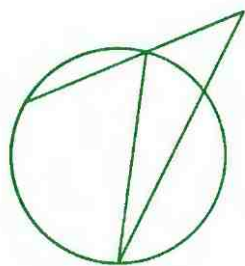
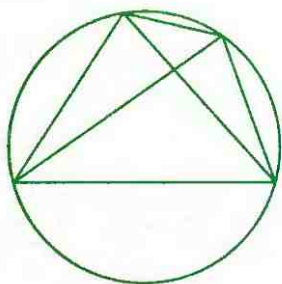
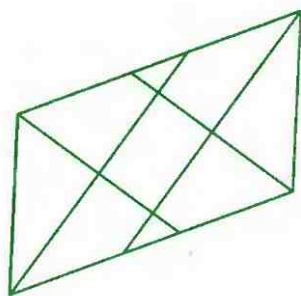
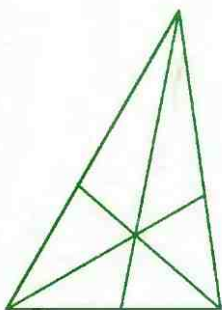


Смирнов В. А.

ГЕОМЕТРИЯ



Планиметрия

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ. ГЕОМЕТРИЯ

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия

Пособие для подготовки к ЕГЭ

Под редакцией А. Л. Семёнова, И. В. Ященко

Москва
Издательство МЦНМО
2009

Смирнов В. А.

С50 Геометрия. Планиметрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А. Л. Семёнова, И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2009. — 256 с. — (Готовимся к ЕГЭ).

ISBN 978-5-94057-552-8

Пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать задачи по геометрии и подготовиться к ЕГЭ по математике. Оно содержит более семисот задач, решение которых способствует выработке вычислительных навыков, развивает пространственные представления учащихся. Все задачи сопровождаются рисунками. В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал. В конце даны ответы ко всем задачам.

ББК 22.151.0

Оглавление

Введение	4
1. Углы треугольника	6
2. Тригонометрические функции углов	20
3. Решение треугольников	44
4. Четырехугольники	72
5. Углы, вписанные в окружность	95
6. Многоугольники и окружность	115
7. Поворот, центральная и осевая симметрии	143
8. Площадь	180
9. Координаты и векторы	213
Ответы	252

Введение

С 2010 года в структуру ЕГЭ по математике внесены некоторые изменения. Исключены задачи с выбором ответа. Сокращено общее количество задач. Все задачи разбиты на две группы: В (базовые задачи) и С (задачи повышенного уровня трудности). Группа В содержит 12 задач (из них 4 геометрические), в которых требуется указать ответ, являющийся целым числом или конечной десятичной дробью. Группа С содержит 6 задач (из них 2 геометрические), в которых требуется дать развернутое решение и ответ может записываться в произвольной форме.

Данное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике в части геометрии. Его целями являются:

- показ примерной тематики и уровня трудности геометрических задач, включенных в содержание ЕГЭ;
- проверка качества знаний и умений учащихся по геометрии, их готовности к сдаче ЕГЭ;
- развитие представлений учащихся об основных геометрических фигурах и их свойствах, формирование навыков работы с рисунком;
- повышение вычислительной культуры учащихся, подготовка их к решению геометрических задач с числовым ответом.

Пособие содержит более семисот задач, разбитых на три уровня: А, В и С. Задачи уровня А, как правило, одношаговые, на непосредственное применение соответствующих теорем, свойств или формул. Они носят подготовительный характер и направлены на повторение геометрического материала, необходимого для решения более трудных задач.

Для решения задач уровня В требуются дополнительные построения или составление несложных уравнений с искомыми величинами. В этих задачах, так же как и в задачах уровня А, предполагается ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Отметим, что в учебниках геометрии таких задач не так много и данное пособие восполняет этот пробел. Предлагаемые задачи группы В развивают геометрические представления, лежат в основе решения многих других задач, позволяют сформировать и отработать необходимые навыки решения задач с числовым ответом. От того, насколько хоро-

шо будут выработаны умения решать эти задачи, во многом зависит успешность решения и других более трудных геометрических задач.

Задачи уровней А и В соответствуют геометрическим задачам части В ЕГЭ по математике.

Задачи уровня С данного пособия — это задачи повышенной трудности, решение которых включает в себя дополнительные построения, составление и решение уравнений с неизвестными величинами. Они служат подготовке учащихся к решению геометрических задач части С ЕГЭ по математике. Ответ в этих задачах может иметь произвольную форму.

Предлагаемые в пособии задачи сопровождаются рисунками, помогающими лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления.

В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал. В конце даны ответы ко всем задачам. В ответах к задачам уровней А и В нахождение величин углов в градусах, так же как это делается в ЕГЭ, мы указываем только численные значения без знака градусов.

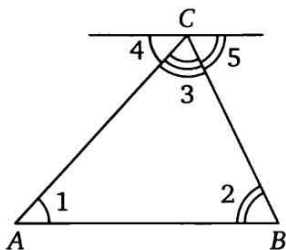
Отметим, что лучшим способом подготовки к ЕГЭ по геометрии являются систематические занятия по учебнику геометрии. Данное пособие не заменяет учебника. Оно может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии в 7—9 классах, а также при организации обобщающего повторения в 10—11 классах или при самостоятельных занятиях по геометрии.

1. Углы треугольника

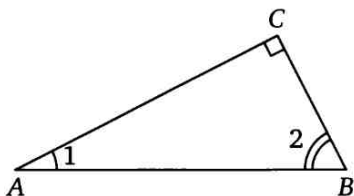
Для решения задач этого параграфа требуются представления о различных видах треугольников и их элементах, знание теоремы о сумме углов треугольника и следствий из нее, о сумме острых углов прямоугольного треугольника и о внешнем угле треугольника, умения применять их для нахождения углов, связанных с треугольником.

Общие сведения

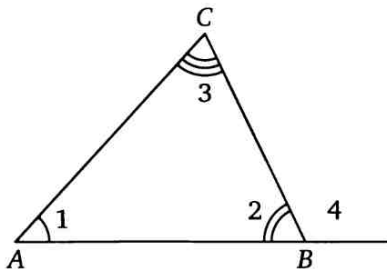
Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°



Следствие 1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°

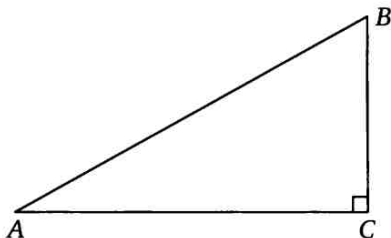


Следствие 2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

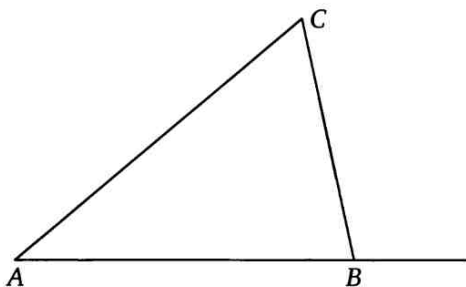


Задачи**Уровень А**

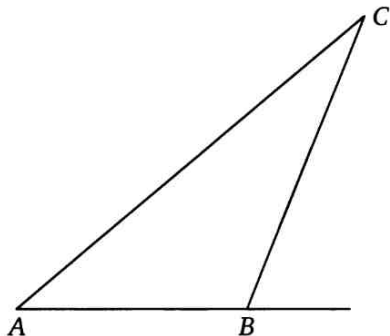
1. Один острый угол прямоугольного треугольника на 32° больше другого. Найдите больший острый угол.



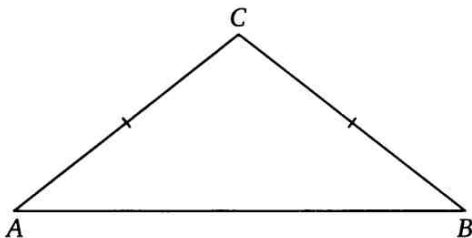
2. В треугольнике ABC угол A равен 40° , внешний угол при вершине B равен 102° . Найдите угол C .



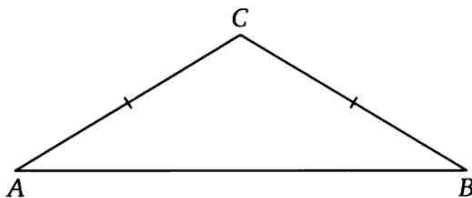
3. В треугольнике ABC угол A равен 40° . Внешний угол при вершине B равен 68° . Найдите угол C .



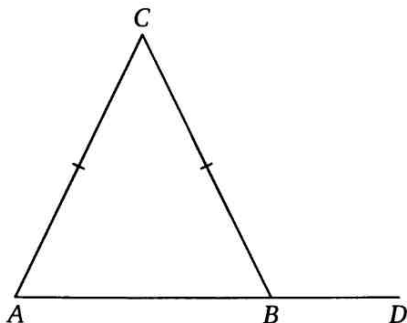
4. В треугольнике ABC угол A равен 38° , $AC = BC$. Найдите угол C .



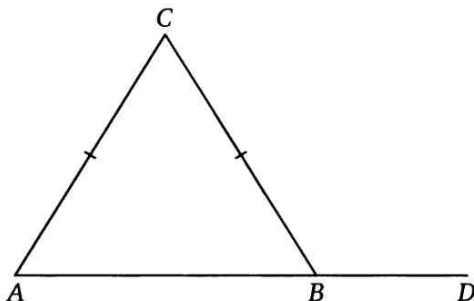
5. В треугольнике ABC угол C равен 118° , $AC = BC$. Найдите угол A .



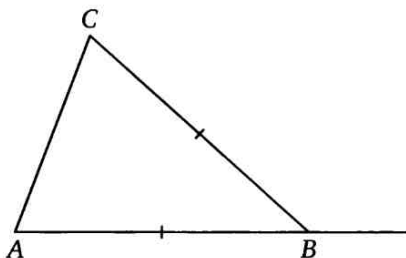
6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 52° . Найдите внешний угол CBD .



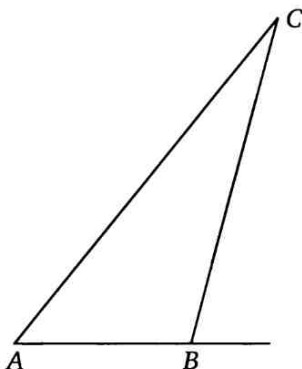
7. В треугольнике ABC $AC = BC$. Внешний угол при вершине B равен 122° . Найдите угол C .



8. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 138° . Найдите угол C .



9. Один из внешних углов треугольника равен 85° . Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2 : 3. Найдите наибольший из них.



10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 98° . Найдите один из других его углов.

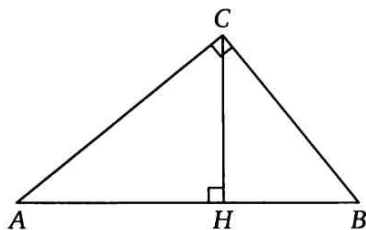
11. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 40° . Найдите этот третий угол.

12. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите меньший из них.

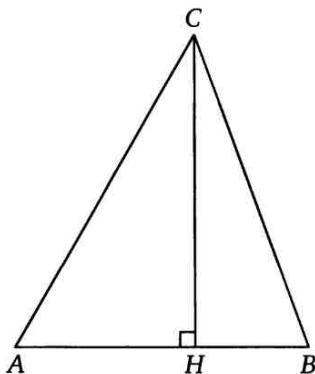
13. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол.

14. Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол.

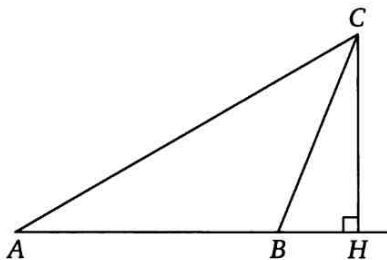
15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 34° . Найдите угол BCH .



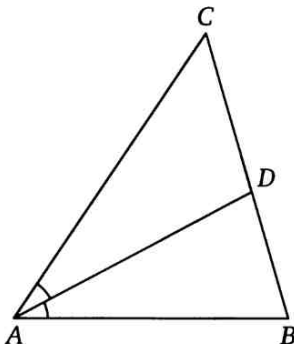
16. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 70° , CH — высота. Найдите разность углов ACH и BCH .



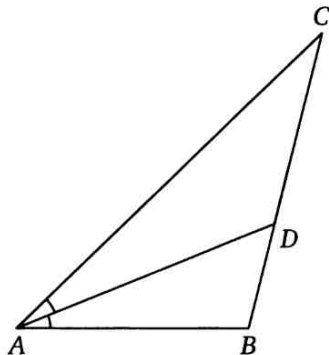
17. В треугольнике ABC угол A равен 30° , CH — высота, угол BCH равен 22° . Найдите угол ACB .



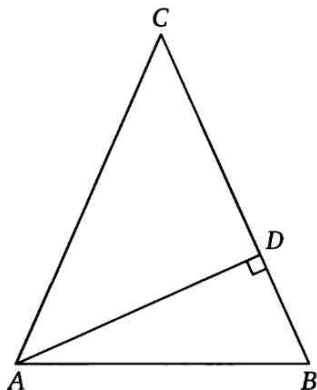
18. В треугольнике ABC угол C равен 50° , AD — биссектриса, угол CAD равен 28° . Найдите угол B .



19. В треугольнике ABC угол C равен 30° , AD — биссектриса, угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB .

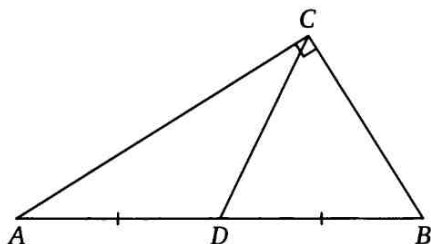


20. В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 24° . Найдите угол C .

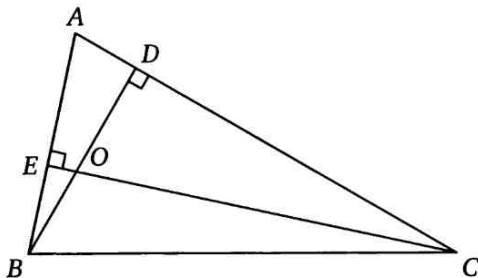


Уровень В

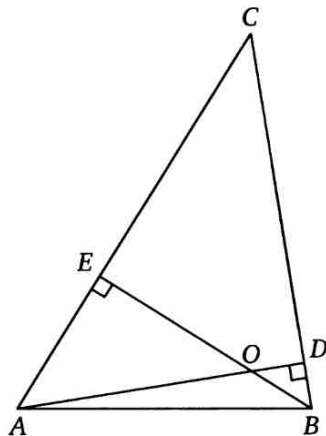
1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CD — медиана, угол B равен 58° . Найдите угол ACD .



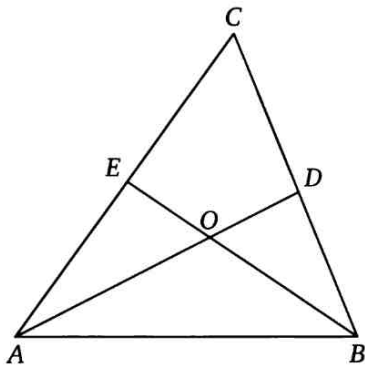
2. В треугольнике ABC угол A равен 72° , BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE .



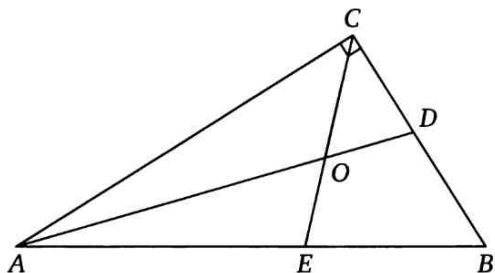
3. Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов.



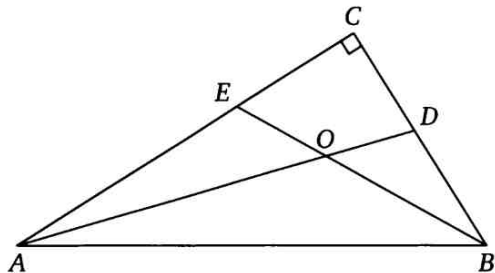
4. В треугольнике ABC угол C равен 58° , AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOB .



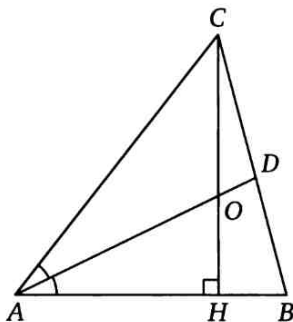
5. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.



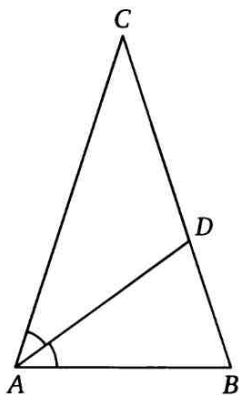
6. Найдите угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.



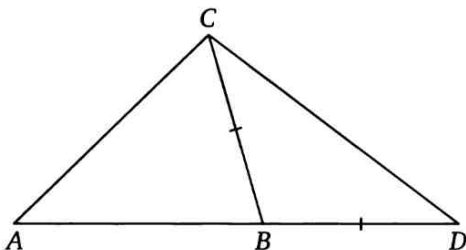
7. В треугольнике ABC CH — высота, O — точка пересечения AD и CH , AD — биссектриса, угол BAD равен 26° . Найдите угол AOC .



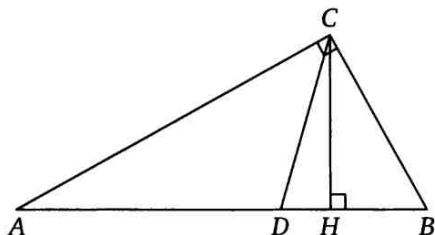
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC .



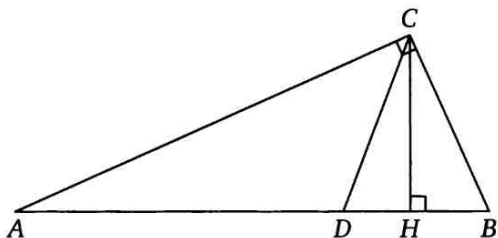
9. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол D треугольника BDC .



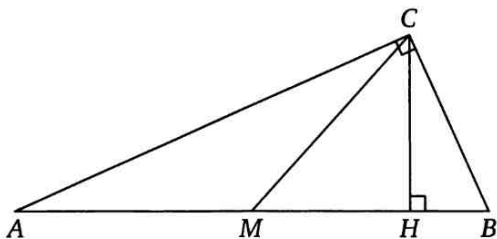
10. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° и 61° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла.



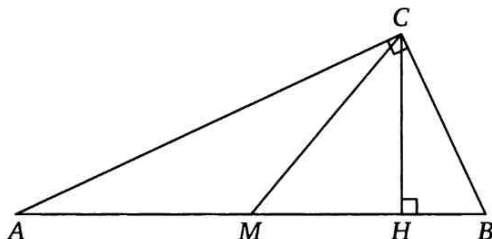
11. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 21° . Найдите меньший угол данного треугольника.



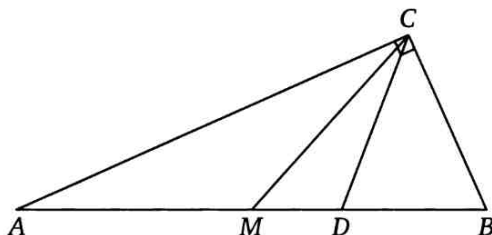
12. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.



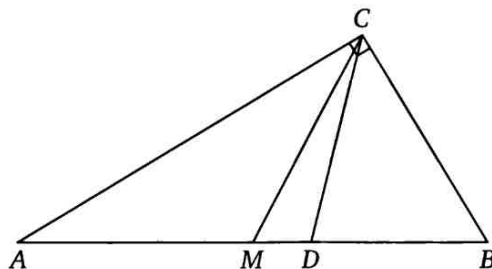
13. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен 40° . Найдите больший из острых углов этого треугольника.



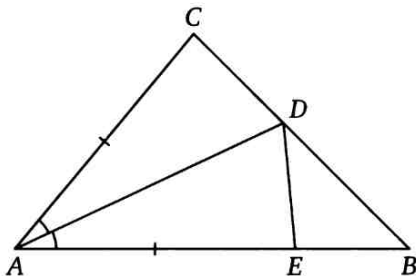
14. Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.



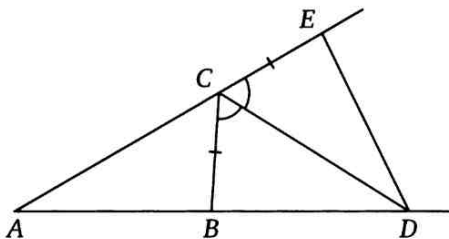
15. Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол этого треугольника.



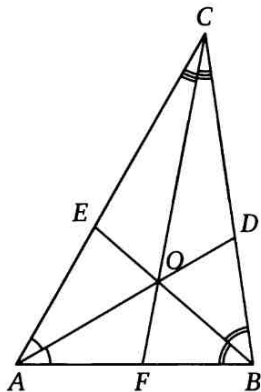
16. В треугольнике ABC угол B равен 45° , угол C равен 85° , AD — биссектриса, $AE = AC$. Найдите угол BDE .



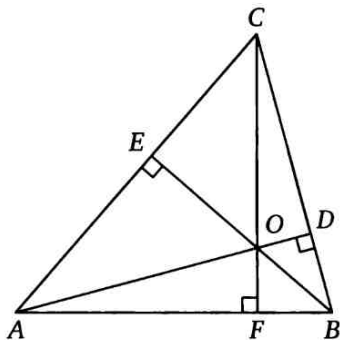
17. В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° , CD — биссектриса внешнего угла, $CE = CB$. Найдите угол BDE .



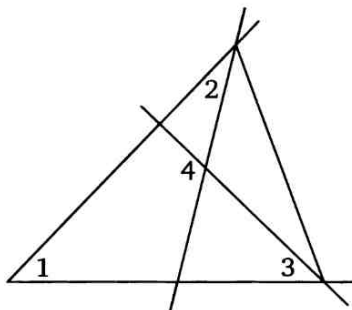
18. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF .



19. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF .



20. На рисунке угол 1 равен 46° , угол 2 равен 30° , угол 3 равен 44° . Найдите угол 4.



2. Тригонометрические функции углов

Для решения задач этого параграфа нужно знать определения тригонометрических функций углов треугольника, тригонометрические тождества и значения тригонометрических функций некоторых острых и тупых углов.

Общие сведения

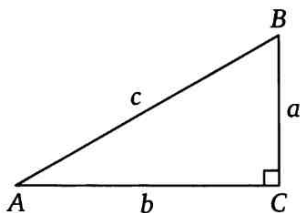
Определение 1. Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе. Синус угла A обозначается $\sin A$.

Определение 2. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе. Косинус угла A обозначается $\cos A$.

Определение 3. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему. Тангенс угла A обозначается $\operatorname{tg} A$.

Определение 4. Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему. Котангенс угла A обозначается $\operatorname{ctg} A$.

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$



В случае если $90^\circ \leq \angle A < 180^\circ$, тригонометрические функции определяется следующим образом:

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \text{и} \quad \sin A = \sin(180^\circ - A), \quad \text{если } 90^\circ < \angle A < 180^\circ;$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \text{и} \quad \cos A = -\cos(180^\circ - A), \quad \text{если } 90^\circ < \angle A < 180^\circ;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \text{если } \angle A \neq 90^\circ; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

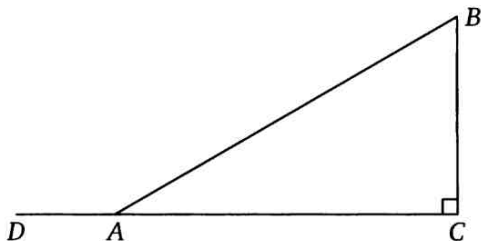
Синус и косинус угла A связаны между собой основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

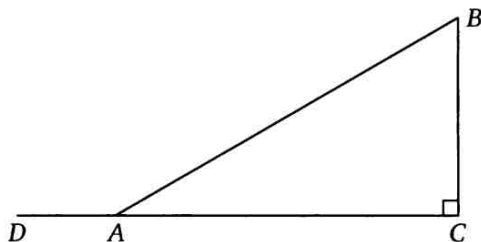
Задачи

Уровень А

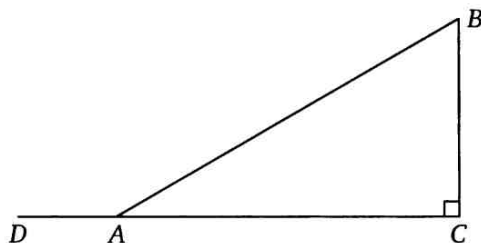
1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° . Найдите синус угла BAD .



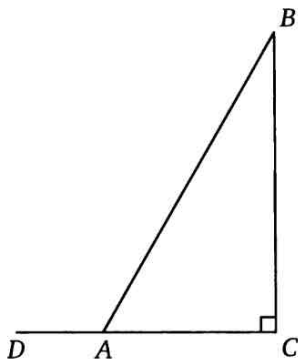
2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° . Найдите косинус угла BAD . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\sqrt{3}$.



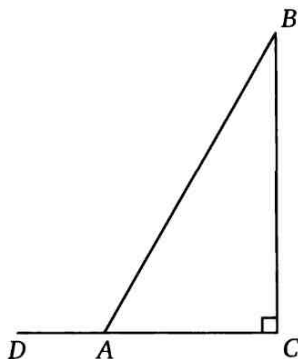
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° . Найдите тангенс угла BAD . В ответе укажите значение тангенса, умноженное на $\sqrt{3}$.



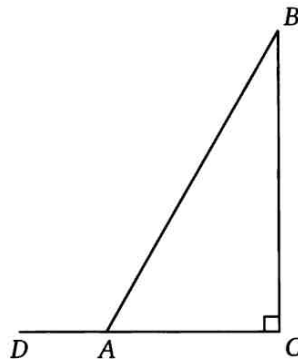
4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° . Найдите синус угла BAD . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{3}$.



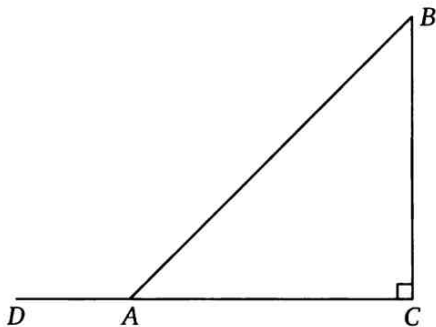
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° . Найдите косинус угла BAD .



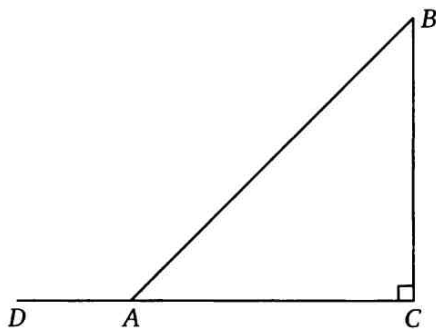
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° . Найдите тангенс угла BAD . В ответе укажите значение тангенса, умноженное на $\sqrt{3}$.



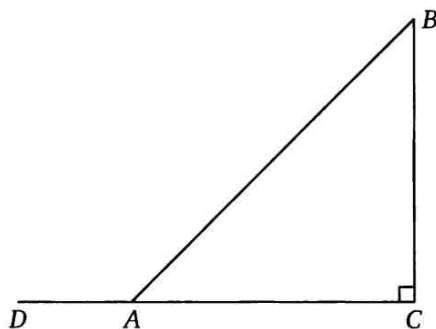
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° . Найдите синус угла BAD . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{2}$.



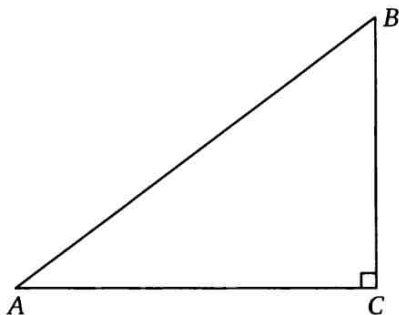
8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° . Найдите косинус угла BAD . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\sqrt{2}$.



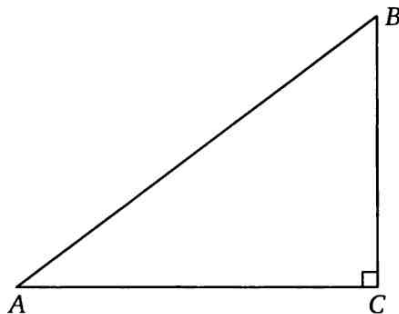
9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° . Найдите тангенс угла BAD .



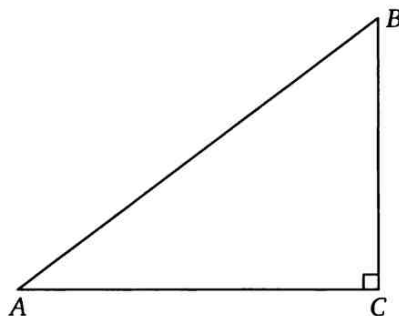
10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите $\sin A$.



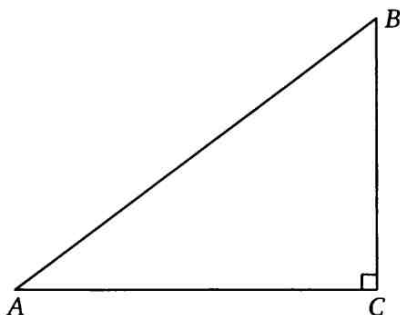
11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите $\cos A$.



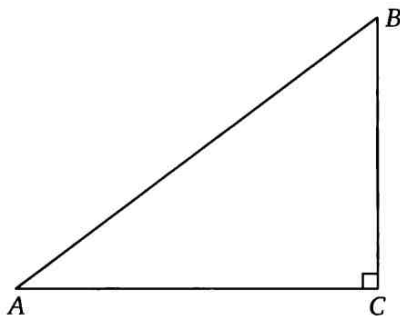
12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



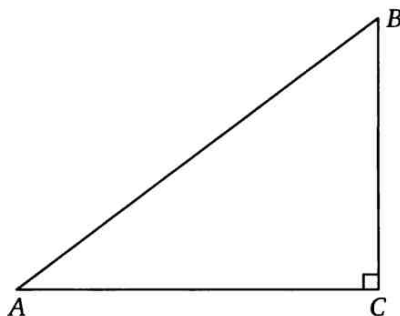
13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



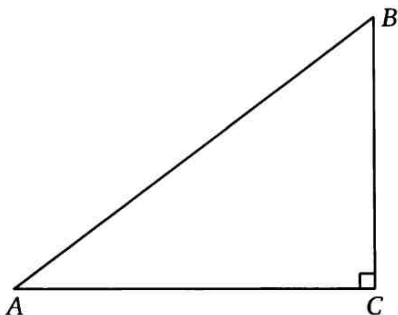
14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\cos A$.



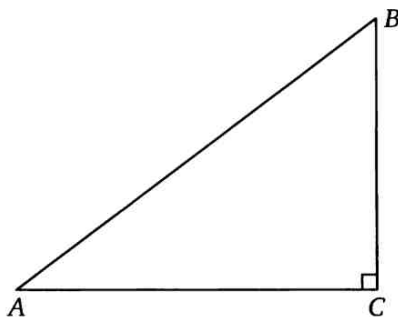
15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\sin A$.



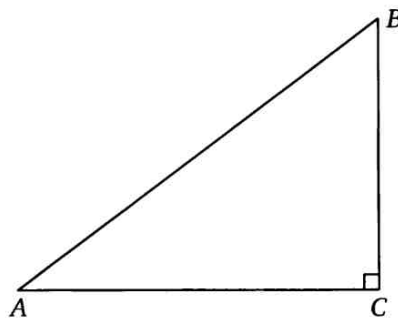
16. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



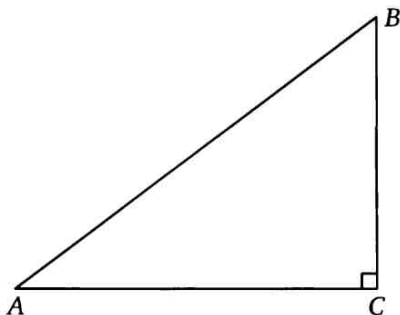
17. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



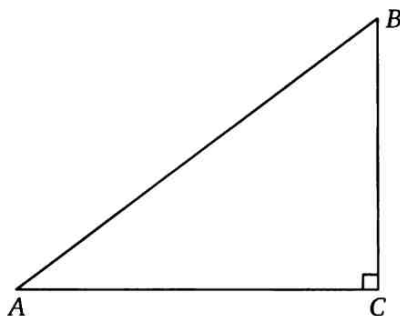
18. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите $\sin A$.



