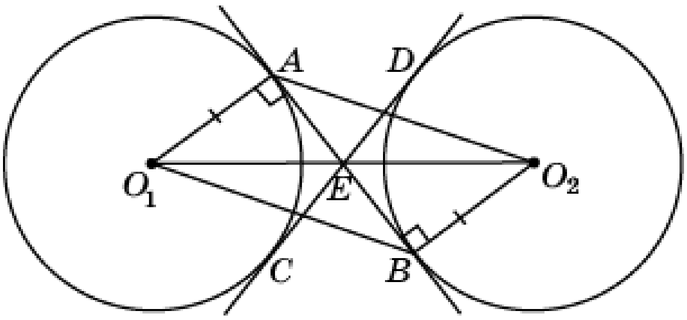
Если окружности разных радиусов, то касательные пересекаются в некоторой точке E. В силу предыдущей задачи, $AE = CE$ и $BE = DE$. Следовательно, $AB = CD$.



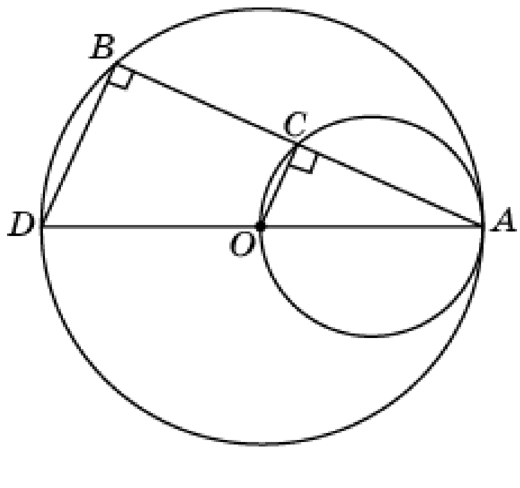
35. Пусть AB и CD – отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям. Докажем, что $AB = CD$. Обозначим E точку пересечения AB и CD. Тогда в силу задачи 8 $EA = EC$ и $EB = ED$. Складывая эти равенства, получим равенство $AB = CD$.



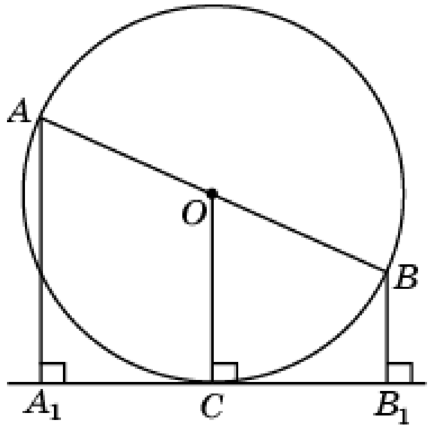
36. Пусть AB и CD – отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям с центрами O_1 и O_2 одинакового радиуса. Четырехугольник O_1AO_2B – параллелограмм и, следовательно, середина AB совпадает с серединой O_1O_2. Аналогично, середина CD совпадает с серединой O_1O_2. Следовательно, точка пересечения отрезков AB и CD является их серединой.



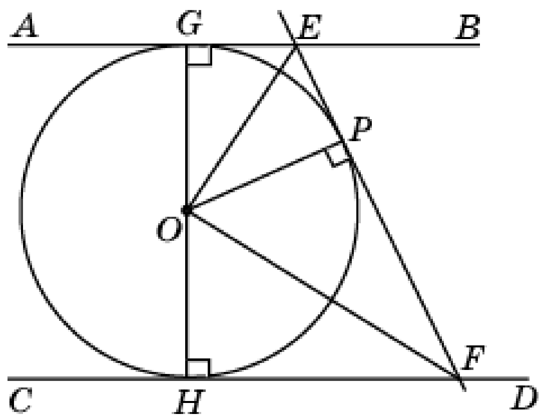
37. Пусть две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. AB – хорда большей окружности, проходящая через точку касания A и пересекающая меньшую окружность в точке C. Докажем, что $AC = BC$. Проведем диаметр AD. В треугольнике ABD $OA = OD$, OC параллельна DB. Следовательно, $AC = BC$.



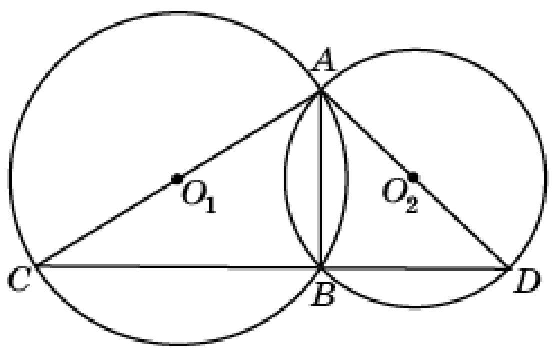
38. Отрезок OC, соединяющий центр окружности и точку касания, перпендикулярен касательной. Следовательно, OC – средняя линия трапеции ABB_1A_1, значит $A_1C = CB_1$.



39. Пусть AB и CD – две параллельные касательные к окружности с центром O. Третья касательная пересекает первые две в точках E и F соответственно. Докажем, что $\angle EOF = 90^o$. Соединим центр O окружности с точками касания G, H, P. Прямоугольные треугольники OGE и OPE равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle GOE = \angle POE$. Аналогично $\angle HOF = \angle POF$. Учитывая, что сумма всех четырех углов равна 180^o, получаем, что угол EOF равен 90^o.

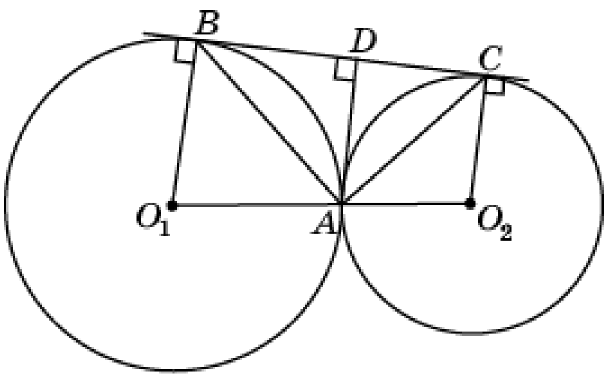


40. Пусть из точки A пересечения двух окружностей проведены их диаметры AC и AD, B – вторая точка пересечения окружностей. Докажем, что точки B, C, D принадлежат одной прямой. Проведем хорду AB. Угол ABC опирается на диаметр окружности, следовательно, равен 90^o. Аналогично угол ABD равен 90^o.

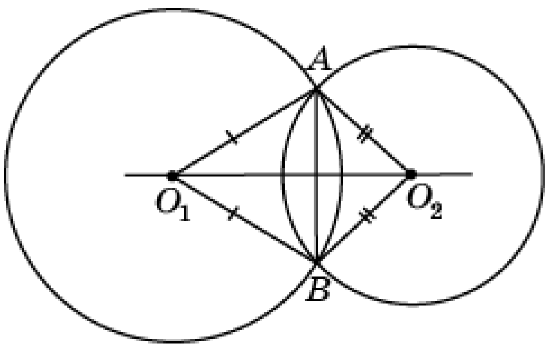


Следовательно, угол CBD – развернутый, т.е. точки B, C, D принадлежат одной прямой.

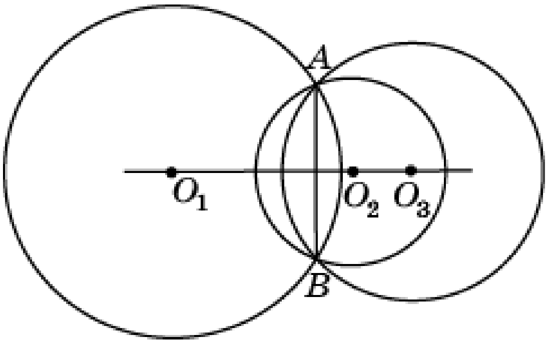
41. Из точки A опустим перпендикуляр AD на BC. $\angle BAD = \angle ABO_1$ как накрест лежащие углы, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1$ как углы при основании равнобедренного треугольника AO_1B. Значит, $\angle BAD = \angle BAO_1$. Аналогично $\angle CAD = \angle CAO_2$. Учитывая, что сумма этих четырех углов равна 180°, получаем, что угол BAC равен 90°.



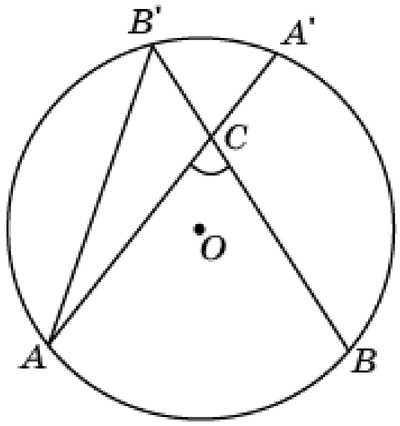
42. Пусть две окружности имеют общую хорду AB. Докажем, что прямая, соединяющая их центры O_1 и O_2, перпендикулярна хорде AB и делит ее пополам. Действительно, точка O_1 равноудалена от концов хорды AB. Точка O_2 также равноудалена от концов хорды AB. Следовательно, O_1O_2 – серединный перпендикуляр к отрезку AB.



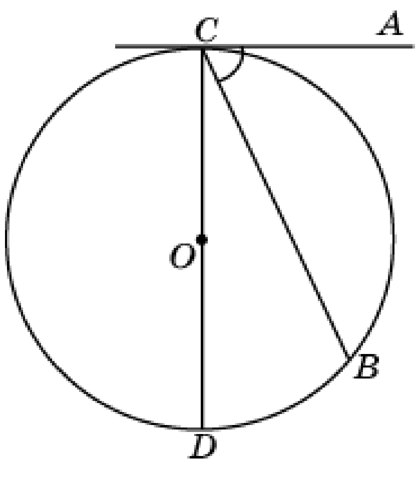
43. Пусть три окружности имеют общую хорду AB. Тогда в силу предыдущей задачи их центры расположены на серединном перпендикуляре к отрезку AB, т.е. расположены на одной прямой.



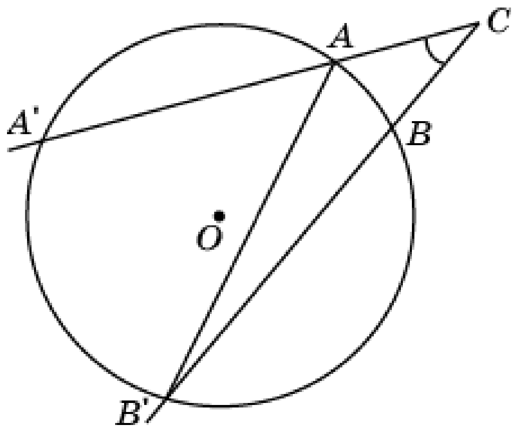
44. Пусть *ACB* – угол с вершиной *C* внутри окружности, *A'CB'* – вертикальный с ним угол. Проведем отрезок *AB'*. Угол *ACB* является внешним углом треугольника *ACB'* и, следовательно, равен сумме углов *AB'B* и *A'AB'*. Первый из них измеряется половиной дуги *AB*, а второй – половиной дуги *A'B'*. Значит, угол *ACB* измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.



