В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

РЕАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
(Геометрия)

2013

Введение

Геометрия возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. С древних времён люди сталкивались с необходимостью находить расстояния между предметами, определять размеры участков земли, ориентироваться по расположению звёзд на небе и т.п.

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры древнегреческий учёный Геродот (V в. до н.э.) пишет следующее: "Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию".

При строительстве различных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдет на постройку, вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооруженные за две, три и четыре тысячи лет до нашей эры, поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие геометрические положения и расчеты. Одна из самых известных и больших пирамид – пирамида Хеопса (XXVIII в. до н. э.). Её высота достигает 146,5 м, а основанием служит квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворённое человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке - астрономии.

Формы правильных, полуправильных и звёздчатых многогранников находят широкое применение в живописи, скульптуре, архитектуре, строительстве. Выдающийся архитектор XX столетия Ле Корбюзье писал: "Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса - немой трактат по геометрии, а греческая архитектура - внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора".

В последние столетия возникли и развивались новые направления и новые методы геометрии, которые широко используется в других науках: физике, химии, биологии, экономике и др.

Вся история развития математики показывает, что математические понятия, методы и теоремы не возникают из ничего, а основываются на исследовании реальных явлений. В этом смысле математика является реальной наукой.

Термин «реальная математика» носит условный характер и подчеркивает связь математики с реальной действительностью.

Данное пособие содержит более 400 геометрических задач, которые мы условно относим к реальной математике. Это не только задачи с практическим содержанием, но и задачи, полученные из них абстрагированием от конкретного сюжета. Среди этих задач:

– задачи на нахождение расстояний, углов, площадей и объёмов;

– задачи на изображение и моделирование геометрических фигур;

– исторические и научно-популярные задачи;

– задачи на нахождение наибольших и наименьших значений и др.

Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности. Для каждой задачи дается указание, с какого класса её можно начинать решать. Например, 1(5+) означает, что задачу с номером 1 можно решать, начиная с 5-го класса.

Решение этих задач позволит:

– усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

– выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать величины и находить их приближенные значения;

– развить геометрические представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

– выработать навыки работы с таблицами и другими справочными материалами;

– повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии;

– лучше подготовиться к ГИА и ЕГЭ по математике.

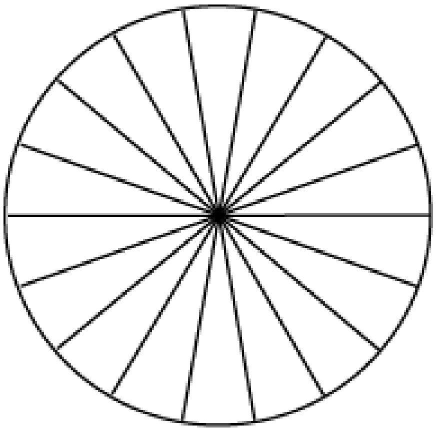
Задачи сопровождаются рисунками, позволяющими лучше понять условие, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления.

Во второй части пособия даны ответы и решения ко всем задачам, приведена таблица приближенных значений тригонометрических функций.

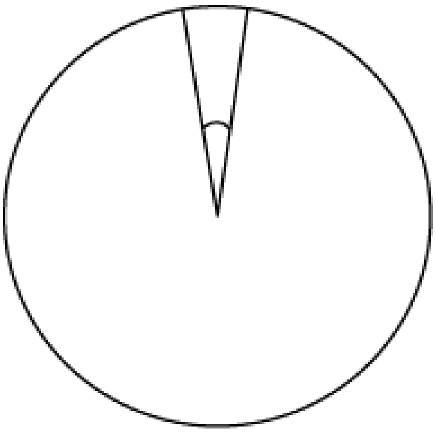
Пособие может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии в 5-11 классах, при организации обобщающего повторения в 7-9 и 10-11 классах, в работе кружков, курсов по выбору или элективных курсов по геометрии, а также при подготовке к ГИА и ЕГЭ по математике.

1. Углы

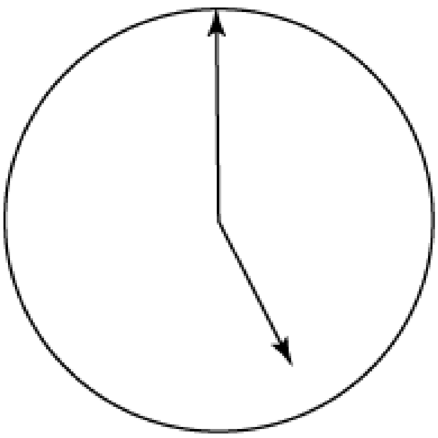
1(5+). Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



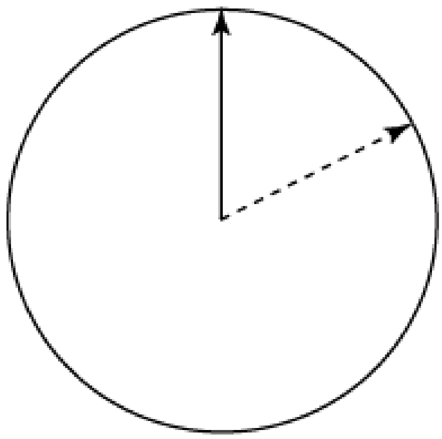
2(5+). Сколько спиц в колесе, если углы между соседними спицами равны 18^{o}?



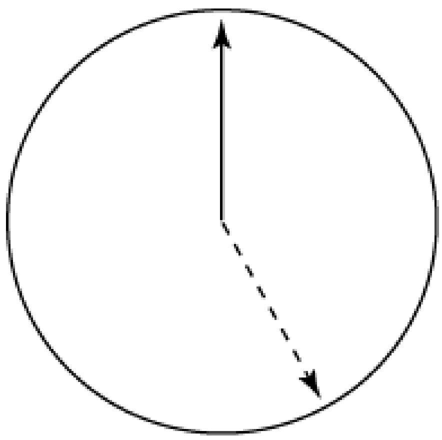
3(5+). Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 5 ч?



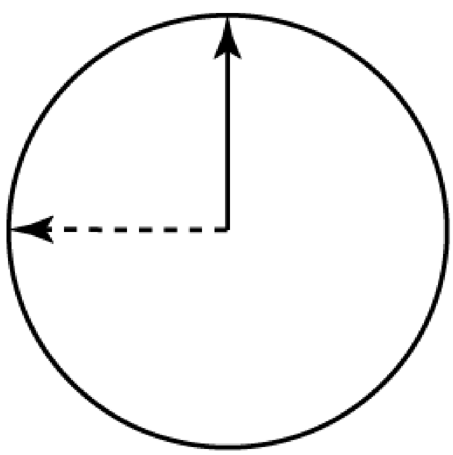
4(5+). На какой угол повернётся минутная стрелка за 10 мин?



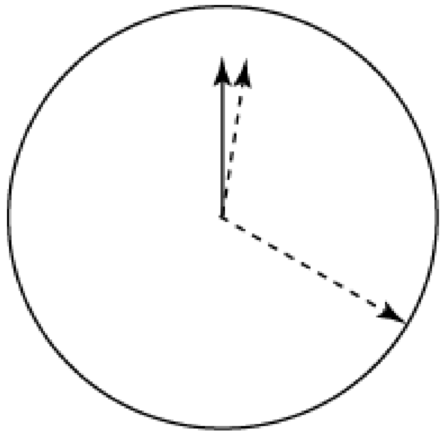
5(5+). На какой угол повернётся минутная стрелка за 25 мин?



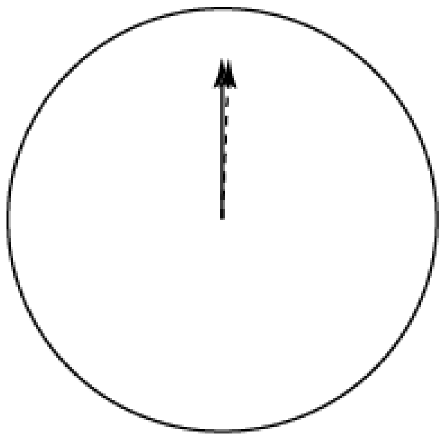
6(5+). На какой угол повернётся минутная стрелка за 45 мин?



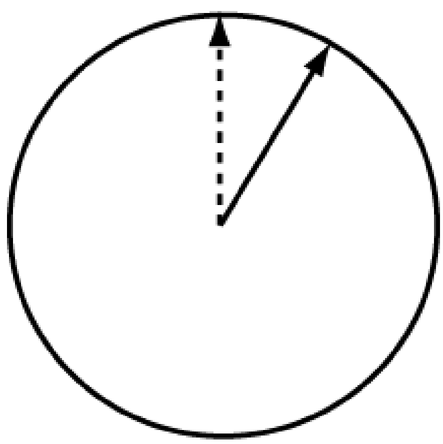
7(5+). На какой угол повернётся часовая стрелка за 20 мин?



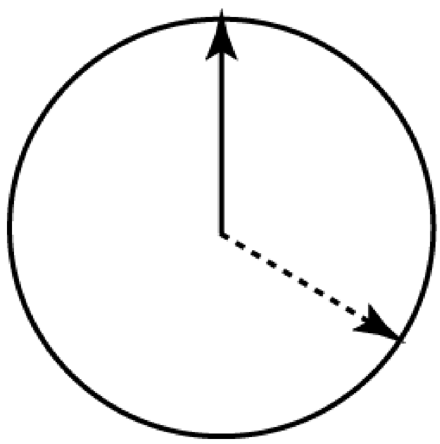
8(5+). На какой угол поворачивается минутная стрелка пока часовая проходит $1^{o}30'$?



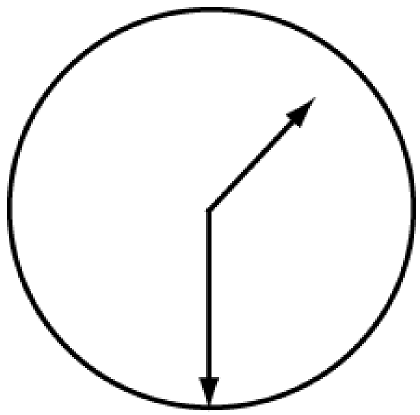
9(5+). На сколько градусов повернётся секундная стрелка за 5 мин?



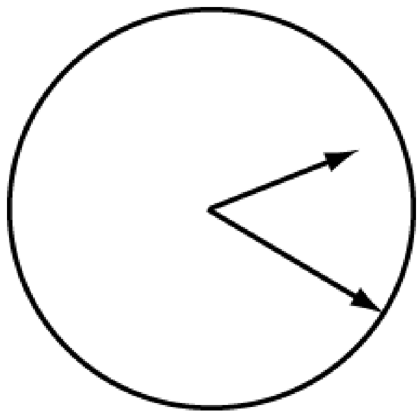
10(5+). На сколько градусов повернётся минутная стрелка за 20 сек?



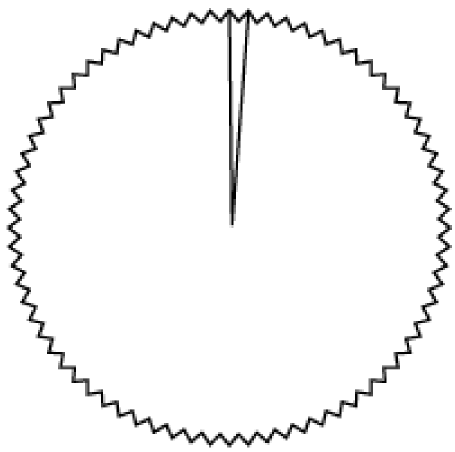
11(5+). Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 1 ч 30 мин?



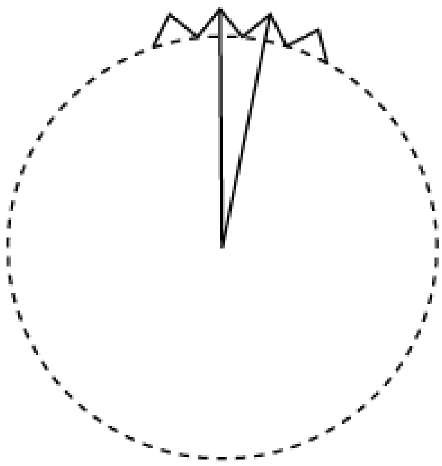
12(5+). Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 2 ч 20 мин?



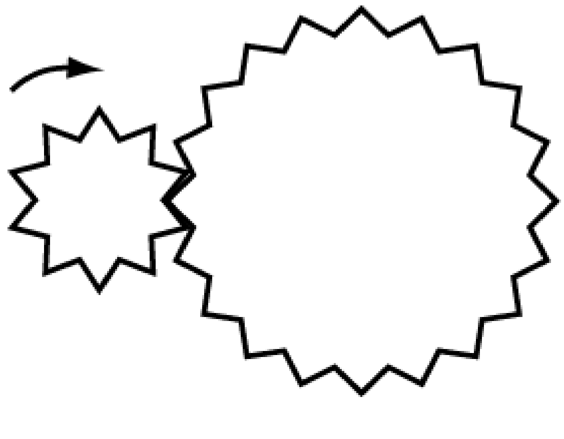
13(5+). Колесо зубчатой передачи имеет 72 зубца. Сколько градусов содержится в центральном угле между двумя соседними зубцами?



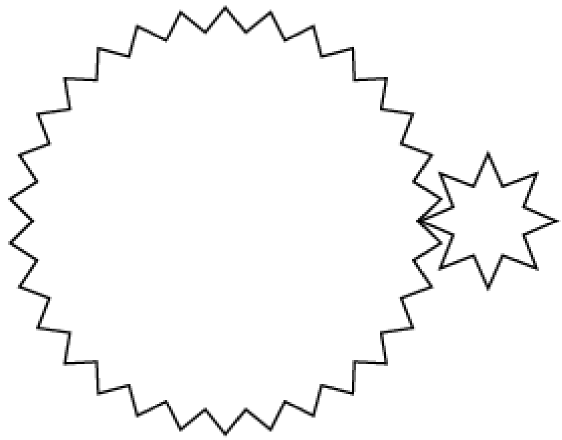
14(5+). Сколько зубцов имеет колесо зубчатой передачи, если центральный угол между двумя соседними зубцами , равен 12^{o}?



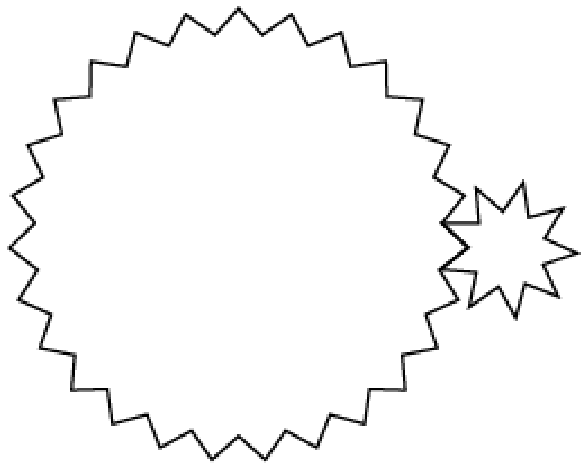
15(5+). Маленькое зубчатое колесо, имеющее 10 зубцов, повернулось по часовой стрелке на 360^{o}. На сколько градусов и в какую сторону повернётся сцепленное с ним большое зубчатое колесо, имеющее 20 зубцов?



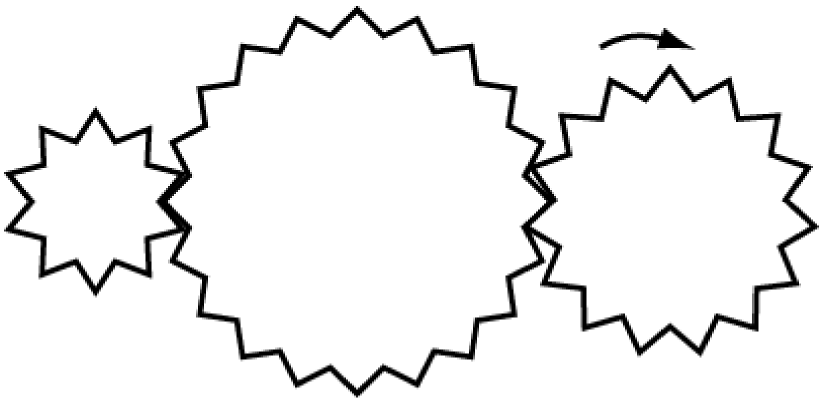
16(5+). Сколько оборотов в минуту делает зубчатое колесо с 32 зубцами, если сцепленное с ним зубчатое колесо с 8 зубцами делает 12 оборотов в минуту?



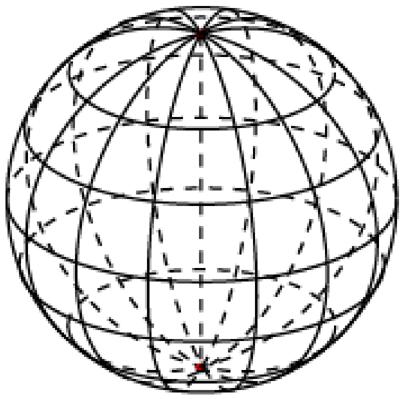
17(5+). Диаметры двух зубчатых колёс относятся как 3:8. На какой угол повернётся большее колесо при одном обороте меньшего?



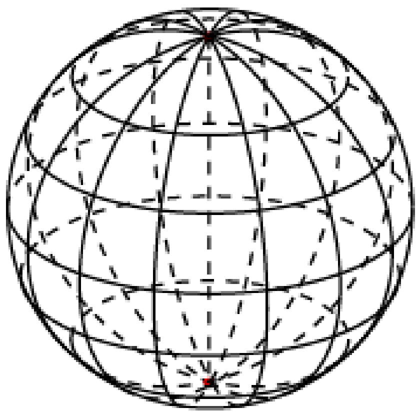
18(5+). Правое зубчатое колесо, имеющее 15 зубцов, повернулось по часовой стрелке на 360^{o}. Оно сцеплено с зубчатым колесом, имеющим 20 зубцов. На сколько градусов и в какую сторону повернётся сцепленное с ним левое зубчатое колесо, имеющее 10 зубцов?



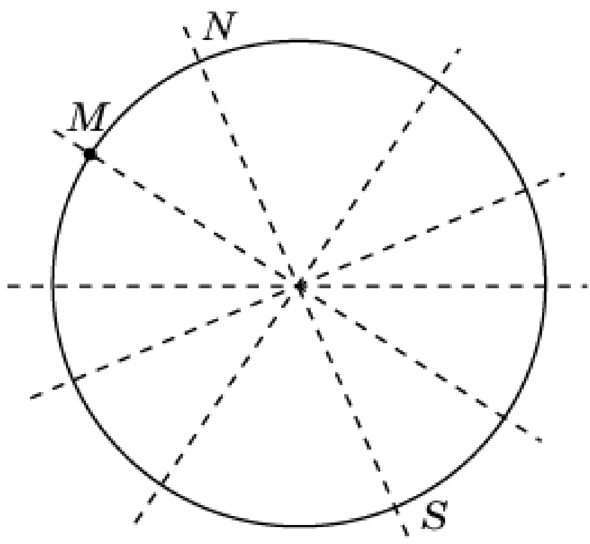
19(5+). На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 часов?



20(5+). За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на 90°?

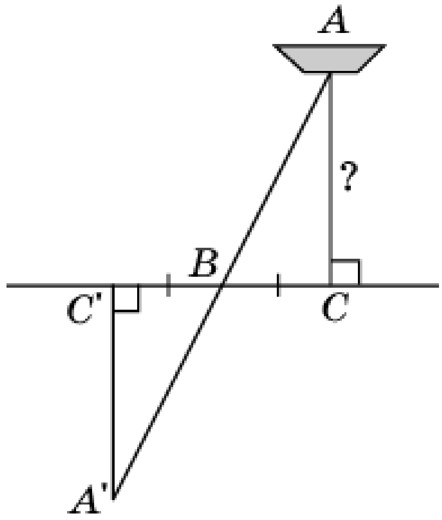


21(5+). Ось Земли наклонена к плоскости своей траектории приближённо под углом 66°30’. Найдите наибольший угол, под которым видно Солнце над горизонтом в Москве в самый длинный день в году. Широта Москвы составляет 56°.

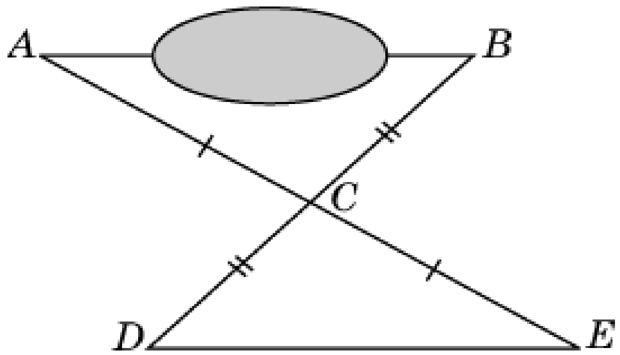


2. Расстояния

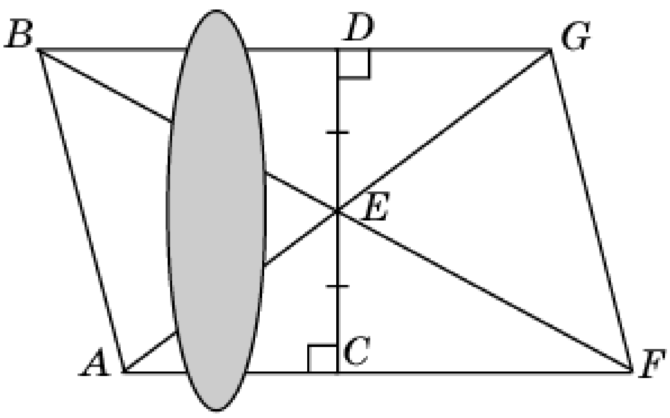
1(7+). Используя рисунок, укажите способ нахождения расстояния AC от корабля A в море до берега.



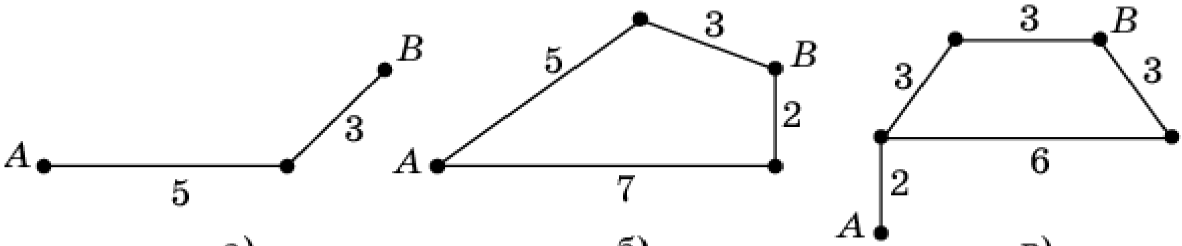
2(7+). Используя рисунок, укажите способ нахождения расстояния между двумя объектами A и B, разделёнными преградой.



3(7+). Используя рисунок, укажите способ нахождения расстояния между двумя недоступными объектами A и B.

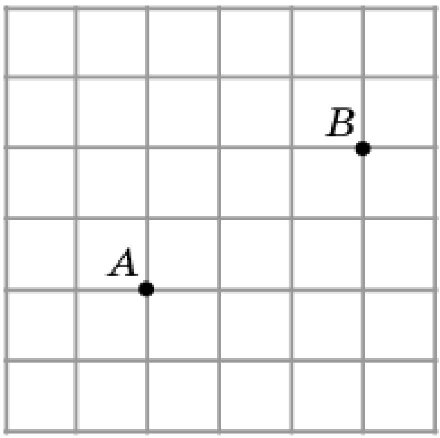


4(5+). На рисунке изображены стержни, соединенные шарнирами, которые могут свободно двигаться. Для каждой конструкции найдите наибольшее и наименьшее расстояния, на которые можно раздвинуть концы *A* и *B*.

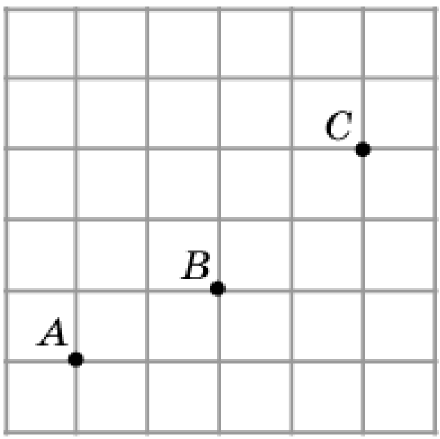


а) б) в)

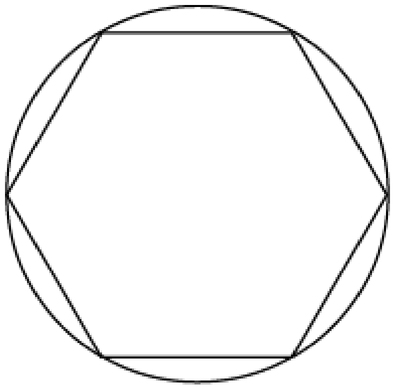
5(5+). Сколько путей длины 5, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяет точки *A* и *B*?



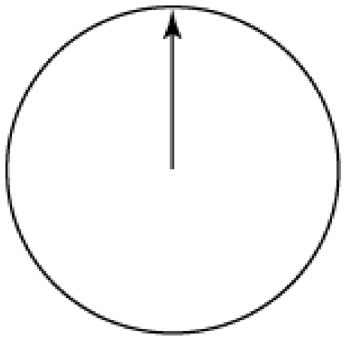
6(5+). Сколько путей длины 6, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяет точки *A*, *B* и *C*?



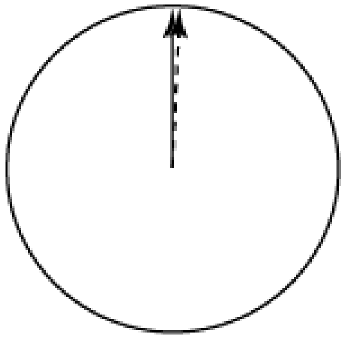
7(6+). За длину окружности вавилоняне принимали периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите приближение для π, которым пользовались вавилоняне.



8(6+). Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа. (Примите $\pi \approx 3$.)

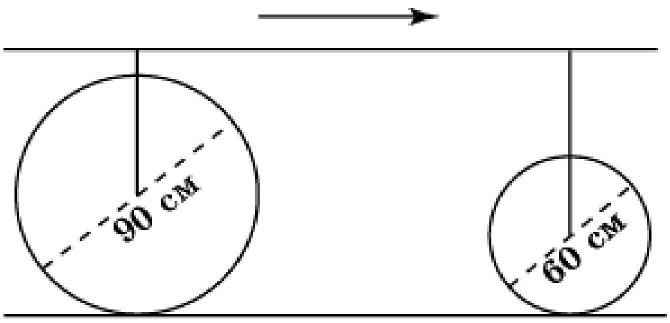


9(6+). Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5 м. Какой путь (в сантиметрах) проходит её конец за 1 мин? (Примите $\pi \approx 3$.)

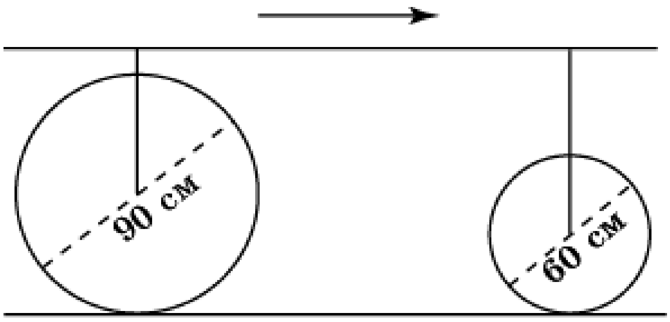


10(6+). Колесо, диаметр которого равен 1 м, прокатилось по прямой на расстояние 10 м. Сколько полных оборотов оно сделало?

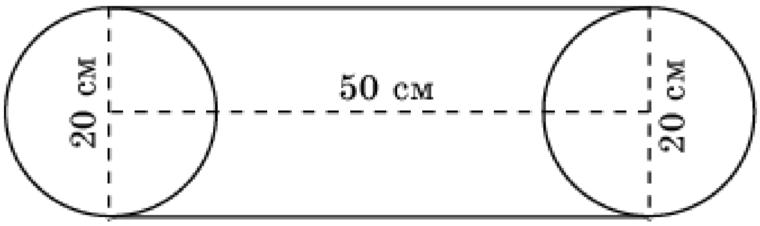
11(6+). Телега проехала 5,4 км. Диаметры её переднего и заднего колёс равны соответственно 60 см и 90 см. На сколько больше оборотов сделает переднее колесо по сравнению с задним? (Примите $\pi \approx 3$.)



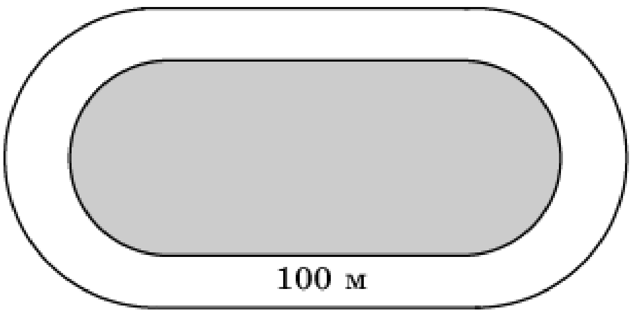
12(6+). Диаметры переднего и заднего колёс телеги равны соответственно 60 см и 90 см. Какое расстояние (в метрах) проехала телега, если её переднее колесо сделало на 100 оборотов больше, чем заднее? (Примите $\pi \approx 3$.)



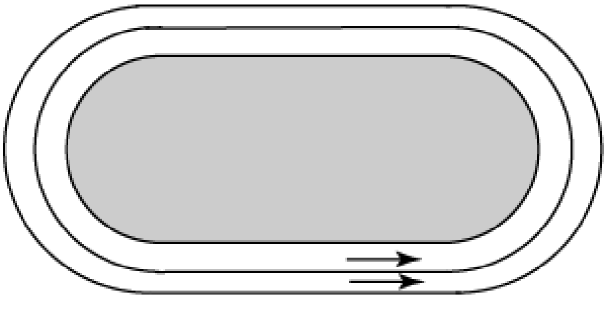
13(6+). Какой длины должен быть приводной ремень, соединяющий два шкива с диаметрами 20 см, если расстояние между их центрами равно 50 см? (Примите $\pi \approx 3$.)



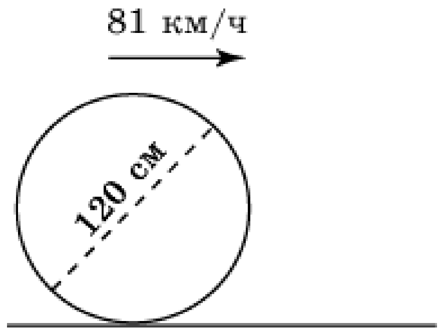
14(6+). Поле стадиона имеет форму прямоугольника с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Длина беговой дорожки вокруг поля равна 400 м. Длина каждого из двух прямолинейных участков дорожки равна 100 м. Найдите ширину l поля стадиона. (Примите $\pi \approx 3$.)



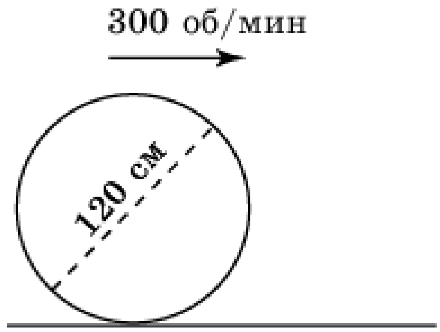
15(6+). Два спортсмена должны пробежать один круг по дорожке стадиона, форма которого – прямоугольник с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Один бежит по дорожке, расположенной на 2 м дальше от края, чем другой. Какое расстояние должно быть между ними на старте, чтобы компенсировать разность длин дорожек, по которым они бегут? (Примите $\pi \approx 3$.)



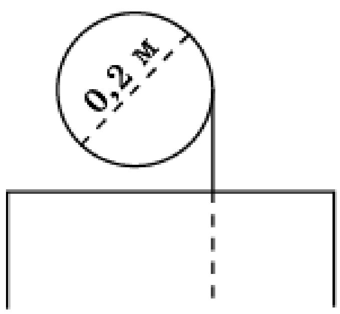
16(6+). Поезд едет со скоростью 81 км/ч. Диаметр его колеса равен 120 см. Сколько оборотов в минуту делает колесо поезда? (Примите $\pi \approx 3$.)



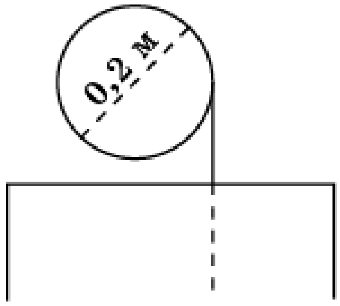
17(6+). Какова скорость поезда (в км/ч), если диаметр его колеса равен 120 см и оно делает 300 оборотов в минуту. (Примите $\pi \approx 3$.)



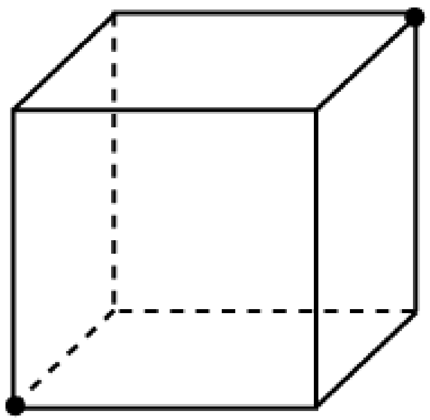
18(6+). При поднятии воды из колодца вал делает 20 оборотов. Найдите глубину колодца (в метрах), если диаметр вала равен 0,2 м. (Примите $\pi \approx 3$.)



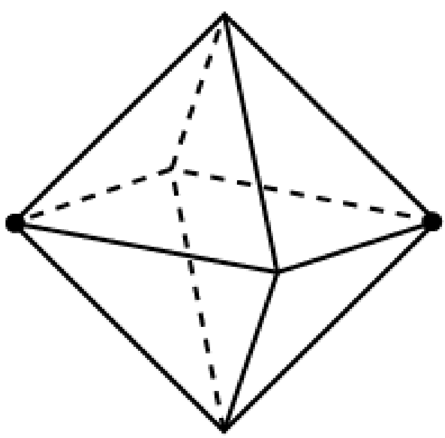
19(6+). Сколько оборотов должен сделать вал, чтобы поднять воду из колодца глубиной 9 м, если диаметр вала равен 0,2 м? (Примите $\pi \approx 3$.)



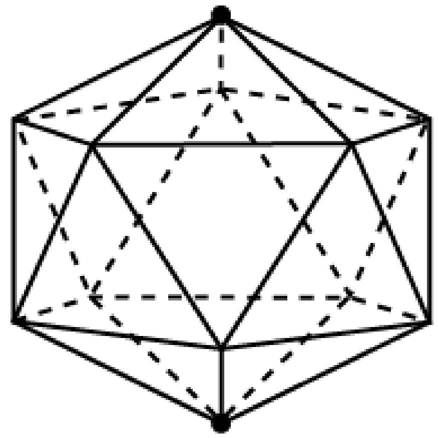
20(5+). Сколько имеется путей длины 3 по рёбрам единичного куба из одной его вершины в противоположную вершину?



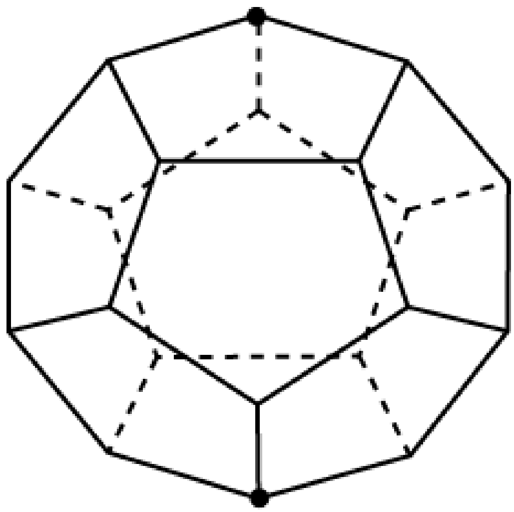
21(5+). Сколько имеется путей длины 2 по рёбрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?



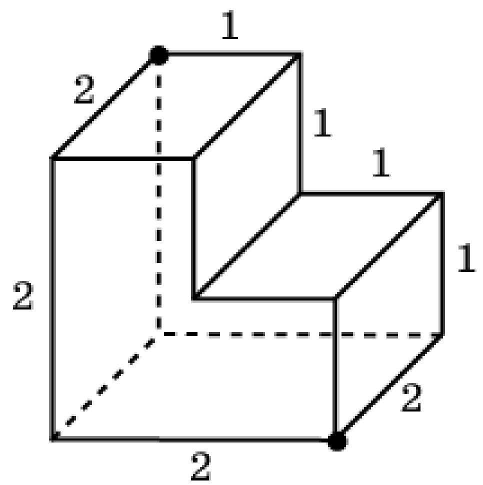
22(5+). Сколько имеется путей длины 3 по рёбрам единичного икосаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?



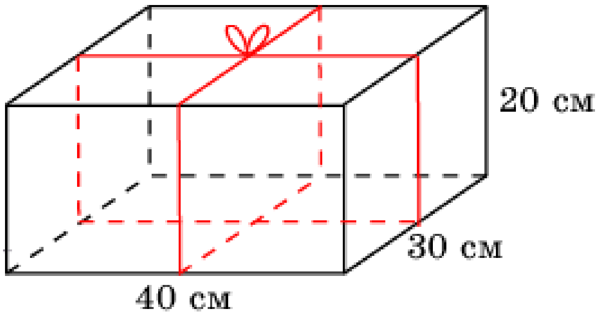
23(5+). Сколько имеется путей длины 5 по рёбрам единичного додекаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?



24(5+). Сколько имеется путей длины 6 по рёбрам многогранника, изображенного на рисунке, из одной его отмеченной вершины в другую отмеченную вершину?



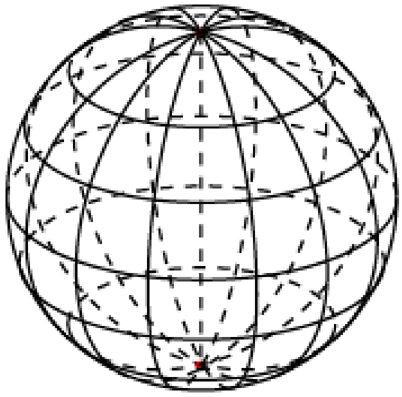
25(6+). Коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 40 см x 30 см x 20 см требуется обвязать веревкой как показано на рисунке. Найдите длину веревки, если на узел требуется 10 см веревки.



26(6+). Первый дошедший до нас способ нахождения размеров Земли был предложен и осуществлен учёным из Александрии Эратосфеном в III в. до н. э. Из рассказов путешественников Эратосфену было известно, что в городе Сиене (ныне Асуан), находящемся к югу от Александрии, имеется колодец, дно которого освещается Солнцем ровно в полдень самого длинного дня в году. Измерения Эратосфена показали, что в тот же день и час отклонение Солнца от зенита в Александрии составляет $7^o12'$. Измерив расстояние от Александрии до Сиены с помощью посланного им гонца, Эратосфен определил длину окружности Земли. В переводе на современные меры длины она составляет 40000 км. Используя эти данные, найдите расстояние (в км) от Александрии до Сиены.

27(6+). Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под 56^o и 44^o северной широты соответственно. Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40000 км. В ответе укажите целое число километров.

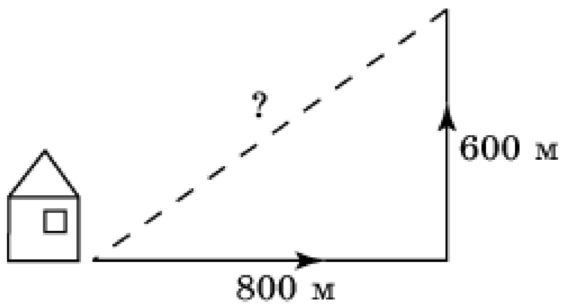
28(6+). Длина экватора земного шара примерно равна 40000 км. На сколько метров увеличился бы этот экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 м? (Примите $\pi \approx 3$.)



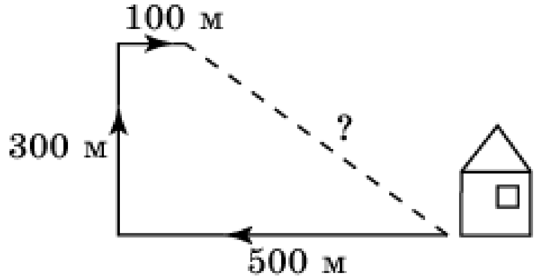
3. Теорема Пифагора

Пифагор (580–500 гг. до н. э.) - один из величайших учёных Древней Греции, а теорема Пифагора - одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных её доказательств. Простейший случай теоремы Пифагора для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а ещё ранее – китайским учёным (около 11000 лет до н.э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при помощи верёвочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на замечательное соотношение между числами 3, 4 и 5, а именно: $3^2 + 4^2 = 5^2$ и доказал, что аналогичное соотношение имеет место для сторон произвольного прямоугольного треугольника.

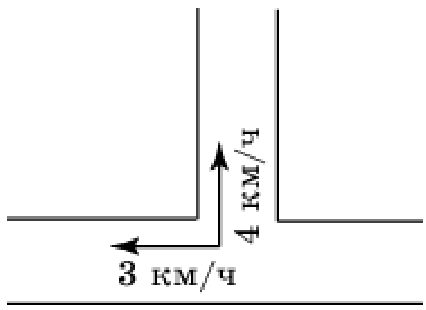
1(8+). Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?



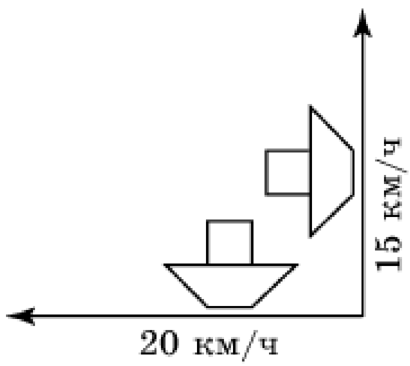
2(8+). Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. На каком расстоянии от дома оказалась девочка?



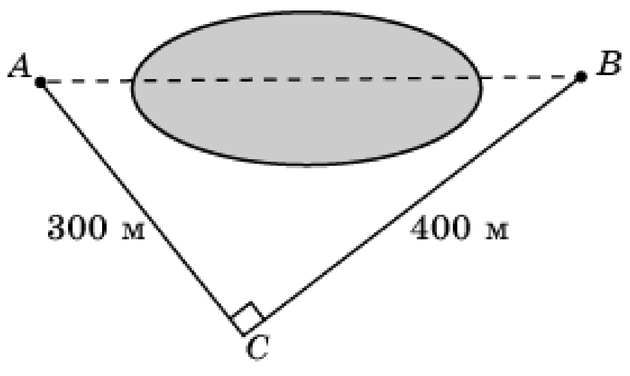
3(8+). Мальчик и девочка, расставшись на перекрёстке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка – 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?



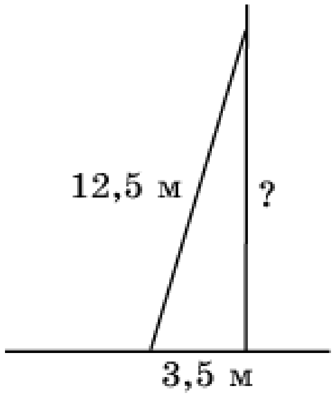
4(8+). Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?



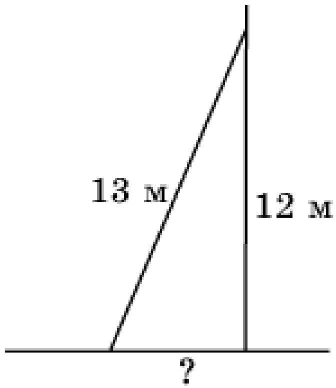
5(8+). Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние в метрах между пунктами A и B, расположенными на разных берегах озера.



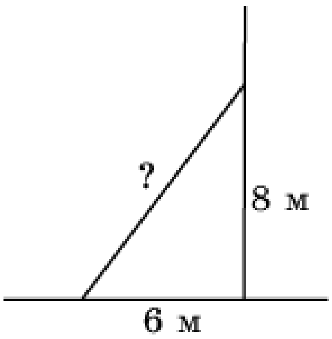
6(8+). Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние от её нижнего конца до стены равно 3,5 м. На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?



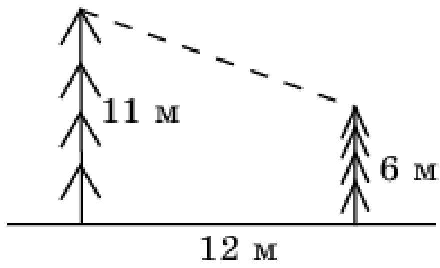
7(8+). На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 м, чтобы верхний её конец оказался на высоте 12 м?



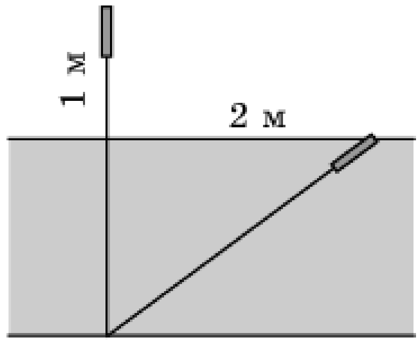
8(8+). Какой длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дома на высоте 8 метров, если её нижний конец отстоит от дома на 6 м?



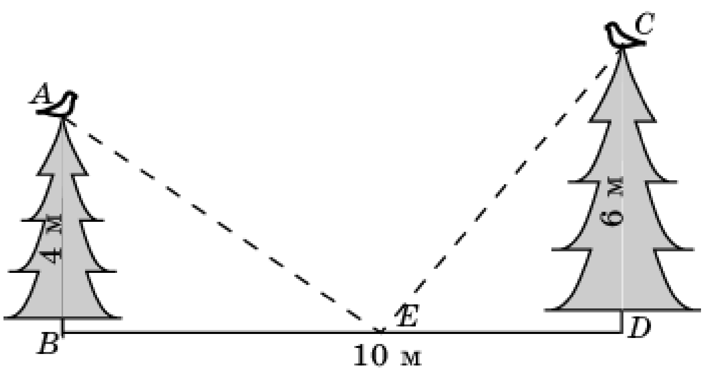
9(8+). В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 11 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.



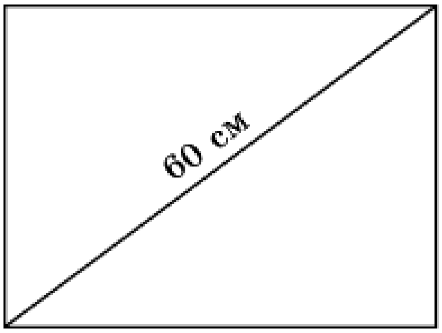
10(8+). Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.



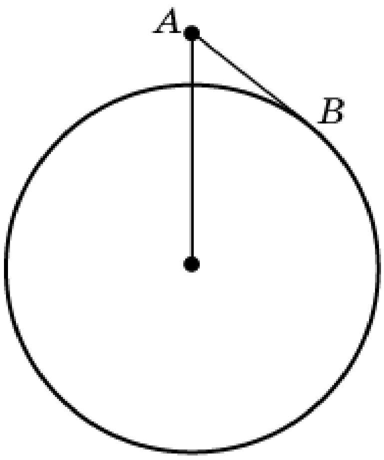
11(8+). На вершинах двух ёлок сидят две вороны. Высота ёлок равна 4 м и 6 м. Расстояние между ними равно 10 м. На каком расстоянии *BE* нужно положить сыр для этих ворон, чтобы они находились в равных условиях, т.е. чтобы расстояния от них до сыра было одинаковыми?



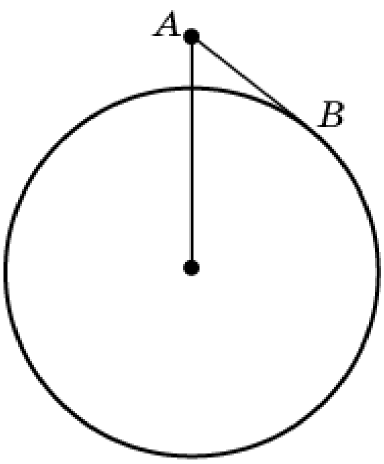
12(8+). Отношение высоты к ширине экрана телевизора равно 0,75. Диагональ равна 60 см. Найдите ширину экрана.



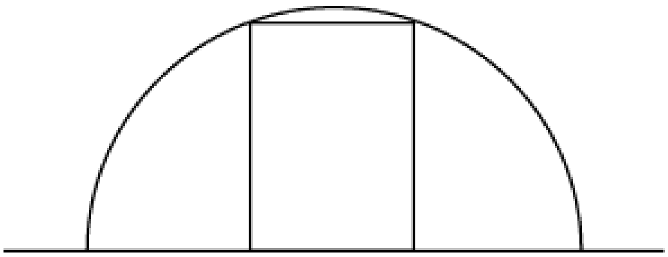
13(8+). Дальностью горизонта для наблюдателя *A*, находящегося над земной поверхностью, называется длина отрезка касательной *AB* к земной поверхности. Найдите дальность горизонта для наблюдателя (в км), находящегося на корабле на высоте 40 м над уровнем моря. (Радиус земного шара приближённо равен 6370 км).



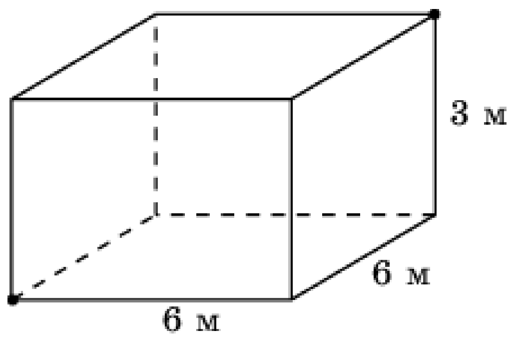
14(8+). Найдите дальность горизонта для летчика самолета (в км), летящего на высоте 10 км над Землей. (Радиус земного шара приближённо равен 6370 км).



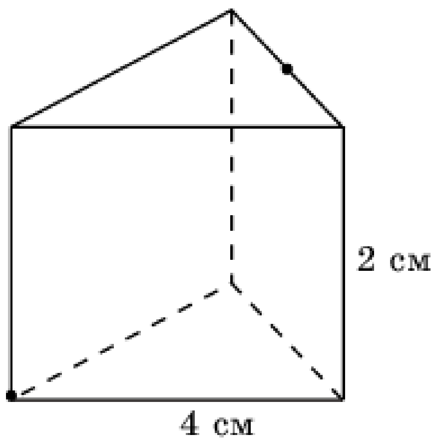
15(8+). Туннель имеет форму полукруга радиуса 3 м. Какой наибольшей высоты может быть машина шириной 2 м, чтобы проехать по этому туннелю. В ответе укажите приближённое значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.



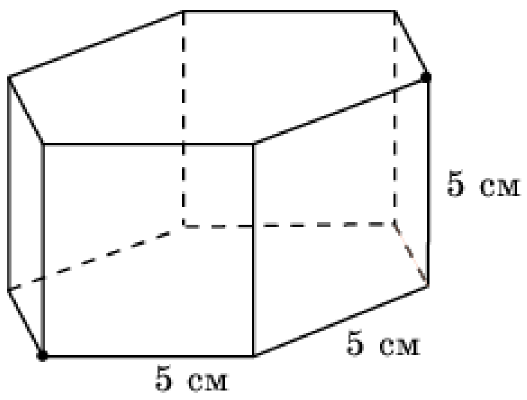
16(10+). Найдите расстояние между противоположными углами комнаты в форме прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке.



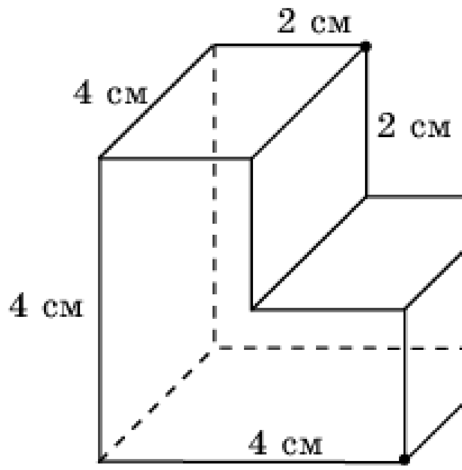
17(10+). Найдите расстояние между отмеченными точками детали в форме правильной треугольной призмы, изображённой на рисунке.



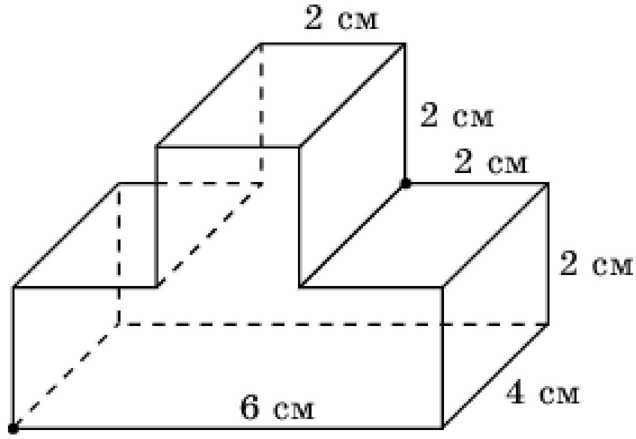
18(10+). Найдите расстояние между отмеченными точками детали в форме правильной шестиугольной призмы, изображённой на рисунке.



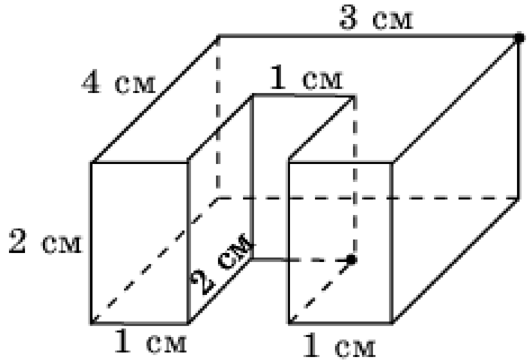
19(10+). Найдите расстояние между отмеченными точками детали, изображённой на рисунке (все углы прямые).



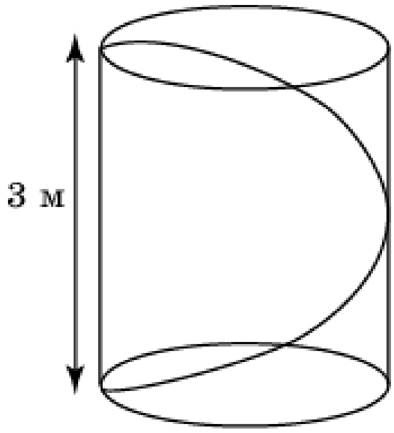
20(10+). Найдите расстояние между отмеченными точками детали, изображённой на рисунке (все углы прямые).



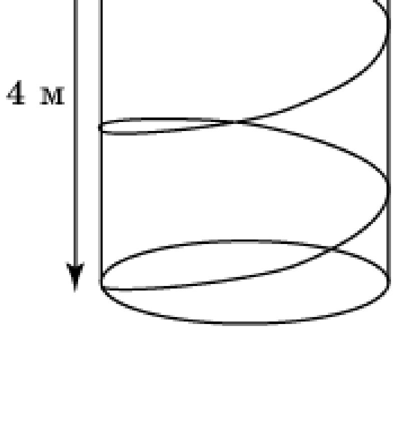
21(10+). Найдите расстояние между отмеченными точками детали, изображённой на рисунке (все углы прямые).



22(8+). Винтовая лестница расположена вдоль боковой поверхности цилиндра радиуса 1 м, поднимается под постоянным углом к горизонтальной плоскости на высоту 3 м, делая при этом полный оборот. Найдите примерную длину лестницы. Примите $\pi \approx 3$.

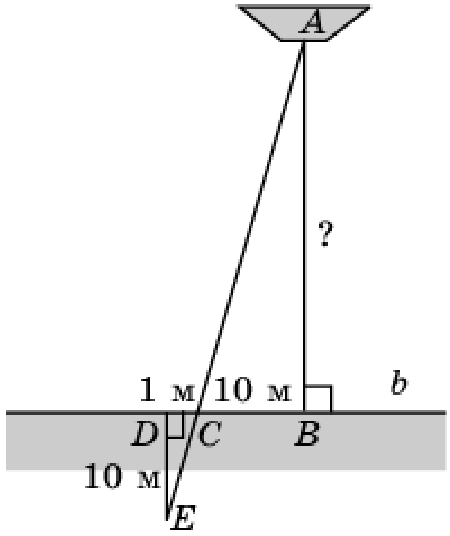


23(8+). Винтовая горка высотой 4 м расположена вдоль боковой поверхности цилиндра радиуса 2 м, спускается под постоянным углом к горизонтальной плоскости, делая при этом два полных оборота. Найдите примерную длину спуска горки. Примите $\pi \approx 3$.

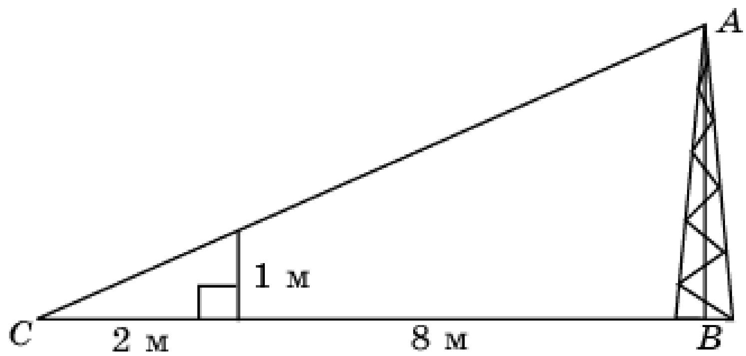


4. Подобие

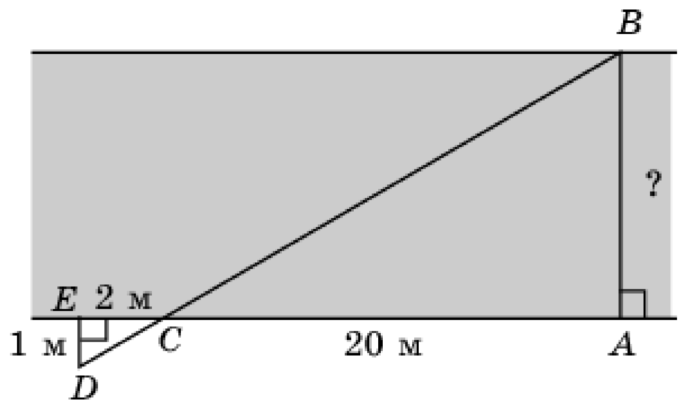
1(8+). Используя данные, приведённые на рисунке, найдите расстояние *AB* от лодки *A* до берега *b*.



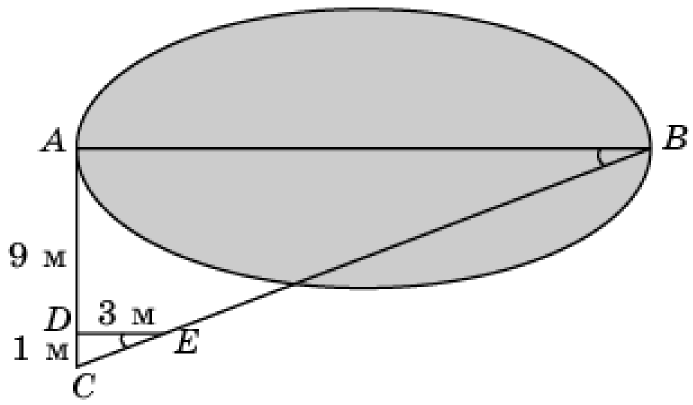
2(8+). Используя данные, приведённые на рисунке, найдите высоту мачты *AB*.



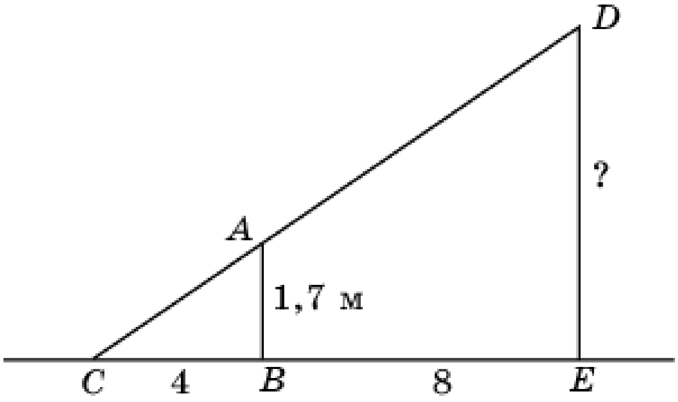
3(8+). Используя данные, приведённые на рисунке, найдите ширину *AB* реки.



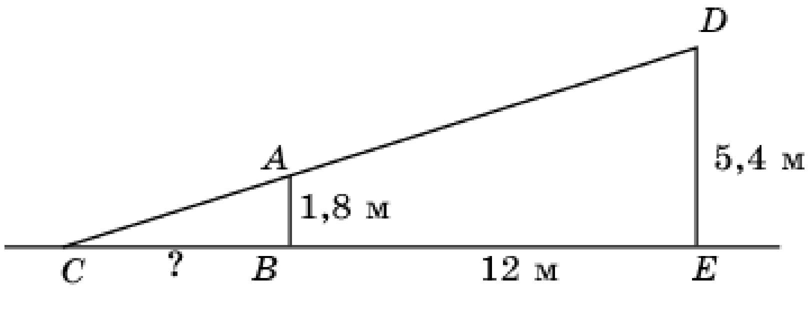
4(8+). Используя данные, приведённые на рисунке, найдите ширину *AB* озера.



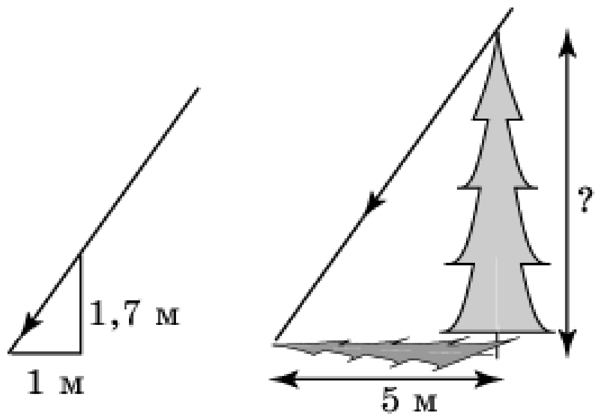
5(8+). Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырём шагам. На какой высоте расположен фонарь?



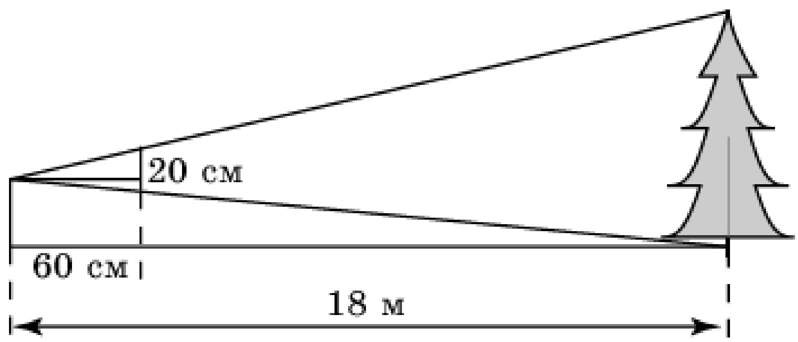
6(8+). Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.



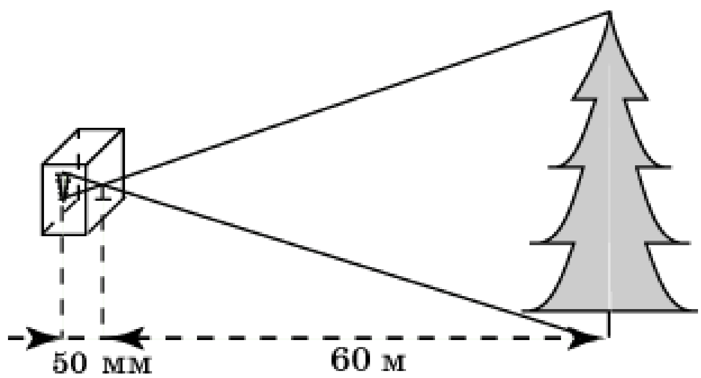
7(8+). Длина тени от дерева составляет 5 м. В то же время и в том же месте длина тени человека ростом 1 м 70 см составляет 1 м. Найдите высоту дерева.