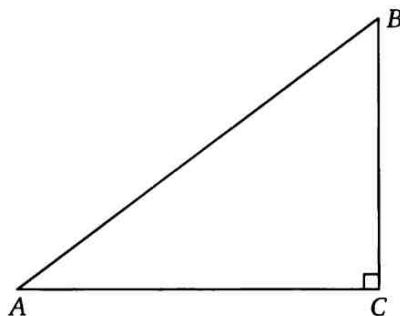
19. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите $\cos A$.



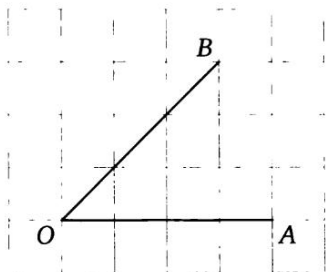
20. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$. Найдите $\cos B$.



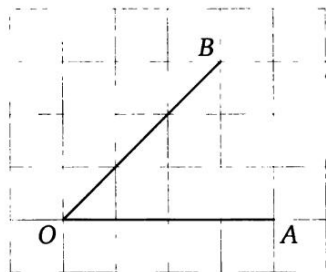
21. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$. Найдите $\sin B$.



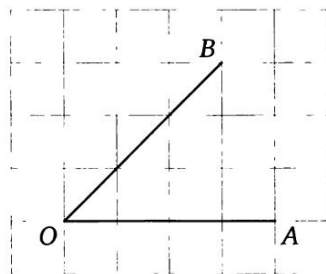
22. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



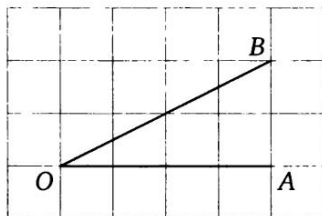
23. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



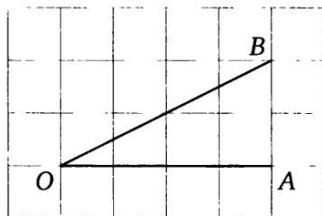
24. Найдите тангенс угла AOB .



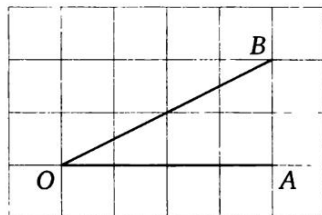
25. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



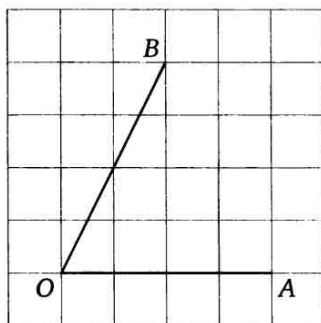
26. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



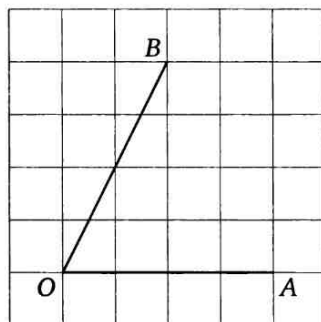
27. Найдите тангенс угла AOB .



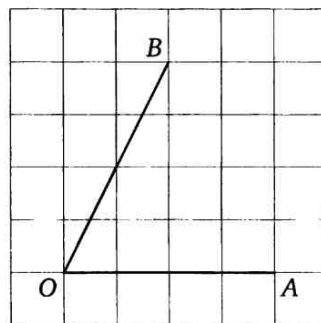
28. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



29. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.

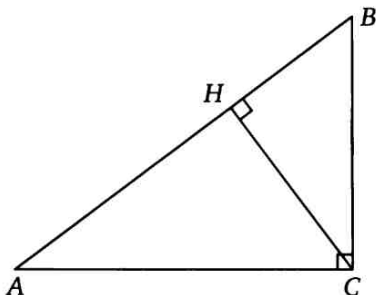


30. Найдите тангенс угла AOB .

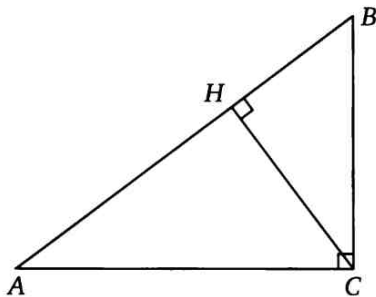


Уровень В

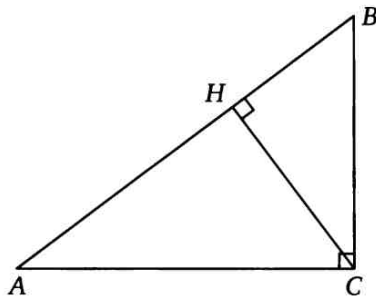
1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AC = 10$, $AH = 8$. Найдите $\cos B$.



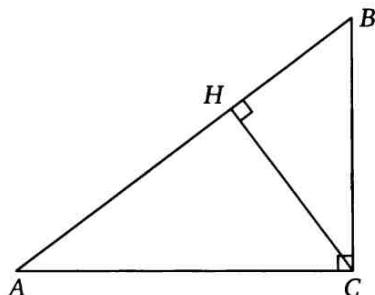
2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 10$, $BH = 6$. Найдите $\cos A$.



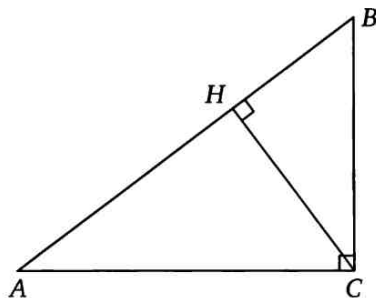
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите $\sin B$.



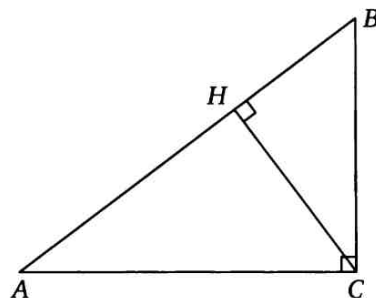
4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 5$, высота CH равна 4. Найдите $\sin A$.



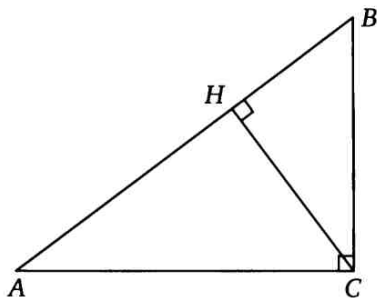
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AC = 10$, $AH = 8$. Найдите $\sin B$.



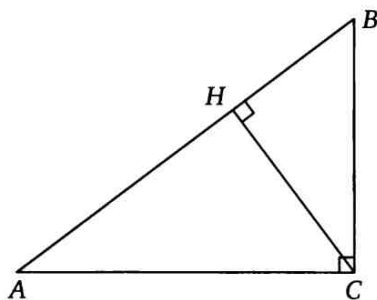
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 10$, $BH = 6$. Найдите $\sin A$.



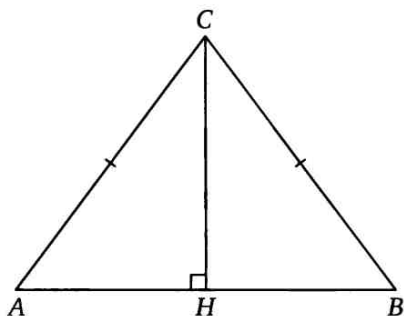
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите $\cos B$.



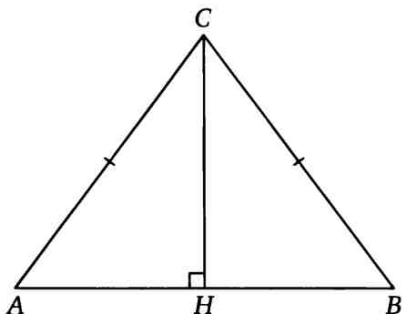
8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 10$, высота CH равна 8. Найдите $\cos A$.



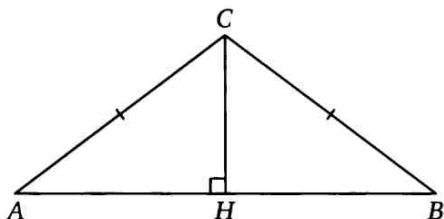
9. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите $\sin A$.



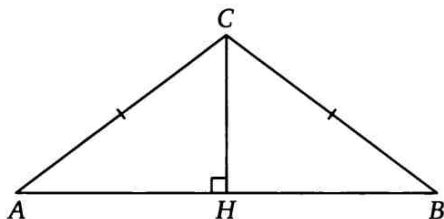
10. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите $\cos A$.



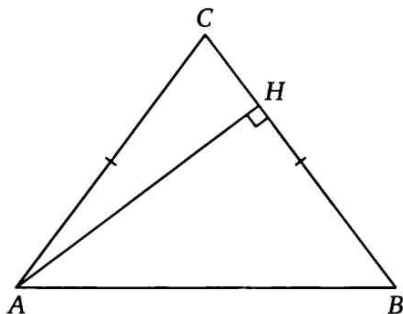
11. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



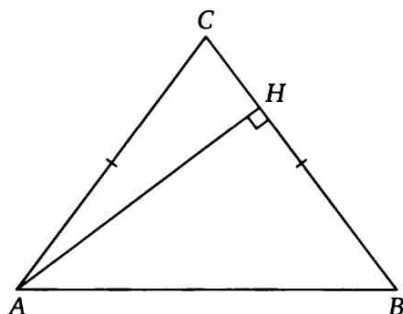
12. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 16$, высота CH равна 6. Найдите $\operatorname{tg} A$.



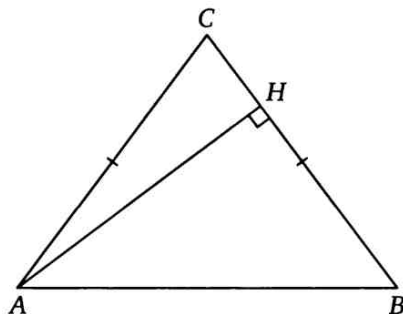
13. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 8. Найдите $\sin A$.



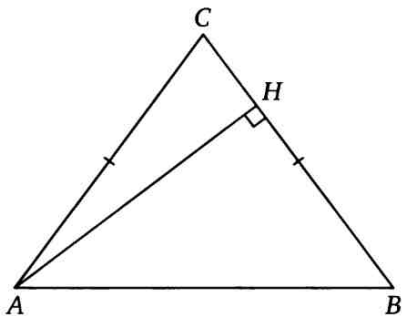
14. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота AH равна 8. Найдите $\cos A$.



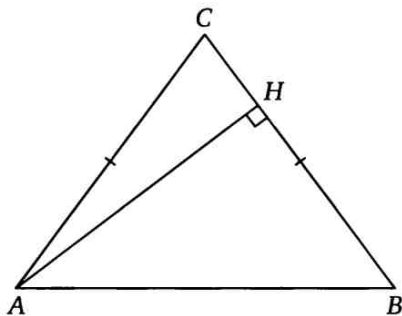
15. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, AH — высота, $BH = 6$. Найдите $\cos A$.



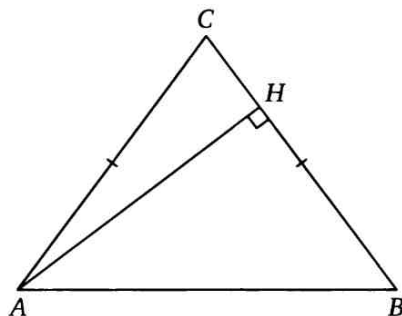
16. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $\sin A = 0,8$. Найдите косинус угла BAH .



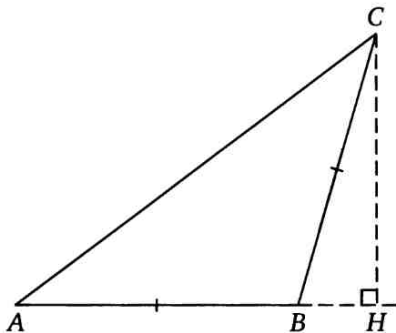
17. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, AH — высота, $BH = 6$. Найдите $\sin A$.



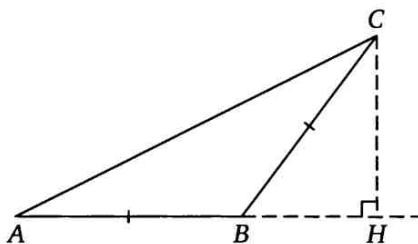
18. В треугольнике ABC $AC = BC$, AH — высота, $\sin A = 0,8$. Найдите синус угла BAH .



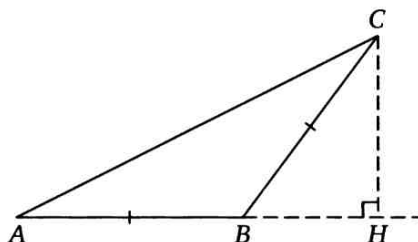
19. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, CH — высота, $AH = 4$. Найдите синус угла ACB .



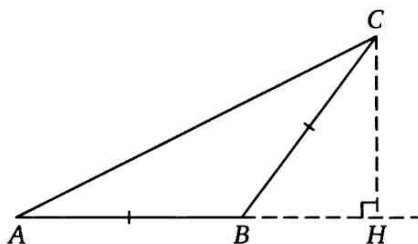
20. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 10$, высота CH равна 8. Найдите косинус угла ABC .



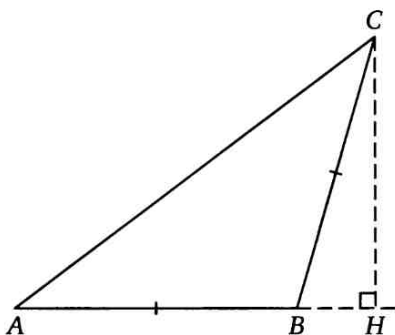
21. В треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 10$, $BH = 6$. Найдите синус угла ABC .



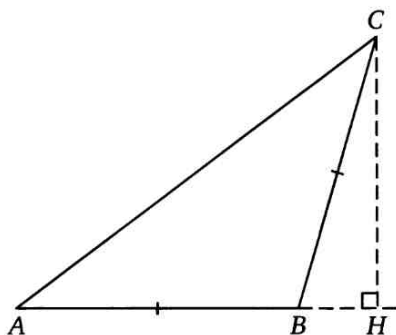
22. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, высота CH равна 8. Найдите синус угла ACB .



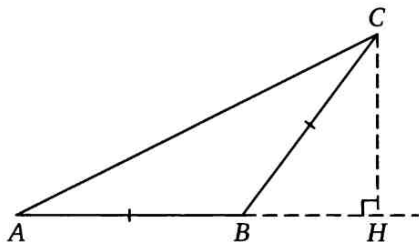
23. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, высота CH равна 6. Найдите косинус угла ACB .



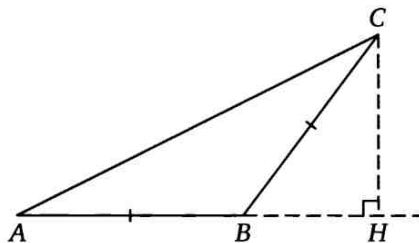
24. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, CH — высота, $AH = 4$. Найдите косинус угла ACB .



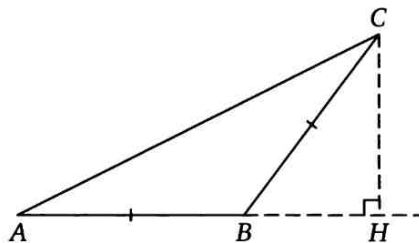
25. В треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 8, $AH = 16$. Найдите тангенс угла ACB .



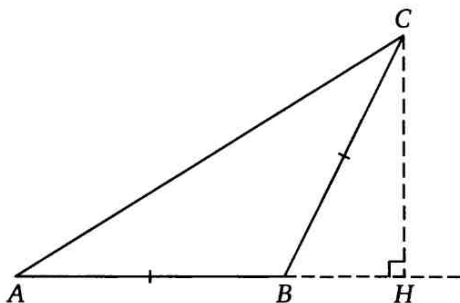
26. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 10$, высота CH равна 8. Найдите синус угла ABC .



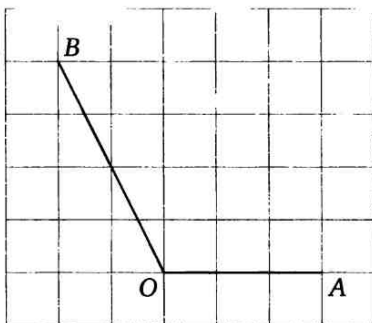
27. В треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 10$, $BH = 6$. Найдите косинус угла ABC .



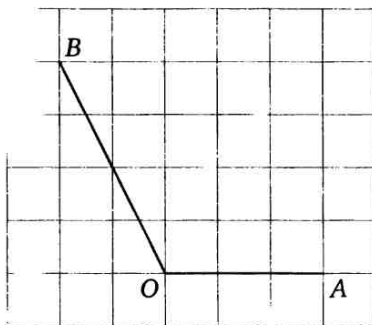
28. В треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 8, $BH = 4$. Найдите тангенс угла ABC .



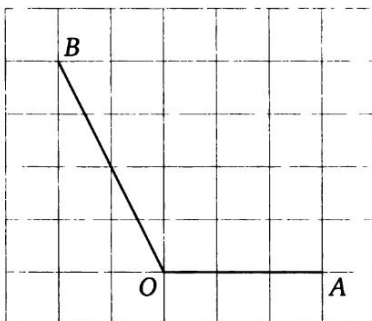
29. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



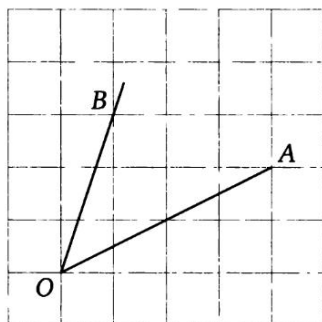
30. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



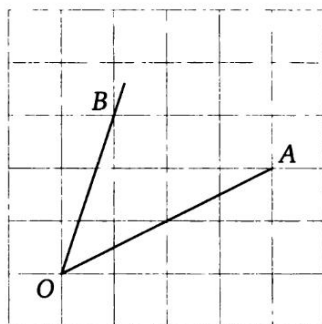
31. Найдите тангенс угла AOB .



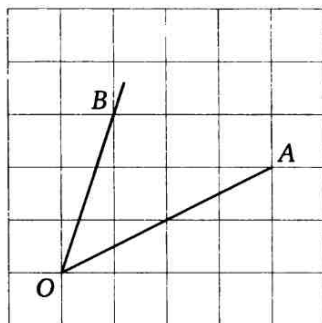
32. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



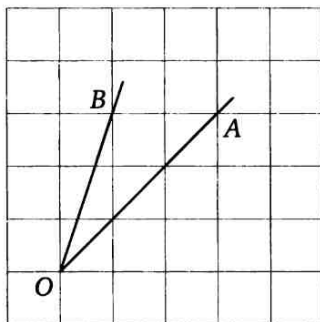
33. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



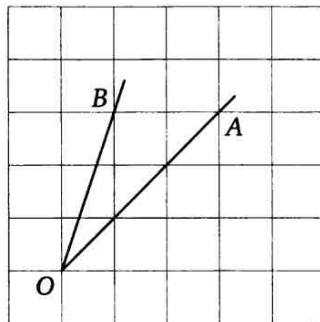
34. Найдите тангенс угла AOB .



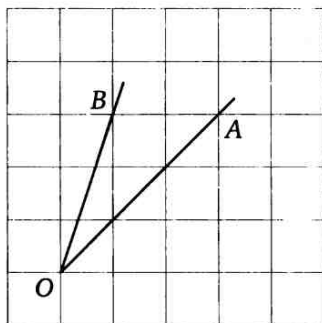
35. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{5}$.



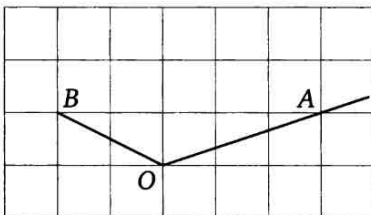
36. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



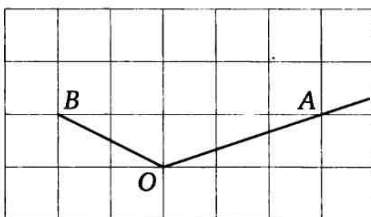
37. Найдите тангенс угла AOB .



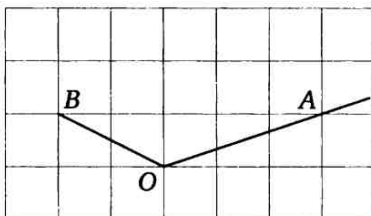
38. Найдите синус угла AOB . В ответе укажите значение синуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



39. Найдите косинус угла AOB . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $2\sqrt{2}$.



40. Найдите тангенс угла AOB .

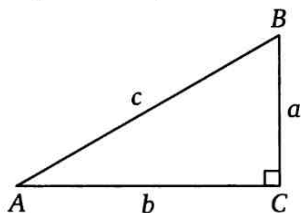


3. Решение треугольников

В этом параграфе предлагаются задачи на нахождение элементов треугольника с использованием тригонометрических функций, теоремы Пифагора, а также косинусов и синусов.

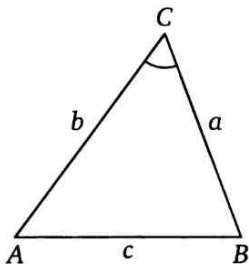
Общие сведения

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



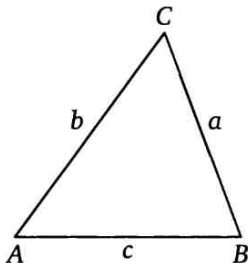
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

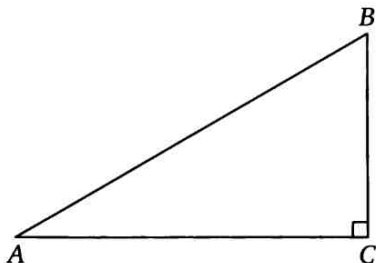


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

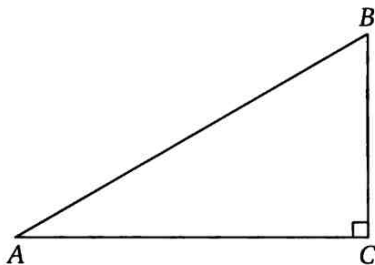
Задачи

Уровень А

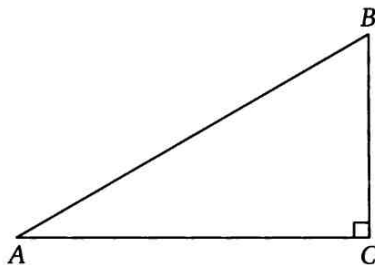
1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 4$.
Найдите BC .



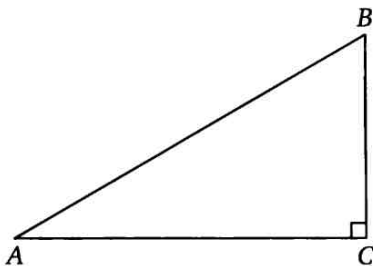
2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $BC = 3$.
Найдите AB .



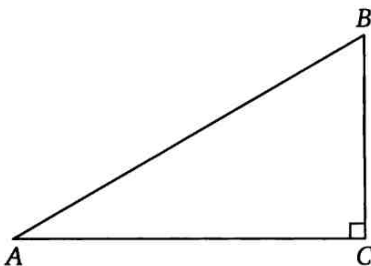
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 2\sqrt{3}$.
Найдите AC .



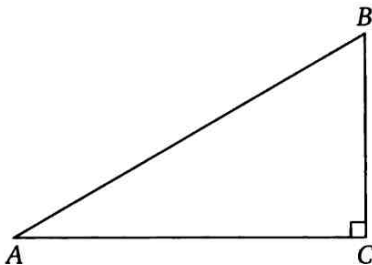
4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC=2\sqrt{3}$.
Найдите AB .



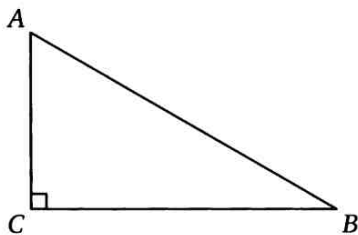
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC=2\sqrt{3}$.
Найдите BC .



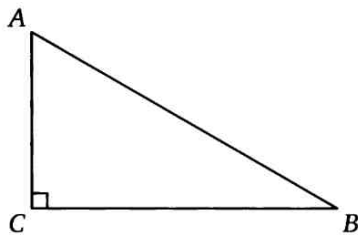
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $BC=2\sqrt{3}$.
Найдите AC .



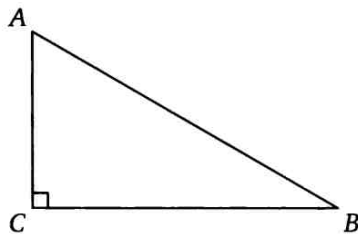
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB=2\sqrt{3}$.
Найдите BC .



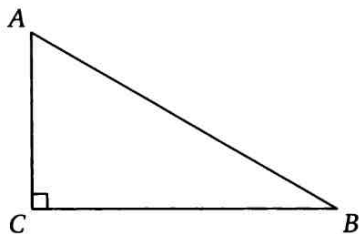
8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $BC=2\sqrt{3}$.
Найдите AB .



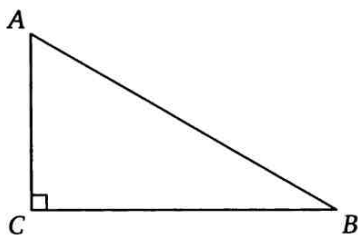
9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB=2$.
Найдите AC .



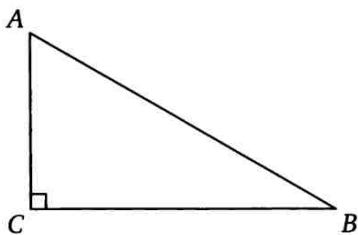
10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AC = 2$.
Найдите AB .



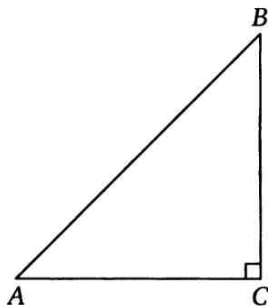
11. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AC = 2\sqrt{3}$.
Найдите BC .



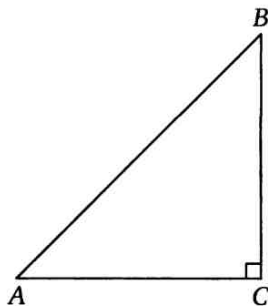
12. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $BC = 2\sqrt{3}$.
Найдите AC .



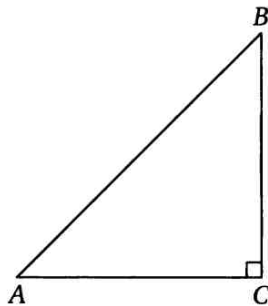
13. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AB = 2\sqrt{2}$. Найдите BC .



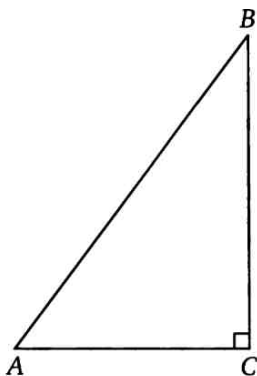
14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AC = 2\sqrt{2}$. Найдите AB .



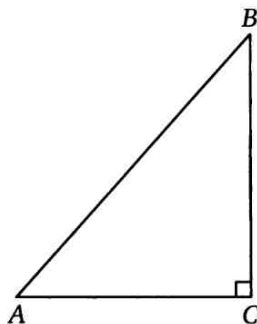
15. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AC = 3$. Найдите BC .



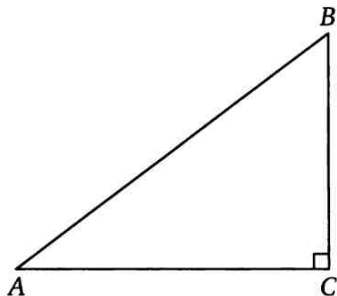
16. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\sin A = 0,8$. Найдите AB .



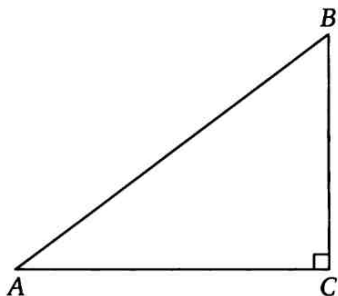
17. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{2}{3}$, $AC = 8$. Найдите AB .



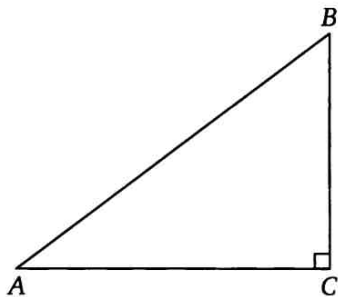
18. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$, $BC = 9$. Найдите AC .



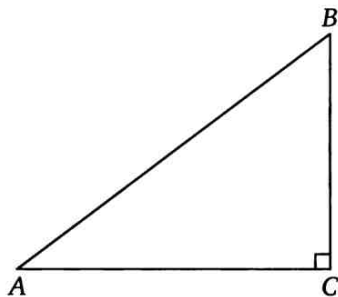
19. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,6$, $AC = 4$. Найдите AB .



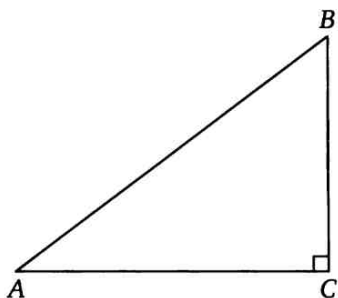
20. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = 0,8$, $BC = 3$. Найдите AB .



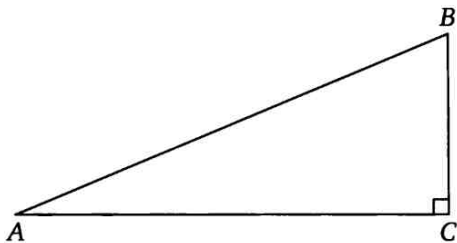
21. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,75$, $AC = 8$. Найдите AB .



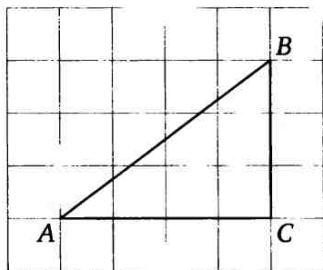
22. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите гипотенузу.



23. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26. Один из его катетов равен 10. Найдите другой катет.

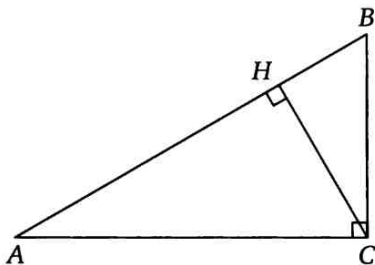


24. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если стороны квадратных клеток равны 1.

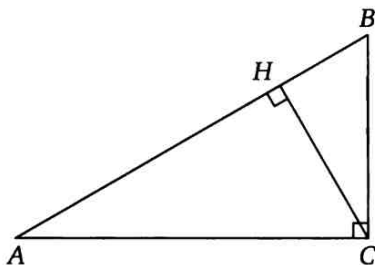


Уровень В

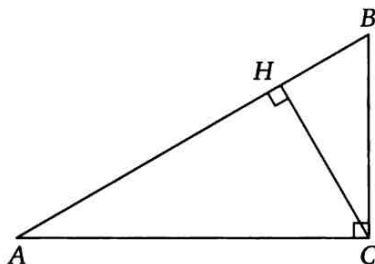
1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



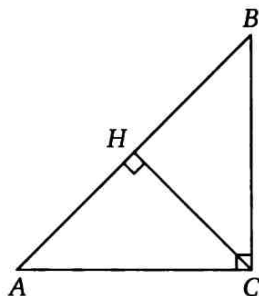
2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 2$. Найдите AH .



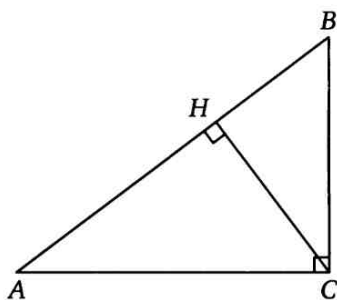
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 30° , $AB = 4$. Найдите BH .



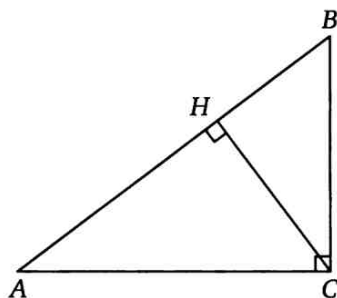
4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 45° , $AB = 2$. Найдите высоту CH .



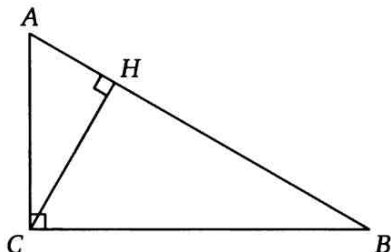
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 25$, $\cos A = 0,8$. Найдите AH .