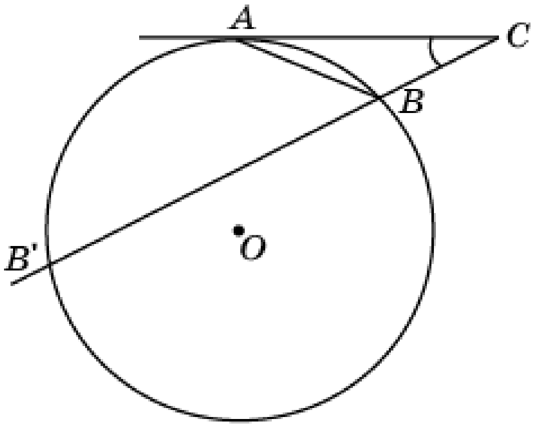
45. Пусть *AC* – касательная к окружности с центром в точке *O* (*C* – точка касания), *CB* – хорда. Проведем диаметр *CD*. Угол *ACD* равен 90°, следовательно, измеряется половиной дуги *CD*, равной 180°. Угол *BCD* вписан в окружность, следовательно, измеряется половиной дуги *BD*. Значит, угол *ACB*, равный разности углов *ACD* и *BCD*, измеряется половиной дуги *BC*, заключенной внутри этого угла.



46. Пусть *ACB* – угол с вершиной *C* вне окружности, стороны которого пересекают окружность в точках *A*, *A’* и *B*, *B’* соответственно. Проведем отрезок *AB’*. Угол *A’AB’* является внешним углом треугольника *AB’C* и, следовательно, угол *ACB* равен разности углов *A’AB’* и *AB’B*. Первый из них измеряется половиной дуги *A’B’*, второй – половиной дуги *AB*. Значит, угол *A’CB’* измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри данного угла.

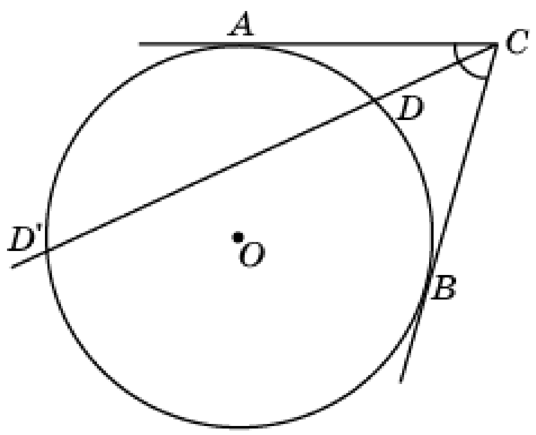


47. Пусть *CA* – касательная к окружности (*A* – точка касания), *CB’* – секущая, пересекающая окружность в точках *B* и *B’*. Проведем отрезок *AB*. Тогда угол *ACB* равен разности углов *ABB’* и *CAB*. Первый из них измеряется половиной дуги *AB’*, второй (в силу задачи 20) – половиной дуги *AB*. Значит, угол *ACB’* измеряется полуразностью дуг *AB’* и *AB*, заключенных внутри данного угла.

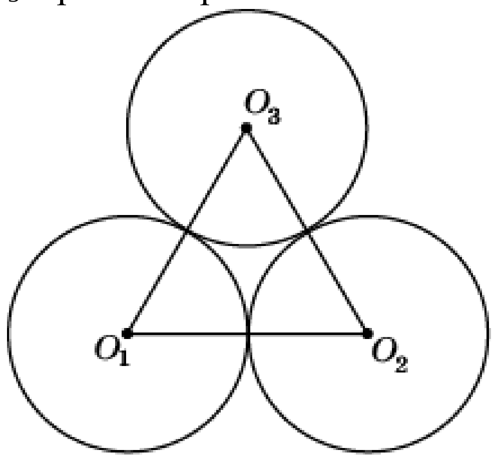


48. Пусть *CA* и *CB* касательные к окружности (*A* и *B* – точки касания). Через точку *C* проведем секущую, пересекающую окружность в точках *D* и *D’*. Тогда в силу предыдущей задачи угол

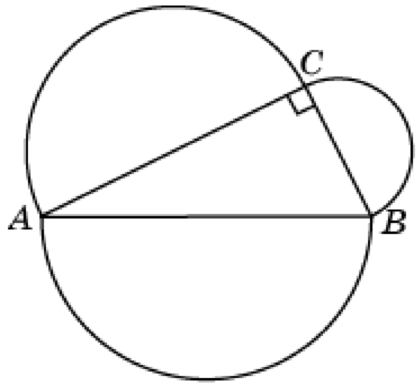
ACD' измеряется полуразностью дуг AD' и AD, угол BCD' измеряется полуразностью дуг BD' и BD. Следовательно, угол ACB измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных между его сторонами.



49. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей одинакового радиуса, попарно касающихся друг друга. Так как расстояние между центрами любых двух из этих окружностей равно удвоенному радиусу, треугольник $O_1O_2O_3$ – равносторонний.

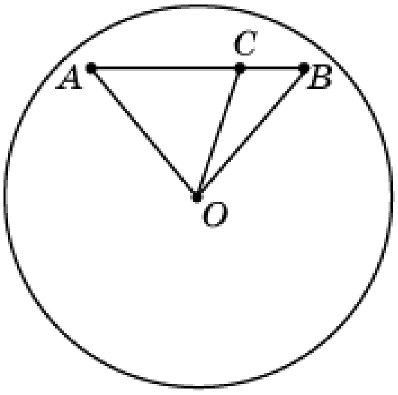


50. Пусть ABC – прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^o$), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Площади полукругов, построенных на сторонах этого треугольника соответственно равны $\frac{\pi a^2}{8}$, $\frac{\pi b^2}{8}$, $\frac{\pi c^2}{8}$. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

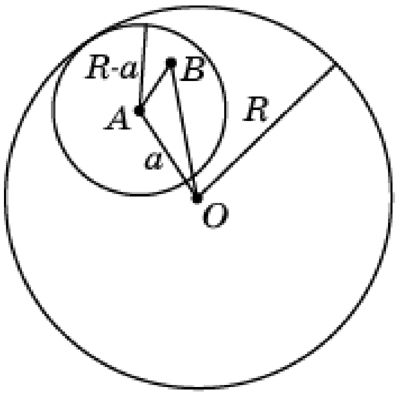

C
A
B

Уровень C

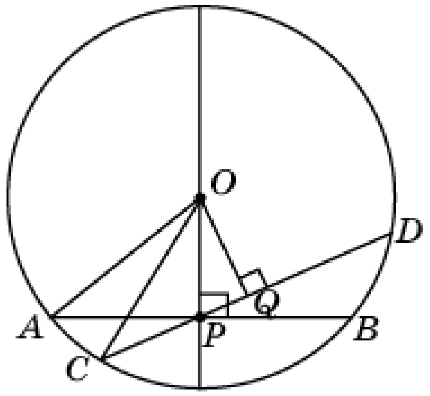
17. Пусть точки A и B принадлежат кругу с центром в точке O. Возьмем произвольную внутреннюю точку C отрезка AB. В силу задачи C13 параграфа 3, OC меньше наибольшего из отрезков OA, OB и, следовательно, OC меньше радиуса окружности, т.е. C – внутренняя точка круга.



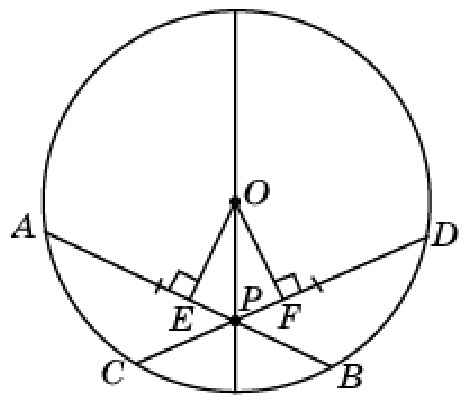
18. Пусть B – произвольная точка круга с центром A и радиусом $R - a$. Тогда $OB \leq OA + AB \leq a + (R - a) = R$. Следовательно, точка B принадлежит кругу с центром O и радиусом R.



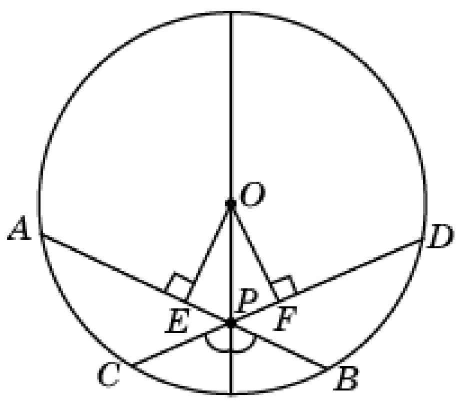
19. Пусть AB – хорда окружности с центром O, проходящая через точку P и перпендикулярная диаметру. CD – другая хорда, проходящая через точку P. Докажем, что $AB < CD$. Опустим перпендикуляр OQ на хорду CD. В прямоугольных треугольниках OAP и OCQ гипотенузы равны, а катет OP больше катета OQ. Из теоремы Пифагора следует, что катет AP меньше катета CQ. Следовательно, $AB < CD$.



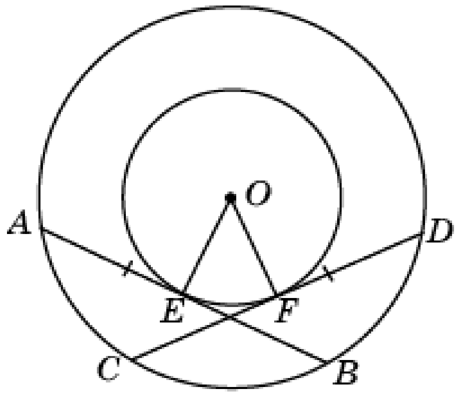
20. Пусть AB и CD – две равные хорды окружности, проходящие через точку P, отличную от ее центра O. Опустим перпендикуляры соответственно OE и OF на эти хорды. Из равенства хорд следует равенство этих перпендикуляров. Прямоугольные треугольники OPE и OPF равны по гипотенузе и катету. Следовательно, углы OPE и OPF равны, т.е. данные хорды одинаково наклонены к диаметру OP.



21. Пусть AB и CD – две хорды окружности, проходящие через точку P, отличную от ее центра O и одинаково наклоненные к диаметру OP. Опустим перпендикуляры соответственно OE и OF на эти хорды. Прямоугольные треугольники OPE и OPF равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $OE = OF$. Из равенства расстояний от центра окружности до хорд следует равенство самих хорд (см. задачу В4).