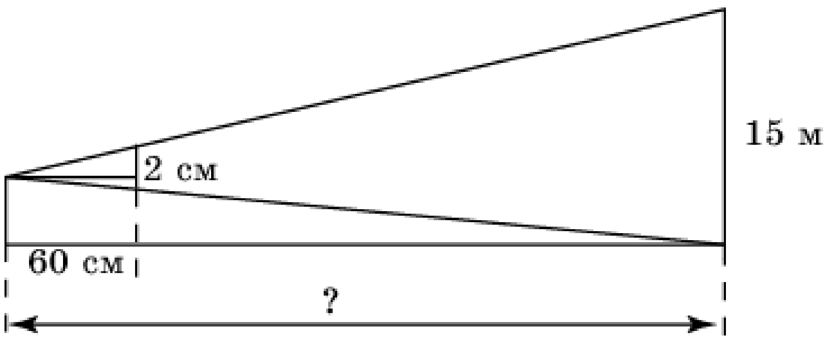
8(8+). Чтобы измерить высоту дерева, ученик держит линейку в вертикальном положении на расстоянии вытянутой руки. Расстояние от глаза ученика до линейки равно 60 см. Часть линейки, закрывающая дерево, составляет 20 см. Расстояние от ученика до дерева равно 18 м. Чему равна высота дерева?



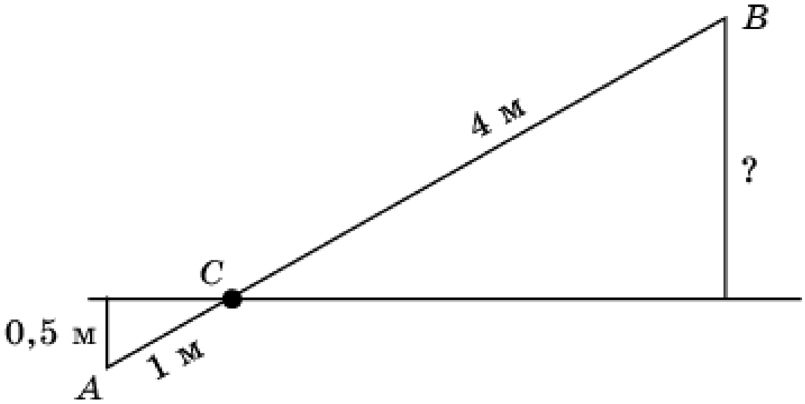
9(8+). Изображение дерева на фотопленке имеет высоту 15 мм. Найдите высоту дерева, если расстояния от объектива фотоаппарата до изображения и до дерева равны соответственно 50 мм и 60 м.



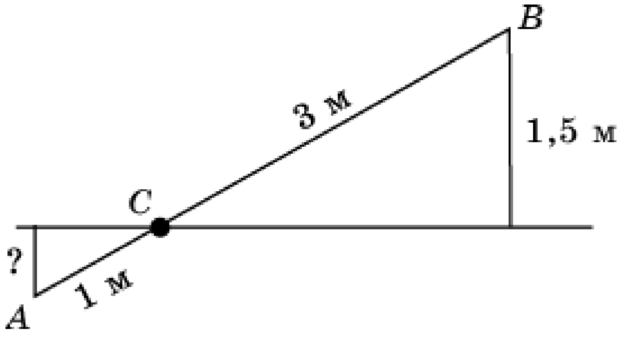
10(8+). Столб высотой 15 м закрывается монетой диаметром 2 см, если её держать на расстоянии 60 см от глаза. Найдите расстояние (в м) от наблюдателя до столба.



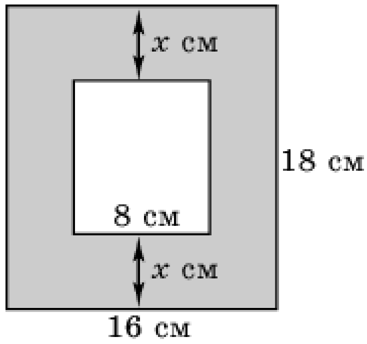
11(8+). Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо – 4 м. На какую высоту поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого плеча опускается на 0,5 м? Ответ дайте в метрах.



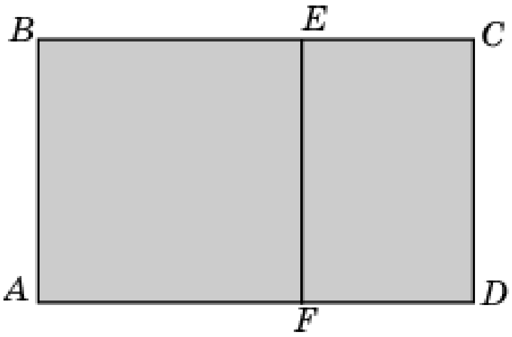
12(8+). Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо – 3 м. На какую высоту опускается конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,5 м? Ответ дайте в метрах.



13(8+). Какой должна быть ширина (x) прямоугольной рамки для фотографии, указанной на рисунке, чтобы прямоугольники рамки и фотографии были подобны?



14(8+). От прямоугольника *ABCD* отрезали квадрат *ABEF*. При этом остался прямоугольник *CDFE*, подобный исходному. Найдите отношение меньшей стороны исходного прямоугольника к большей.



15(8+). Диаметр Луны приближённо равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408000 км от Земли. На какое расстояние (в сантиметрах) от наблюдателя нужно удалить монету диаметра 1 см, чтобы она казалась ему такой же величины, как Луна? В ответе укажите целое число сантиметров.

16(8+). Диаметр Луны приближённо равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408000 км от Земли. На какое расстояние (в метрах) от наблюдателя нужно удалить тарелку диаметра 25 см, чтобы она казалась ему такой же величины, как Луна?

17(8+). Диаметр Луны приближённо равен 3400 км. Диаметр Солнца приближённо равен 1400000 км, и оно кажется с Земли такой же величины, как Луна. Во сколько раз расстояние от Земли до Солнца больше чем расстояние от Земли до Луны? В ответе укажите целое число сотен раз.

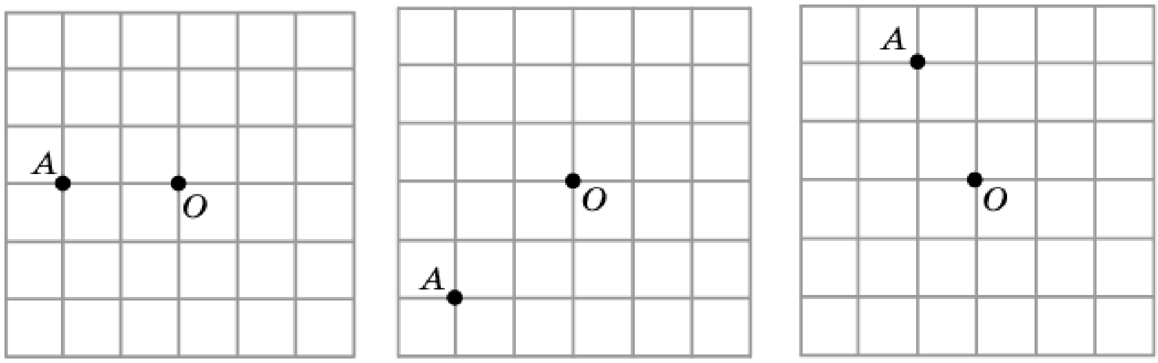
18(8+). Диаметр Луны приближённо равен 3400 км, и она находится на расстоянии 408000 км от Земли. Диаметр Солнца приближённо равен 1400000 км, и оно кажется с Земли такой же величины, как Луна. Найдите приближенное расстояние от Земли до Солнца (в км).

5. Симметрия

С древних времён люди занимались поисками гармонии и совершенства. Одним из их проявлений является симметрия. Симметрия встречается в природе, архитектуре, скульптуре, живописи и т.д., используется в науке и технике.

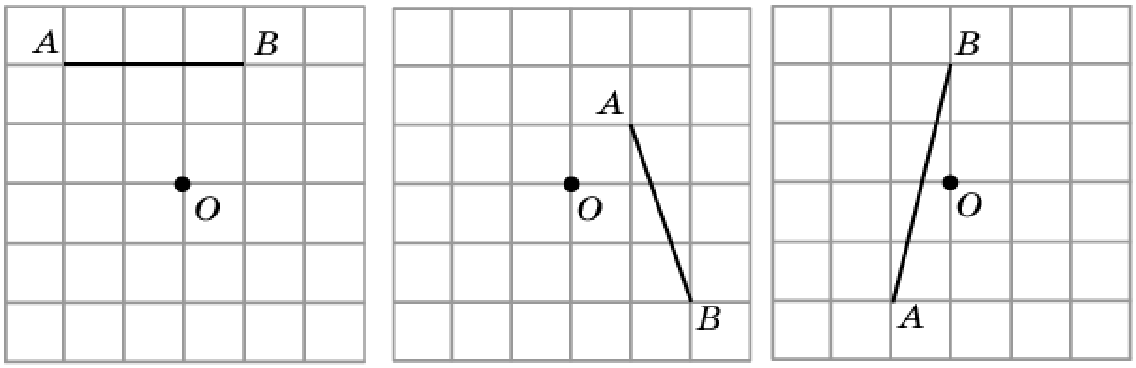
Центральная симметрия

1(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точки, как показано на рисунке. Изобразите точку, симметричную данной точке *A* относительно точки *O*.



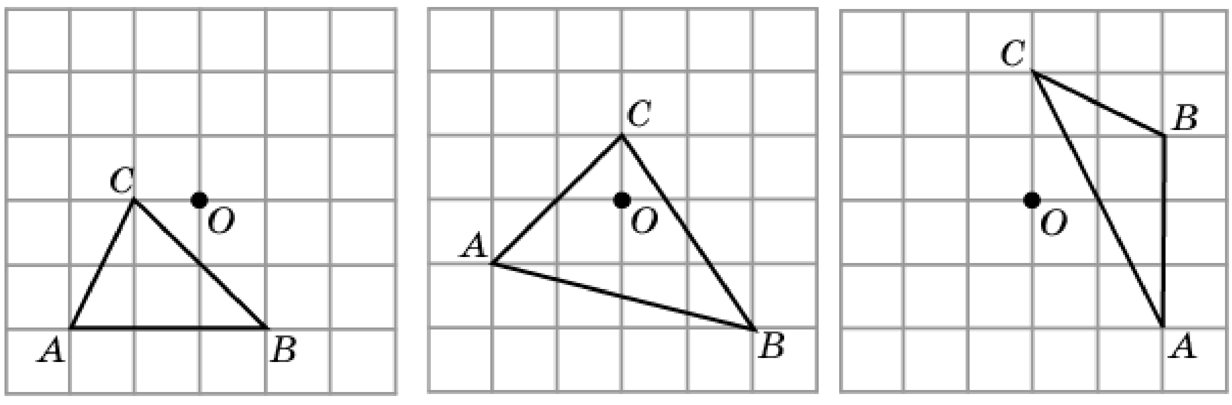
а) б) в)

2(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точку и отрезок, как показано на рисунке. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку *AB* относительно точки *O*.



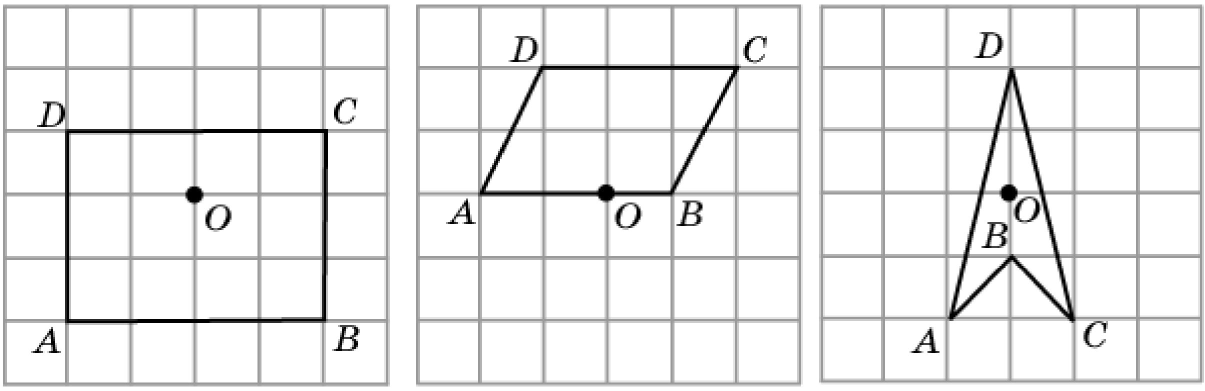
а) б) в)

3(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точку и треугольник, как показано на рисунке. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику *ABC* относительно точки *O*.



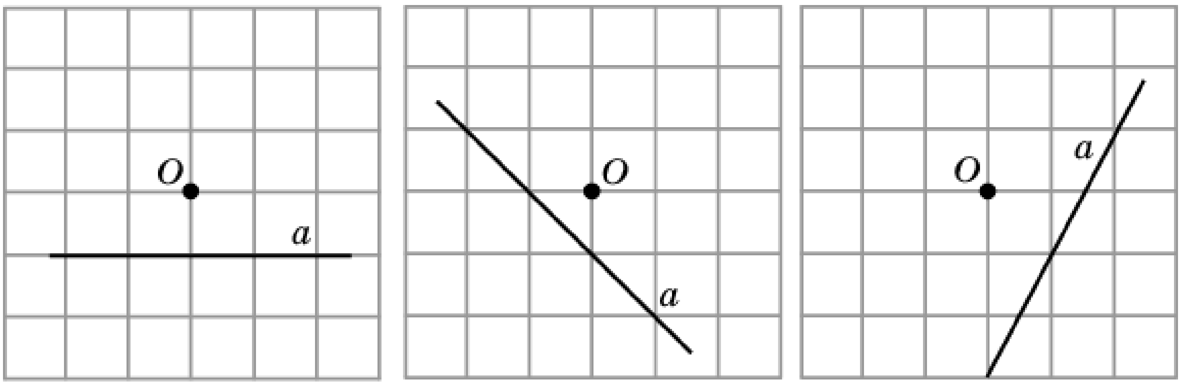
а) б) в)

4(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точку и четырёхугольник, как показано на рисунке. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному четырёхугольнику *ABCD* относительно точки *O*.



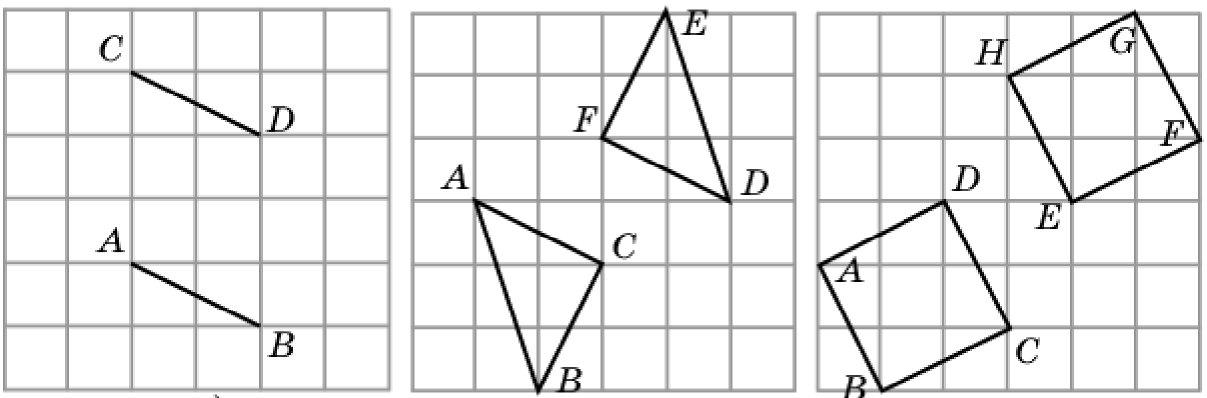
а) б) в)

5(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке. Изобразите прямую, симметричную данной прямой *a* относительно точки *O*.



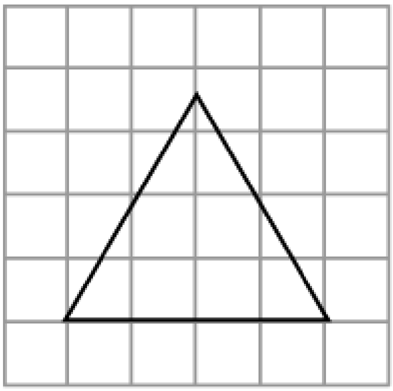
а) б) в)

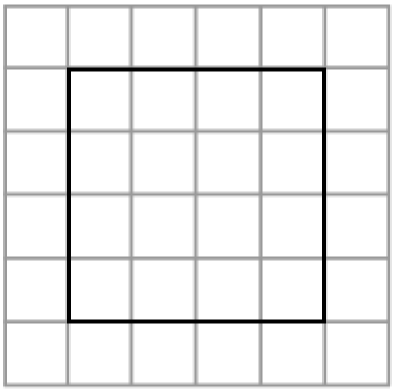
6(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте фигуры, как показано на рисунке. Укажите центр симметрии для двух симметричных: а) отрезков; б) треугольников; в) четырёхугольников.

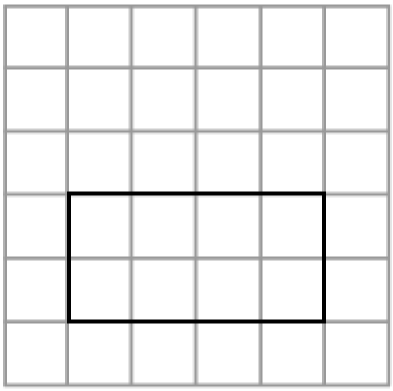


а) б) в)

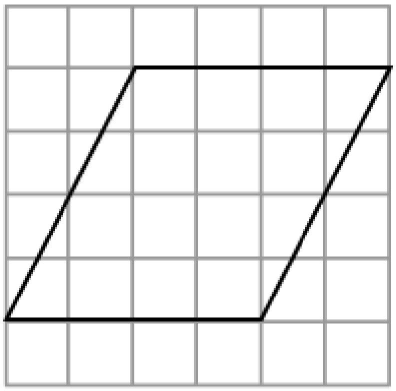
7(6+). Имеет ли центр симметрии: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник? Если да, укажите его.

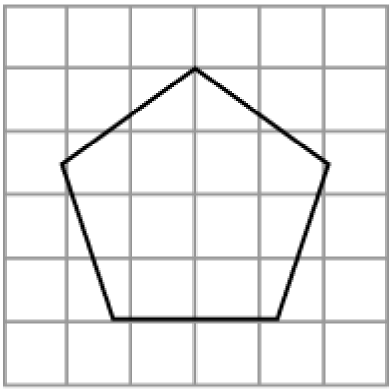

а)

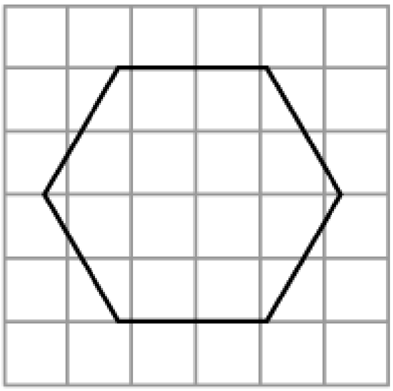

б)


в)

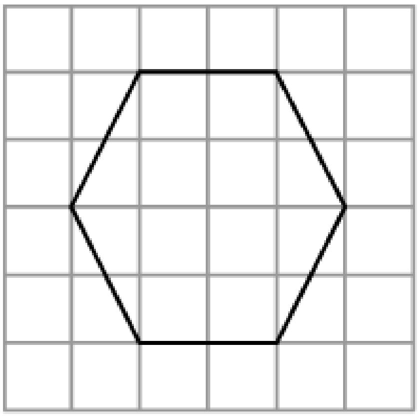
8(6+). Имеет ли центр симметрии: а) параллелограмм; б) правильный пятиугольник; в) правильный шестиугольник? Если да, укажите его.

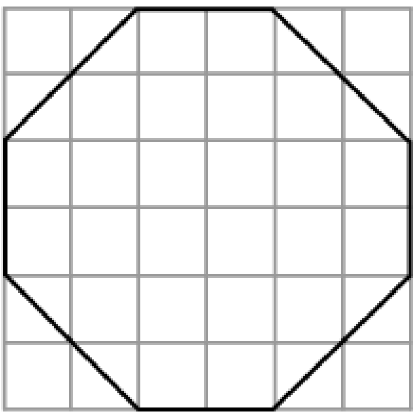

а)


б)

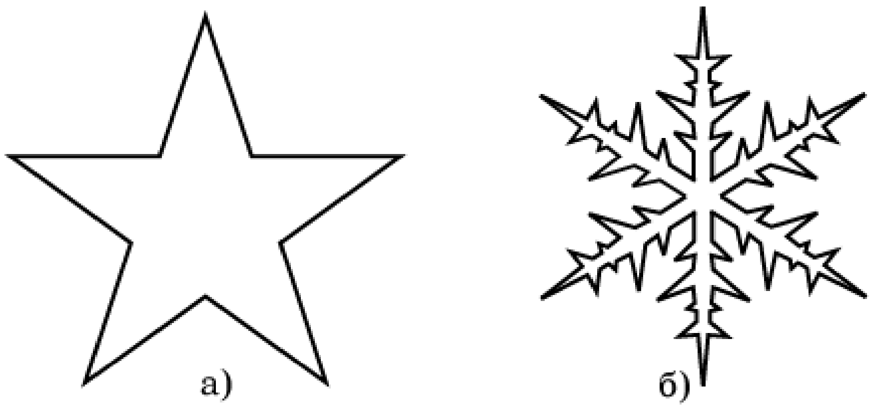

в)

9(6+). Имеет ли центр симметрии: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке? Если да, укажите его.


а)


б)

10(6+). Имеет ли центр симметрии: а) правильная пятиугольная звезда; б) правильная шестиугольная снежинка, изображённая на рисунке?



а) б)

11(6+). Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке, имеют центр симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

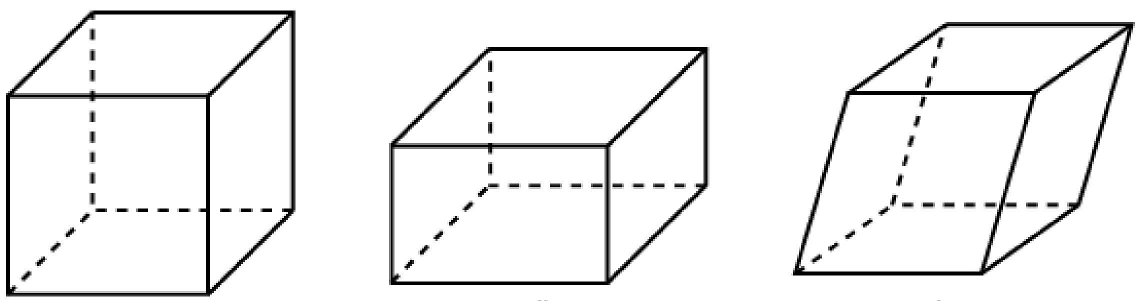
С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

12(6+). Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке, имеют центр симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

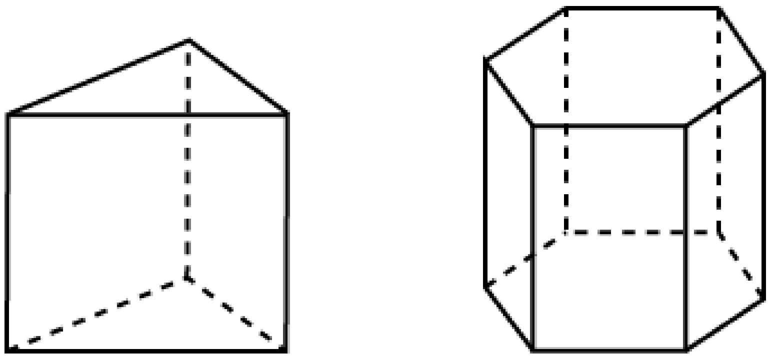
N O P Q R S T U V W X Y Z

13(10+). Имеет ли центр симметрии: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) косой параллелепипед?



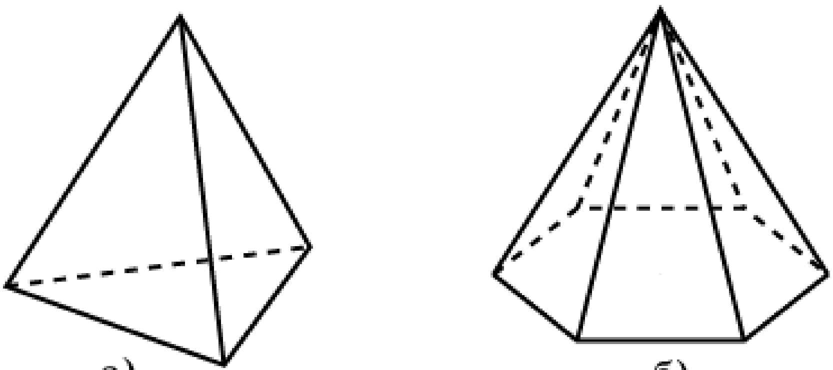
а) б) в)

14(10+). Имеет ли центр симметрии: а) правильная треугольная призма; б) правильная шестиугольная призма?



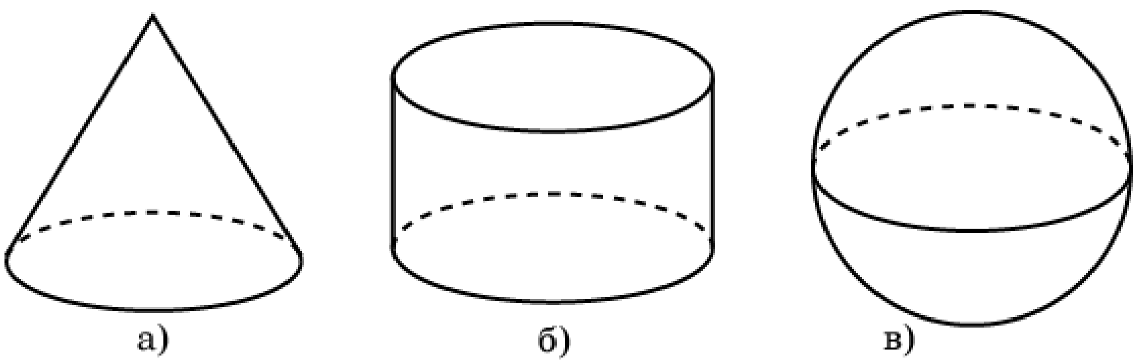
а) б)

15(10+). Имеет ли центр симметрии: а) правильная треугольная пирамида; б) правильная шестиугольная пирамида?



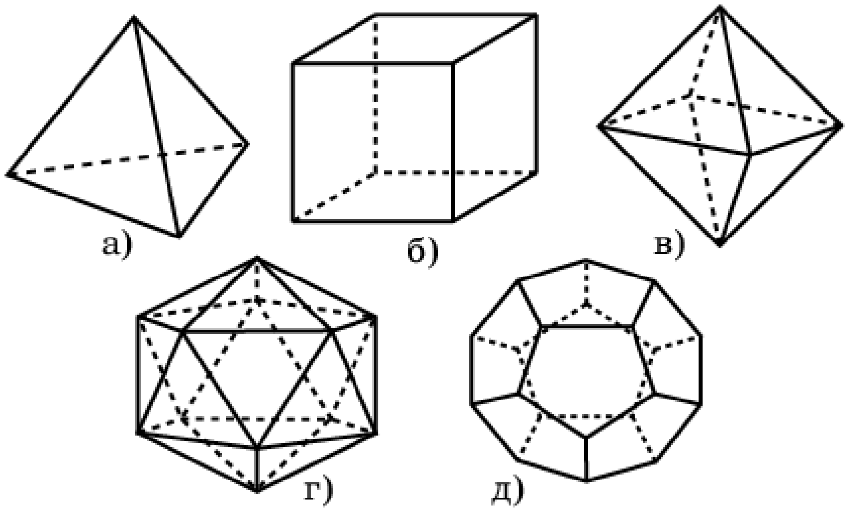
а) б)

16(10+). Имеет ли центр симметрии: а) конус; б) цилиндр; в) шар?



а) б) в)

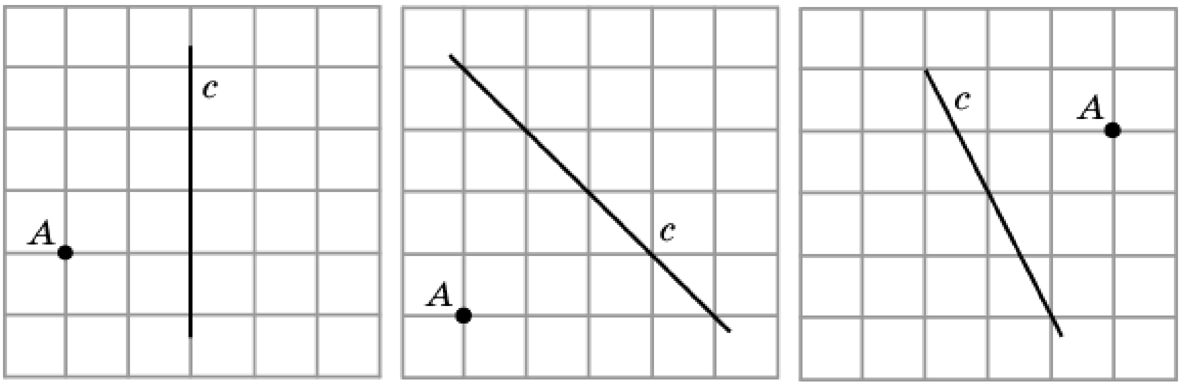
17(10+). Какие из правильных многогранников имеют центр симметрии?



а) б) в) г) д)

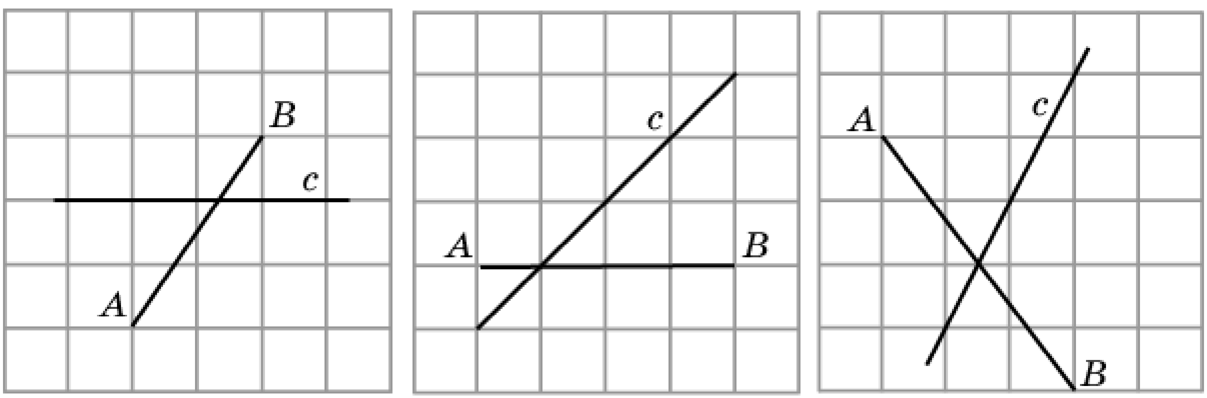
Осевая симметрия

18(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке. Изобразите точку, симметричную данной точке *A* относительно прямой *c*.



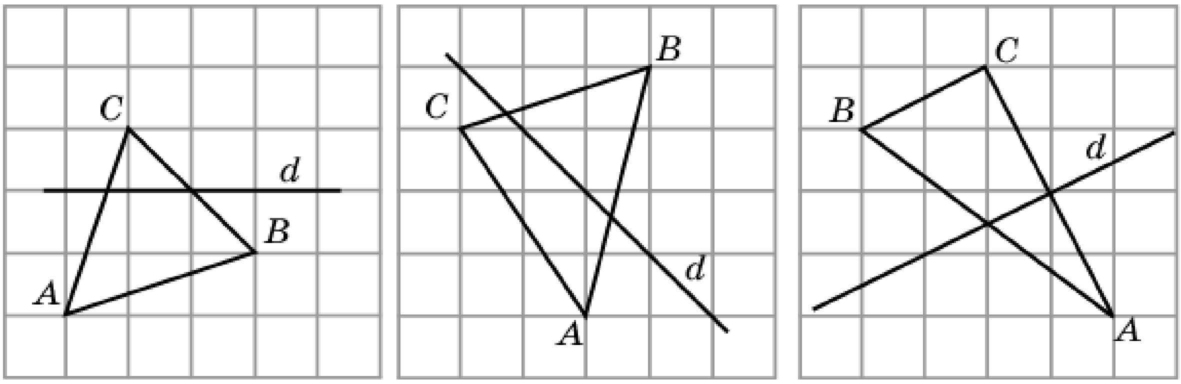
а) б) в)

19(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте отрезок и прямую, как показано на рисунке. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку *AB* относительно прямой *c*.



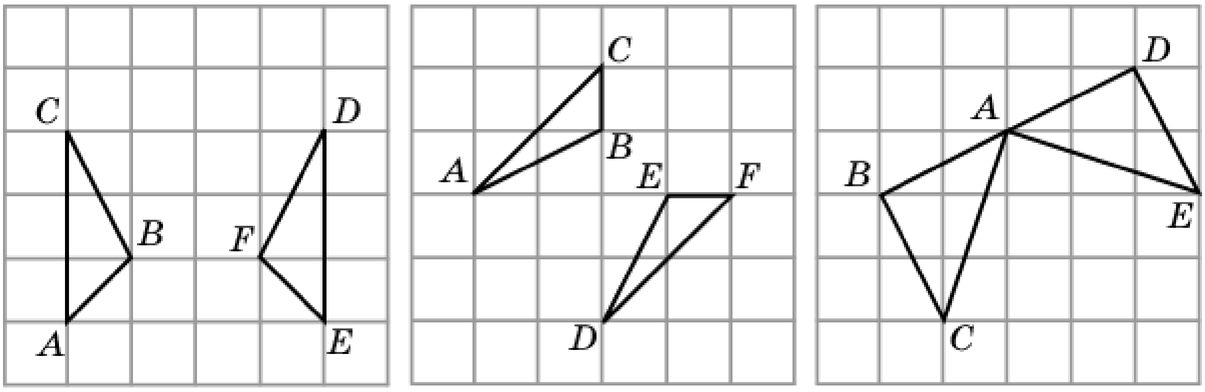
а) б) в)

20(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник и прямую, как показано на рисунке. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику относительно прямой d.



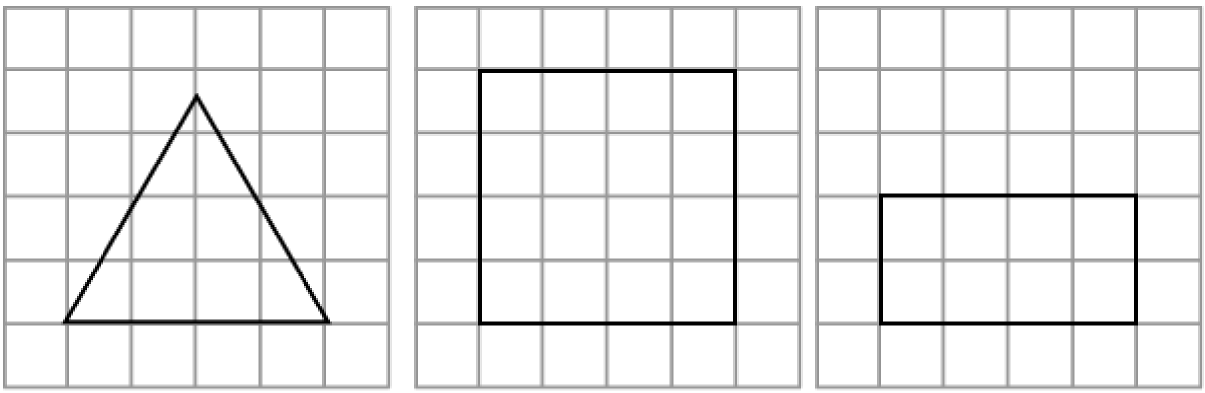
а) б) в)

21(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте треугольники, как показано на рисунке. Изобразите прямую, относительно которой они симметричны.



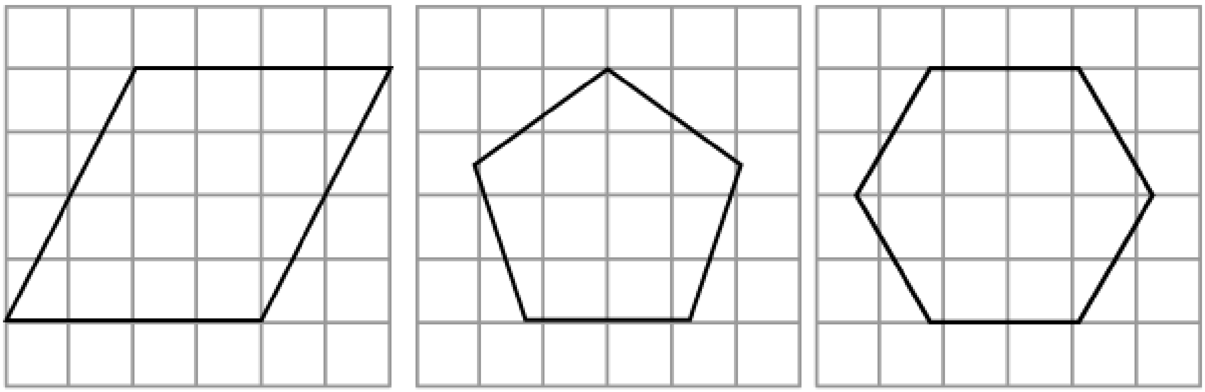
а) б) в)

22(6+). Имеет ли оси симметрии: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник? Если да, укажите их.



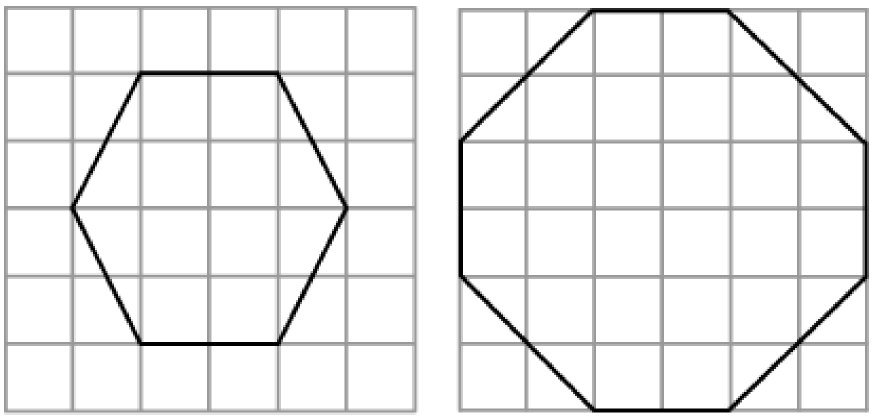
а) б) в)

23(6+). Имеет ли оси симметрии: а) параллелограмм; б) правильный пятиугольник; в) правильный шестиугольник? Если да, укажите их.



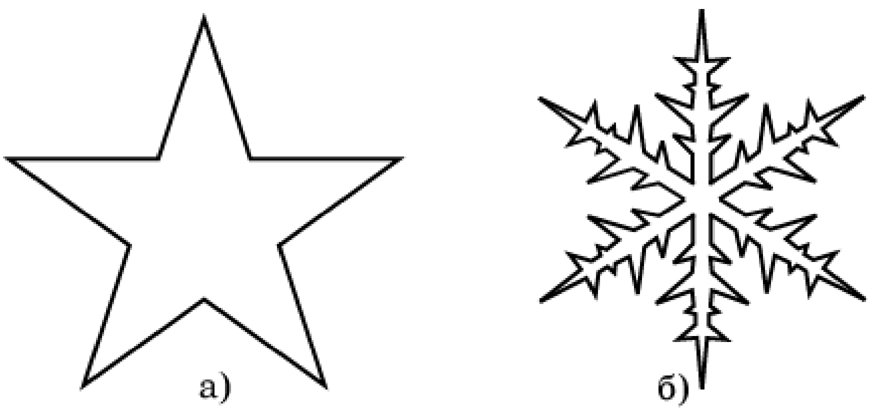
а) б) в)

24(6+). Имеет ли оси симметрии: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке? Если да, укажите их.



а) б)

25(6+). Имеет ли оси симметрии: а) правильная пятиугольная звезда; б) правильная шестиугольная снежинка?



а) б)

26(6+). Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке, имеют оси симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

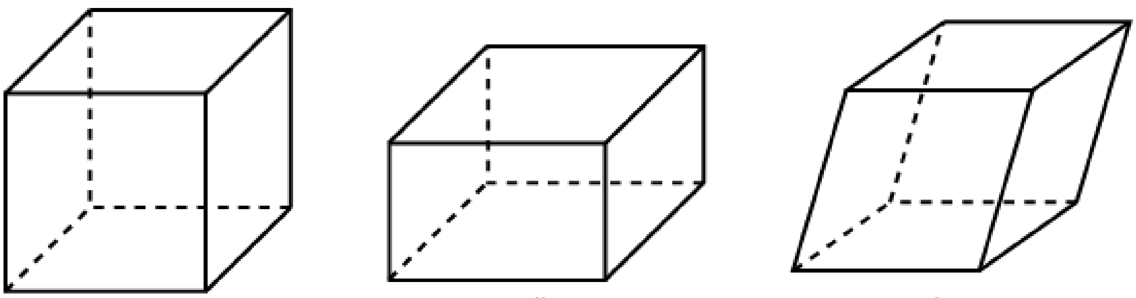
С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

27(6+). Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке, имеют оси симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

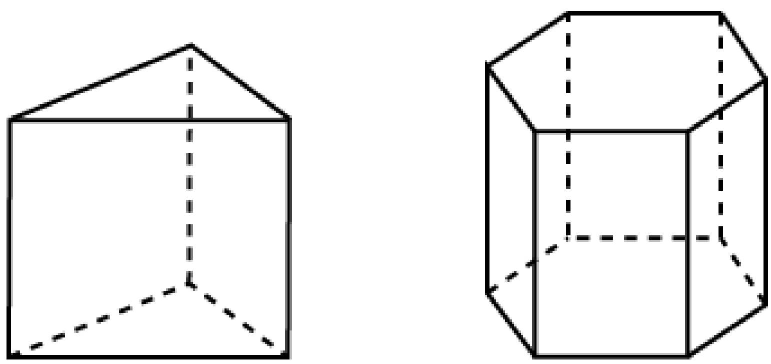
N O P Q R S T U V W X Y Z

28(10+). Сколько осей симметрии имеет: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) косой параллелепипед, изображенные на рисунке?



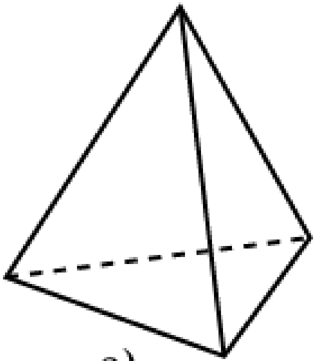
а) б) в)

29(10+). Сколько осей симметрии имеет: а) правильная треугольная призма; б) правильная шестиугольная призма?

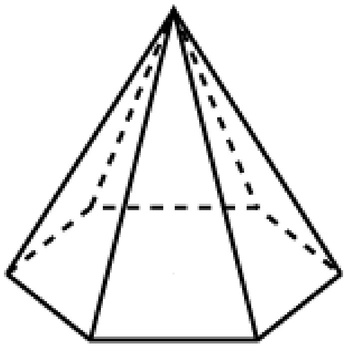


а) б)

30(10+). Имеет ли оси симметрии: а) правильная треугольная пирамида; б) правильная шестиугольная пирамида?

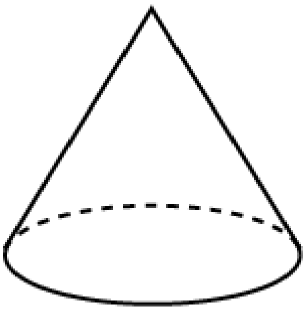


а)

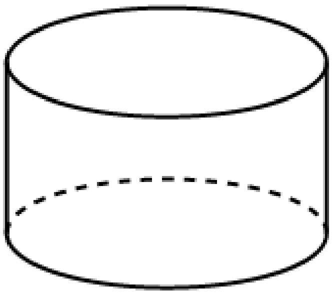


б)

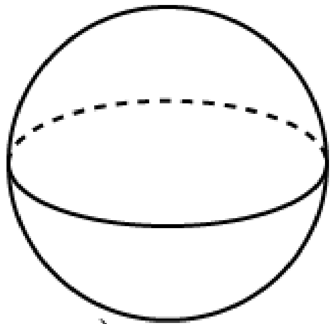
31(10+). Имеет ли оси симметрии: а) конус; б) цилиндр; в) шар?



а)

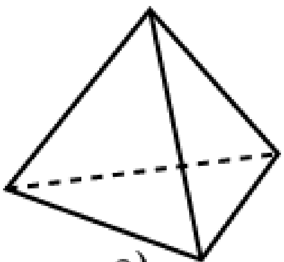


б)

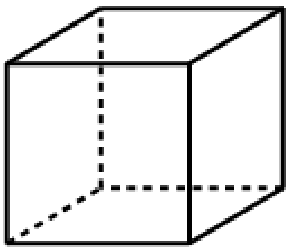


в)

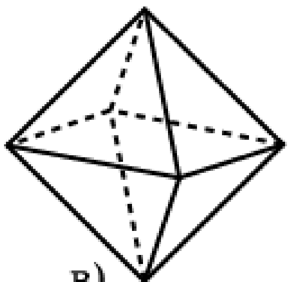
32(10+). Сколько осей симметрии имеют правильные многогранники?



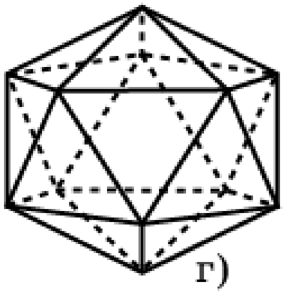
а)



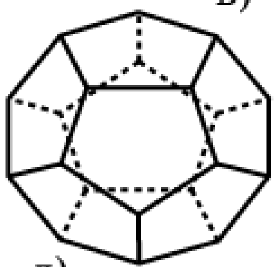
б)



в)



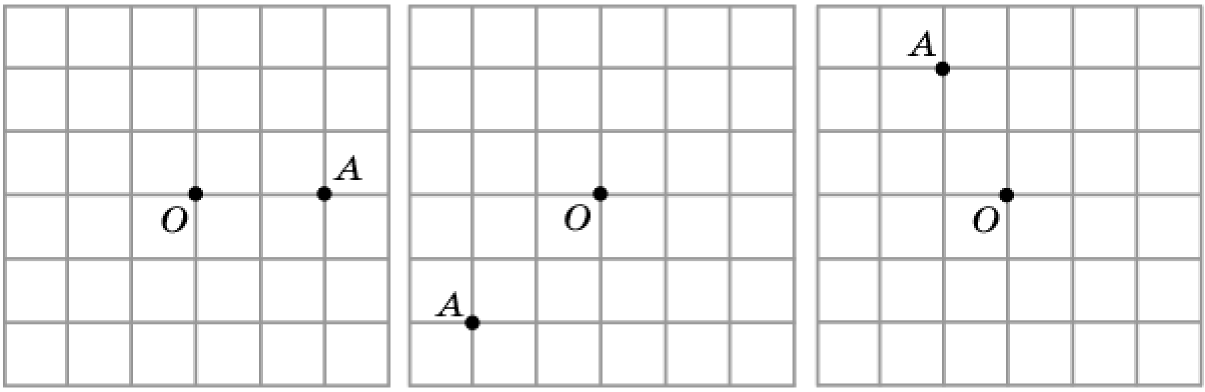
г)



д)

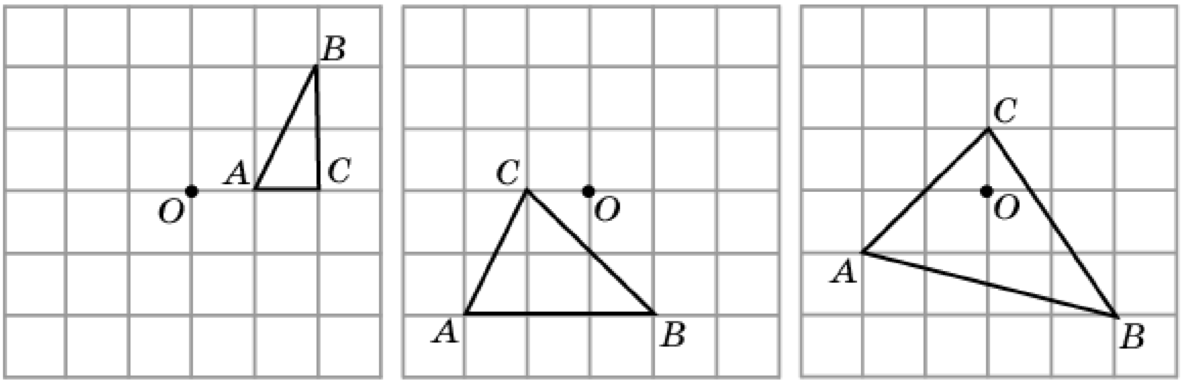
Поворот

33(6+). На клетчатой бумаге изобразите точку, полученную поворотом данной точки *A* вокруг точки *O* на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.



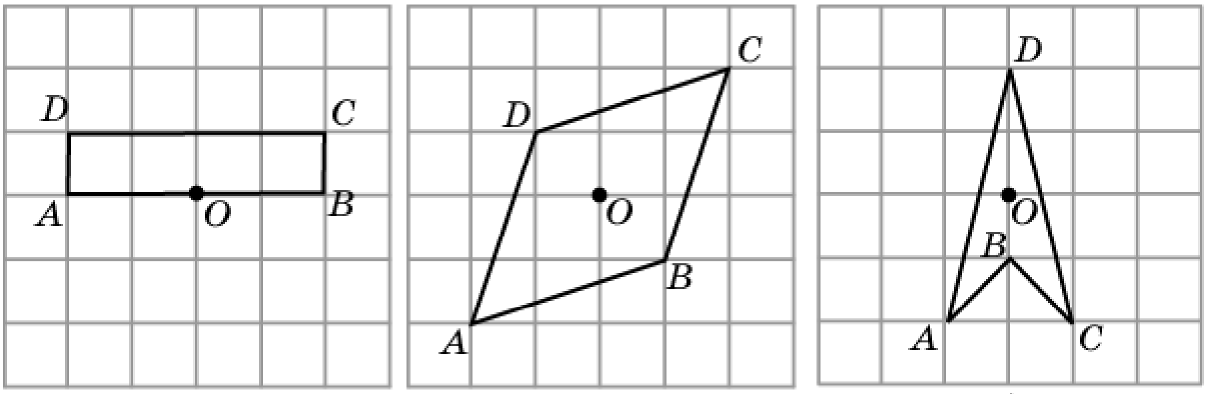
а) б) в)

34(6+). На клетчатой бумаге изобразите треугольник, полученный поворотом данного треугольника *ABC* вокруг точки *O* на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке.



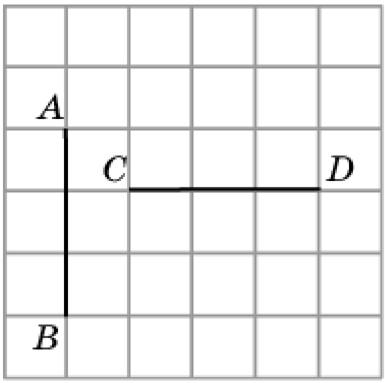
а) б) в)

35(6+). На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, полученный поворотом данного четырёхугольника *ABCD* вокруг точки *O* на угол 90° против часовой стрелки.

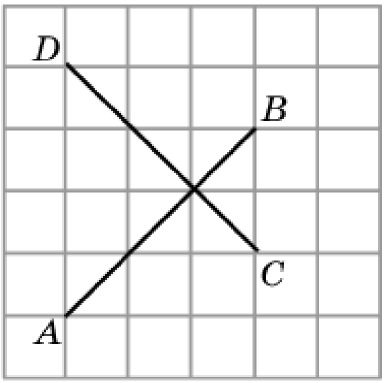


а) б) в)

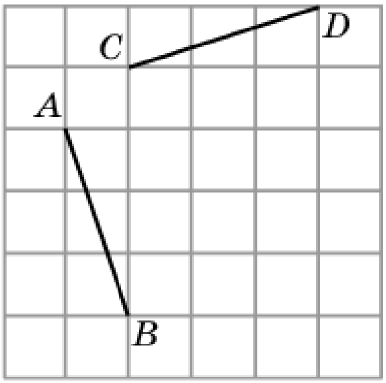
36(6+). Отрезок *CD* получен поворотом отрезка *AB* на угол 90^{o} против часовой стрелки. Укажите центр поворота.



а)

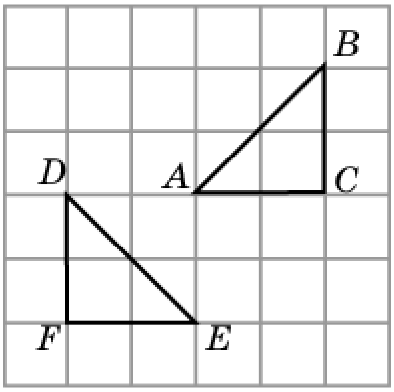


б)

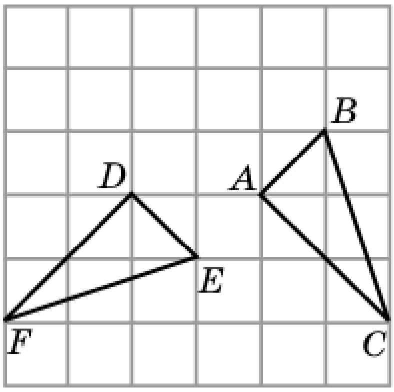


в)

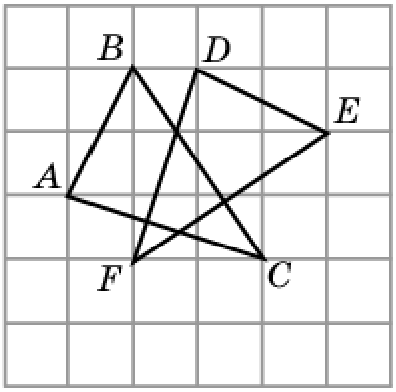
37(6+). Треугольник *DEF* получен поворотом треугольника *ABC* на угол 90^{o} по часовой стрелке. Укажите центр поворота.



а)

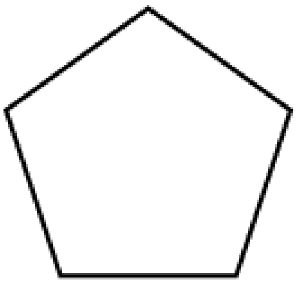


б)

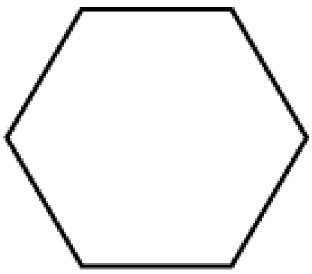


в)

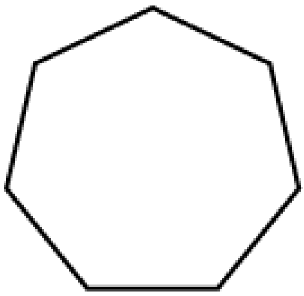
38(6+). Центр симметрии какого порядка имеет правильный: а) пятиугольник; б) шестиугольник; в) семиугольник?



а)

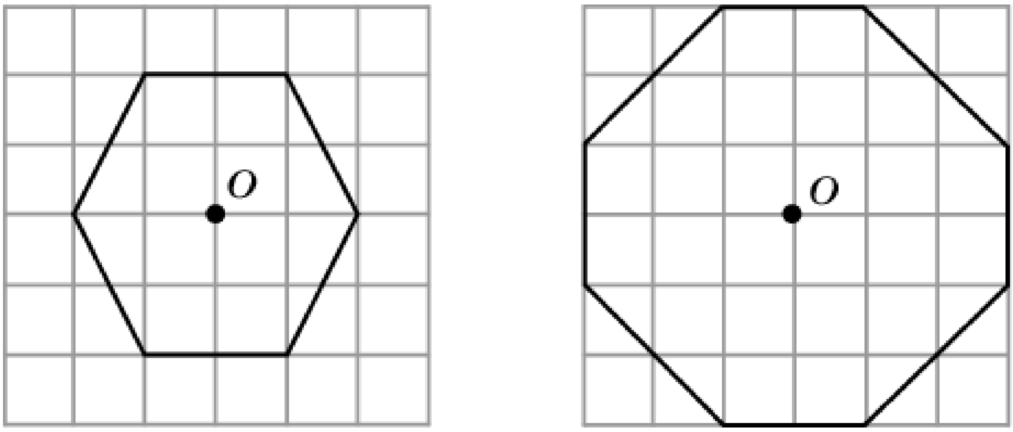


б)



в)

39(6+). Центром симметрии какого порядка является точка O для: а) шестиугольника; б) восьмиугольника, изображённого на рисунке?

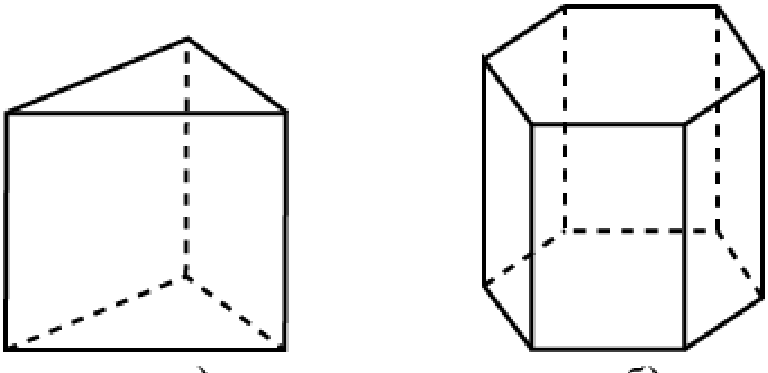


а) б)

40(6+). Центр симметрии какого порядка имеет: а) правильная пятиугольная звезда; б) правильная шестиугольная снежинка?

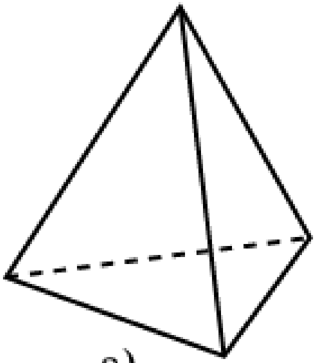
а) б)

41(10+). Оси симметрии какого порядка имеет: а) правильная треугольная призма; б) правильная шестиугольная призма?

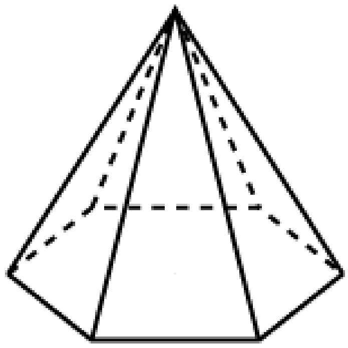


а) б)

42(10+). Оси симметрии какого порядка имеет: а) правильная треугольная пирамида; б) правильная шестиугольная пирамида?

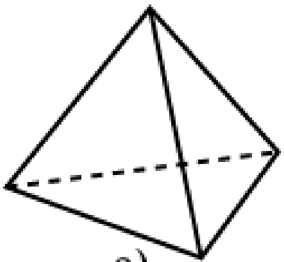


а)

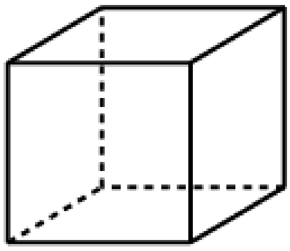


б)

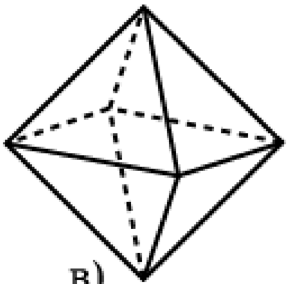
43(10+). Оси симметрии какого порядка имеют правильные многогранники?



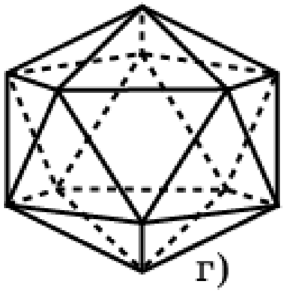
а)



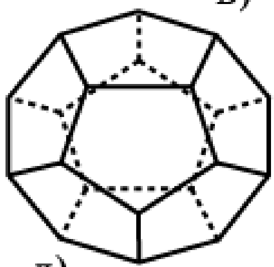
б)



в)



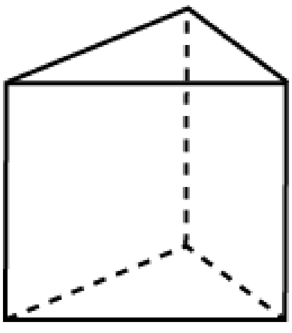
г)



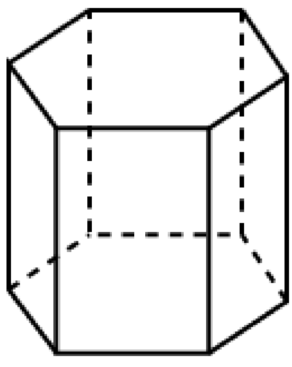
д)

Зеркальная симметрия

44(10+). Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная треугольная призма; б) правильная шестиугольная призма?

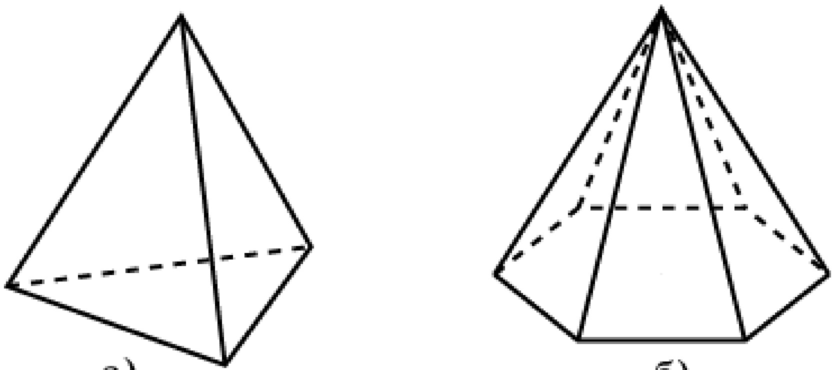


а)



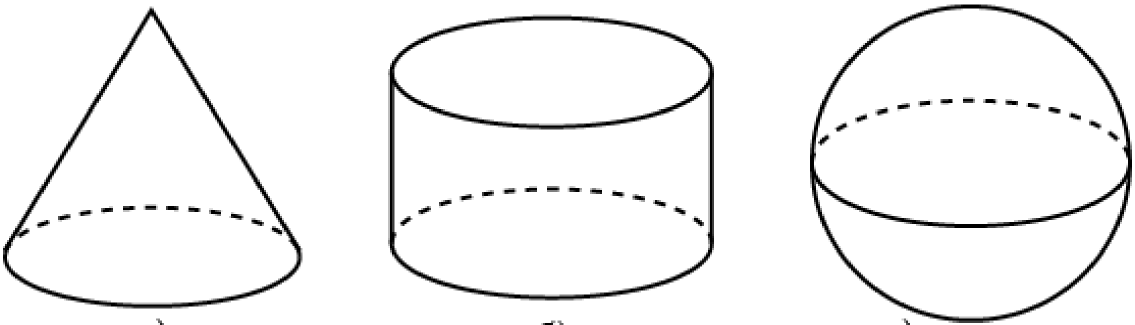
б)

45(10+). Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная треугольная пирамида; б) правильная шестиугольная пирамида?