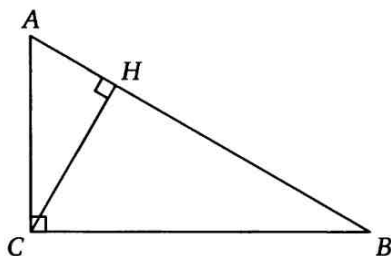
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = 0,6$. Найдите BH .



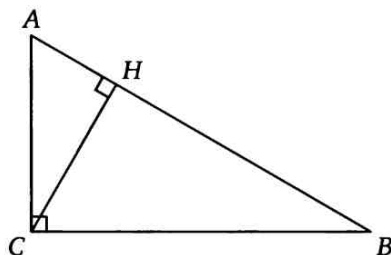
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 60° , $AB=2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



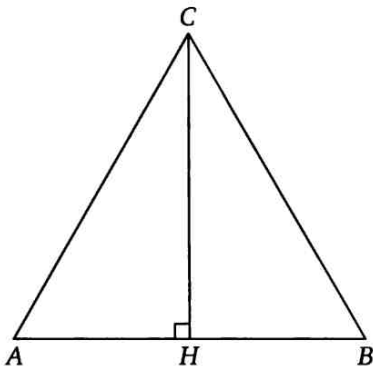
8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 60° , $AB=4$. Найдите AH .



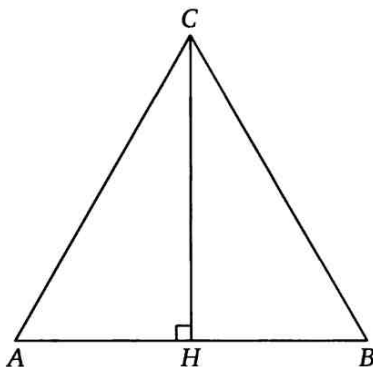
9. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, угол A равен 60° , $AB=12$. Найдите BH .



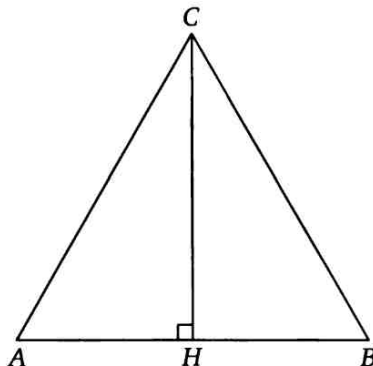
10. В треугольнике ABC $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH .



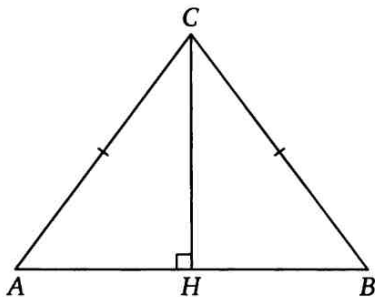
11. В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите стороны этого треугольника.



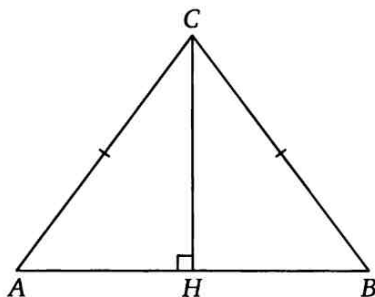
12. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, высота CH равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол C .



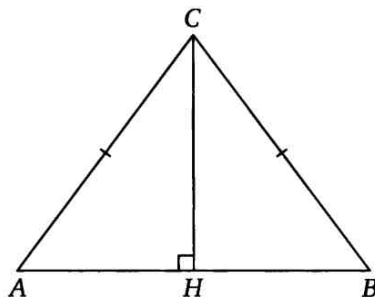
13. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0,6$. Найдите AB .



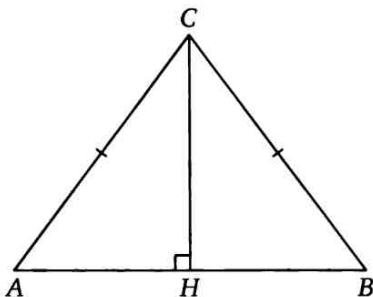
14. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos A = 0,6$. Найдите AC .



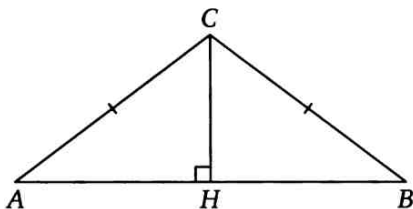
15. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\sin A = 0,8$. Найдите AB .



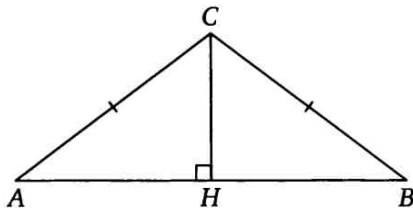
16. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\sin A = 0,8$. Найдите AC .



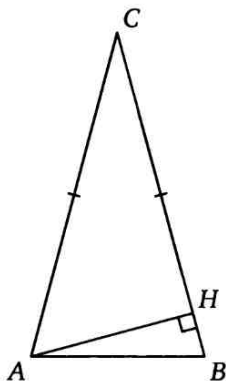
17. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\sin A = 0,6$. Найдите высоту CH .



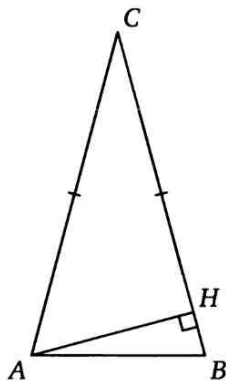
18. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите высоту CH .



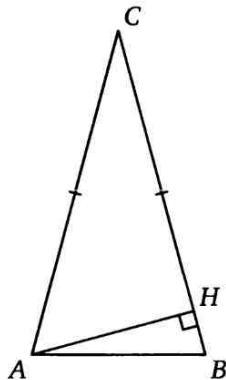
19. В треугольнике ABC $AC = BC = 4$, угол C равен 30° . Найдите высоту AH .



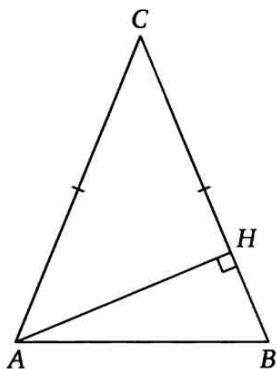
20. В треугольнике ABC $AC = BC = 6$, высота AH равна 3. Найдите угол C .



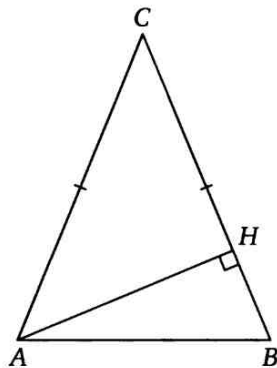
21. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 4, угол C равен 30° . Найдите AC .



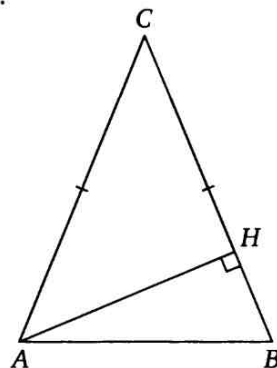
22. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен 45° . Найдите высоту AH .



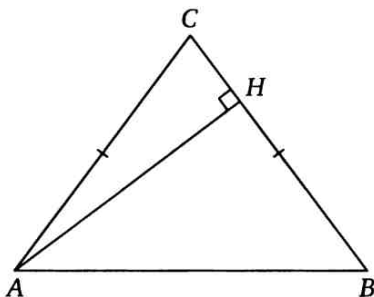
23. В треугольнике ABC $AC = BC = 3\sqrt{2}$, высота AH равна 3. Найдите угол C .



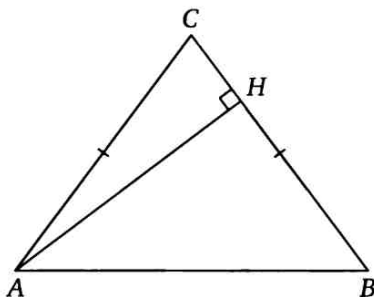
24. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна $2\sqrt{2}$, угол C равен 45° . Найдите AC .



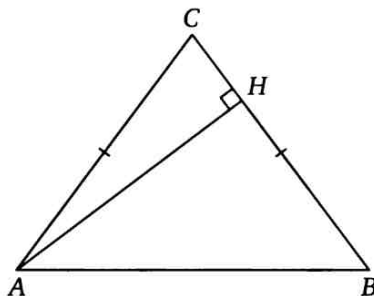
25. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8$. Найдите высоту AH .



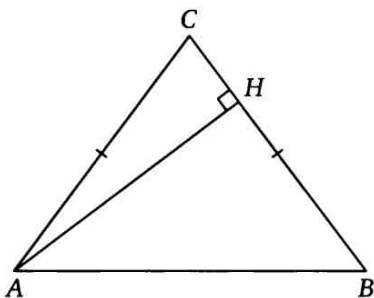
26. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos A = 0,6$. Найдите высоту AH .



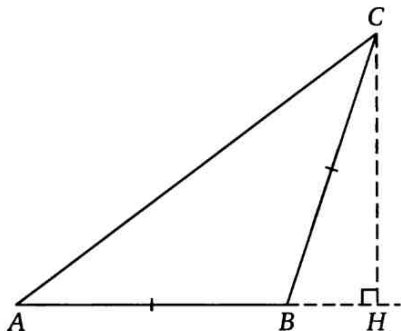
27. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8$, AH — высота. Найдите BH .



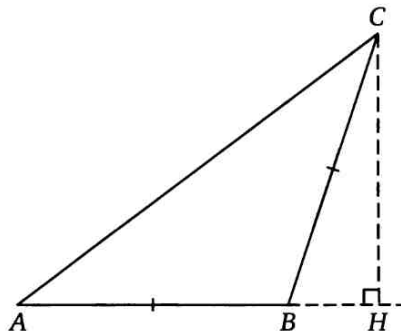
28. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos A = 0,6$, AH — высота. Найдите BH .



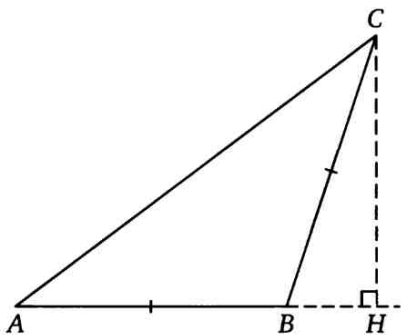
29. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\sin C = 0,6$. Найдите высоту CH .



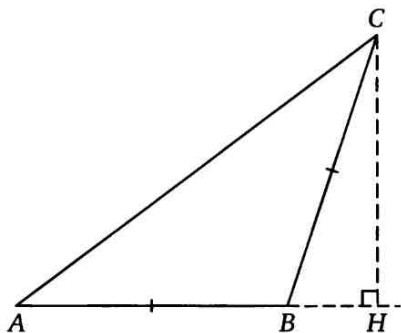
30. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0,8$, CH — высота. Найдите AH .



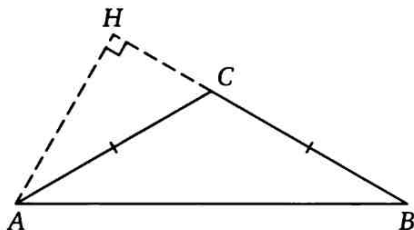
31. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0,8$. Найдите высоту CH .



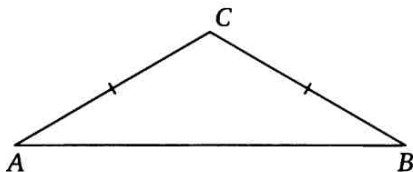
32. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 5$, $\sin C = 0,6$, CH — высота. Найдите AH .



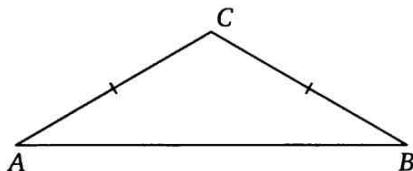
33. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите высоту AH .



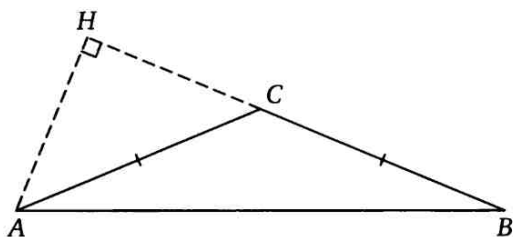
34. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = 2\sqrt{3}$.
Найдите AC .



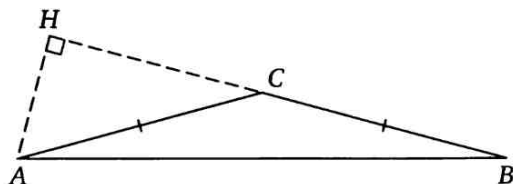
35. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AC = 2\sqrt{3}$.
Найдите AB .



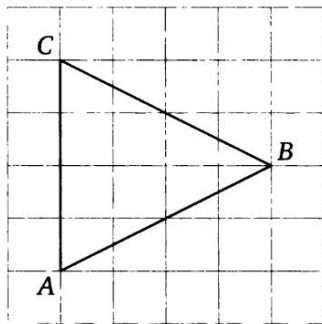
36. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен 135° . Найдите
высоту AH .



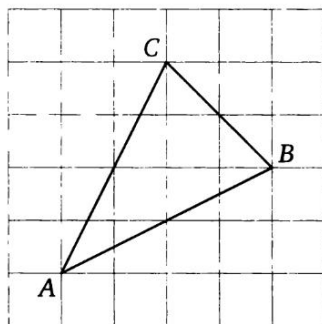
37. В треугольнике ABC $AC = BC = 2$, угол C равен 150° . Найдите
высоту AH .



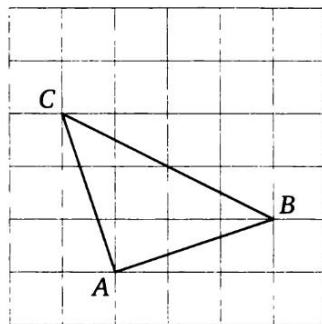
38. Найдите биссектрису треугольника ABC , проведенную из вершины B , если стороны квадратных клеток равны 1.



39. Найдите медиану треугольника ABC , проведенную из вершины C , если стороны квадратных клеток равны 1.

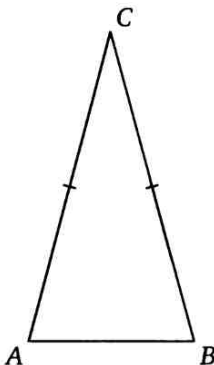


40. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC , если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{5}$.

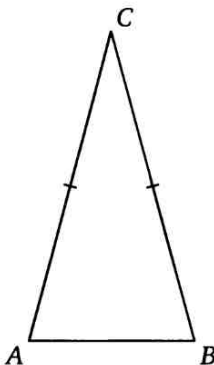


Уровень С

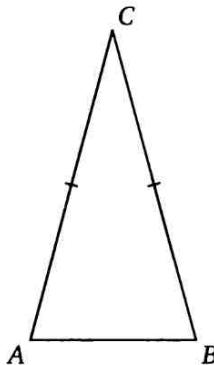
1. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 30° . Найдите AB .



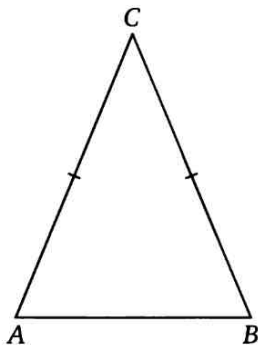
2. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 30° , $AB = 1$. Найдите AC .



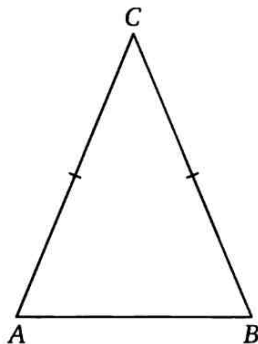
3. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Найдите угол C .



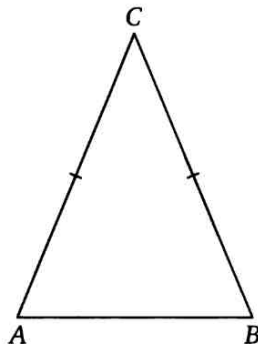
4. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 45° . Найдите AB .



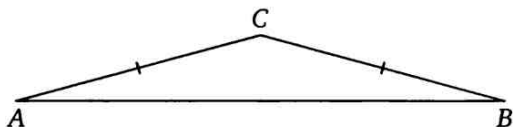
5. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 45° , $AB = 1$. Найдите AC .



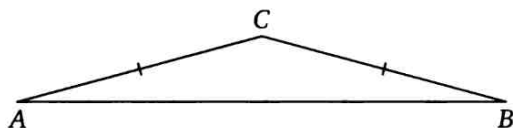
6. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Найдите угол C .



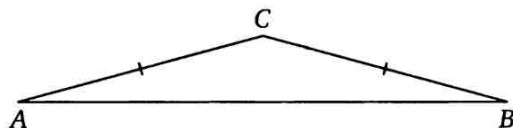
7. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 150° . Найдите AB .



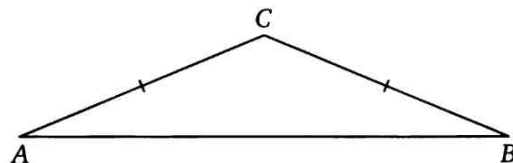
8. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 150° , $AB = 1$. Найдите AC .



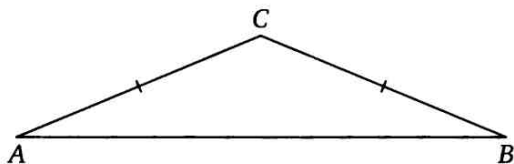
9. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Найдите угол C .



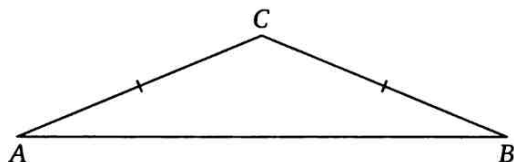
10. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 135° . Найдите AB .



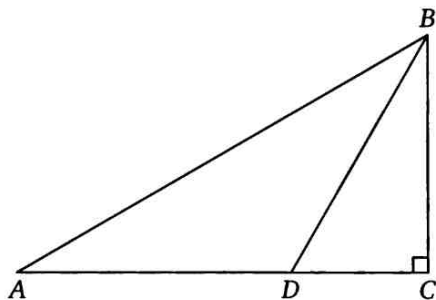
11. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 135° , $AB = 1$. Найдите AC .



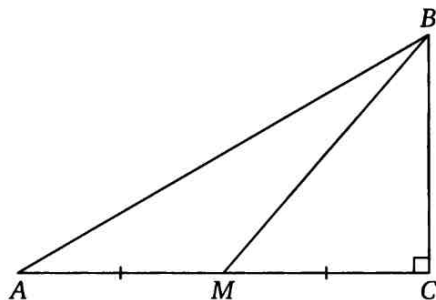
12. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, $AB = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Найдите угол C .



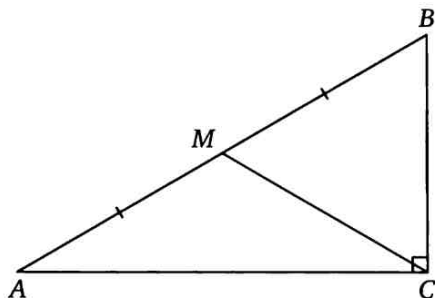
13. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , катет BC равен 1. Найдите биссектрису BD .



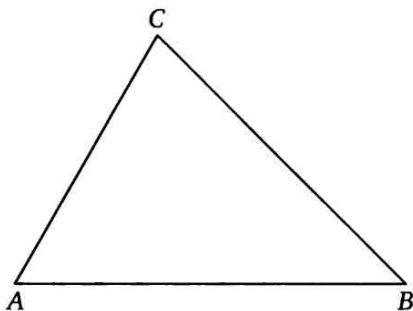
14. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , катет BC равен 1. Найдите медиану BM .



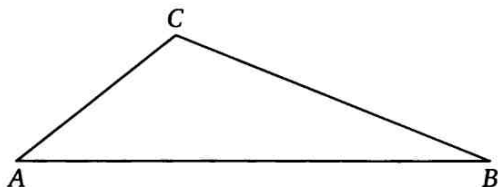
15. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90° , угол A равен 30° , катет BC равен 1. Найдите медиану CM .



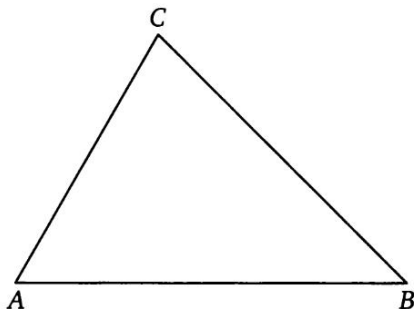
16. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 45° , сторона AC равна $\sqrt{6}$. Найдите сторону BC .



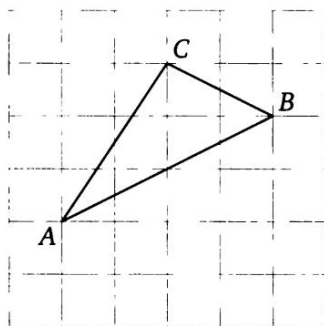
17. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла 120° , если прилежащие к нему стороны равны 6 и 10.



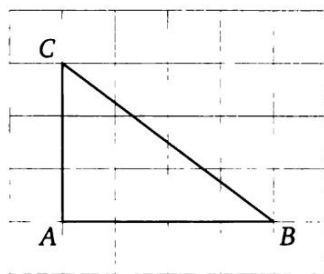
18. В треугольнике ABC сторона AC равна $\sqrt{6}$, сторона BC равна 3, угол A равен 60° . Найдите угол B .



19. Найдите биссектрису треугольника ABC , проведенную из вершины B , если стороны квадратных клеток равны 1.



20. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из вершины A , если стороны квадратных клеток равны 1.



4. Четырехугольники

В этом параграфе предлагаются задачи на нахождение элементов параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. При этом используются признаки и свойства этих четырехугольников.

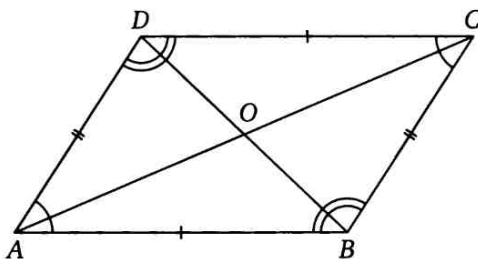
Общие сведения

Параллелограмм

Свойство 1. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°

Свойство 2. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

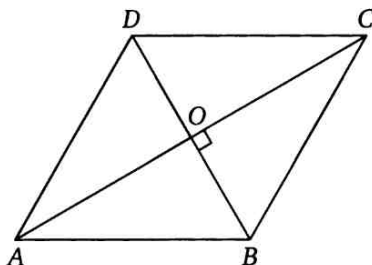
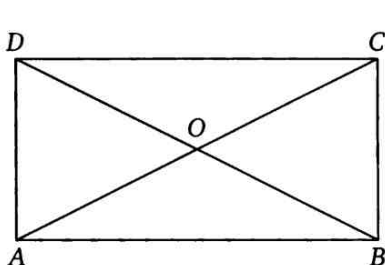
Свойство 3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



Прямоугольник, ромб, квадрат

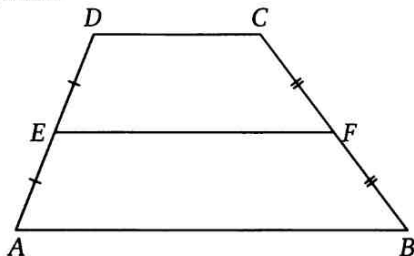
Свойство 1. Диагонали прямоугольника равны.

Свойство 2. Диагонали ромба перпендикулярны.



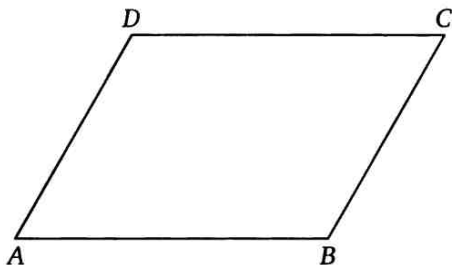
Трапеция

Свойство 1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

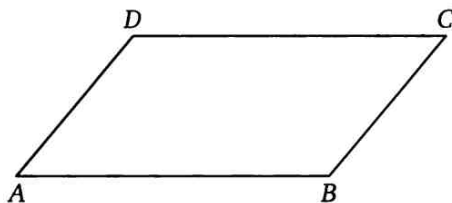


Задачи**Уровень А**

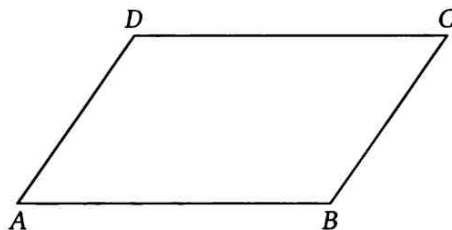
1. Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен 60°



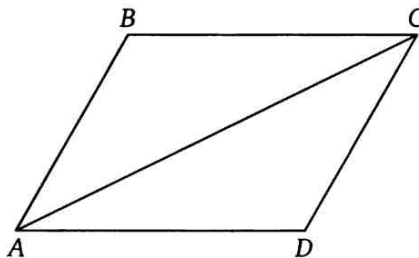
2. Сумма двух углов параллелограмма равна 100° . Найдите один из оставшихся углов.



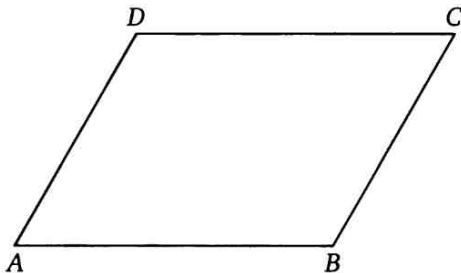
3. Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол.



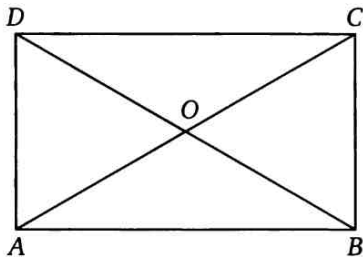
4. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 26° и 34° . Найдите больший угол параллелограмма.



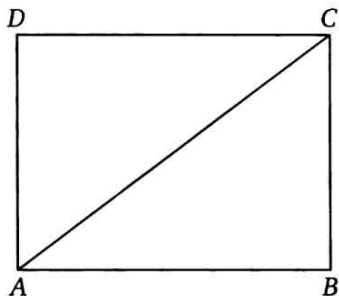
5. Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



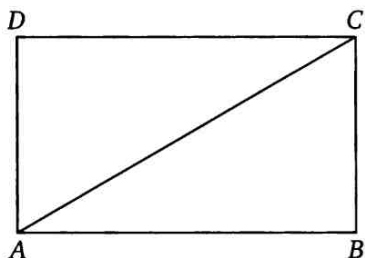
6. Меньшая сторона прямоугольника равна 6, диагонали пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали прямоугольника.



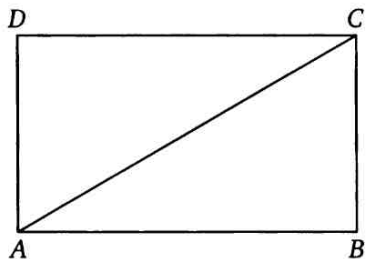
7. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.



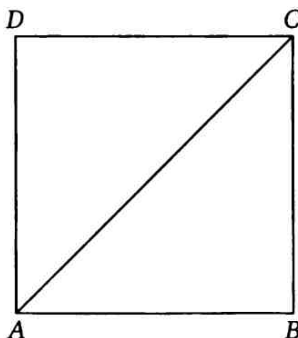
8. Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Найдите больший из углов, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.



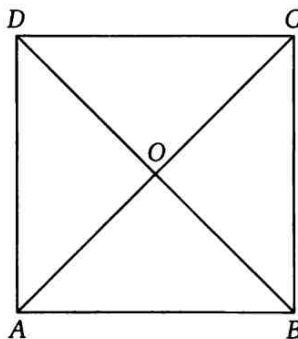
9. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении $1:2$, меньшая его сторона равна 6. Найдите диагональ данного прямоугольника.



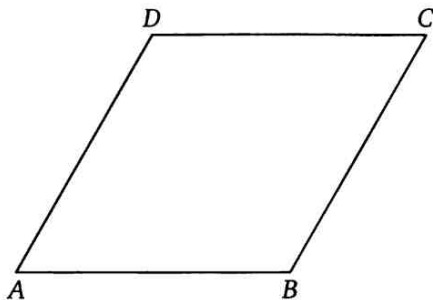
10. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.



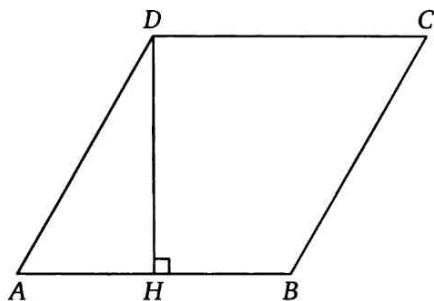
11. В квадрате расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из его сторон равно 7. Найдите периметр этого квадрата.



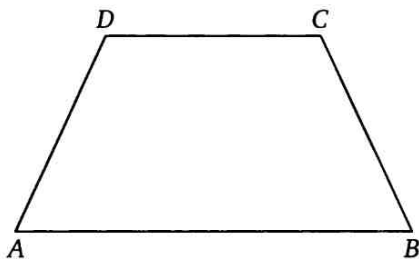
12. Найдите меньшую диагональ ромба, стороны которого равны 2, а острый угол равен 60° .



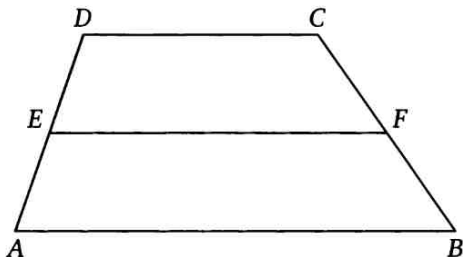
13. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°



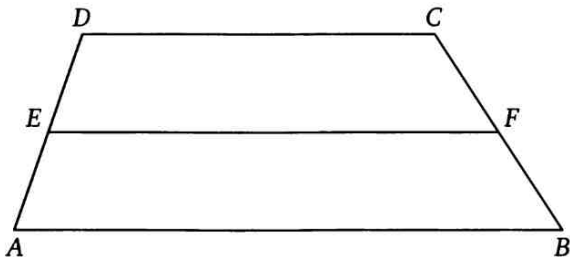
14. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 50° ?



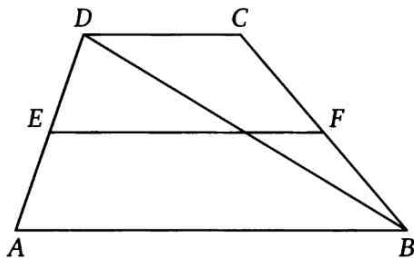
15. Найдите среднюю линию трапеции, если ее основания равны 30 и 16.



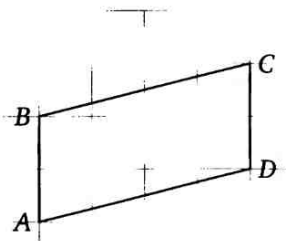
16. Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите большее основание трапеции.



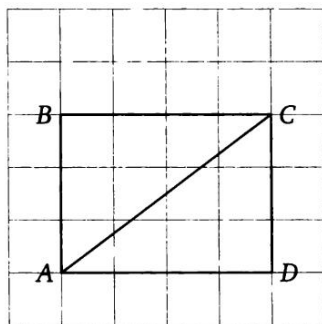
17. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



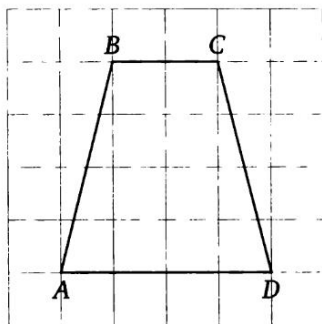
18. Найдите высоту параллелограмма $ABCD$, опущенную на сторону AB , если стороны квадратных клеток равны 1.



19. Найдите диагональ прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.

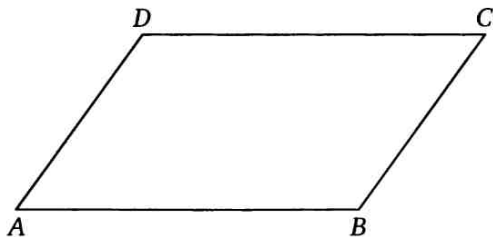


20. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.