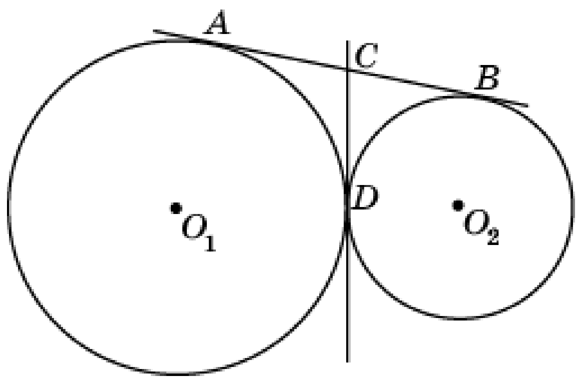


22. Из равенства хорд следует равенство расстояний от центра *O* окружности до этих хорд. Следовательно, все такие хорды касаются окружности с центром в точке *O* и радиусом, равным расстоянию от центра *O* до этих хорд (см. задачу В3).



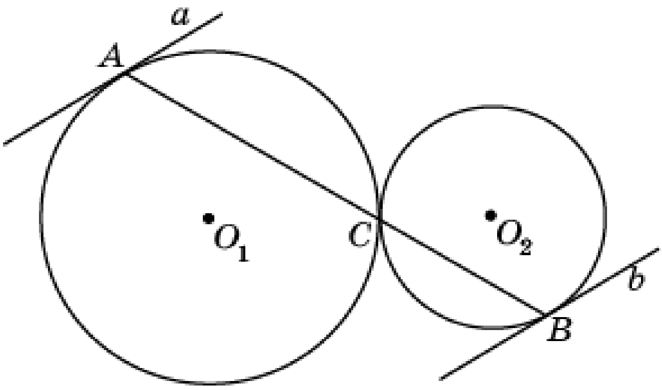
23. Пусть две окружности касаются внешним образом. Через точку касания *C* проведена секущая *AB*. Докажем, что пары дуг, расположенные по разные стороны секущей и лежащие в разных окружностях, имеют одинаковые градусные величины. Проведем общую касательную *EF* к данным окружностям. В силу задачи В20 угол *ACE* измеряется половиной дуги *AC*, угол *BCF* измеряется половиной души *BC*. Но углы *ACE* и *BCF* равны как вертикальные. Следовательно, равны и градусные величины дуг *ACE* и *BCF*.

24. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке *D*. *AB* – общая внешняя касательная (*A*, *B* – точки касания). Через точку

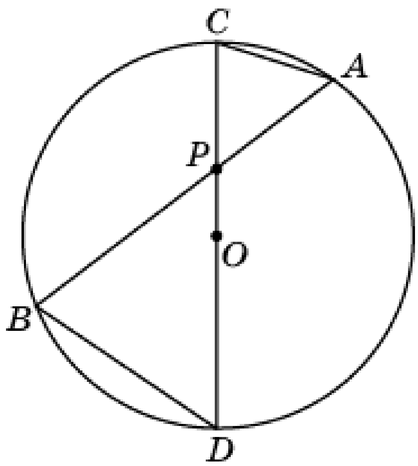


D проведена общая касательная, пересекающая AB в точке C. Докажем, что $AC = BC$. Действительно, $AC = CD$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Аналогично, $CB = CD$. Следовательно, $AC = BC$.

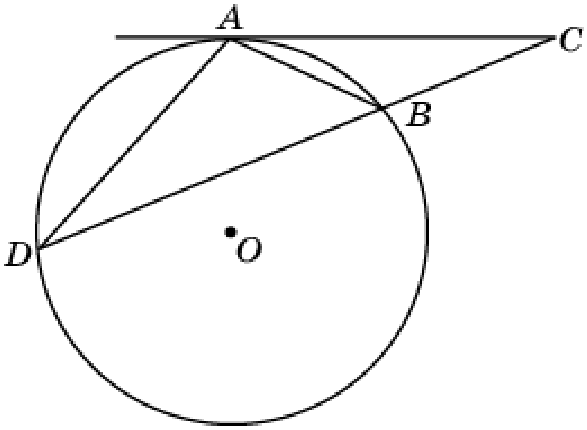
25. Пусть две окружности касаются внешним образом в точке C, через которую проведена секущая. Через точки A и B пересечения этой секущей с окружностями проведены касательные соответственно a и b. Докажем, что a и b параллельны. Действительно, угол между касательной a и секущей AB измеряется половиной дуги AC (см. задачу В20). Угол между касательной b и секущей AB измеряется половиной дуги BC. В силу задачи 7 градусные величины этих дуг равны. Следовательно, равны накрест лежащие углы. Значит, прямые a и b параллельны.



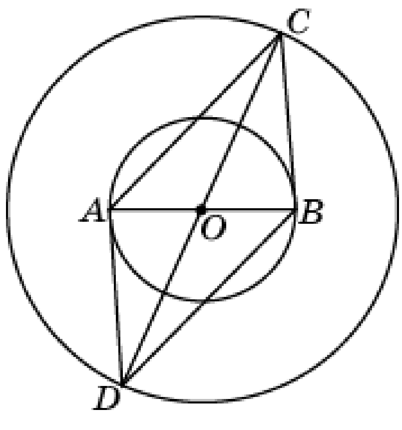
26. Пусть через внутреннюю точку P круга проведены хорда AB и диаметр CD. Докажем, что произведение отрезков AP и BP равно произведению отрезков CP и DP. Действительно, треугольники PAC и PDB подобны по углам. Следовательно, $\frac{AP}{CP}=\frac{DP}{BP}$, значит, $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.



27. Пусть из точки C вне окружности проведена секущая, пересекающая окружность в точках B и D, и касательная CA, где A – точка касания. Докажем, что $CB \cdot CD = CA^2$. Действительно, треугольники CAB и CDA подобны по углам. Следовательно, $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CD}$, значит, $CB \cdot CD = AC^2$.

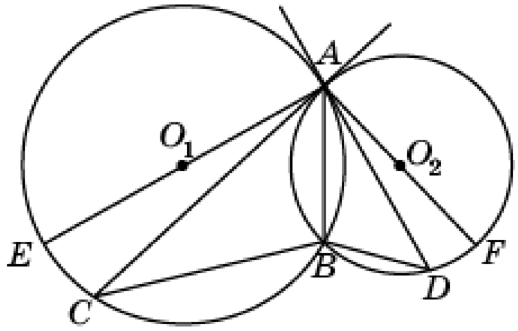


28. Пусть O – центр двух концентрических окружностей. C – точка на одной из них, AB – диаметр другой. Докажем, что $CA^2 + CB^2$ есть величина постоянная, независящая от выбора точки C и диаметра AB. Проведем диаметр CD. Четырехугольник $CADB$ – параллелограмм, диагоналями которого являются диаметры данных окружностей. Воспользуемся тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон (см. задачу 21 параграфа 4). Поэтому сумма $CA^2 + CB^2$ будет равна половине суммы квадратов этих диаметров и, следовательно, постоянна.

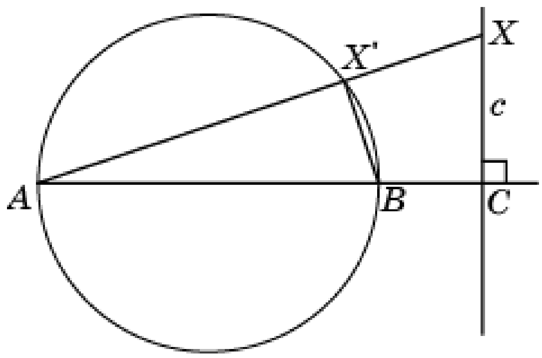


29. Пусть две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены касательные к каждой окружности. Докажем, что отрезки AC и AD этих касательных,

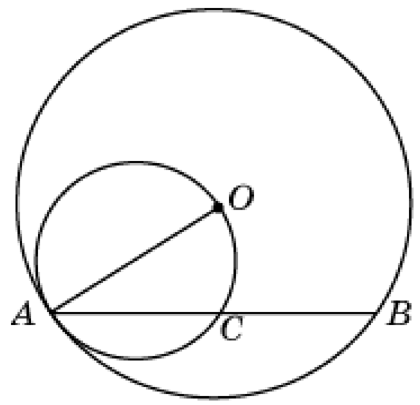
лежащие внутри окружностей, видны из другой точки пересечения *B* под равными углами. Проведем соответствующие диаметры *AE* и *AF*. Угол *CAE* равен углу *DAF* как острые углы с перпендикулярными сторонами. Следовательно, градусные величины дуг *AEC* и *AFD* равны, значит, угол *ABC* равен углу *ABD*.



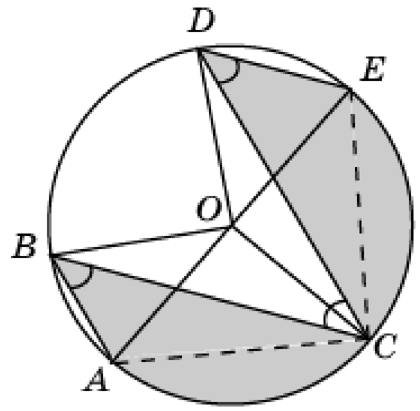
30. Прямоугольные треугольники *ABX’* и *AXC* подобны по углам. Следовательно, *AB* : *AX’* = *AX* : *AC* и, значит, *AX*·*AX’* = *AB*·*AC*, т.е. постоянно и не зависит от выбора точки *X* на прямой *c*.



31. Пусть в круге с центром *O* проведена хорда *AB*. На радиусе *OA*, как на диаметре, описана окружность. Гомотетия с центром *A* и коэффициентом 2 переводит меньший круг в больший и меньший сегмент в больший. Следовательно, площади двух сегментов, отсекаемых хордой *AB* от обоих кругов, относятся как 4:1.



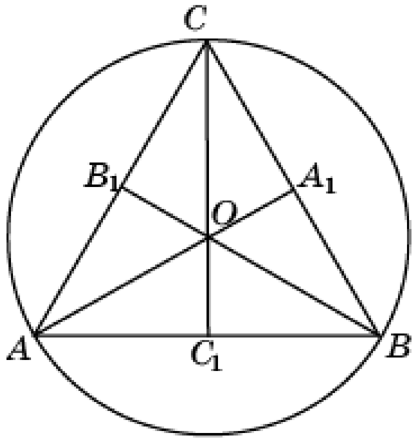
32. Дуги AC, CE и BD равны 90°. Значит, дуги AB и DE равны 45°. Следовательно, BO параллельна AC, поэтому треугольник ABC равновелик треугольнику AOC. Аналогично треугольник CDE равновелик треугольнику COE. Таким образом, закрашенная фигура равновелика полукругу с диаметром AE и дугой ACE.