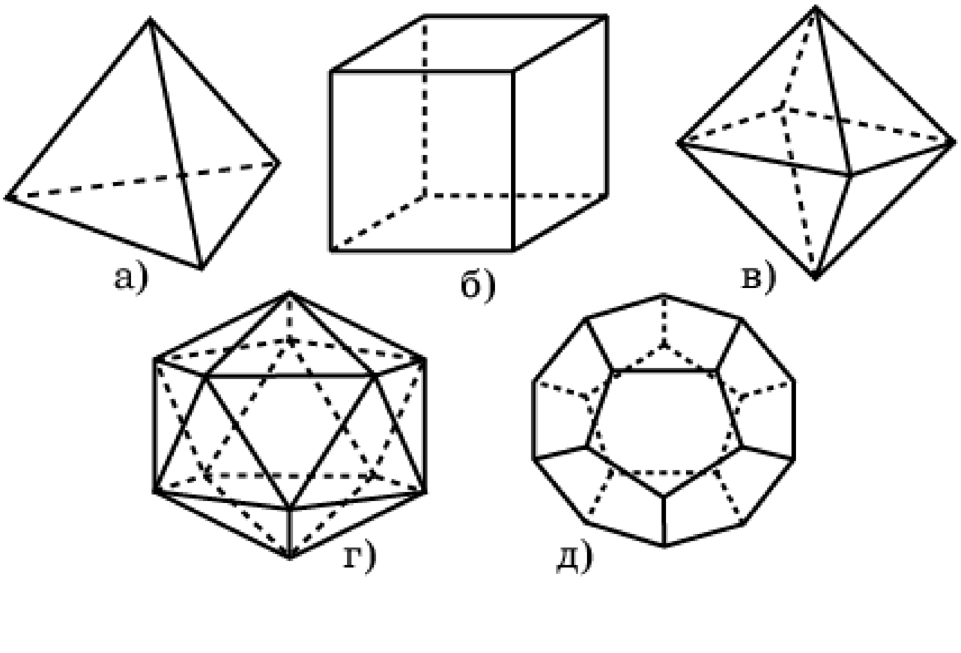
а) б)

46(10+). Сколько плоскостей симметрии имеет: а) конус; б) цилиндр; в) шар?



а) б) в)

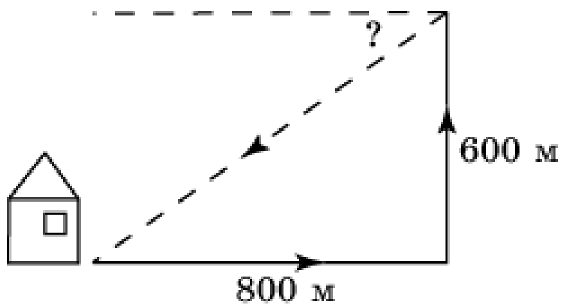
47(10+). Сколько плоскостей симметрии имеют правильные многогранники?



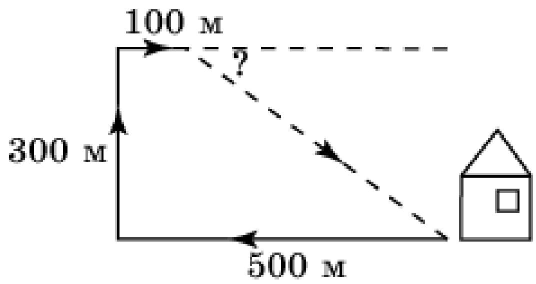
а) б) в) г) д)

6. Тригонометрия

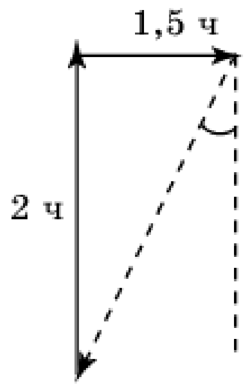
1(8+). Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. Под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



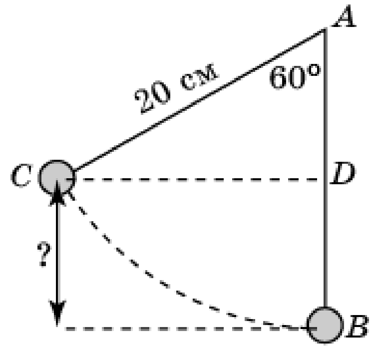
2(8+). Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. Под каким углом к направлению на восток она должна идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



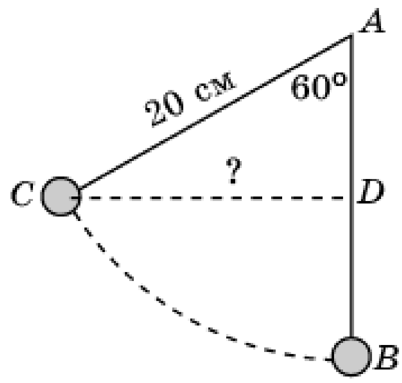
3(8+). Грибник, войдя в лес, в течение двух часов шёл в направлении на север, а затем с той же скоростью в течение полутора часов – на восток. Под каким углом к направлению на юг он должен идти, чтобы вернуться к месту, где он вошёл в лес? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)



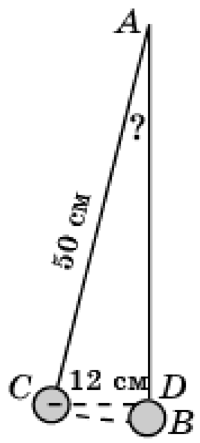
4(8+). Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина *AC* маятника 20 см. На сколько изменилась высота груза по сравнению с положением равновесия?



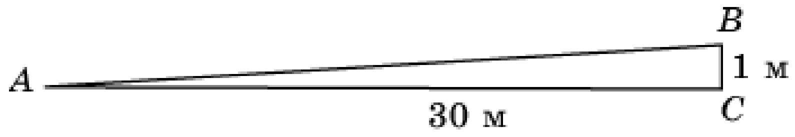
5(8+). Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 60°. Длина *AB* маятника равна 20 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние *CD* от груза *C* до прямой *AB*, проходящей через начальное положение маятника.



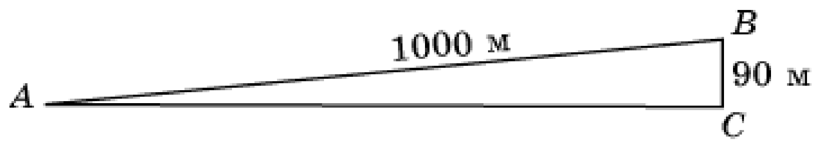
6(8+). Маятник *AB* длиной 50 см отклонили от положения равновесия на расстояние *CD*, равное 12 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол, который образует новое положение *AC* маятника с положением равновесия *AB*.



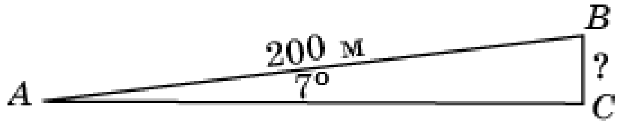
7(8+). Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъема в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.



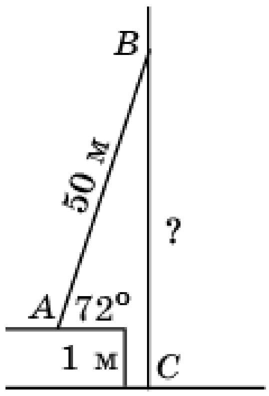
8(8+). Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.



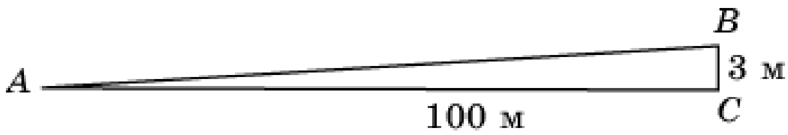
9(8+). Угол подъёма дороги равен 7°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту, на которую поднимется пешеход, пройдя 200 м.



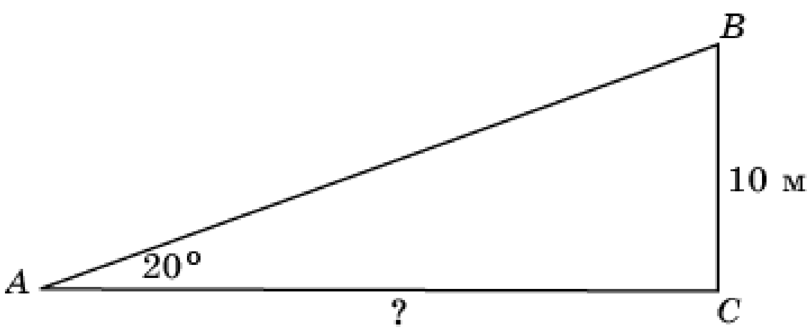
10(8+). Пожарная лестница выдвинута на 50 м при предельном угле подъёма 72°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту, которой достигнет верхний конец лестницы, если её нижний конец отстоит от поверхности земли на 1 м.



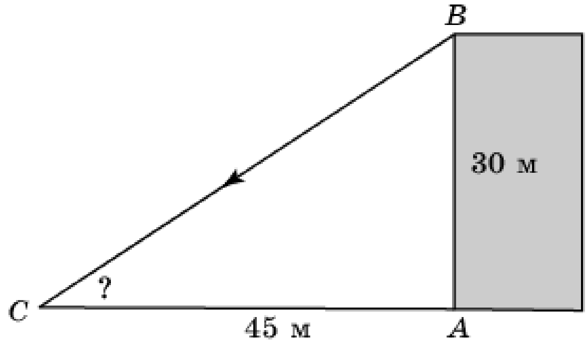
11(8+). Использую таблицу тригонометрических функций, найдите приближённое значение угла, под которым виден столб высотой 3 м, находящийся от наблюдателя на расстоянии 100 м. В ответе укажите целое число градусов.



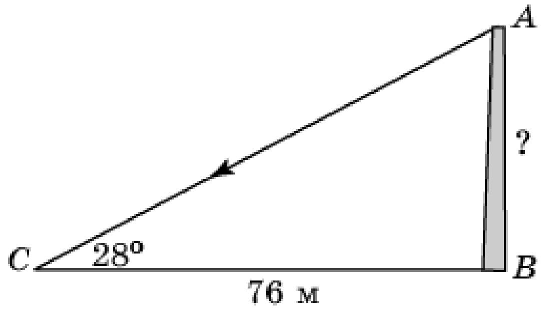
12(8+). Телеграфный столб высотой 10 м находится на берегу реки. Верхний конец столба виден с другого берега под углом 20°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите ширину реки.



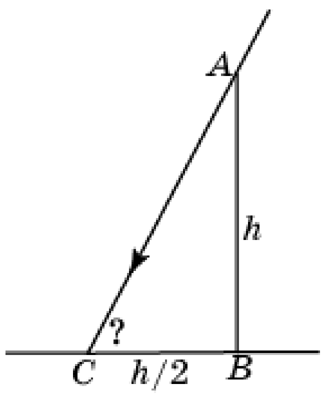
13(8+). Строение высотой 30 м бросает тень длиной 45 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол наклона солнечных лучей. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.



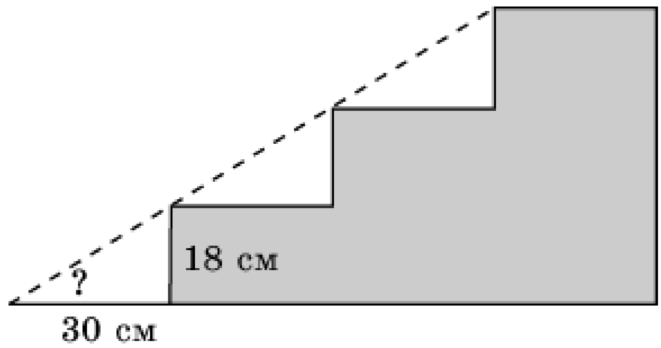
14(8+). При высоте Солнца в 28° заводская труба бросает тень длиной 76 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту трубы. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом метров.



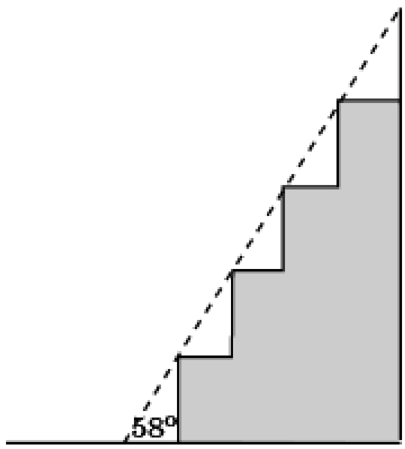
15(8+). Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол наклона солнечных лучей, если длина тени стоящего человека в два раза меньше его роста. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.



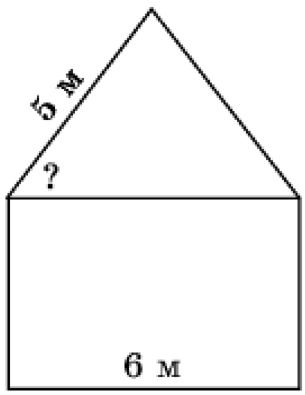
16(8+). Лестница имеет ступеньки, ширина которых равна 30 см, а высота – 18 см. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол подъёма лестницы. В ответе укажите приближённое значение, выражаемое целым числом градусов.



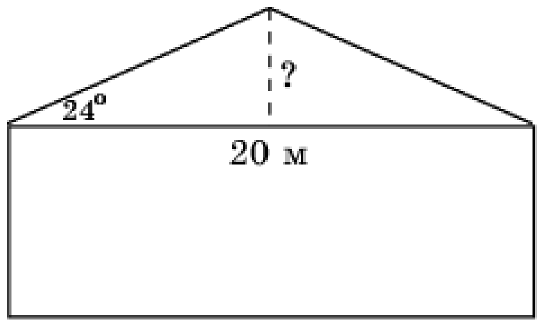
17(8+). Угол подъёма лестницы дачного домика равен 58°. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту ступенек лестницы, если ширина ступенек равна 20 см.



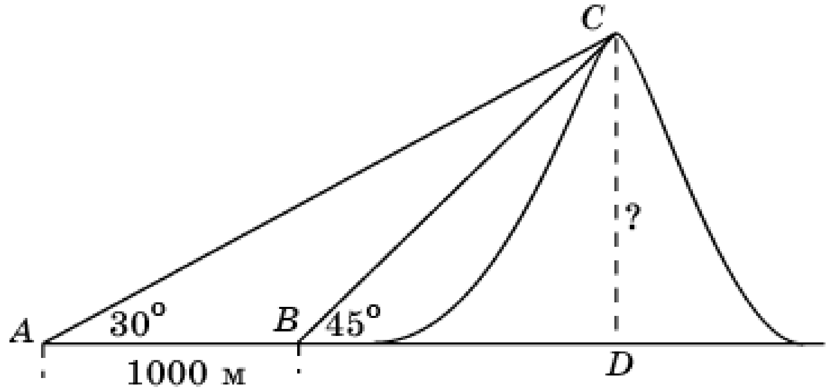
18(8+). Ширина дачного домика равна 6 м, ширина одного ската его двускатной крыши равна 5 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол между стропилами крыши и потолком.



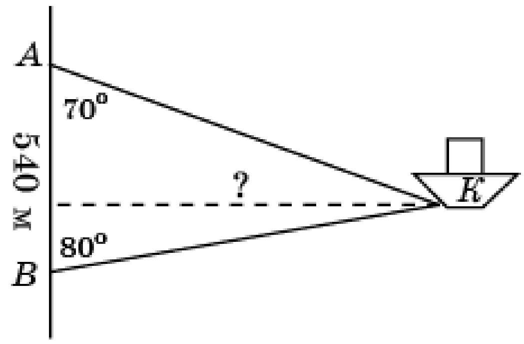
19(8+). Длина балки, на которую опираются стропила крыши, равна 20 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту крыши, зная, что стропила с этой балкой образуют угол 24^o.



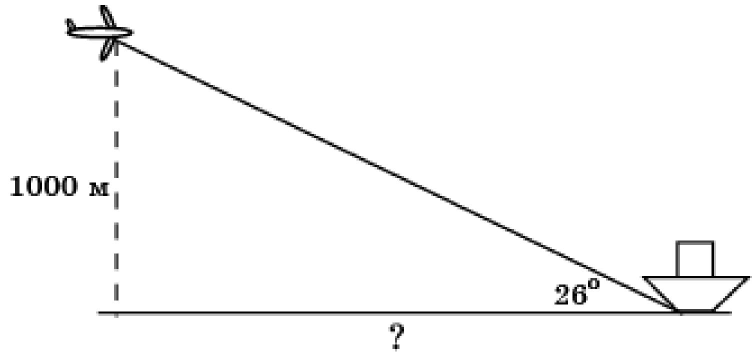
20(8+). Из некоторой точки вершина горы видна под углом 30^o. При приближении к горе на 1000 м вершина стала видна под углом 45^o. Найдите приближённую высоту горы. В ответе укажите целое число метров.



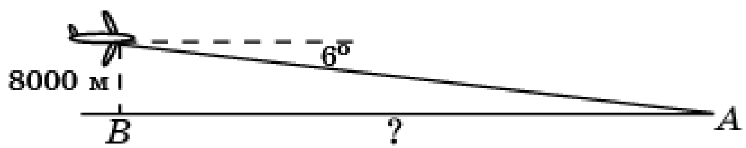
21(8+). Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние от корабля *К* до берега *AB*. В ответе укажите целое число метров.



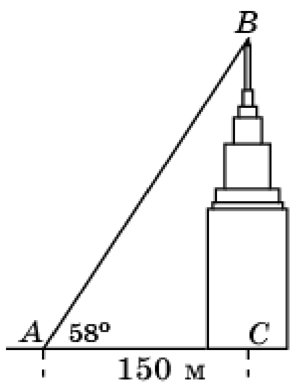
22(8+). С самолета радируют капитану рыболовецкого судна, что самолет находится над косяком рыбы на высоте 1000 м. С судна определяют, что угол, под которым виден самолет над горизонтом, равен 26^{o}. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите расстояние от судна до косяка рыбы. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.



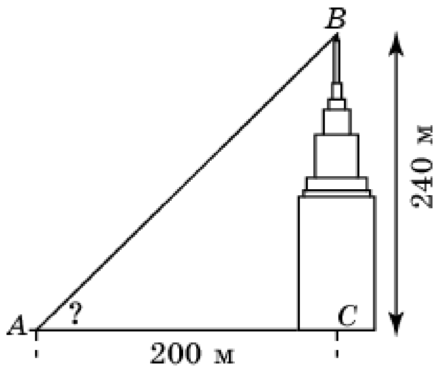
23(8+). Самолет приближается к аэропорту *A* на высоте 8000 м. Пилот имеет предписание производить снижение для посадки под постоянным углом в 6^{o}. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние *AB* от посадочной полосы до того места, над которым самолет должен начать снижение. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.



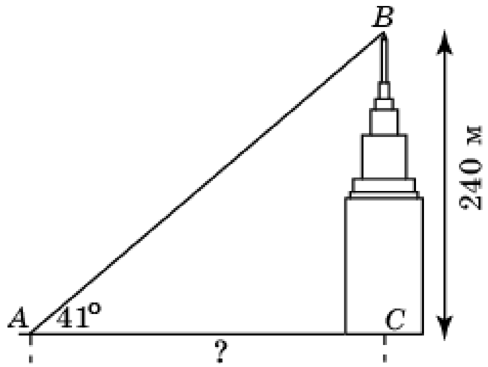
24(8+). Расстояние от наблюдателя до башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равно 150 м, а угол, под которым видно здание, равен 58^{o}. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту башни. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.



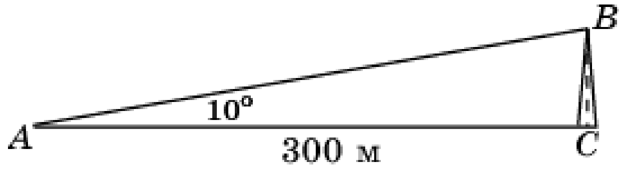
25(8+). Высота башни главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова равна 240 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 200 м? В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу градусов.



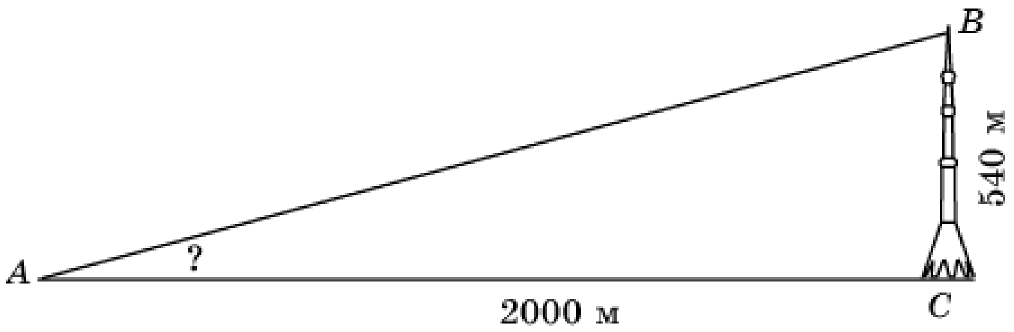
26(8+). Башня главного здания МГУ имени М.В. Ломоносова, высота которой равна 240 м, видна под углом 41°. Найдите расстояние от наблюдателя до башни. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу метров.



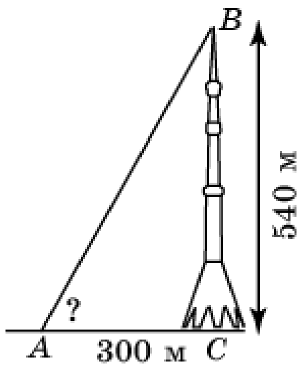
27(8+). Радиомачта видна с расстояния 300 м от её основания под углом 10°. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту радиомачты.



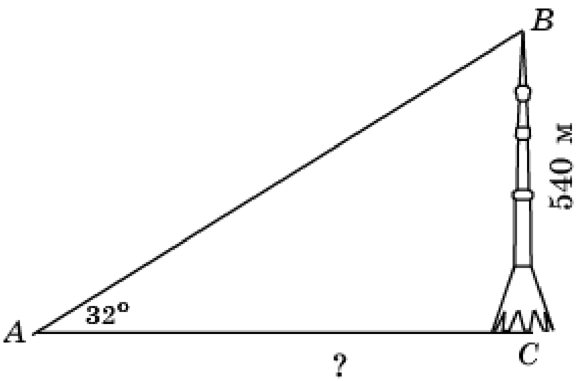
28(8+). Высота Останкинской телевизионной башни – 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите угол в градусах, под которым видна башня с расстояния 2000 м.



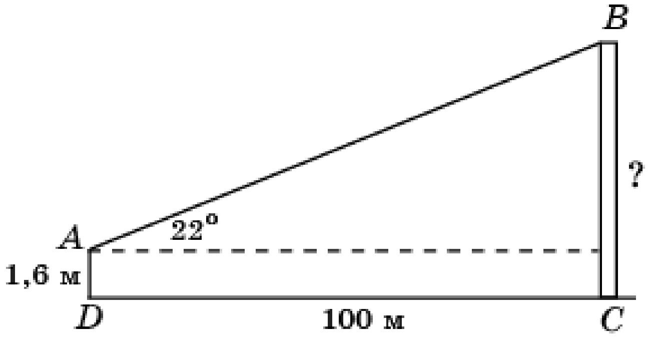
29(8+). Высота Останкинской телевизионной башни равна 540 м. Под каким углом видна эта башня с расстояния 300 м? В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу градусов.



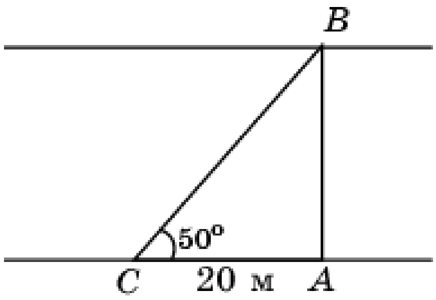
30(8+). Высота Останкинской телевизионной башни – 540 м. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите расстояние от неё до человека, который видит башню под углом 32°. В ответе укажите целое число метров.



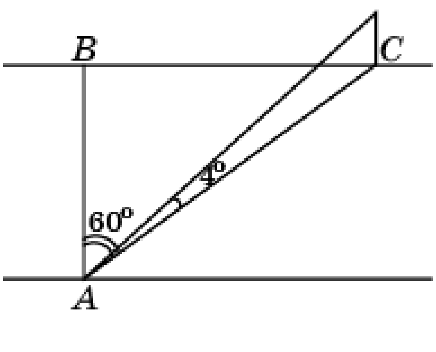
31(8+). Для определения высоты колонны поступили следующим образом: отошли от ее основания на 100 м, поставили угломерный прибор высотой 1,6 м и установили, что вершина колонны видна под углом $22°$. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите высоту колонны.



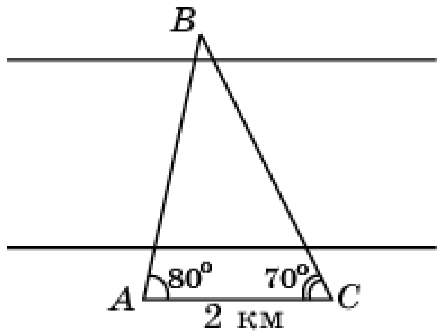
32(8+). Используя данные, приведенные на рисунке, найдите ширину *AB* реки.



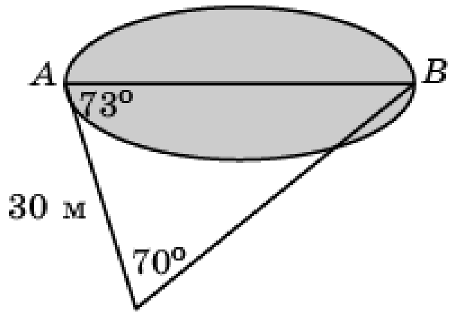
33(8+). Наблюдатель *A*, стоящий на берегу реки, видит человека *C* на другом берегу под углом 4^o. Направление на этого человека составляет угол в 60^o с направлением *AB*, перпендикулярным берегам реки. Найдите ширину *AB* реки, считая рост человека, равным 1 м 70 см. В ответе укажите целое число метров.



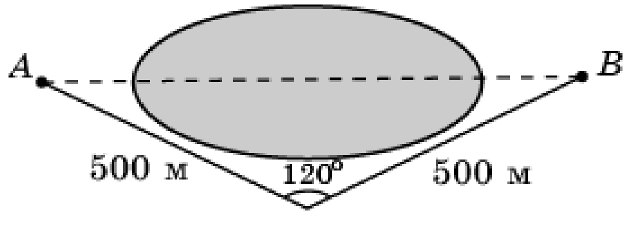
34(8+). Найдите расстояние между населенными пунктами *A* и *B*, расположенными на разных берегах реки, если расстояние между пунктами *A* и *C*, расположенными на одном берегу этой реки, равно 2 км, угол *CAB* равен 80°, угол *ACB* равен 70°. В ответе укажите целое число метров.



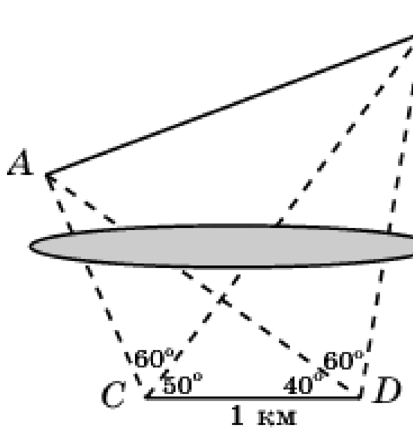
35(8+). Используя данные, указанные на рисунке, найдите ширину *AB* озера. В ответе укажите целое число метров.



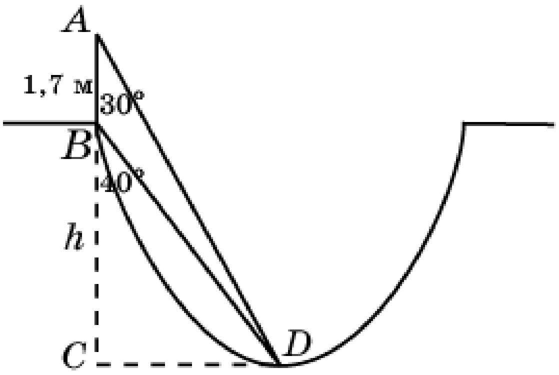
36(8+). Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние между недоступными объектами *A* и *B*, расположенными на разных берегах озера. В ответе укажите целое число метров.



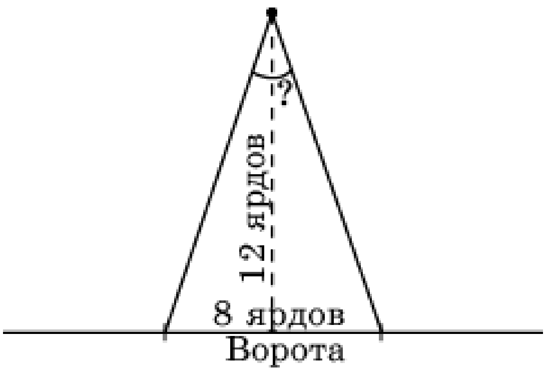
37(8+). Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние между недоступными объектами *A* и *B*. В ответе укажите целое число метров.



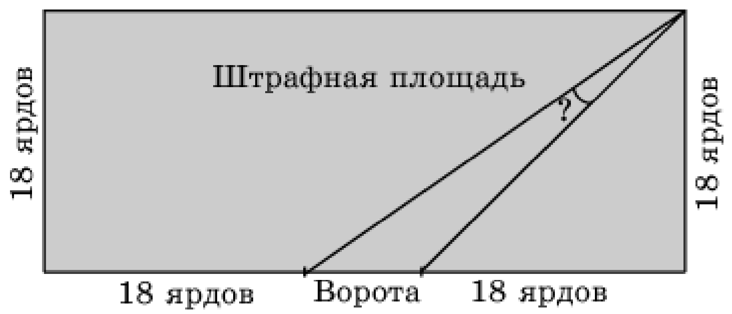
38(8+). Используя данные, указанные на рисунке, найдите глубину *h* оврага.



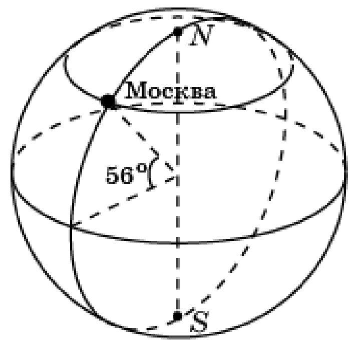
39(8+). Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние от 11-метровой отметки до линии ворот равно 12 ярдам. Найдите угол, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.



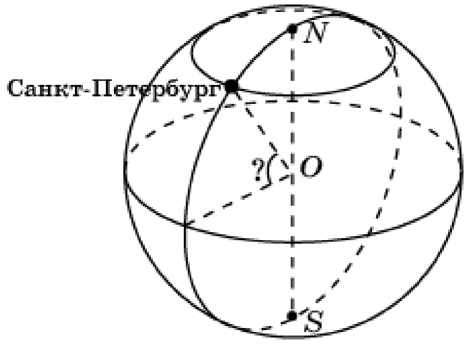
40(8+). Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Для разметки штрафной площади на футбольном поле на расстоянии 18 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка, длиной 18 ярдов каждый. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите угол, под которым видны ворота с угла штрафной площади. В ответе укажите целое число градусов.



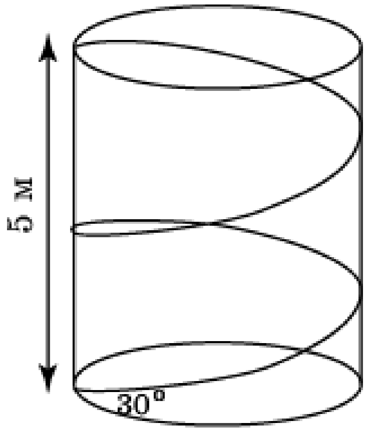
41(8+). Поверхность Земли имеет форму сферы, длина большой окружности которой приближённо равна 40000 км. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите длину окружности параллели, на которой находится г. Москва, считая широту Москвы, равной 56°. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу километров.



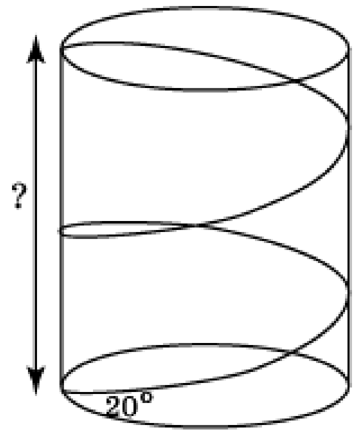
42(8+). Поверхность Земли имеет форму сферы, длина большой окружности которой приближённо равна 40000 км. Длина окружности параллели, на которой находится г. Санкт-Петербург, приближенно равна 20000 км. Найдите широту Санкт-Петербурга в градусах.



43(8+). Винтовая лестница расположена вдоль боковой поверхности цилиндра и поднимается под углом 30° к горизонту на высоту 5 м. Найдите длину этой лестницы.



44(8+). Винтовая горка длины 20 м расположена вдоль боковой поверхности цилиндра и спускается под углом 20° к горизонту. Найдите высоту горки.



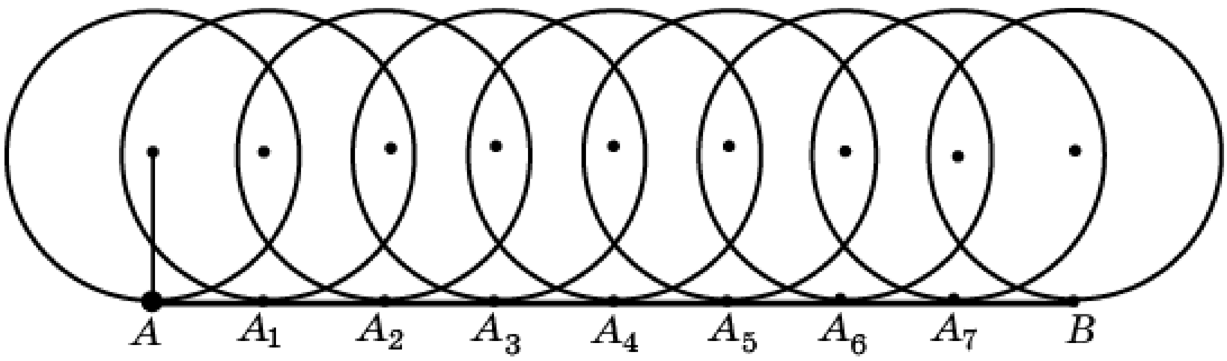
7. Траектории

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

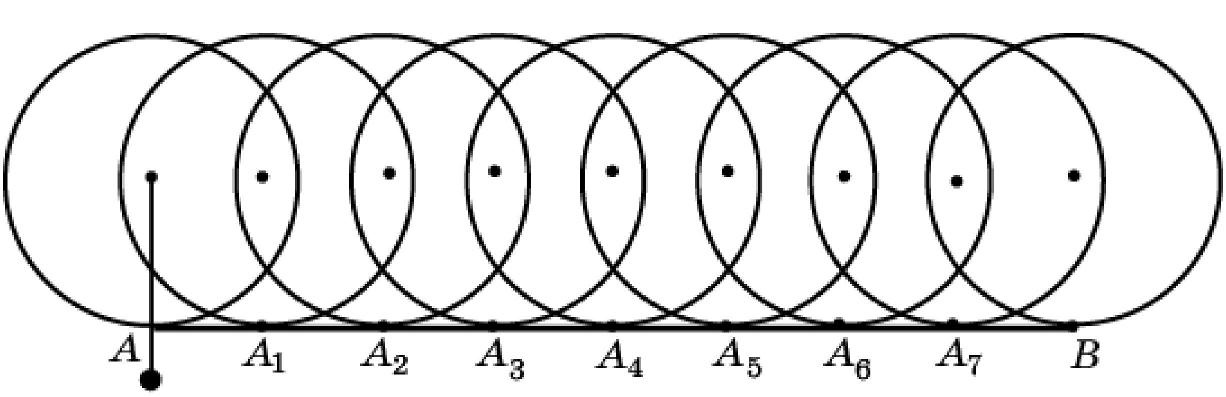
Например, кривая, которую описывает точка, закреплённая на ободе колеса велосипеда, катящегося по ровной дороге, называется циклоидой, что в переводе с греческого языка означает кругообразная.

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей. Он же придумал и её название.

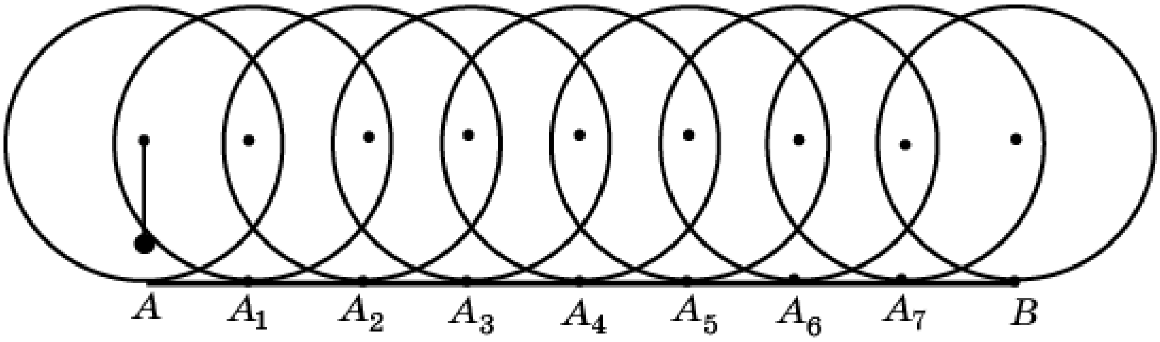
1(6+). Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите циклоиду.



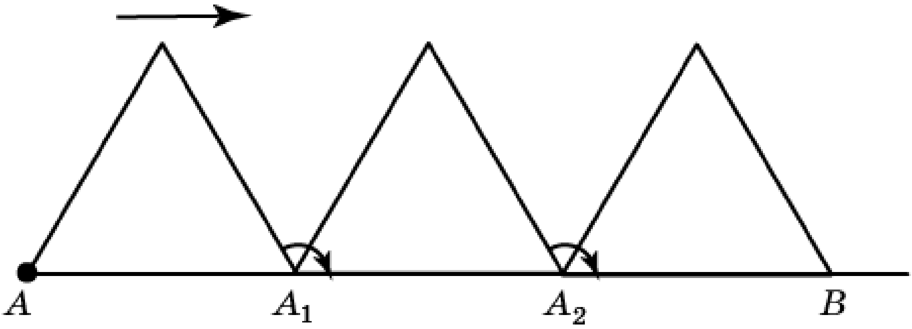
2(6+). Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на продолжении радиуса окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую циклоиду.



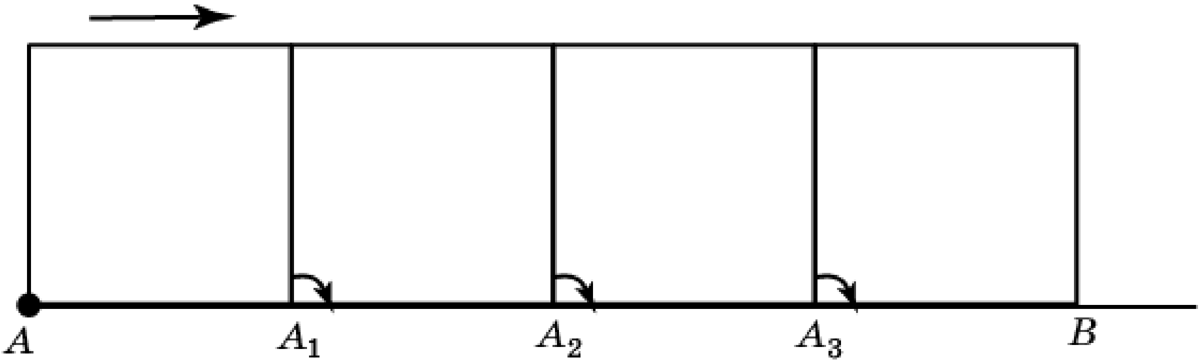
3(6+). Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплена на окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную циклоиду.



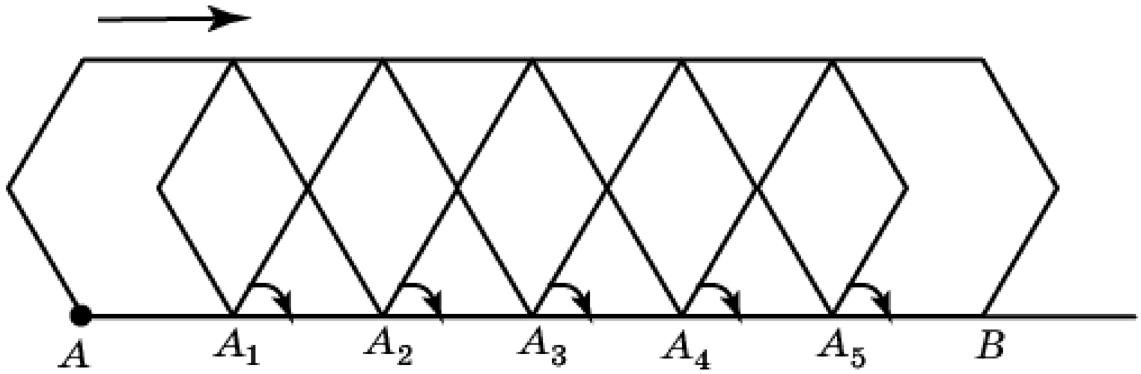
4(6+). Правильный треугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите треугольники, как показано на рисунке. Отметьте положения закрёпленной точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по прямой.



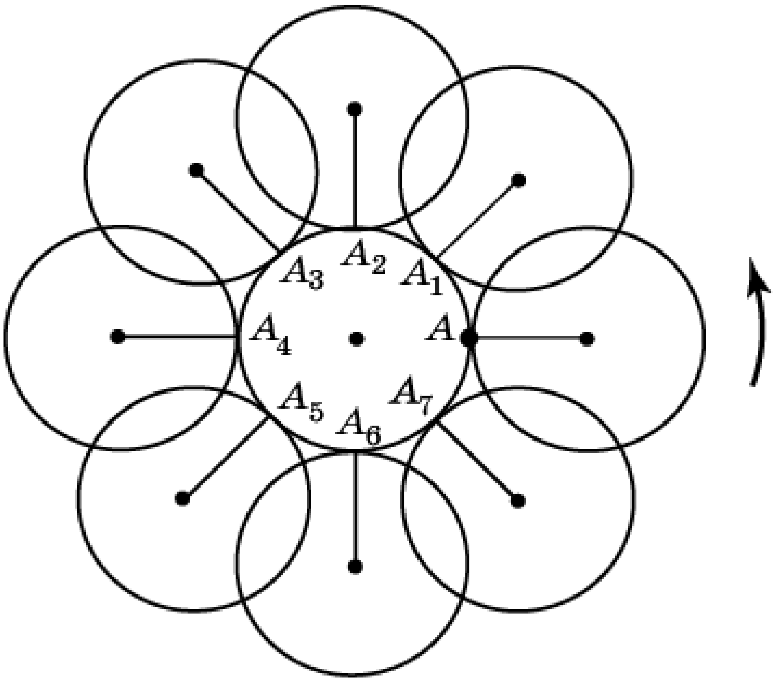
5(6+). Квадрат катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты, как показано на рисунке. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой.



6(6+). Правильный шестиугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите шестиугольники, как показано на рисунке. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона шестиугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3A_4; г) A_4A_5; д) A_5B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины шестиугольника, катящегося по прямой.

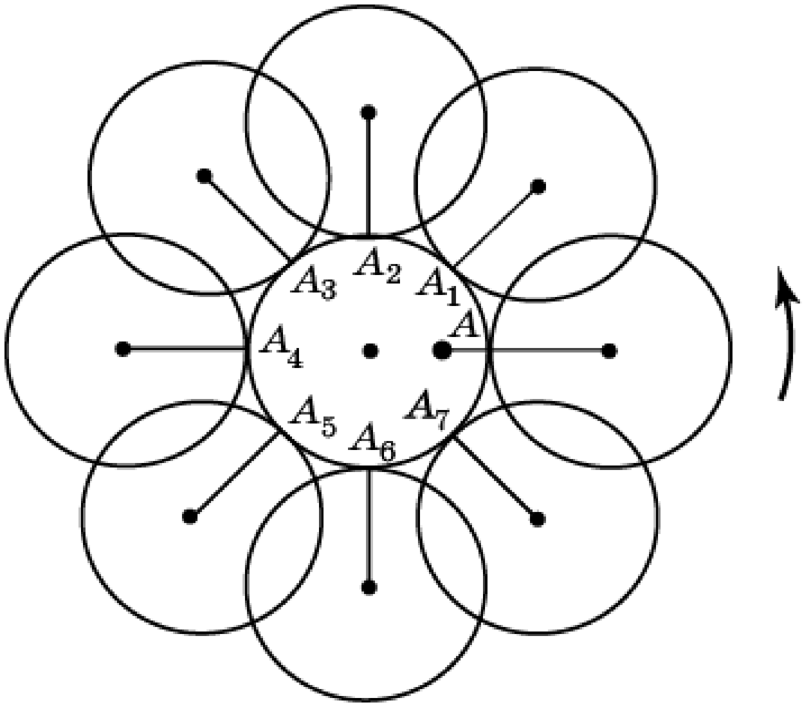


7(6+). Окружность катится по другой окружности того же радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите кривую, называемую кардиоида.

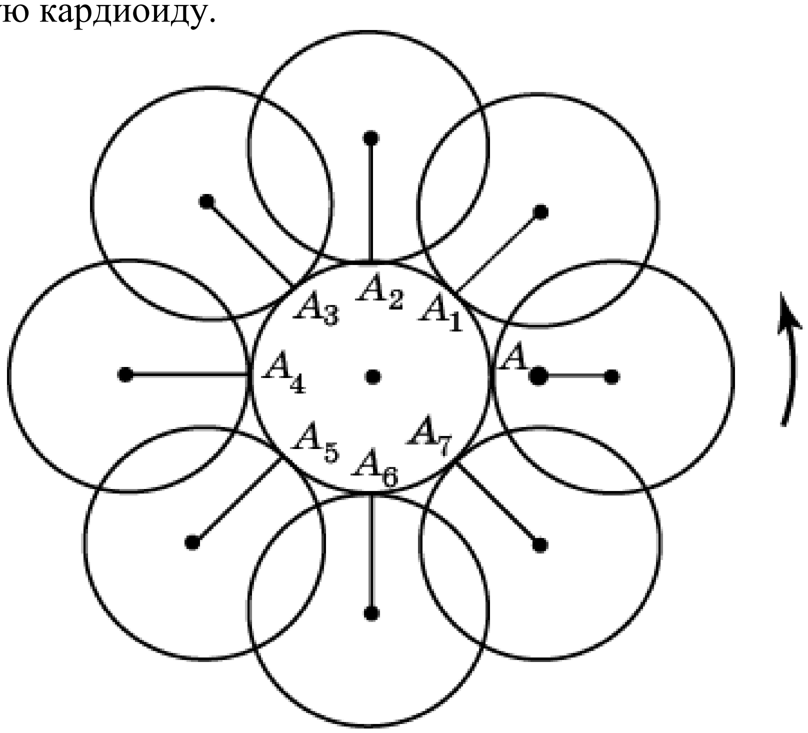


8(6+). Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4;

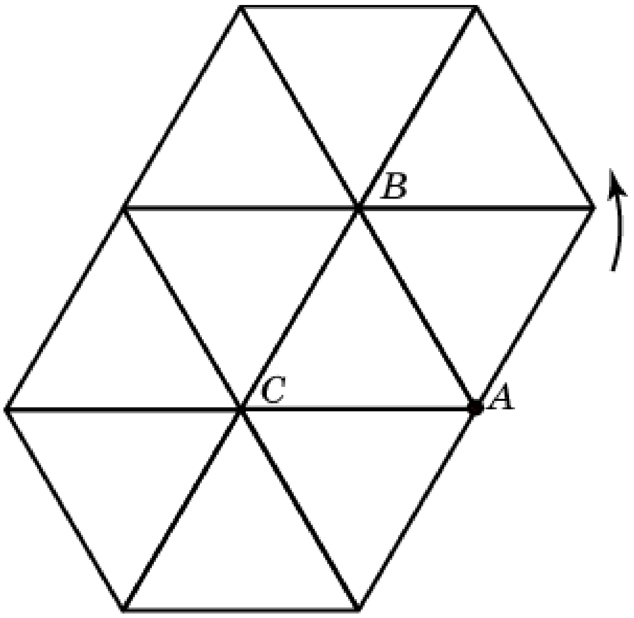
б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую кардиоиду.



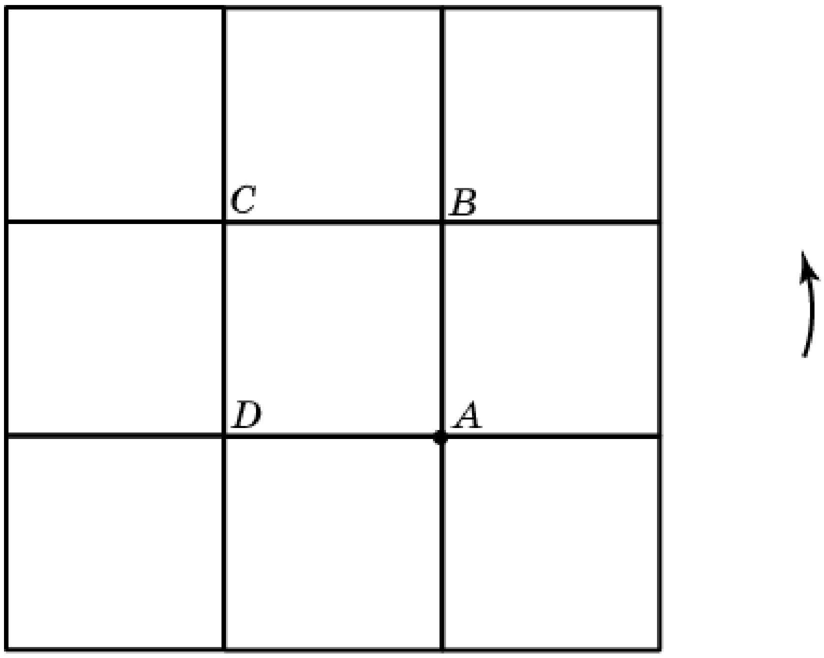
9(6+). Изобразите окружности, как показано на рисунке. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на радиусе окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную кардиоиду.



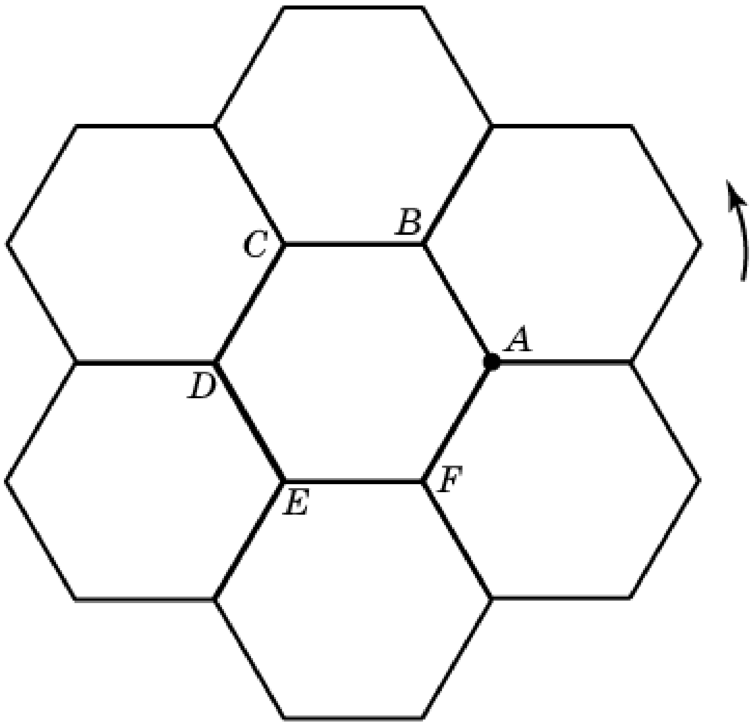
10(6+). Правильный треугольник катится по другому правильному треугольнику *ABC*. Точка закреплена в вершине *A*. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) *BC*; б) *CA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по другому правильному треугольнику.



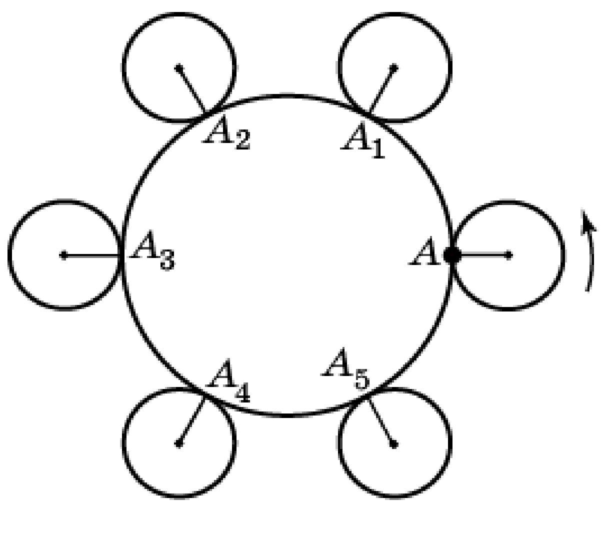
11(6+). Квадрат катится по другому квадрату *ABCD*. Точка закреплена в вершине *A*. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) *BC*; б) *CD*; в) *DA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.



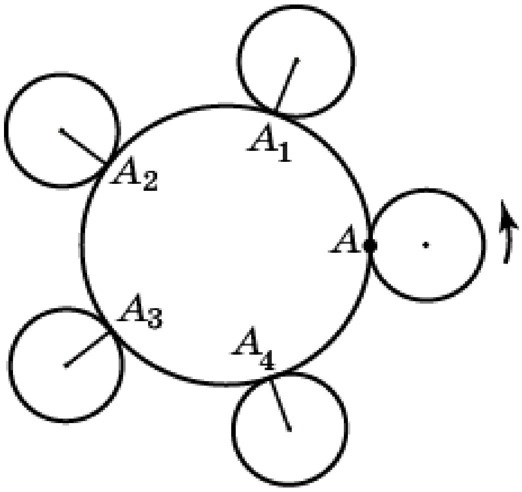
12(6+). Правильный шестиугольник катится по другому правильному шестиугольнику *ABCDEF*. Точка закреплена в вершине *A*. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) *BC*; б) *CD*; в) *DE*; г) *EF*; д) *FA*. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.



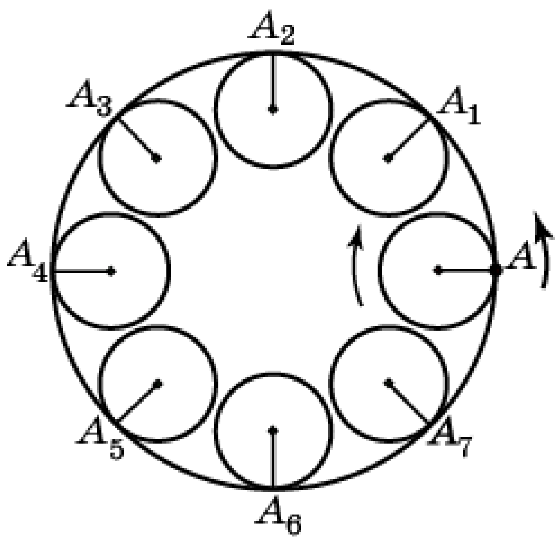
13(6+). Окружность катится по другой окружности в 3 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении *A*. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5. Соедините полученные точки плавной кривой.



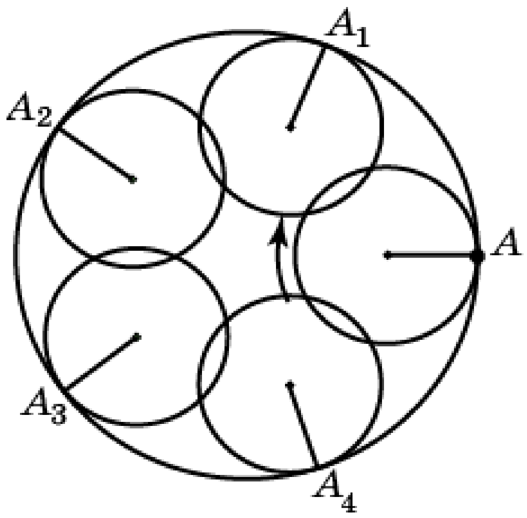
14(6+). Окружность катится по другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4. Соедините полученные точки плавной кривой.



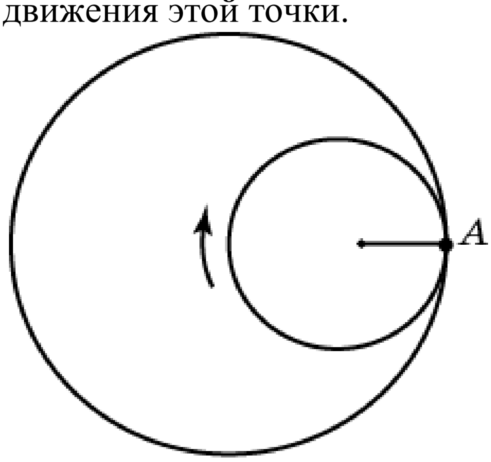
15(6+). Окружность катится внутри другой окружности в 4 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Полученная кривая называется астроидой.



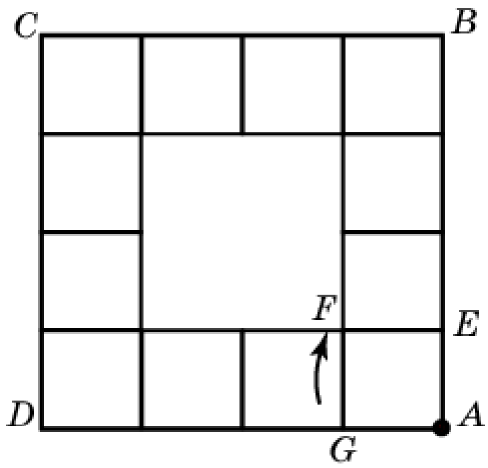
16(6+). Окружность катится внутри другой окружности в 2,5 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность займёт положение: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой.



17(6+). Окружность катится внутри другой окружности в 2 раза большего радиуса. Изобразите окружности, как показано на рисунке. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Нарисуйте траекторию движения этой точки.



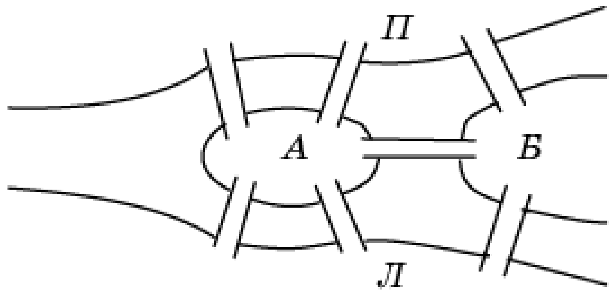
18(6+). Квадрат $AEFG$ катится внутри другого квадрата $ABCD$. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты и траекторию движения точки, закреплённой в вершине квадрата.



8. Графы

Теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

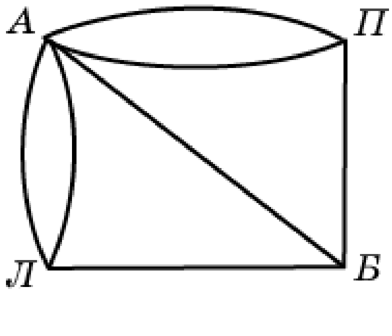
Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?



Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. "нарисовать одним росчерком". Такие контуры образуют, так называемые, уникурсальные графы.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке изображён граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Требуется выяснить, является ли этот граф является уникурсальным.



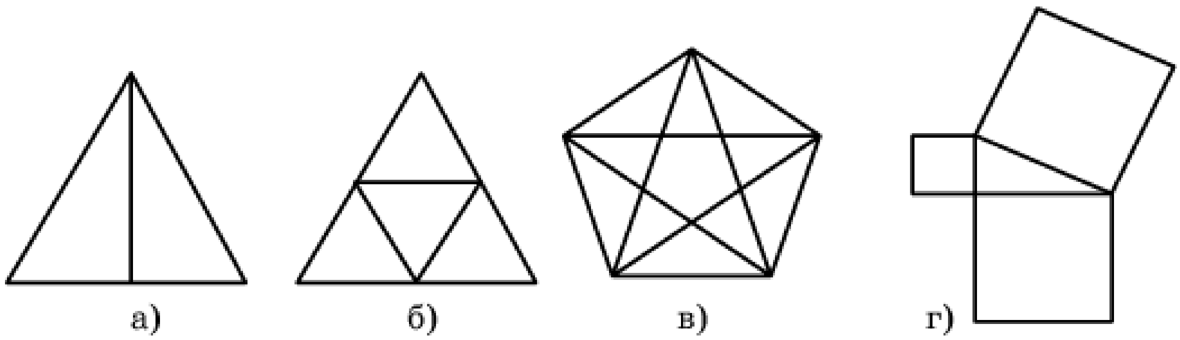
Для этого Л. Эйлер определил понятие индекса вершины - числа рёбер графа, сходящихся в данной вершине, и показал, что для уникурсального графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум.

Действительно, если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют чётный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечётного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечётным индексом нет.

Верно и обратное. Если у связного графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум, то он является уникурсальным.

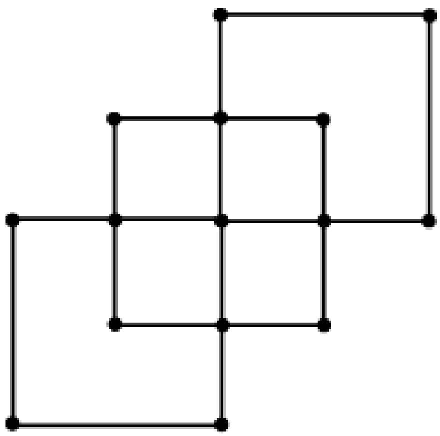
1(6+). Решите задачу Эйлера. Выясните, можно ли, прогуливаясь вдоль реки Прегель, пройти по каждому мосту ровно один раз?

2(6+). Нарисуйте одним росчерком графы, изображённые на рисунке.

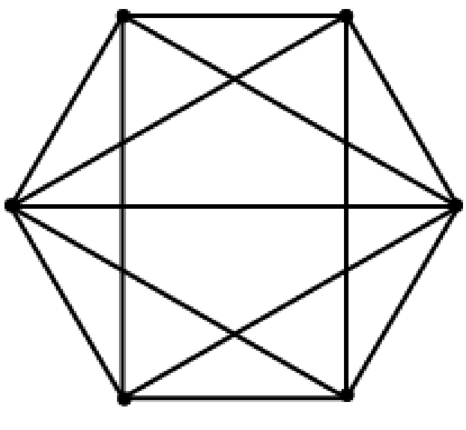


а) б) в) г)

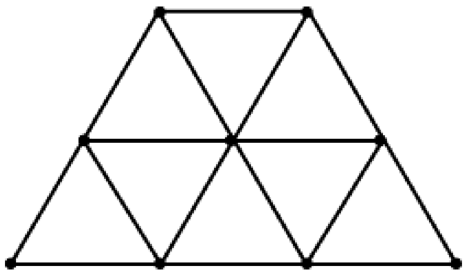
3(6+). Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



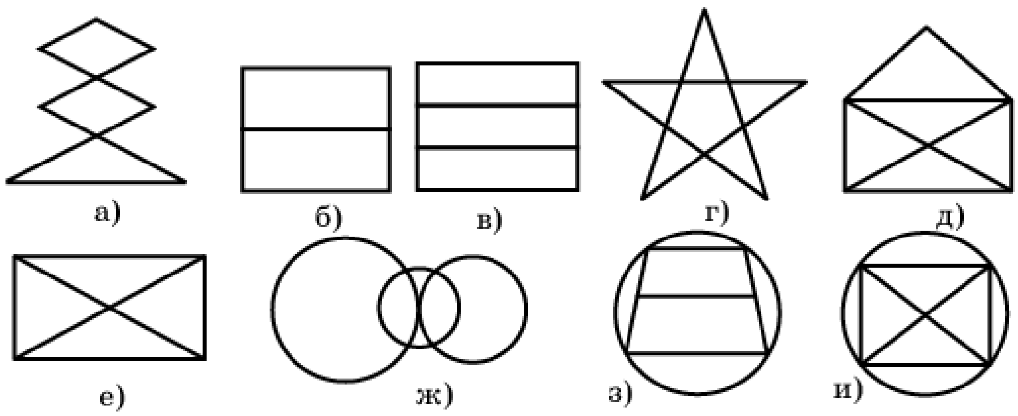
4(6+). Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



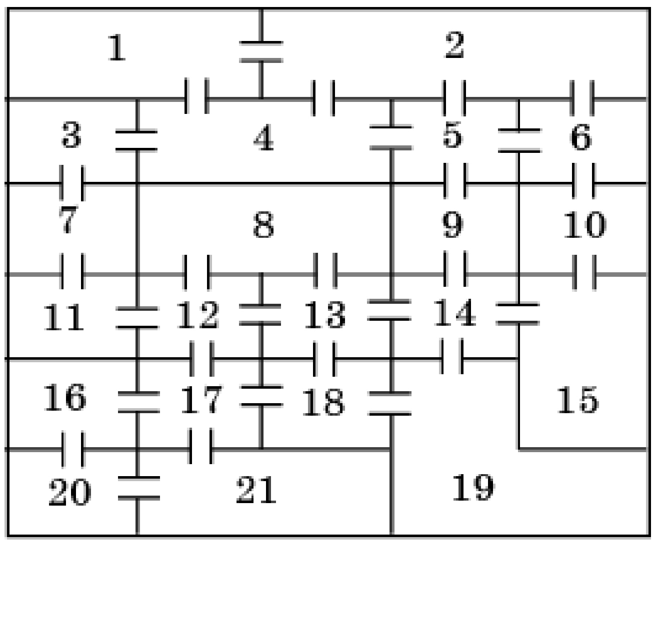
5(6+). Укажите путь, проходящий по каждому ребру графа, изображённого на рисунке, ровно один раз.