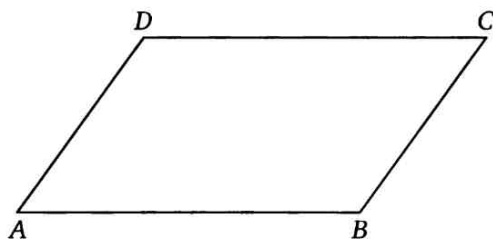


Уровень В

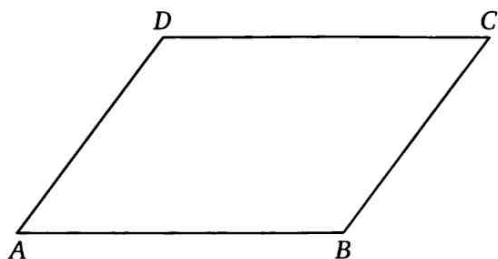
1. Найдите больший угол параллелограмма, если два его угла относятся как 3 : 7.



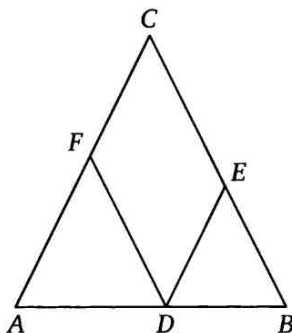
2. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне.



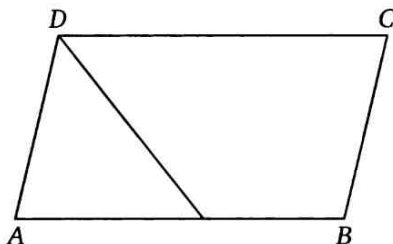
3. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.



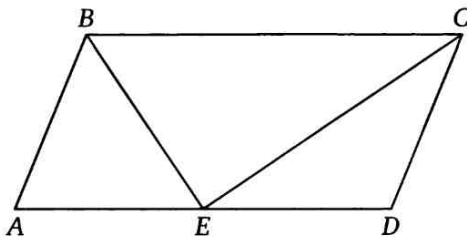
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.



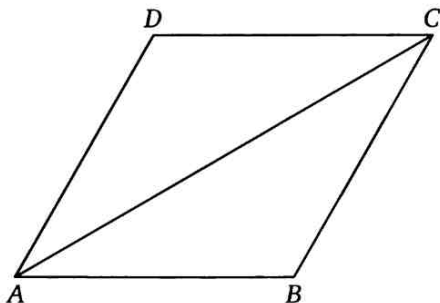
5. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3 : 4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



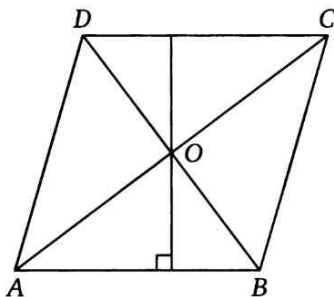
6. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



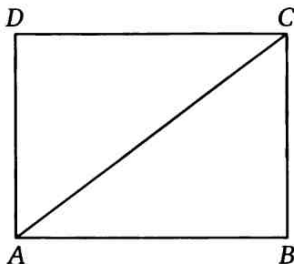
7. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°



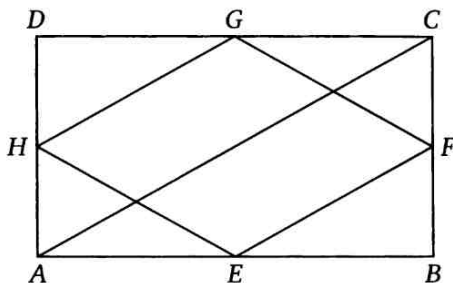
8. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



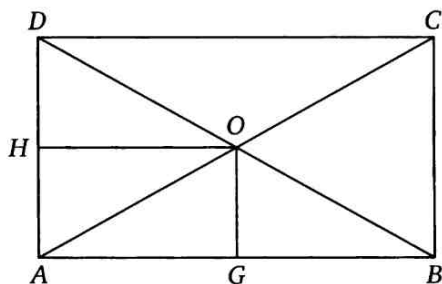
9. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 28, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 24.



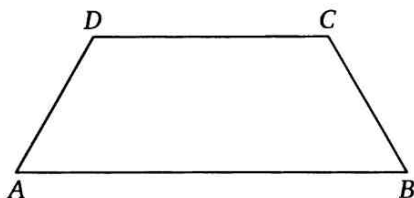
10. Середины последовательных сторон прямоугольника, диагональ которого равна 5, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырехугольника.



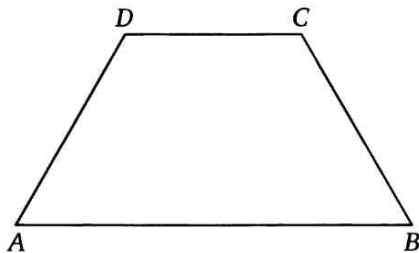
11. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 28. Найдите меньшую сторону прямоугольника.



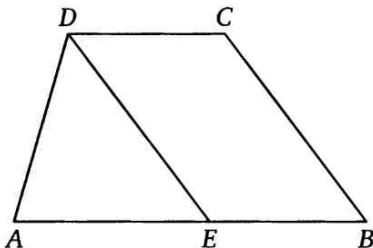
12. В равнобедренной трапеции большее основание равно 25, боковая сторона равна 10, угол между ними 60° . Найдите меньшее основание.



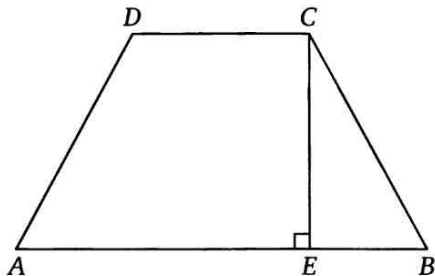
13. В равнобедренной трапеции основания равны 12 и 27, острый угол равен 60° . Найдите ее периметр.



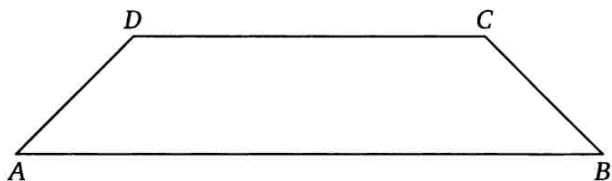
14. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



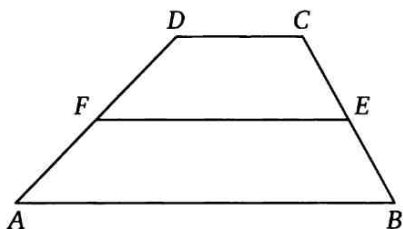
15. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 4. Найдите среднюю линию этой трапеции.



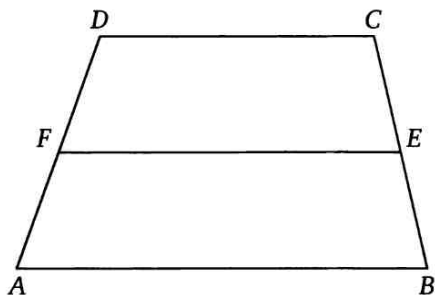
16. Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45° . Найдите высоту трапеции.



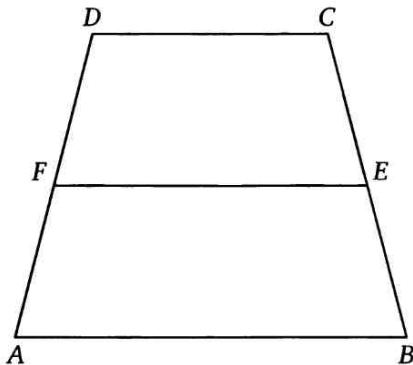
17. Периметр трапеции равен 50, а сумма боковых сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.



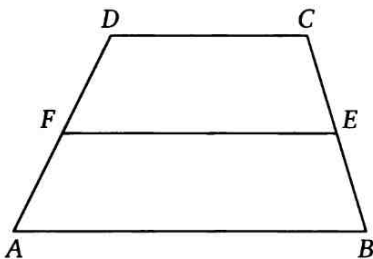
18. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5. Найдите меньшее основание.



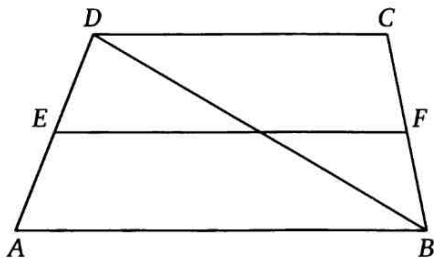
19. Периметр равнобедренной трапеции равен 80, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.



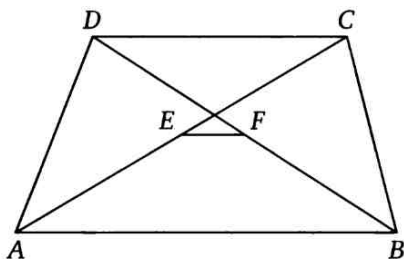
20. Средняя линия трапеции равна 7, а одно из ее оснований больше другого на 4. Найдите большее основание трапеции.



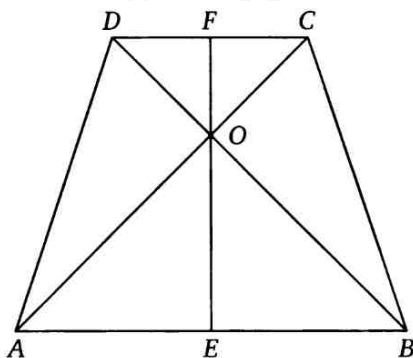
21. Средняя линия трапеции равна 12. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2. Найдите большее основание трапеции.



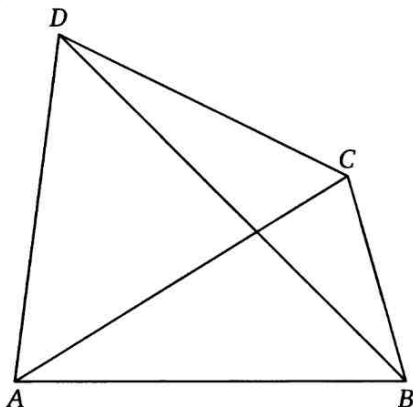
22. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



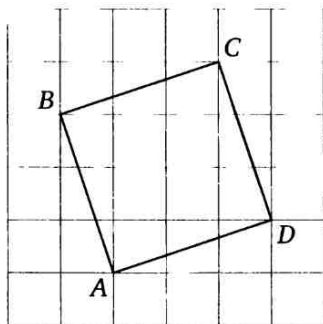
23. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



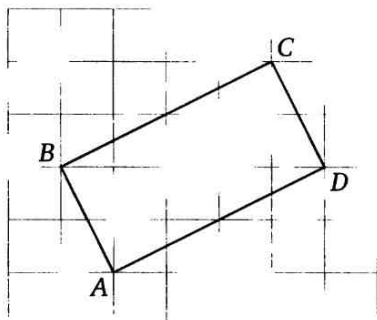
24. Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



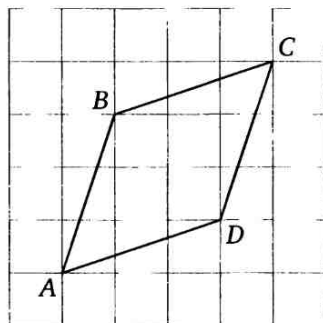
25. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{10}$.



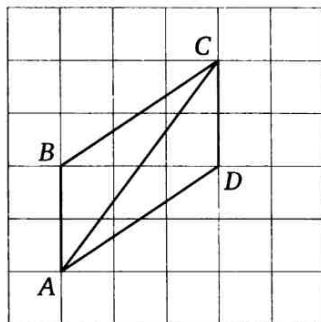
26. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{5}$.



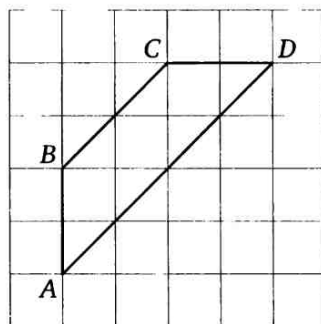
27. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{10}$.



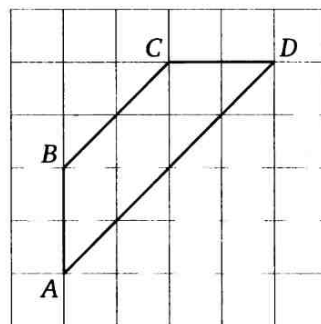
28. Найдите диагональ AC параллелограмма $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



29. Найдите высоту трапеции $ABCD$, опущенную из вершины B , если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

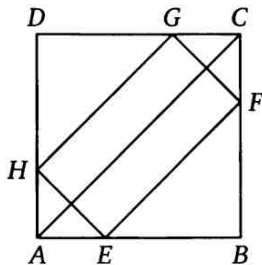


30. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

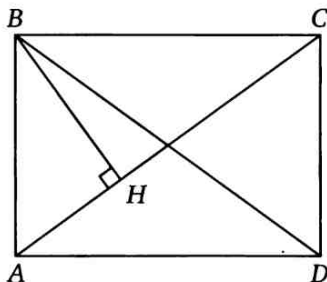


Уровень С

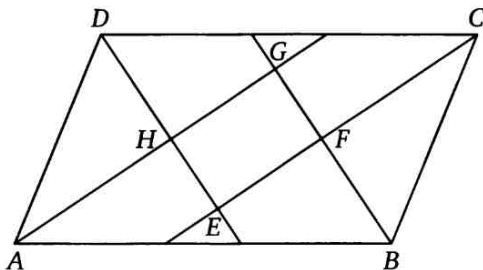
1. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника. Одна сторона этого прямоугольника вдвое меньше другой. Диагональ квадрата равна 36. Найдите меньшую сторону прямоугольника.



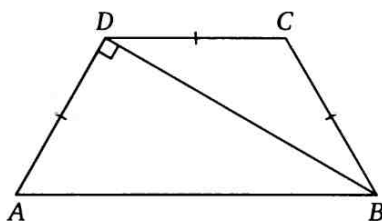
2. Перпендикуляр BH , опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на его диагональ AC , делит угол B в отношении $2:3$. Найдите угол между перпендикуляром BH и диагональю BD .



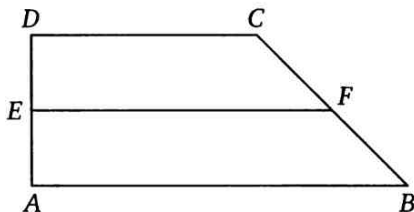
3. Найдите диагональ прямоугольника, образованного биссектрисами углов параллелограмма, стороны которого равны 3 и 5.



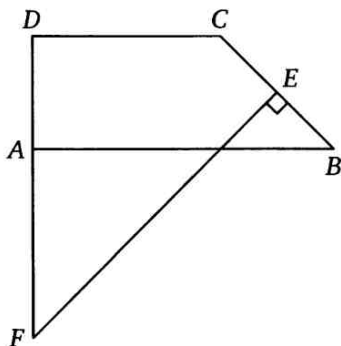
4. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите больший угол трапеции.



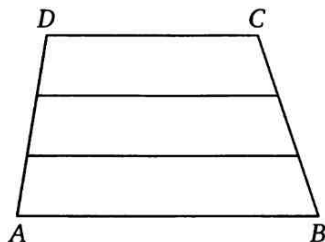
5. В прямоугольной трапеции один из углов равен 45° , средняя линия равна 20, основания относятся как 3 : 5. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.



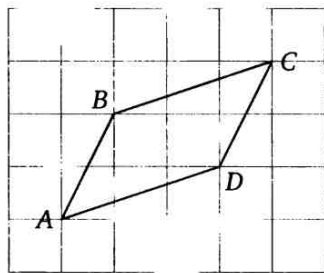
6. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) угол B равен 45° и сторона AB равна 20. Через середину E стороны BC проведен к ней перпендикуляр, который пересекает продолжение стороны DA в точке F . Найдите DF .



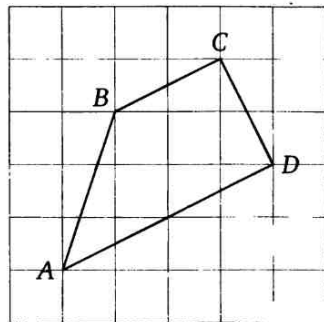
7. Основания трапеции равны 7 и 10. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите больший из отрезков этих прямых, заключенных внутри трапеции.



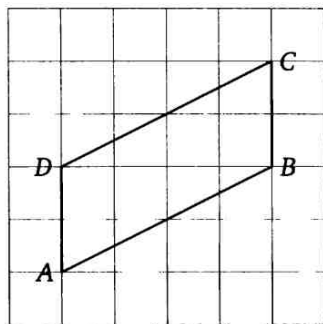
8. Найдите острый угол параллелограмма $ABCD$.



9. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



10. Найдите высоту параллелограмма $ABCD$, опущенную на сторону AB , если стороны квадратных клеток равны 1.

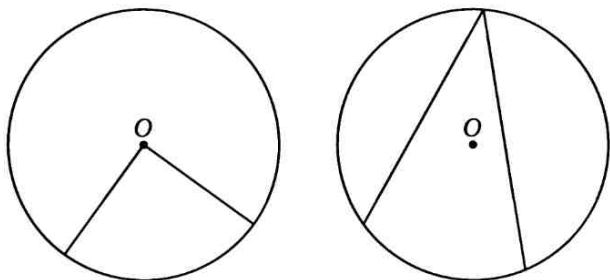


5. Углы, вписанные в окружность

В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение величин углов и дуг, связанных с окружностью, решение которых использует теорему об угле, вписанном в окружность.

Общие сведения

Определение 1. Угол с вершиной в центре окружности называется *центральным*.



Определение 2. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным*.

Каждый центральный и вписанный углы данной окружности определяют дуги окружности, которые состоят из точек окружности, принадлежащих этим углам. При этом говорят, что углы опираются на соответствующие дуги окружности.

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

Следствие. Все углы окружности, опирающиеся на равные дуги, равны.

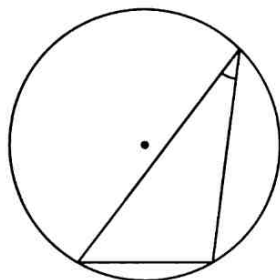
Задачи

Уровень А

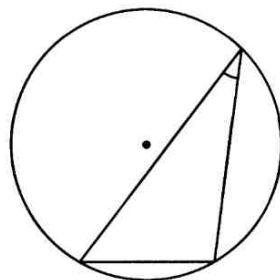
1. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?

2. Найдите хорду, на которую опирается угол 90° , вписанный в окружность радиуса 1.

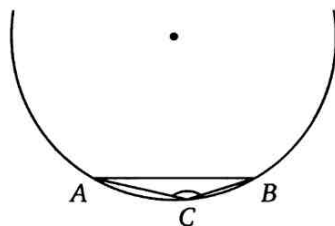
3. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?



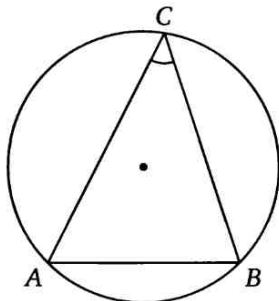
4. Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность радиуса 3.



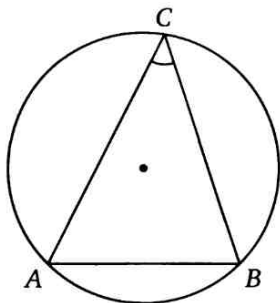
5. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?



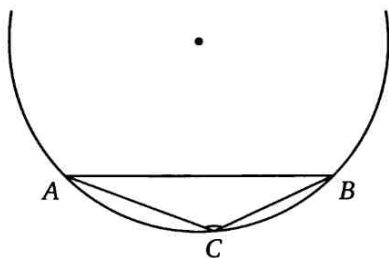
6. Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$.



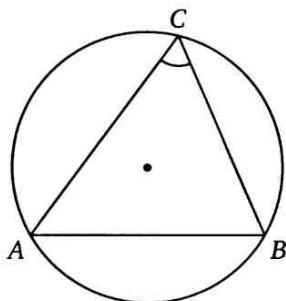
7. Найдите хорду, на которую опирается угол 45° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.



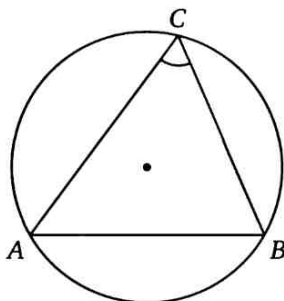
8. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$.



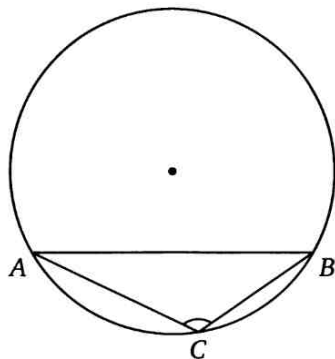
9. Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$.



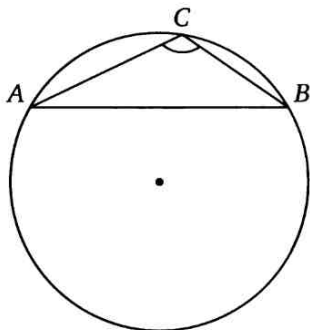
10. Найдите хорду, на которую опирается угол 60° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



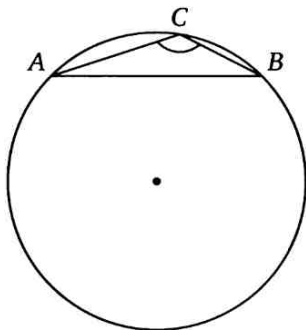
11. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{3}$.



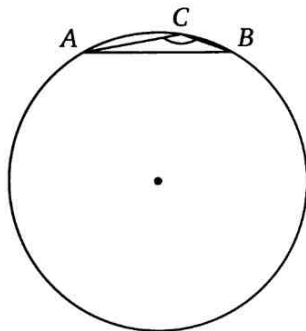
12. Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



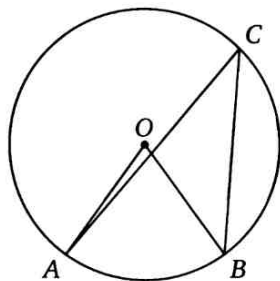
13. Найдите хорду, на которую опирается угол 135° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.



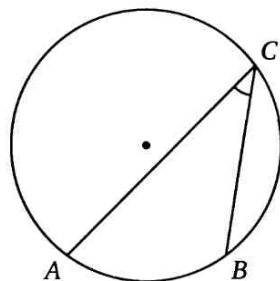
14. Найдите хорду, на которую опирается угол 150° , вписанный в окружность радиуса 1.



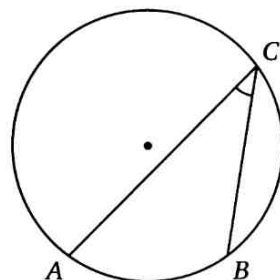
15. Центральный угол на 36° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.



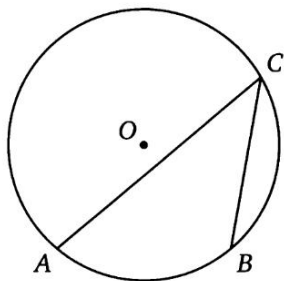
16. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности.



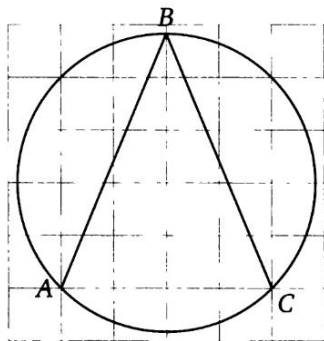
17. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 20% окружности.



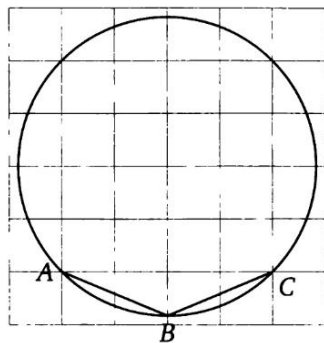
18. Дуги AC и BC окружности составляют соответственно 200° и 80° . Найдите вписанный угол ACB .



19. Найдите величину угла ABC .

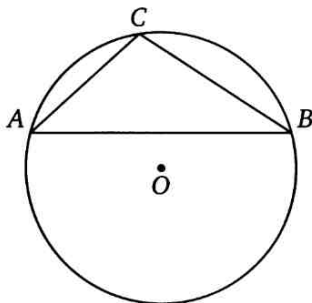


20. Найдите величину угла ABC .

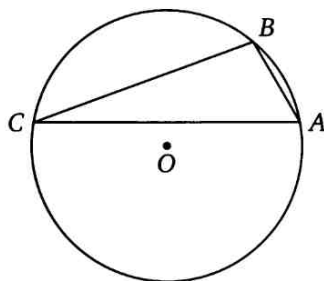


Уровень В

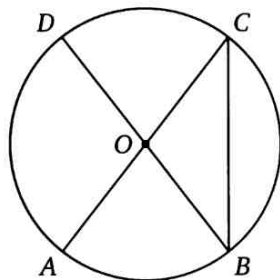
1. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $5 : 7$. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?



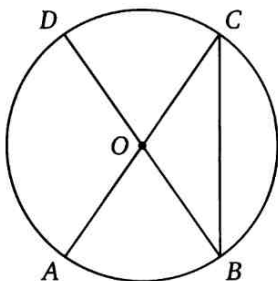
2. Точки A, B, C , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника ABC .



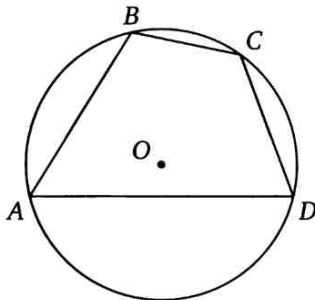
3. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 38° . Найдите центральный угол AOD .



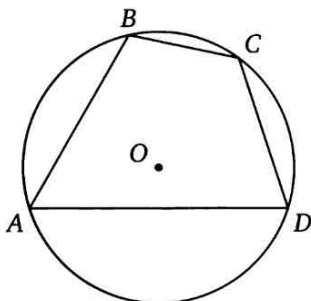
4. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 110° . Найдите вписанный угол ACB .



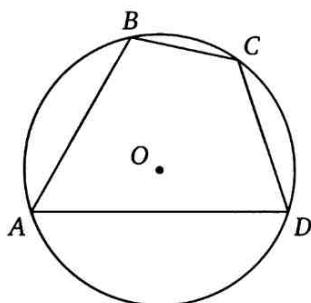
5. Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58° . Найдите угол C этого четырехугольника.



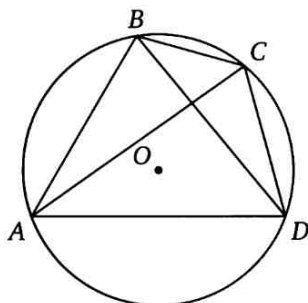
6. Стороны четырехугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95° , 49° , 71° , 145° . Найдите угол B этого четырехугольника.



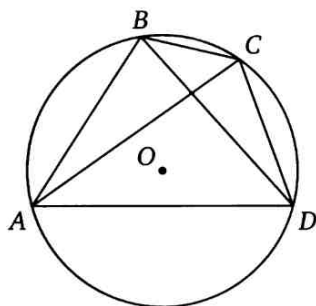
7. Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как $4:2:3:6$. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$.



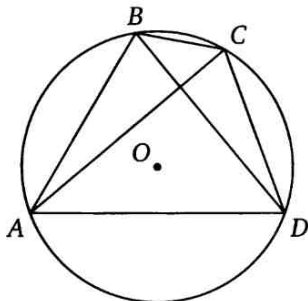
8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABD .



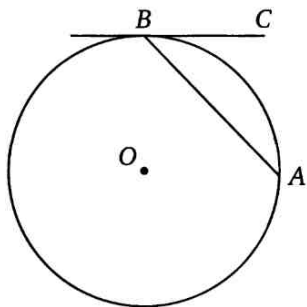
9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABC .



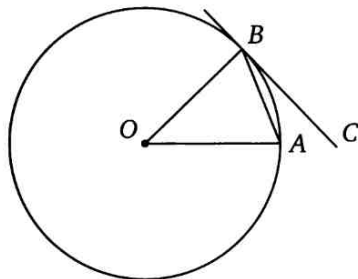
10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110° , угол ABD равен 70° . Найдите угол CAD .



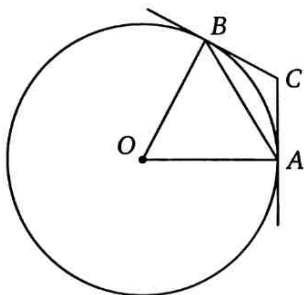
11. Хорда AB стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B .



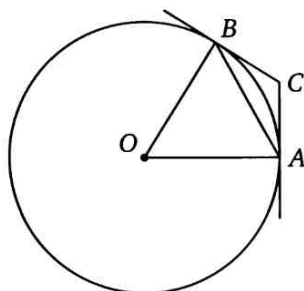
12. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32° . Найдите градусную величину дуги, стягиваемую хордой AB .



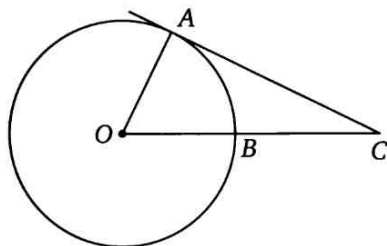
13. Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB .



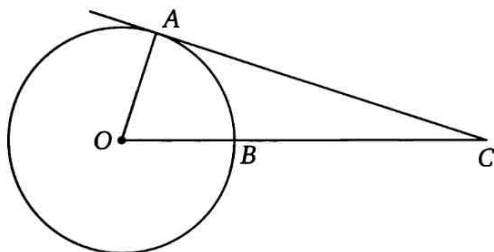
14. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB , равный 122° . Найдите градусную величину дуги AB , стягиваемую точками касания.



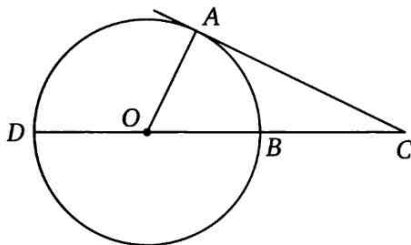
15. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности, а дуга AB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 64°



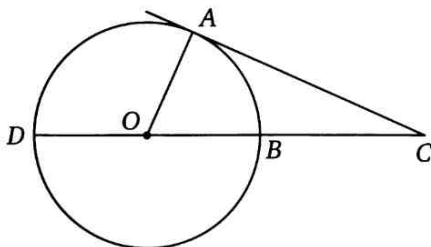
16. Угол ACO равен 28° . Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла.



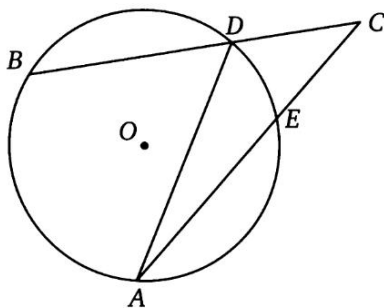
17. Найдите угол ACD , если его сторона CA касается окружности, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°



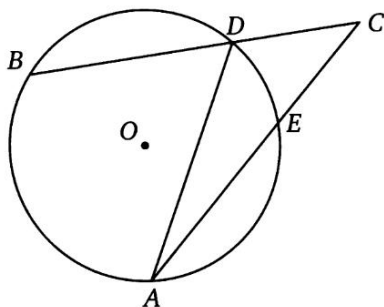
18. Угол ACD равен 24° . Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключенной внутри этого угла.



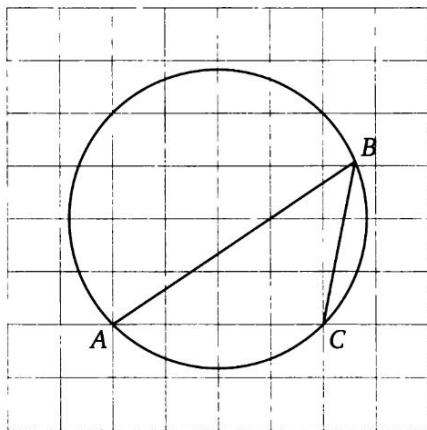
19. Найдите угол ACB , если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38° .



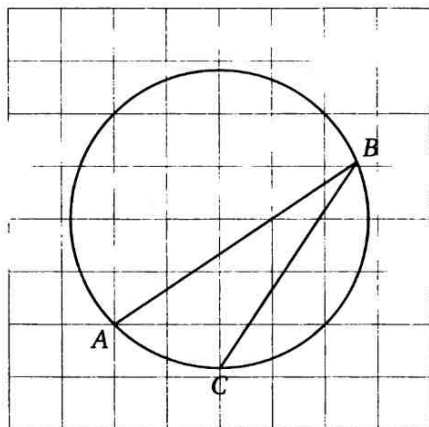
20. Угол ACB равен 42° . Градусная величина дуги AB окружности равна 124° . Найдите угол DAE .