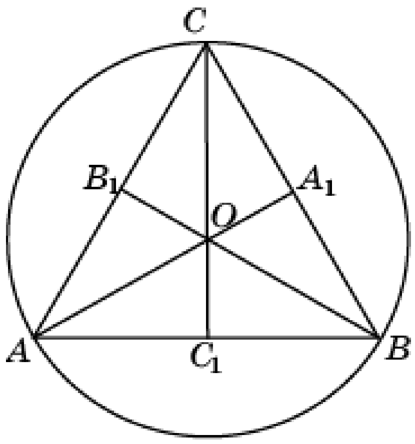
6. Многоугольники и окружности

Уровень В

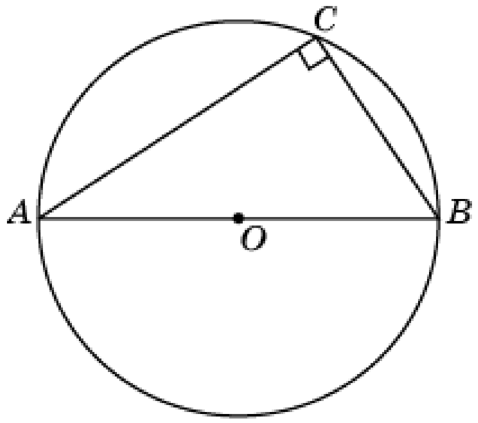
31. Пусть центр O описанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой пересечения высот. Так как центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, то высоты треугольника являются его медианами и, в силу задачи В27 параграфа 3, треугольник ABC – равносторонний.



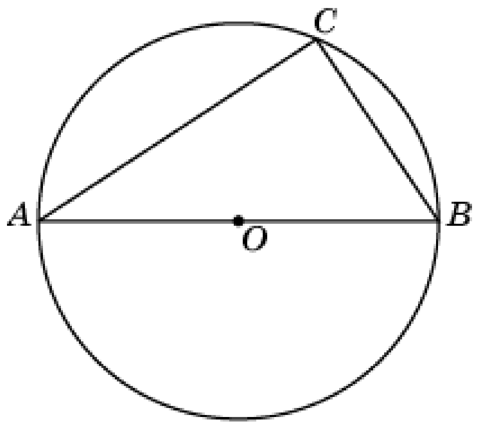
32. Пусть центр O описанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан. Так как центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, то медианы треугольника являются его высотами и, в силу задачи В30 параграфа 3, треугольник ABC – равносторонний.



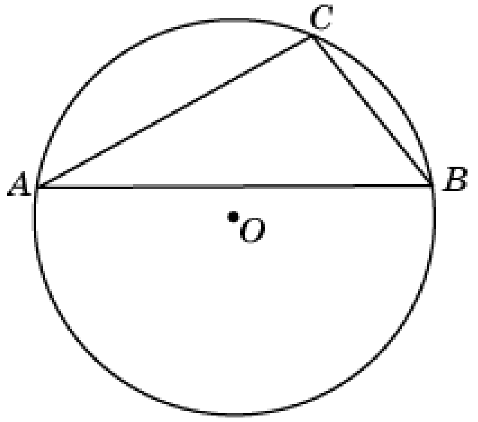
33. Пусть окружность описана около прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Тогда угол C опирается на дугу, равную 180°. Следовательно, AB – диаметр и, значит, центр O описанной окружности является серединой гипотенузы AB.



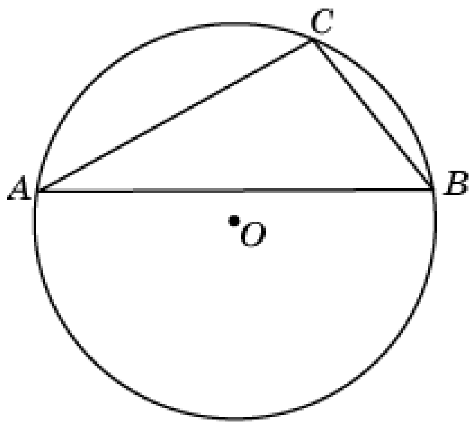
34. Пусть центр O окружности, описанной около треугольника ABC, принадлежит стороне AB. Тогда вписанный угол ACB опирается на диаметр AB, следовательно, равен 90^o, т.е. треугольник ABC – прямоугольный.



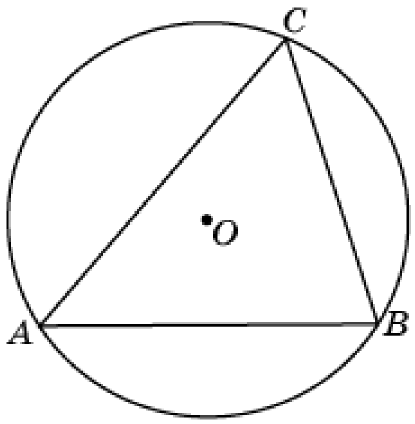
35. Пусть окружность с центром O описана около тупоугольного треугольника ABC ($\angle C > 90^o$). Тогда угол C опирается на дугу окружности, большую 180^o, а дуга ACB окружности меньше 180^o. Следовательно, точки C и O лежат по разные стороны от AB, значит, центр O лежит вне треугольника ABC.



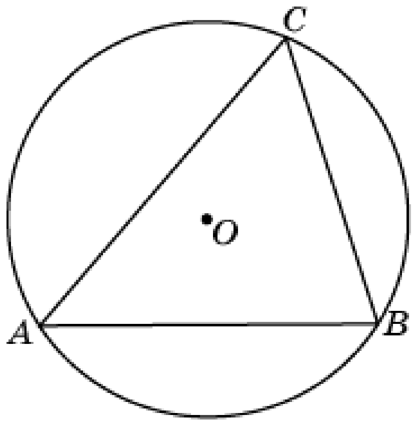
36. Пусть центр O окружности, описанной около треугольника ABC, лежит вне этого треугольника. Тогда, по отношению к некоторой стороне треугольника, точка O и вершина, противолежащая этой стороне, лежат по разные стороны. Пусть, например, это будет сторона AB. В этом случае угол C опирается на дугу окружности, большую 180^o, следовательно, является тупым. Значит, треугольник ABC – тупоугольный.



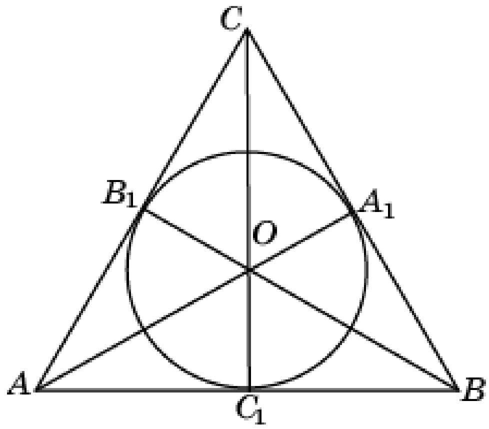
37. Пусть окружность с центром O описана около остроугольного треугольника ABC. Тогда угол C опирается на дугу окружности, меньшую 180^o, следовательно, точка O и вершина C лежат по одну сторону от прямой AB. Аналогично точка O и вершина A лежат по одну сторону от прямой BC, точка O и вершина B лежат по одну сторону от прямой AC. Значит, центр O лежит внутри треугольника ABC.



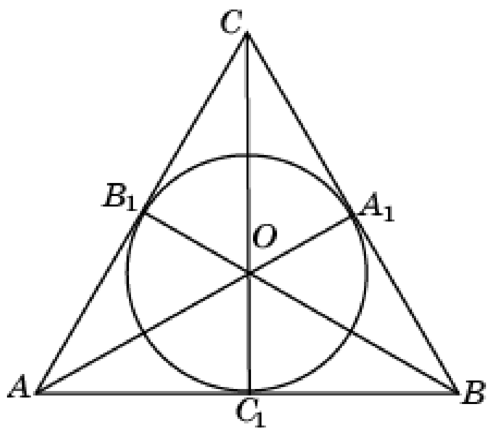
38. Пусть центр O окружности, описанной около треугольника ABC, лежит внутри этого треугольника. Тогда точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, следовательно, угол C – острый. Аналогично углы A и B также являются острыми, т.е. треугольник ABC – остроугольный.



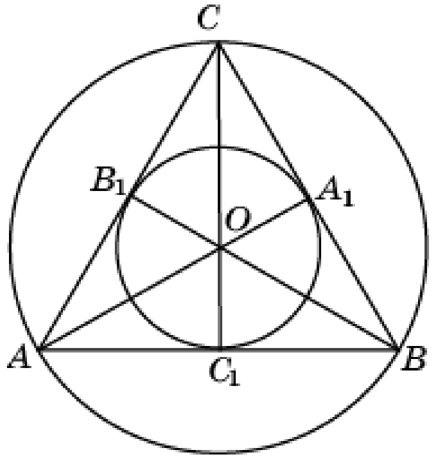
39. Пусть центр *O* вписанной окружности треугольника *ABC* совпадает с точкой пересечения высот. Так как центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника, то биссектрисы треугольника являются его высотами, следовательно, треугольник *ABC* – равносторонний.



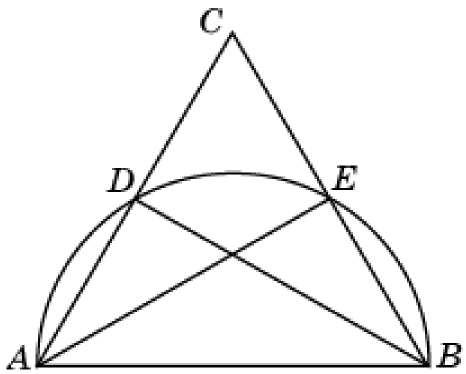
40. Пусть центр *O* вписанной окружности треугольника *ABC* совпадает с точкой пересечения медиан. Так как центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника, то биссектрисы треугольника являются его медианами и, в силу задачи С26 параграфа 3, треугольник *ABC* – равносторонний.



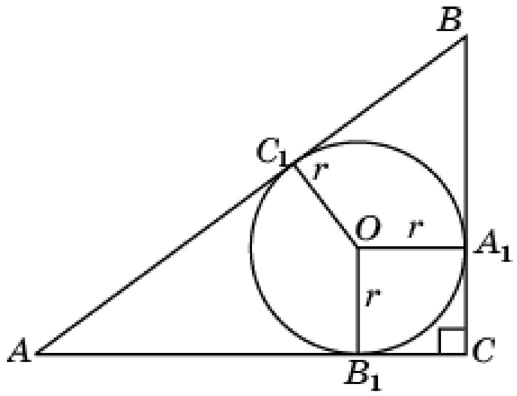
41. Пусть O - центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Соединим его с вершинами треугольника ABC и опустим из него перпендикуляры на стороны. Треугольник ABC разобьется на шесть равных треугольников, следовательно, он будет равносторонним.