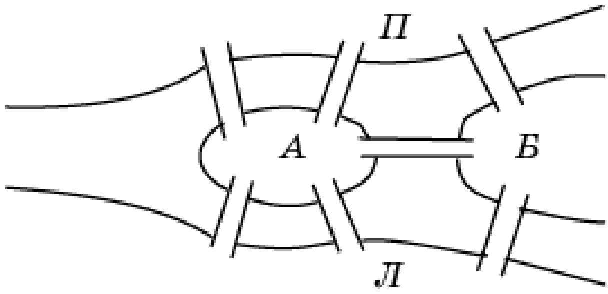
6(6+). Какие графы, изображённые на рисунке, являются уникурсальными?



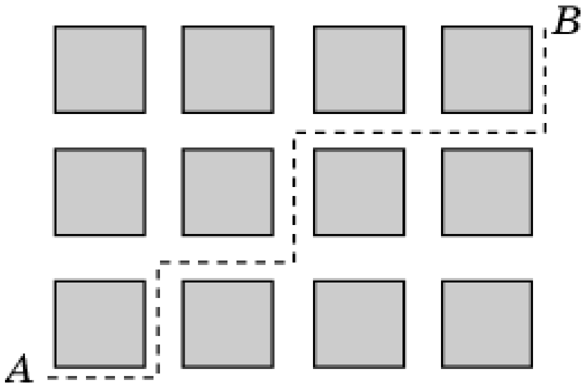
7(6+). На рисунке изображён план подземелья, в одной из комнат которого находится клад. Для его отыскания нужно войти в одну из крайних комнат, пройти через все двери ровно по одному разу через каждую. Клад будет в комнате за последней дверью. В какой комнате находится клад?



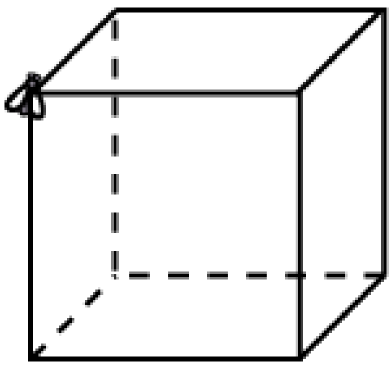
8(6+). Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придётся пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?



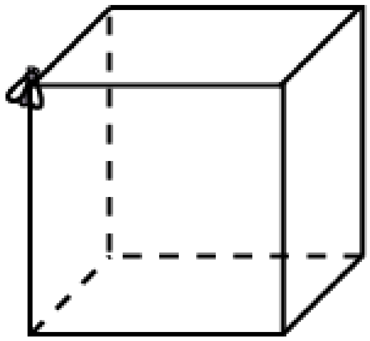
9. На рисунке изображен план кварталов города. Сколько различных путей по улицам города ведёт из пункта *A* в пункт *B*, если пути на плане могут идти только направо и вверх? Один из возможных путей изображён на рисунке.



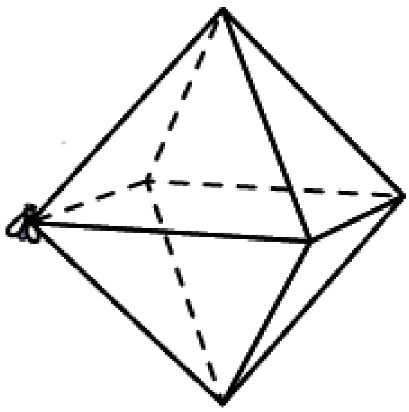
106+). В вершине куба сидит муха. Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз? Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



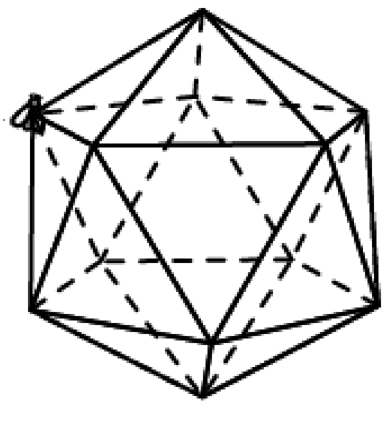
11(6+). В вершине куба сидит муха. Она хочет проползти по каждому ребру куба и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?



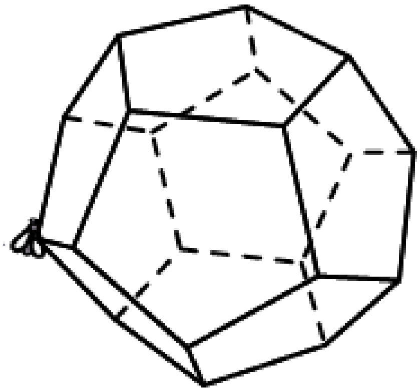
12(6+). В вершине октаэдра сидит муха. Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз?



13(6+). В вершине икосаэдра сидит муха. Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

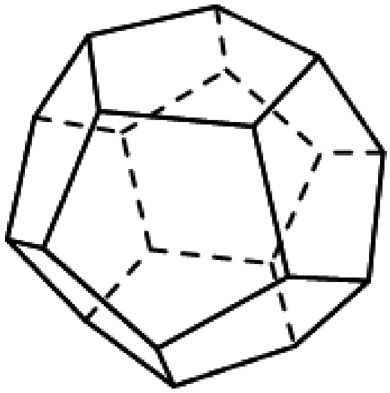


14(6+). В вершине додекаэдра сидит муха. Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

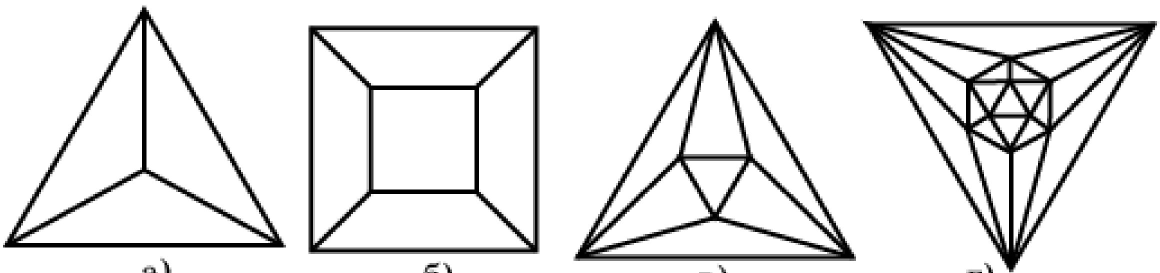


В 1859 г. ирландский математик У.Р. Гамильтон предложил головоломку, в которой требовалось найти путь по рёбрам додекаэдра, проходящий через каждую вершину ровно один раз. К вопросу о нахождении такого пути приводят многие практические задачи, в частности, задача о нахождении пути торговца, который должен посетить несколько городов, побывав в каждом городе ровно один раз.

15(6+). Задача Гамильтона. Укажите путь по рёбрам додекаэдра, проходящий через каждую вершину ровно один раз.

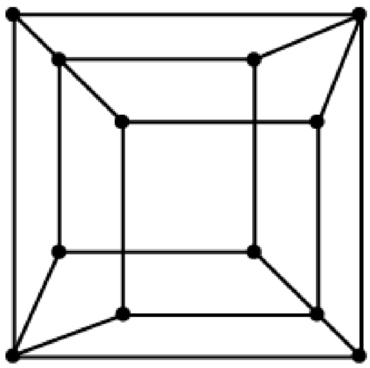


16(6+). Укажите путь по рёбрам графа, проходящий через каждую вершину ровно один раз.



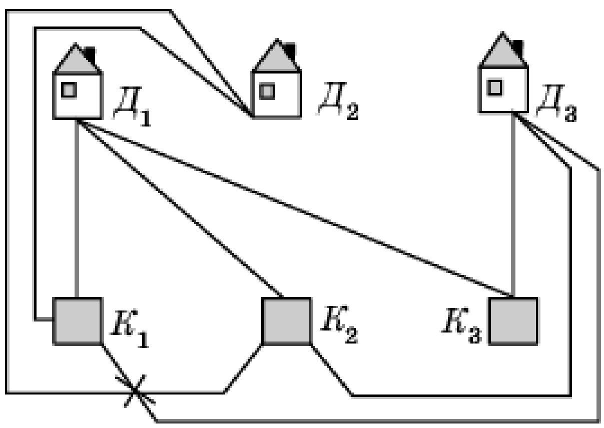
а) б) в) г)

17(8+). Докажите, что граф, изображённый на рисунке, не является гамильтоновым, т.е. для него нет пути, проходящего через каждую вершину ровно один раз.



Ещё одной задачей, поставленной Л. Эйлером, и приведшей к созданию целого направления в математике – комбинаторной топологии, является следующая задача.

Задача Эйлера о трёх домиках и трёх колодцах. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

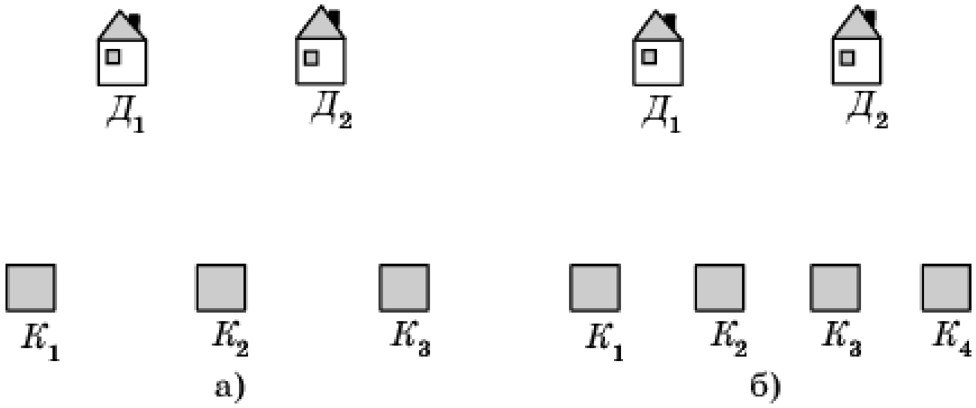


То, что не получилось на данном рисунке, не является доказательством невозможности соединения дорожками домиков и колодцев. Для решения этой задачи Л. Эйлер доказал следующую теорему.

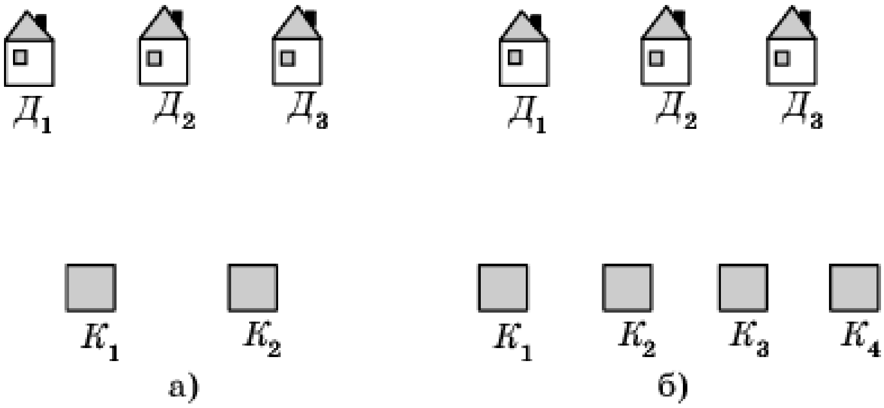
Теорема Эйлера. Для связного простого графа имеет место равенство В - Р + Г = 2, где В - число вершин, Р - общее число рёбер, Г - число областей (граней), на которые граф разбивает плоскость.

18(8+). Решите задачу Эйлера. Выясните, можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

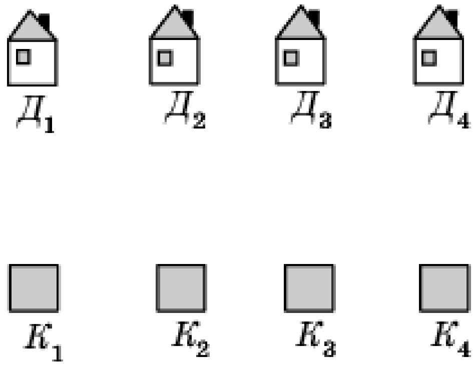
19(6+). Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



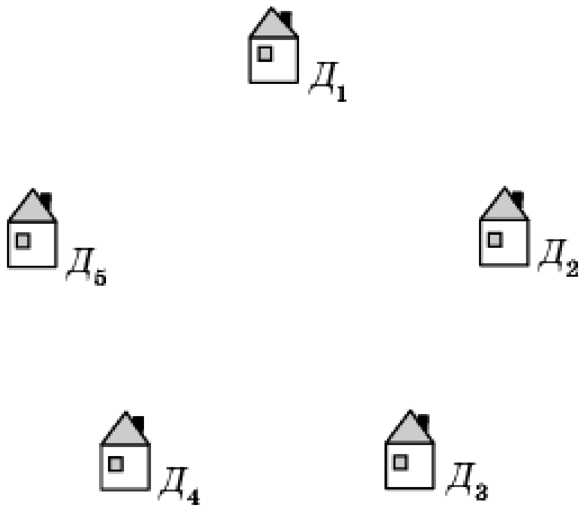
20(6+). Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



21(6+). Четыре соседа имеют четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами?



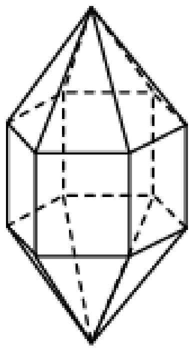
22(8+). Можно ли пять домиков соединить непересекающимися дорожками так, чтобы каждый домик был соединен со всеми другими домиками?



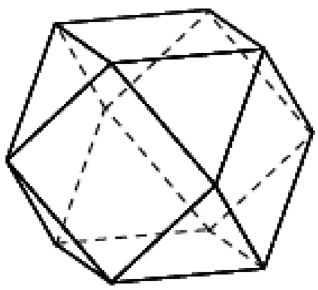
9. Кристаллы – природные многогранники

Многие удивительно красивые пространственные формы придумал не сам человек, а их создала природа. Например, кристаллы - природные многогранники. Свойства кристаллов, которые вы изучали на уроках физики и химии. Они определяются их геометрическим строением, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

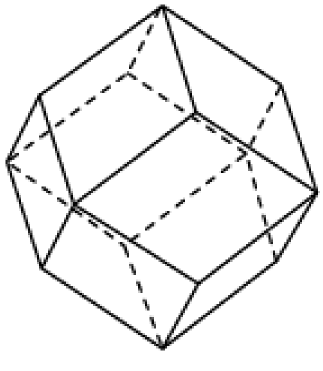
Кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т.е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды.



Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.



Кристалл граната имеет форму ромбододекаэдра (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) - двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов.



Для установления числа вершин, ребер и граней многогранников используют следующую теорему Эйлера.

Теорема Эйлера. Для выпуклого многогранника имеет место равенство В - Р + Г = 2, где В - число вершин, Р - число рёбер, Г - число граней.

1(10+). Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 рёбер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.

2(10+). Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно: а) 12; б) 15? Приведите примеры таких многогранников.

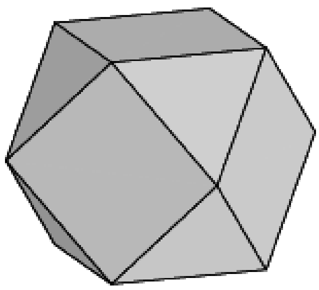
3(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число рёбер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

4(10+). Может ли в каждой вершине выпуклого многогранника сходиться шесть треугольников?

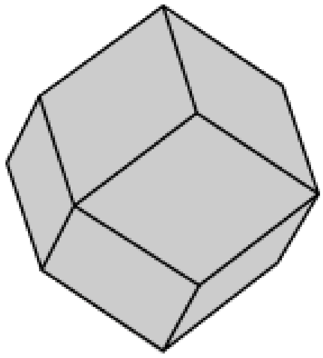
5(10+). Может ли в каждой вершине выпуклого многогранника сходиться четыре четырехугольника?

6(10+). Может ли в каждой вершине выпуклого многогранника сходиться три шестиугольника?

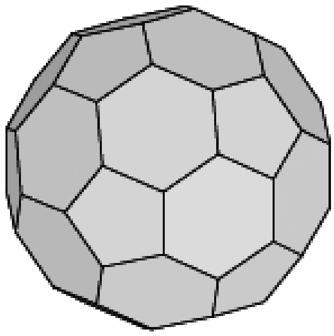
7(10+). Сколько вершин, рёбер и граней имеет кристалл алмаза (кубооктаэдр), в каждой вершине которого сходится два треугольника и два четырехугольника?



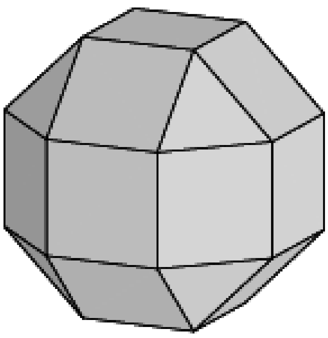
8(10+). Сколько вершин, рёбер и граней имеет кристалл граната (ромбододекаэдр)?



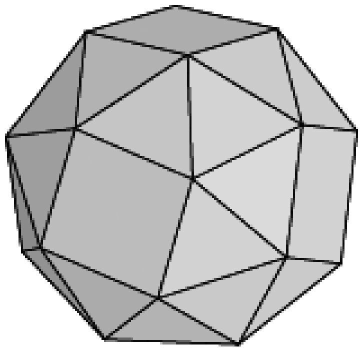
9(10+). В молекулах фуллерена атомы углерода расположены в вершинах многогранника, изображённого на рисунке. В каждой его вершине сходится пятиугольник и два шестиугольника. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



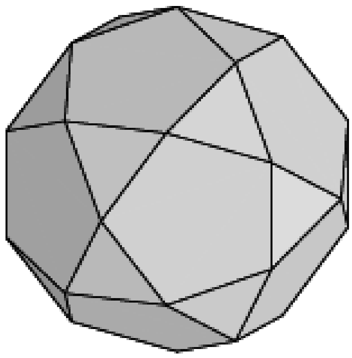
10(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится треугольника и три четырёхугольника. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



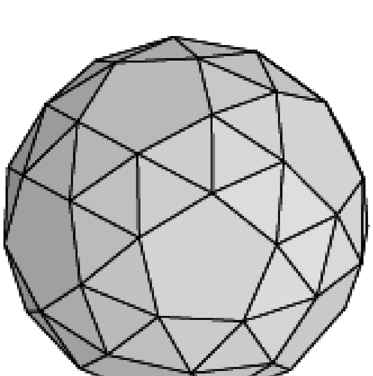
11(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится четыре треугольника и четырёхугольник. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



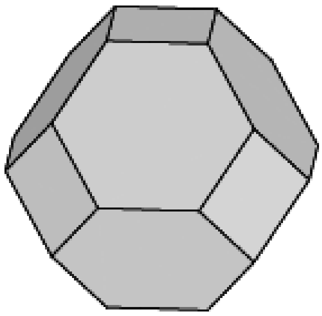
12(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится два треугольника и два пятиугольника. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



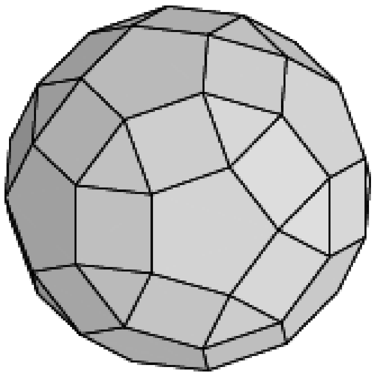
13(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится четыре треугольника и пятиугольник. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



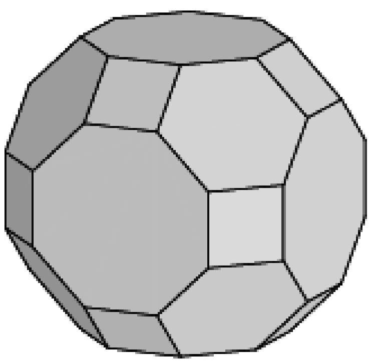
14(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится четырёхугольник и два шестиугольника. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



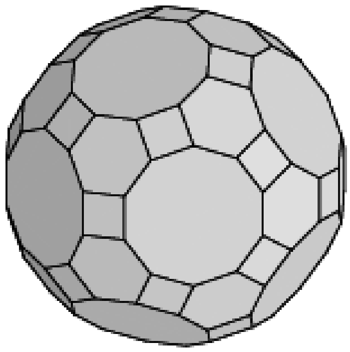
15(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится треугольник, четырёхугольник и пятиугольник. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



16(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится четырёхугольник, шестиугольник и восьмиугольник. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



17(10+). В каждой вершине выпуклого многогранника, изображенного на рисунке, сходится четырёхугольник, шестиугольник и десятиугольник. Сколько у него вершин, рёбер и граней?



18(10+). Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется грань, у которой менее шести сторон.

19(10+) Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется вершина, в которой сходится менее шести рёбер.

20(10+). Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходится три ребра.

10. Карты

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырёх красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя красками, выдвинул гипотезу о том, что этого количества красок достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А. Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал её широкому распространению.

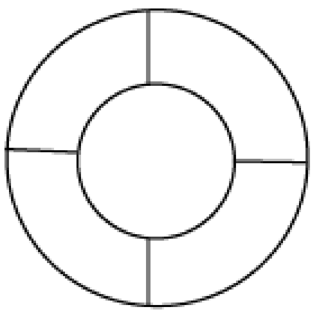
Годом рождения проблемы четырёх красок считается 1878 год. Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А. Кэли чётко сформулировал поставленную задачу: "Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками". Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П. Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить пятью красками. Однако долгое время проблема четырёх красок не поддавалась решению.

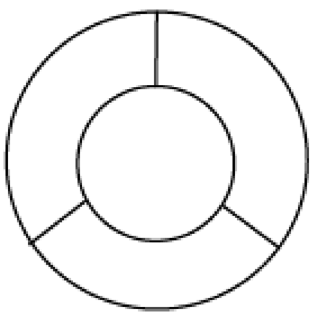
В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить четырьмя красками.

В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено решение проблемы четырёх красок. С помощью компьютера они просматривали различные типы карт, и для каждого из них компьютер решал, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается четырьмя красками. Было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: "Нет", - что и позволило объявить о компьютерном решении проблемы четырёх красок.

1(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?

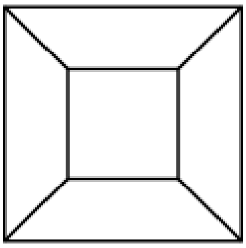


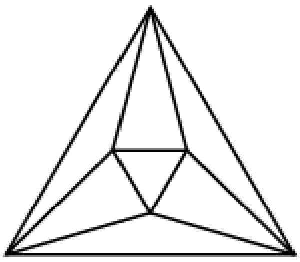
а)

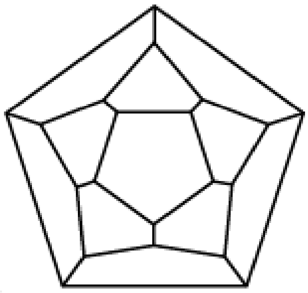


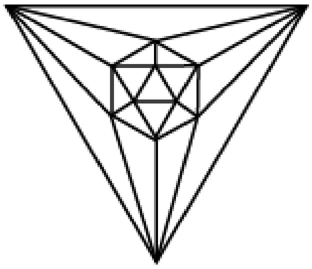
б)

2(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?

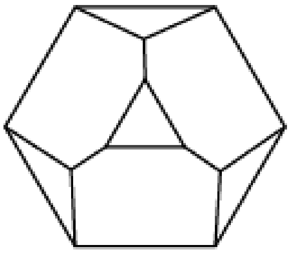

а)

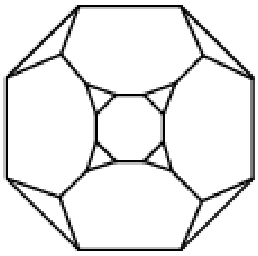

б)

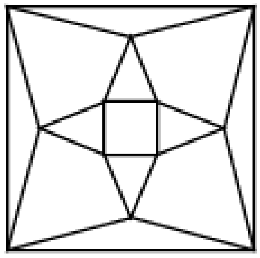

в)


г)

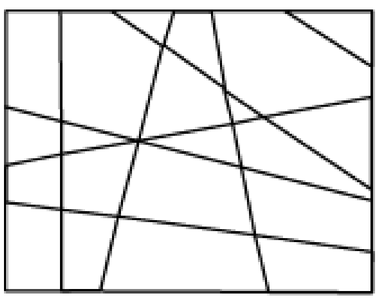
3(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски карты, изображённой на рисунке?


а)

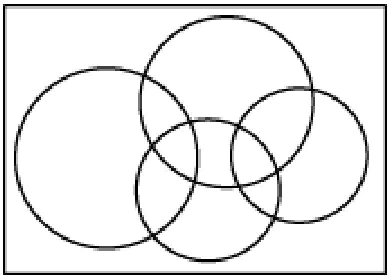

б)


в)

4(8+). Докажите, что любую карту на плоскости, образованную прямыми, можно правильно раскрасить двумя красками.



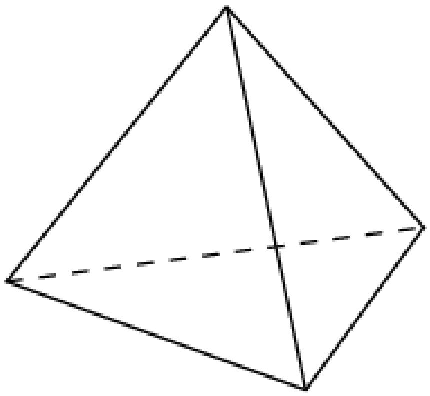
5(8+). Докажите, что любую карту на плоскости, образованную окружностями, можно раскрасить двумя красками.



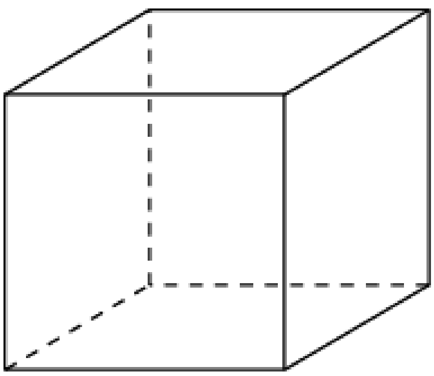
6(8+). Докажите, что если карту можно правильно раскрасить двумя красками, то каждая её внутренняя вершина имеет чётный индекс (т.е. в ней сходится чётное число сторон).

7(8+). Докажите, что если карту, в каждой вершине которой сходится три стороны, можно правильно раскрасить тремя красками, то каждая её внутренняя страна имеет чётное число сторон.

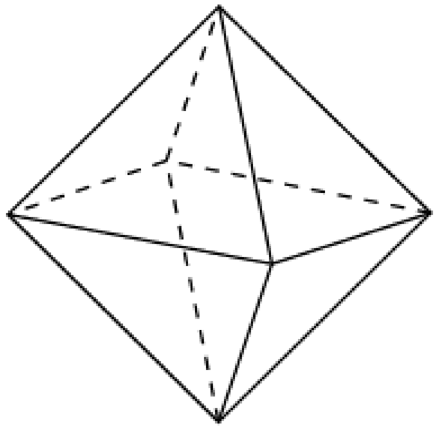
8(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски граней тетраэдра?



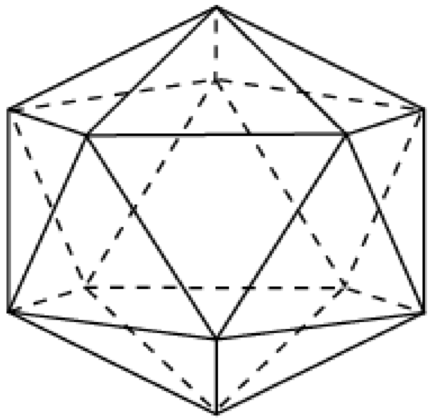
9(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски граней куба?



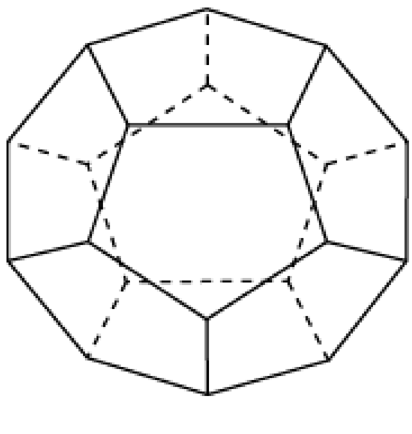
10(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски граней октаэдра?



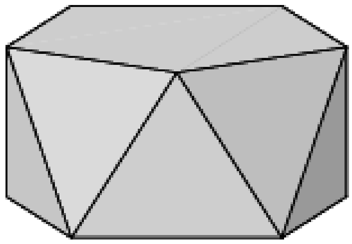
11(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски граней икосаэдра?



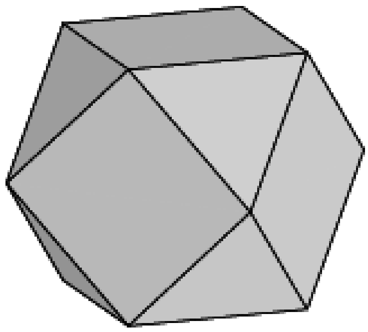
12(6+). Сколько красок требуется для правильной раскраски граней додекаэдра?



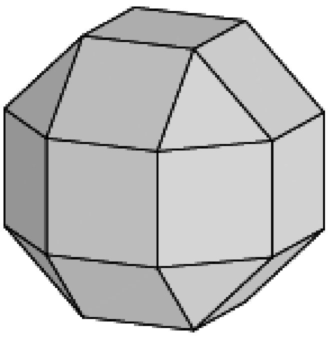
13(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней пятиугольной антипризмы, изображённой на рисунке?



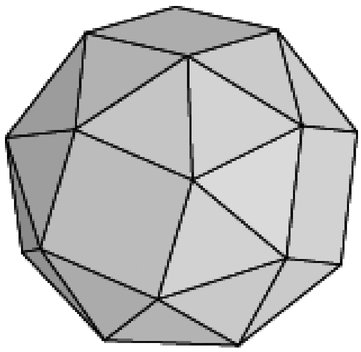
14(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней кубооктаэдра, изображённого на рисунке?



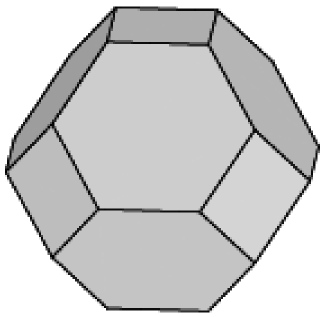
15(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней ромбокубооктаэдра, изображённого на рисунке?



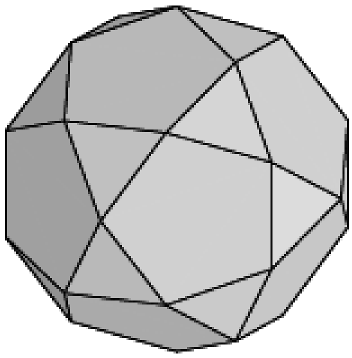
16(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней курносого куба, изображённого на рисунке?



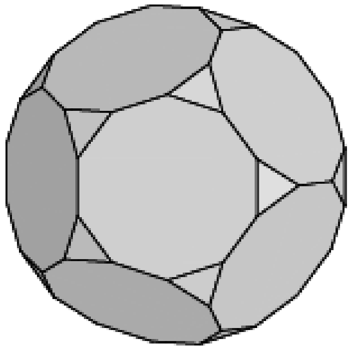
17(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней усечённого октаэдра, изображённого на рисунке?



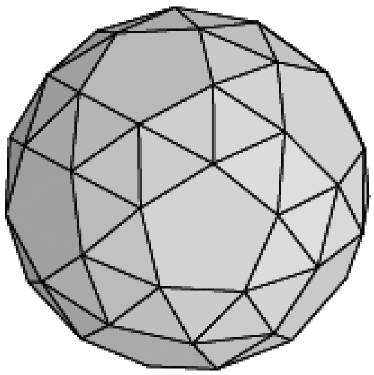
18(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней икосододекаэдра, изображённого на рисунке?



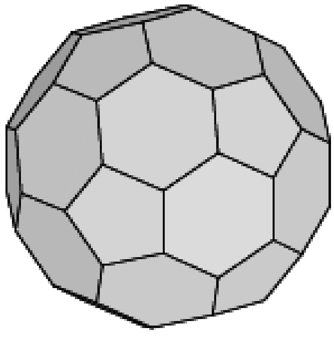
19(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней усечённого додекаэдра, изображённого на рисунке?



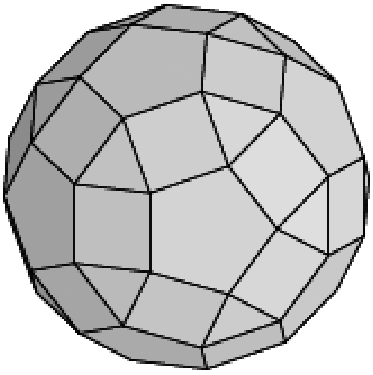
20(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней курносого додекаэдра, изображённого на рисунке?



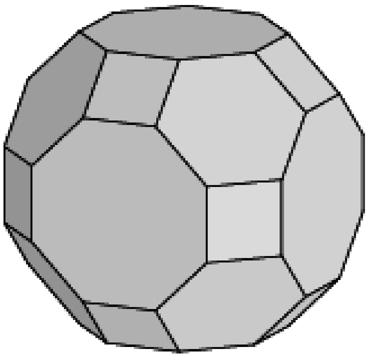
21(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней усечённого икосаэдра, изображённого на рисунке?



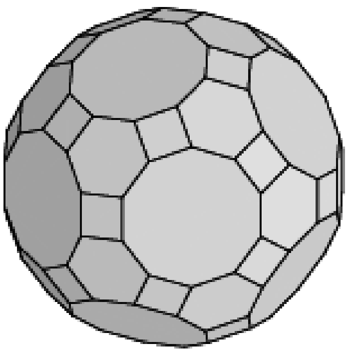
22 (10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней ромбоикосододекаэдра, изображённого на рисунке?



23(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней усечённого кубооктаэдра, изображённого на рисунке?



24(10+). Сколько красок потребуется для правильной раскраски граней усечённого икосододекаэдра, изображённого на рисунке?

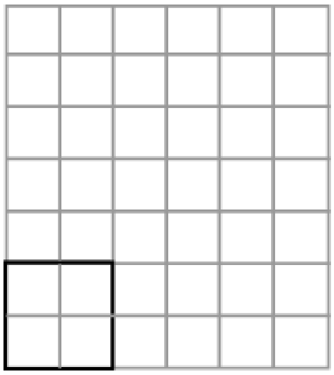


11. Паркеты

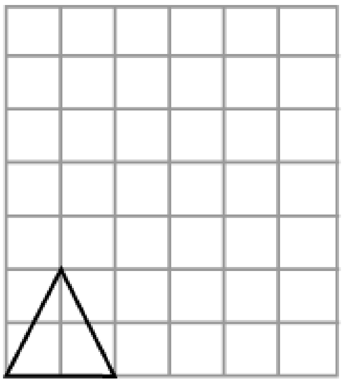
Паркеты с древних времен привлекали к себе внимание людей. Ими мостили дороги, украшали полы в помещениях, стены домов, использовали в декоративно-прикладном искусстве. Знаменитый голландский художник М. Эшер посвятил паркетам несколько своих картин.

Паркеты являются объектом исследования математиков, физиков, химиков и др. Глубокие результаты здесь получены отечественными учёными, академиками: А.Д. Александровым, Б.Н. Делоне, Е.С. Федоровым. Нобелевская премия по физике 2010 г. была присуждена отечественным учёным А. Гейму и К. Новоселову за основополагающие эксперименты по созданию двумерного материала графена, структуру которого составляет паркет из правильных шестиугольников. Нобелевская премия по химии 2011 г. была присуждена израильскому учёному Д. Шехтману за открытие квазикристаллов, двумерную модель которых составляют мозаики Р. Пенроуза .

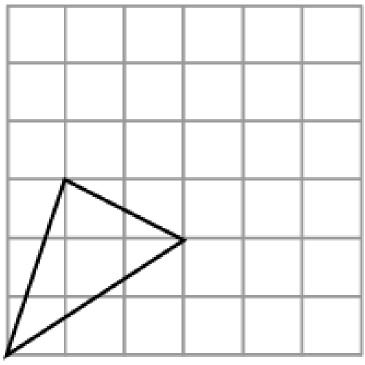
1(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов, равных данному на рисунке, Раскрасьте квадраты так, чтобы соседние квадраты были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



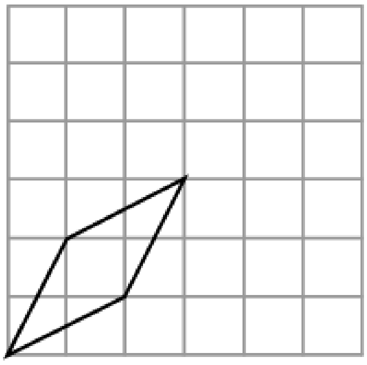
2(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



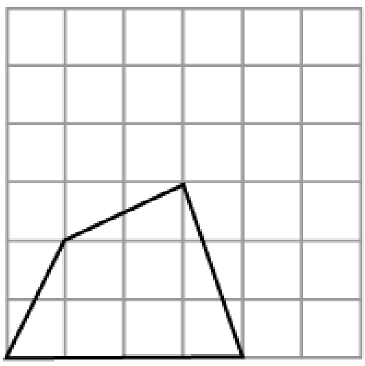
3(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



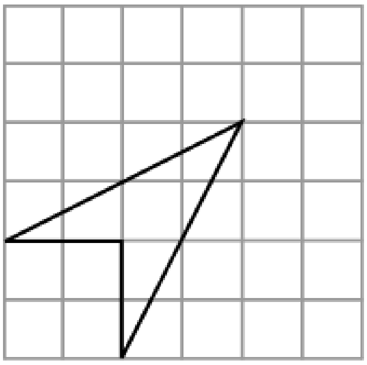
4(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



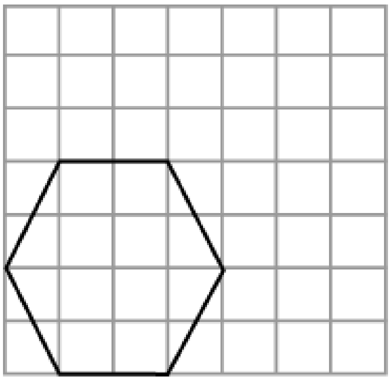
5(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



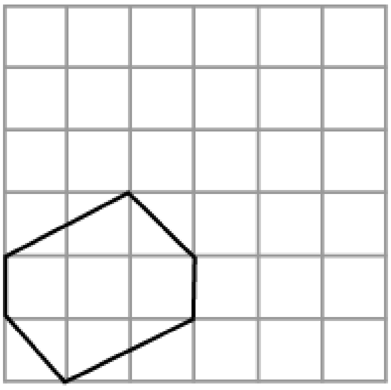
6(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



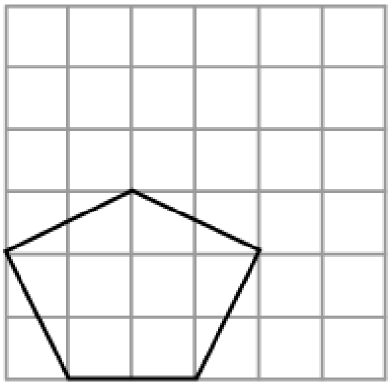
7(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



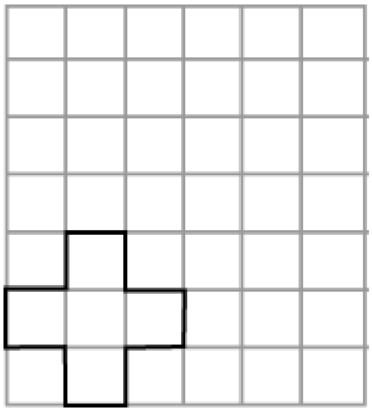
8(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



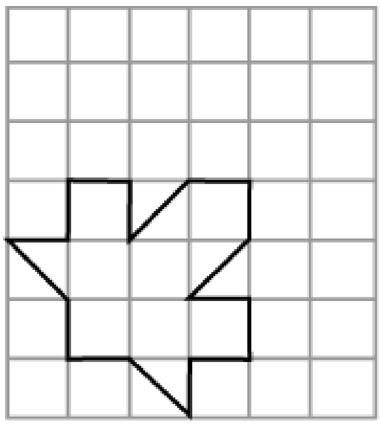
9(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте пятиугольники так, чтобы соседние пятиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



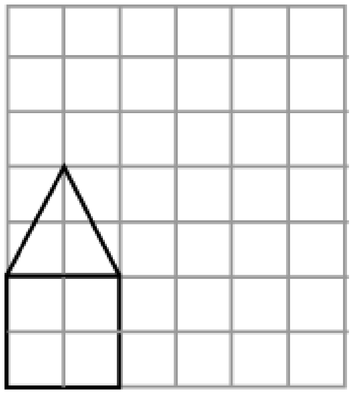
10(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



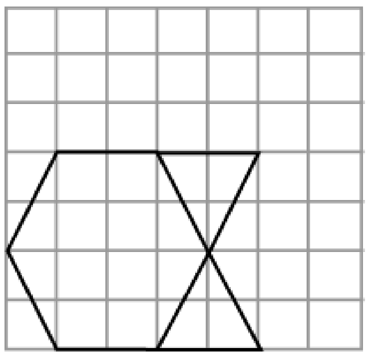
11(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



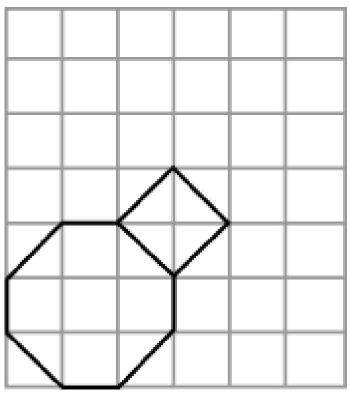
12(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два квадрата и три треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



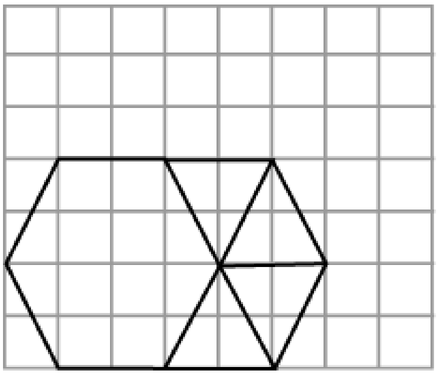
13(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два шестиугольника и два треугольников, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



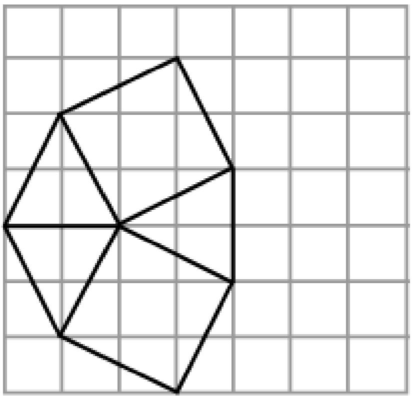
14(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два восьмиугольника и квадрат, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



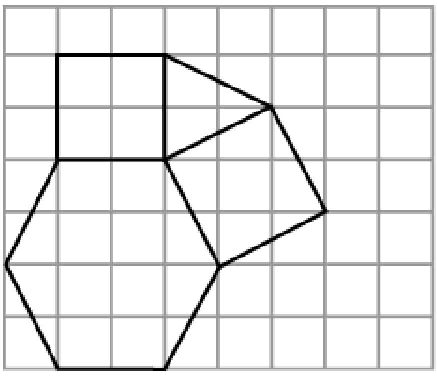
15(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится шестиугольник и четыре треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



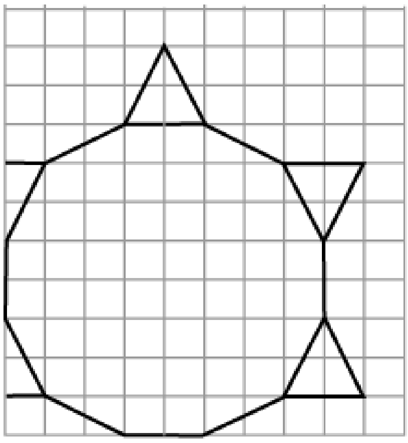
16(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два квадрата и три треугольника, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



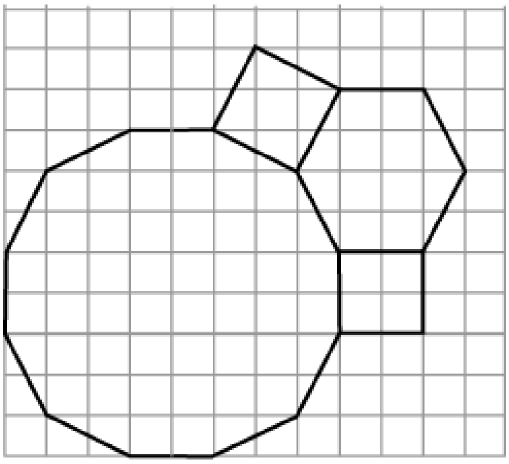
17(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится шестиугольник, два квадрата и треугольник, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?



18(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится два двенадцатиугольника и треугольник, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

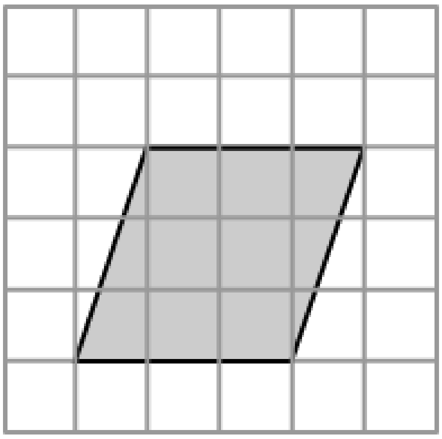


19(6+). На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, в каждой вершине которого сходится двенадцатиугольник, шестиугольник и квадрат, равные данным на рисунке. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

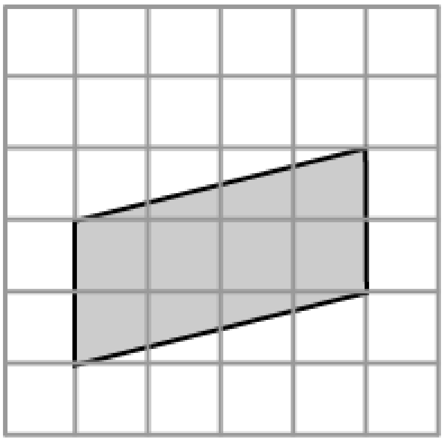


12. Разрезания

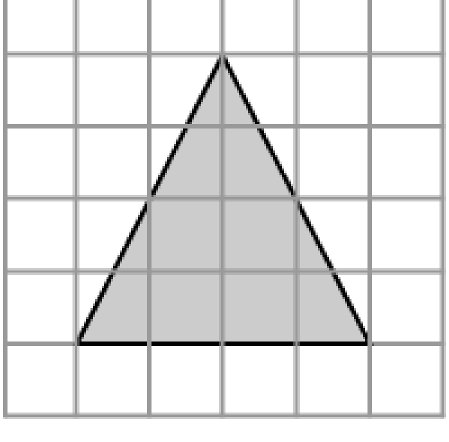
1(6+). Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



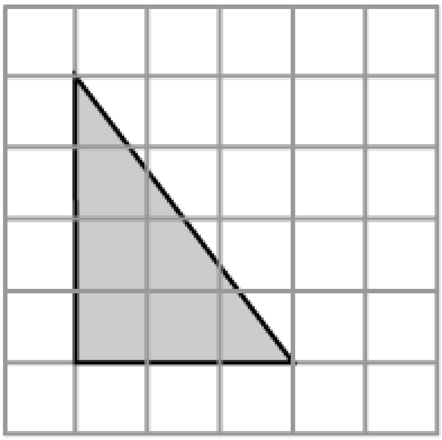
2(6+). Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



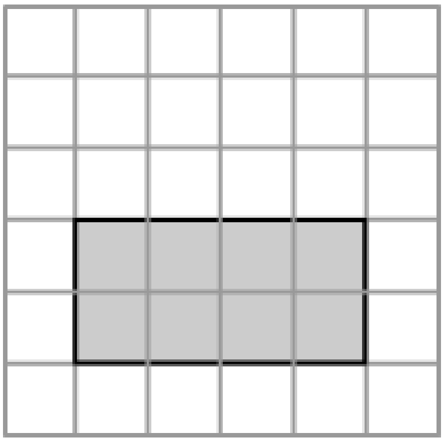
3(6+). Изобразите треугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



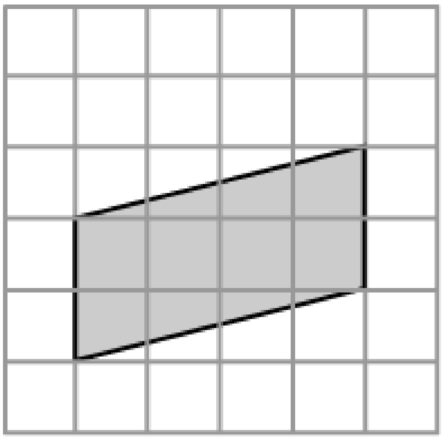
4(6+). Изобразите треугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



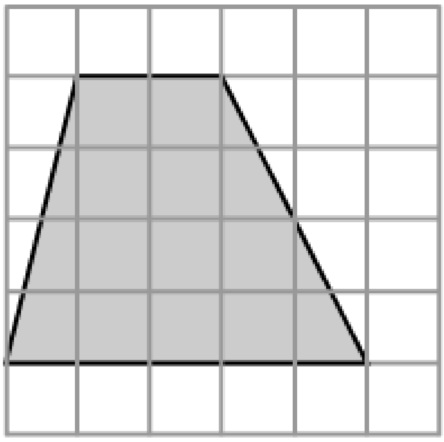
5(6+). Изобразите прямоугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот прямоугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.



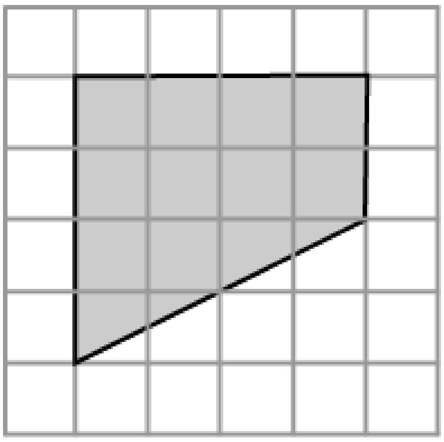
6(6+). Изобразите параллелограмм, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить треугольник.



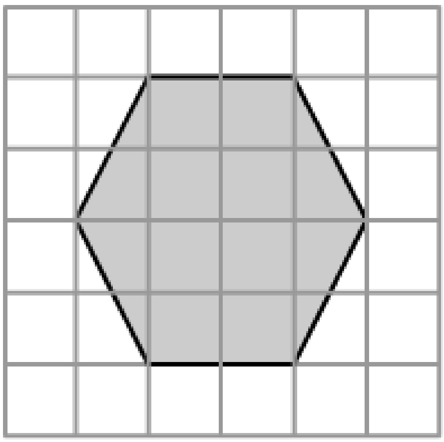
7(6+). Изобразите трапецию, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой эту трапецию, из полученных частей можно сложить треугольник.



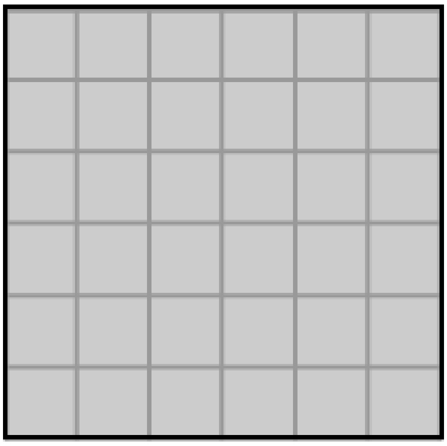
8(6+). Изобразите трапецию, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой эту трапецию, из полученных частей можно сложить треугольник.



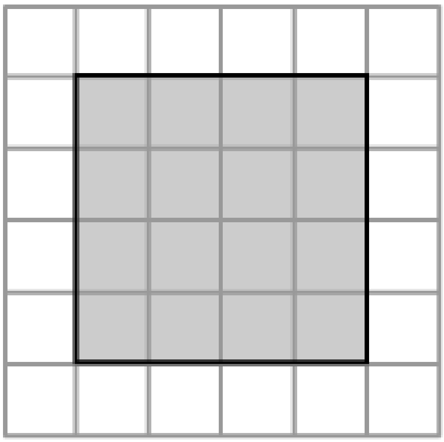
9(6+). Изобразите шестиугольник, как на рисунке. Проведите прямую, разрезав по которой этот многоугольник, из полученных частей можно сложить параллелограмм.



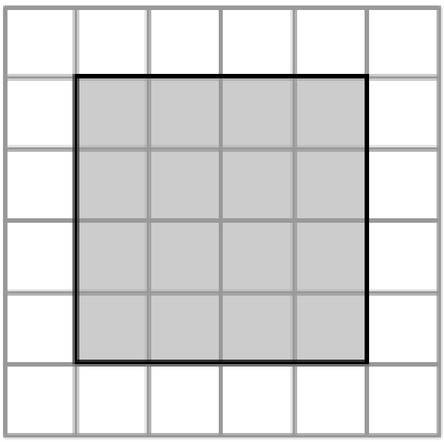
10(6+). Разрежьте квадрат на шесть квадратов.



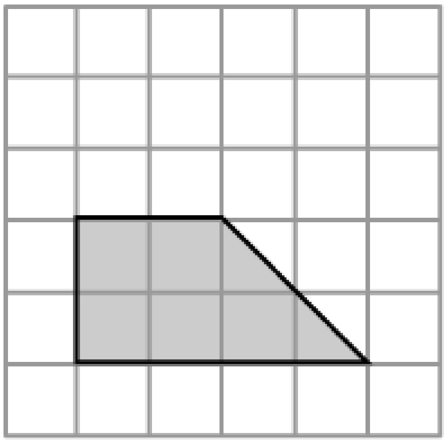
11(6+). Разрежьте квадрат на семь квадратов.



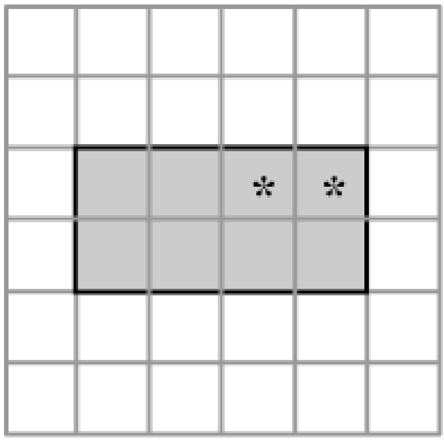
12(6+). Разрежьте квадрат на восемь квадратов.



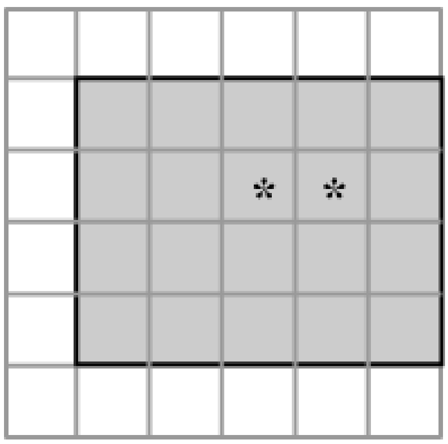
13(6+). Разрежьте трапецию на четыре равные части.



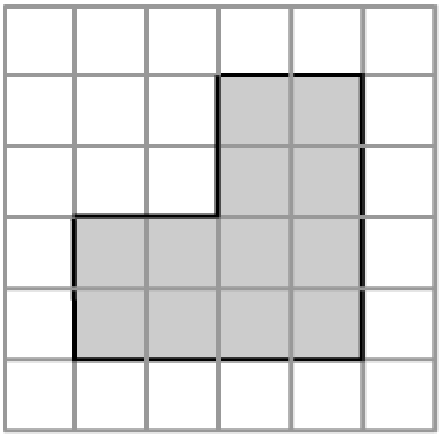
14(6+). Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.



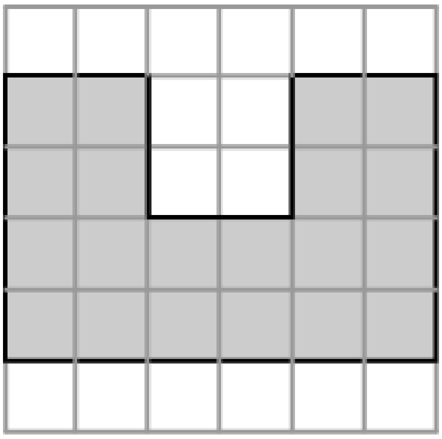
15(6+). Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.



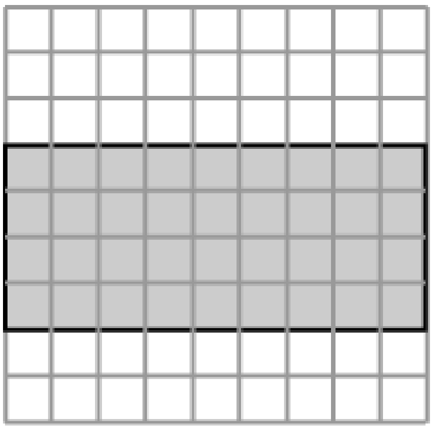
16(6+). Изобразите многоугольник, как на рисунке. Разрежьте его на четыре равные части.



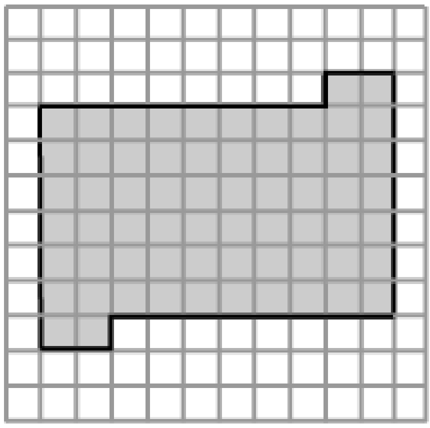
17(6+). Изобразите многоугольник, как на рисунке. Разрежьте его на четыре равные части.



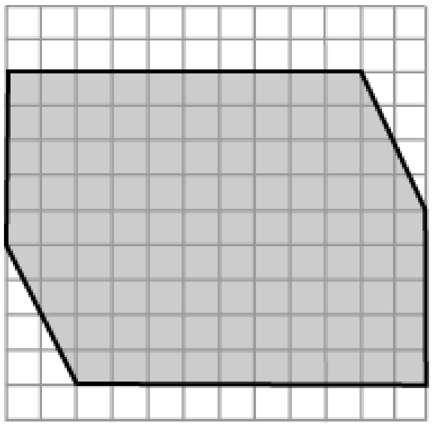
18(6+). Прямоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



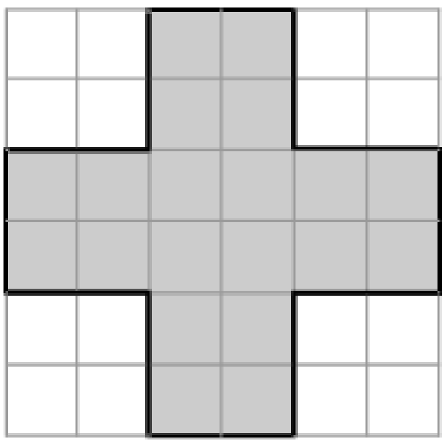
19(6+). Многоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



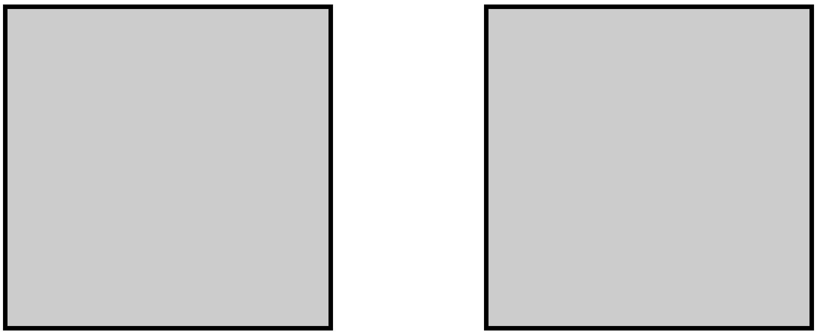
20(6+). Многоугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.



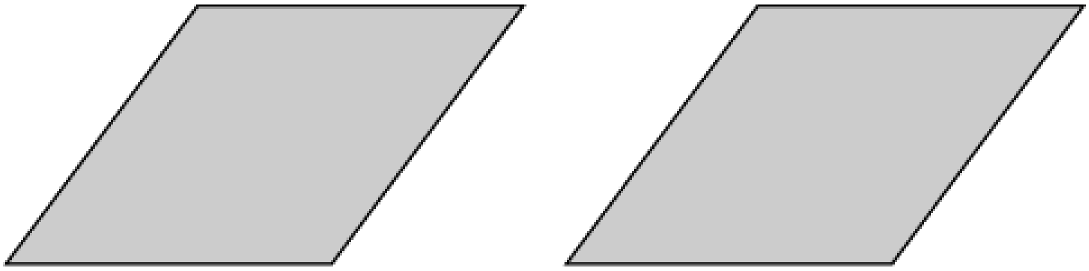
21(6+). Многоугольник разрежьте на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.



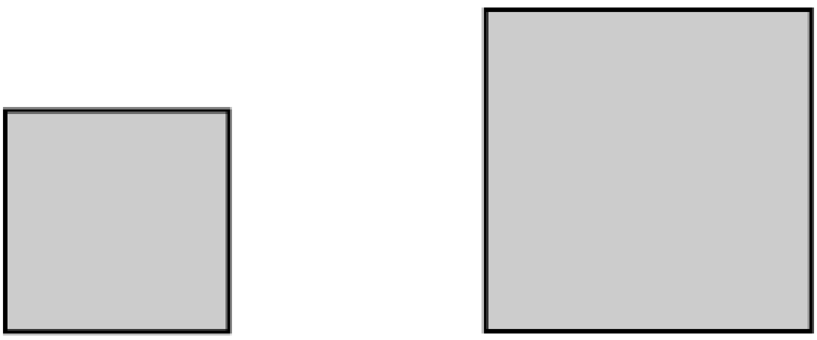
22(6+). Один из двух равных квадратов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого квадрата один квадрат.



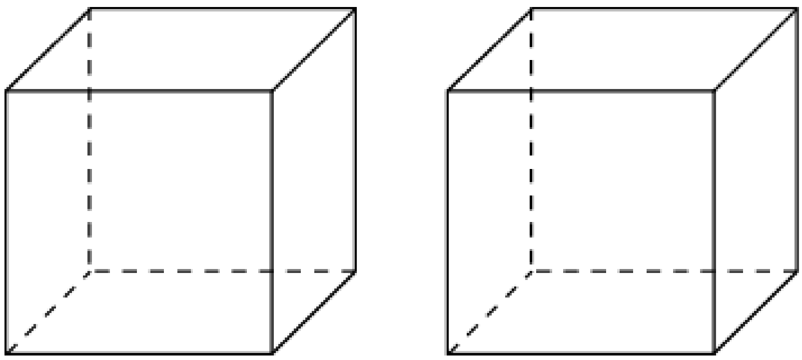
23. Каждый из двух равных ромбов разрежьте на две части и сложите из них прямоугольник.