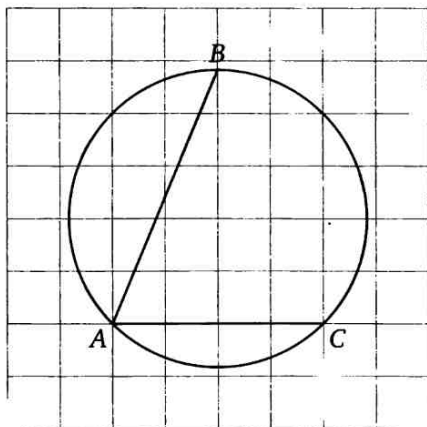
21. Найдите величину угла ABC .



22. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC .

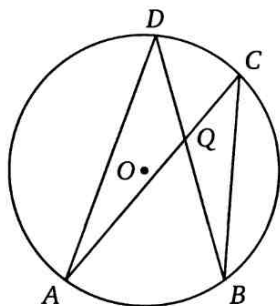


23. Найдите градусную величину дуги BC окружности, на которую опирается угол BAC .

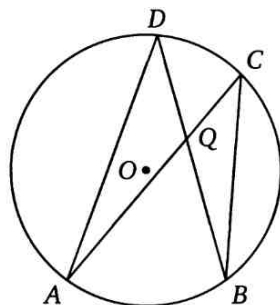


Уровень С

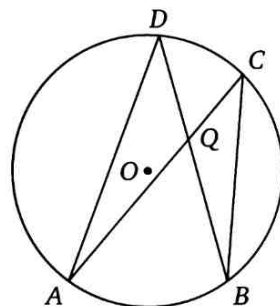
1. Вписанные углы ACB и CAD равны соответственно 36° и 20° . Найдите угол AQB , образованный пересекающимися хордами AC и BD .



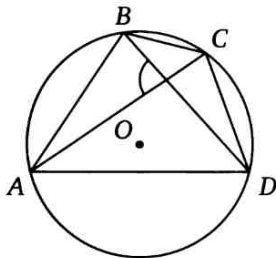
2. Угол AQB , образованный пересекающимися хордами AC и BD окружности, равен 54° . Вписанный угол ACB равен 34° . Найдите вписанный угол CAD .



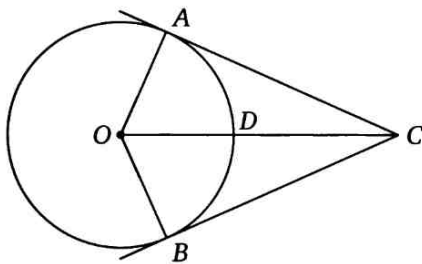
3. Дуги AB и CD окружности составляют соответственно 72° и 38° . Найдите угол AQB , образованный пересекающимися хордами AC и BD .



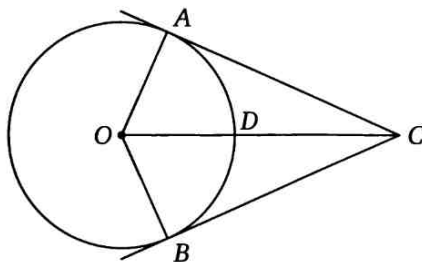
4. Стороны четырехугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 96° , 44° , 68° , 152° . Найдите острый угол между диагоналями этого четырехугольника.



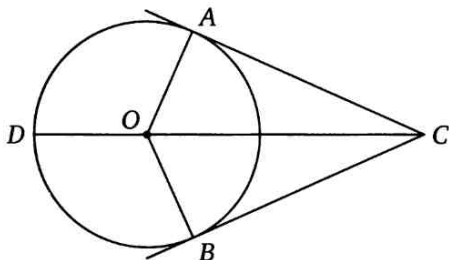
5. Найдите угол ACB , если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 132° .



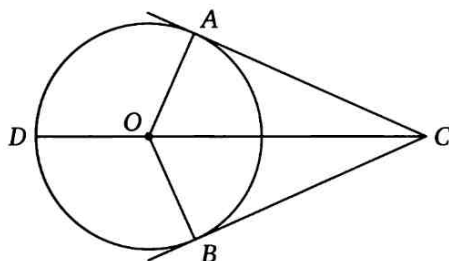
6. Угол ACB равен 52° . Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



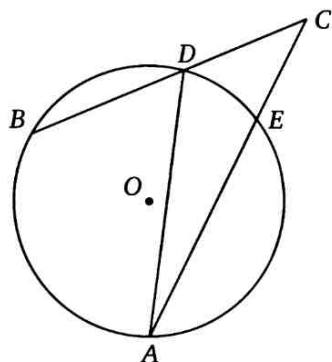
7. Найдите угол ACB , если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 232°



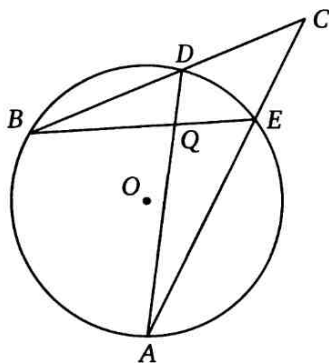
8. Угол ACB равен 48° . Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



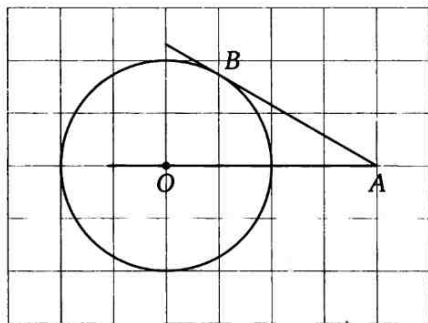
9. Угол ACB равен 42° . Градусная величина дуги DE окружности равна 38° . Найдите угол ADB .



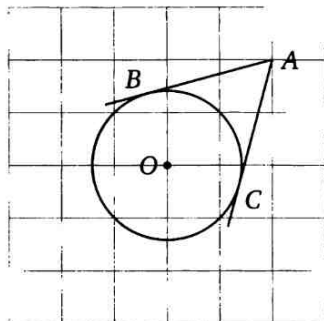
10. Найдите угол ACB , если вписанный угол ADB равен 62° , а угол AQB равен 80°



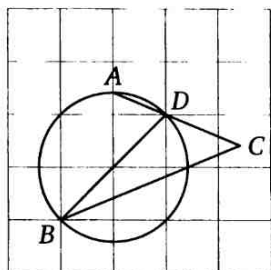
11. Через точку A проведена касательная AB к окружности. Найдите угол OAB .



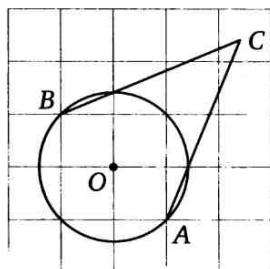
12. Через точку A проведены касательные AB и AC к окружности. Найдите угол BAC .



13. Найдите величину угла ACB .



14. Найдите угол ACB .



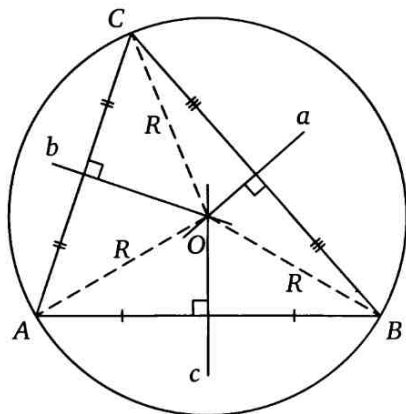
6. Многоугольники и окружность

В этом параграфе предлагаются задачи на нахождение элементов вписанных и описанных многоугольников, радиусов вписанных и описанных окружностей. Рассмотрены различные виды треугольников и четырехугольников.

Общие сведения

Определение 1. Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины принадлежат этой окружности. Окружность при этом называется *описанной* около многоугольника.

Теорема 1. *Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Ее центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*



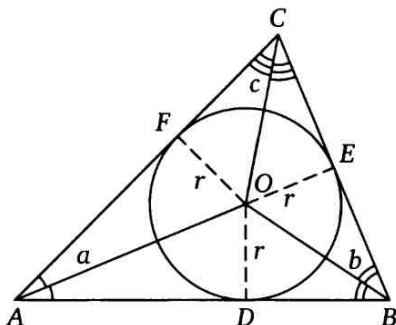
Теорема 2. *Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема 3. *Радиус R окружности, описанной около треугольника, выражается формулой $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.*

Определение 2. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Окруж-

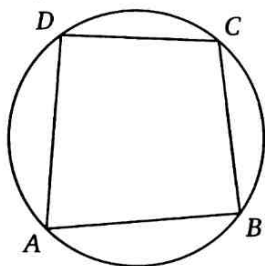
ность при этом называется вписанной в многоугольник.



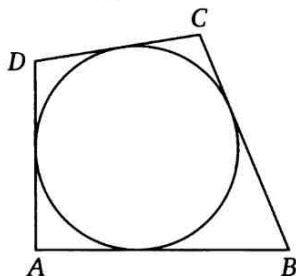
Теорема 4. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 5. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.

Теорема 6. Суммы противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равны 180°

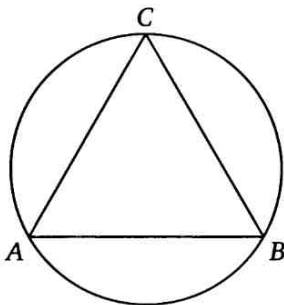


Теорема 7. Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

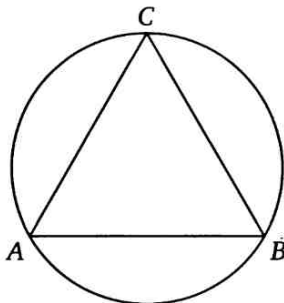


Задачи**Уровень А****Описанная окружность**

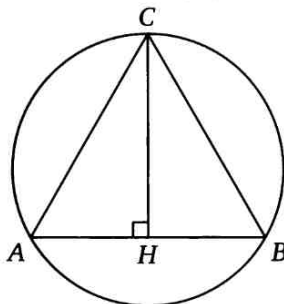
1. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



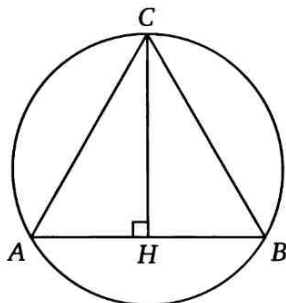
2. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



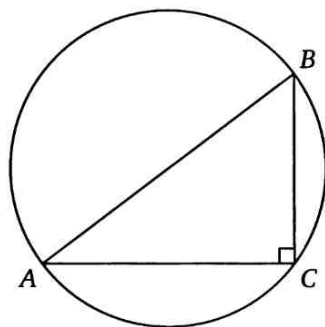
3. Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



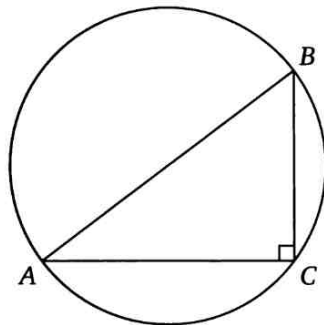
4. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.



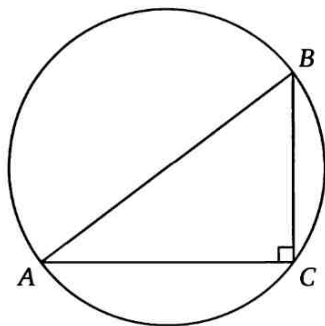
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности.



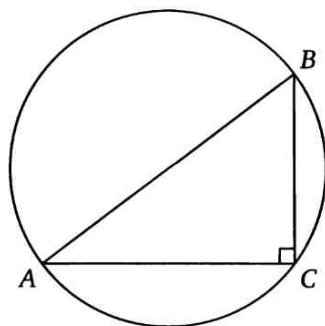
6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.



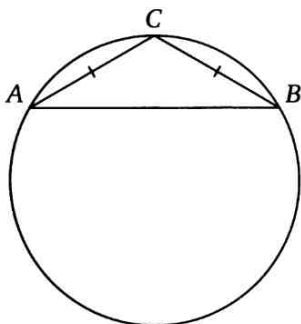
7. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной окружности.



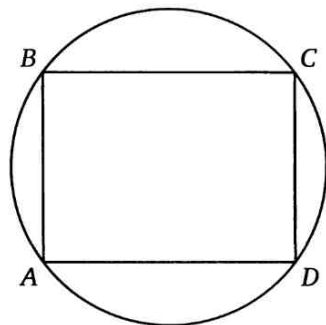
8. В треугольнике ABC $BC = 6$, угол C равен 90° . Радиус описанной окружности равен 5. Найдите AC .



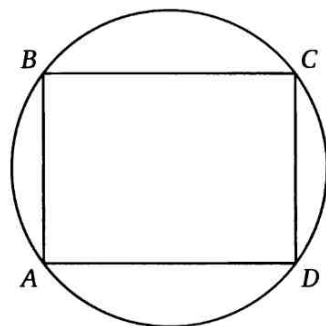
9. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.



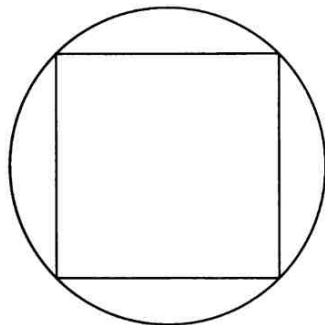
10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3 и 4.



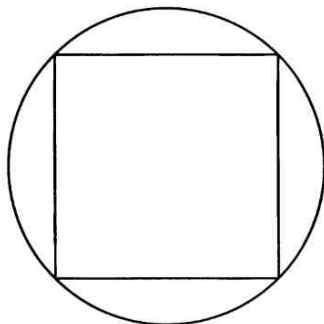
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.



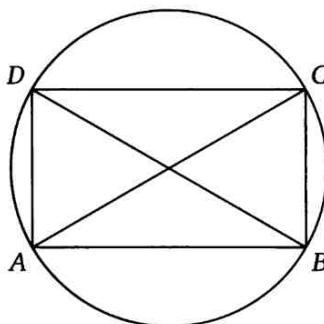
12. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $\sqrt{8}$.



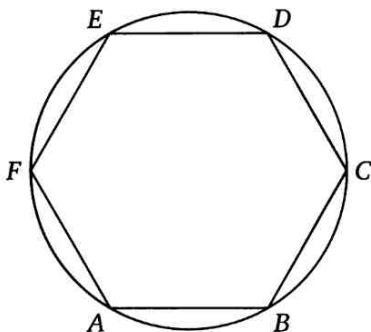
13. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.



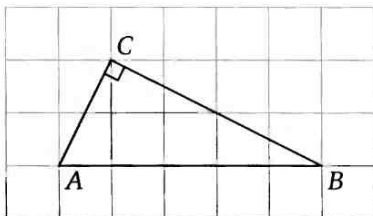
14. Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности.



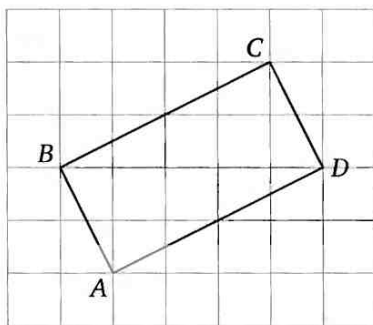
15. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 6?



16. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , если стороны квадратных клеток равны 1.

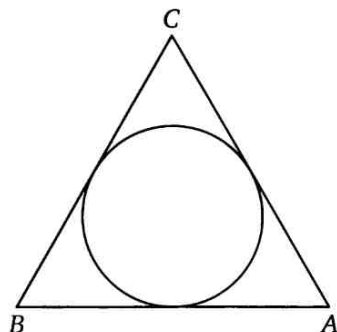


17. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.

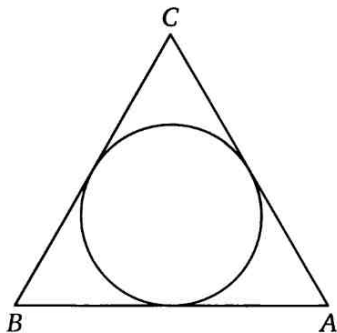


Вписанная окружность

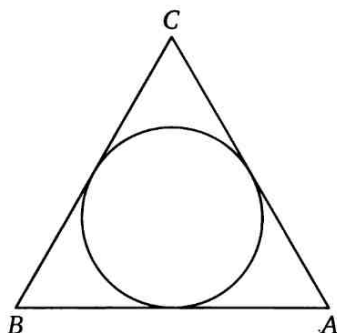
18. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



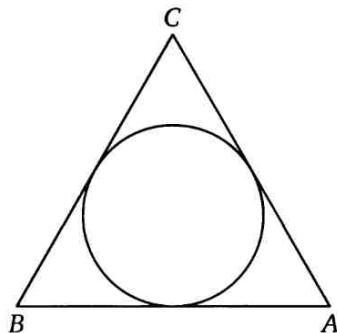
19. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



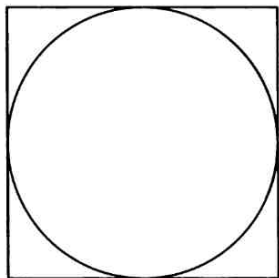
20. Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



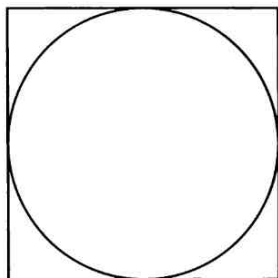
21. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.



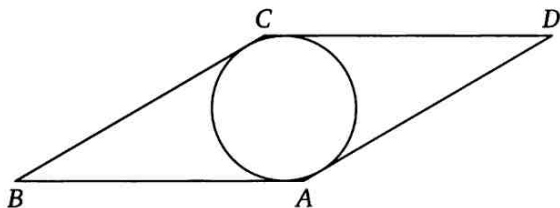
22. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 4.



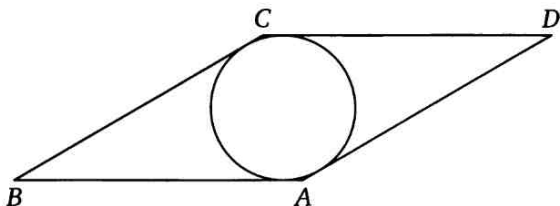
23. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4.



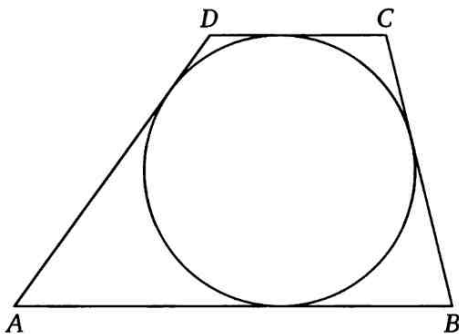
24. Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанной окружности.



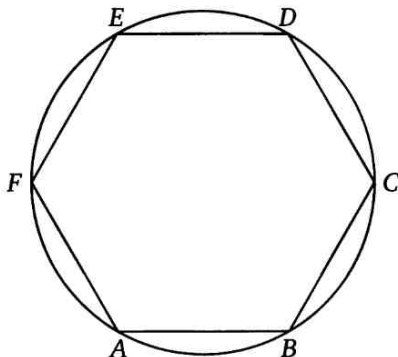
25. Острый угол ромба равен 30° . Радиус вписанной окружности равен 2. Найдите сторону ромба.



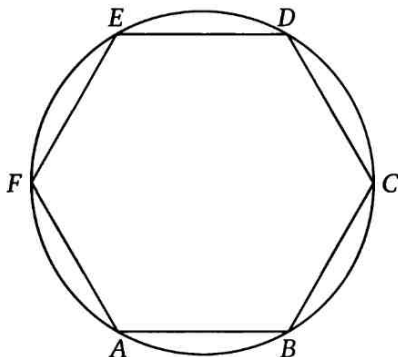
26. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1.



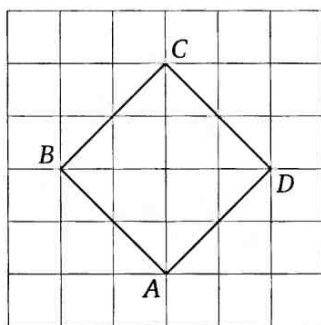
27. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



28. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



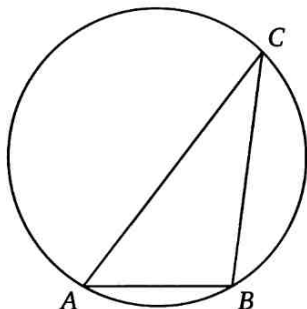
29. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.



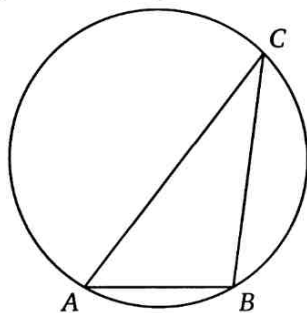
Уровень В

Описанная окружность

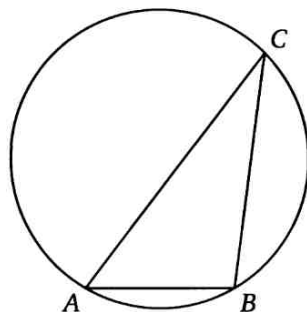
1. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



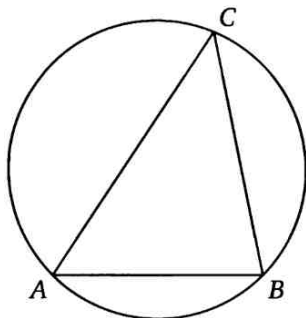
2. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.



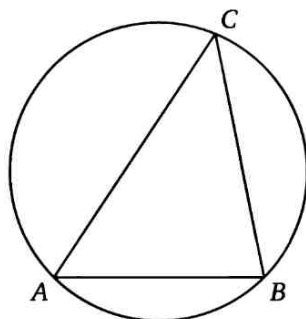
3. Угол C треугольника ABC , вписанного в окружность радиуса 3, равен 30° . Найдите сторону AB этого треугольника, противолежащую данному углу.



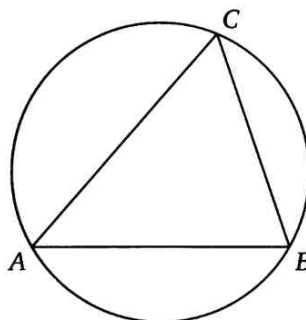
4. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противлежащий ей угол C равен 45° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



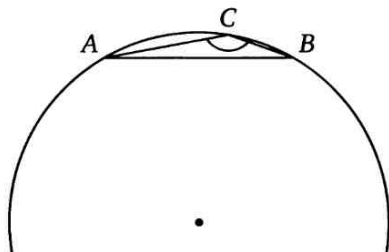
5. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Найдите угол C .



6. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противлежащий ей угол C равен 60° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



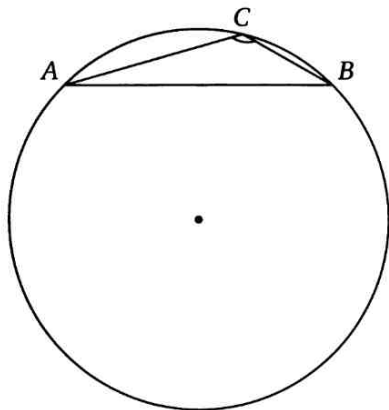
7. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 150° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



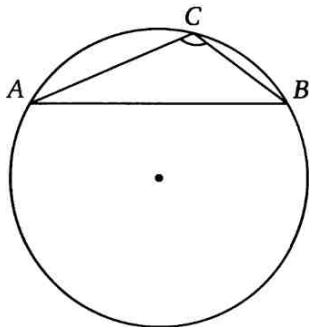
8. Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C .



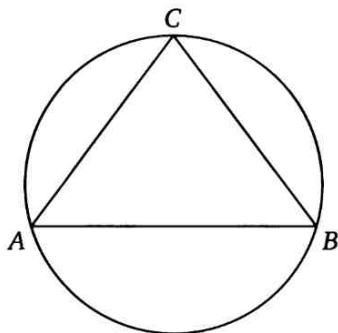
9. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{2}$. Противлежащий ей угол C равен 135° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



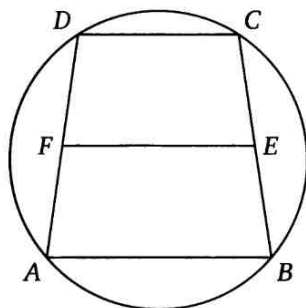
10. Сторона AB треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Противлежащий ей угол C равен 120° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



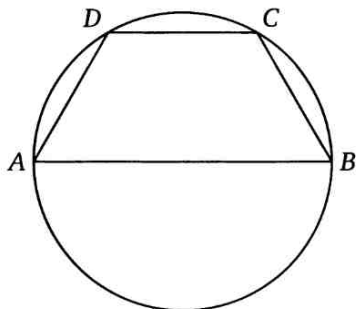
11. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности.



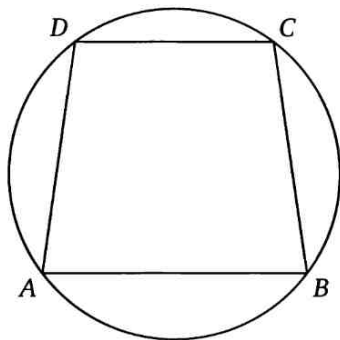
12. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



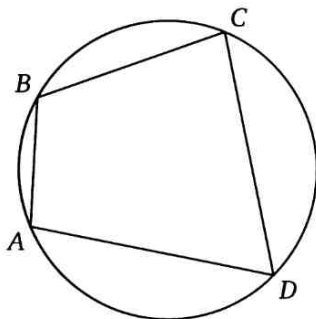
13. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60° , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности.



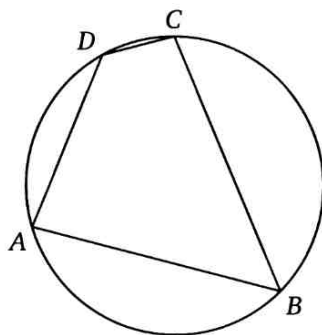
14. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.



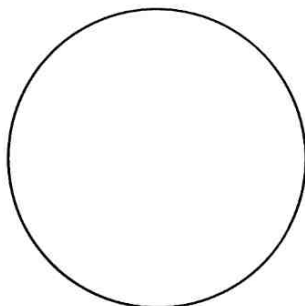
15. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 98° . Найдите угол C.



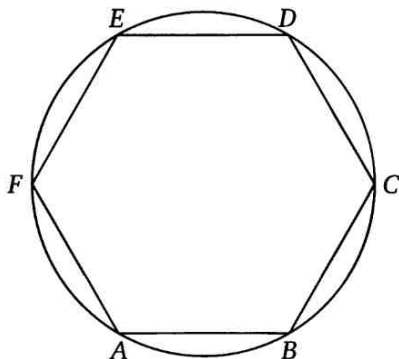
16. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов.



17. Углы A , B и C четырехугольника $ABCD$ относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите угол D , если около данного четырехугольника можно описать окружность. Нарисуйте этот четырехугольник.

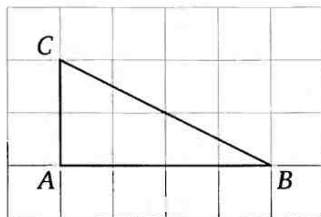


18. Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

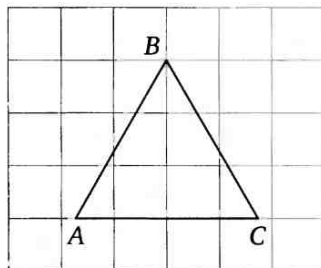


19. Угол между стороной правильного n -угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведенным в одну из вершин стороны, равен 54° . Найдите n .

20. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ABC , если стороны квадратных клеток равны 1. В ответе укажите $R\sqrt{5}$.

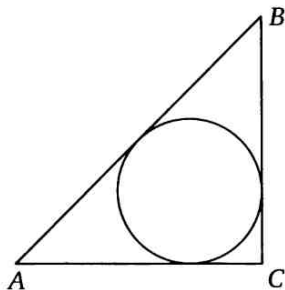


21. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.

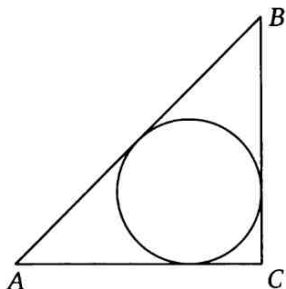


Вписанная окружность

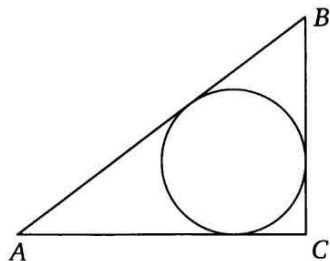
22. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу c этого треугольника. В ответе укажите $c(\sqrt{2} - 1)$.



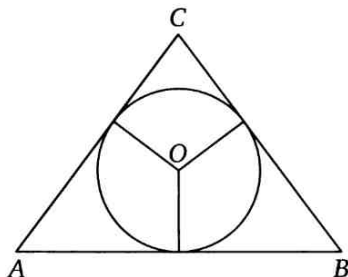
23. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



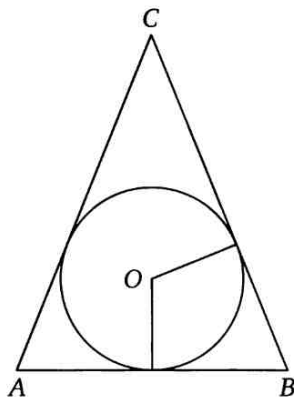
24. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Найдите радиус вписанной окружности.



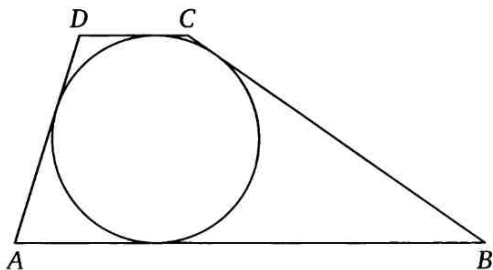
25. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



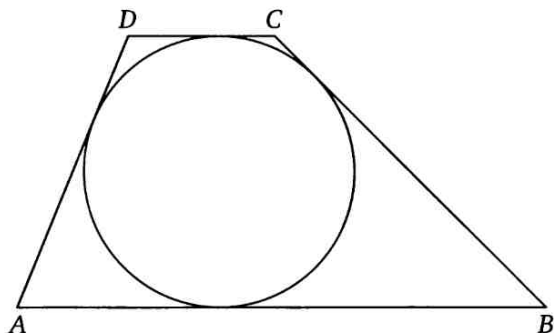
26. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.



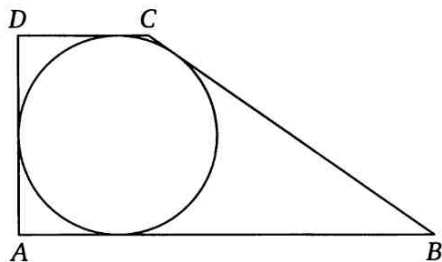
27. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



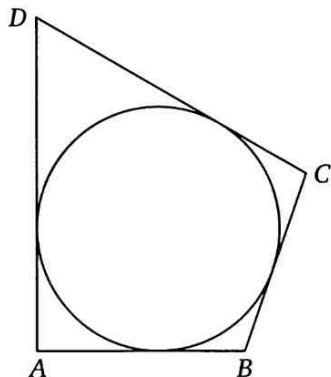
28. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.



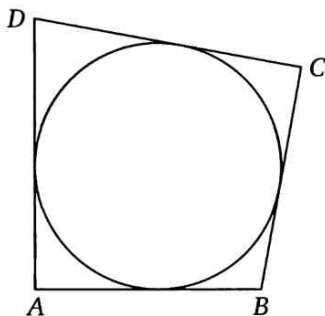
29. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



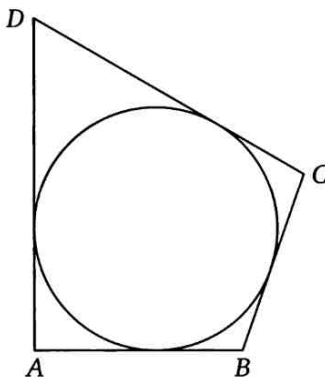
30. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.



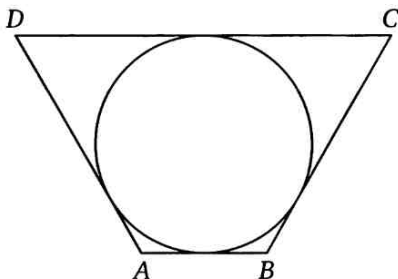
31. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.



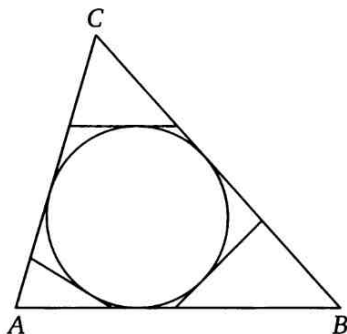
32. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $BC=11$ и $CD=15$. Найдите четвертую сторону четырехугольника.