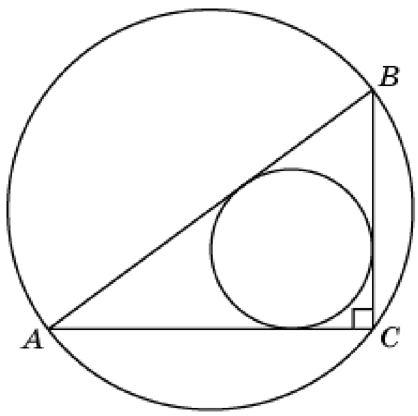
42. Пусть на стороне AB равностороннего треугольника, как на диаметре, построена полуокружность. D, E – точки ее пересечения с двумя другими сторонами треугольника. Угол ADB опирается на диаметр окружности, следовательно, равен 90°. Значит, BD – высота и, следовательно, биссектриса треугольника. Так как вписанный угол ABD равен 30°, то дуга AD составляет 60°. Аналогично дуга BE составляет 60°. Следовательно, вся полуокружность делится на три равные части точками ее пересечения со сторонами треугольника.



43. Пусть окружность радиуса r вписана в прямоугольный треугольник ABC, A_1, B_1, C_1 – точки касания. Имеем $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Откуда $AC + BC – AB = CA_1 + CB_1 = 2r$. Таким образом, диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен разности суммы катетов и гипотенузы.

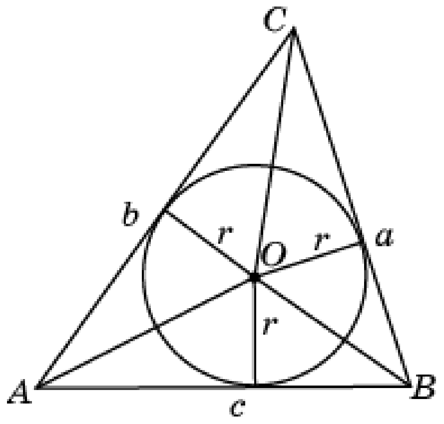


44. Пусть в прямоугольный треугольник *ABC* вписана окружность и около него описана окружность. По предыдущей задаче сумма катетов равна сумме гипотенузы и диаметра вписанной окружности. Так как гипотенуза равна диаметру описанной окружности, то сумма катетов будет равна сумме диаметров окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной

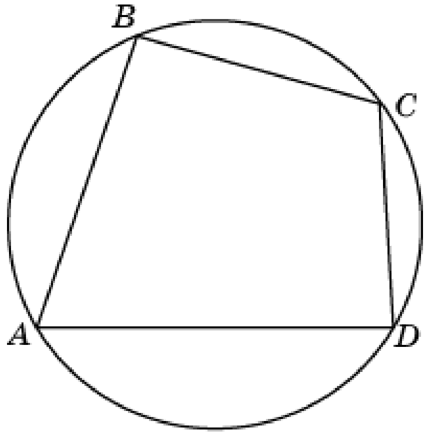


около него.

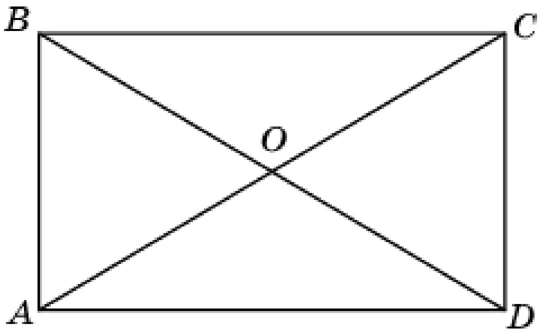
45. Пусть окружность с центром *O* и радиусом *r* вписана в треугольник *ABC* со сторонами *AB* = *c*, *AC* = *b* и *BC* = *a*. В треугольниках *AOB*, *AOC* и *BOC* высоты равны радиусу *r* и, следовательно, площадь *S* треугольника *ABC* равна половине произведения $a + b + c$ и r. Откуда $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.



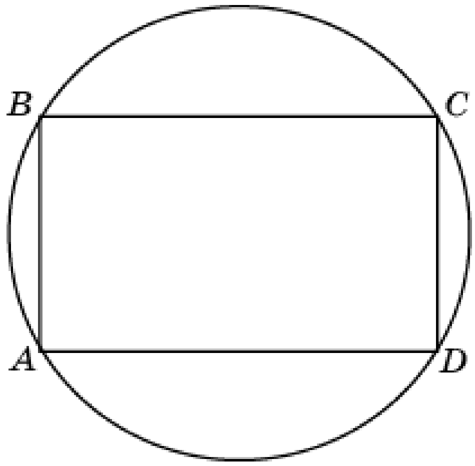
46. Пусть *ABCD* – четырехугольник, вписанный в окружность. Углы *BAD* и *BCD* опираются на дуги, в сумме составляющие 360°. Так как они измеряются половинами этих дуг, то сумма данных углов равна 180°. Аналогично сумма углов *ABC* и *ADC* равна 180°.



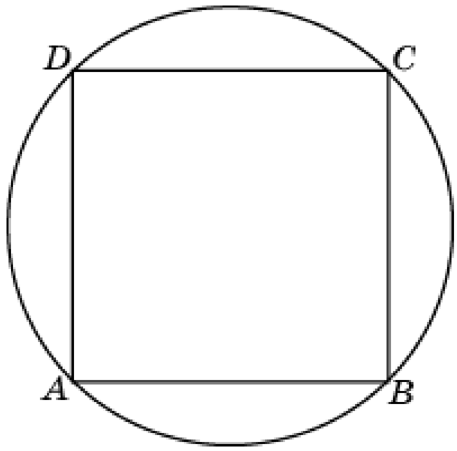
47. Пусть *ABCD* – прямоугольник, *O* – точка пересечения его диагоналей. Так как диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, то окружность с центром *O* и радиусом, равным половине диагонали, будет описанной окружностью.



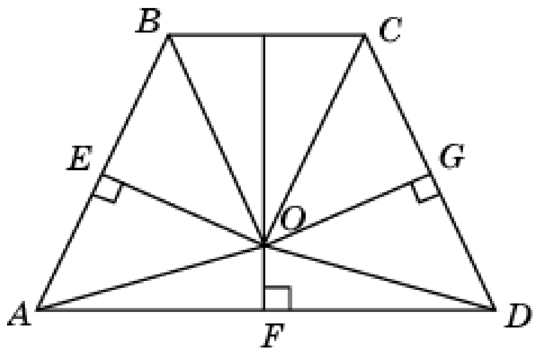
48. Пусть *ABCD* – параллелограмм, около которого можно описать окружность. В силу задачи 16, сумма его противоположных углов равна 180°, следовательно, данный параллелограмм является прямоугольником.



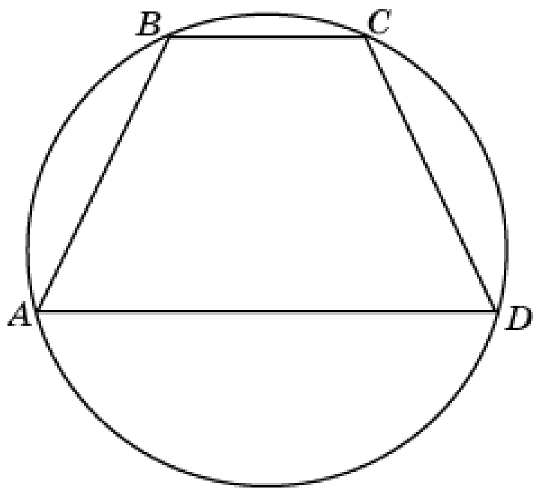
49. Пусть *ABCD* – ромб, около которого можно описать окружность. В силу задачи 16, сумма его противоположных углов равна 180°, следовательно, данный ромб является квадратом.



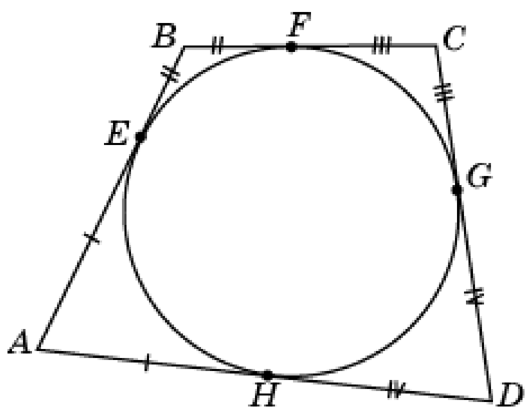
50. Пусть *ABCD* – равнобедренная трапеция, *AB* = *CD*. Через середины *E* и *F* сторон соответственно *AB* и *AD* проведем к ним серединные перпендикуляры и их точку пересечения обозначим *O*. Из точки *O* опустим перпендикуляр *OG* на *CD*. Тогда углы *OAF* и *ODF* равны. Углы *BAF* и *CDF* равны. Следовательно, углы *OAE* и *ODG* равны. Прямоугольные треугольники *OAE* и *ODG* равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, *AE* = *DG* и, значит, *OG* – серединный перпендикуляр к стороне *CD*. Таким образом, точка *O* является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам *AB*, *AD* и *CD*. Следовательно, она равноудалена от вершин трапеции, значит, является центром описанной окружности.



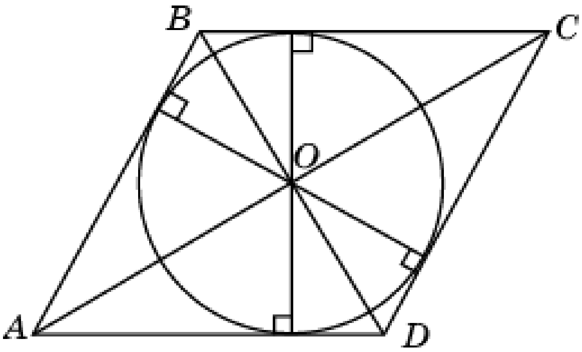
51. Пусть $ABCD$ – трапеция, около которой можно описать окружность. В силу задачи 16, сумма ее противоположных углов равна 180°. Следовательно, углы при основании трапеции равны, значит, она является равнобедренной.



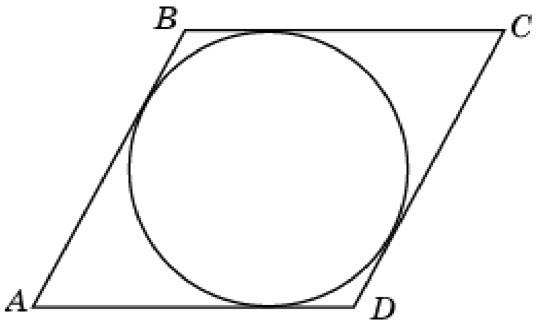
52. Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана в окружность, E, F, G, H – точки касания. Тогда $AE = AH$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Аналогично $BE = BF$, $CF = CG$, $DG = DH$, следовательно, $AB + CD = AD + BC$.



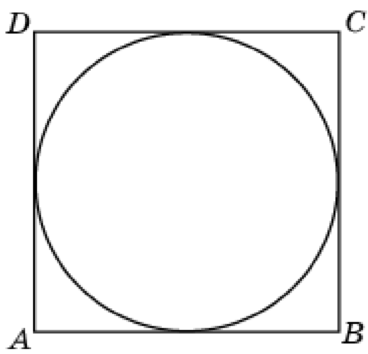
53. Пусть *ABCD* – ромб, *O* – точка пересечения его диагоналей. Так как диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов, то точка *O* одинаково удалена от сторон ромба, следовательно, является центром вписанной окружности.