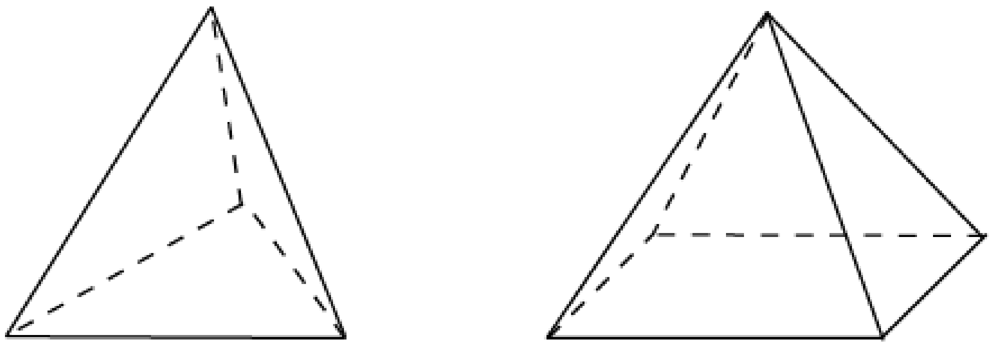
24(9+). Один из двух квадратов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого квадрата один квадрат.



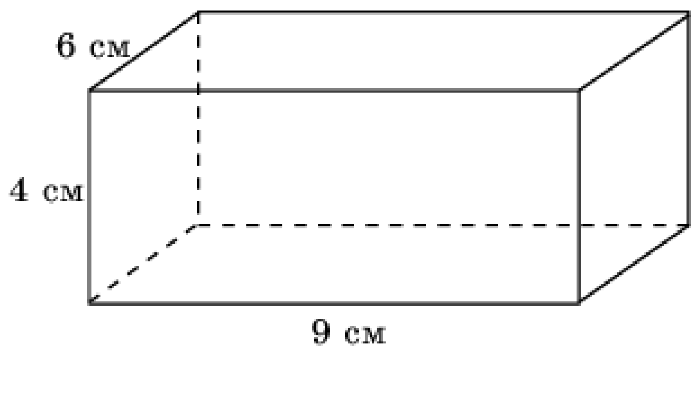
25(10+). Один из двух равных кубов разрежьте на несколько частей и составьте из них и другого куба правильную четырёхугольную призму.



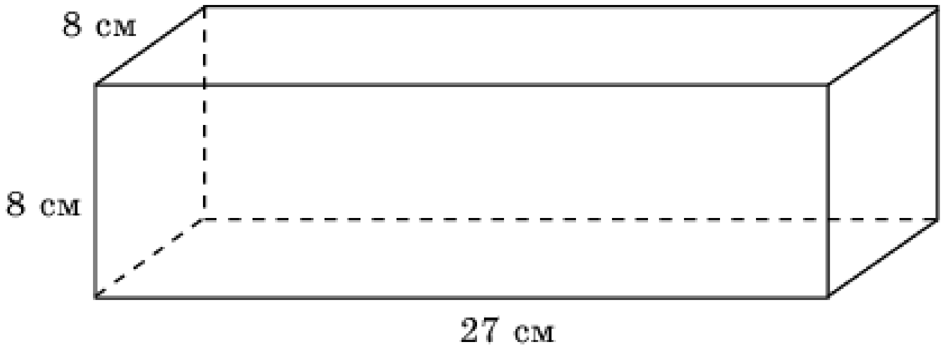
26(10+). Даны единичный тетраэдр и правильная четырёхугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Разрежьте эту пирамиду на четыре части и сложите из них и тетраэдра куб.



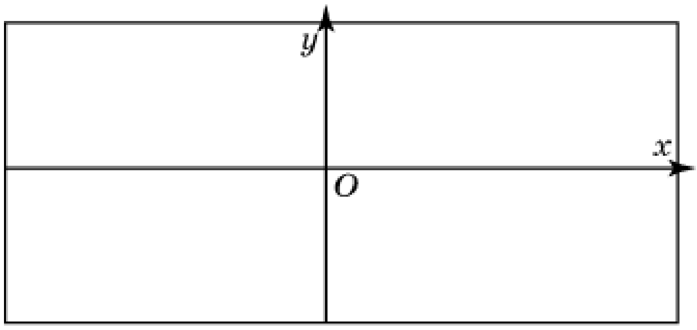
27(10+). Прямоугольный брусок размерами 4 см х 6 см х 9 см разрежьте на две части и сложите из них куб.

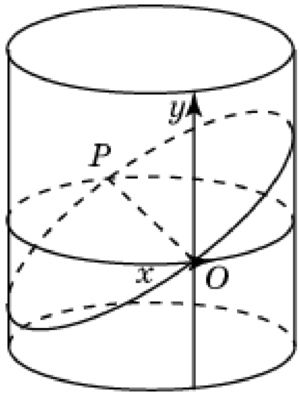


28(10+). Прямоугольный брусок размерами 8 см х 8 см х 27 см разрежьте на четыре части и сложите из них куб.

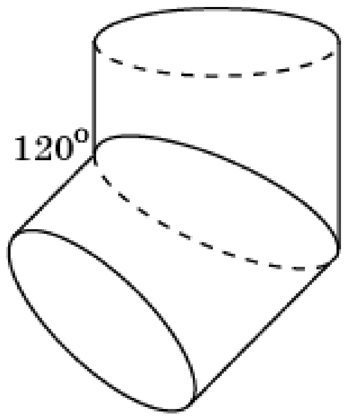


29(11+). Возьмём прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат *Ox* и *Oy*. Затем свернём этот лист в боковую поверхность цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось *Ox* свернется в окружность радиуса 1, а ось *Oy* станет образующей цилиндра. Разрежем эту поверхность по сечению, проходящему через диаметр *OD*, и составляющему с плоскостью окружности угол 45°. Развернём нижнюю часть поверхности. Выясните, какую кривую будет образовывать её верхний край.



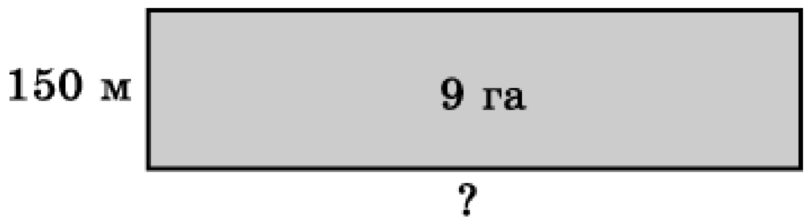


30(11+). Имеется лист металла прямоугольной формы. Укажите разрез этого листа на две части, из которых можно сделать трубу, изображенную на рисунке, состоящую из частей цилиндра, соединённых под углом 120°.

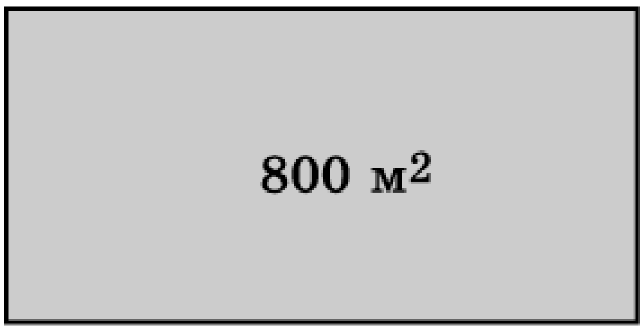


13. Площадь

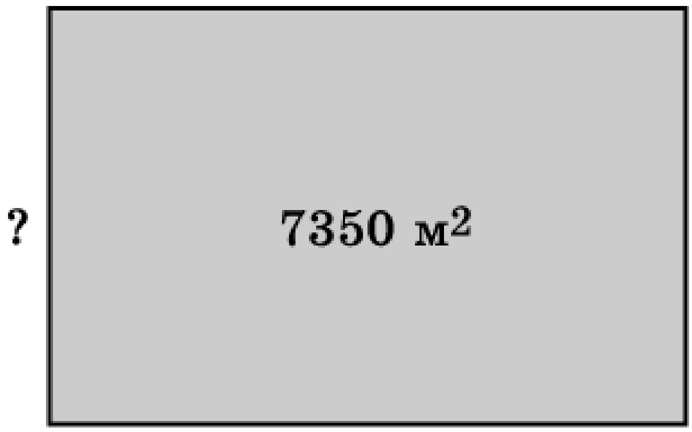
1(6+). Площадь земельного участка, имеющего форму прямоугольника, равна 9 га, ширина участка равна 150 м. Найдите длину этого участка.



2(6+). Найдите периметр прямоугольного участка земли, площадь которого равна 800 $м^2$ и одна сторона в 2 раза больше другой.



3(6+). Футбольное поле имеет форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины. Площадь футбольного поля равна 7350 $м^2$. Найдите его ширину.



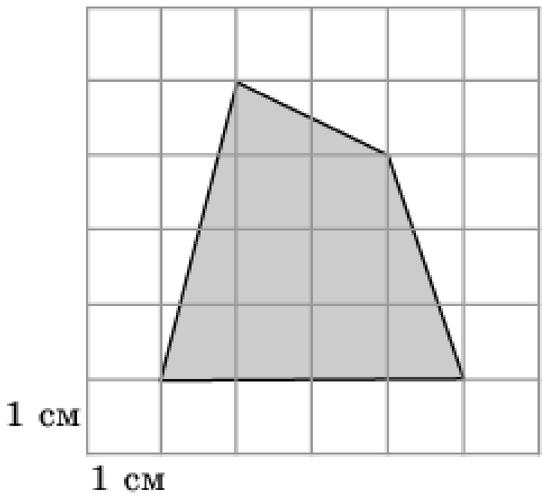
4(6+). Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам, высота – 8 футам. Найдите площадь футбольных ворот в квадратных футах (один ярд составляет три фута).

5(6+). Для разметки вратарской площадки на футбольном поле на расстоянии 6 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка длиной 6 ярдов. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите площадь вратарской площадки в квадратных футах, учитывая, что ширина ворот равна 8 ярдам (один ярд составляет три фута).

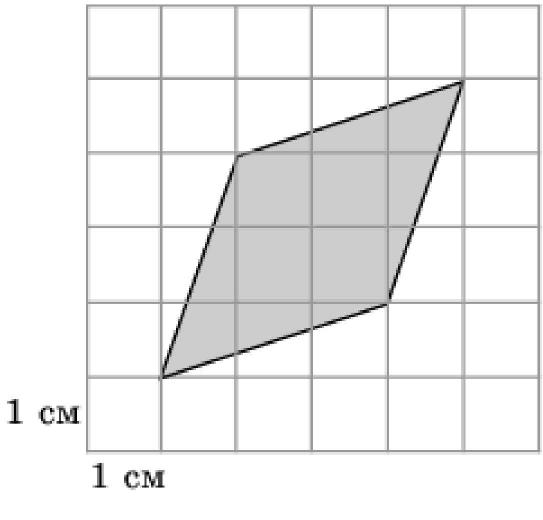
6(6+). Для разметки штрафной площади на футбольном поле на расстоянии 18 ярдов от каждой стойки ворот под прямым углом к линии ворот вглубь поля проводятся два отрезка длиной 18 ярдов. Концы этих отрезков соединяются отрезком, параллельным линии ворот. Найдите приближённую площадь штрафной площади в квадратных метрах, учитывая, что ширина ворот равна 8 ярдам (один ярд приближенно равен 0,9 м). В ответе укажите целое число квадратных метров.

7(6+). Ширина хоккейных ворот равна 6 футам, высота – 4 футам. Найдите приближённую площадь ворот в квадратных метрах с точностью до двух знаков после запятой. (Один фут равен 30,5 см.)

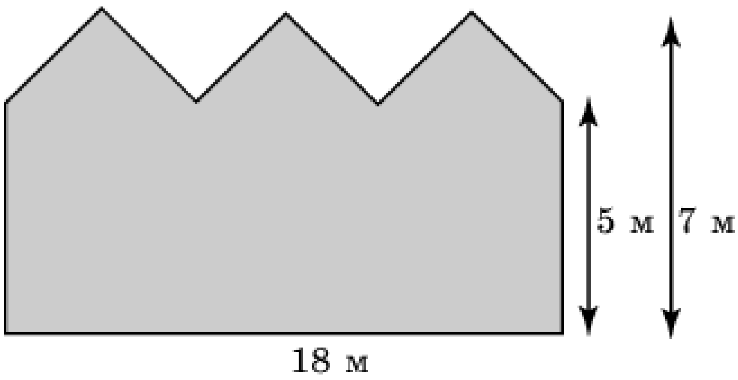
8(9+). Найдите площадь лесного массива (в м^2), изображенного на плане с квадратной сеткой 1х1 (см) в масштабе 1 см – 200 м.



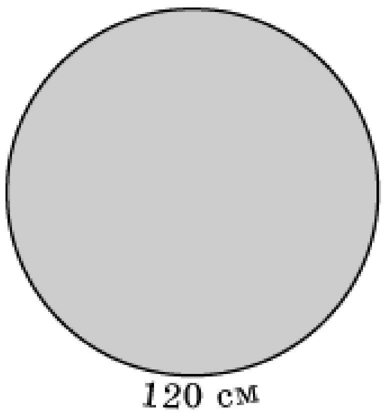
9(9+). Найдите площадь поля (в м^2), изображенного на плане с квадратной сеткой 1х1 (см) в масштабе 1 см – 200 м.



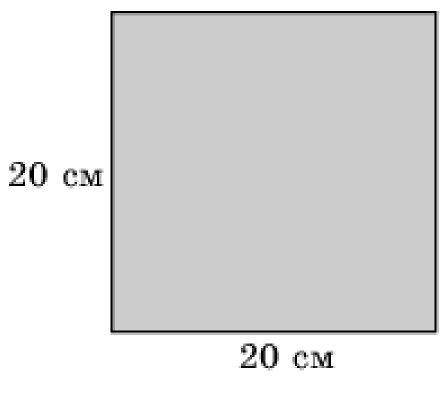
10(9+). Найдите площадь стены заводского здания, изображённой на рисунке.



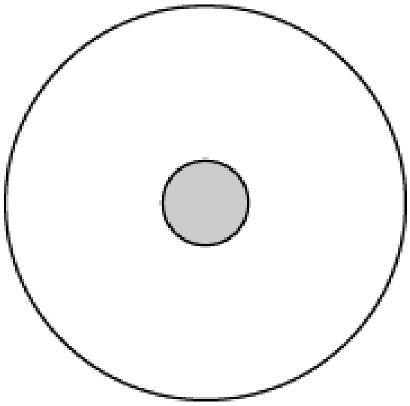
11(9+). Дерево имеет в обхвате 120 см. Найдите примерную площадь поперечного сечения (в $см^2$), имеющего форму круга. (Примите $\pi \approx 3$.)



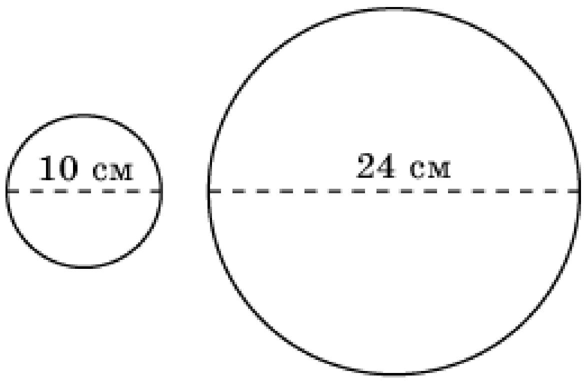
12(9+). Из квадратного листа жести со стороной 20 см вырезали круг наибольшего диаметра. Какой примерный процент площади листа жести составляет площадь обрезков? (Примите $\pi \approx 3$.)



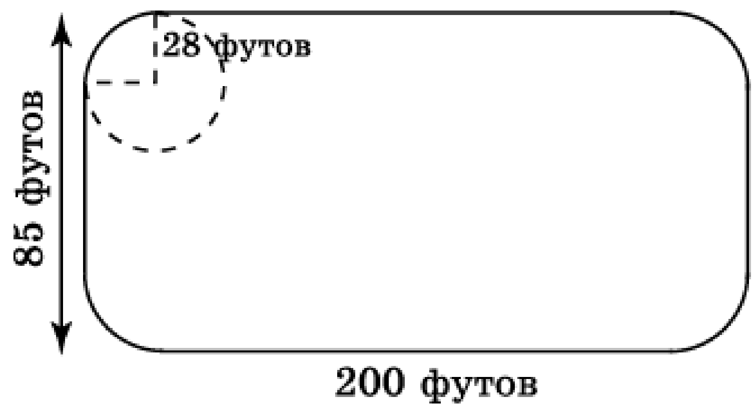
13(9+). Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр в зависимости от освещения от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличивается площадь поверхности зрачка?



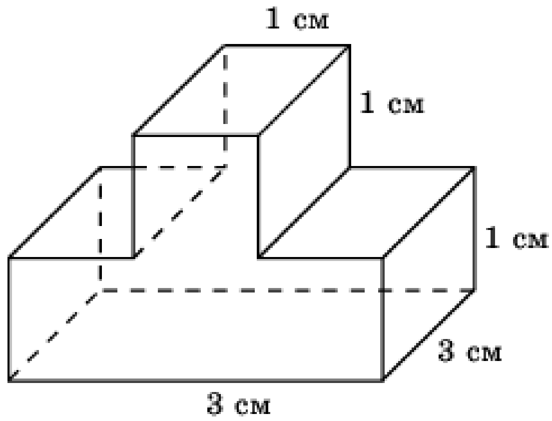
14(9+). Две трубы, диаметры которых равны 10 см и 24 см, требуется заменить одной, не изменяя их пропускной способности. Каким должен быть диаметр новой трубы?



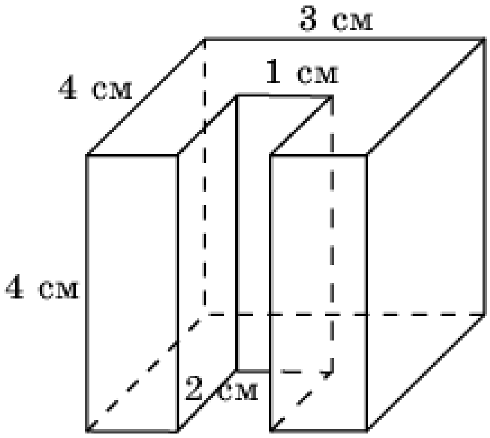
15(9+). Хоккейная площадка имеет форму прямоугольника размером 200x85 (футов) с углами, закругленными по дугам окружностей радиуса 28 футов. Найдите примерную площадь хоккейной площадки в квадратных футах. (Примите $\pi \approx 3$.)



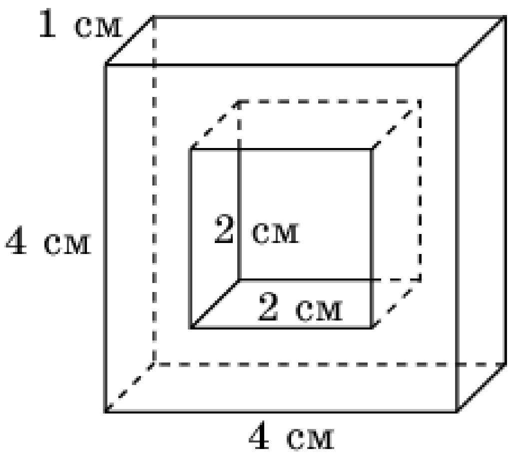
16(6+). Найдите площадь поверхности детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



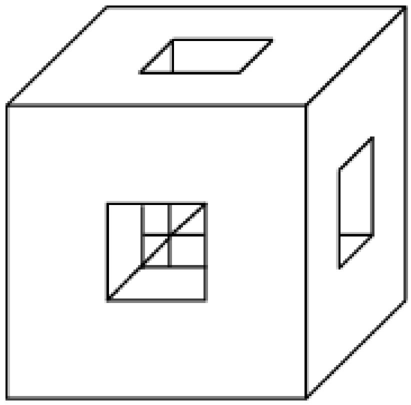
17(6+). Найдите площадь поверхности детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



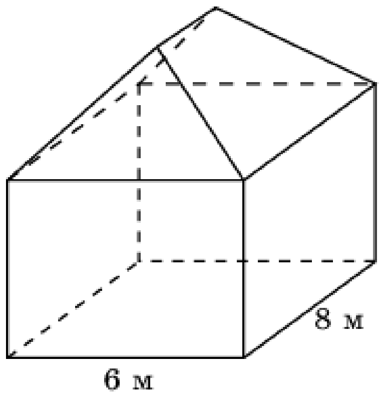
18(6+). Найдите площадь поверхности детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



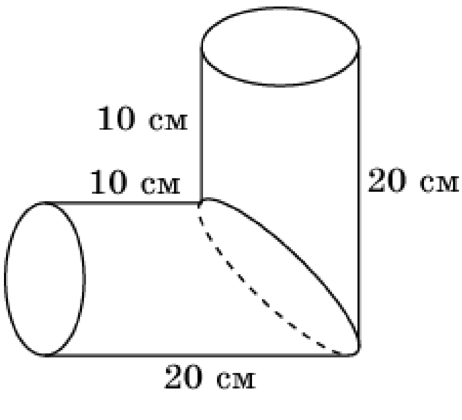
19(6+). В каждой грани куба с ребром 3 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 1 см. Найдите площадь полной поверхности оставшейся части.



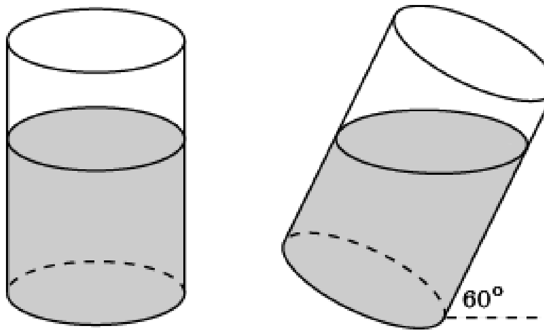
20(10+). Основание садового домика – прямоугольник 6x8 (м). Крыша наклонена под углом 45^o к основанию. Найдите площадь крыши. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу квадратных метров.



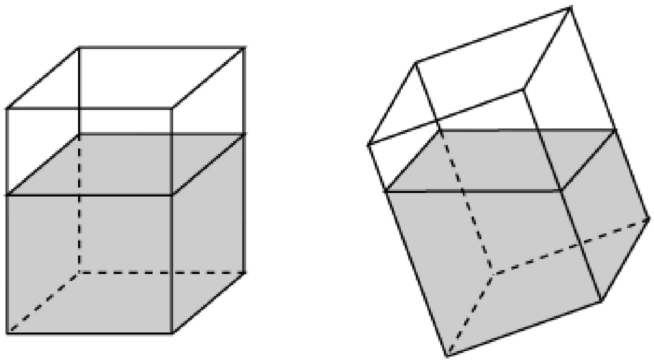
21(10+). Найдите площадь поверхности детали, изображённой на рисунке, составленной из двух частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$.)



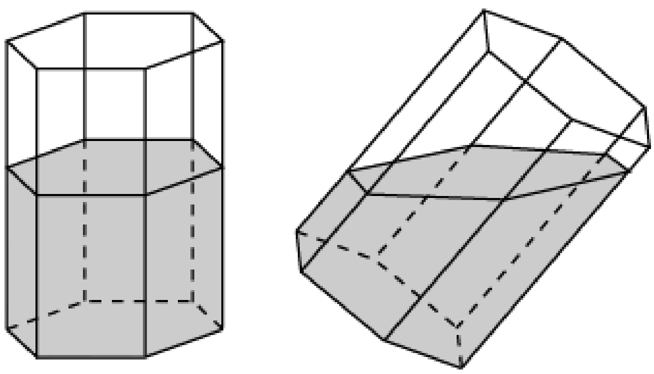
22(10+). Цилиндрический стакан с водой наклонили под углом 60° к плоскости горизонта. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите площадь поверхности воды в наклонённом стакане, если радиус его основания равен 3 см. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу квадратных сантиметров.



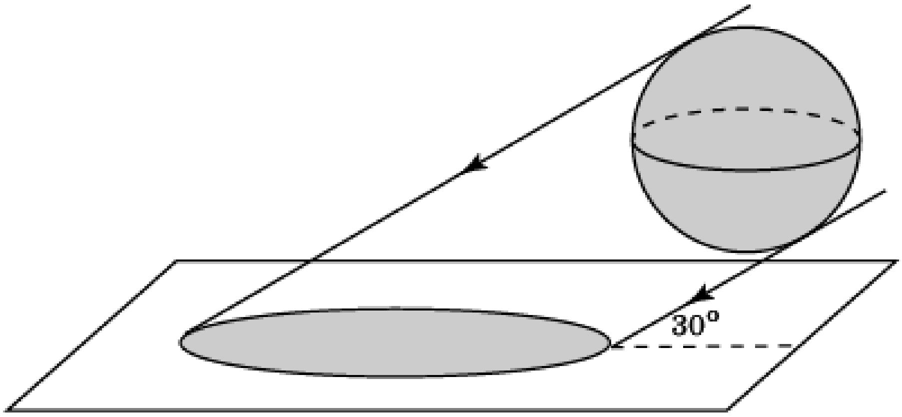
23(10+). Сосуд с водой в форме правильной четырёхугольной призмы наклонили под углом 70° к плоскости горизонта. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите площадь поверхности воды в наклонённом сосуде, если стороны его основания равны 8 см. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу квадратных сантиметров.



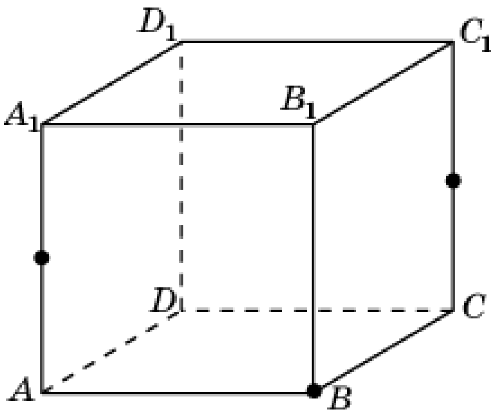
24(10+). Сосуд с водой в форме правильной шестиугольной призмы наклонили под углом 50° к плоскости горизонта. Используя таблицу тригонометрических функций, найдите площадь поверхности воды в наклонённом сосуде, если стороны его основания равны 2 см. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу квадратных сантиметров.



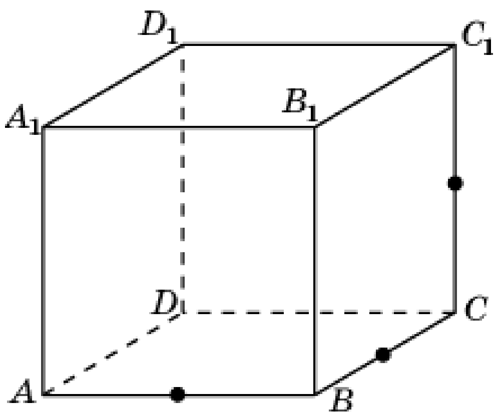
25(10+). Найдите площадь тени шара радиуса 10 см, освещаемого Солнцем под углом 30^o к плоскости тени. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу квадратных сантиметров.



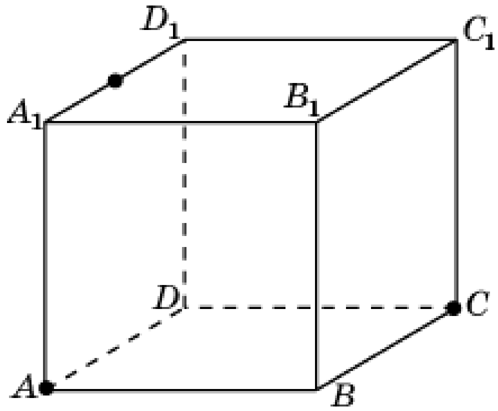
26(10+). Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины рёбер AA_1, CC_1. Найдите его площадь.



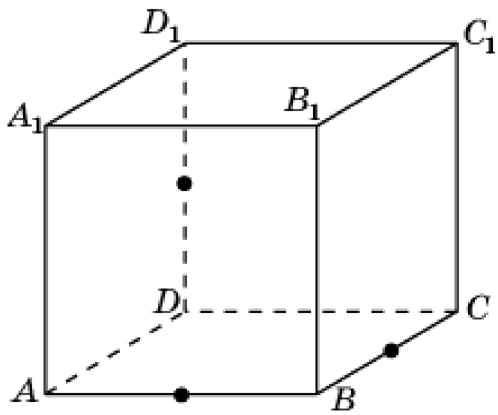
27(10+). Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC, CC_1. Найдите его площадь.



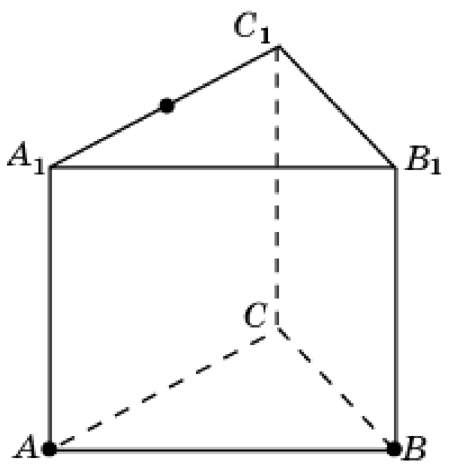
28(10+). Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1. Найдите его площадь.



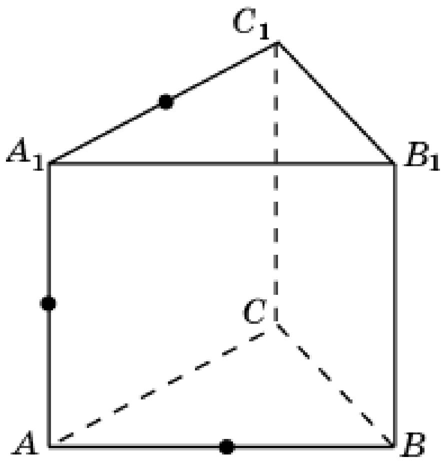
29(10+). Изобразите сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC, DD_1. Найдите его площадь.



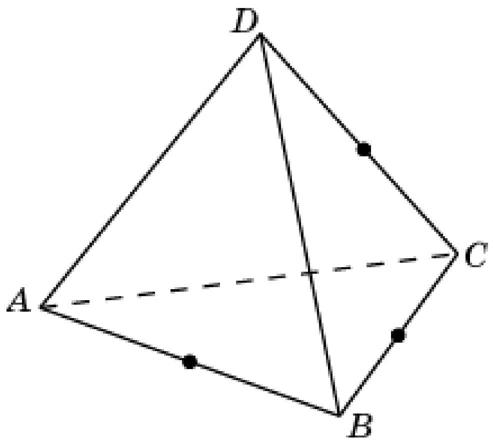
30(10+). Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC, DD_1. Найдите его площадь, если все рёбра призмы равны 1.



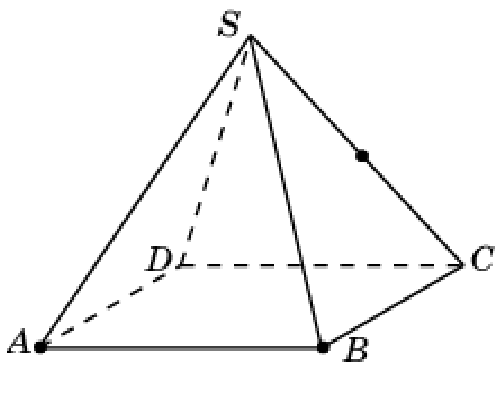
31(10+). Изобразите сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AA_1, A_1C_1. Найдите его площадь, если все рёбра призмы равны 1.



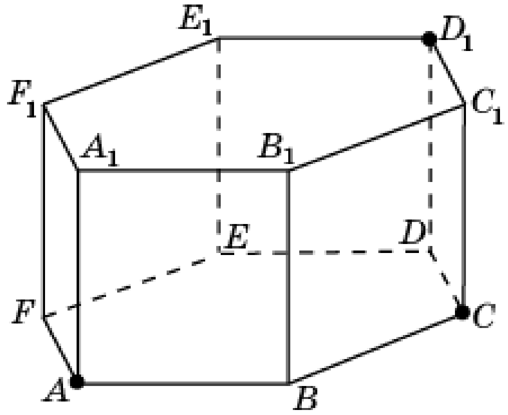
32(10+). Изобразите сечение правильного единичного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AA_1, A_1C_1. Найдите его площадь.



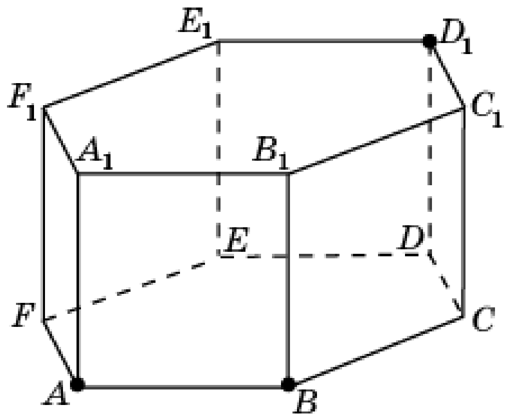
33(10+). Изобразите сечение правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра SC. Найдите его площадь, если все рёбра пирамиды равны 1.



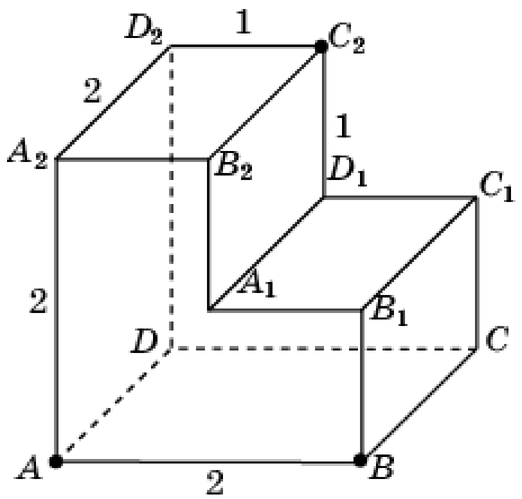
34(10+). Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1. Найдите его площадь, если все рёбра призмы равны 1.



35(10+). Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B и D_1. Найдите его площадь, если все рёбра призмы равны 1.

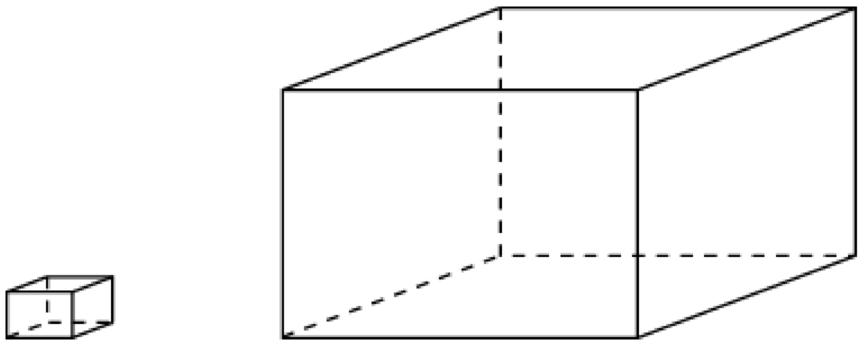


36(10+). Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, плоскостью, проходящей через вершины A, B и C_2. Найдите его площадь.

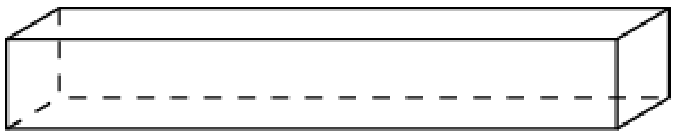


14. Объём

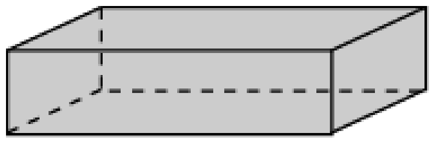
1(6+). Сколько коробок в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 30х40х50 (см) можно поместить в кузов машины размерами 2х3х1,5 (м)?



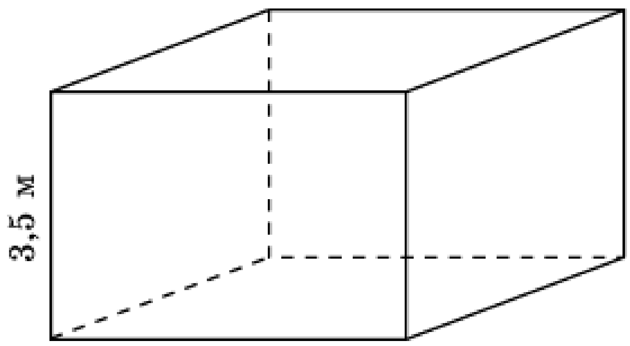
2(6+). Сколько досок длиной 3,5 м, шириной 20 см и толщиной 20 мм выйдет из четырёхугольной балки длиной 105 дм, имеющей в сечении прямоугольник размером 30 см х 40 см?



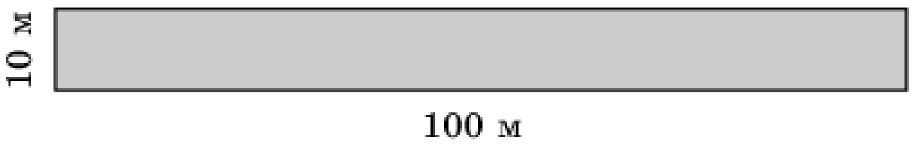
3(6+). Размеры кирпича 25х12х6,5 (см). Найдите вес одного кирпича в граммах, если объёмный вес кирпича равен 1700 кг/$м^3$.



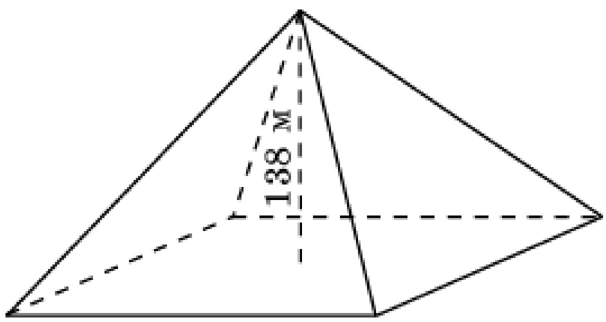
4(6+). Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 $м^3$ воздуха?



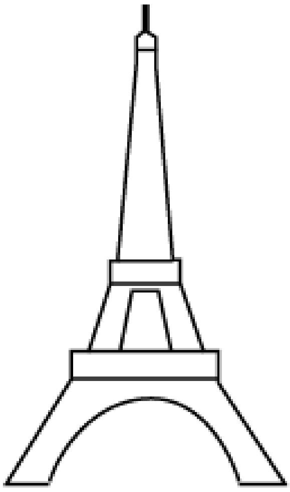
5(6+). Прямолинейный участок дороги шириной 10 м и длиной 100 м требуется покрыть асфальтом толщиной 5 см. Сколько потребуется машин асфальта, если объёмный вес асфальта равен 2,4 т/$м^3$, а грузоподъёмность одной машины – 5 тонн?



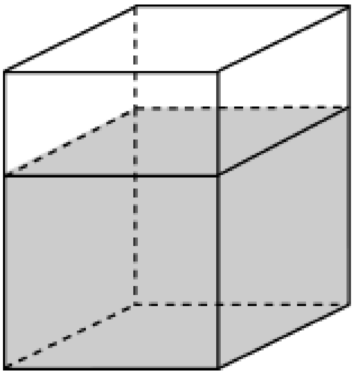
6(11+). Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м. Найдите её объём в кубических метрах.



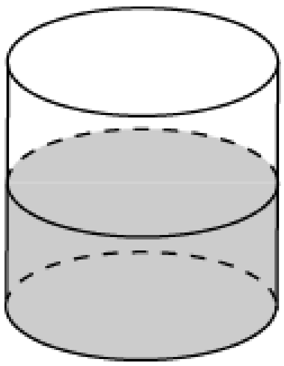
7(11+). Эйфелева башня в Париже высотой 300 м весит 8000000 кг. Некто захотел изготовить точную копию этой башни весом один килограмм. Какова будет высота этой модели. Ответ дайте в сантиметрах.



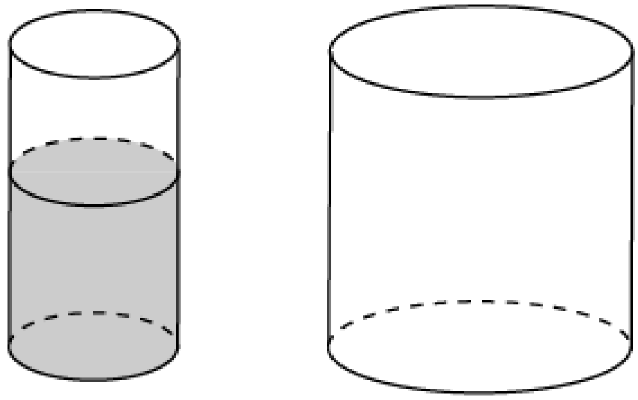
8(6+). В сосуд с водой в форме прямоугольного параллелепипеда опущена деталь. При этом уровень воды поднялся на 1,5 см. Дно сосуда имеет размеры 15 х 10 см. Найдите объём детали.



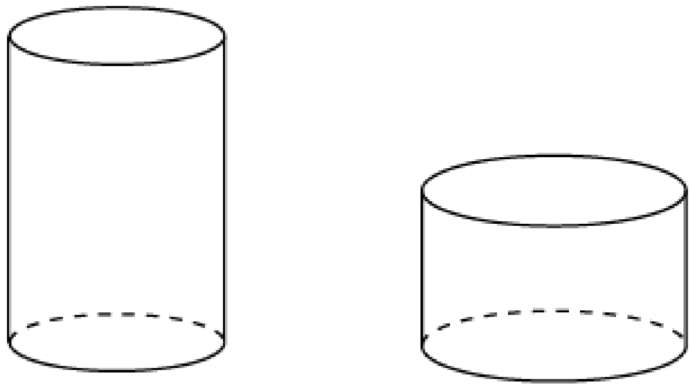
9(11+). В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм^3 воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали в кубических дециметрах?



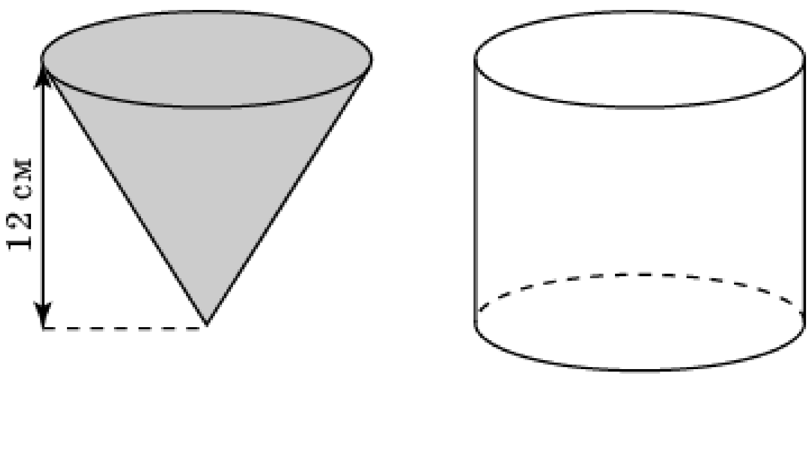
10(11+). Воду, находящуюся в цилиндрическом сосуде на уровне 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, в два раза большего диаметра. На какой высоте будет находиться уровень воды во втором сосуде?



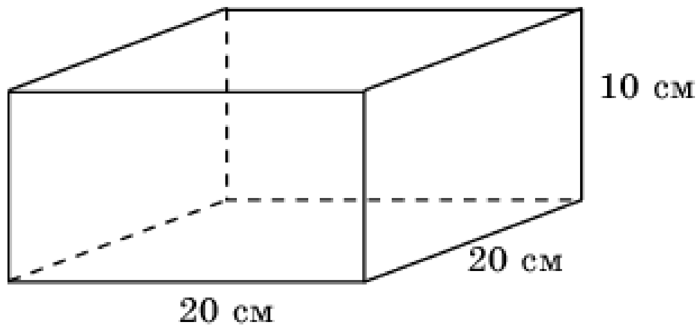
11(11+). Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



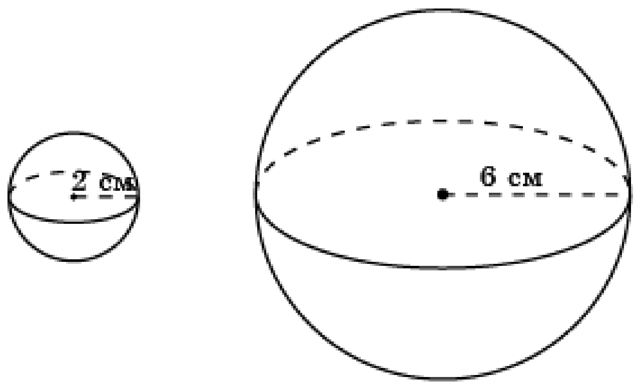
12(11+). Воду, заполняющую всю коническую колбу высотой 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, радиус основания которого равен радиусу окружности конической колбы. На какой высоте от основания цилиндрического сосуда будет находиться поверхность воды?



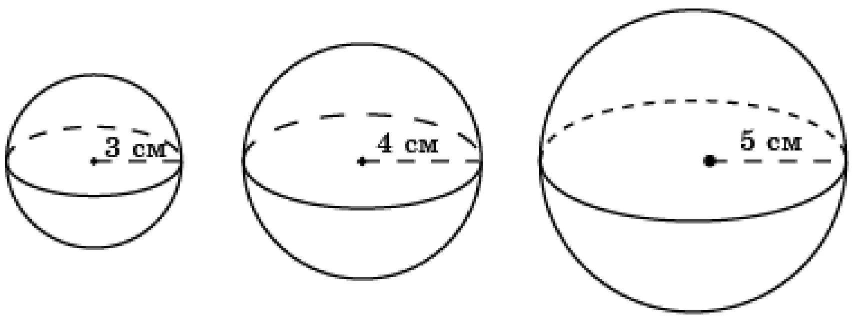
13(11+). Медный прямоугольный параллелепипед, рёбра которого равны 20 см, 20 см и 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Примите $\pi \approx 3$.)



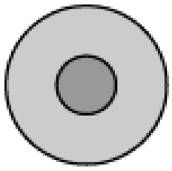
14(11+). Сколько нужно взять медных шаров радиуса 2 см, чтобы из них можно было выплавить шар радиуса 6 см?



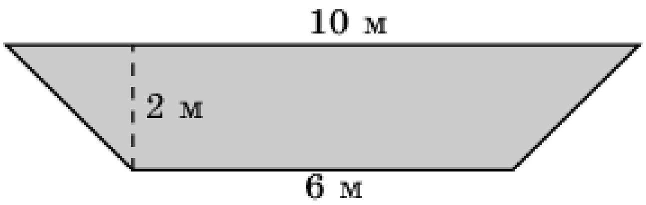
15(11+). Найдите радиус шара, который можно выплавить из трех медных шаров радиусов 3 см, 4 см и 5 см.



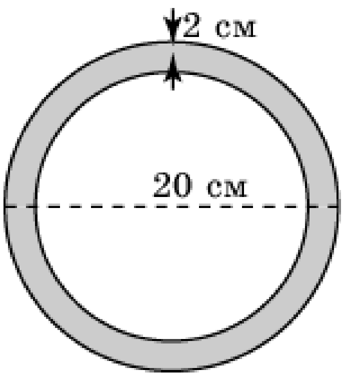
16(11+). Мякоть вишни окружает косточку толщиной, равной диаметру косточки. Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объёма мякоти к объёму косточки.



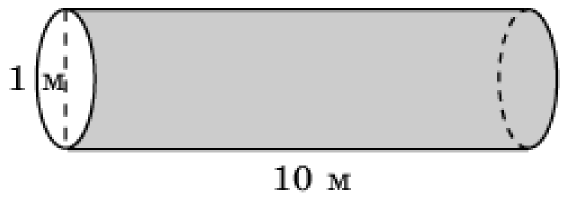
17(11+). Профиль русла реки имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 6 м, а высота – 2 м. Скорость течения равна 1 м/сек. Какой объём воды проходит через этот профиль за 1 мин? Ответ дайте в кубических метрах.



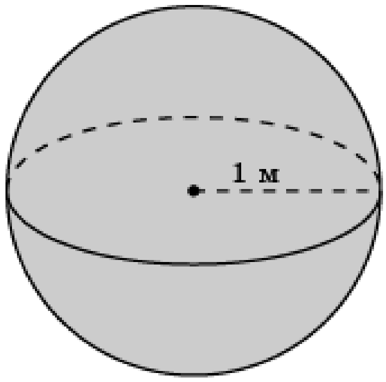
18(11+). Чугунная труба имеет длину 2 м и внешний диаметр 20 см. Толщина стенок трубы равна 2 см. Найдите вес трубы, если удельный вес чугуна примерно равен 7,5 г/см^3. Ответ дайте в килограммах. (Примите $\pi \approx 3$.)



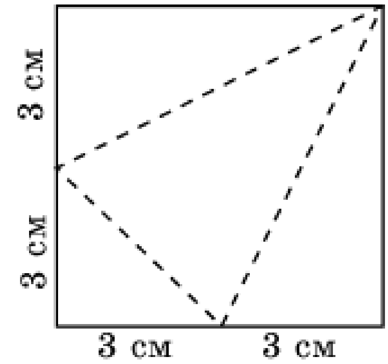
19(11+). Какой объём краски потребуется, чтобы окрасить внешнюю поверхность цилиндрической трубы диаметра 1 м и длины 10 м слоем краски в 1 мм? Ответ дайте в кубических дециметрах. (Примите $\pi \approx 3$.)



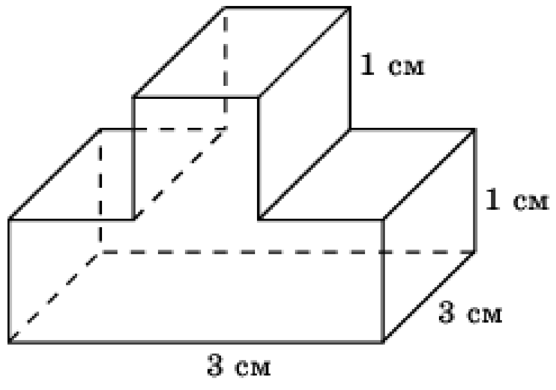
20(11+). Какой объём краски потребуется, чтобы окрасить поверхность шара радиуса 1 м слоем краски в 0,5 мм? Ответ дайте в кубических дециметрах. (Примите $\pi \approx 3$.)



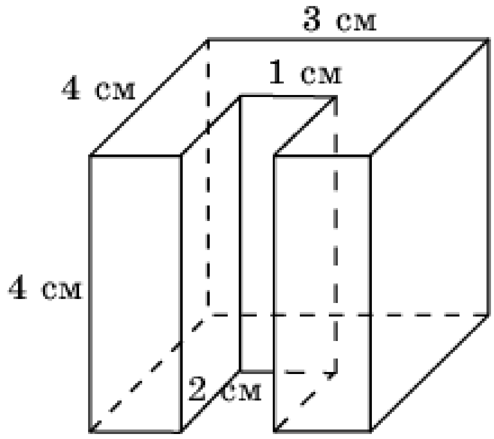
21(11+). Квадратный лист бумаги со стороной 6 см перегнули по пунктирным линиям, показанным на рисунке, и сложили треугольную пирамиду. Найдите ее объём.



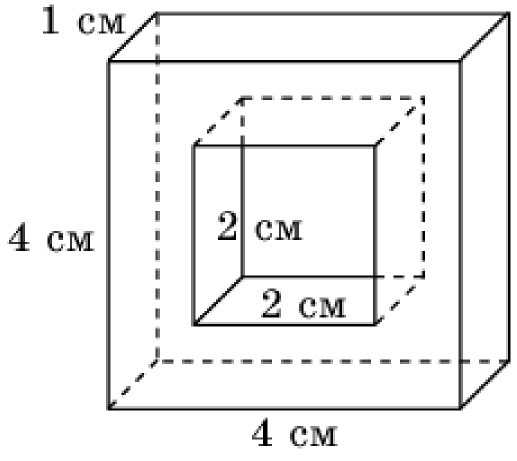
22(6+). Найдите объём детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



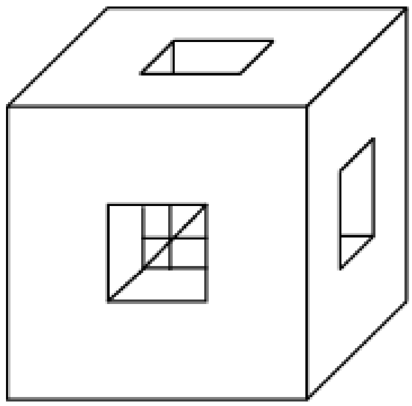
23(6+). Найдите объём детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



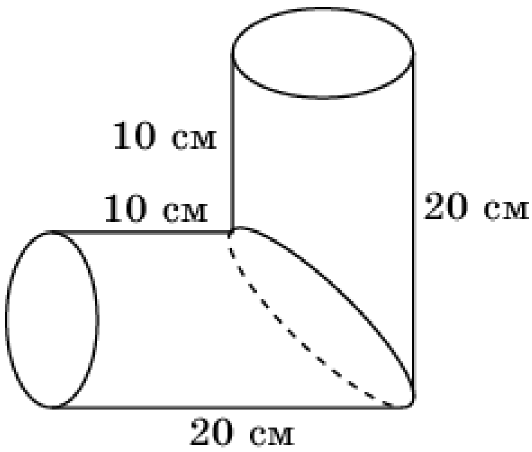
24(6+). Найдите объём детали, изображённой на рисунке (все двугранные углы – прямые).



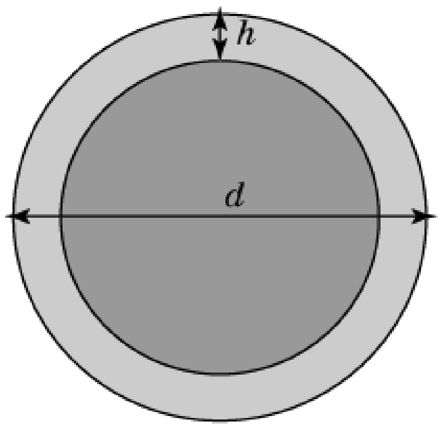
25(6+). В каждой грани медного куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см. Найдите вес оставшейся части, считая удельный вес меди приблизительно равным 0,9 г/см^3.



26(11+). Найдите объём детали, изображённой на рисунке, составленной из двух частей цилиндров. (Примите $\pi \approx 3$).



27(11+). Толщина h кожуры апельсина равна одной десятой его диаметра d. Найдите отношение объёма мякоти к объёму кожуры апельсина. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу раз.



15. Экстремальные задачи

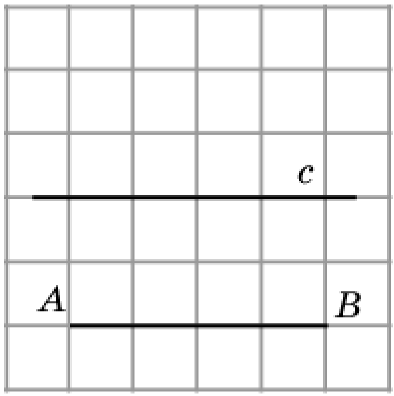
Обычно экстремальные задачи, или задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, решаются в курсе алгебры и начал анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем, имеется важный класс геометрических экстремальных задач, которые решаются своими методами без помощи производной.

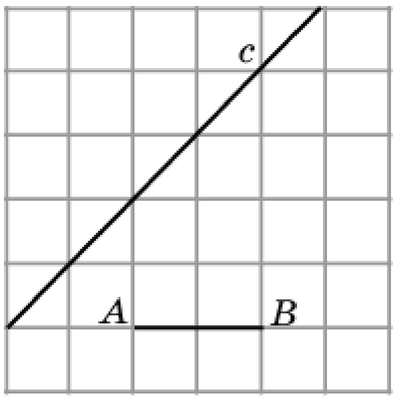
Эти задачи с древних времён привлекали к себе внимание учёных, имеют большое значение, как для математики, так и для ее приложений.

Здесь мы рассмотрим некоторые классические экстремальные задачи и их приложения.

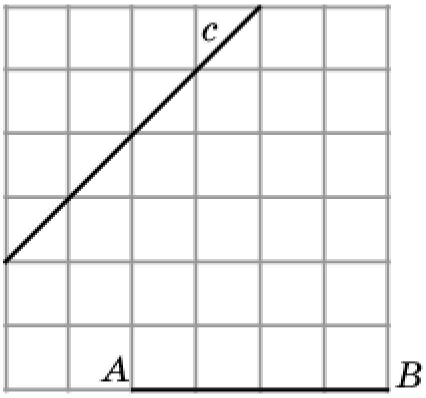
1(8+). На прямой *c* отметьте точку *C*, из которой отрезок *AB* виден под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



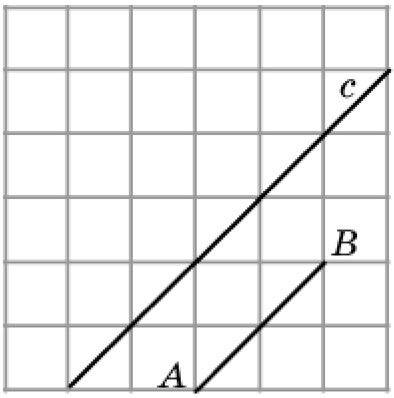
2(8+). На прямой *c* отметьте точку *C*, из которой отрезок *AB* виден под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



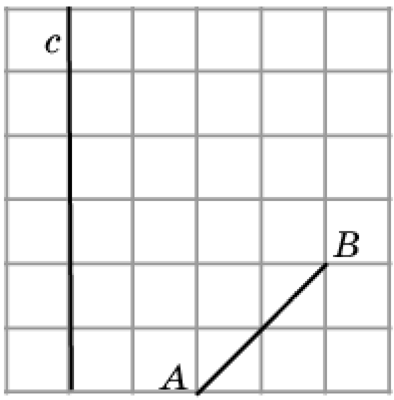
3(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



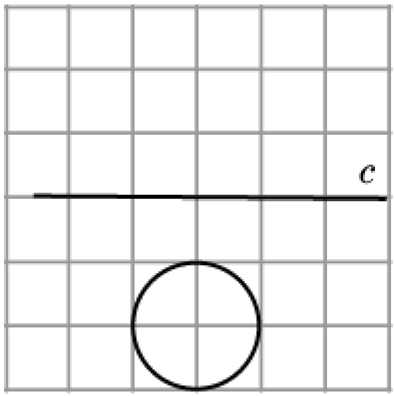
4(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



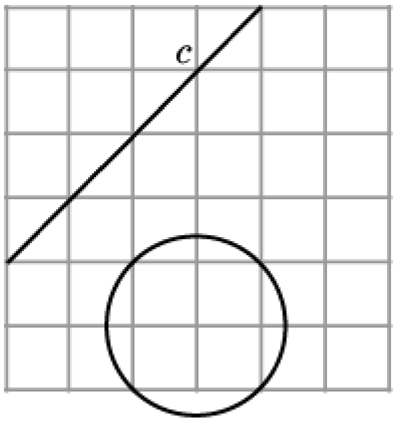
5(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



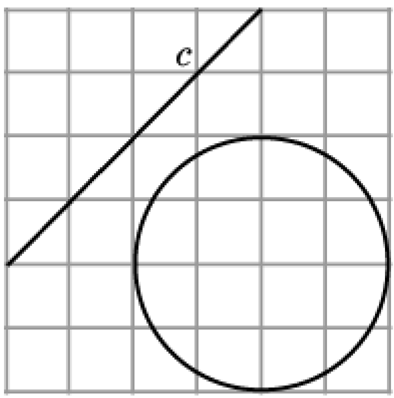
6(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.



7(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.

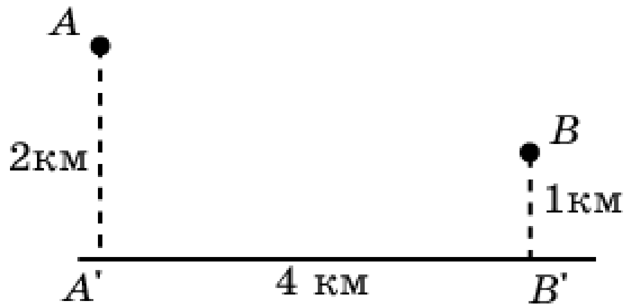


8(8+). На прямой c отметьте точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом. Найдите величину этого угла.

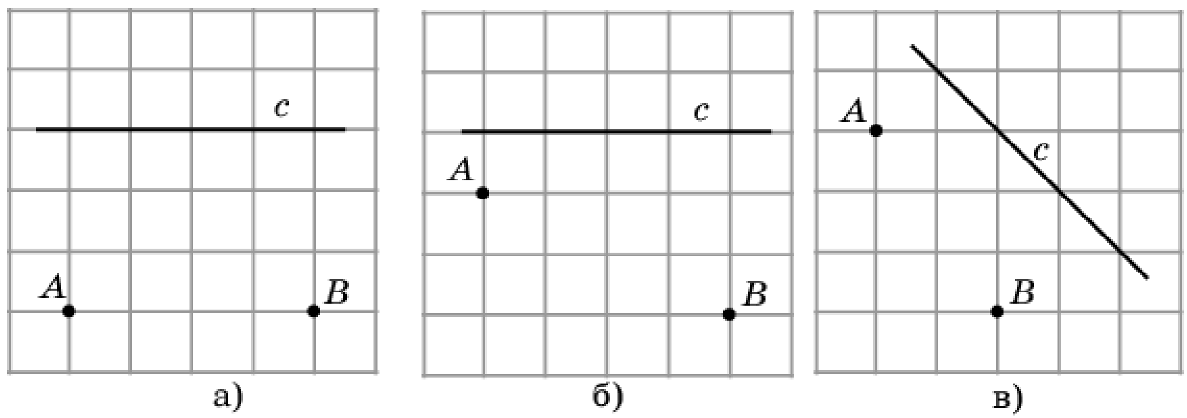


9(7+). **Задача Герона.** Дана прямая *c* и точки *A*, *B*, расположенные от неё по одну сторону. На прямой *c* найдите точку *C*, для которой сумма расстояний *AC* + *CB* наименьшая.

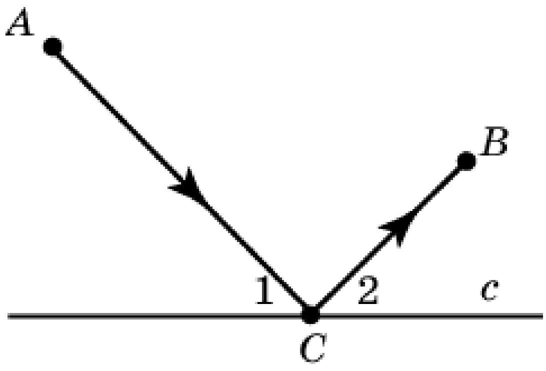
10(8+). Населённые пункты *A* и *B* расположены по одну сторону от шоссе на расстоянии 2 км и 1 км соответственно. Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорожки до населённых пунктов. Найдите наименьшую возможную суммарную длину дорожек.



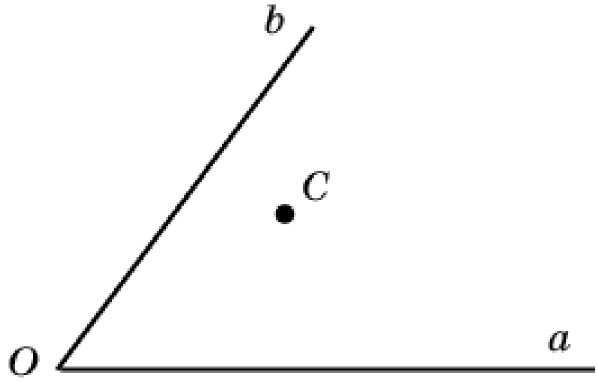
11(8+). На прямой *c* укажите точку *C*, для которой сумма расстояний *AC* + *CB* наименьшая. Найдите эту сумму, если стороны клеток равны 1.