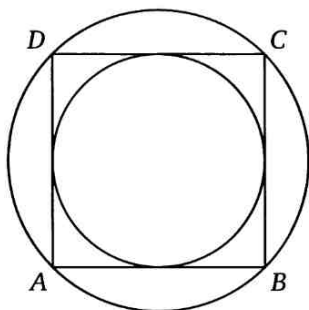
33. Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как $1:2:3$. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 32.



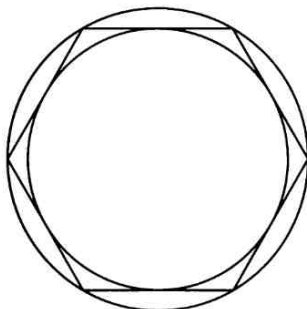
34. К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольничков равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



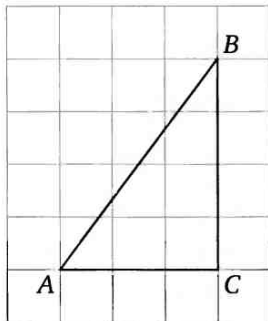
35. Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{8}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



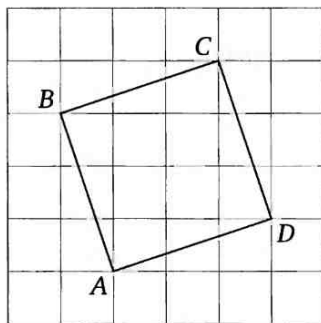
36. Около окружности, радиус которой равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.



37. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



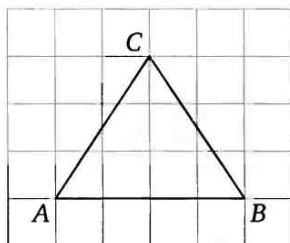
38. Найдите радиус r окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. В ответе укажите $r\sqrt{10}$.



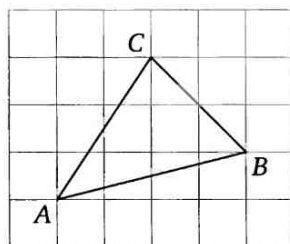
Уровень С

Описанная окружность

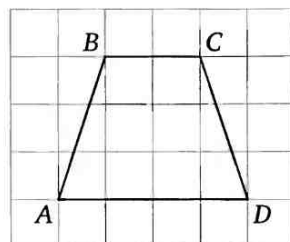
1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



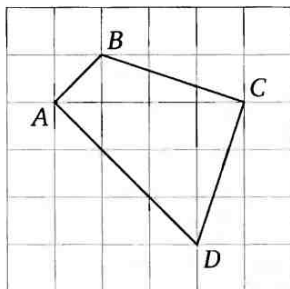
2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



3. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.

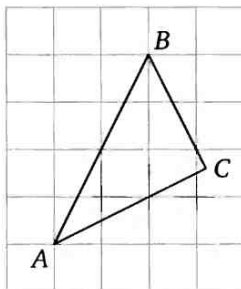


4. Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.

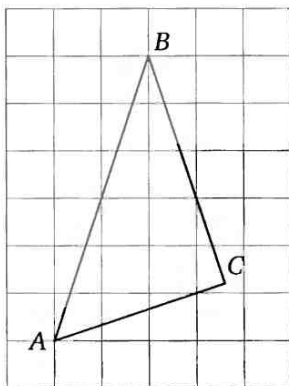


Вписанная окружность

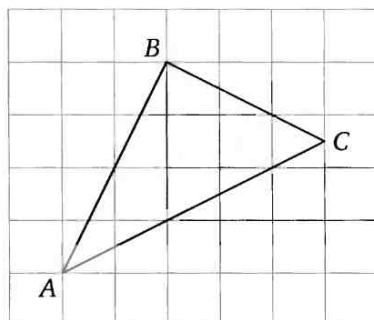
5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



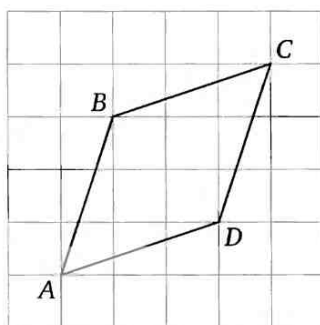
6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



7. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



8. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



7. Поворот, центральная и осевая симметрии

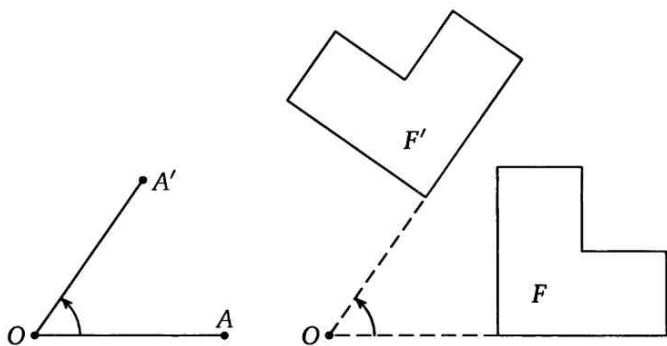
В этом параграфе предлагаются задачи на нахождение углов поворота и элементов симметрии фигур на плоскости.

Общие сведения

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол φ , если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$.

Преобразование плоскости, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ , называется поворотом вокруг точки O .

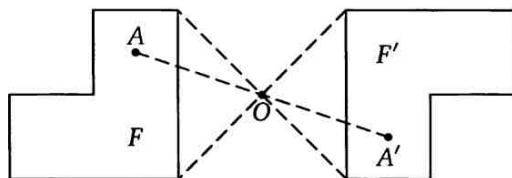
Говорят, что фигура F' получается поворотом фигуры F вокруг точки O , если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ .



Свойство 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

Точки A и A' называются симметричными относительно точки O , если O является серединой отрезка AA' . Точка O считается симметричной сама себе.

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка A' , называется центральной симметрией. Точка O при этом называется центром симметрии.



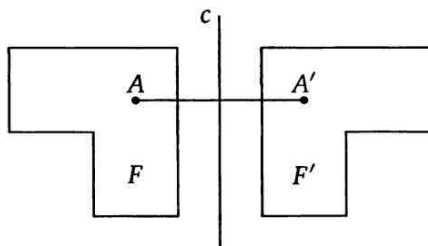
Две фигуры F и F' называются центрально-симметричными относительно центра O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется центрально-симметричной относительно центра O , если она симметрична сама себе.

Свойство 2. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками.

Две точки A и A' называются симметричными относительно прямой s , если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой s считается симметричной самой себе.

Преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется симметричная ей относительно прямой s точка A' , называется осевой симметрией. Прямая s при этом называется осью симметрии.

Две фигуры F и F' называются симметричными относительно оси s , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется симметричной относительно оси s , если она симметрична сама себе.

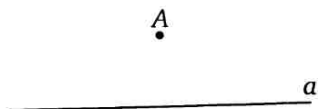


Свойство 3. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками.

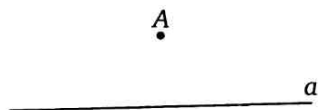
Задачи

Уровень А

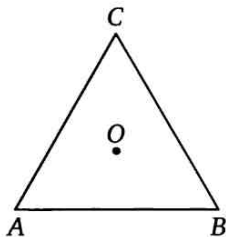
1. На какой угол нужно повернуть прямую вокруг точки, ей не принадлежащей, чтобы полученная прямая была параллельна исходной?



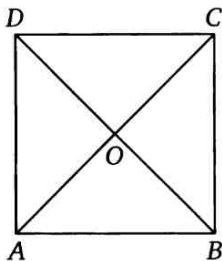
2. Прямая повернута вокруг точки A , находящейся от нее на расстоянии 1, на угол 180° . Найдите расстояние между исходной прямой и повернутой.



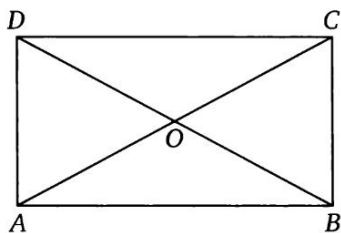
3. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный треугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы он совместился сам с собой?



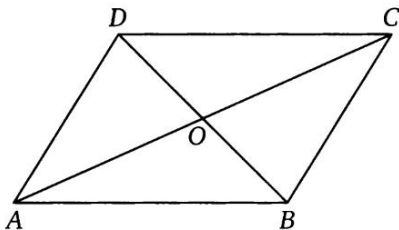
4. На какой наименьший угол нужно повернуть квадрат вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?



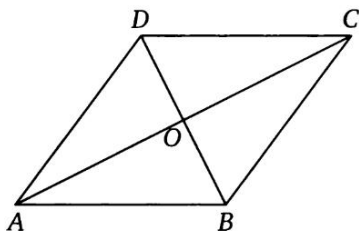
5. На какой наименьший угол нужно повернуть прямоугольник, отличный от квадрата, вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?



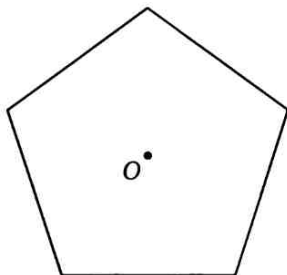
6. На какой наименьший угол нужно повернуть параллелограмм вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?



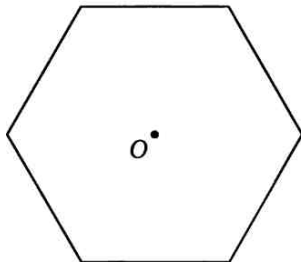
7. На какой наименьший угол нужно повернуть ромб, не являющийся квадратом, вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы он совместился сам с собой?



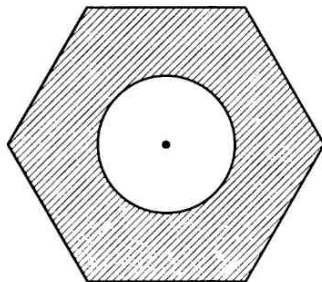
8. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный пятиугольник вокруг его центра, чтобы он совместился сам с собой?



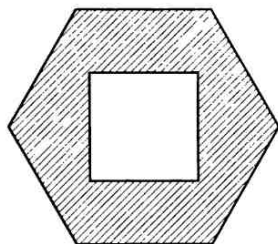
9. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный шестиугольник вокруг его центра, чтобы он совместился сам с собой?



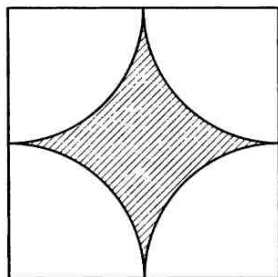
10. Из правильного шестиугольника вырезали круг, центром которого является центр шестиугольника. На какой наименьший угол нужно повернуть получившуюся фигуру вокруг центра вырезанного круга, чтобы она совместилась сама с собой?



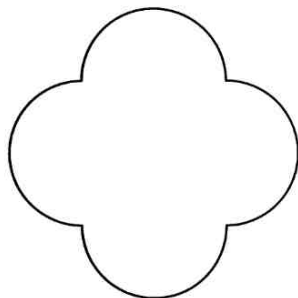
11. Из правильного шестиугольника вырезали квадрат, центр которого совпадает с центром правильного шестиугольника, а две его стороны параллельны сторонам этого шестиугольника. На какой наименьший угол нужно повернуть получившуюся фигуру вокруг центра квадрата, чтобы она совместилась сама с собой?



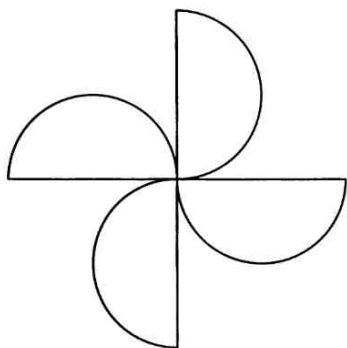
12. Из квадрата вырезали четыре круговых сектора. На какой наименьший угол нужно повернуть получившуюся фигуру вокруг центра квадрата, чтобы она совместилась сама с собой?



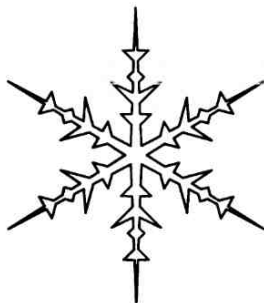
13. На какой наименьший угол нужно повернуть фигуру, составленную из квадрата и четырех полуокружностей, примыкающих к его сторонам, чтобы она совместилась сама с собой?



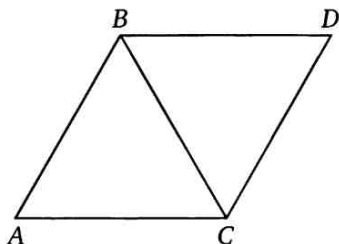
14. На какой наименьший угол нужно повернуть фигуру, составленную из четырех полуокругов с общей вершиной, чтобы она совпала сама с собой?



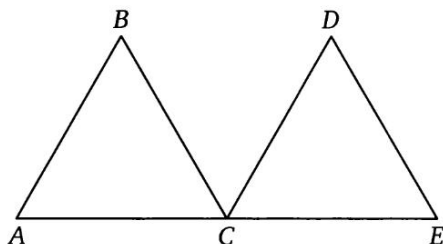
15. На какое наименьшее число градусов нужно повернуть снежинку, изображенную на рисунке, чтобы она совпала сама с собой?



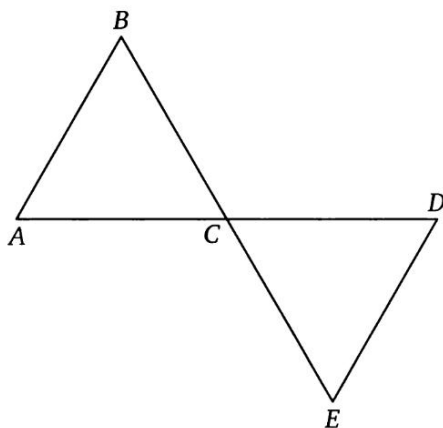
16. Правильный треугольник CBD получен из треугольника ABC поворотом против часовой стрелки вокруг точки B . Найдите угол поворота.



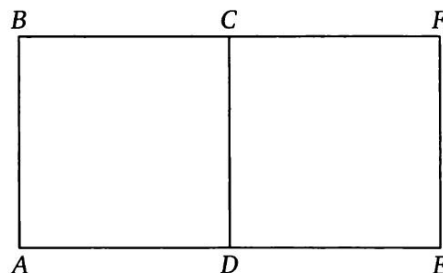
17. Правильный треугольник DEC получен из треугольника ABC поворотом по часовой стрелке вокруг точки C . Найдите угол поворота.



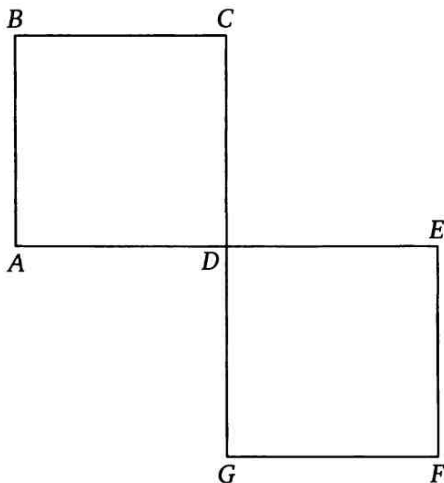
18. Правильный треугольник DEC получен из треугольника ABC поворотом вокруг точки C . Найдите угол поворота.



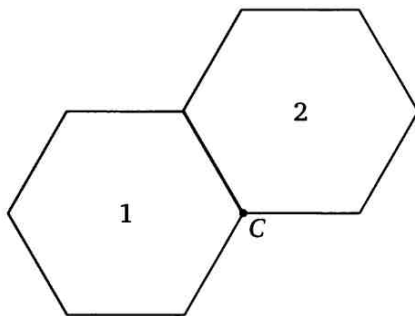
19. Квадрат $CFED$ получен из квадрата $ABCD$ поворотом по часовой стрелке вокруг точки D . Найдите угол поворота.



20. Квадрат $EFGD$ получен из квадрата $ABCD$ поворотом вокруг точки D . Найдите угол поворота.



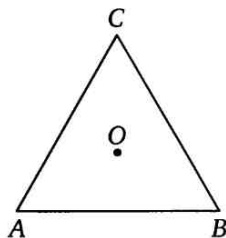
21. Правильный шестиугольник 2 получен из правильного шестиугольника 1 поворотом по часовой стрелке вокруг точки C . Найдите угол поворота.



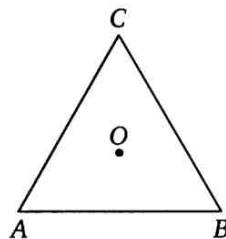
Уровень В

Поворот

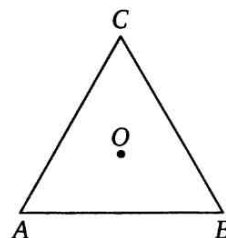
1. Правильный треугольник повернули на 60° вокруг его центра. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и повернутого?



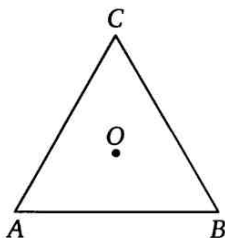
2. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный треугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного треугольника и повернутого был правильный шестиугольник?



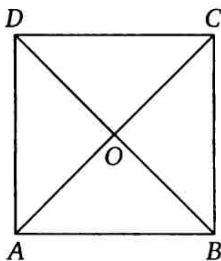
3. Правильный треугольник со стороной 1 повернули на 60° вокруг центра его описанной окружности. Найдите периметр многоугольника, являющегося общей частью исходного треугольника и повернутого.



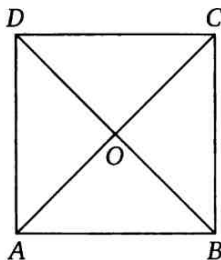
4. Правильный треугольник площади 3 повернули на 60° вокруг центра его описанной окружности. Найдите площадь многоугольника, являющегося общей частью исходного треугольника и повернутого.



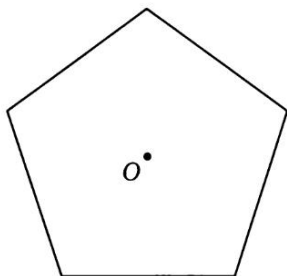
5. Квадрат повернули на 45° вокруг точки пересечения его диагоналей. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного квадрата и повернутого?



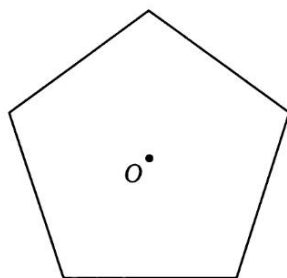
6. На какой наименьший угол нужно повернуть квадрат вокруг точки пересечения его диагоналей, чтобы общей частью исходного квадрата и повернутого был правильный восьмиугольник?



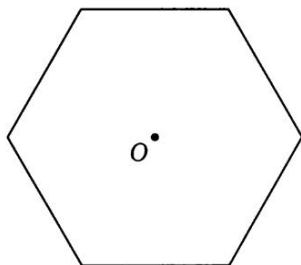
7. Правильный пятиугольник повернули на 36° вокруг центра его описанной окружности. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного пятиугольника и повернутого?



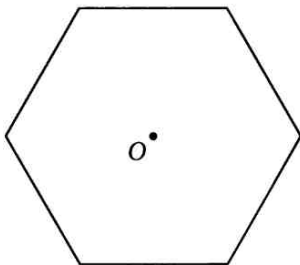
8. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный пятиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного пятиугольника и повернутого был правильный десятиугольник?



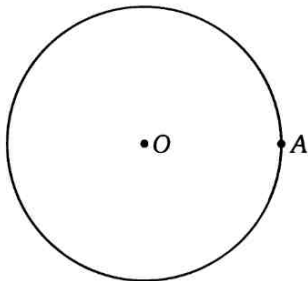
9. Правильный шестиугольник повернули на 30° вокруг центра его описанной окружности. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного шестиугольника и повернутого?



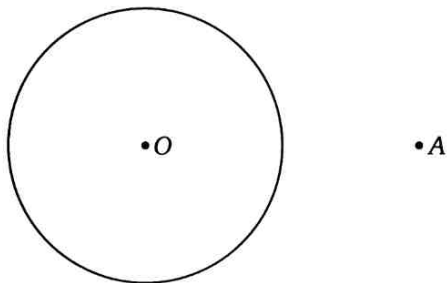
10. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный шестиугольник вокруг центра его описанной окружности, чтобы общей частью исходного шестиугольника и повернутого был правильный двенадцатиугольник?



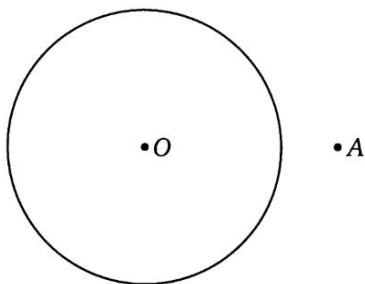
11. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки A , ей принадлежащей, чтобы повернутая окружность касалась исходной?



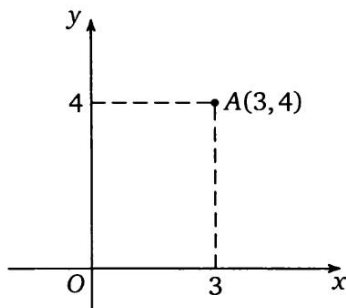
12. Точка A удалена от центра окружности радиуса 2 на расстояние 4. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки A , чтобы повернутая окружность касалась исходной?



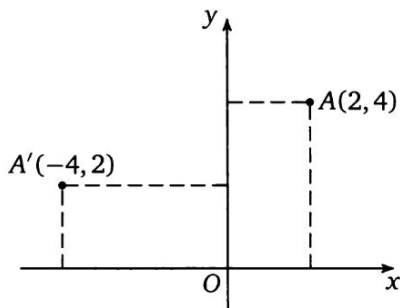
13. Точка A удалена от центра окружности радиуса 1 на расстояние $\sqrt{2}$. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки A , чтобы повернутая окружность касалась исходной?



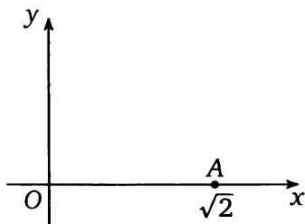
14. Точка A' получена поворотом точки $A(3, 4)$ против часовой стрелки вокруг начала координат O на угол 90° . Найдите ординату точки A' .



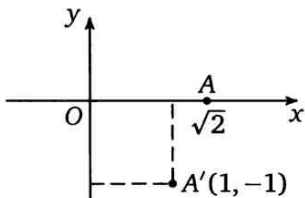
15. Точка $A'(-4, 2)$ получена поворотом точки $A(2, 4)$ против часовой стрелки вокруг начала координат O . Найдите угол поворота.



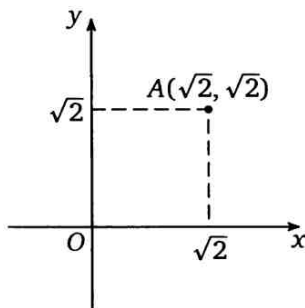
16. Точка A' получена поворотом точки $A(\sqrt{2}, 0)$ по часовой стрелке вокруг начала координат на угол 45° . Найдите ординату точки A' .



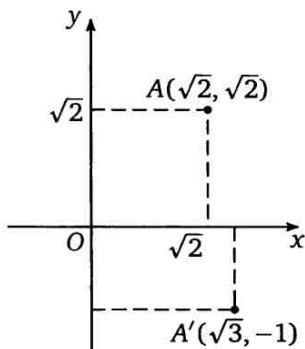
17. Точка $A'(1, -1)$ получена поворотом точки $A(\sqrt{2}, 0)$ по часовой стрелке вокруг начала координат. Найдите угол поворота.



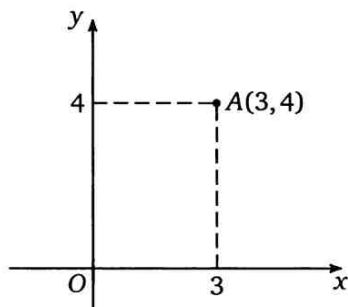
18. Точка A' получена поворотом точки $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ по часовой стрелке вокруг начала координат на угол 75° . Найдите ординату точки A' .



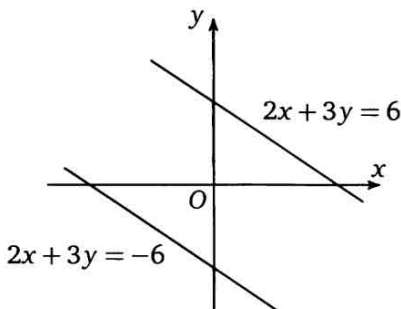
19. Точка $A'(\sqrt{3}, -1)$ получена поворотом точки $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ по часовой стрелке вокруг начала координат. Найдите угол поворота.



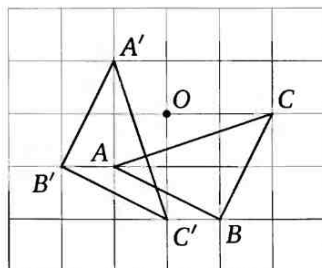
20. Точка A' получена поворотом точки $A(3, 4)$ против часовой стрелки вокруг начала координат на угол 180° . Найдите абсциссу точки A' .



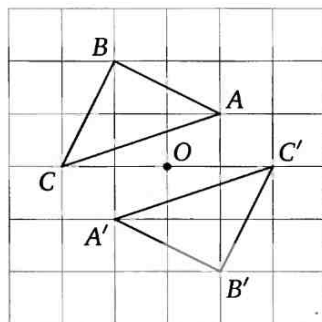
21. Прямая, заданная уравнением $2x + 3y = -6$, получена поворотом по часовой стрелке вокруг начала координат прямой, заданной уравнением $2x + 3y = 6$. Найдите угол поворота.



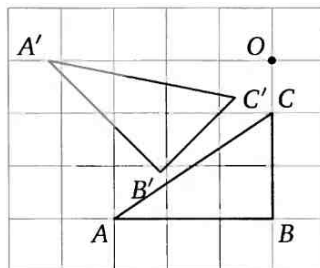
22. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC по часовой стрелке вокруг точки O . Найдите угол поворота.



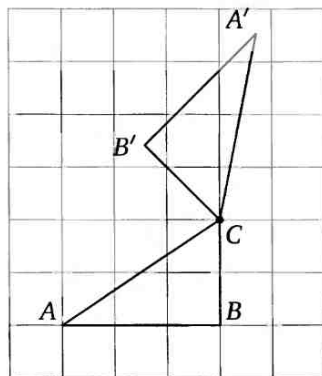
23. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC против часовой стрелки вокруг точки O . Найдите угол поворота.



24. Треугольник $A'B'C'$ получен поворотом треугольника ABC по часовой стрелке вокруг точки O . Найдите угол поворота.

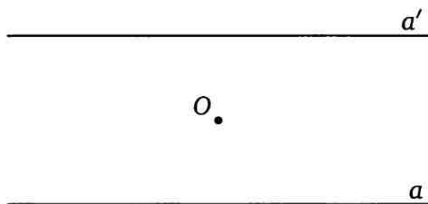


25. Треугольник $A'B'C$ получен поворотом треугольника ABC против часовой стрелки вокруг точки C . Найдите угол поворота.

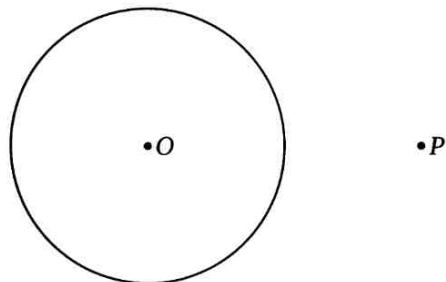


Центральная симметрия

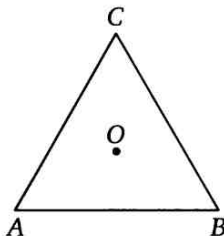
26. Прямая a' центрально-симметрична прямой a относительно центра O , отстоящего от прямой a на расстояние 2. Найдите расстояние между прямыми a и a' .



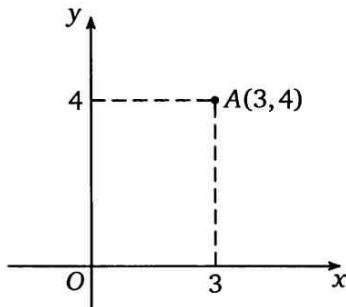
27. Точка P удалена от центра единичной окружности на расстояние 1. Найдите расстояние между центром этой окружности и центром окружности, центрально-симметричной ей относительно точки P .



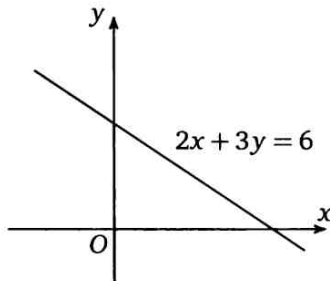
28. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью правильного треугольника и треугольника, центрально-симметричного ему относительно центра описанной окружности?



29. Найдите ординату точки, центрально-симметричной точке $A(3, 4)$ относительно начала координат.

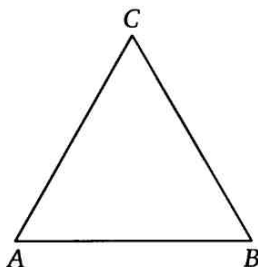


30. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, центрально-симметричной относительно начала координат прямой, заданной уравнением $2x + 3y = 6$, с осью Ox .

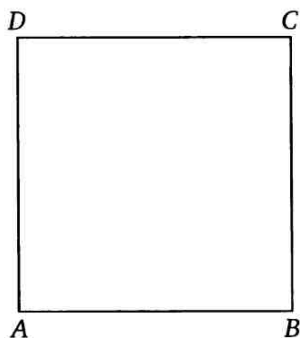


Осевая симметрия

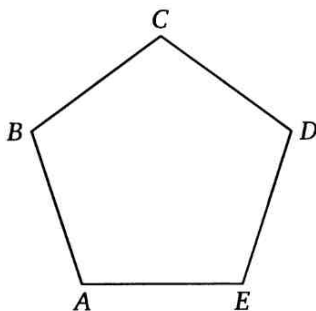
31. Сколько осей симметрии имеет правильный треугольник?



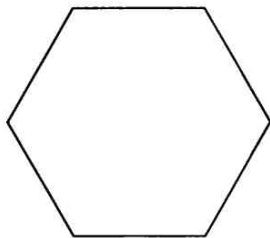
32. Сколько осей симметрии имеет квадрат?



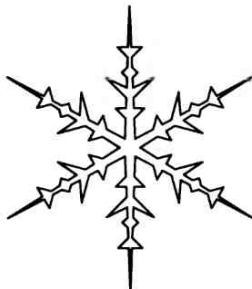
33. Сколько осей симметрии имеет правильный пятиугольник?



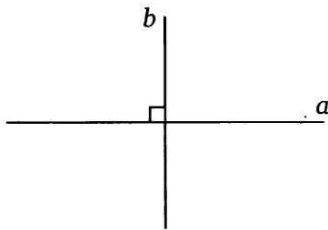
34. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?



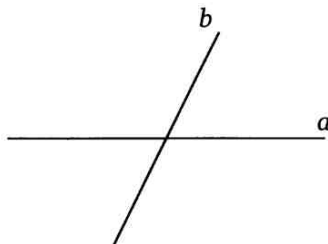
35. Сколько осей симметрии имеет снежинка?



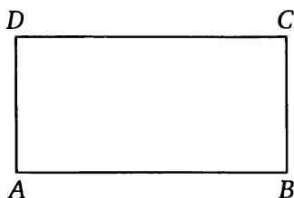
36. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из двух прямых, пересекающихся под прямым углом?



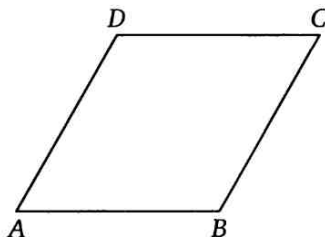
37. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из двух прямых, пересекающихся под углом 60° ?



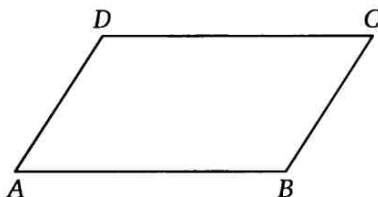
38. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, отличный от квадрата?



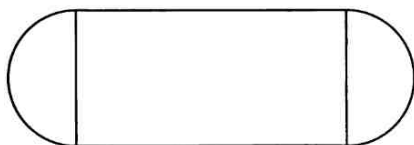
39. Сколько осей симметрии имеет ромб, отличный от квадрата?



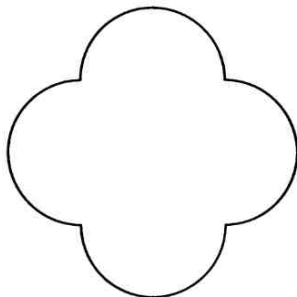
40. Сколько осей симметрии имеет параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба?