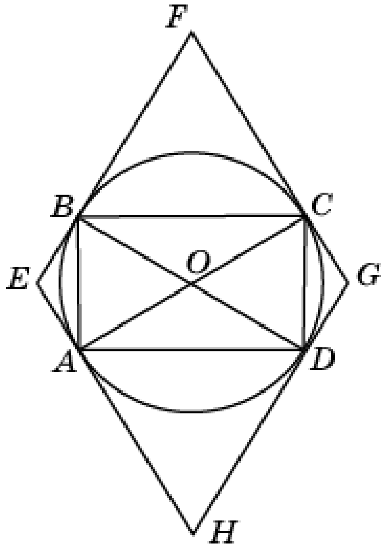
54. Пусть *ABCD* – параллелограмм, в который можно вписать окружность. В силу задачи 22, суммы его противоположных сторон равны, следовательно, данный параллелограмм является ромбом.



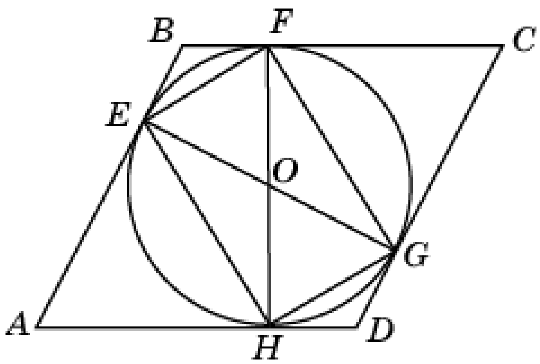
55. Пусть *ABCD* – прямоугольник, в который можно вписать окружность. В силу задачи 22, суммы его противоположных сторон равны, следовательно, данный прямоугольник является квадратом.



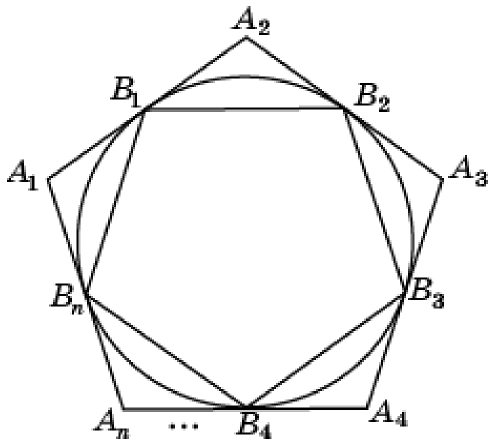
56. Пусть $ABCD$ – прямоугольник, вписанный в окружность. $EFGH$ – четырехугольник, образованный касательными к этой окружности, проведенными через вершины прямоугольника. Так как диагонали прямоугольника являются диаметрами окружности, то противоположные стороны четырехугольника $EFGH$ перпендикулярны диагоналям, следовательно, параллельны. Значит, четырехугольник $EFGH$ – параллелограмм. Используя задачу 24, получаем, что $EFGH$ – ромб.



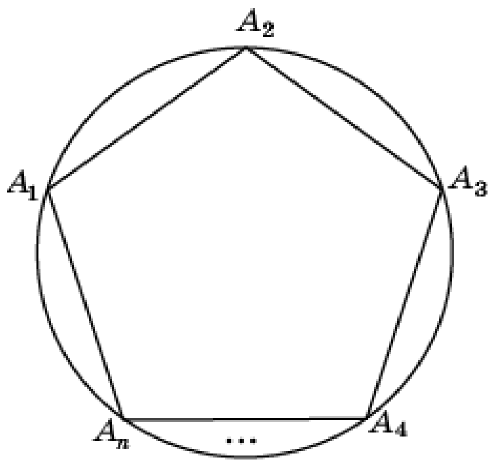
57. Пусть $ABCD$ – ромб, в который вписана окружность. $EFGH$ – точки касания. Диагонали четырехугольника $EFGH$ являются диаметрами окружности, следовательно, равны и в точке пересечения делятся пополам. Значит, четырехугольник $EFGH$ – прямоугольник.



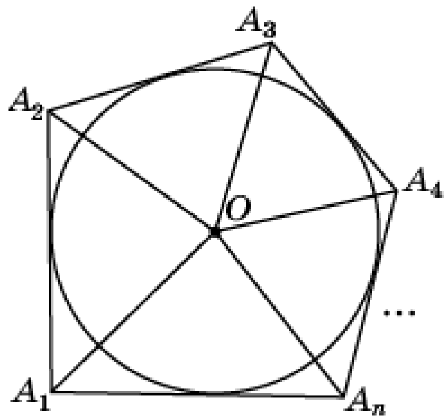
58. Пусть $A_1 \ldots A_n$ – многоугольник, вписанный в окружность. Из равенства его сторон следует равенство дуг, ими стягиваемыми, следовательно, и равенство углов данного многоугольника. Значит, многоугольник $A_1 \ldots A_n$ – правильный.



59. Пусть $A_1 \ldots A_n$ – многоугольник, описанный около окружности. $B_1, \ldots, B_n$ – точки касания. Из равенства углов многоугольника $A_1 \ldots A_n$ следует равенство дуг, ими стягиваемыми, следовательно, и равенство сторон многоугольника $B_1 \ldots B_n$. Равнобедренные треугольники, основаниями которых служат стороны многоугольника $B_1 \ldots B_n$, а противоположными вершинами – вершины многоугольника $A_1 \ldots A_n$ равны по основанию и противоположному углу. Следовательно, стороны многоугольника $A_1 \ldots A_n$ равны, значит, многоугольник $A_1 \ldots A_n$ – правильный.



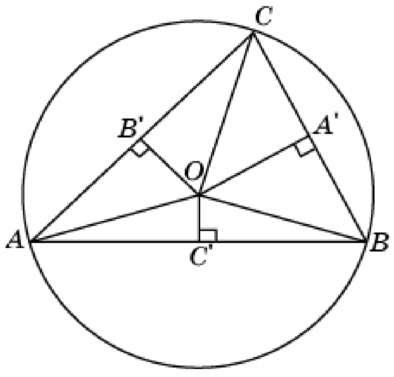
60. Пусть O – центр вписанной окружности многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Соединим O с вершинами многоугольника. Многоугольник разобьется на треугольники, площадь каждого из которых равна половине произведения стороны многоугольника на радиус вписанной окружности. Следовательно, сумма площадей этих треугольников равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.



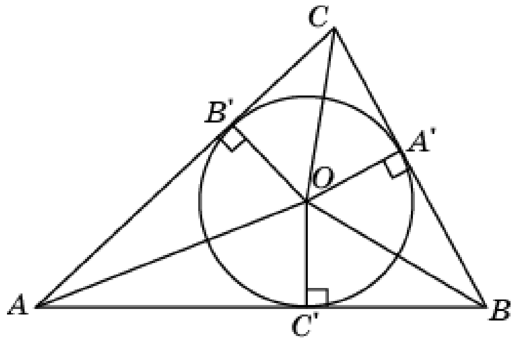
A_3
A_2
A_4
O
...
A_1
A_n

Уровень С

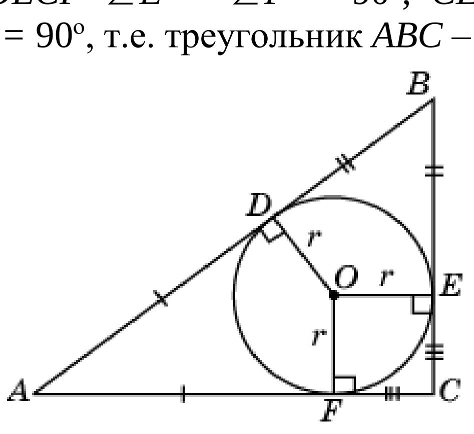
1. Пусть окружность описана около треугольника *ABC*, *O* – ее центр, т.е. точка пересечения серединных перпендикуляров *OA'*, *OB'*, *OC'* к сторонам треугольника. Предположим, что *AB* > *AC*. Тогда в прямоугольных треугольниках *AOB'* и *AOC'* гипотенуза *AO* – общая, *AB'* < *AC'*. Следовательно, *OC'* < *OB'*, т.е. точка *O* расположена ближе к стороне *AB*, чем к *AC*.



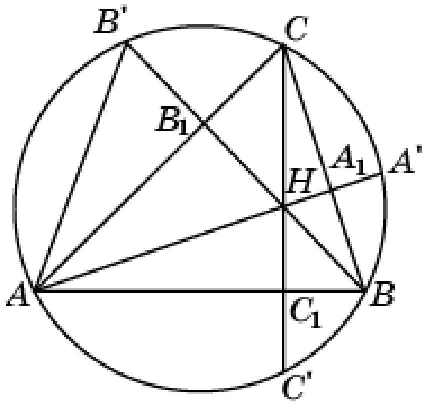
2. Пусть окружность вписана в треугольник *ABC*, *O* – ее центр, т.е. точка пересечения биссектрис треугольника. Опустим из точки *O* перпендикуляры *OA'*, *OB'*, *OC'* на стороны треугольника. Предположим, что *AB* > *AC*. Тогда в прямоугольных треугольниках *OBC'* и *OCB'* катеты *OC'* и *OB'* равны, а катет *B'C* меньше катета *C'B*. Следовательно, *OC* < *OB*, т.е. точка *O* расположена ближе к вершине *C*, чем к *B*.



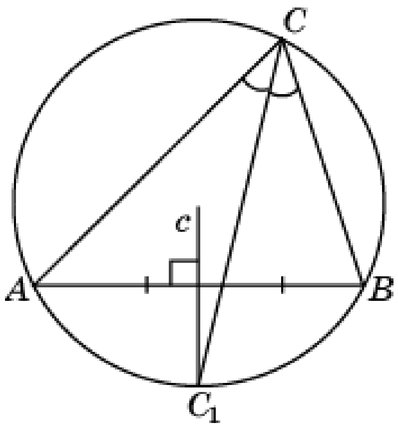
3. Пусть окружность с центром *O* вписана в треугольник *ABC*, *D*, *E*, *F* – точки касания, *AC* + *BC* – *AB* = 2*r*. Тогда *CE* + *CF* = 2*r*. В четырехугольнике *OECF* $\angle E = \angle F = 90^{\circ}$, *CE* = *CF* и *OE* = *OF*. Следовательно, $\angle C = 90^{\circ}$, т.е. треугольник *ABC* – прямоугольный.



4. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H. A', B', C' – точки пересечения продолжения высот с описанной окружностью. Опишем окружность с диаметром AB. Точки A_1 и B_1 будут принадлежать этой окружности, значит, углы A_1AB_1 и A_1BB_1 равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, дуги $A'C$ и $B'C$ описанной окружности равны. Откуда равны углы $A'AC$ и $B'AC$. Прямоугольные треугольники AHB_1 и $AB'B_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, точка B' симметрична точке H относительно стороны AC. Аналогично доказывается симметричность точек A' и C' точке H относительно сторон BC и AB.