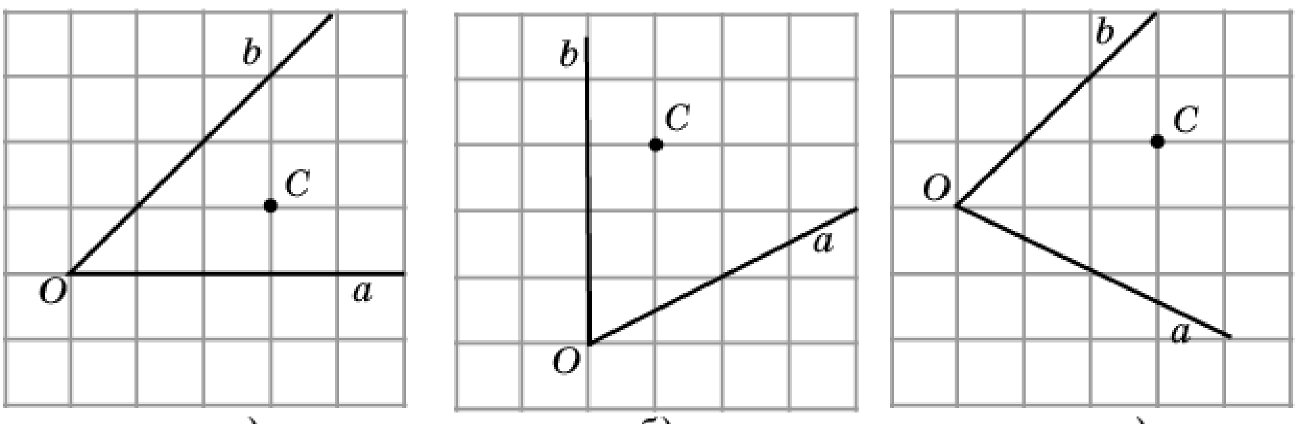
12(7+). Докажите, что если луч света исходит из точки A, отражается от прямой c и приходит в точку B, то углы 1 и 2 равны. Используйте то, что свет распространяется по кратчайшему пути.



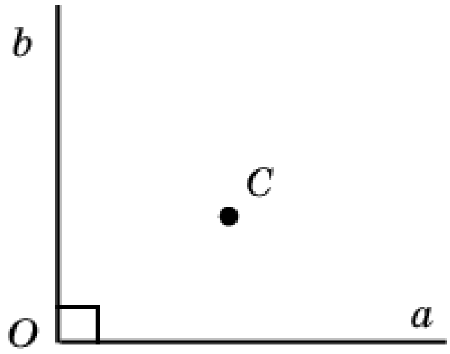
13(7+). Дан острый угол и точка C внутри него. На сторонах этого угла найдите точки A, B, для которых периметр треугольника ABC наименьший.



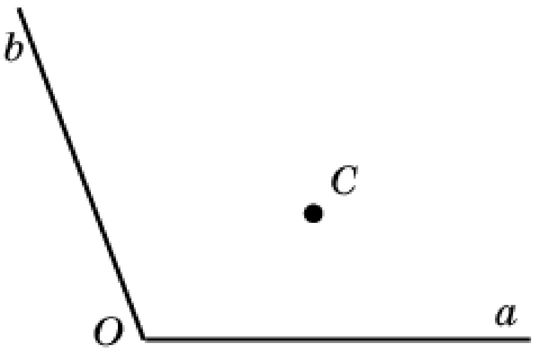
14(8+). На сторонах угла найдите точки A, B, для которых периметр треугольника ABC наименьший. Найдите этот периметр, если стороны клеток равны 1.



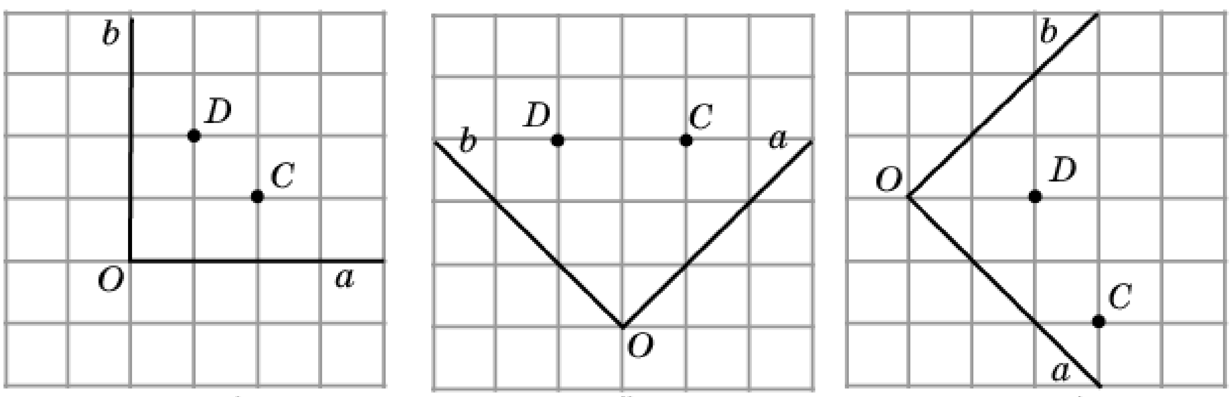
15(7+). Докажите, что если точка C расположена внутри прямого угла, то на его сторонах не существует точек A, B, для которых периметр треугольника ABC наименьший.



16(7+). Докажите, что если точка C расположена внутри тупого угла, то на его сторонах не существует точек A, B, для которых периметр треугольника ABC наименьший.

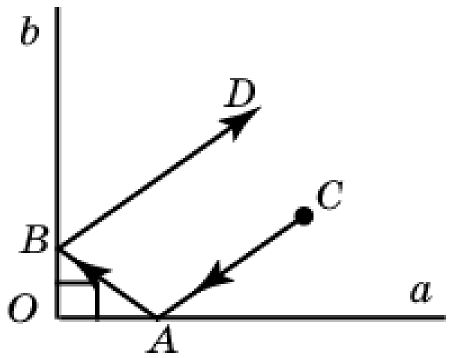


17(8+). Дан прямой угол и точки C, D внутри него. На сторонах этого угла найдите точки A, B, для которых длина ломаной $CABD$ наименьшая. Найдите эту длину, если стороны клеток равны 1.

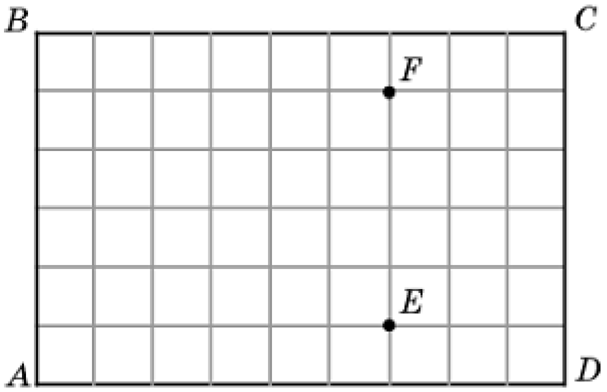


а) б) в)

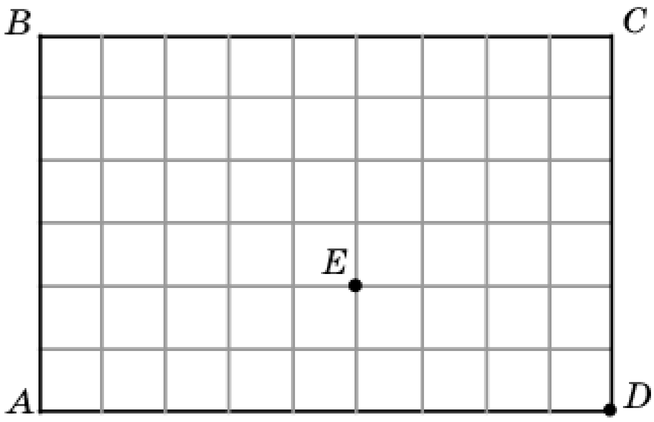
18(7+). Докажите, что луч света, исходящий из точки *C* внутри прямого угла, отразившись от его сторон, пойдет в направлении, противоположном исходному ($BD \parallel CA$). Используйте то, что свет распространяется по кратчайшему пути.



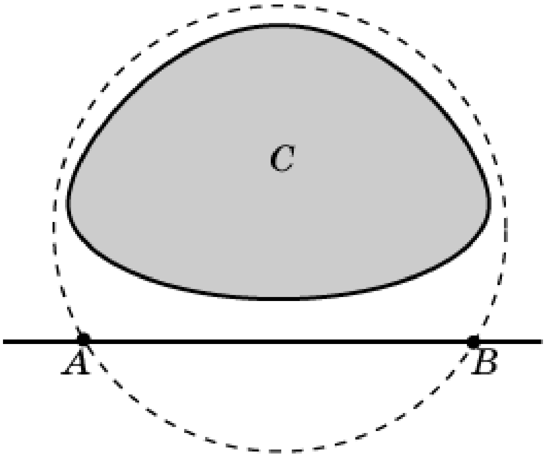
19(7+). Укажите траекторию бильярдного шара *E*, при которой он, отразившись от бортов *AD* и *AB*, попадает в шар *F*.



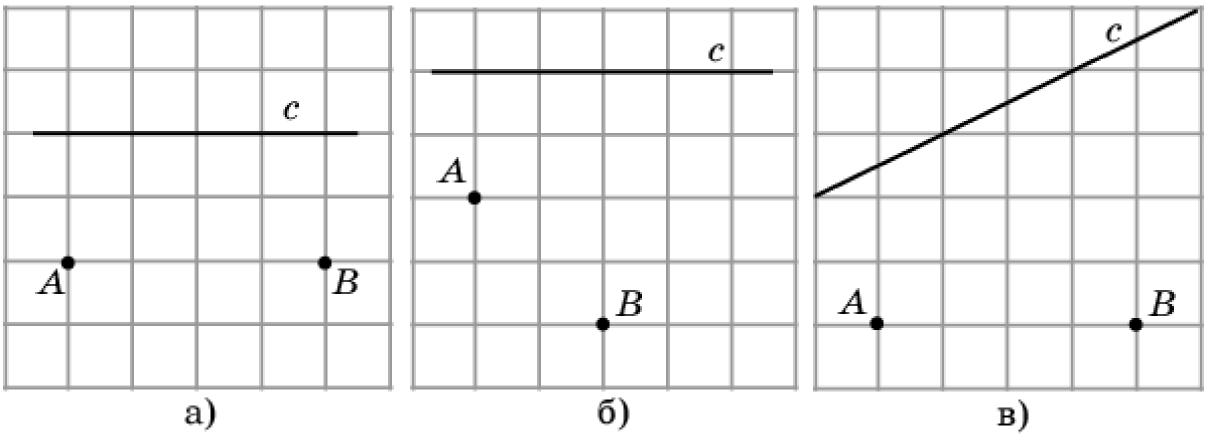
20(7+). Укажите траекторию бильярдного шара *E*, при которой он, отразившись от бортов *AD*, *AB* и *BC*, попадает в лузу *D*.



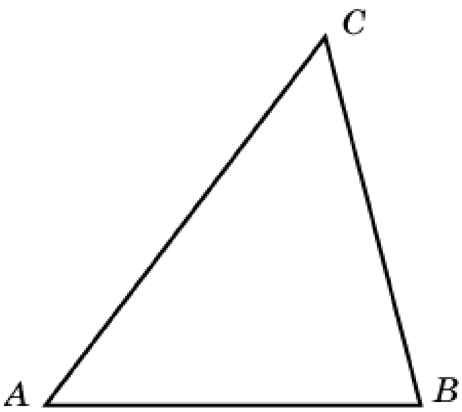
21(8+). Для указания кораблям места расположения мели C на берегу устанавливаются два маяка A и B. Предложите способ, позволяющий кораблям избежать захода в опасную зону.



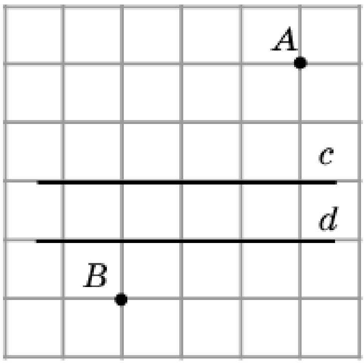
22(8+). На прямой c укажите точку C, для которой угол ACB наибольший.



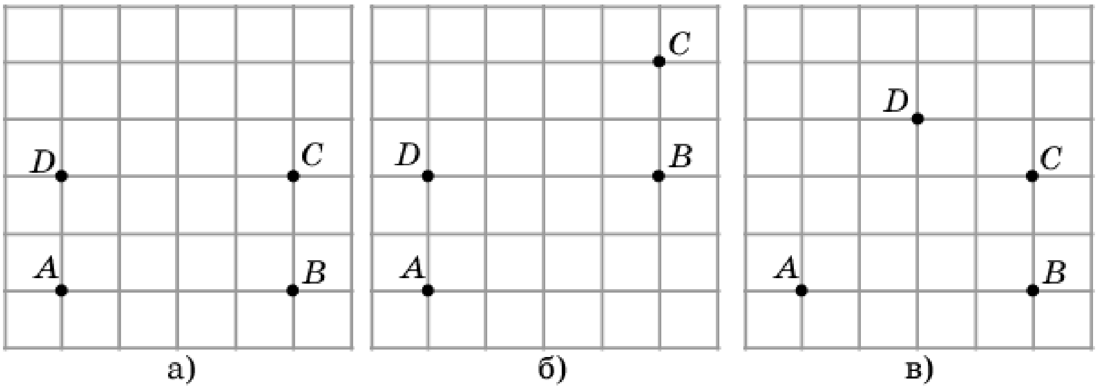
23(8+). **Задача Фаньяно.** На сторонах остроугольного треугольника ABC найдите точки A_1, B_1, C_1, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.



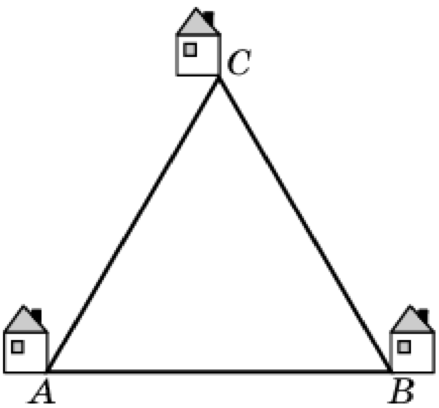
24(8+). Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост CD и проложить дороги AC и BD, чтобы путь $AC + CD + DB$ имел наименьшую длину? (Берега c, d реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).



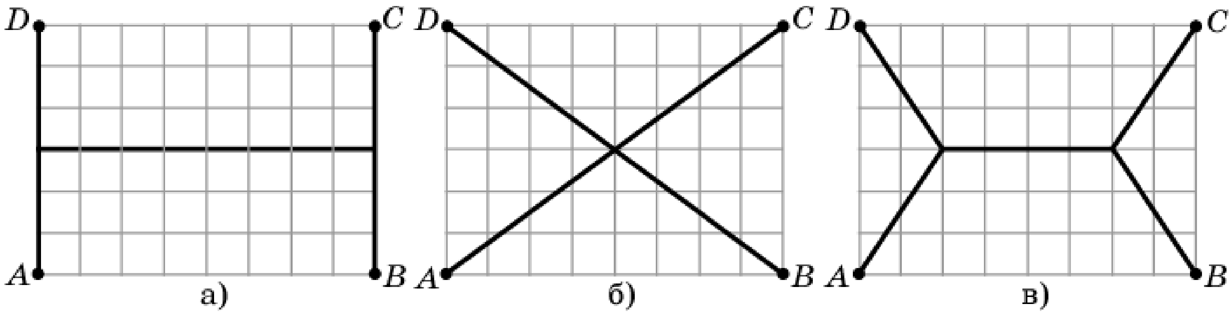
25(7+). Четыре соседа по садовым участкам решили вырыть общий колодец и проложить от него непересекающиеся дорожки к своим домикам A, B, C, D. Укажите расположение колодца, при котором сумма расстояний от него до домиков наименьшая.



26(8+). Три соседа по садовым участкам, домики которых расположены в вершинах правильного треугольника, решили вырыть общий колодец и проложить от него дорожки к своим домикам. Укажите расположение колодца, при котором сумма расстояний от него до домиков наименьшая.



27(8+). Требуется проложить шоссейные дороги, соединяющие населённые пункты *A*, *B*, *C*, *D*, расположенные в вершинах прямоугольника. Выберите из предложенных вариантов расположения дорог тот, в котором суммарная длина дорог наименьшая.

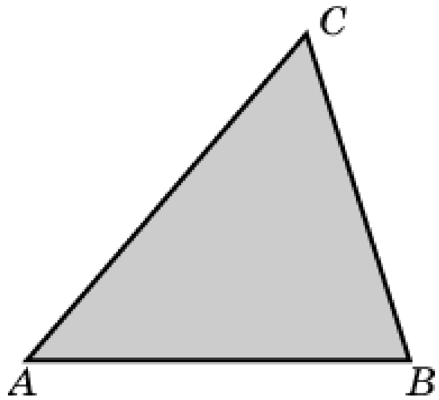


а) б) в)

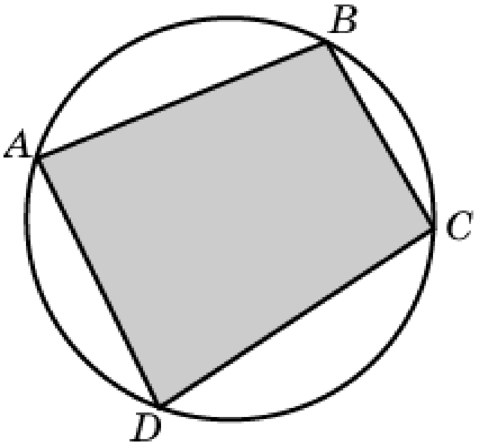
28(9+). Какого наименьшего периметра может быть прямоугольная площадка площади 100 м^2?

29(9+). Какой наибольшей площади может быть прямоугольная площадка периметра 100 м?

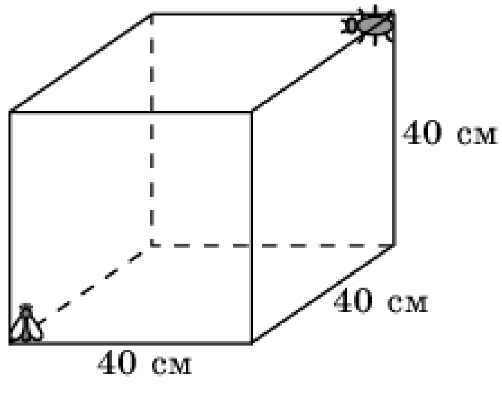
30(9+). Найдите наименьший возможный периметр треугольника, одна сторона которого равна 6 см, а площадь равна 12 см^2.



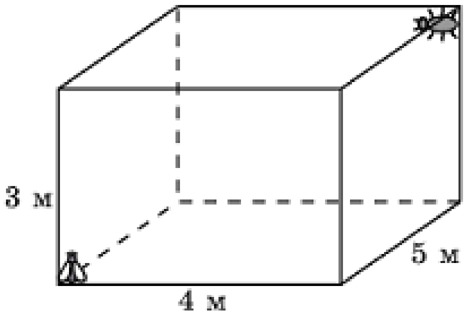
31 (9+). Найдите наибольшую возможную площадь четырёхугольника, вписанного в окружность радиуса 4 см.



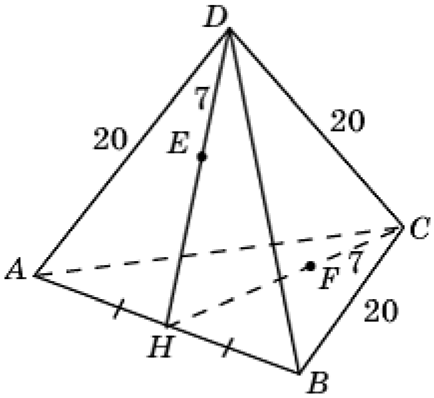
32(8+). В одном углу кубической коробки с размерами 40x40x40 (см) сидит муха. В противоположном углу сидит паук. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности коробки, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближённое значение, равное целому числу сантиметров.



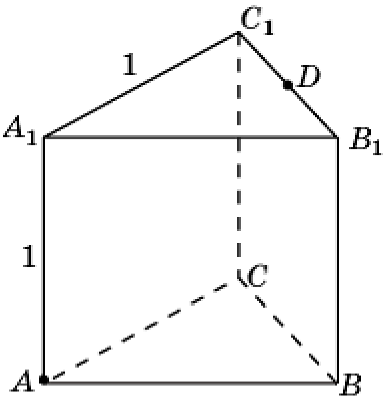
33(8+). В одном углу комнаты с размерами 4х5х3 (м), сидит муха. В противоположном углу сидит паук. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности комнаты, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближённое значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.



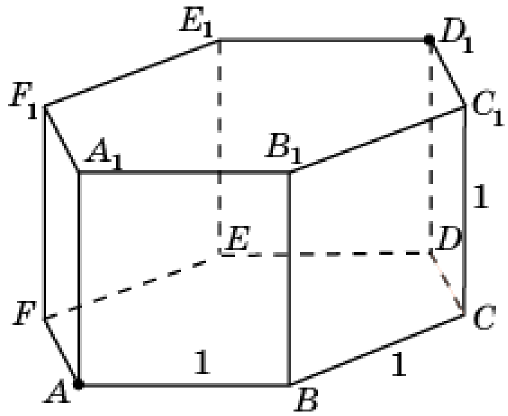
34(8+). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного тетраэдра *ABCD*, соединяющего точки *E* и *F*, расположенные на высотах граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.



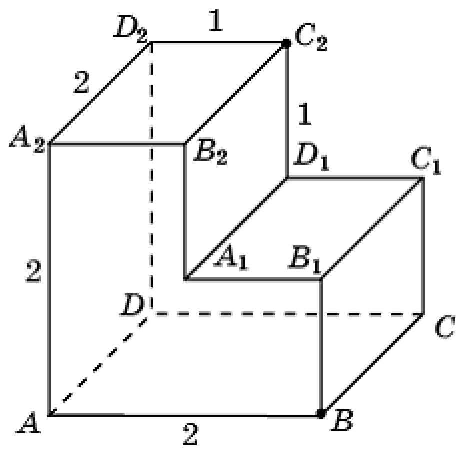
35(8+). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, соединяющего вершину A и середину D ребра B_1C_1. Все ребра призмы равны 1.



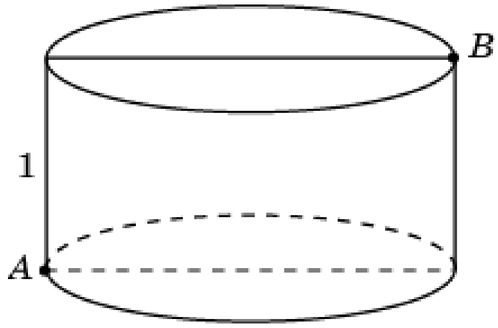
36(8+). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, соединяющего вершины A и D_1. Все ребра призмы равны 1.



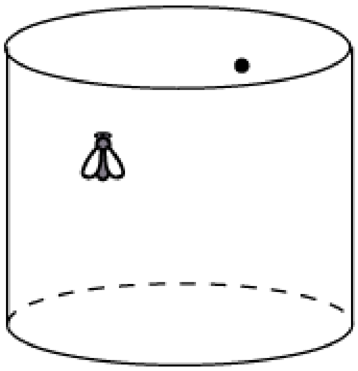
37(8+). На рисунке изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины B и C_2.



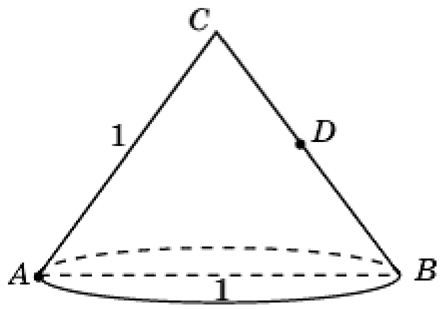
38(8+). Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого цилиндра, соединяющего точки A и B.



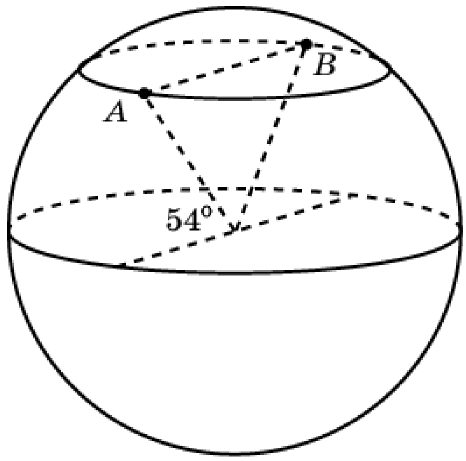
39(8+). На внутренней стенке цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края висит капля мёда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха. Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до мёда. Радиус основания банки равен 6 см.



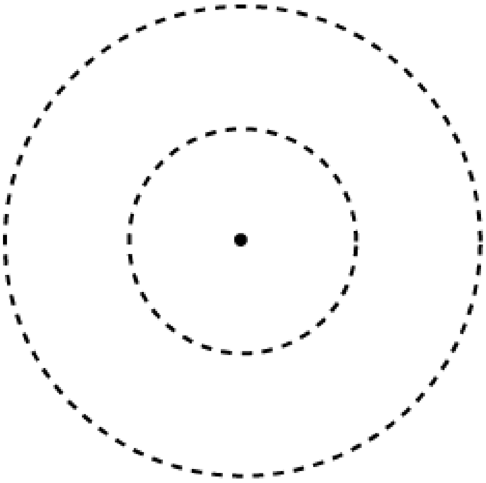
40(8+). Осевое сечение конуса – правильный треугольник *ABC* со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки *A* в точку *D* – середину стороны *BC*.



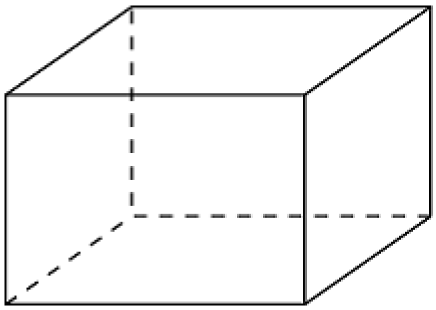
41(8+). Найдите длину кратчайшего пути (в км) по поверхности Земного шара из пункта *A*, расположенного на широте 54°, до пункта *B*, расположенного в диаметрально противоположной точке той же широты. Длина большой окружности Земного шара равна 40000 км.



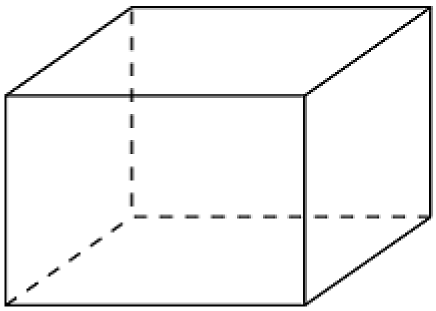
42(6+). Земля и Марс обращаются вокруг Солнца по круговым (почти) орбитам радиусов 150 и 228 миллионов километров. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния между Землей и Марсом.



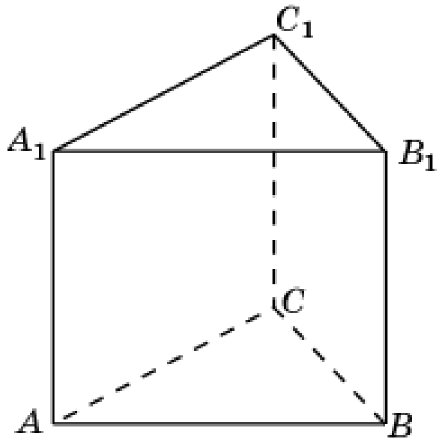
43 (11+). Какой наименьшей площади поверхности может быть коробка в форме прямоугольного параллелепипеда, объём которой равен 1000 $см^3$?



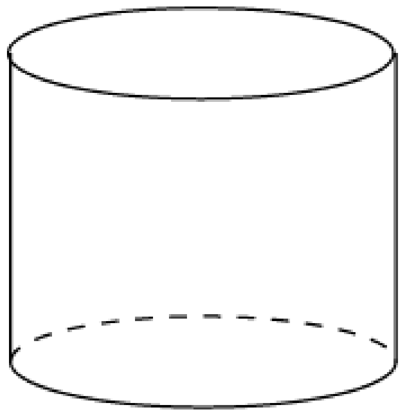
44(11+). Какого наибольшего объёма может быть коробка в форме прямоугольного параллелепипеда, площадь поверхности которой равна 600 $см^2$?



45 (11+). Найдите размеры правильной треугольной призмы, объём которой равен 2, имеющей наименьшую площадь поверхности.



46(11+). Найдите размеры цилиндра, объём которого равен 2π, имеющего наименьшую площадь поверхности.



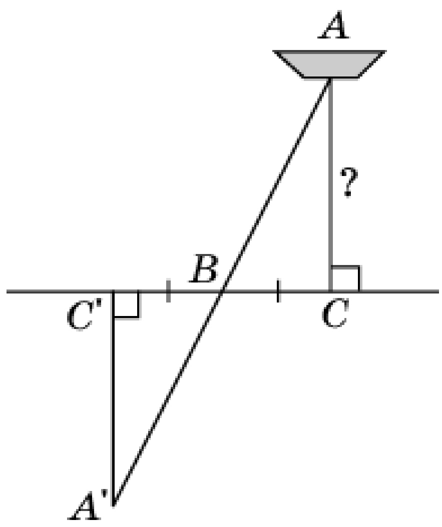
ОТВЕТЫ

1. Углы

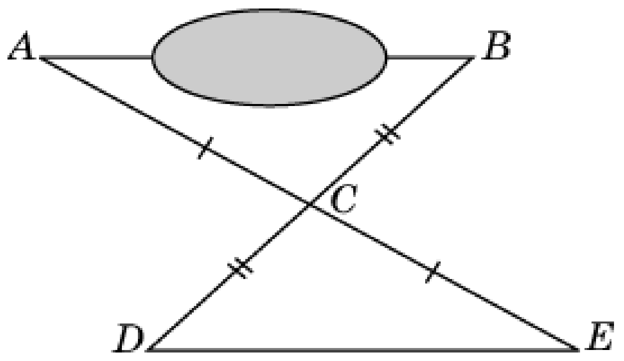
1. 20^o. **2.** 20. **3.** 150^o. **4.** 60^o. **5.** 150^o. **6.** 270^o. **7.** 10^o. **8.** 18^o. **9.** 1800^o. **10.** 2^o. **11.** 135^o. **12.** 50^o. **13.** 5^o. **14.** 30. **15.** 180^o. **16.** 3. **17.** 135^o. **18.** 540^o по часовой стрелке. **19.** 120^o. **20.** 6 ч. **21.** $57{,}5^o$.

2. Расстояния

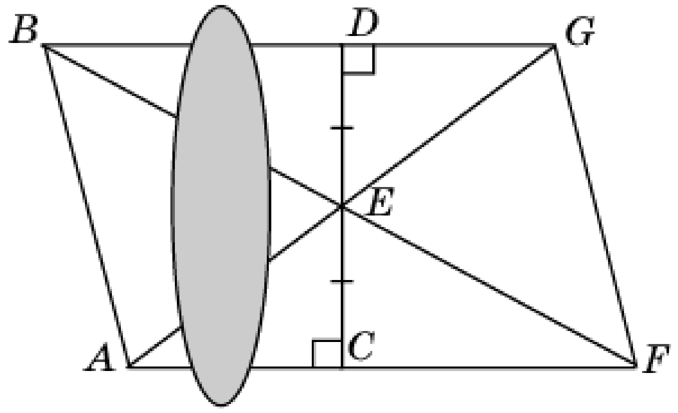
1. Треугольники *ABC* и *A'BC'* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, искомое расстояние *AC* равно длине отрезка *A'C'*.



2. Треугольники *ABC* и *ECD* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, искомое расстояние *AB* равно длине отрезка *DE*.



3. Треугольники *ACE* и *GDE* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, *AE* = *EG*. Треугольники *BDE* и *FCE* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, *BE* = *EF*. Треугольники *ABE* и *GEF* равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, искомое расстояние *AB* равно длине отрезка *FG*.



4. а) 8, 2; б) 8, 5; в) 8, 1. **5.** 10. **6.** 18. **7.** 3. **8.** 21 м. **9.** 35 см. **10.** 3. **11.** 1000. **12.** 540 м. **13.** 160 см. **14.** 66 м 66 см. **15.** 12 м. **16.** 375. **17.** 64,8 км/ч. **18.** 12 м. **19.** 15. **20.** 6. **21.** 4. **22.** 10. **23.** 6. **24.** 8. **25.** 190 см. **26.** 800 км. **27.** 1333 км. **28.** 6 м.

3. Теорема Пифагора

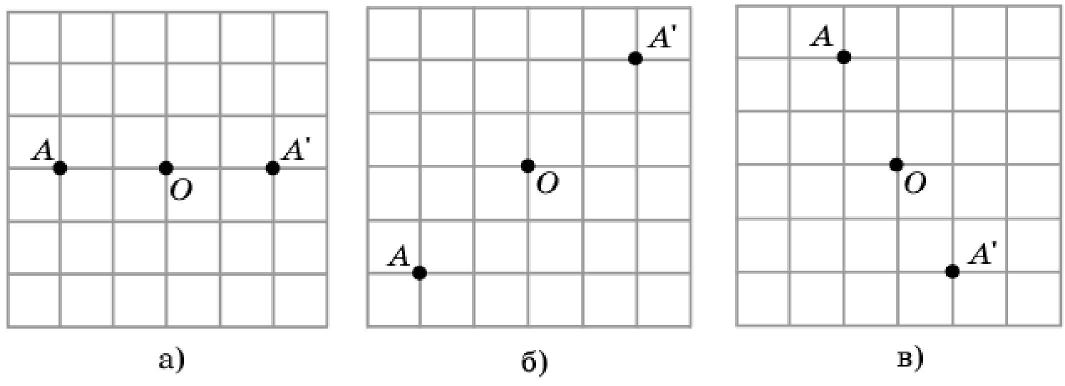
1. 1000 м. **2.** 500 м. **3.** 2,5 км. **4.** 50 км. **5.** 500 м. **6.** 12 м. **7.** 5 м. **8.** 10 м. **9.** 13 м. **10.** 1,5 м. **11.** 6 м. **12.** 48 см. **13.** 23 км. **14.** 357 км. **15.** 2,8 м. **16.** 9 м. **17.** 8 см. **18.** 20 см. **19.** 6 см. **20.** 6 см. **21.** 3 см. **22.** 24,3 м. **23.** 6,7 м.

4. Подобие

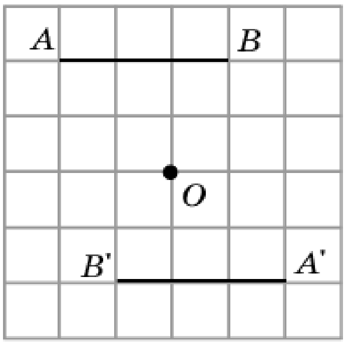
1. 100 м. **2.** 5 м. **3.** 10 м. **4.** 30 м. **5.** 5,1 м. **6.** 6 м. **7.** 8,5 м. **8.** 6 м. **9.** 18 м. **10.** 450 м. **11.** 2 м. **12.** 0,5 м. **13.** 4,5 см. **14.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **15.** 120 см. **16.** 30 м. **17.** 400. **18.** 163 200 000 км.

5. Симметрия

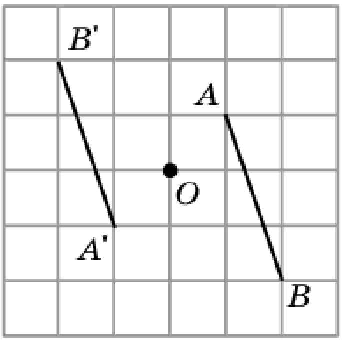
1.



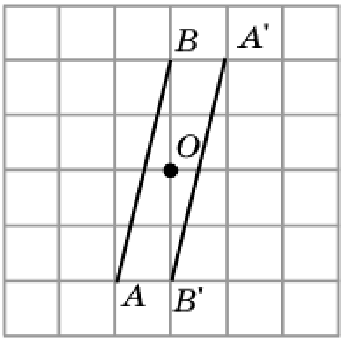
2.



а)

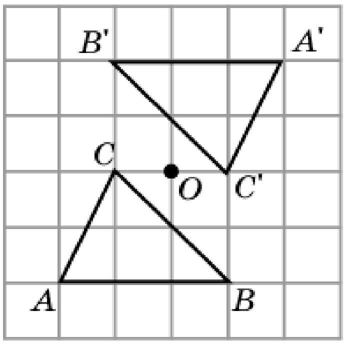


б)

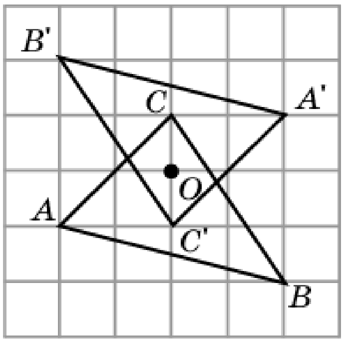


в)

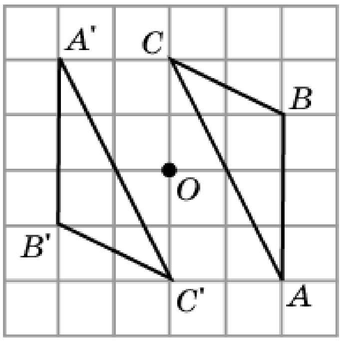
3.



а)

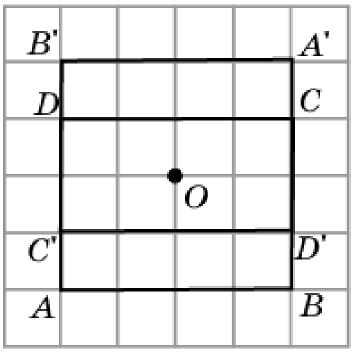


б)

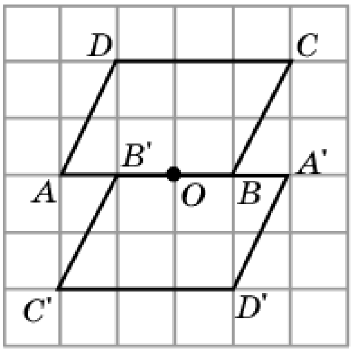


в)

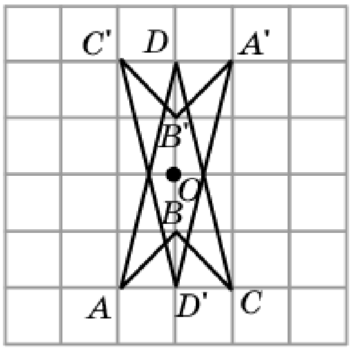
4.



а)

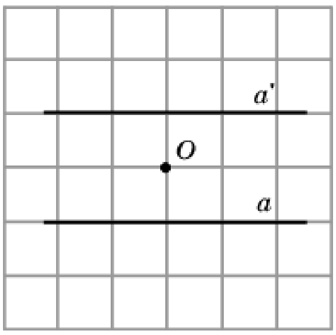


б)

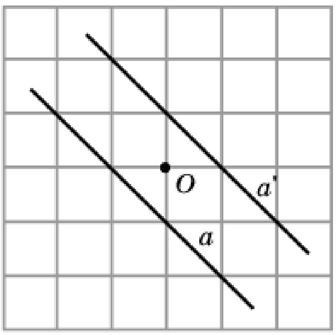


в)

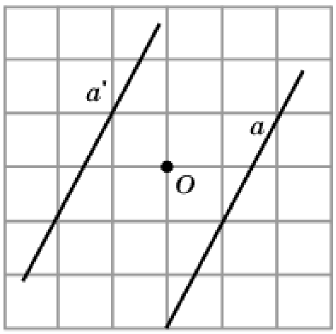
5.



а)

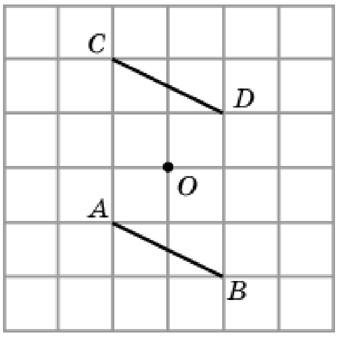


б)

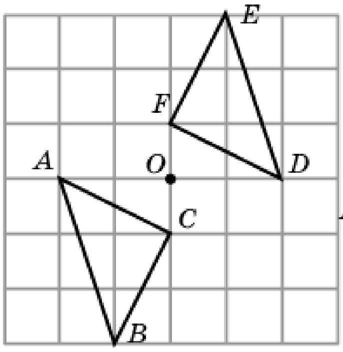


в)

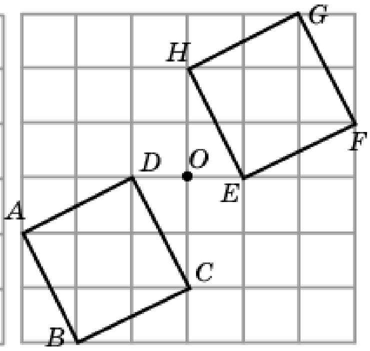
6.



а)

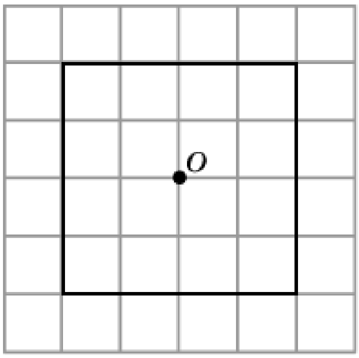


б)

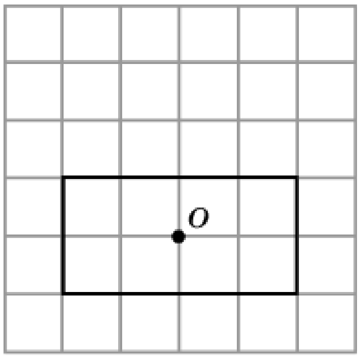


в)

7. а) Нет; б), в) да.

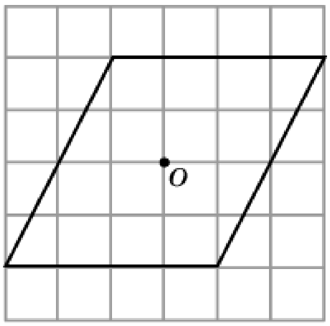


б)

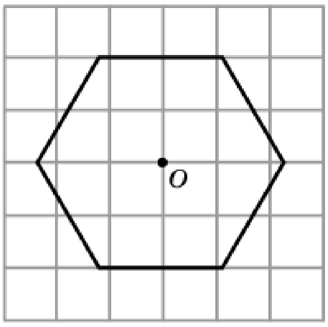


в)

8. а), в) Да; б) нет.

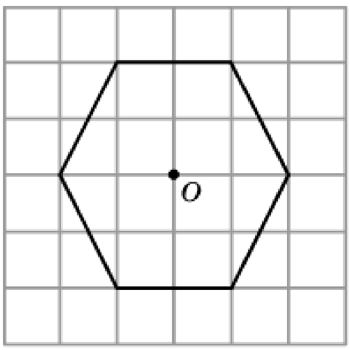


а)

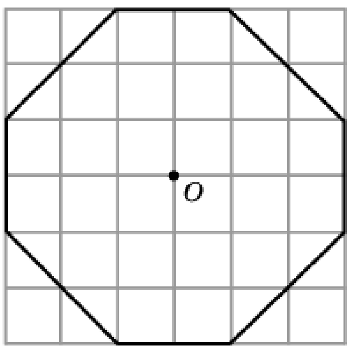


в)

9. а), б) Да.



а)



б)

10. а) Нет; б) да.

11.

И, Н, О, Х.

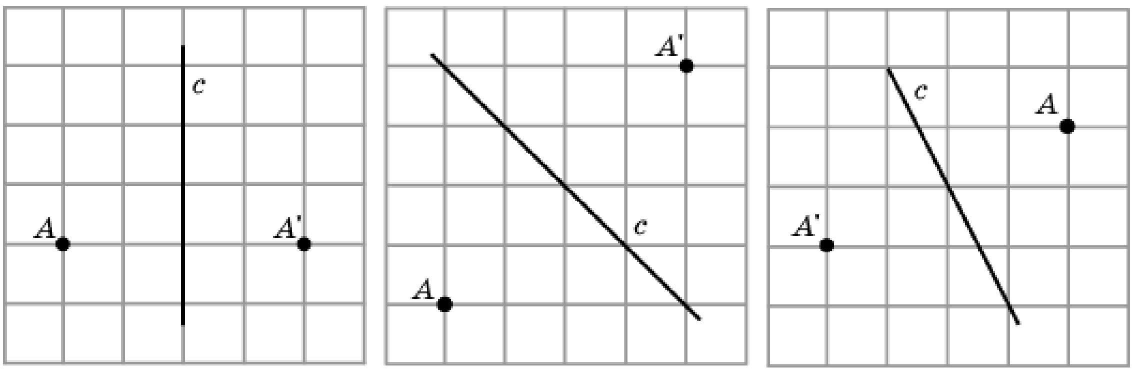
12.

H, I, N, O, S,X, Z.

13. а), б), в) Да. **14.** а) Нет; б) да. **15.** а, б) Нет. **16.** а) Нет; б), в) да. **17.** б), в), г), д).

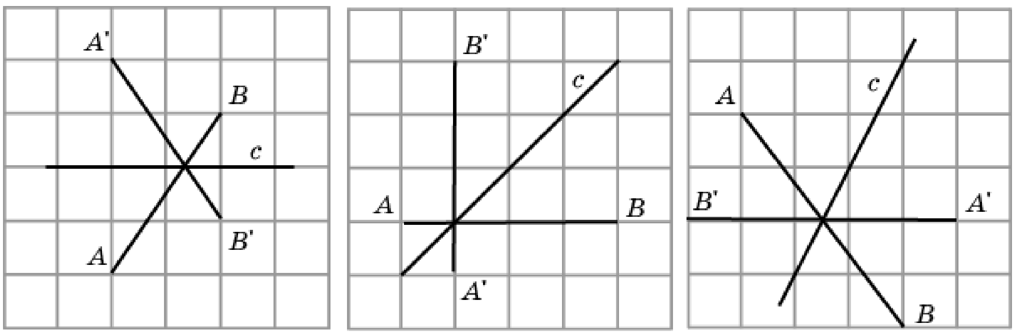
Осевая симметрия

18.



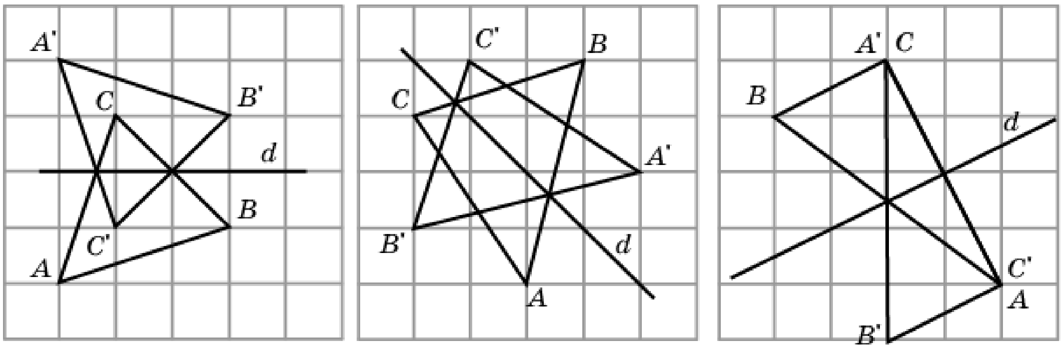
а) б) в)

19.



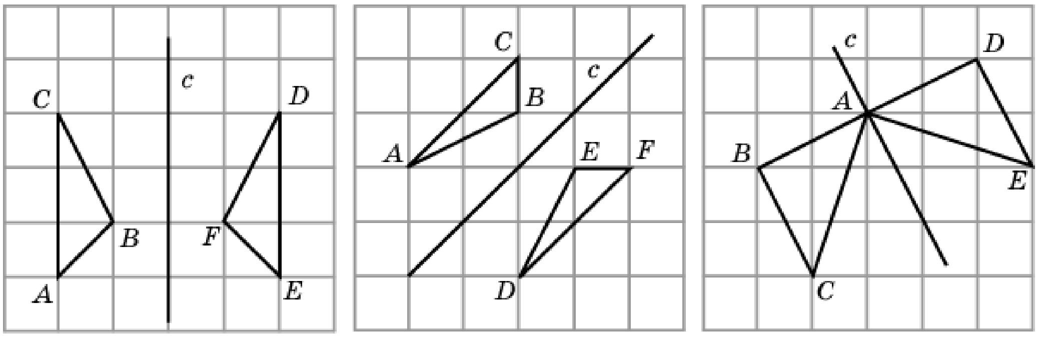
а) б) в)

20.



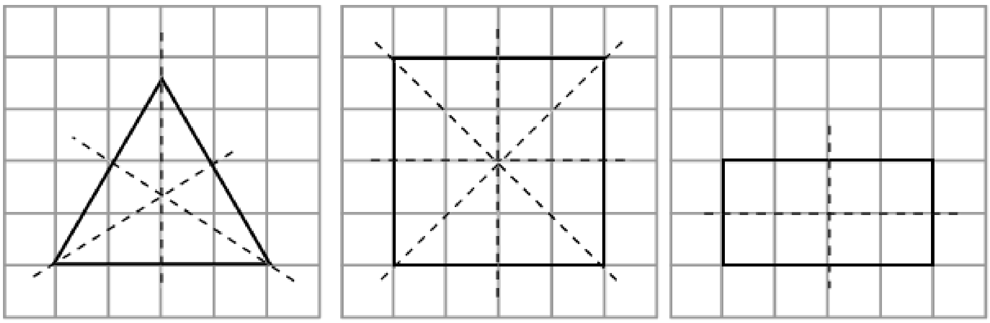
а) б) в)

21.



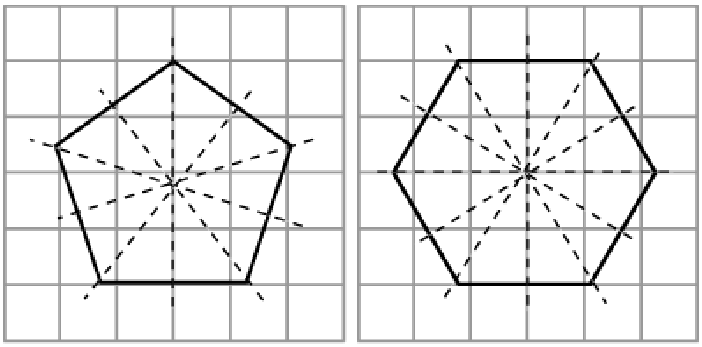
а) б) в)

22. а), б), в) Да.



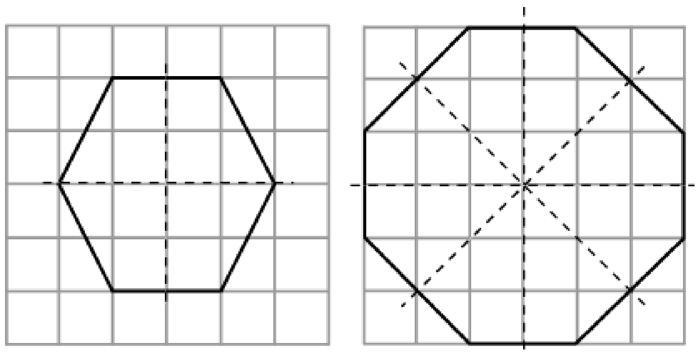
а) б) в)

23. а) Нет; б), в) да.



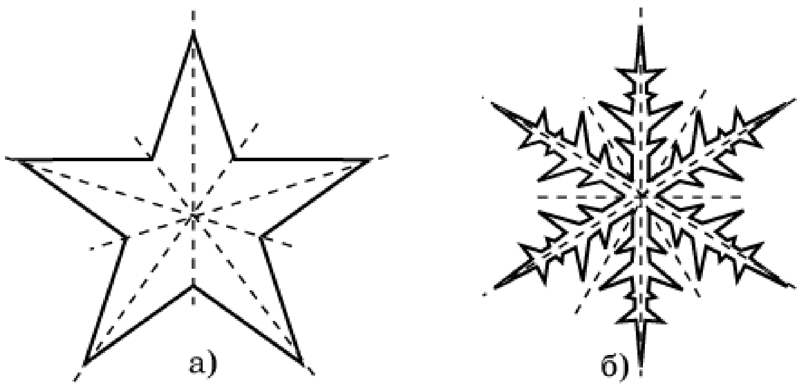
б) в)

24. а), б) Да.



а) б)

25. а), б) Да.



а) б)

26.

А, В, Е, Ж, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Ю.

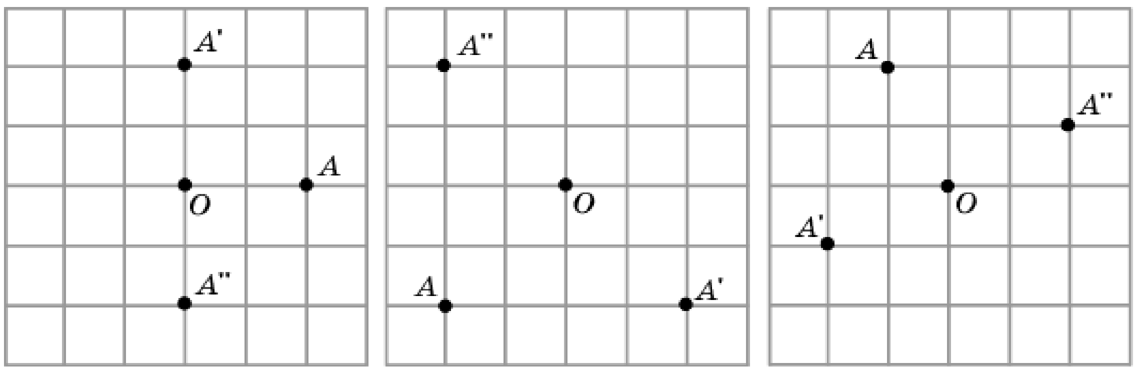
27.

A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V,W, X, Y.

28. а) 9; б); 5; в) 0. **29.** а) 3; б) 7. **30.** а) Нет; б) да, одну. **31.** а) одну; б), в) бесконечно много. **32.** а) 3; б) 9; в) 9; г) 15; д) 15.

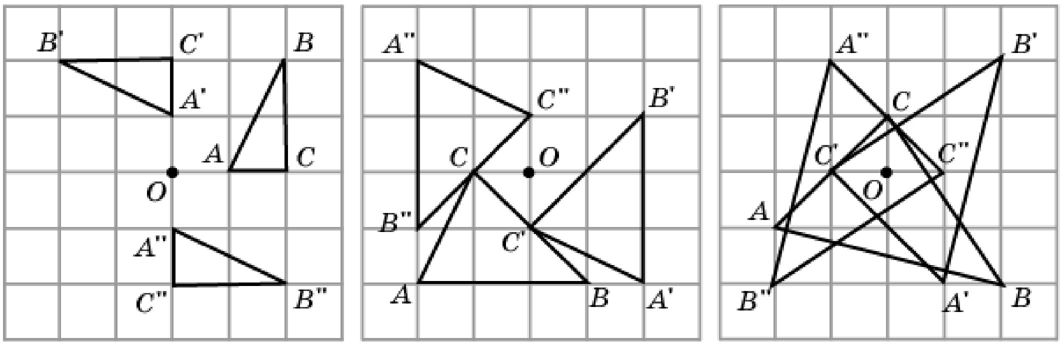
Поворот

33.



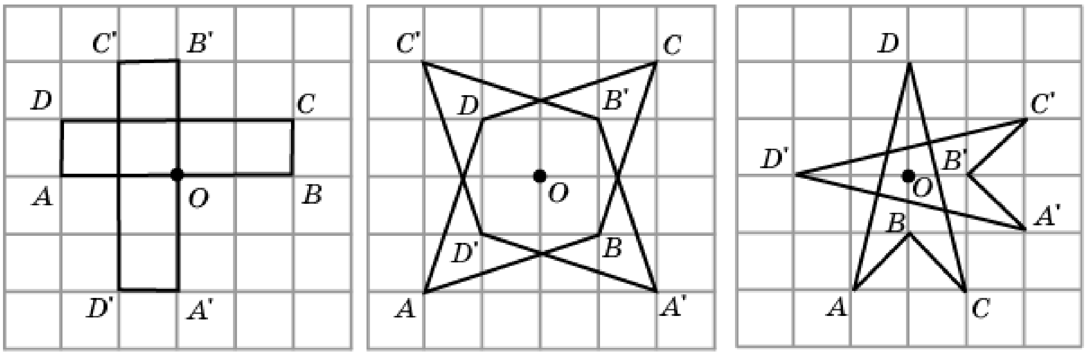
а) б) в)

34.



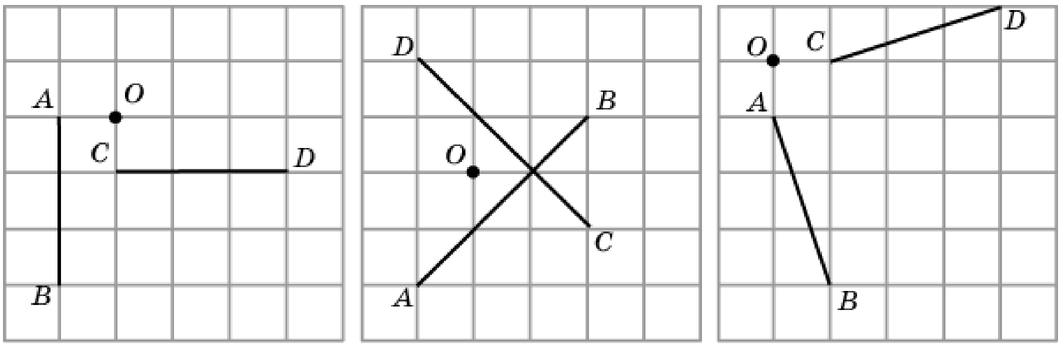
а) б) в)

35.



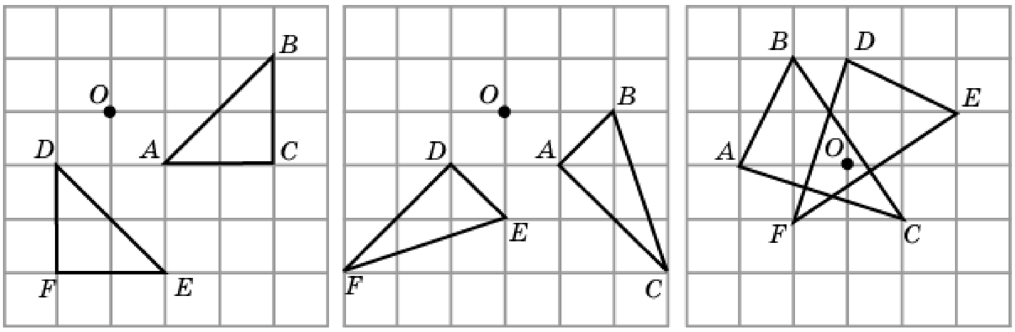
а) б) в)

36.



а) б) в)

37.



а) б) в)

38. а) 5-го; б) 6-го; в) 7-го. **39.** а) 2-го; б) 4-го. **40.** а) 5-го; б) 6-го. **41.** а) 2-го и 3-го; б) 2-го и 6-го. **42.** а) 3-го; б) 6-го. **43.** а) 2-го и 3-го; б) 2-го, 3-го и 4-го; в) 2-го, 3-го и 4-го; г) 2-го, 3-го и 5-го; д) 2-го, 3-го и 5-го.

Зеркальная симметрия

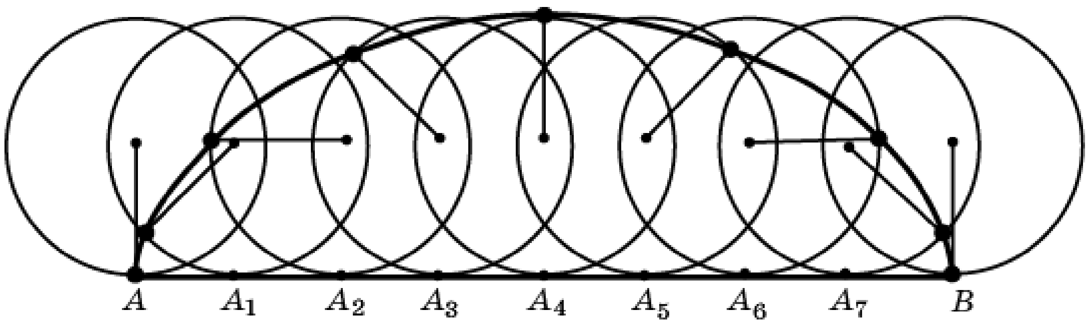
44. а) 4; б) 7. **45.** а) 3; б) 6. **46.** а); б) ; в) Бесконечно много. **47.** а) 6; б) 9; в) 9; г) 15; д) 15.

6. Тригонометрия

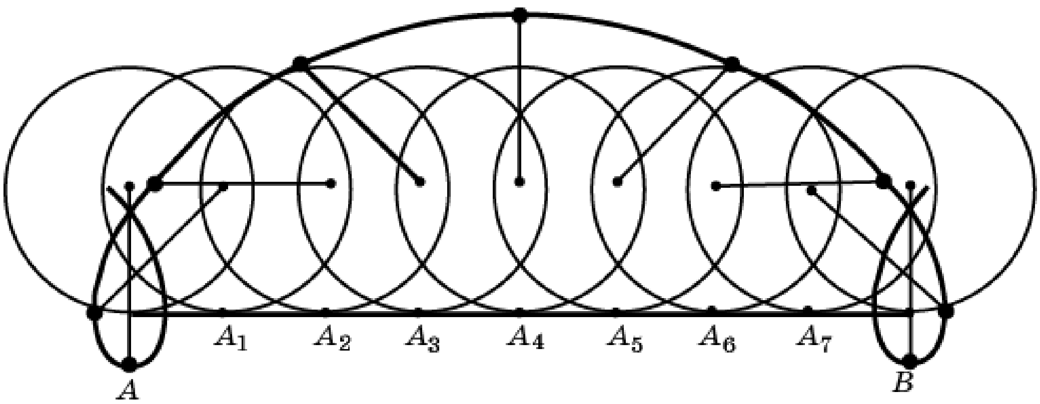
1. 37°. **2.** 37°. **3.** 37°. **4.** 10 см. **5.** 17,4 см. **6.** 14°. **7.** 2°. **8.** 5°. **9.** 24 м. **10.** 48,5 м. **11.** 2°. **12.** 27,8 м. **13.** 34°. **14.** 40 м. **15.** 64°. **16.** 31°. **17.** 32 см. **18.** 53°. **19.** 4,5 м. **20.** 1381 м. **21.** 1000 м. **22.** 2020 м. **23.** 76080 м. **24.** 240 м. **25.** 50°. **26.** 276 м. **27.** 54 м. **28.** 15°. **29.** 61°. **30.** 864 м. **31.** 41,6 м. **32.** 23,8 м. **33.** 12 м. **34.** 3760 м. **35.** 47 м. **36.** 870 м. **37.** 1724 м. **38.** 3,85 м. **39.** 37°. **40.** 10°. **41.** 22400 км. **42.** 60°. **43.** 10 м. **44.** 6,8 м.

7. Траектории

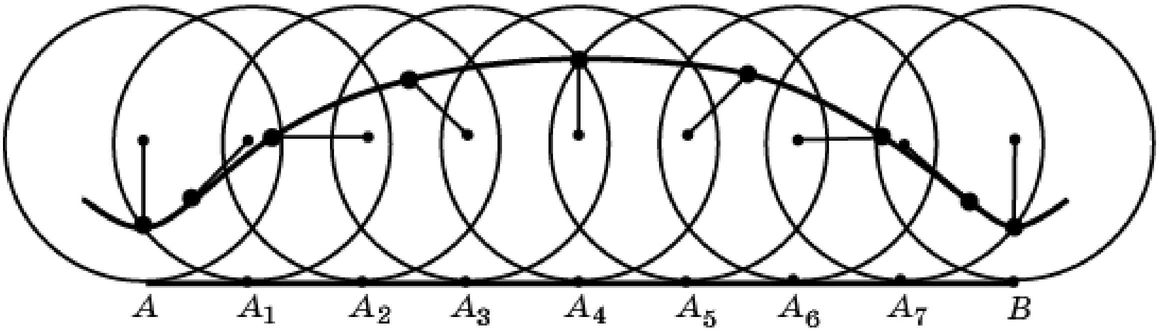
1.



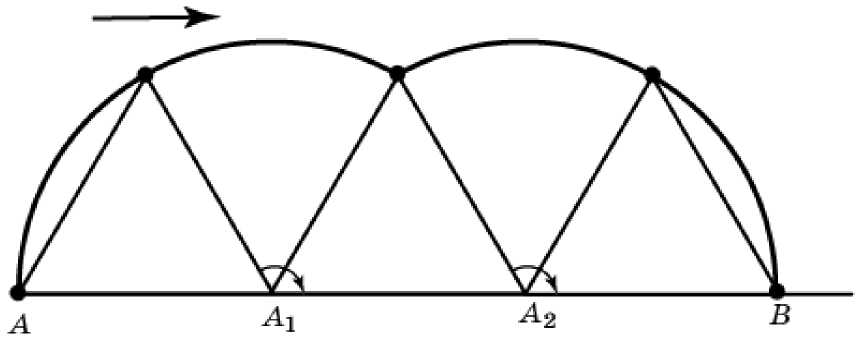
2.