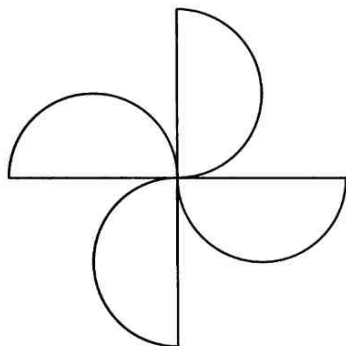
41. Сколько осей симметрии имеет поле стадиона в форме прямоугольника с примыкающими к нему с двух сторон полукругами.



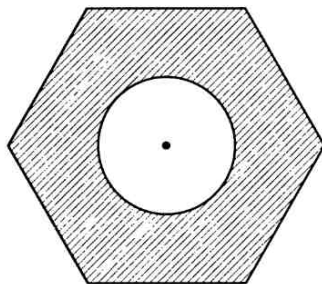
42. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из квадрата и четырех полукругов, примыкающих к его сторонам?



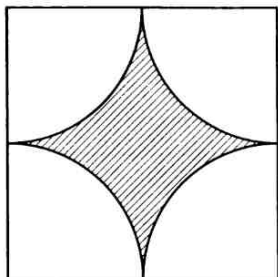
43. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из четырех полукругов с общей вершиной?



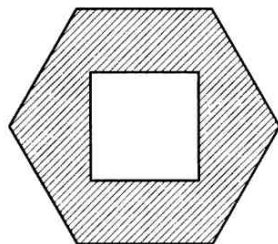
44. Из правильного шестиугольника вырезан круг, центром которого является центр окружности, описанной около этого шестиугольника. Сколько осей симметрии имеет получившаяся фигура?



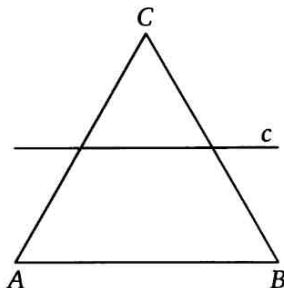
45. Из квадрата вырезали четыре круговых сектора. Сколько осей симметрии имеет получившаяся фигура?



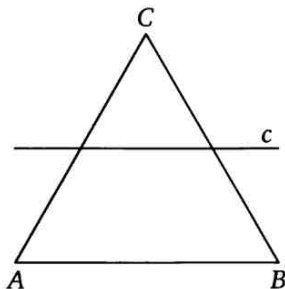
46. Из правильного шестиугольника вырезали квадрат, центр которого совпадает с центром правильного шестиугольника, а две его стороны параллельны сторонам этого шестиугольника. Сколько осей симметрии имеет получившаяся фигура?



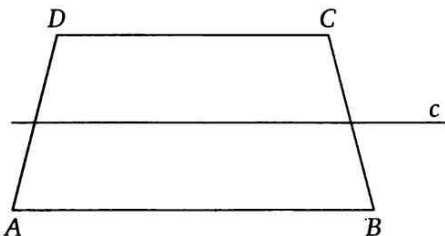
47. Правильный треугольник со стороной 1 симметрично отразили относительно прямой, содержащей его среднюю линию. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и симметричного?



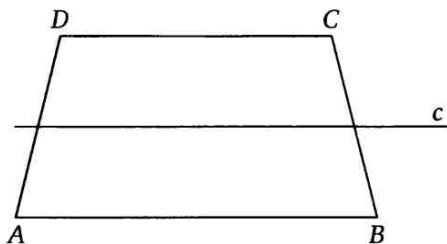
48. Правильный треугольник площади 2 симметрично отразили относительно прямой, содержащей его среднюю линию. Какую площадь имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и симметричного?



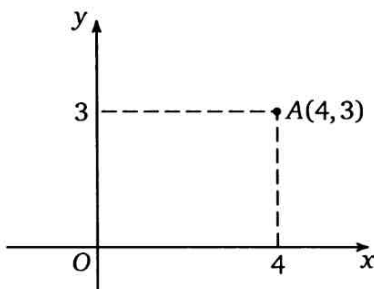
49. Равнобедренную трапецию, основания которой равны 6 и 8, а боковые стороны равны 4, симметрично отразили относительно прямой, содержащей ее среднюю линию. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходной трапеции и симметричной?



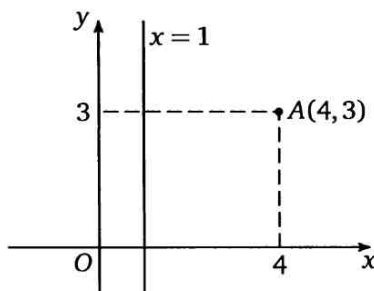
50. Равнобедренную трапецию, основания которой равны 6 и 8, а высота равна 4, симметрично отразили относительно прямой, содержащей ее среднюю линию. Какую площадь имеет многоугольник, являющийся общей частью исходной трапеции и симметричной?



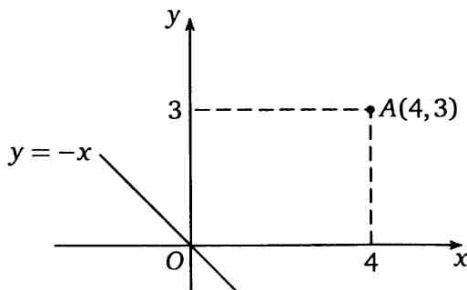
51. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(4, 3)$ относительно оси Ox .



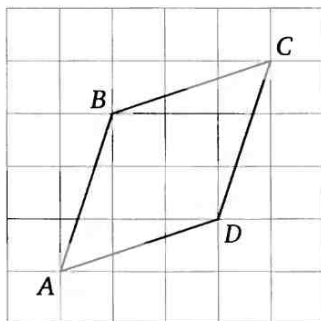
52. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(4, 3)$ относительно прямой $x = 1$.



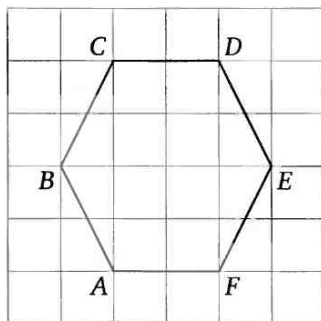
53. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(4, 3)$ относительно прямой $y = -x$.



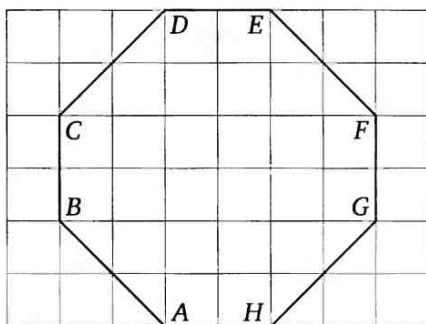
54. Сколько осей симметрии имеет четырехугольник $ABCD$?



55. Сколько осей симметрии имеет шестиугольник $ABCDEF$?



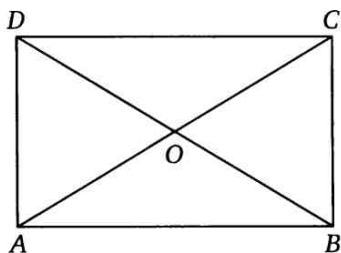
56. Сколько осей симметрии имеет восьмиугольник $ABCDEFGH$?



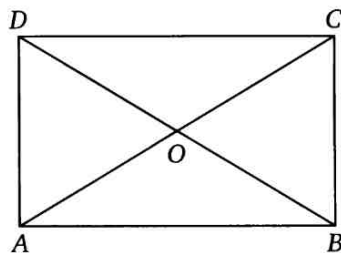
Уровень С

Поворот

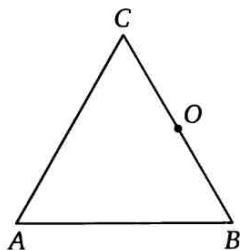
1. Прямоугольник со сторонами 6 и 10 повернули вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° . Найдите периметр общей части исходного прямоугольника и повернутого.



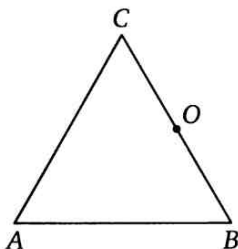
2. Прямоугольник со сторонами 6 и 10 повернули вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° . Найдите площадь общей части исходного прямоугольника и повернутого.



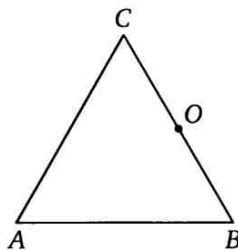
3. Правильный треугольник повернули вокруг середины его стороны на угол 60° . Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного треугольника и повернутого?



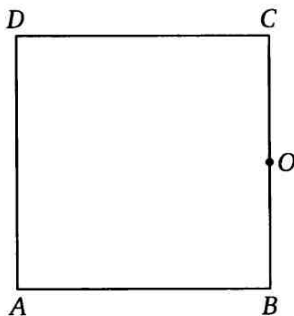
4. Правильный треугольник со стороной 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 60° . Найдите периметр многоугольника, являющегося общей частью исходного треугольника и повернутого.



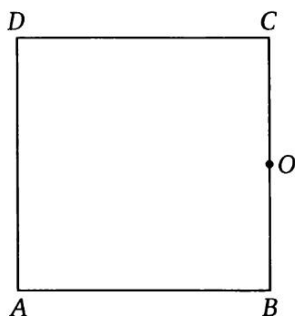
5. Правильный треугольник площади 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 60° . Найдите площадь многоугольника, являющегося общей частью исходного треугольника и повернутого.



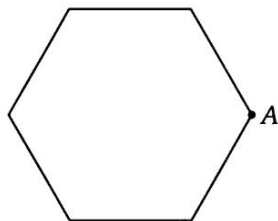
6. Квадрат со стороной 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 90° . Найдите периметр многоугольника, являющегося общей частью исходного квадрата и повернутого.



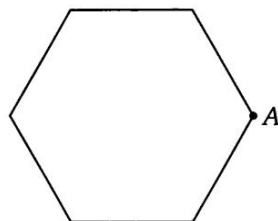
7. Квадрат со стороной 2 повернули вокруг середины его стороны на угол 90° . Найдите площадь многоугольника, являющегося общей частью исходного квадрата и повернутого.



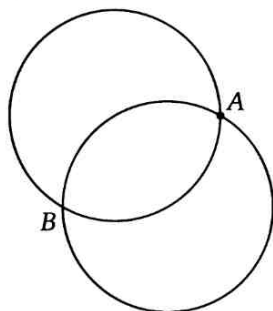
8. Правильный шестиугольник со стороной 2 повернули на 60° вокруг одной из его вершин. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного шестиугольника и повернутого?



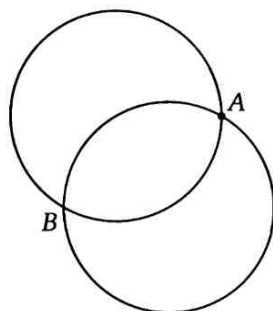
9. Правильный шестиугольник площади 3 повернули на 60° вокруг одной из его вершин. Какую площадь имеет многоугольник, являющийся общей частью исходного шестиугольника и повернутого?



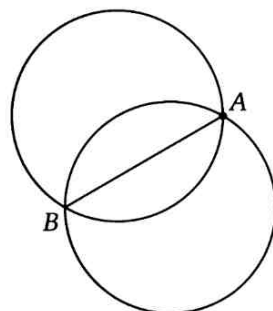
10. Окружность повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 60° . Найдите градусную величину дуги AB исходной окружности, лежащей внутри повернутой окружности.



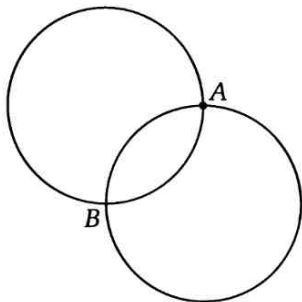
11. Окружность радиуса 2 повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 60° . Найдите расстояние между центрами исходной окружности и повернутой окружности.



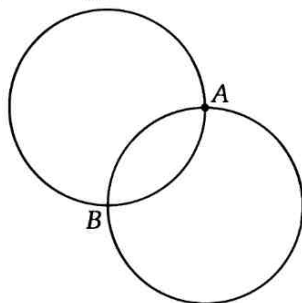
12. Окружность радиуса $\sqrt{3}$ повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 60° . Найдите длину хорды AB , соединяющей точки пересечения исходной окружности и повернутой окружности.



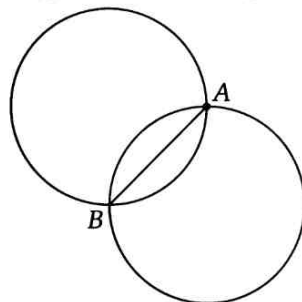
13. Окружность повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 90° . Найдите градусную величину дуги AB исходной окружности, лежащей внутри повернутой окружности.



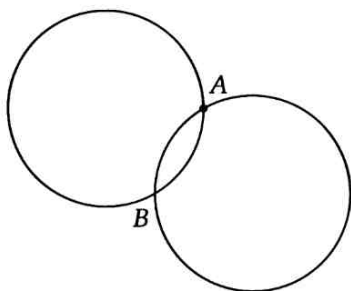
14. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 90° . Найдите расстояние между центрами исходной окружности и повернутой окружности.



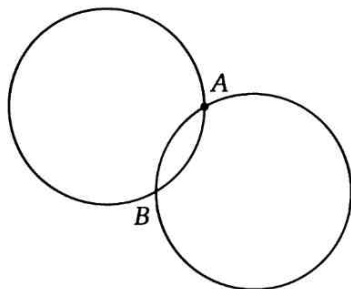
15. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 90° . Найдите длину хорды AB , соединяющей точки пересечения исходной окружности и повернутой окружности.



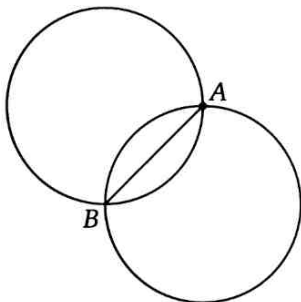
16. Окружность повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 120° . Найдите градусную величину дуги AB исходной окружности, лежащей внутри окружности, полученной в результате поворота.



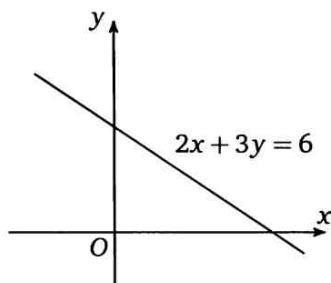
17. Окружность радиуса $\sqrt{3}$ повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 120° . Найдите расстояние между центрами исходной окружности и окружности, полученной в результате поворота.



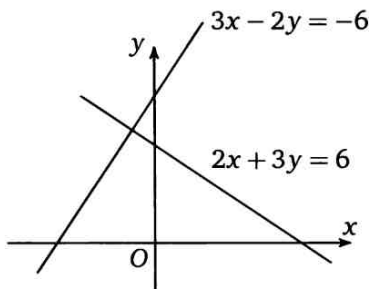
18. Окружность радиуса 2 повернута вокруг точки A , ей принадлежащей, на угол 120° . Найдите длину хорды AB , соединяющей точки пересечения исходной окружности и окружности, полученной в результате поворота.



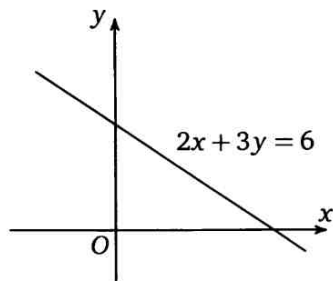
19. Прямая, заданная уравнением $2x + 3y = 6$, повернута против часовой стрелки вокруг начала координат на угол 90° . Найдите ординату точки пересечения полученной прямой с осью Oy .



20. Прямая, заданная уравнением $3x - 2y = -6$ получена поворотом прямой, заданной уравнением $2x + 3y = 6$, против часовой стрелки вокруг начала координат. Найдите угол поворота.

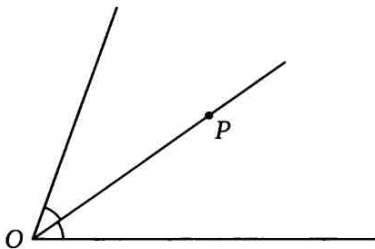


21. Прямая, заданная уравнением $2x + 3y = 6$, повернута вокруг начала координат на угол 180° . Найдите абсциссу точки пересечения полученной прямой с осью Ox .

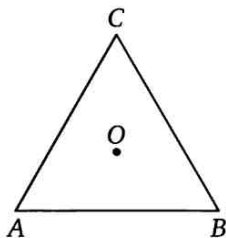


Центральная симметрия

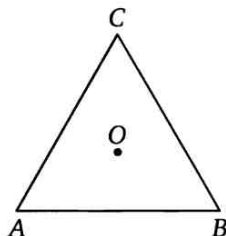
22. Точка P принадлежит биссектрисе угла в 60° и удалена от его вершины O на расстояние $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Какой периметр имеет многоугольник, ограниченный сторонами данного угла и сторонами угла, центрально-симметричного ему относительно точки P ?



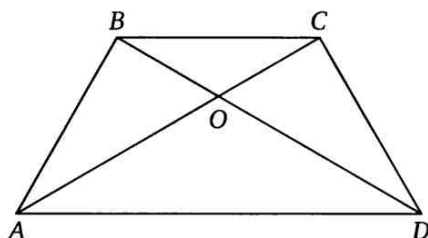
23. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью правильного треугольника со стороной 2 и треугольника, центрально-симметричного ему относительно центра описанной окружности?



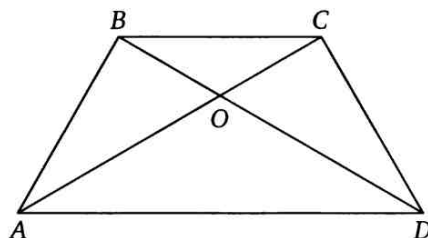
24. Какую площадь имеет многоугольник, являющийся общей частью правильного треугольника площади 6 и треугольника, центрально-симметричного ему относительно центра описанной окружности?



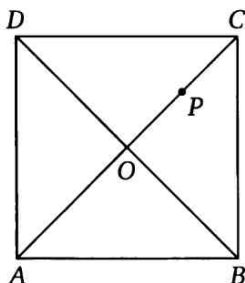
25. Сколько сторон имеет многоугольник, являющийся общей частью равнобедренной трапеции и трапеции, центрально-симметричной ей относительно точки пересечения ее диагоналей?



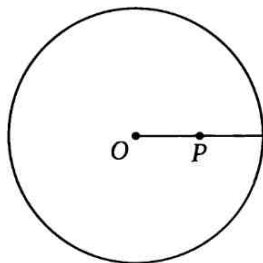
26. Основания трапеции равны 6 и 12, боковые стороны равны 6. Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью этой трапеции и трапеции, центрально-симметричной ей относительно точки пересечения ее диагоналей?



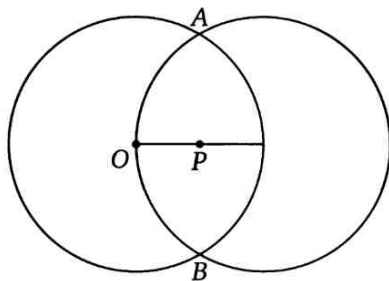
27. Точка P принадлежит диагонали AC квадрата $ABCD$ со стороной 2 и делит ее в отношении 3:1, считая от вершины A . Какой периметр имеет многоугольник, являющийся общей частью квадрата $ABCD$ и квадрата, центрально-симметричного ему относительно центра P ?



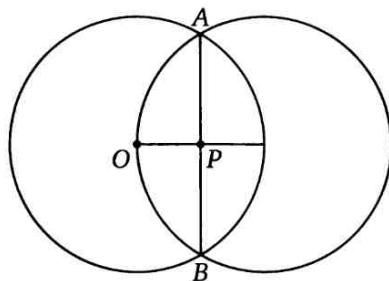
28. Точка P принадлежит радиусу окружности и делит его пополам. Найдите расстояние между центром этой окружности и центром центрально-симметричной ей окружности относительно точки P , если радиус окружности равен 2.



29. Точка P принадлежит радиусу окружности и делит его пополам. Найдите градусную величину дуги AB этой окружности, лежащей внутри окружности, центрально-симметричной ей относительно точки P .



30. Радиус окружности равен $\sqrt{3}$. Точка P принадлежит радиусу этой окружности и делит его пополам. Найдите величину хорды AB этой окружности, соединяющей точки пересечения исходной окружности и окружности, центрально-симметричной ей относительно точки P .

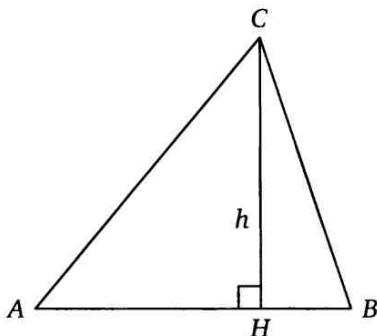


8. Площадь

В этом параграфе собраны задачи на нахождение площадей различных фигур на плоскости. При этом используются формулы площадей треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, многоугольника, описанного около окружности, круга, кругового сектора, отношения площадей подобных фигур.

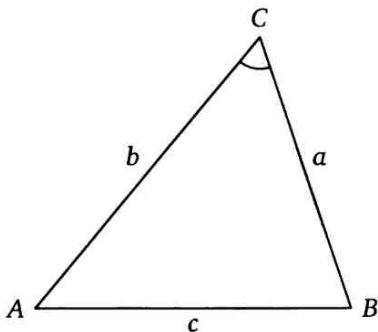
Общие сведения

Теорема 1. *Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.*



$$S = \frac{1}{2}a \cdot h$$

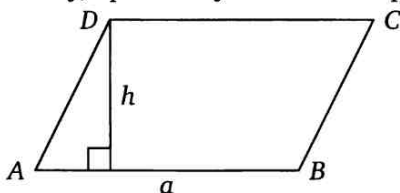
Теорема 2. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.*



$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

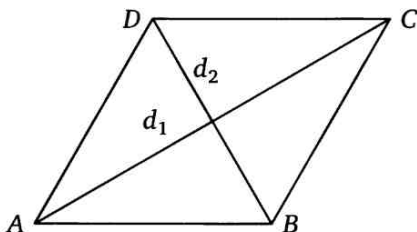
Теорема 3. *Площадь треугольника выражается формулой (формула Герона) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр.*

Теорема 4. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



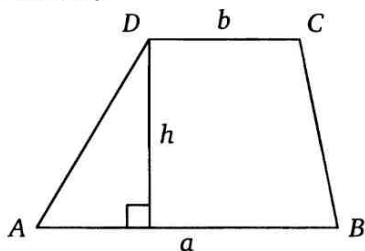
$$S = ah$$

Теорема 5. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.



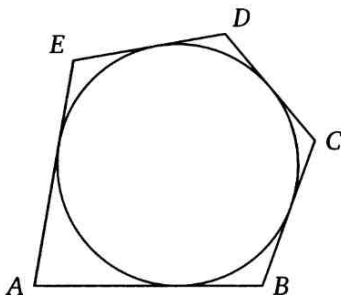
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

Теорема 6. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



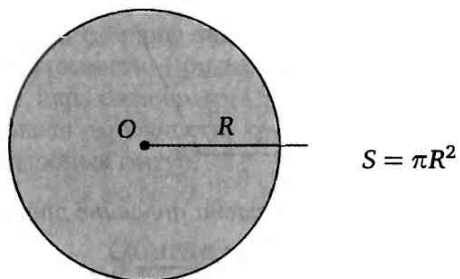
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Теорема 7. Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса r , выражается формулой $S = pr$, где p — полупериметр многоугольника.

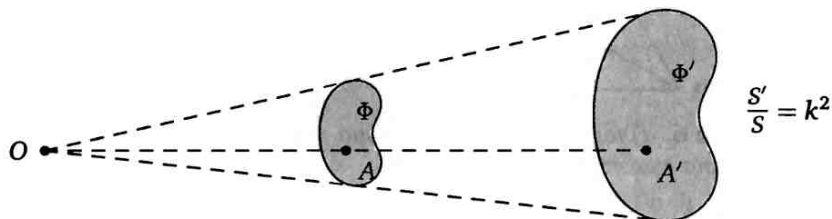


$$S = pr$$

Теорема 8. *Площадь круга равна половине произведения длины его окружности на радиус.*

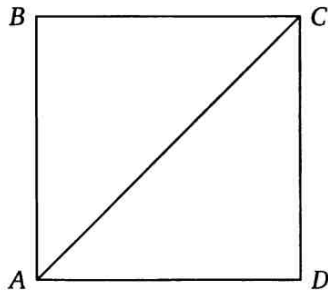


Теорема 9. *Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*

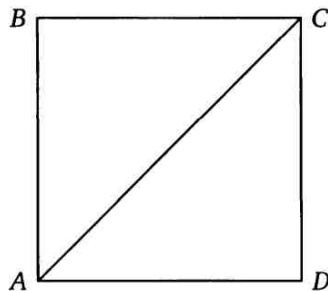


Задачи**Уровень А**

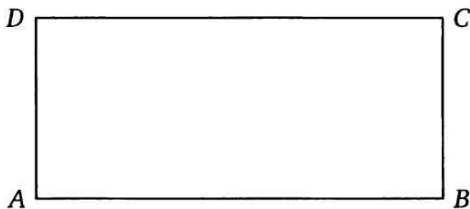
1. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.



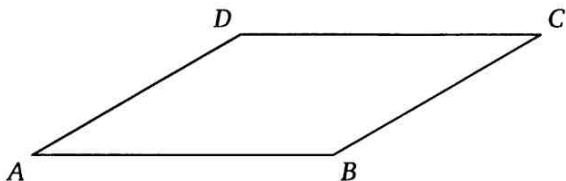
2. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.



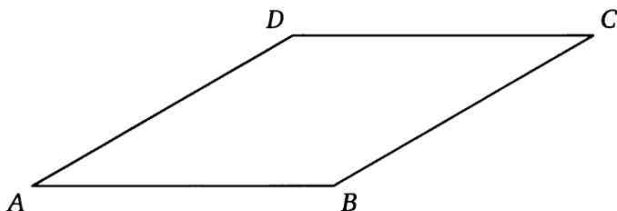
3. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 4 и 9.



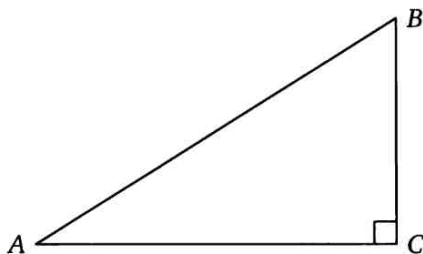
4. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 8 и 10, а угол между ними равен 30°



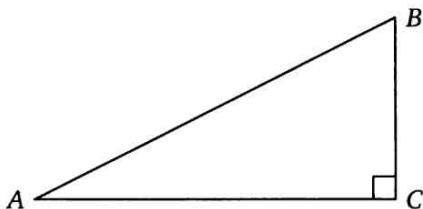
5. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен 150°



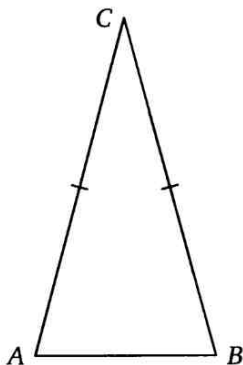
6. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 5 и 8.



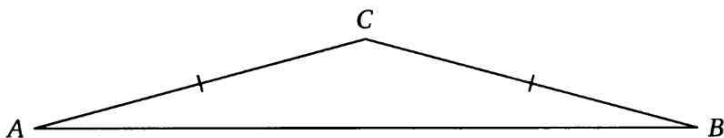
7. Площадь прямоугольного треугольника равна 16. Один из его катетов равен 4. Найдите другой катет.



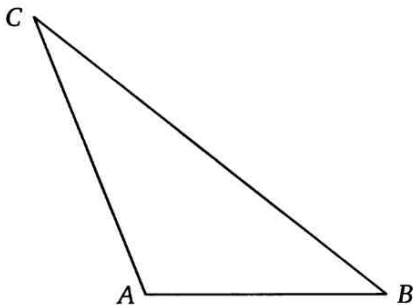
8. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.



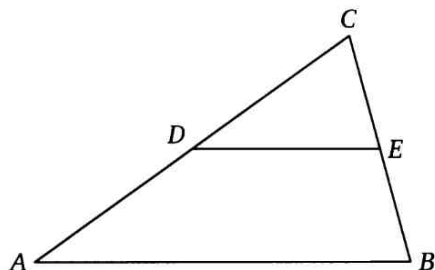
9. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.



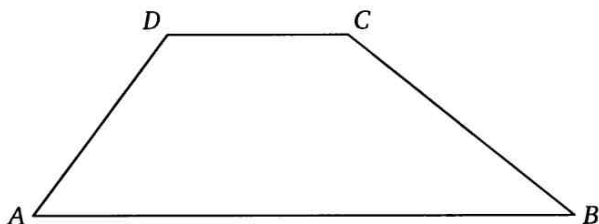
10. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°



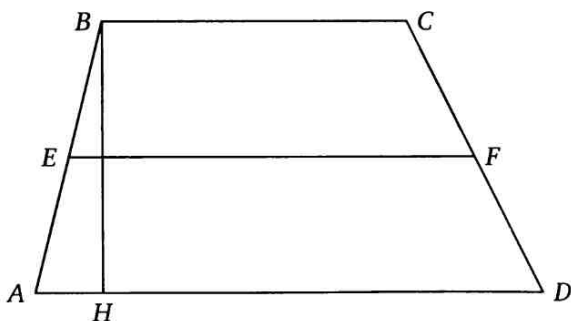
11. Площадь треугольника ABC равна 4. DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE .



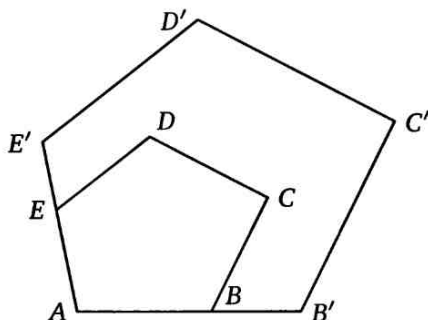
12. Основания трапеции равны 1 и 3, высота 1. Найдите площадь трапеции.



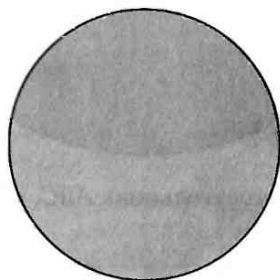
13. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 3 и 2. Найдите площадь трапеции.



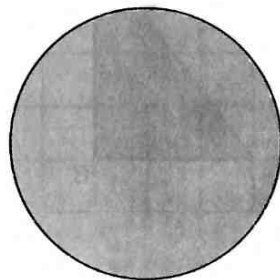
14. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.



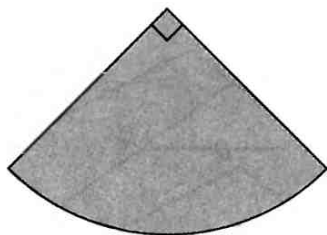
15. Найдите площадь круга, если длина окружности, ограничивающей его, равна $\sqrt{\pi}$.



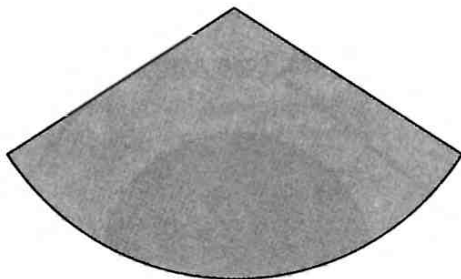
16. Площадь круга равна $\frac{1}{\pi}$. Найдите длину окружности, ограничивающей его.



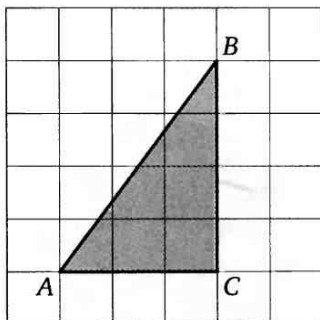
17. Найдите площадь сектора круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, центральный угол которого равен 90°



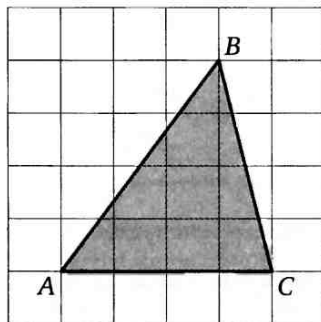
18. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.



19. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.

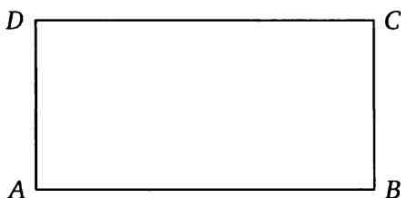


20. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.

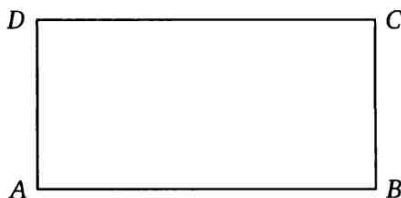


Уровень В

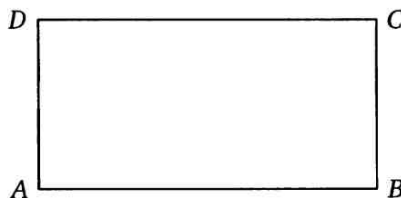
1. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18 и одна сторона на 3 больше другой.