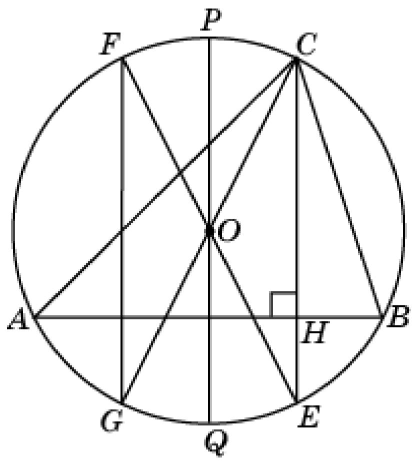


5. Пусть окружность описана около треугольника ABC. Биссектриса угла C пересекает окружность в точке C_1, являющейся серединой дуги AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AB также пересекает окружность в середине дуги AB. Следовательно, биссектриса угла C и серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекаются в точке, принадлежащей описанной окружности.

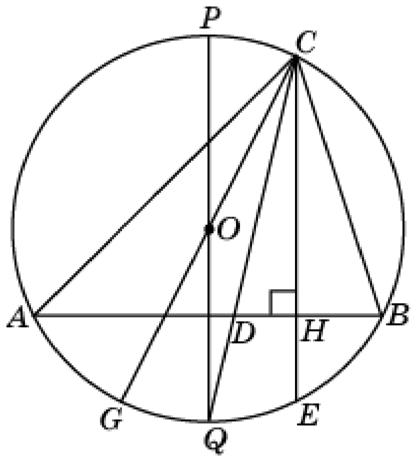


6. Пусть ABC – треугольник, вписанный в окружность с центром O. CH – высота, CG – диаметр. Продолжим высоту CH до пересечения с окружностью в точке E. Проведем диаметр EF и диаметр PQ, перпендикулярный AB. Тогда угол POF равен углу POC и равен половине дуги CF. Дуги AP и BP равны, следовательно, равны дуги BC и AF. Разность углов B и A данного треугольника измеряется

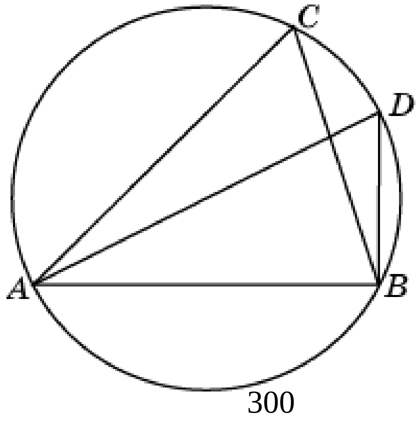
половиной дуге *CF*. Угол *GCE* измеряется половиной дуги *GE*, равной дуги *CF*. Следовательно, угол *GCE* равен разности углов *B* и *A* треугольника.



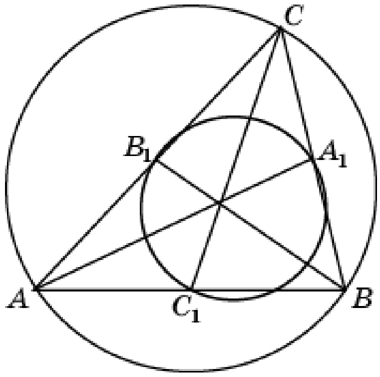
7. Пусть *ABC* – треугольник, вписанный в окружность с центром *O*. *CH* – высота, *CD* – биссектриса, *CG* – диаметр. Продолжим высоту *CH* до пересечения с окружностью в точке *E*. Проведем диаметр *PQ,* перпендикулярный *AB*. Продолжение биссектрисы *CD* пересекает окружность в точке *Q*. Из предыдущей задачи следует, что дуги *QG* и *QE* равны. Следовательно, *CD* – биссектриса угла *GCE*.



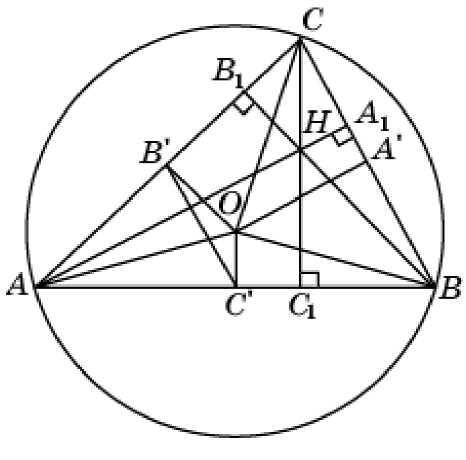
8. Пусть *ABC* – треугольник, вписанный в окружность. Проведем диаметр *AD* и рассмотрим треугольник *ABD*. Он является прямоугольным, гипотенуза *AD* – диаметр, угол *D* равен углу *C*. Следовательно, отношение *AB* к синусу угла *C* равно отношению *AB* к синусу угла *D* и равно диаметру *AD*.



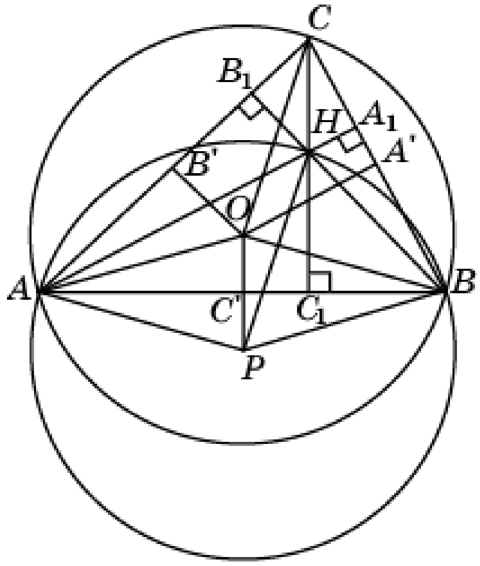
9. Пусть ABC – треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 – его медианы. Гомотетия с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом –0,5 переводит вершины A, B, C соответственно в точки A_1, B_1, C_1, следовательно, она переводит описанную окружность в окружность, проходящую через основания медиан. Значит, радиус окружности, проходящей через основания медиан в два раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника.



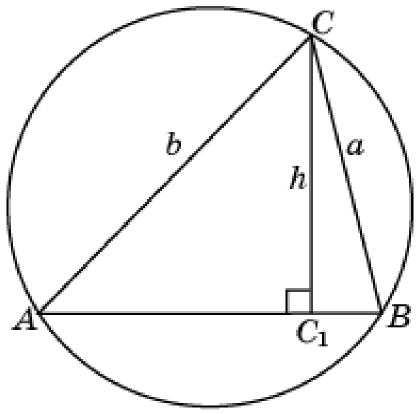
10. Пусть окружность, описанная около треугольника ABC, имеет своим центром точку O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. H – точка пересечения высот треугольника. Треугольник $OB'C'$ подобен треугольнику HBC (по углам), коэффициент подобия равен 2. Следовательно, $CH = 2OC'$.



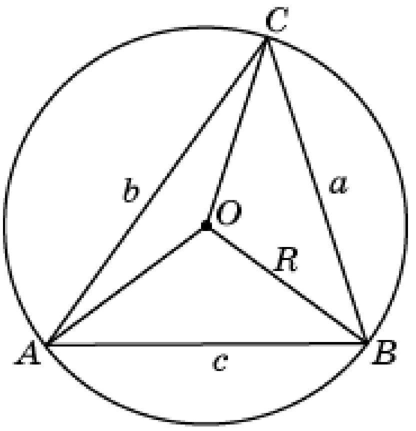
11. Пусть окружность радиуса R, описанная около треугольника ABC, имеет своим центром точку O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Докажем, что точка P, принадлежащая серединному перпендикуляру к стороне AB, и такая, что $OC' = C'P$, является центром окружности радиуса R, проходящей через вершины A, B и точку пересечения высот H. В силу предыдущей задачи, $CH = 2OC'$, значит, отрезок CH равен и параллелен отрезку OP. Четырехугольник $OCHP$ – параллелограмм, следовательно, $PH = OC = R$. Прямоугольные треугольники AOC' и APC' равны по двум катетам, следовательно, $AO = AP = R$. Аналогично $BO = BP = R$.



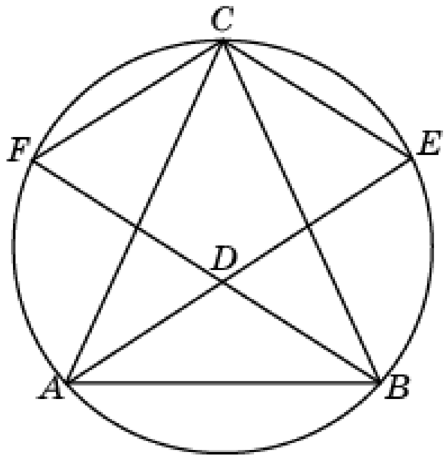
12. Пусть ABC – треугольник, вписанный в окружность, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, высота CC_1 равна h. Воспользуемся формулами для площади S треугольника. Имеем $S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2}c \cdot h$. Учитывая, что $\frac{c}{\sin C} = 2R$, получаем равенство $a \cdot b = h \cdot 2R$, т.е. произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанной окружности.



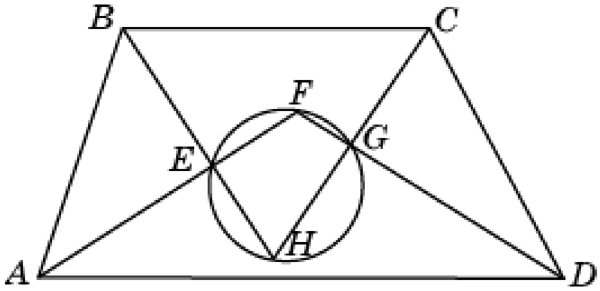
13. Пусть окружность с центром O и радиусом R описана около треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Обозначим S площадь этого треугольника. Имеем $S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A$. Воспользуемся формулой $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Подставляя в формулу для площади треугольника выражение для $\sin A$ из второй формулы, получим требуемую формулу $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.



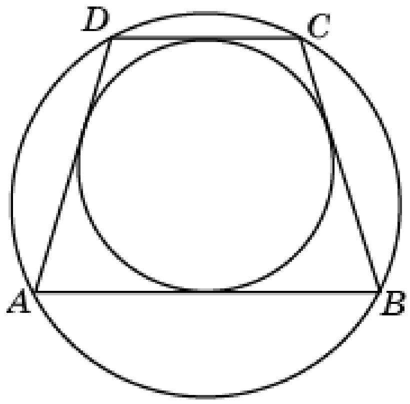
14. Углы *E* и *F* равны, как углы, опирающиеся на равные дуги. Дуги *AF, CF, CE* и *BE* равны как дуги, на которые опираются равные углы. Угол *FDE* измеряется полусуммой дуг *FCE* и *AB*, следовательно, равен углу *FCE*, который измеряется половиной дуги *FABE*. Следовательно, четырехугольник *CFDE* – параллелограмм. Отрезки *CF* и *CE* равны как отрезки, стягивающие равные дуги. Следовательно, параллелограмм *CFDE* – ромб.