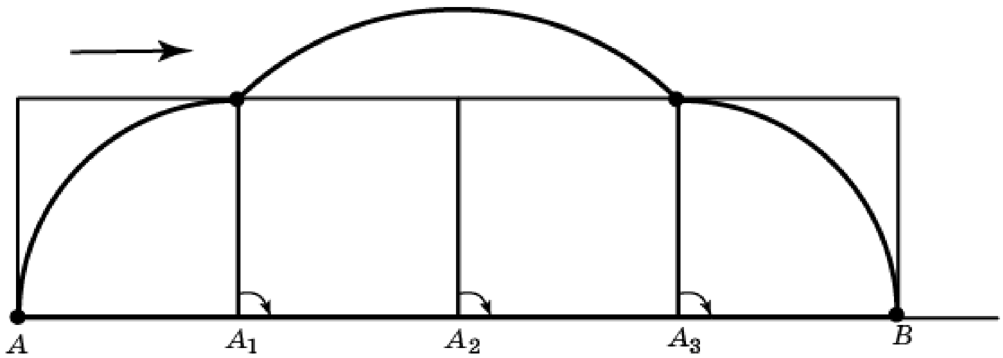
3.



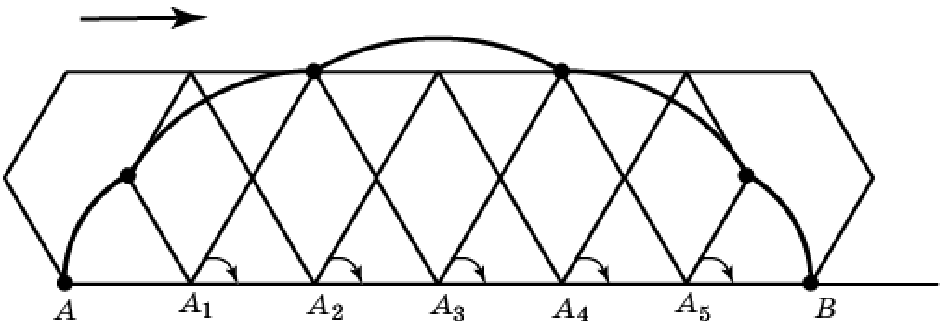
4.



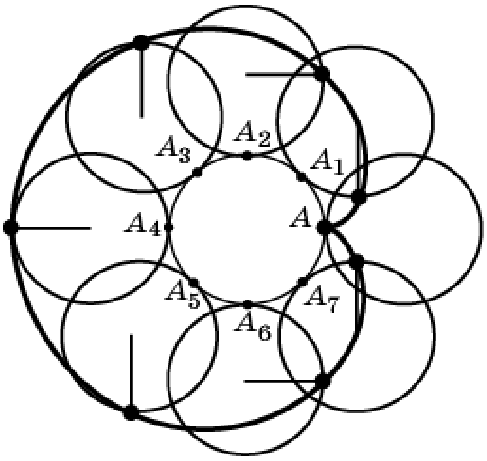
5.



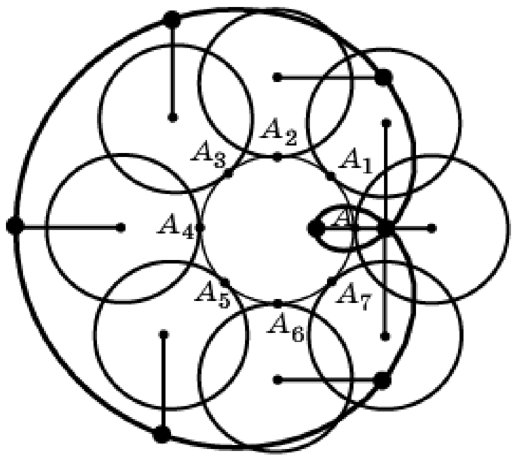
6.



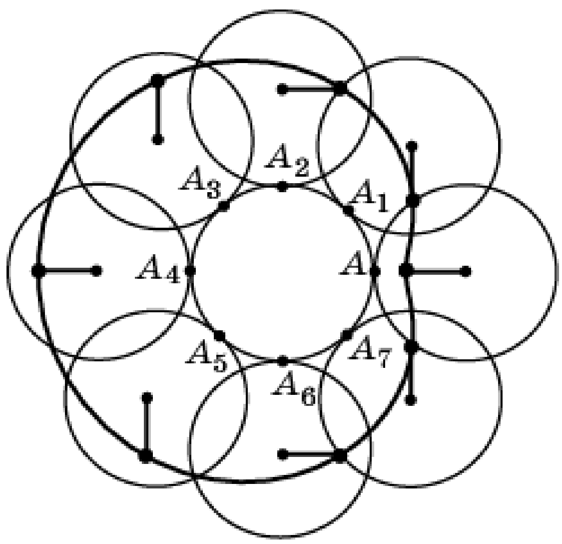
7.



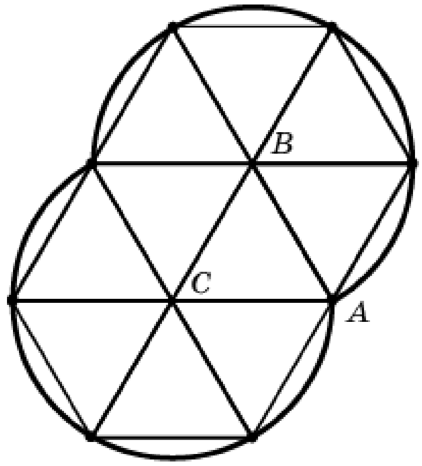
8.



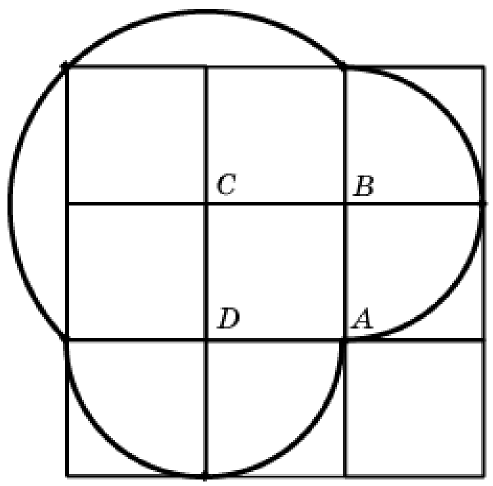
9.



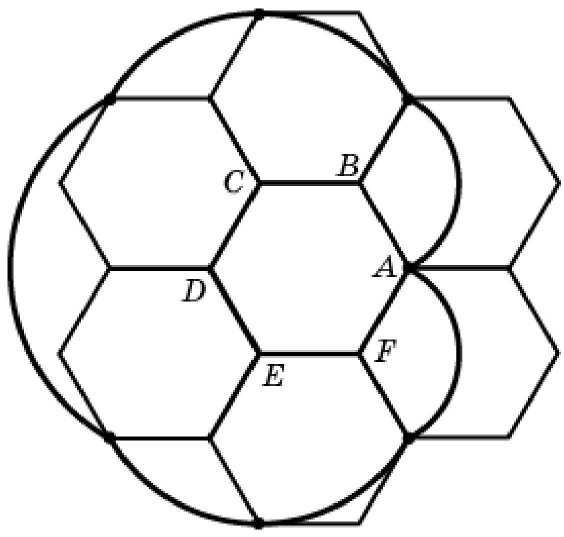
10.



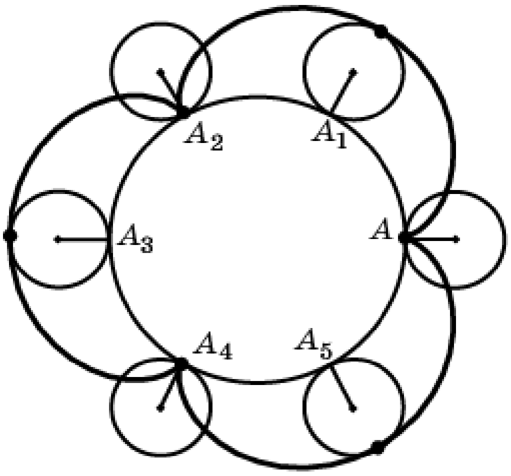
11.



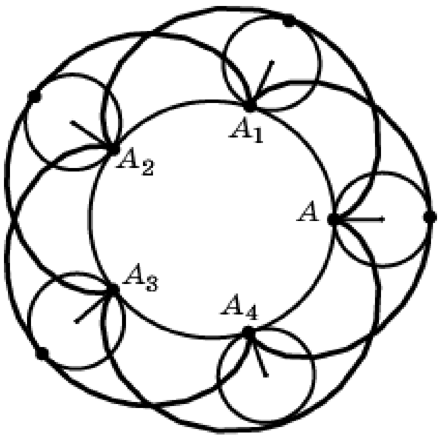
12.



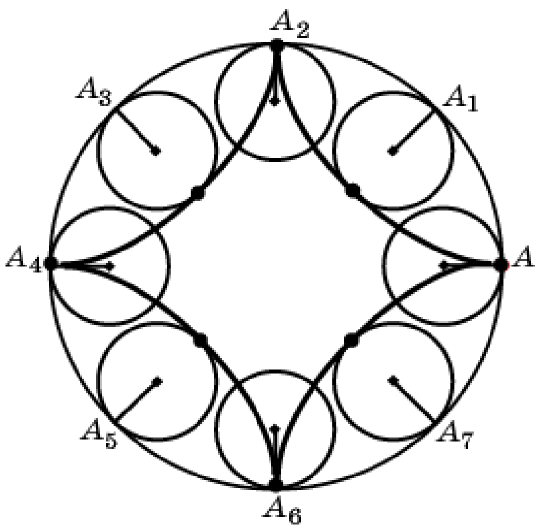
13.



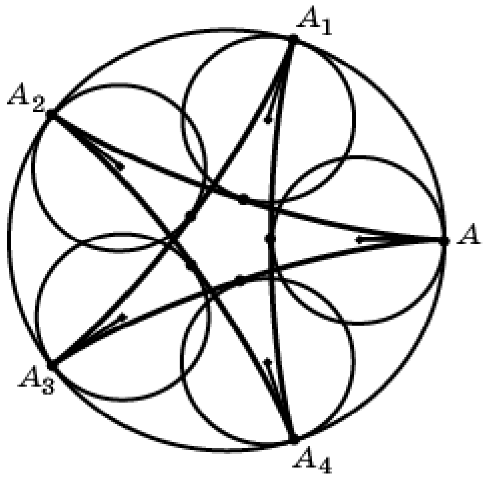
14.



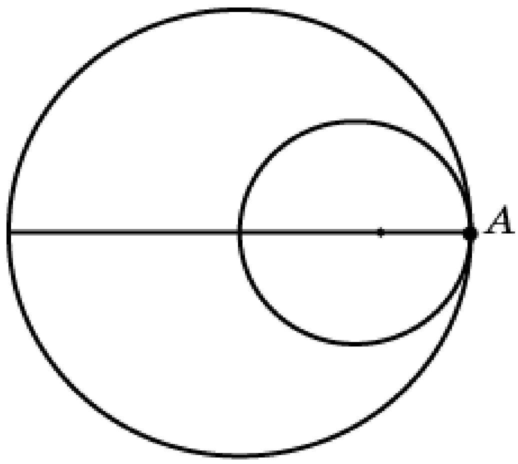
15.



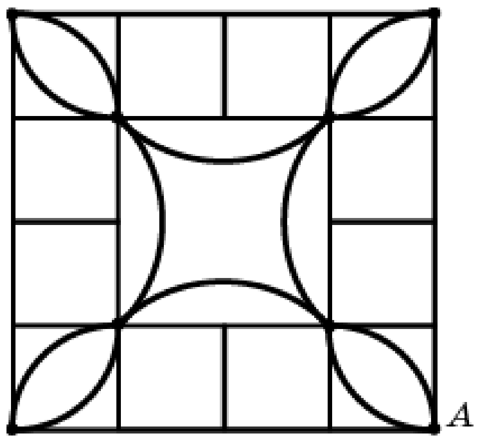
16.



17.

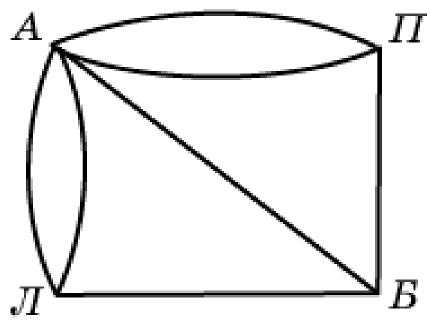


18.



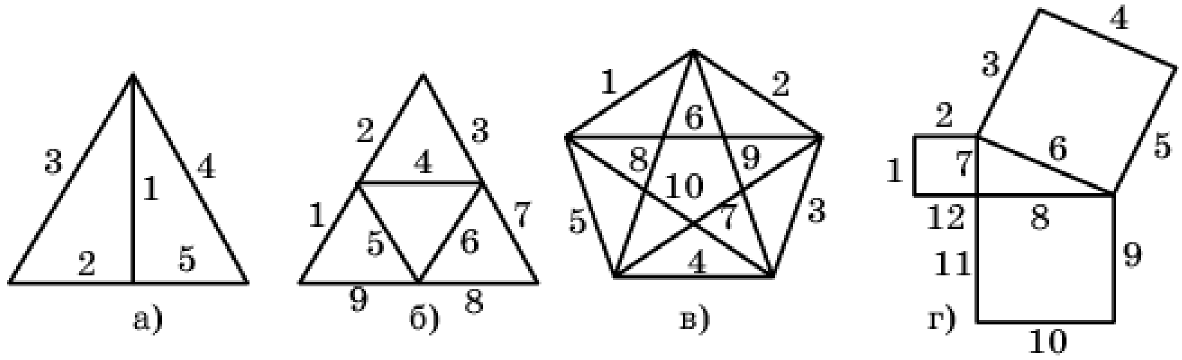
8. Графы

1. Определим чётность вершин графа в задаче Эйлера.

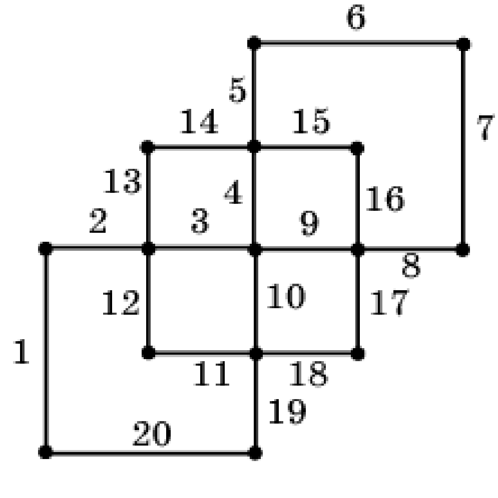


Вершина *А* имеет индекс 5, *Б* - 3, *П* - 3 и *Л* - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечётного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Таким образом, во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

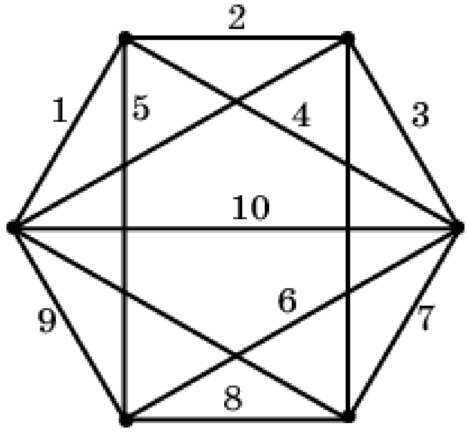
2. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.



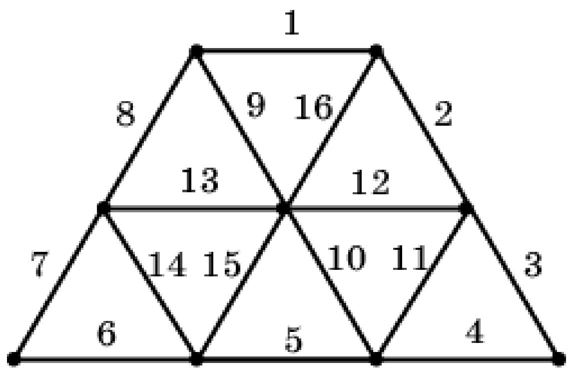
3. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.



4. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.

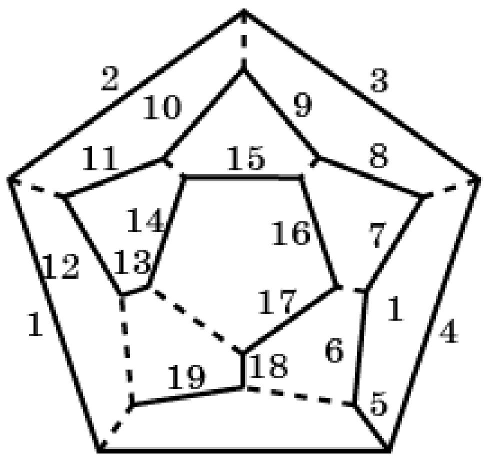


5. Один из возможных порядков обхода рёбер графа указан числами.

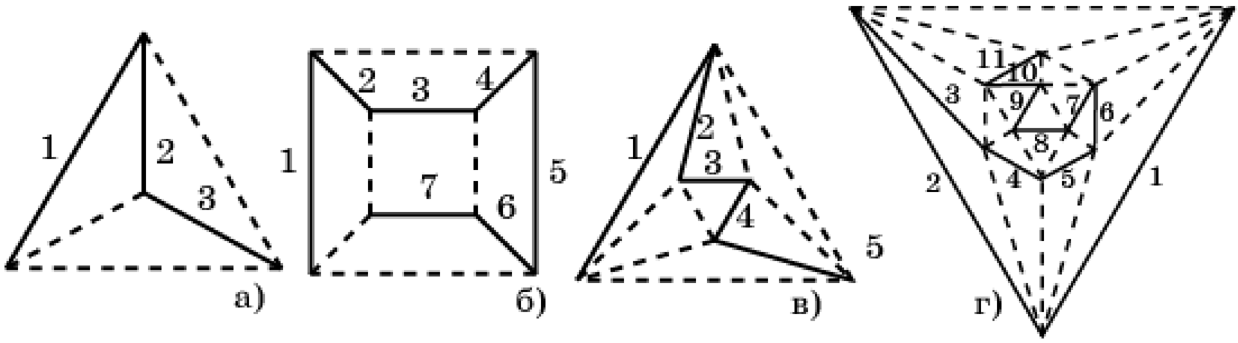


6. а), б) г), д), ж, з. **7.** 18. **8.** 2. **9.** 35. **10.** Нет, 3. **11.** 4. **12.** Да. **13.** 6. **14.** 10.

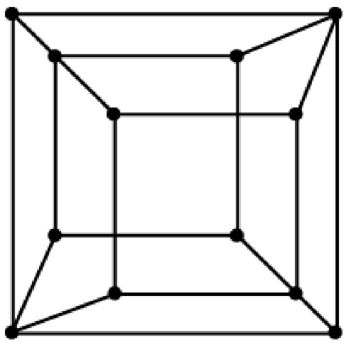
15. На рисунке изображён граф, состоящий из рёбер додекаэдра. Один из возможных порядков обхода вершин указан числами.



16. Один из возможных порядков обхода вершин указан числами.

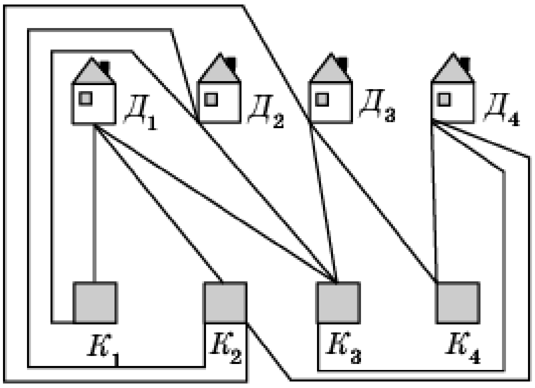


17. Граф, изображённый на рисунке, имеет вершины индекса 4 и 3, причём ребрами соединены только вершины разного индекса. Если бы существовал путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз, то число вершин индекса 4 и число вершин индекса 3 должно или совпадать, или отличаться на 1. Однако в этом графе 6 вершин индекса 4 и 8 вершин индекса 3. Следовательно, искомого пути не существует.



18. Предположим, что можно провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу. Рассмотрим граф, вершинами которого являются домики и колодцы, а ребрами – дорожки. Воспользуемся теоремой Эйлера, согласно которой выполняется равенство В – Р + Г = 2, где В – число вершин графа, Р – число рёбер, Г – число областей, на который граф разбивает плоскость. У данного графа В = 6, Р = 9 и, следовательно, Г = 5. Каждая из пяти областей ограничена, по крайней мере, четырьмя ребрами, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро разделяет две области, то количество рёбер должно быть не меньше (5·4)/2 = 10, что противоречит тому, что их число равно 9. Таким образом, провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу нельзя.

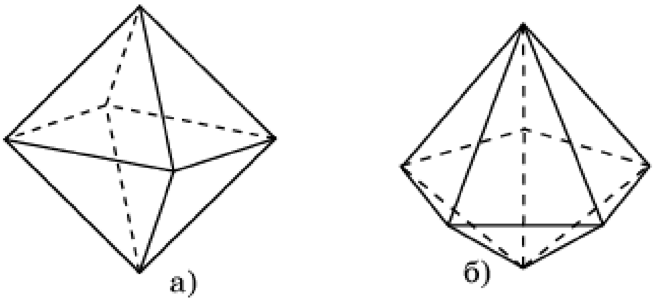
19. а), б) Да. **20.** а) Да, б) нет. **21.** Да, один из возможных способов показан на рисунке.



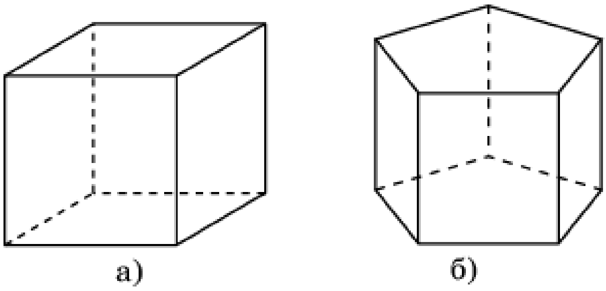
22. Предположим, что это сделать можно. Воспользуемся теоремой Эйлера, согласно которой выполняется равенство В – Р + Г = 2, где В – число вершин графа, Р – число рёбер, Г – число областей, на который граф разбивает плоскость. У данного графа В = 5, Р = 10 и, следовательно, Г = 7. С другой стороны, поскольку каждая область ограничена, по крайней мере, тремя рёбрами, то число рёбер должно быть больше или равно (7·3)/2 > 10. Противоречие. Таким образом, соединить все домики непересекающимися дорожками нельзя.

9. Кристаллы – природные многогранники

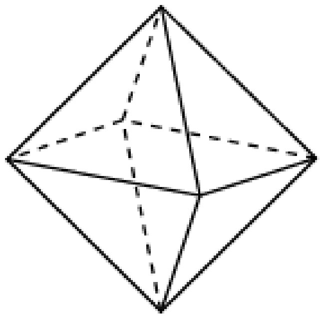
1. Если в гранями выпуклого многогранника являются только треугольники, то имеет место равенство 3Г = 2Р. Используя теорему Эйлера, находим: а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10.



2. Если в каждой вершине выпуклого многогранника сходится три ребра, то имеет место равенство 3В = 2Р. Используя теорему Эйлера, находим: а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7.



3. Если в каждой вершине выпуклого многогранника сходится четыре ребра, то имеет место равенство 4В = 2Р. Используя теорему Эйлера, находим: В = 6, Г = 8.



4. Нет. Если бы в каждой вершине выпуклого многогранника сходилось шесть треугольников, то выполнялись бы равенства: 6В = 2Р, 3Г = 2Р, из которых следует равенство В – Р + Г = 0, что противоречит теореме Эйлера. **5.** Нет. Если бы в каждой вершине выпуклого многогранника сходилось четыре четырёхугольника, то выполнялись бы равенства: 4В = 2Р, 4Г = 2Р, из которых следует равенство В – Р + Г = 0, что противоречит теореме Эйлера. **6.** Нет. Если бы в каждой вершине выпуклого многогранника сходилось три шестиугольника, то выполнялись бы равенства: 3В = 2Р, 6Г = 2Р, из которых следует равенство В – Р + Г = 0, что противоречит теореме Эйлера. **7.** В = 12, Р = 24, Г = 14. **8.** В = 14, Р = 24, Г = 12. **9.** В = 60, Р = 90, Г = 32. **10.** В = 24, Р = 48, Г = 26. **11.** В = 24, Р = 60, Г = 38. **12.** В = 30, Р = 60, Г = 32. **13.** В = 60, Р = 150, Г = 92. **14.** В = 24, Р = 36, Г = 14. **15.** В = 60, Р = 120, Г = 62. **16.** В = 48, Р = 72, Г = 26. **17.** В = 120, Р = 180, Г = 62.

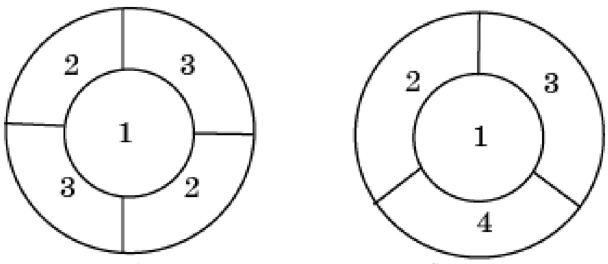
18. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится *i* рёбер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_3 + В_4 + В_5 + \ldots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется *i* рёбер. Предположим, что у многогранника нет граней с числом сторон, меньшим шести. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_6 + Г_7 + Г_8 + \ldots$. Имеем: $3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots = 2Р$, $6Г_6 + 7Г_7 + 8Г_8 + \ldots = 2Р$. Из этих равенств следует выполнимость неравенств $3В \le 2Р$ и $6Г \le 2Р$, из которых получаем неравенство $3В - 3Р + 3Г \le 0$, а по теореме Эйлера должно выполняться равенство $3В - 3Р + 3Г = 6$. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение об отсутствии граней с числом сторон, меньшим шести. Значит, в выпуклом многограннике обязательно найдется грань с числом сторон, меньшим шести.

19. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится *i* рёбер. Предположим, что у многогранника нет вершин, в которых сходится менее шести рёбер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_6 + В_7 + В_8 + \ldots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется *i* рёбер. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \ldots$. Имеем: $6В_6 + 7В_7 + 8В_8 + \ldots = 2Р$, $3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots = 2Р$. Из этих равенств следует выполнимость неравенств $6В \le 2Р$ и $3Г \le 2Р$, из которых получаем неравенство $3В – 3Р + 3Г \le 0$, а по теореме Эйлера должно выполняться равенство $3В – 3Р + 3Г = 6$. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение об отсутствии вершин, в которых сходится менее шести рёбер. Значит, в выпуклом многограннике обязательно найдется вершина, в которой сходится менее шести рёбер.

20. Мы докажем более сильное утверждение, а именно, что у выпуклого многогранника число треугольных граней плюс число трёхгранных углов больше или равно восьми. Обозначим через $В_i$ число вершин выпуклого многогранника, в которых сходится i рёбер. Тогда для общего числа вершин В имеет место равенство $В = В_3 + В_4 + В_5 + \ldots$. Аналогично, обозначим через $Г_i$ число граней выпуклого многогранника, у которых имеется i рёбер. Тогда для общего числа граней Г имеет место равенство $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + \ldots$. Имеем: $3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots = 2Р$, $3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots = 2Р$. По теореме Эйлера выполняется равенство $4В – 4Р + 4Г = 8$. Подставляя вместо В, Р и Г их выражения, получим $4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + \ldots – (3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots) – (3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots) + 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + \ldots = 8$. Следовательно, $В_3 + Г_3 = 8 + В_5 + \ldots + Г_5 + \ldots$. Значит, число треугольных граней плюс число трёхгранных углов больше или равно восьми.

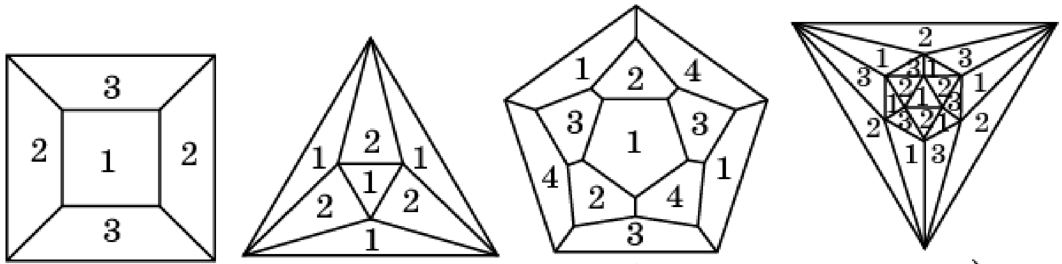
10. Карты

1. а) 3; б) 4.



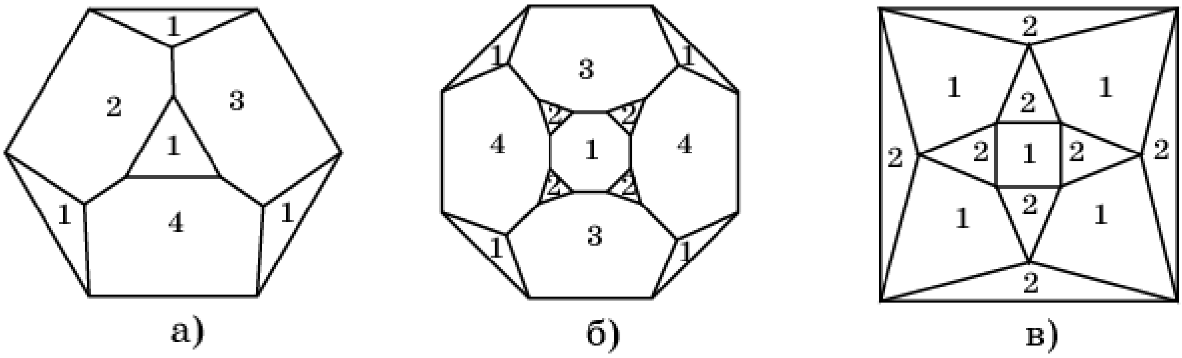
а) б)

2. а) 3; б) 2; в) 4; г) 3.

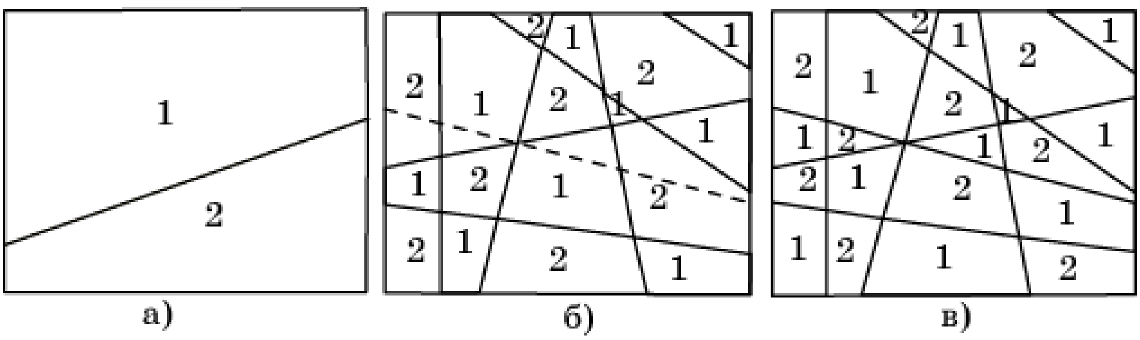


а) б) в) г)

3. а) 4; б) 4; в) 2.



4. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета. Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из неё добавлением новой прямой также может быть раскрашена в два цвета. Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты. Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.



5. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи.

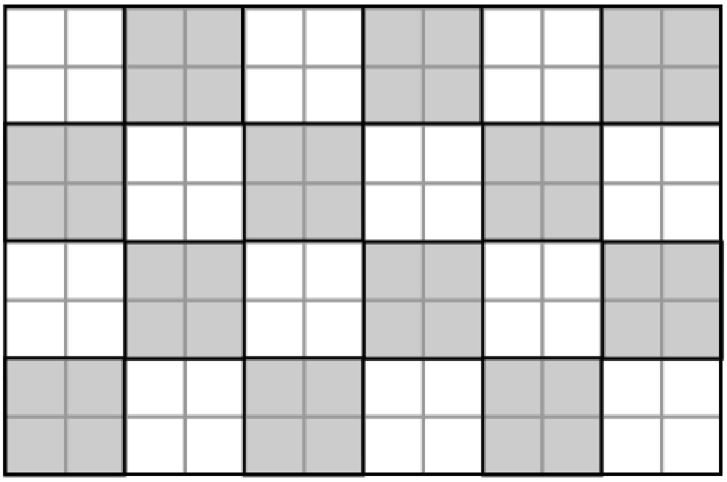
6. Если хотя бы одна внутренняя вершина карты имела бы нечётный индекс, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более двух красок.

7. Если хотя бы одна страна карты имела бы нечётное число сторон, то для правильной раскраски такой карты потребовалось бы более трёх красок.

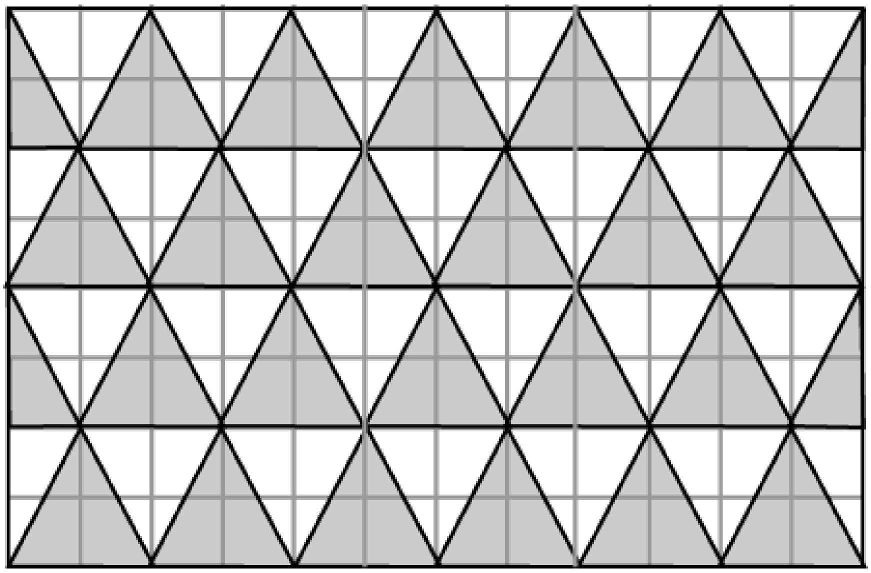
8. 4. **9.** 3. **10.** 2. **11.** 3. **12.** 4. **13.** 2. **14.** 2. **15.** 2. **16.** 3. **17.** 3. **18.** 2. **19.** 4. **20.** 3. **21.** 4. **22.** 2. **23.** 3. **24.** 3.

11. Паркеты

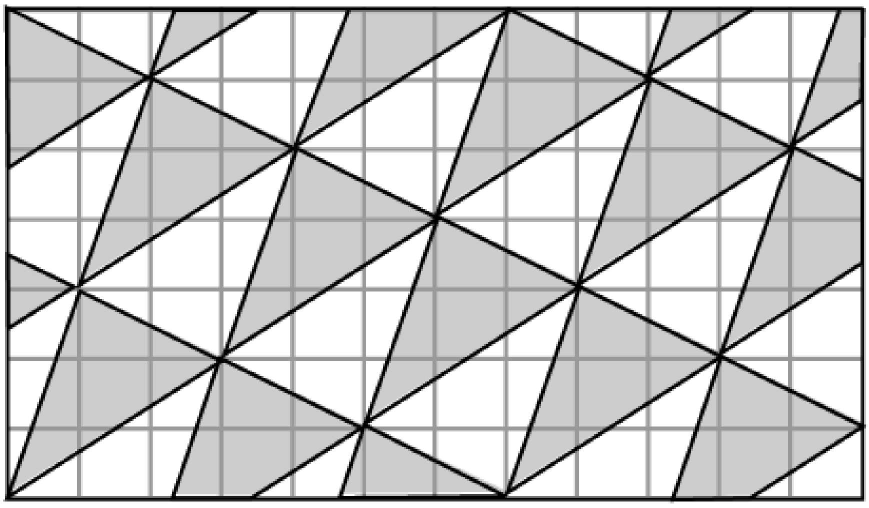
1. Два цвета.



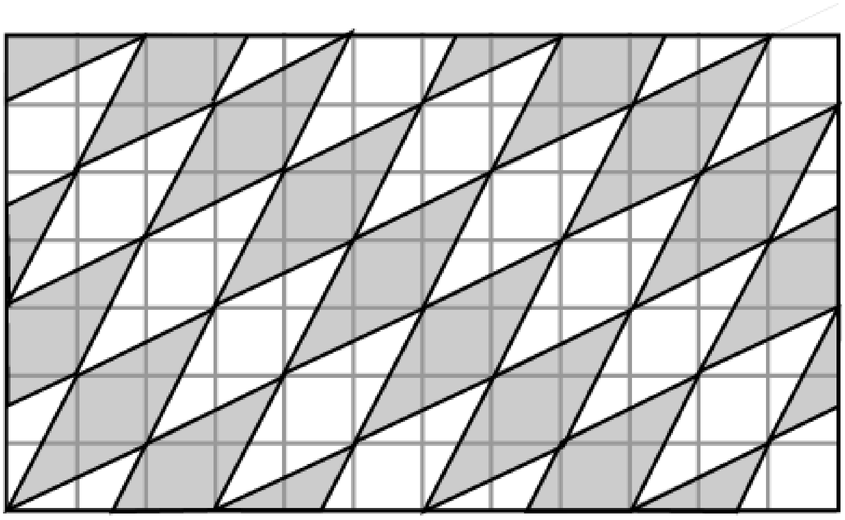
2. Два цвета.



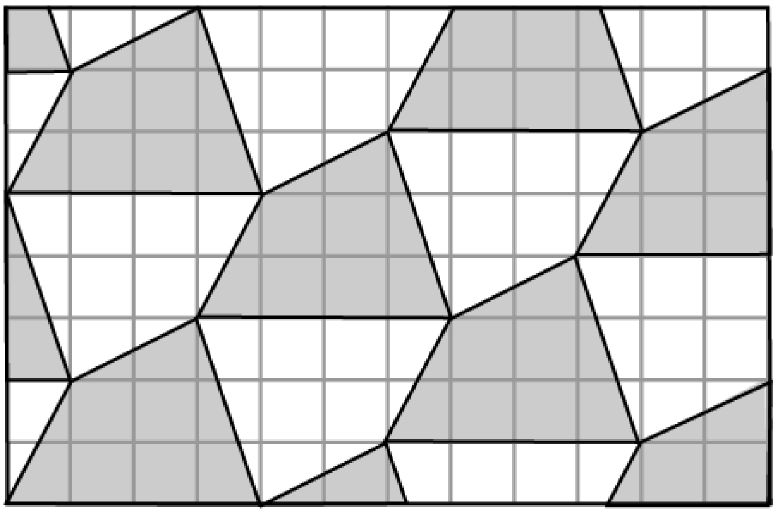
3. Два цвета.



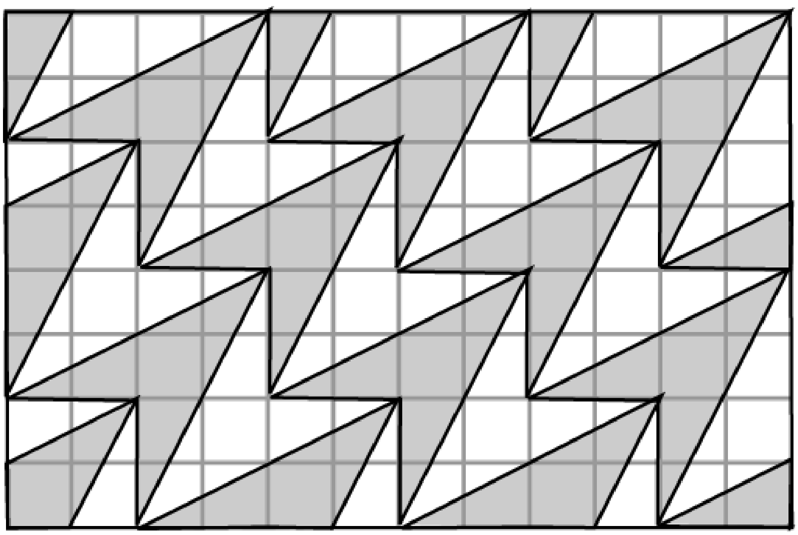
4. Два цвета.



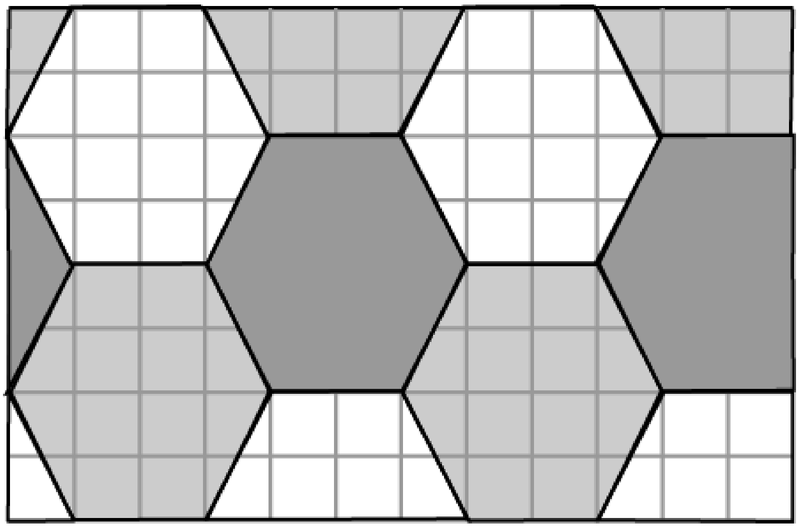
5. Два цвета.



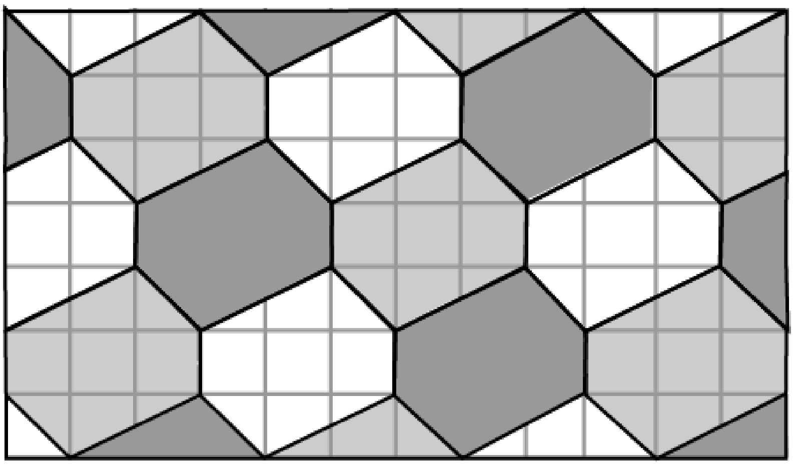
6. Два цвета.



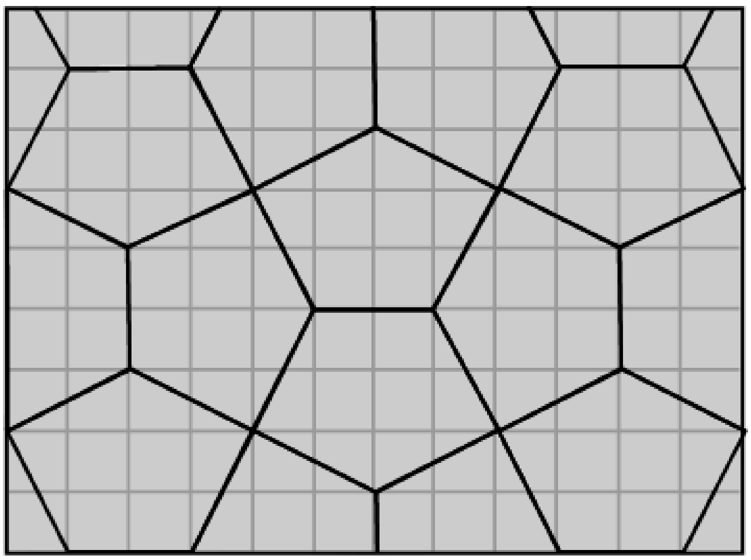
7. Три цвета.



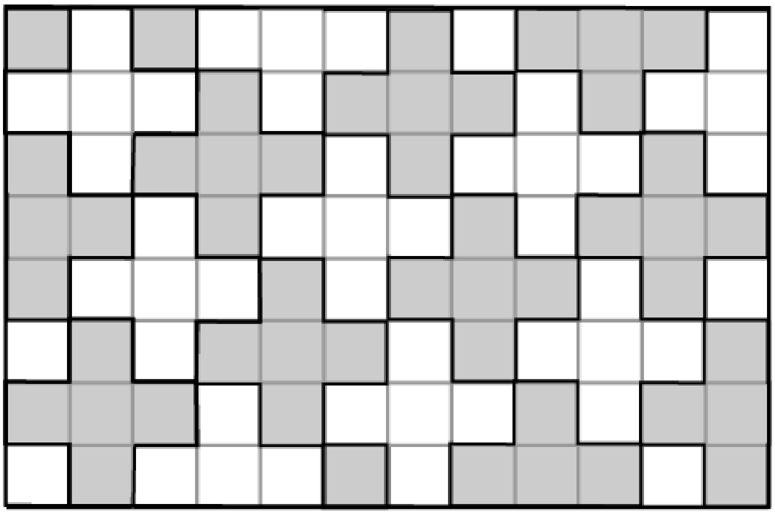
8. Три цвета.



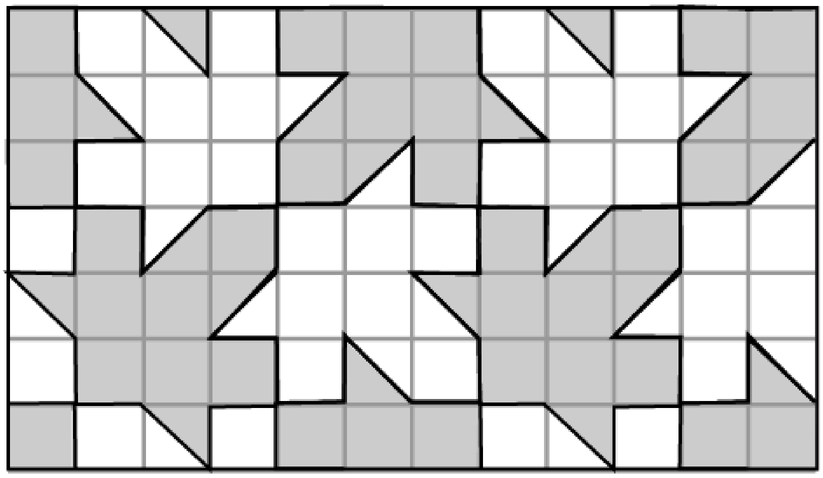
9. Четыре цвета.



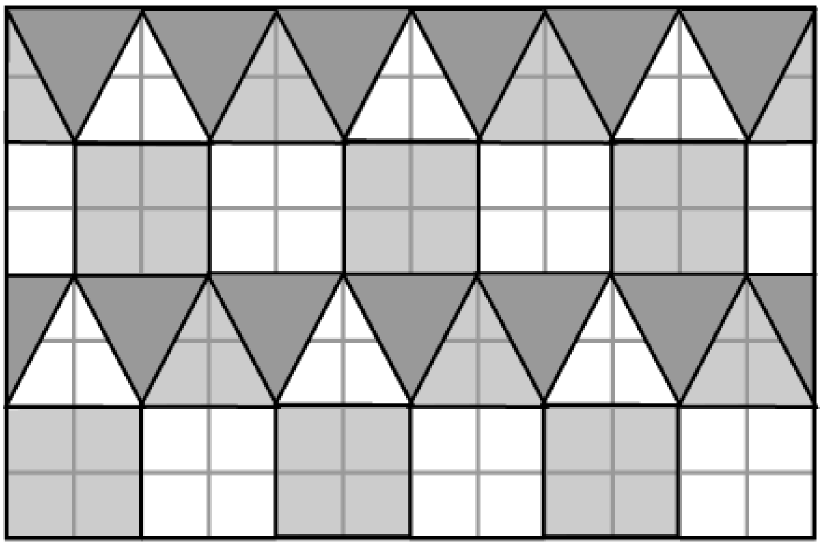
10. Два цвета.



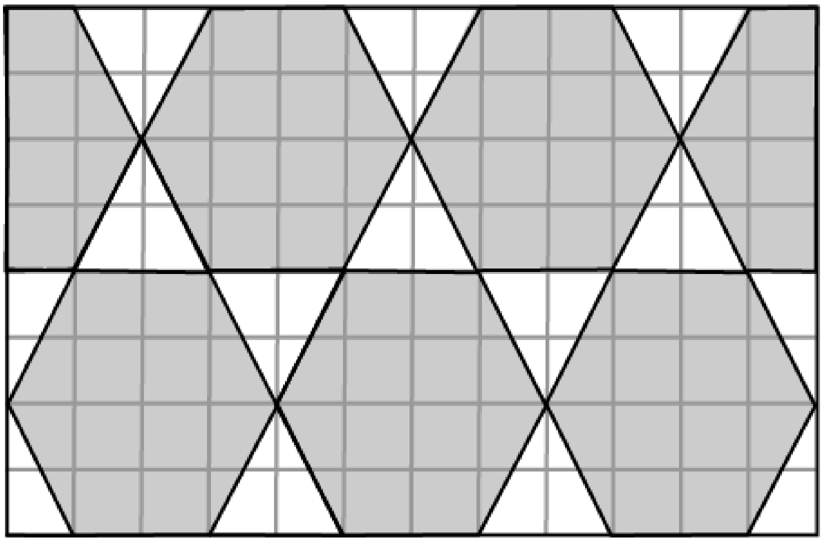
11. Два цвета.



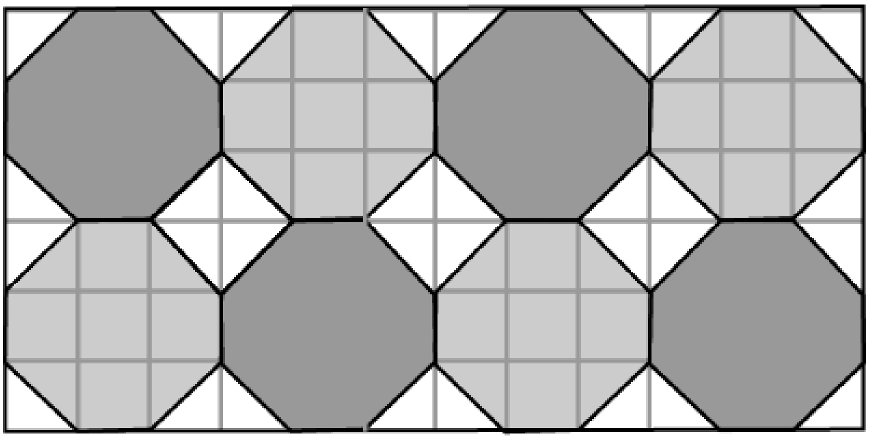
12. Три цвета.



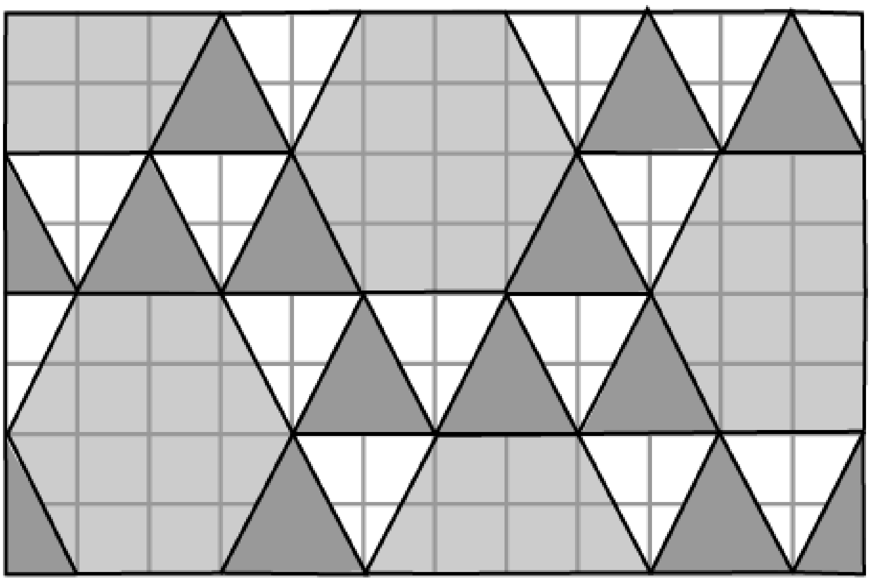
13. Два цвета.



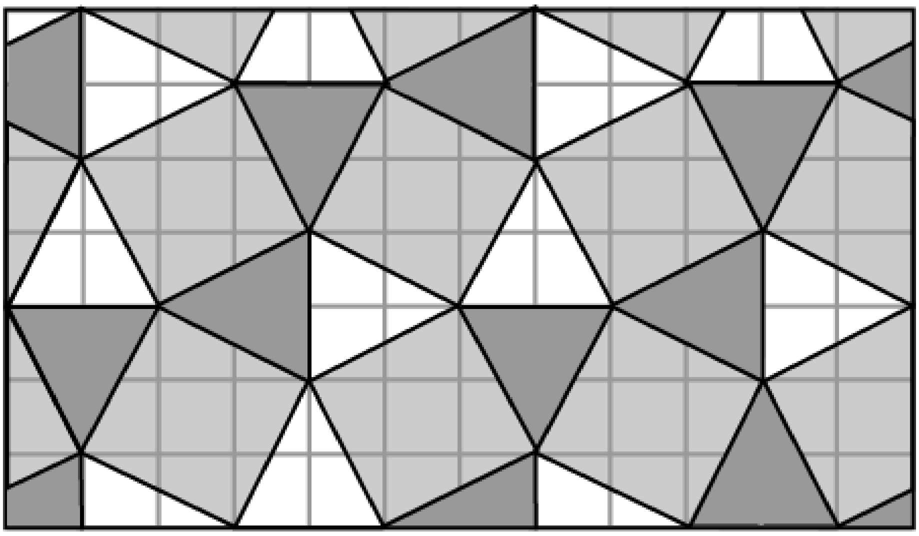
14. Три цвета.



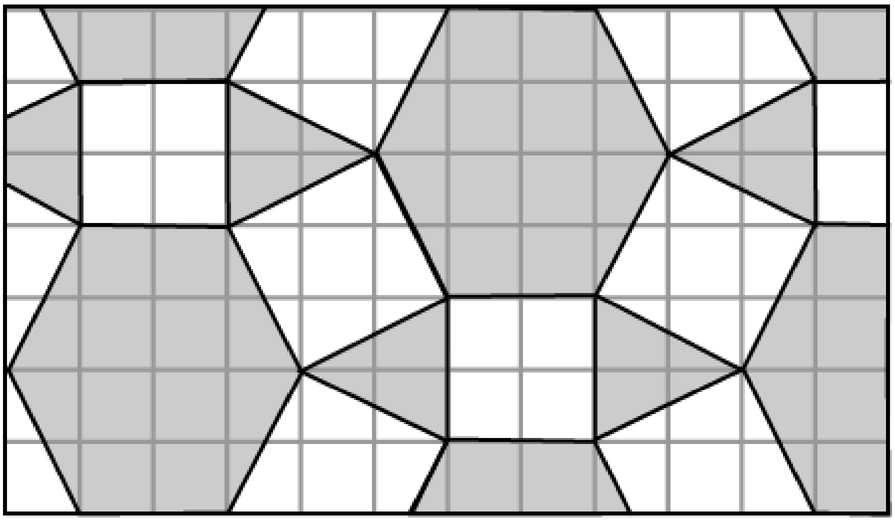
15. Три цвета.



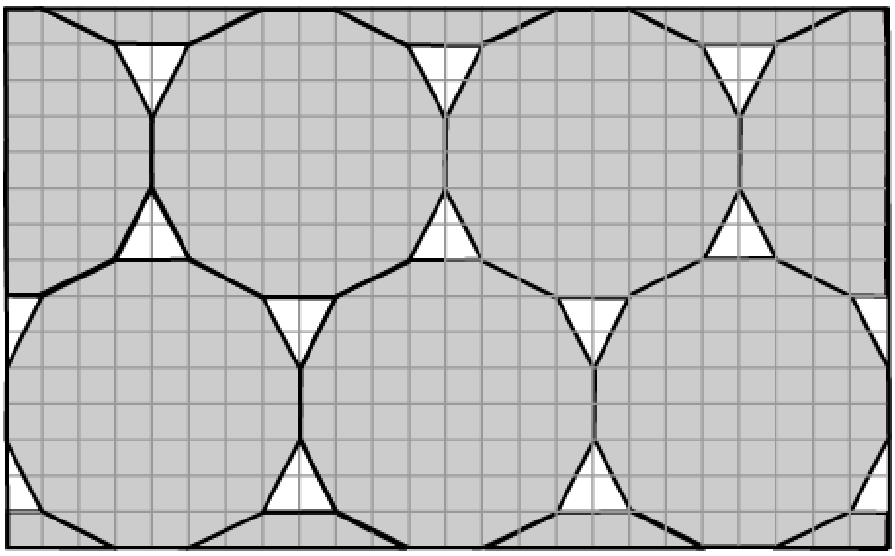
16. Три цвета.



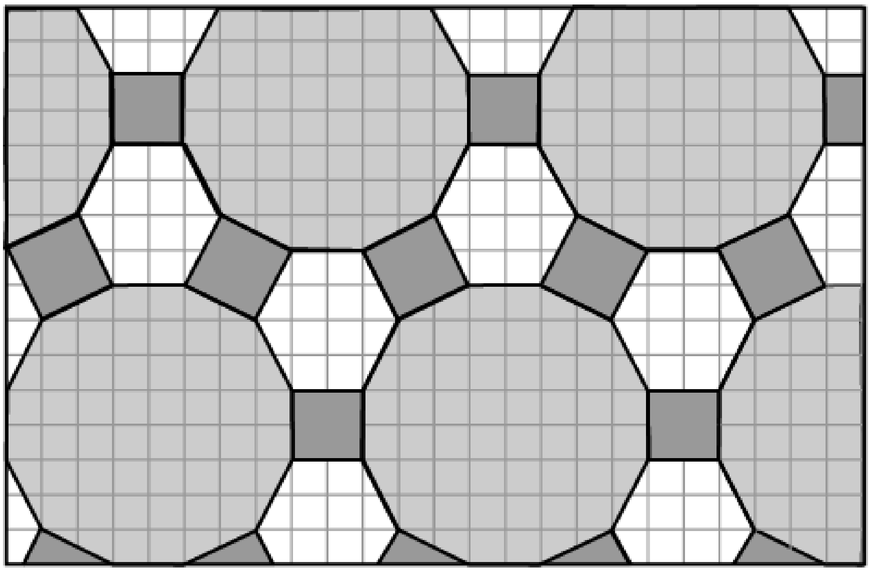
17. Два цвета.



18. Четыре цвета.

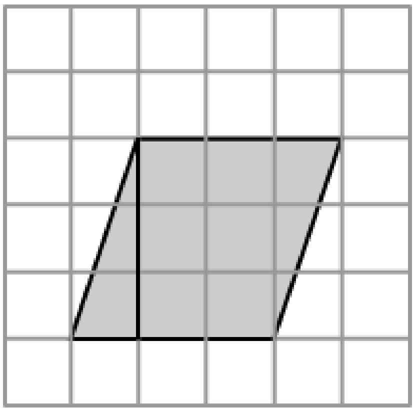


19. Три цвета.

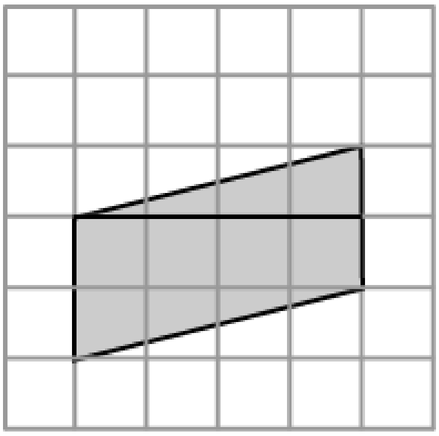


12. Разрезания

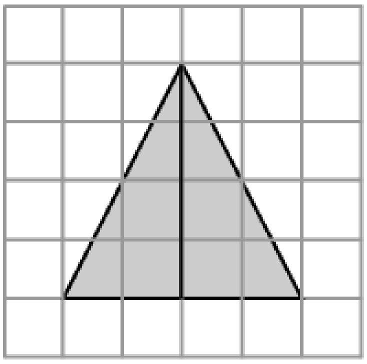
1.



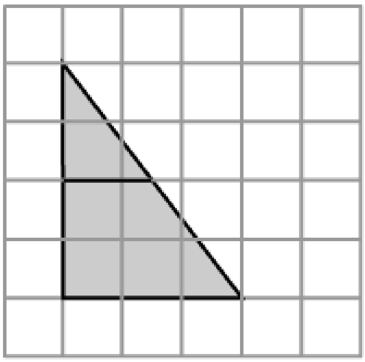
2.



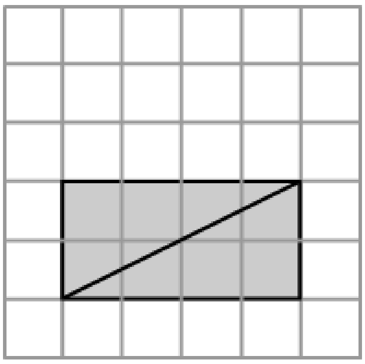
3.



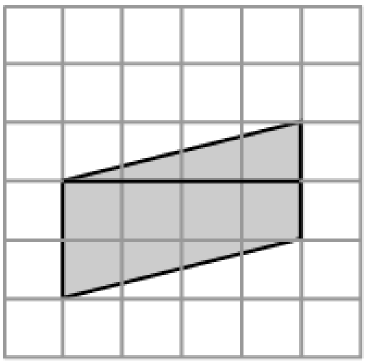
4.



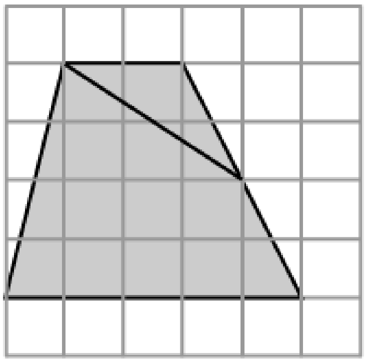
5.



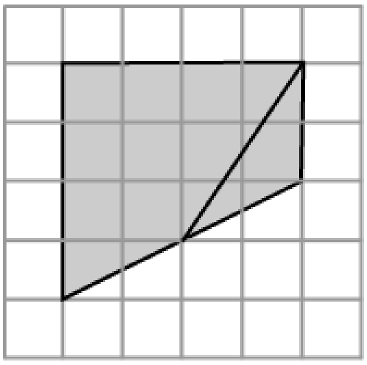
6.



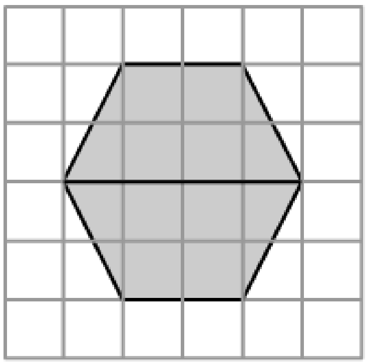
7.



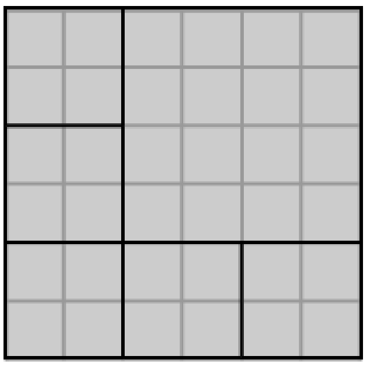
8.



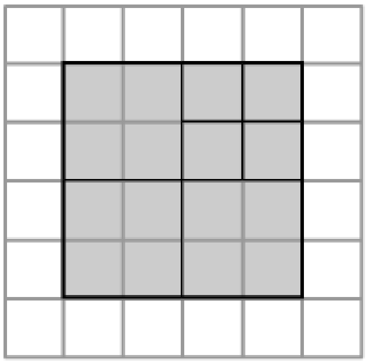
9.



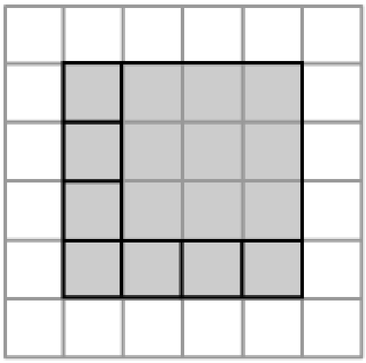
10.



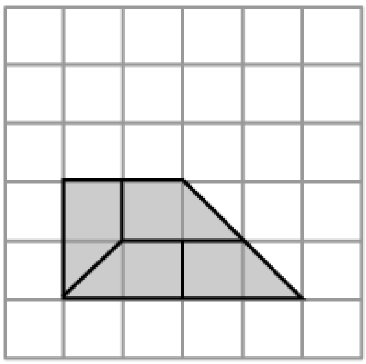
11.



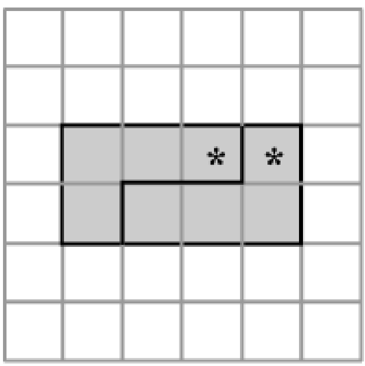
12.



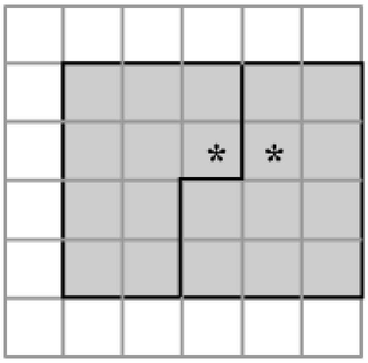
13.



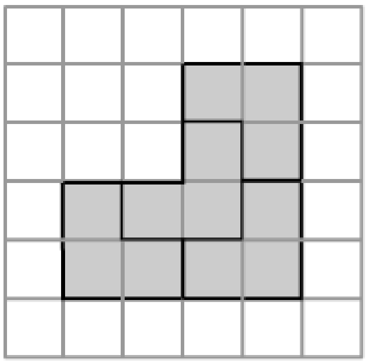
14.



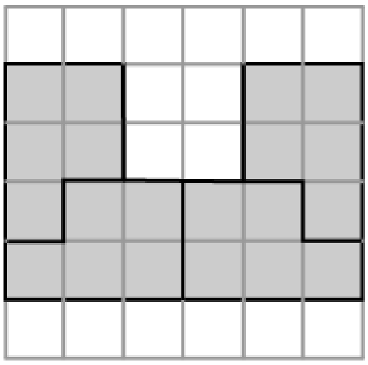
15.



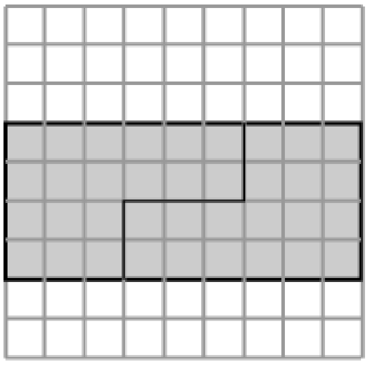
16.



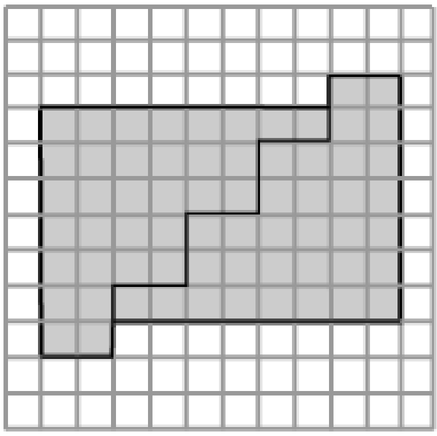
17.



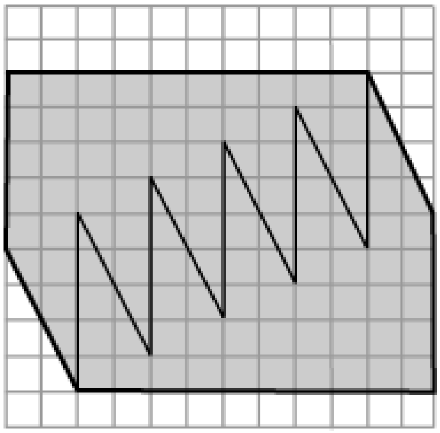
18.



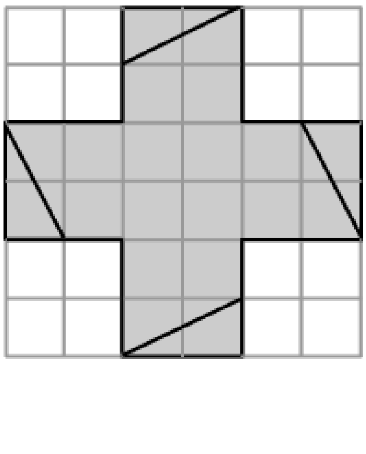
19.



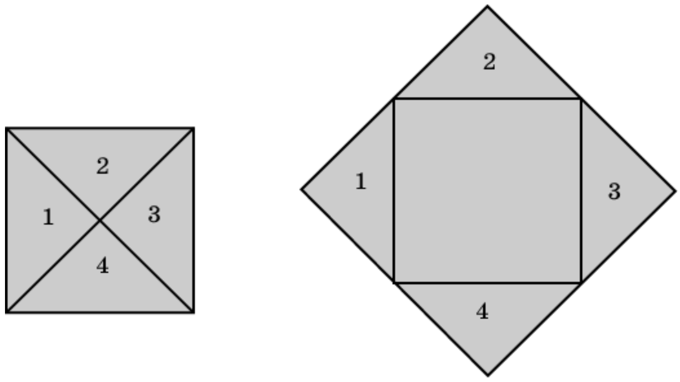
20.



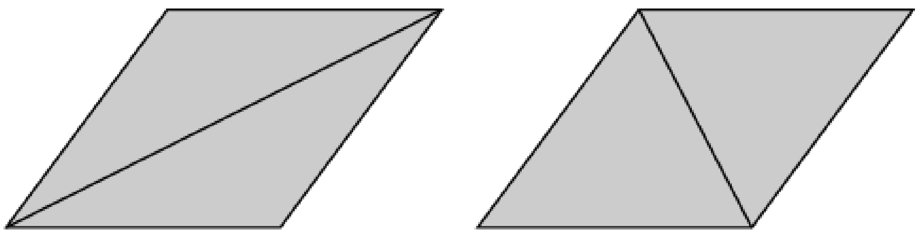
21.



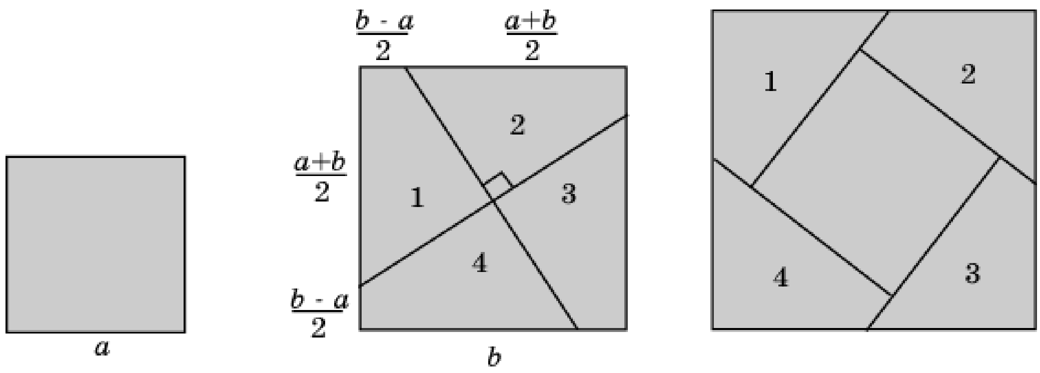
22.


2
1
3
4
2
1
3
4

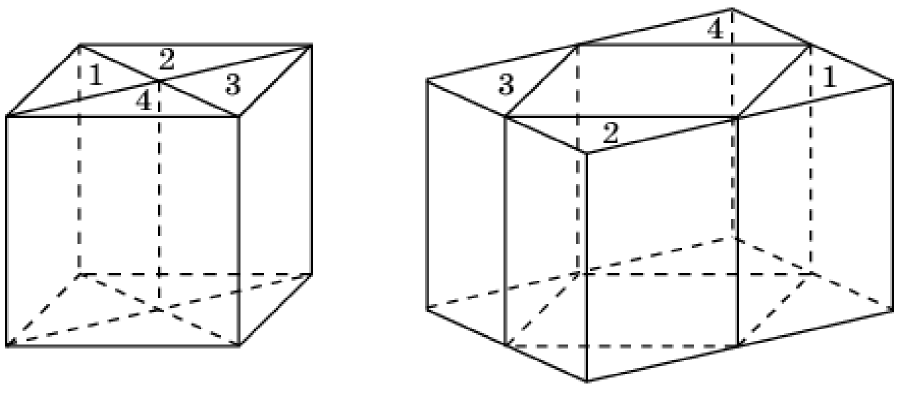
23.



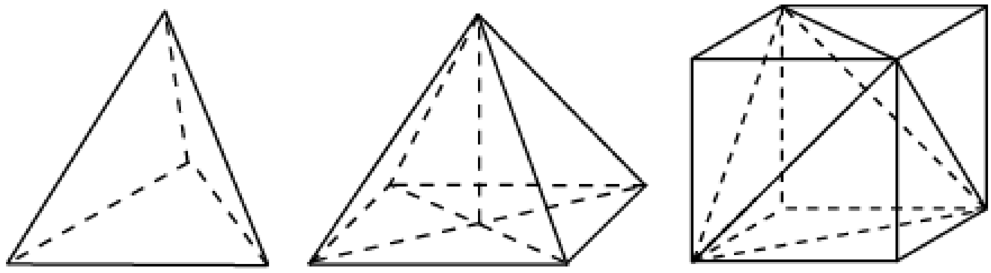
24.


a
$\frac{b-a}{2}$
$\frac{a+b}{2}$
$\frac{a+b}{2}$
$\frac{b-a}{2}$
1
2
3
4
b
1
2
4
3

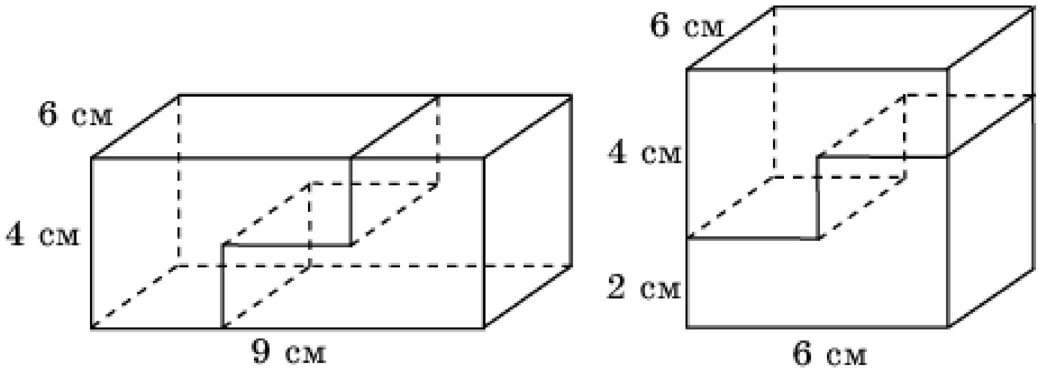
25.


1
2
3
4
4
3
1
2

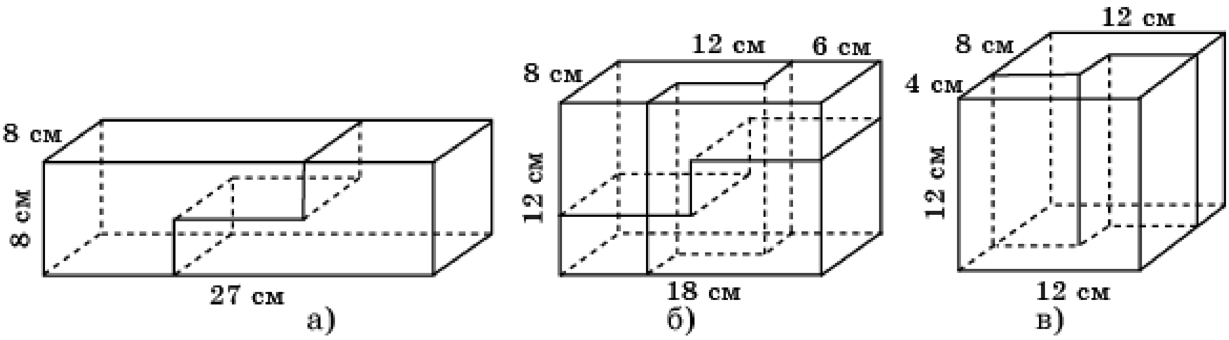
26.



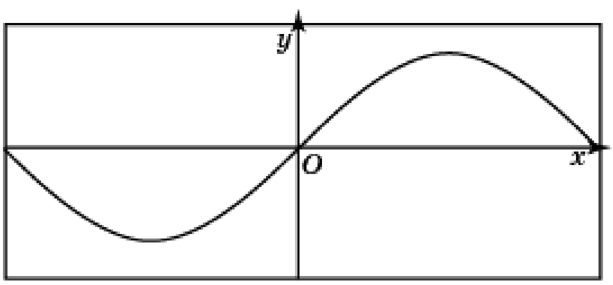
27.



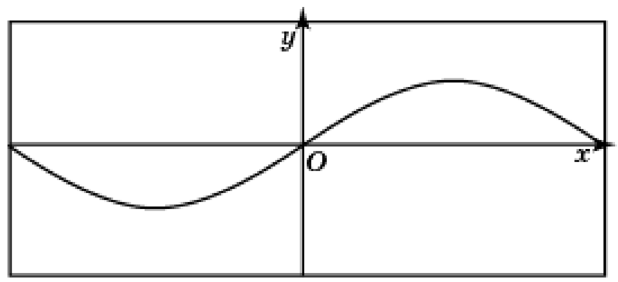
28.



29. Синусоида.



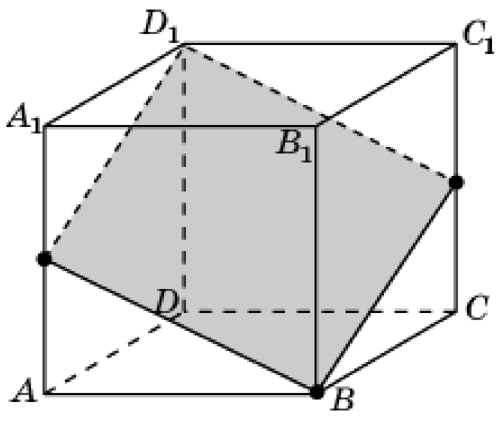
30. По синусоиде $y = k \cdot \sin x$, где k = tg 30°.



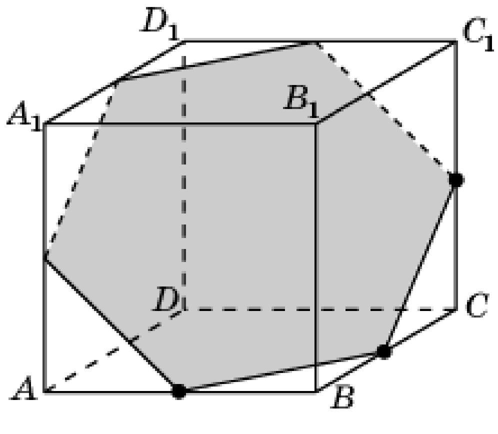
13. Площадь

1. 600 м. **2.** 120 м. **3.** 70 м. **4.** 192 квадратных фута. **5.** 1080 квадратных футов. **6.** 642 м^2. **7.** 2,23 м^2. **8.** 420 000 м^2. **9.** 320 000 м^2. **10.** 108 м^2. **11.** 1200 см^2. **12.** 25%. **13.** 25. **14.** 26 см. **15.** 16216 квадратных футов. **16.** 38 см^2. **17.** 92 см^2. **18.** 48 см^2. **19.** 72 см^2. **20.** 68 м^2. **21.** 1050 см^2. **22.** 32 см^2. **23.** 68 см^2. **24.** 13 см^2. **25.** 628 см^2.

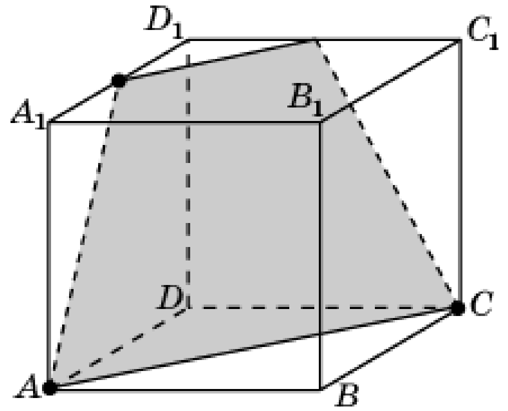
26. Сечением куба является ромб. Его площадь равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



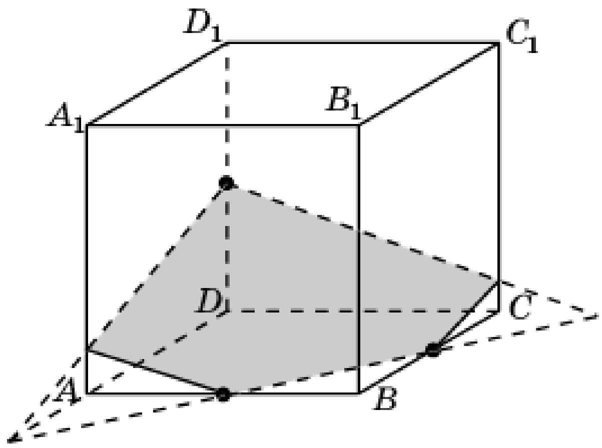
27. Сечением куба является правильный шестиугольник. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



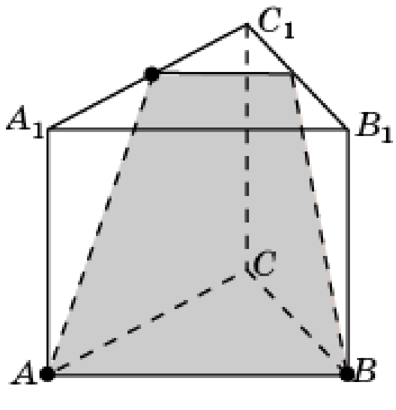
28. Сечением куба является равнобедренная трапеция. Её площадь равна $1\frac{1}{8}$.



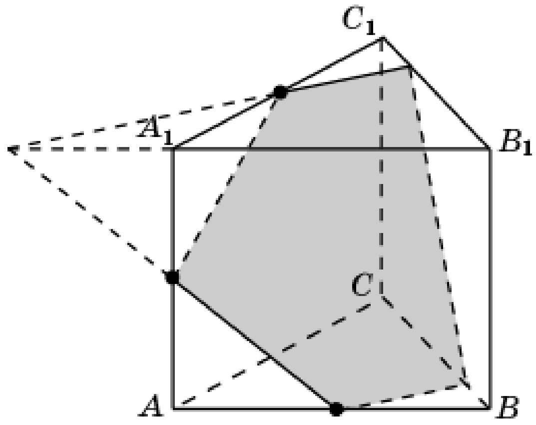
29. Сечением куба является пятиугольник. Его площадь равна $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.



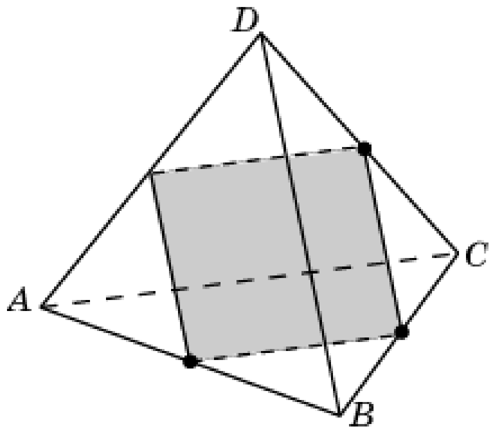
30. Сечением призмы является трапеция. Её площадь равна $\frac{3\sqrt{19}}{16}$.



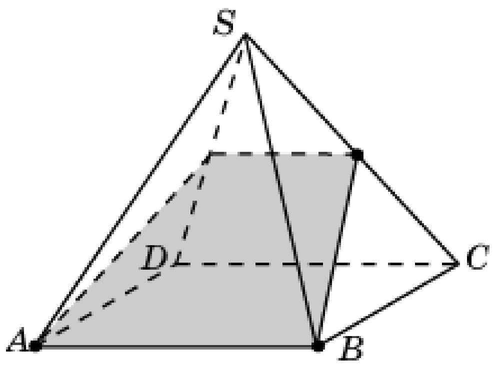
31. Сечением призмы является пятиугольник. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{51}}{16}$.



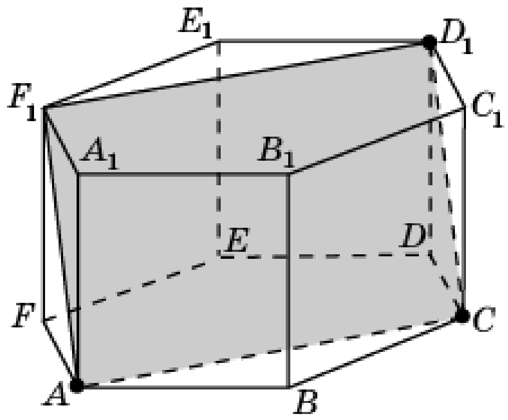
32. Сечением тетраэдра является квадрат. Его площадь равна 0,25.



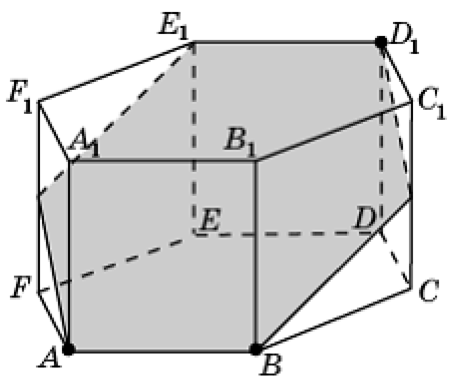
33. Сечением пирамиды является трапеция. Её площадь равна $\frac{3\sqrt{11}}{16}$.



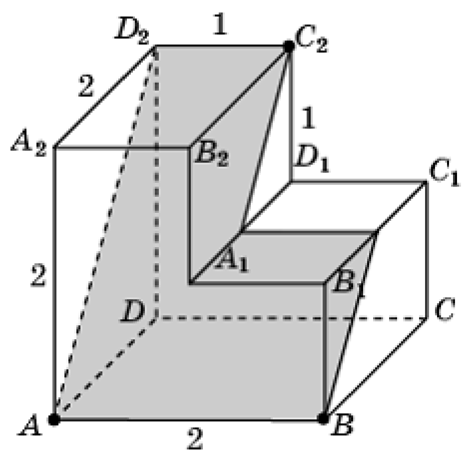
34. Сечением призмы является прямоугольник. Его площадь равна $\sqrt{6}$.



35. Сечением призмы является шестиугольник. Его площадь равна 3.



36. Сечением многогранника является невыпуклый шестиугольник. Его площадь равна $3\sqrt{2}$.

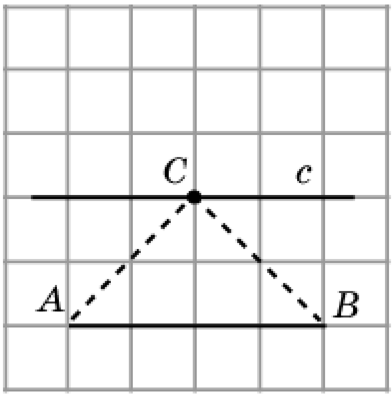


14. Объём

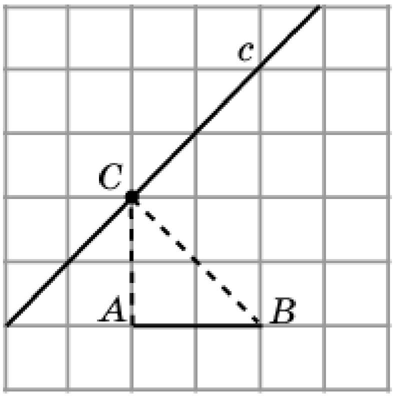
1. 150. **2.** 90. **3.** 3315 г. **4.** 60 м^2. **5.** 24. **6.** 2 433 400 м^3. **7.** 150 см. **8.** 225 см^3. **9.** 3 дм^3. **10.** 3 см. **11.** 1,125. **12.** 4 см. **13.** 10 см. **14.** 27. **15.** 6 см. **16.** 26. **17.** 960 м^3. **18.** 162 кг. **19.** 30 дм^3. **20.** 6 дм^3. **21.** 9 см^3. **22.** 12 см^3. **23.** 40 см^3. **24.** 12 см^3. **25.** 144 г. **26.** 2250 см^3. **27.** 1.

15. Экстремальные задачи

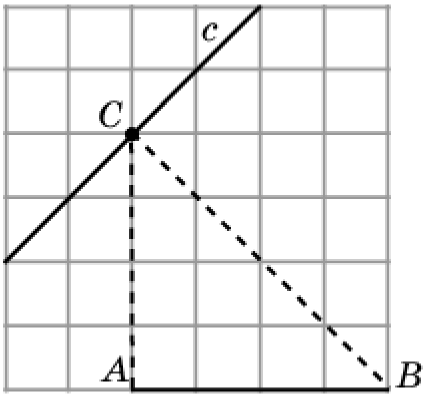
1. 90°.



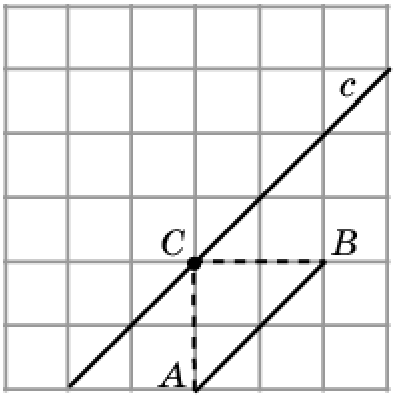
2. 45°.



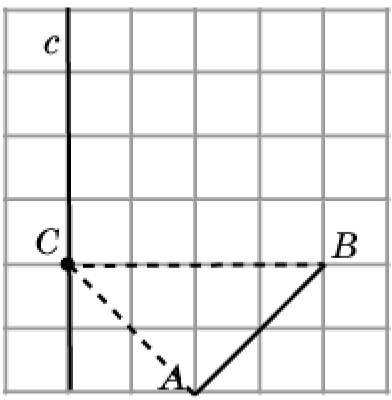
3. 45°.



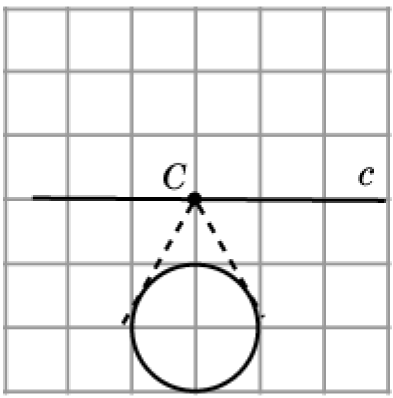
4. 90°.



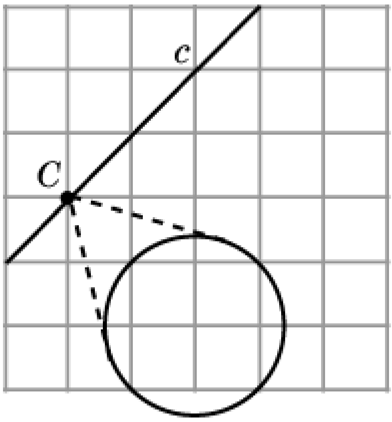
5. 45°.



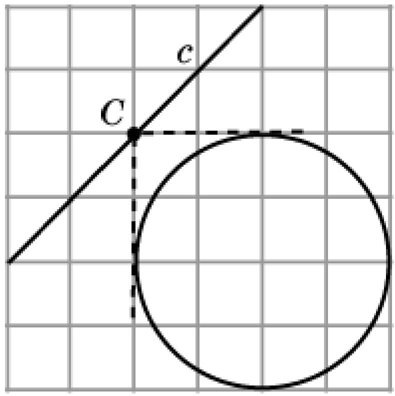
6. 60°.



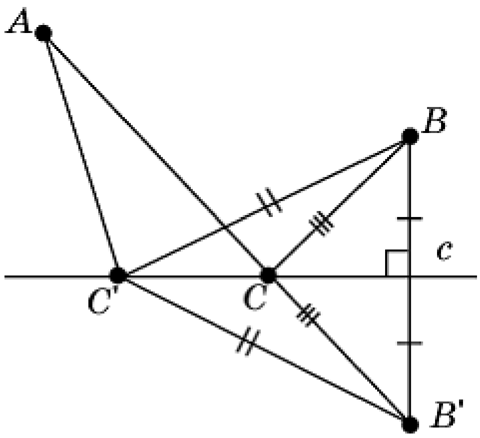
7. 60°.



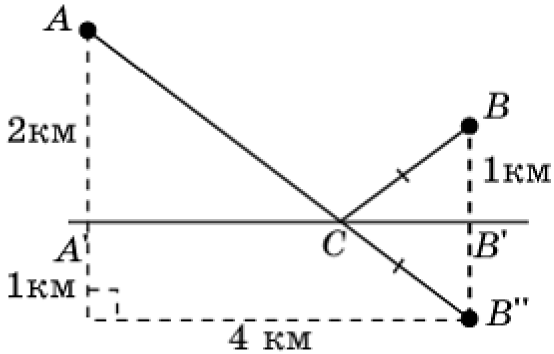
8. 90°.



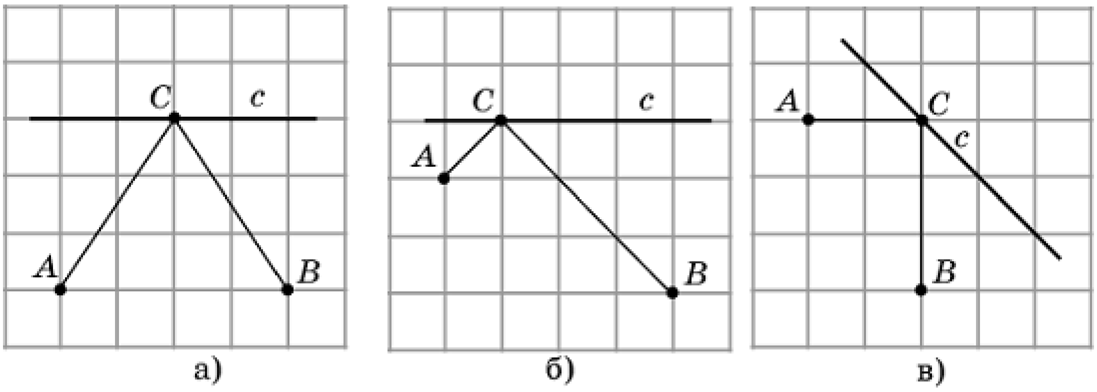
9. Рассмотрим точку *B'* симметричную точке *B* относительно прямой *c*. Для любой точки *C'* прямой *c* отрезок *BC'* равен отрезку *B'C'*. Следовательно, сумма *AC'* + *C'B* равна сумме *AC'* + *C'B'*. Она будет наименьшей, если точка *C* является точкой пересечения прямых *AB'* и *c*.



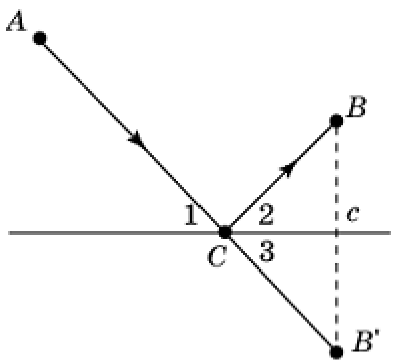
10. 5 км.



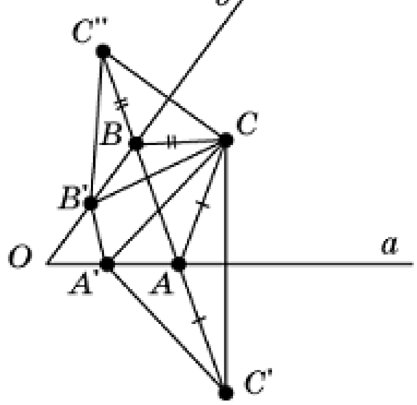
11. а) $2\sqrt{13}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 5.



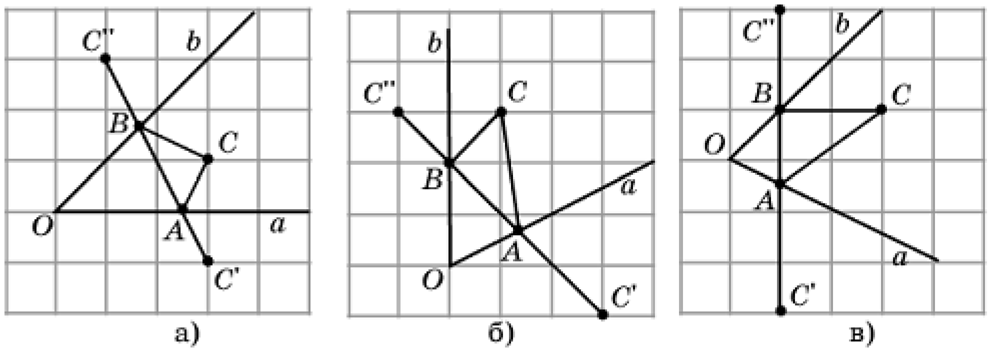
12. Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Углы 2 и 3 равны как симметричные относительно прямой *c*. Следовательно, угол 1 равен углу 3.



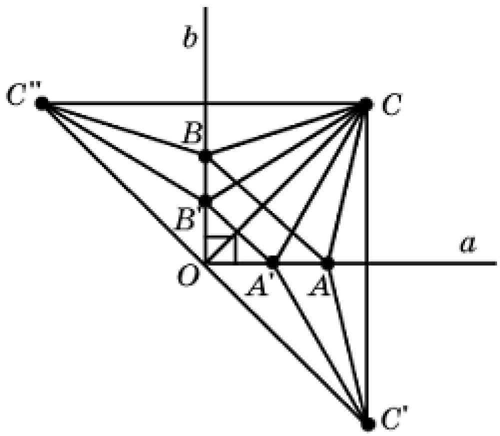
13. Пусть *C'*, *C''* – точки, симметричные точки *C* относительно сторон угла *a* и *b* соответственно. Искомыми точками будут точки *A* и *B* пересечения прямой *C'C''* со сторонами данного угла. Действительно, в этом случае периметр треугольника *ABC* равен длине отрезка *C'C''*. Для любых других точек *A'*, *B'* на сторонах угла периметр треугольника *A'B'C* равен длине ломаной *C'A'B'C''*, которая больше длины отрезка *C'C''*.



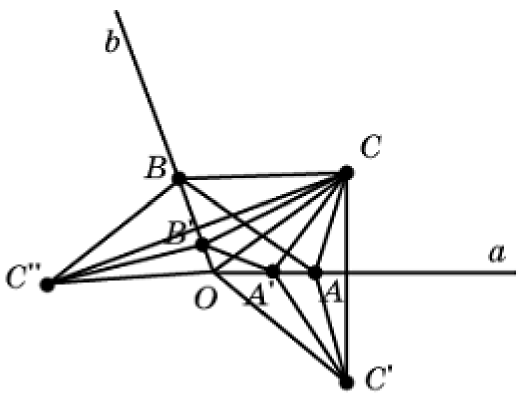
14. а) $2\sqrt{5}$; б) $4\sqrt{2}$; в) 6.



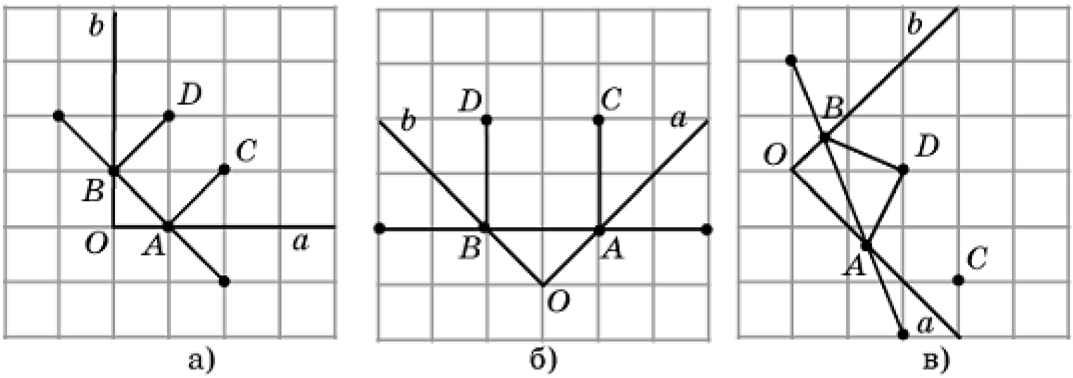
15. Для любых точек *A*, *B* на сторонах угла найдутся точки *A'*, *B'*, расположенные ближе к точке *O*, для которых периметр треугольника *A'B'C* меньше периметра треугольника *ABC*. Таким образом, не существует точек *A*, *B*, для которых периметр треугольника *ABC* наименьший.



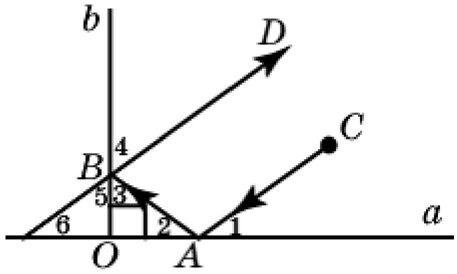
16. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи.



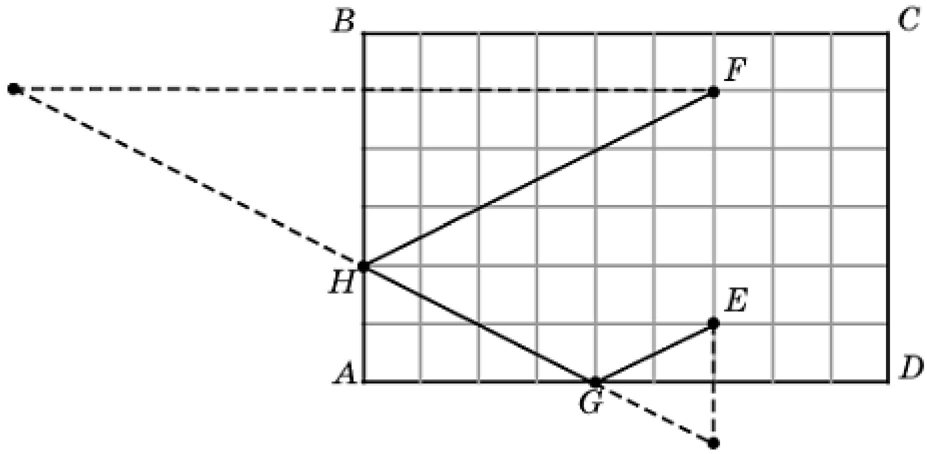
17. а) $3\sqrt{2}$; б) 6; в) $\sqrt{29}$.



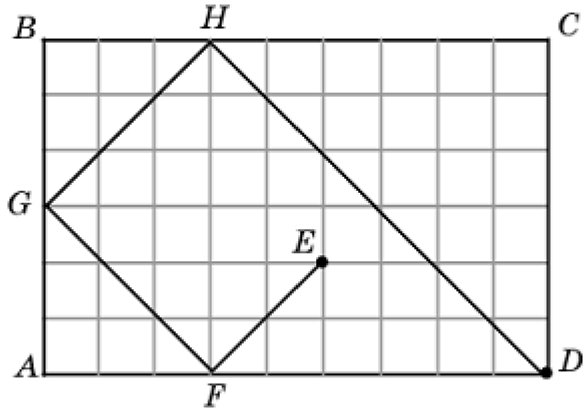
18. Так как свет распространяется по кратчайшему пути, то угол 1 равен углу 2, угол 3 равен углу 4, угол 4 равен углу 5. Следовательно, углы 1 и 6 равны, значит, прямые *AC* и *BD* параллельны.



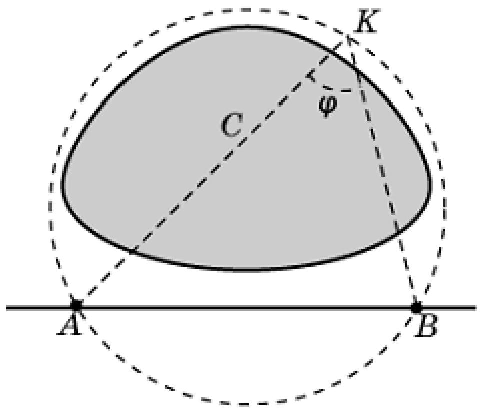
19. Искомой траекторией является ломаная *EGHF*.



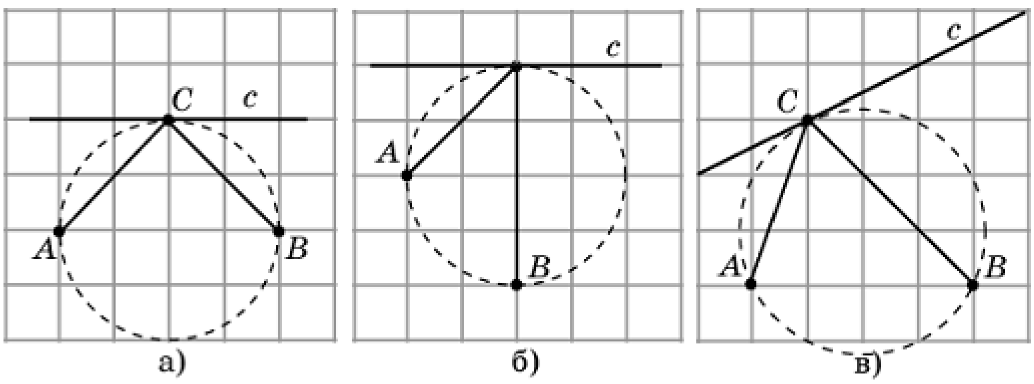
20. Искомой траекторией является ломаная *EFGHD*.



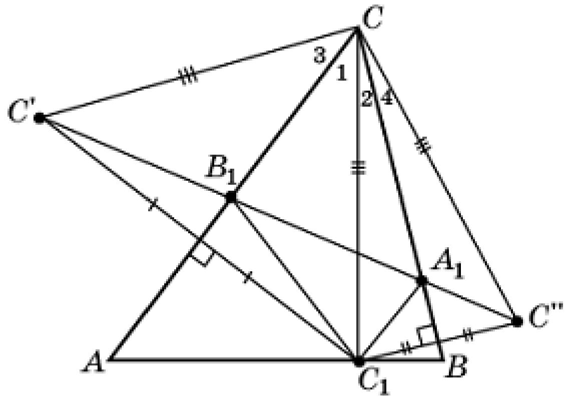
21. Нужно, чтобы угол *AKB*, под которым с корабля *K* виден отрезок *AB* между маяками *A* и *B*, не превышал заданного значения φ.



22.

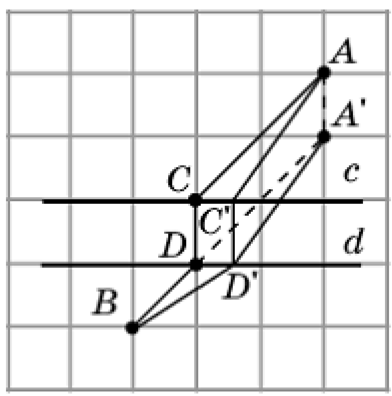


23. На стороне AB треугольника ABC возьмём произвольную точку C_1, и на сторонах угла ACB найдем точки A_1, B_1, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший. Будем теперь искать положение точки C_1 при котором периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

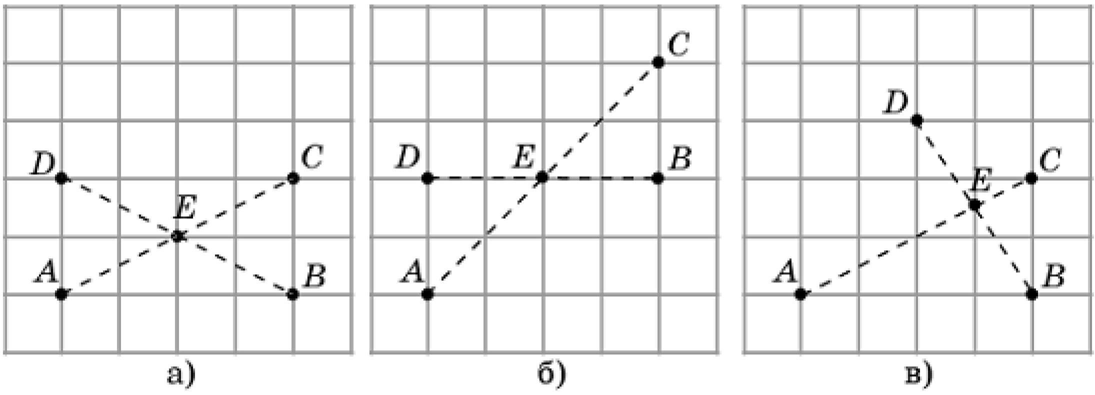


Треугольник $CC'C''$ равнобедренный ($CC' = CC''$), основание $C'C''$ равно периметру треугольника $A_1B_1C_1$, угол $C'CC''$ равен удвоенному углу ACB (угол 1 равен углу 3, угол 2 равен углу 4). В равнобедренном треугольнике $CC'C''$ основание $C'C''$ будет наименьшим, если наименьшими будут боковые стороны, равные отрезку CC_1. Этот отрезок будет наименьшим в случае, если C_1 – основание высоты треугольника ABC. Таким образом, искомой точкой C_1 на стороне AB является основание высоты треугольника ABC. Заметим, что аналогичные рассуждения можно было провести и для сторон BC и AC треугольника ABC. Получим, что точки A_1, B_1 искомого треугольника $A_1B_1C_1$ также являются основаниями высот треугольника ABC.

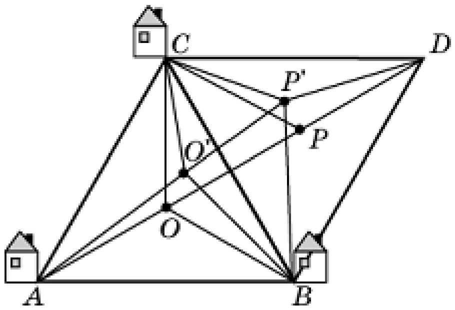
24. Отложим отрезок AA', равный ширине реки и перпендикулярный её берегам. Пусть D - точка пересечения отрезка $A'B$ и берега d, C – соответствующая точка берега c. Длина пути $ACDB$ равна ширине реки плюс длина отрезка $A'B$. Для любых других точек C', D' длина пути $AC'D'B$ равна ширине реки плюс длина ломаной $A'D'B$, которая больше длины отрезка $A'B$. Таким образом, указанные точки C и D являются искомыми.



25. Общий колодец E следует расположить в пересечении отрезков AC и BD.

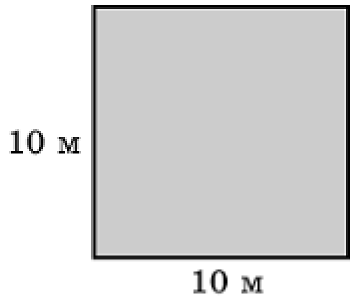


26. Колодец должен располагаться в центре O окружности, описанной около правильного треугольника. Действительно, повернём треугольник ABC вокруг вершины C на угол 60°. При этом точка A перейдёт в точку B, точка B – в точку D, точка O – в точку P. Сумма расстояний $OA + OB + OC$ будет равна длине отрезка AD. Для любой другой точки O' и точки P', полученной из неё поворотом вокруг точки C на угол 60°, сумма расстояний $O'A + O'B + O'C$ будет равна длине ломаной $AO'P'D$, которая больше длины отрезка AD.

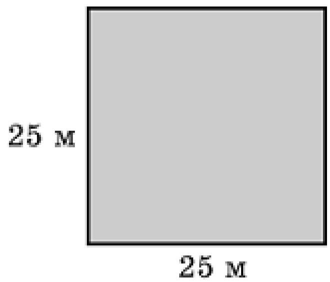


27. в).

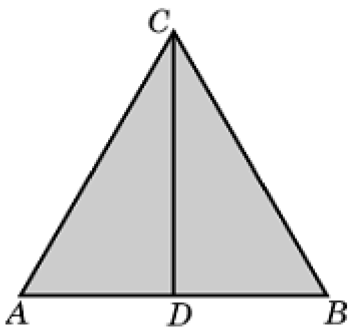
28. Наименьший периметр будет в случае, если площадка квадратная. Действительно, пусть a, b – соседние стороны прямоугольника площади S. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, равенство в котором принимается только в случае $a = b$. Из него следует, что периметр прямоугольника больше или равен $4\sqrt{S}$ и достигает этого значения в случае, если $a = b = \sqrt{S}$. В нашем случае он равен 40 м.



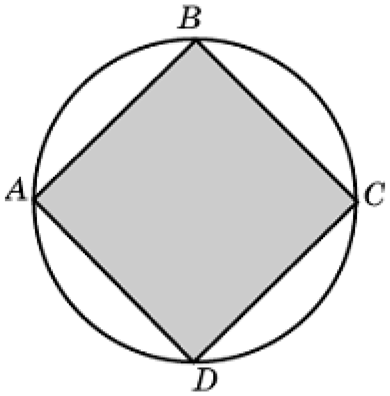
29. Наибольшая площадь будет в случае, если площадка квадратная. Действительно, пусть a, b – соседние стороны прямоугольника периметра P. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, равенство в котором принимается только в случае $a = b$. Из него следует, что площадь прямоугольника меньше или равна $P^2/16$ и достигает этого значения в случае, если $a = b = P/4$. В нашем случае она равна 625 м^2.



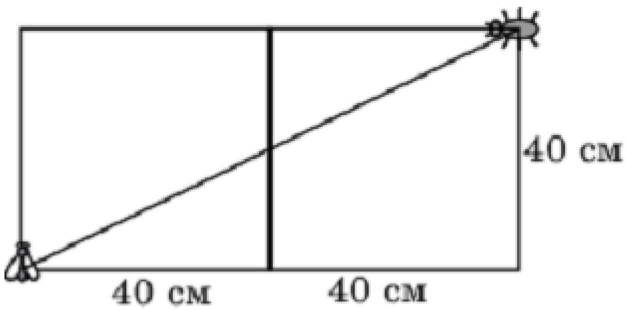
30. Наименьший периметр будет в случае равнобедренного треугольника с основанием AB= 6 см и высотой CD = 4 см. Периметр этого треугольника равен 16 см.



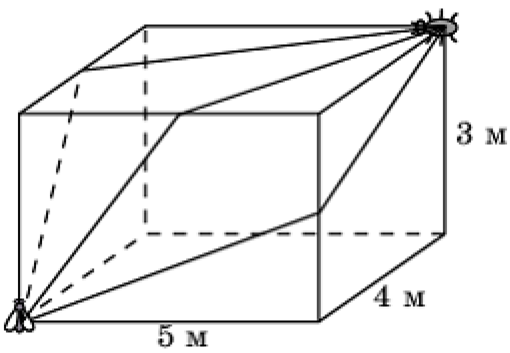
31. Наибольшая площадь будет у квадрата, вписанного в данную окружность. Она равна 32 см^2.



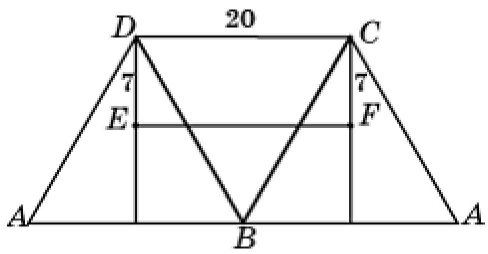
32. Рассмотрим развёртку двух соседних граней коробки. Искомым кратчайшим путём будет диагональ прямоугольника, равная $40\sqrt{5} \approx 89$ (см).



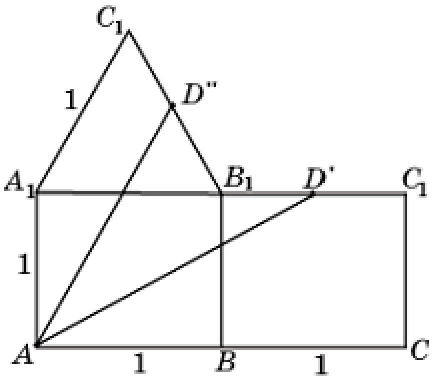
33. В данном случае имеется три пути по поверхности комнаты различной длины, проходящие через середины ребер, длины которых равны соответственно $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{10}$, $\sqrt{74}$. Наименьшая из них $\sqrt{74} \approx 8{,}6$ (м).



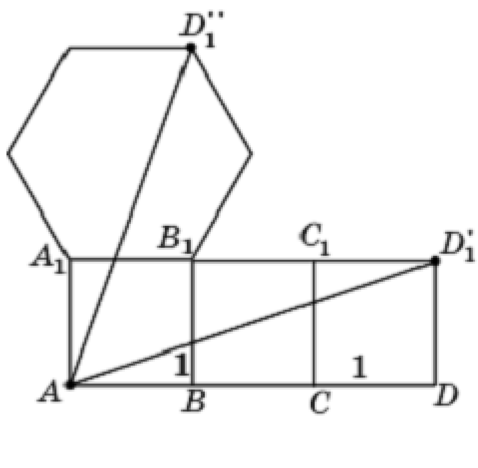
34. Одним из возможных путей является путь *EHF*. Его длина равна $20\sqrt{3} - 14$ (см). Для нахождения другого пути рассмотрим развёртку, состоящую из трех граней тетраэдра, изображенную на рисунке. Длина пути *EF* равна 20 см. Она меньше $20\sqrt{3} - 14$, следовательно, является искомой.



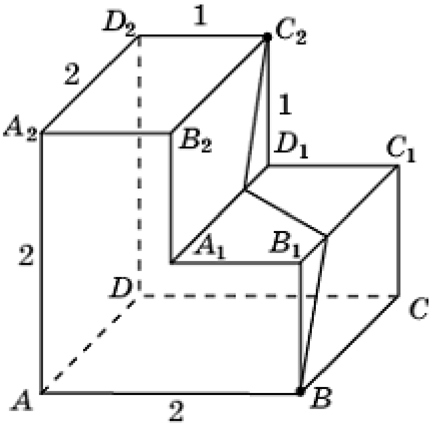
35. Имеется два пути, показанные на развёртке. $AD' = \frac{\sqrt{13}}{2}$ и $AD'' = \frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. Кратчайшим из них является путь AD''.



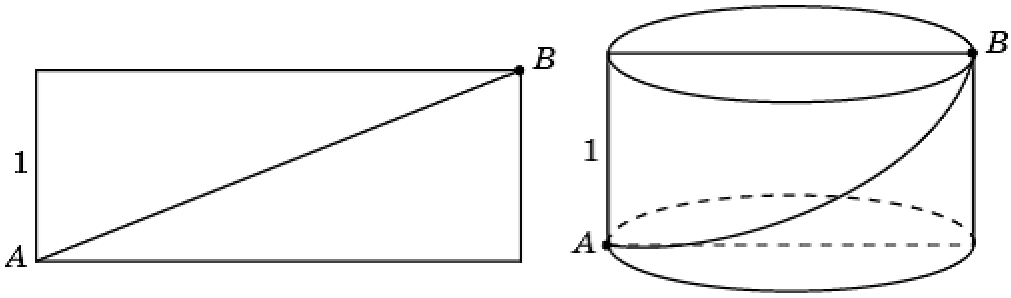
36. Имеется два пути, показанные на развёртке. $AD_1' = \sqrt{10}$ и $AD_1'' = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Кратчайшим из них является путь AD_1''.



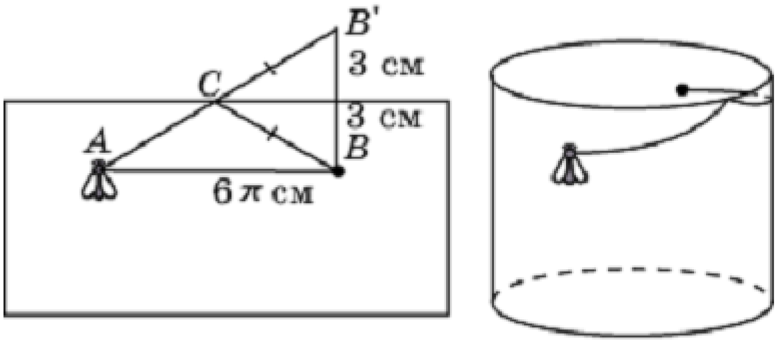
37. Кратчайший путь изображён на рисунке. Его длина равна $\sqrt{13}$.



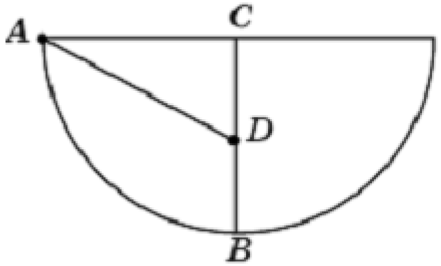
38. Длина кратчайшего пути равна $\sqrt{\pi^2+1}$.

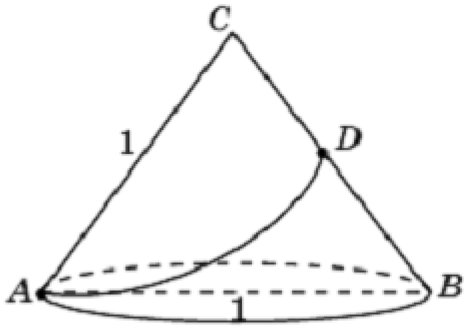


39. Длина кратчайшего пути равна $6\sqrt{\pi^2+1}$.

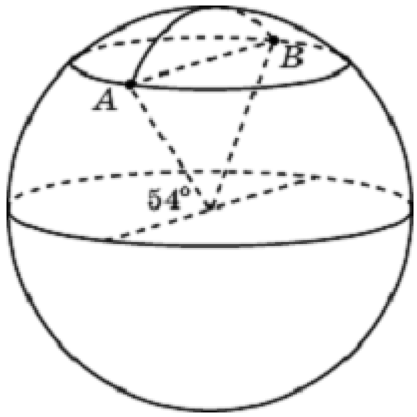


40. Длина кратчайшего пути равна $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

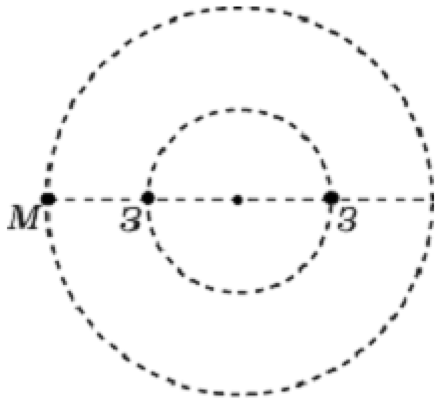




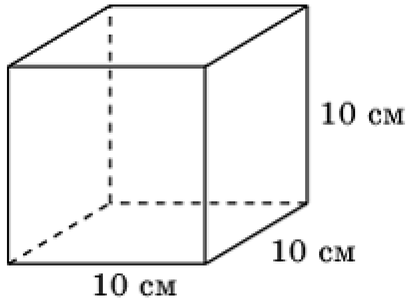
41. Кратчайший путь проходит через Северный полюс. Его длина равна 8000 км.



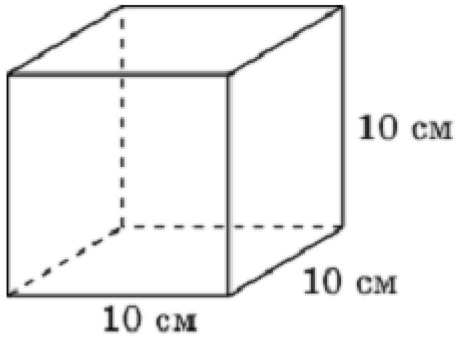
42. Наибольшее расстояние равно 378 миллионов километров, наименьшее – 78 миллионов километров.



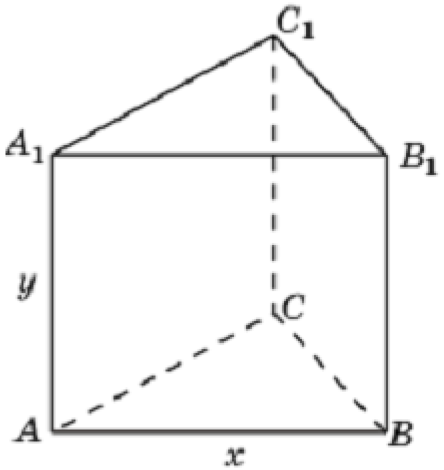
35. Наименьшая площадь поверхности будет в случае, если коробка имеет форму куба. Действительно, пусть x, y, z – рёбра прямоугольного параллелепипеда объёма V. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, равенство в котором принимается только в случае $a=b=c$. Положим $a=xy$, $b=xz$, $c=yz$. Неравенство примет вид $\frac{xy+xz+yz}{3} \geq \sqrt[3]{V^2}$ Из него следует, что площадь поверхности больше или равна $6\sqrt[3]{V^2}$ и достигает этого значения в случае, если $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. В нашем случае она равна 60 см^2.



44. Наибольший объём будет в случае, если коробка имеет форму куба. Действительно, пусть x, y, z – рёбра прямоугольного параллелепипеда, площадь поверхности которого равна S. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$, равенство в котором принимается только в случае $a=b=c$. Положим $a=xy$, $b=xz$, $c=yz$. Неравенство примет вид $\frac{xy+xz+yz}{3} \ge \sqrt[3]{V^2}$. Из него следует, что объём меньше или равен $\sqrt{(S/6)^3}$ и достигает этого значения в случае, если $x = y = z = \sqrt{S/6}$. В нашем случае объём равен 1000 см^3.



45. Пусть x – сторона основания призмы, y – её высота. Тогда площадь S поверхности призмы равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 3x \cdot y$. Объём V призмы равен $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot y$. Учитывая, что объём призмы равен 2, находим $y = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$. Подставляя это выражение для y в формулу площади поверхности, получим $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{x}$. Для нахождения наименьшего значения этой функции найдём её производную. Имеем $S' = \sqrt{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{x^2}$. Приравнивая производную к нулю, находим критическую точку $x = 2$. Так как производная в этой точке меняет знак с – на +, то в этой точке функция принимает наименьшее значение. Используя формулу $y = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$, находим $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



46. Пусть x – радиус основания цилиндра, y – его высота. Тогда площадь S поверхности цилиндра равна $2\pi x^2 + 2\pi xy$. Объём V цилиндра равен $\pi x^2 y$. Учитывая, что объём цилиндра равен 2π, находим $y = \frac{2}{x^2}$. Подставляя это выражение для y в формулу площади поверхности, получим $S = 2\pi x^2 + \frac{4\pi}{x}$. Для нахождения наименьшего значения этой функции найдём её производную. Имеем $S' = 4\pi x - \frac{4\pi}{x^2}$. Приравнивая производную к нулю, находим критическую точку $x = 1$. Так как производная в этой точке меняет знак с – на +, то в этой точке функция принимает наименьшее значение. Используя формулу $y = \frac{2}{x^2}$, находим y = 2.

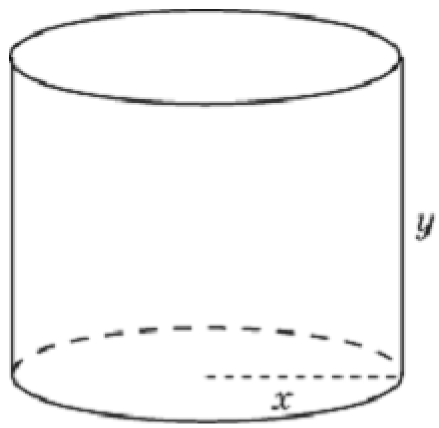


Таблица приближенных значений тригонометрических функций

A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$	A	$\sin A$	$\operatorname{tg} A$
30'	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ОГЛАВЛЕНИЕ