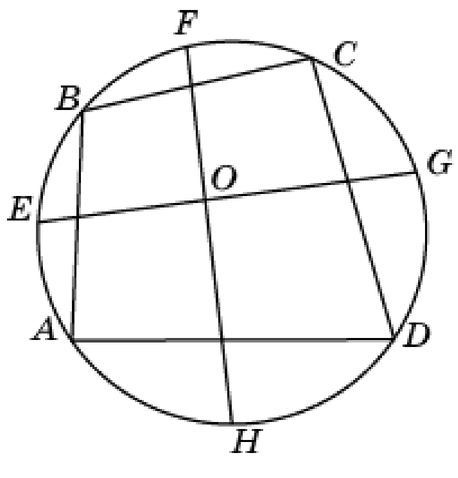
15. Пусть *ABCD* – трапеция (*AD* || *BC*). Биссектрисы ее углов пересекаются в точках *E, F, G, H*. Углы *E* и *G* четырехугольника *EFGH* – прямые, следовательно, около него можно описать окружность, т.е. вершины четырехугольника, ограниченного биссектрисами углов трапеции принадлежат одной окружности.



16. Если около трапеции можно описать окружность, то она является равнобедренной. Если в нее можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны. Из этого следует, что если около трапеции можно описать окружность и в ту же трапецию можно вписать окружность, то боковые стороны этой трапеции равны ее средней линии.

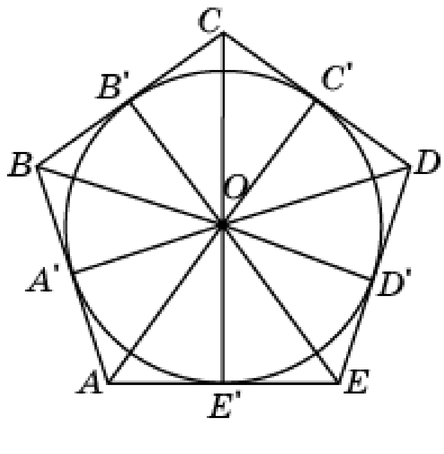


17. Пусть *ABCD* – четырехугольник, вписанный в окружность, *E*, *F*, *G*, *H* – середины соответствующих дуг, *O* – точка пересечения прямых *EG* и *FH*. Сумма дуг *AE*, *AH*, *CF* и *CG* равна половине всей окружности, следовательно, угол *EOH* равен 90°, т.е. *EG* и *FH* перпендикулярны.

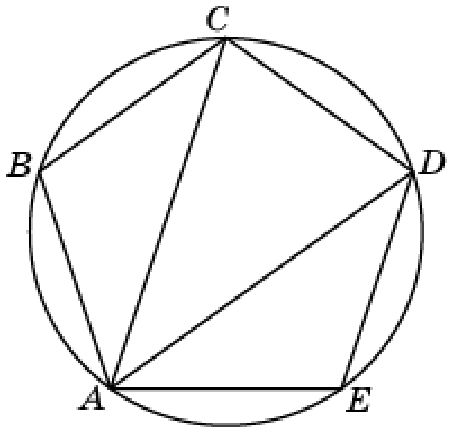


18. Пусть *ABCDE* – пятиугольник, описанный около окружности, все стороны которого равны. *A’*, *B’*, *C’*, *D’*, *E’* – точки касания окружности. Тогда *AB* + *AE* + *CD* – *BC* – *DE* = *AA’* + *AE’*. Таким образом, сумма отрезков касательных проведенных из вершины пятиугольника, равна стороне пятиугольника, следовательно, все отрезки касательных, проведенных из вершин пятиугольника, равны. Все прямоугольные треугольники, одной вершиной которых является центр *O* вписанной окружности, а противоположными ей катетами – отрезки касательных, равны по двум катетам, следовательно, равны все

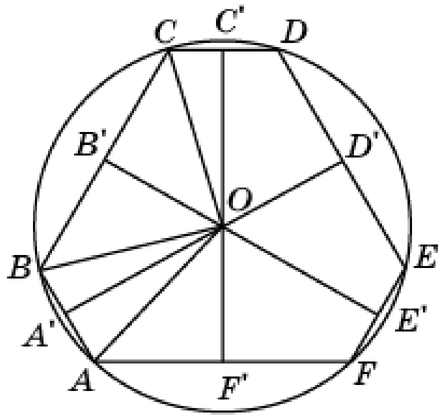
углы данного пятиугольника. Значит, данный пятиугольник – правильный.



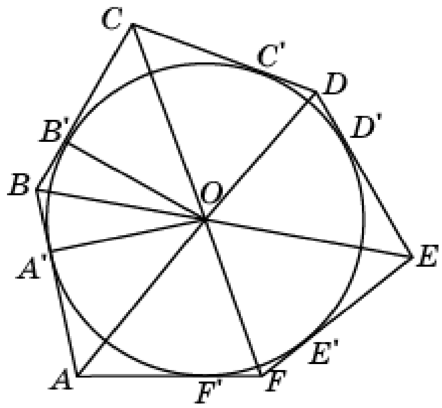
19. Пусть *ABCDE* – пятиугольник, вписанный в окружность, все углы которого равны. Из равенства углов пятиугольника следует, что все углы с вершинами в вершинах пятиугольника, опирающиеся на дуги, стягиваемые противоположными этим углам сторонами, равны. Например, $\angle CAD = \angle B + \angle E - 180^{\circ}$. Следовательно, равны все дуги, стягиваемые сторонами пятиугольника, значит, равны все стороны пятиугольника. Таким образом, данный пятиугольник – правильный.



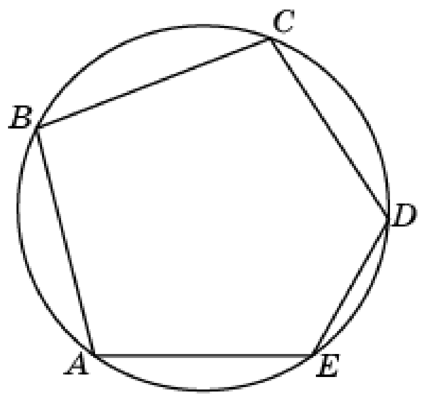
20. Пусть *ABCDEF* – шестиугольник, у которого равны все углы, а стороны равны через одну. Обозначим *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, *F'* – середины сторон, *O* – точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам *AB* и *BC*. Треугольники *OAA'* и *OCC'* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, *OC'* – серединный перпендикуляр к *CD*. Аналогично доказывается, что *OD'*, *OE'*, *OF'* – серединные перпендикуляры. Следовательно, точка *O* равноудалена от всех вершин шестиугольника, т.е. является центром описанной около него окружности.



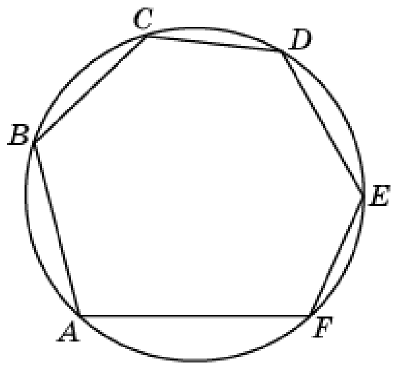
21. Пусть $ABCDEF$ – шестиугольник, у которого равны все стороны, а углы равны через один. Обозначим A', B', C', D', E', F' – точки касания, O – точку пересечения биссектрис углов A и B. Прямоугольные треугольники OAA' и OCC' равны по двум катетам. Следовательно, OC – биссектриса угла C. Аналогично доказывается, что OD, OE, OF – биссектрисы. Следовательно, точка O равноудалена от всех сторон шестиугольника, т.е. является центром вписанной окружности.



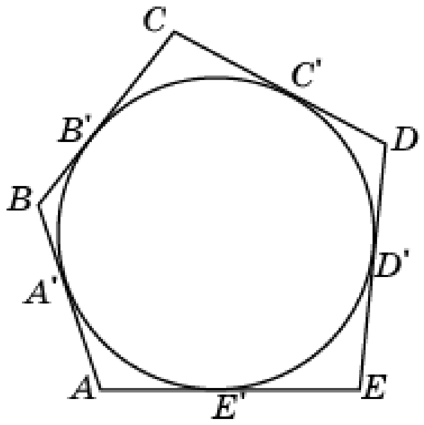
22. Сумма дуг, на которые опираются любые два несоседних угла вписанного в окружность пятиугольника, больше окружности и, следовательно, сумма любых двух несоседних углов вписанного пятиугольника больше 180°.



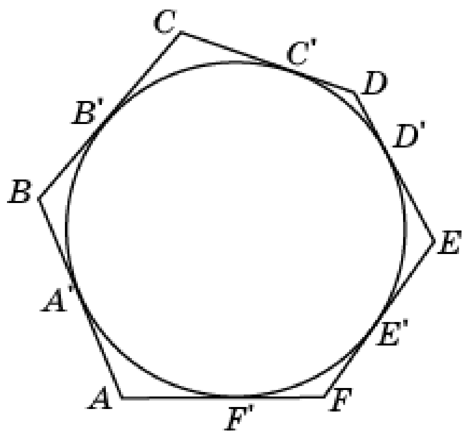
23. Сумма дуг, на которые опираются любые три несоседних угла вписанного в окружность шестиугольника, равна двум окружностям, следовательно, сумма любых трех несмежных углов вписанного шестиугольника равна 360°.



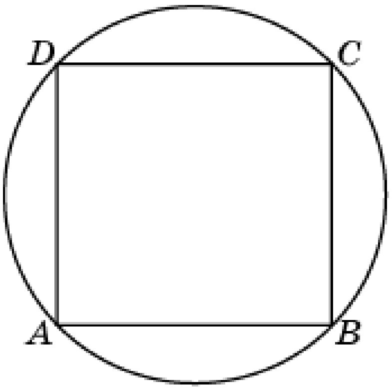
24. Пусть *ABCDE* – пятиугольник, описанный около окружности. *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* – точки касания. Используя то, что отрезки касательных, проведенных из одной вершины пятиугольника, равны, получаем, что $AB + CD + AE - BC - DE = AA' + AE'$. Следовательно, сумма сторон *BC* и *DE* меньше суммы сторон *AB*, *CD* и *AE*. Аналогично доказывается и для других сторон.



25. Пусть *ABCDEF* – шестиугольник, описанный около окружности. *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, *F'* – точки касания. Используя то, что отрезки касательных, проведенных из одной вершины шестиугольника, равны, получаем, что $AB + CD + EF = BC + DE + AF$. Аналогично доказывается для других сторон.



26. Воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними (см. задачу С25 параграфа 4). Для вписанного четырехугольника диагонали будут наибольшими, если они – диаметры окружности. Синус угла между ними будет наибольшим, если они перпендикулярны. Такой четырехугольник является квадратом.



СОДЕРЖАНИЕ