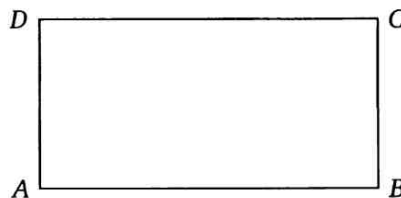
2. Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.



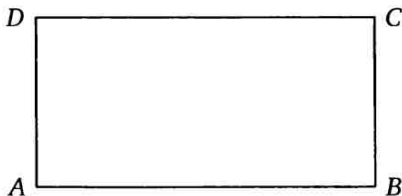
3. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.



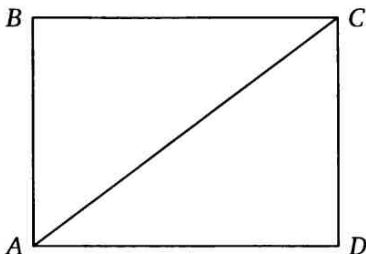
4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.



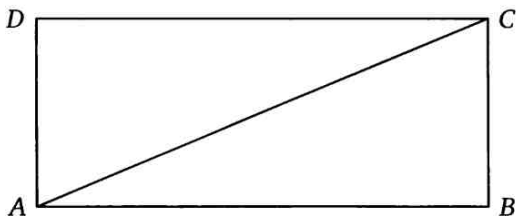
5. Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите большую сторону прямоугольника.



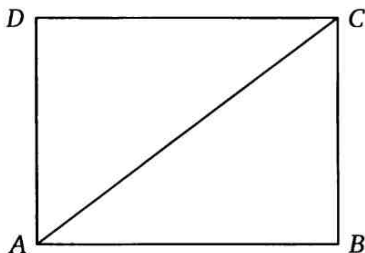
6. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.



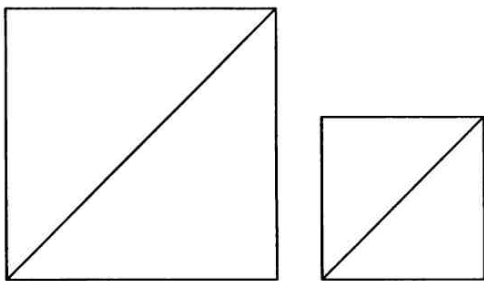
7. Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.



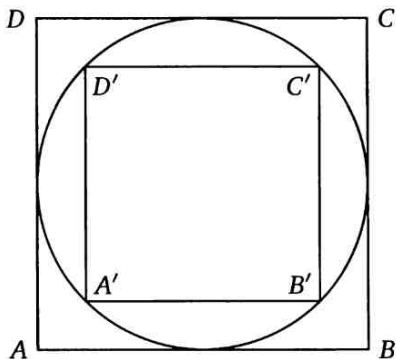
8. Сторона прямоугольника относится к его диагонали как 4 : 5, а другая сторона равна 6. Найдите площадь прямоугольника.



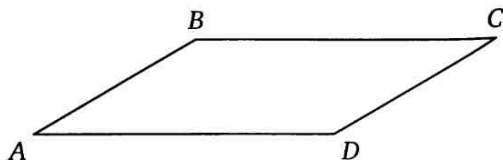
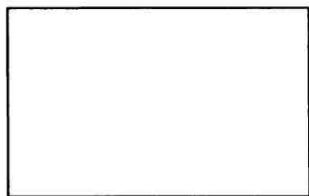
9. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.



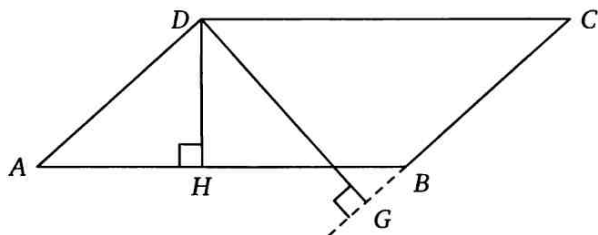
10. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?



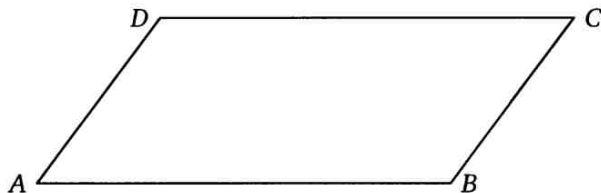
11. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.



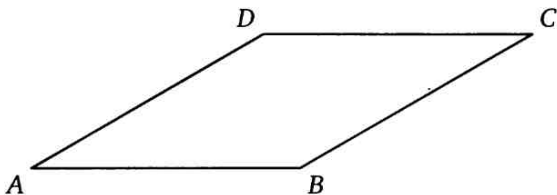
12. Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



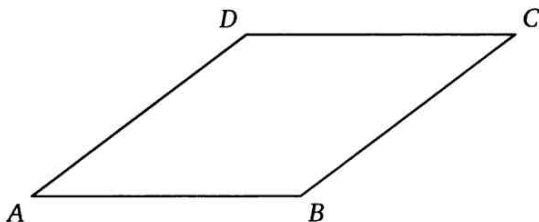
13. Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите бóльшую высоту этого параллелограмма.



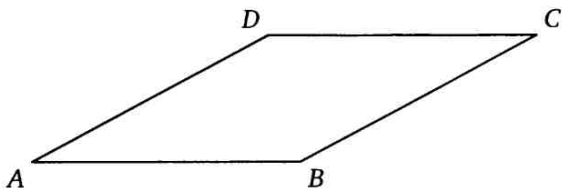
14. Найдите площадь ромба, если его высота равна 2, а острый угол 30°



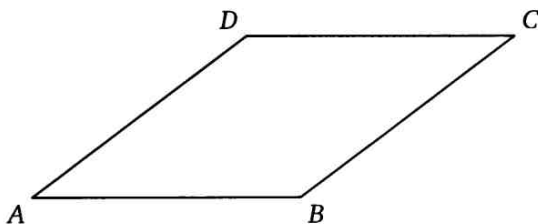
15. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.



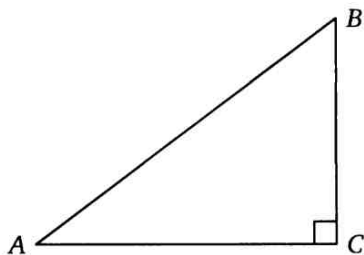
16. Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.



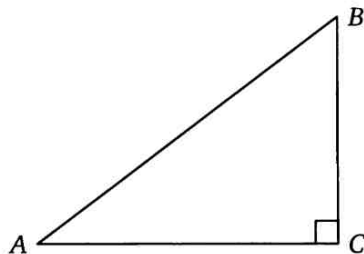
17. Площадь ромба равна 6. Одна из его диагоналей в 3 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.



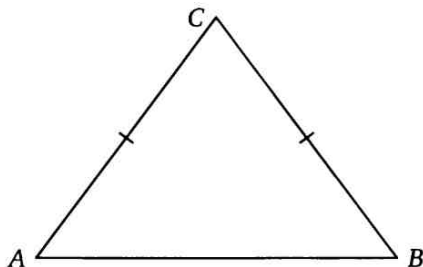
18. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.



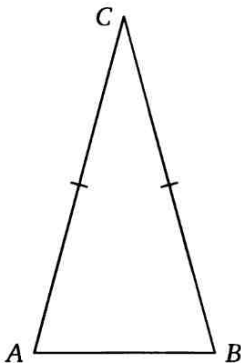
19. Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.



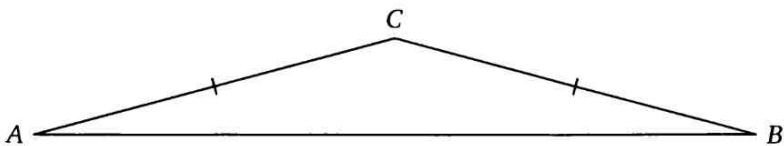
20. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.



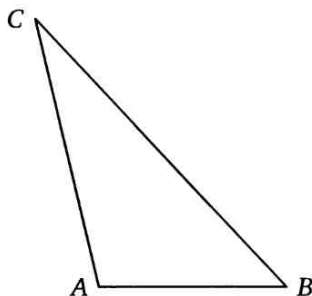
21. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.



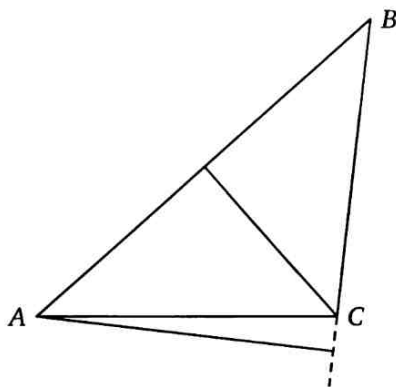
22. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 100.



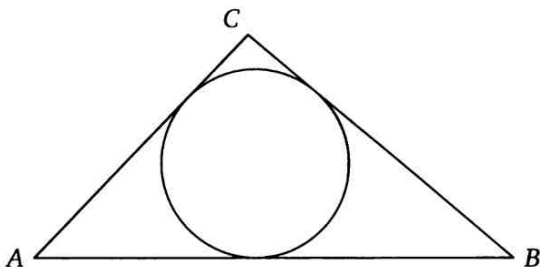
23. Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8. Найдите угол между этими сторонами.



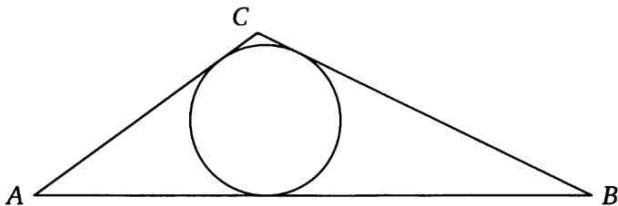
24. У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?



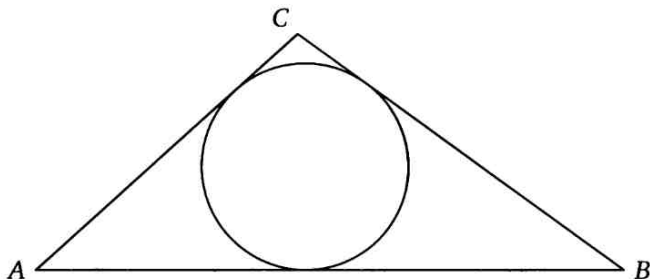
25. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



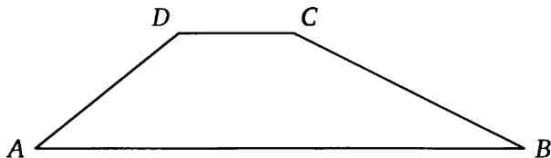
26. Площадь треугольника равна 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите периметр этого треугольника.



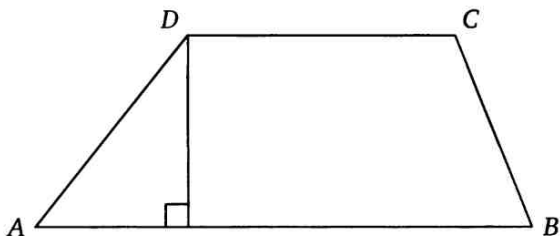
27. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.



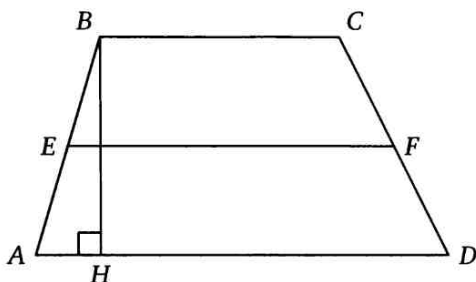
28. Основания трапеции равны 8 и 34, площадь равна 168. Найдите ее высоту.



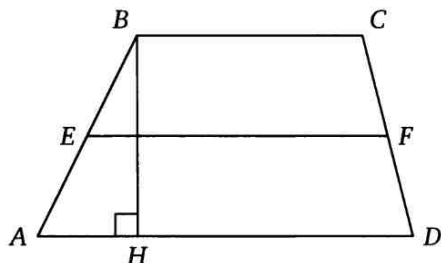
29. Основание трапеции равно 13, высота равна 5, а площадь равна 50. Найдите второе основание трапеции.



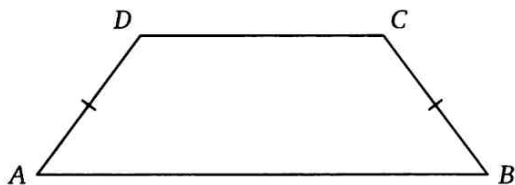
30. Высота трапеции равна 10, площадь равна 150. Найдите среднюю линию трапеции.



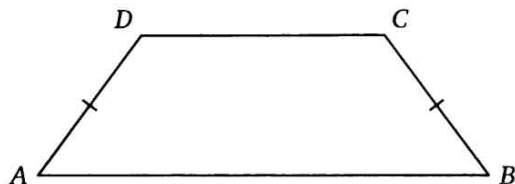
31. Средняя линия трапеции равна 12, площадь равна 96. Найдите высоту трапеции.



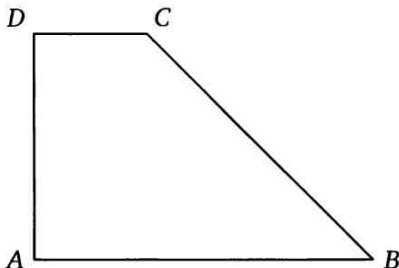
32. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



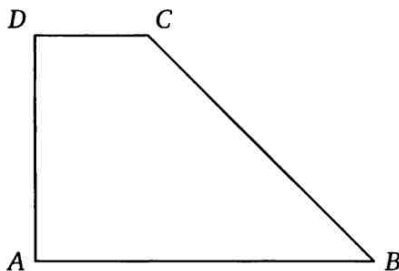
33. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.



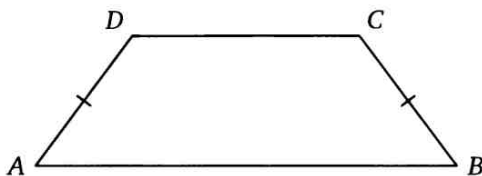
34. Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 6 и 2, а большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°



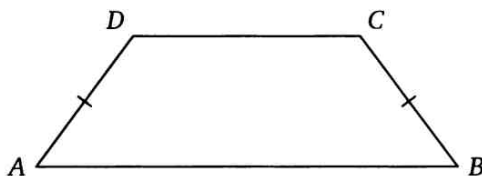
35. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции.



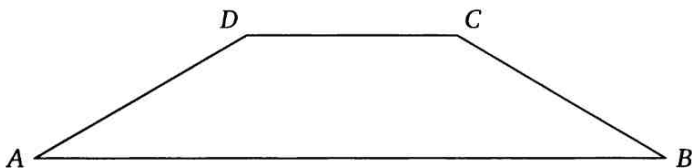
36. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.



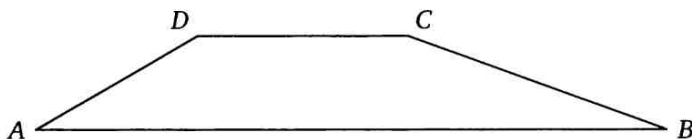
37. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.



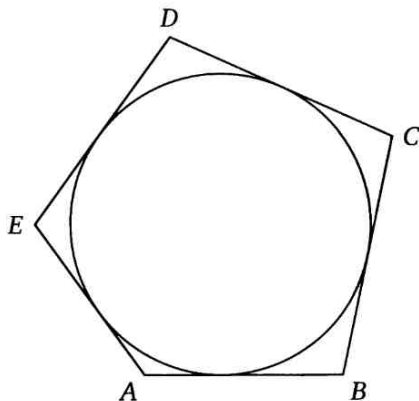
38. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150° . Найдите площадь трапеции.



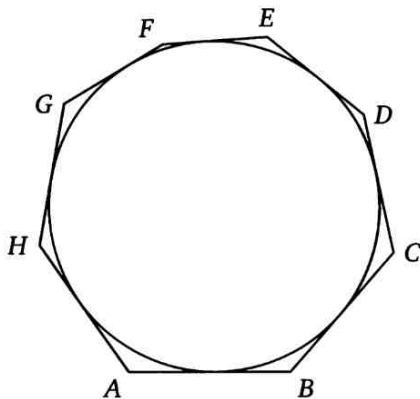
39. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне.



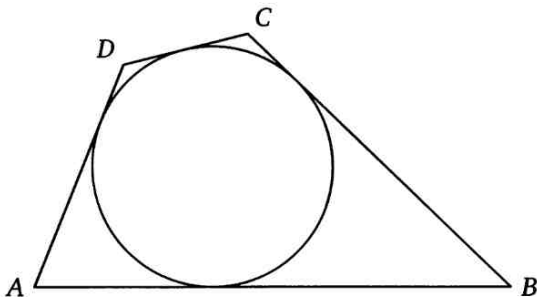
40. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, площадь которого равна 33. Найдите его периметр.



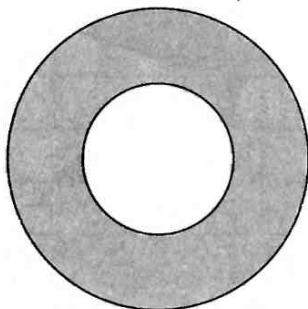
41. Около окружности, радиус которой равен 3, описан многоугольник, периметр которого равен 20. Найдите его площадь.



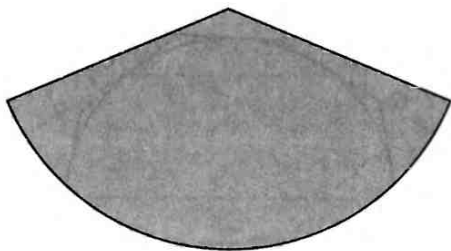
42. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равен 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.



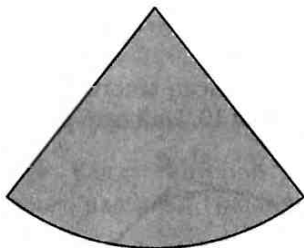
43. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.



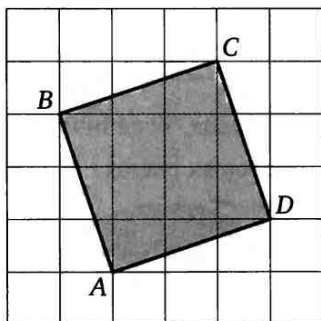
44. Найдите центральный угол сектора круга радиуса $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, площадь которого равна 6.



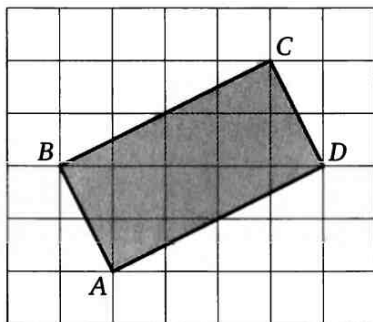
45. Площадь сектора круга радиуса 3 равна 6. Найдите длину его дуги.



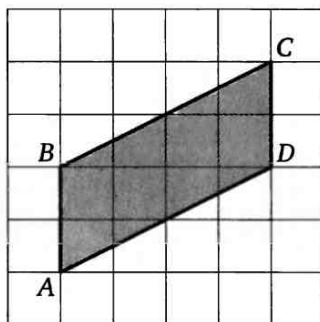
46. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



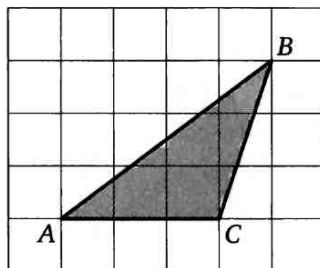
47. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



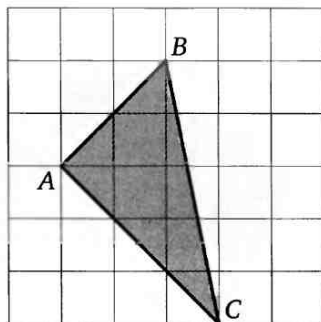
48. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



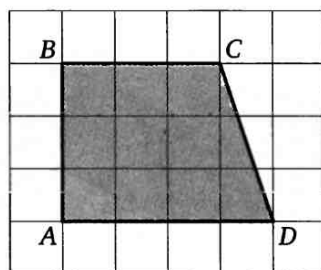
49. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



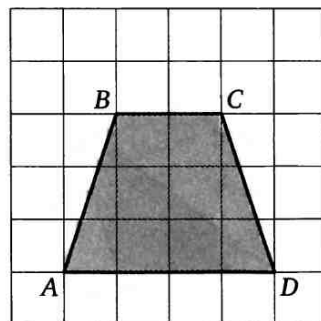
50. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



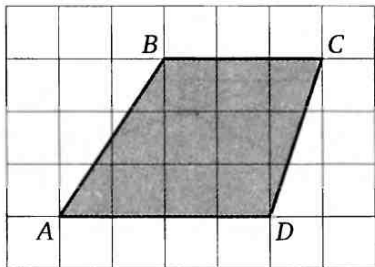
51. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



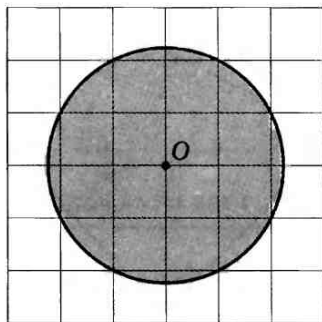
52. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



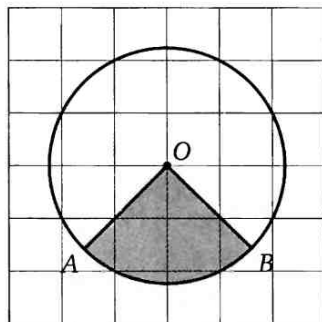
53. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



54. Найдите площадь S круга, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

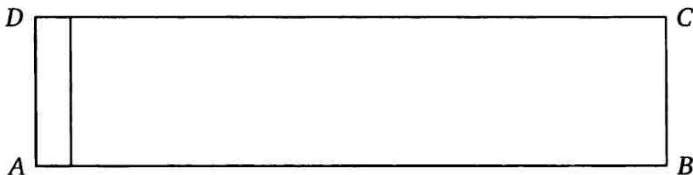


55. Найдите площадь S сектора, считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

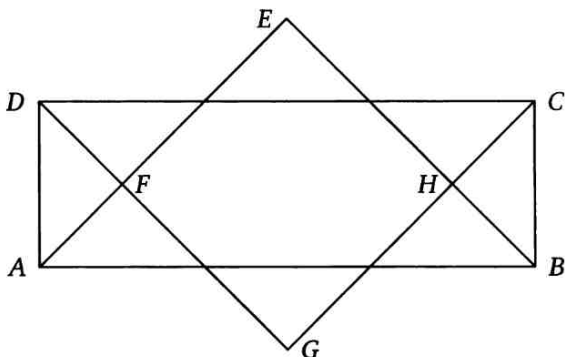


Уровень С

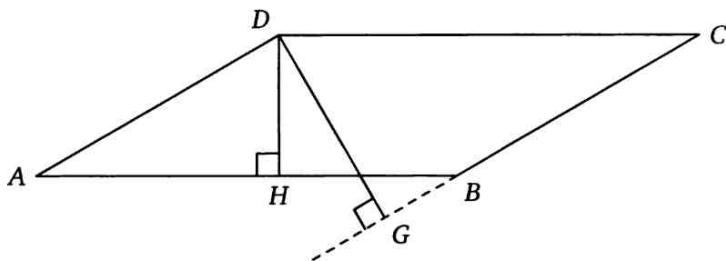
1. Прямоугольник со сторонами, равными 8 и 34, разделен отрезком на два подобных прямоугольника. Найдите площадь бóльшего из них.



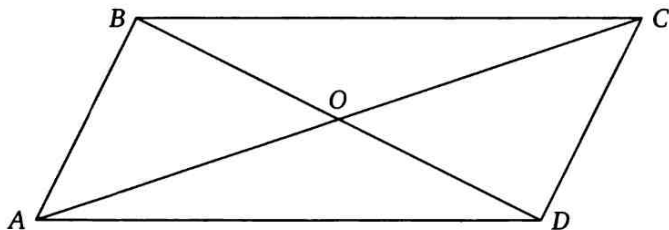
2. Стороны прямоугольника равны 6 и 2. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами углов этого прямоугольника.



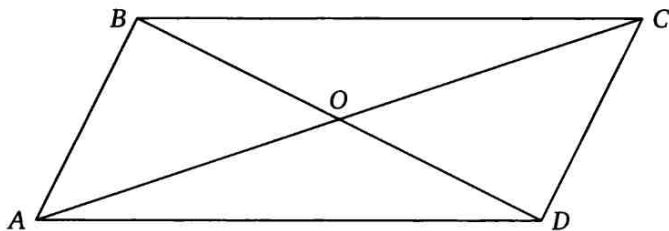
3. Острый угол параллелограмма равен 30° , а высоты равны 4 и 6. Найдите площадь параллелограмма.



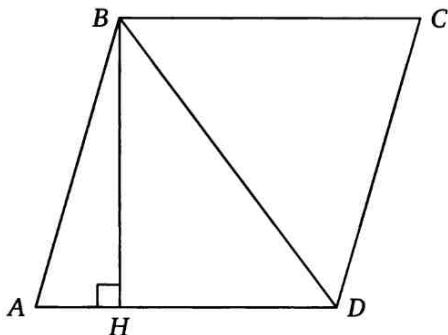
4. Диагонали параллелограмма равны 2 и $\sqrt{2}$, а угол между ними равен 45° . Найдите площадь параллелограмма.



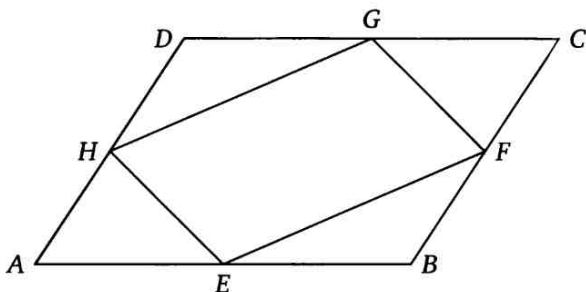
5. Диагонали параллелограмма равны 6 и $3\sqrt{2}$, а его площадь равна 9. Найдите угол между его диагоналями.



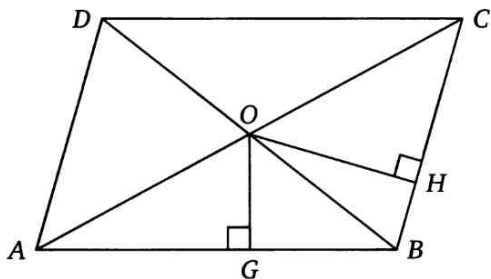
6. Найдите площадь ромба, если его высота равна 24, а меньшая диагональ равна 30.



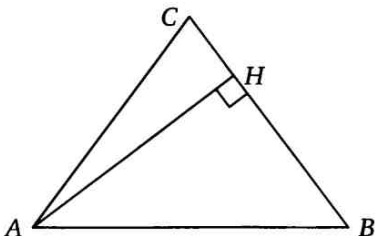
7. Середины сторон параллелограмма последовательно соединены между собой. Найдите площадь образовавшегося четырехугольника, если площадь данного параллелограмма равна 20.



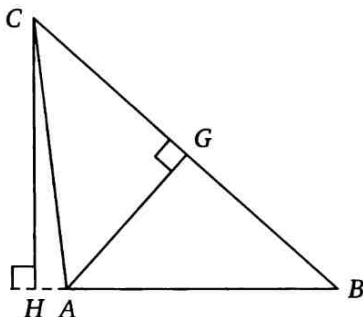
8. Площадь параллелограмма равна 36, а расстояния от точки пересечения диагоналей до его сторон равны соответственно 2 и 3. Найдите периметр параллелограмма.



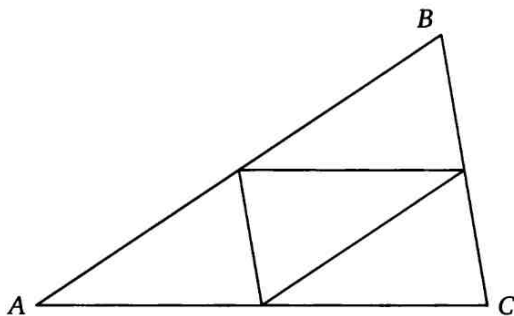
9. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 15, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.



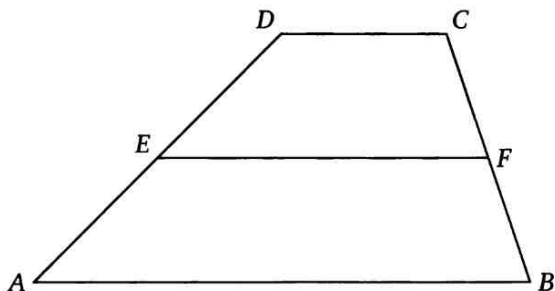
10. Сумма двух сторон треугольника равна 30, а высоты, опущенные на эти стороны, равны 8 и 12. Найдите площадь треугольника.



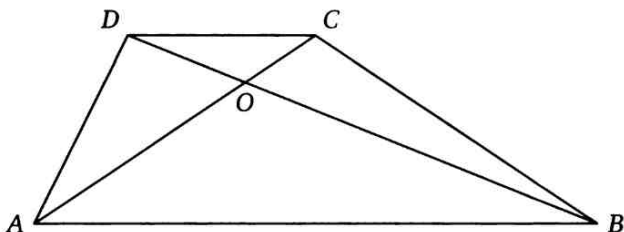
11. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника ABC площади 20.



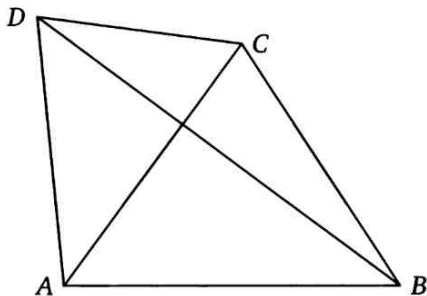
12. Средняя линия трапеции, равная 4, делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите большее основание трапеции.



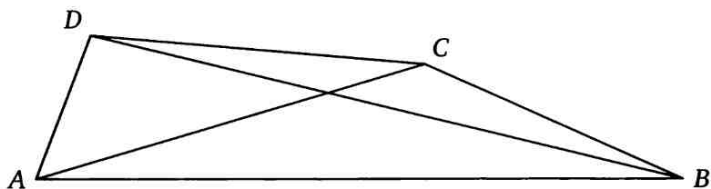
13. Основания трапеции $ABCD$ равны 1 и 3. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников AOB и COD .



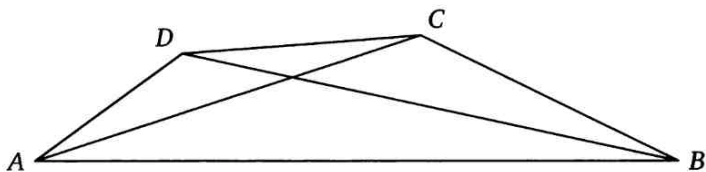
14. Диагонали четырехугольника перпендикулярны и равны 4 и 6. Найдите площадь этого четырехугольника.



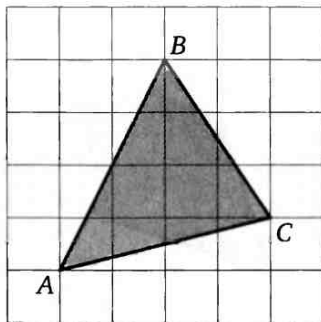
15. Диагонали четырехугольника образуют угол 30° и равны 4 и 6. Найдите площадь этого четырехугольника.



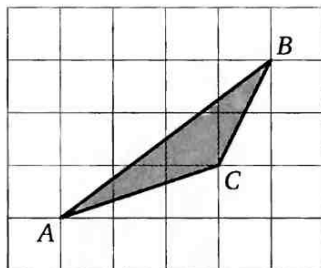
16. Диагонали четырехугольника равны 8 и 10. Его площадь равна 20. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.



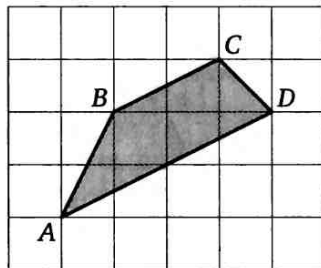
17. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



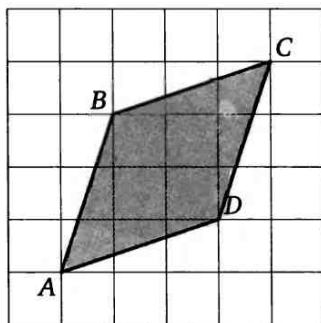
18. Найдите площадь треугольника ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1.



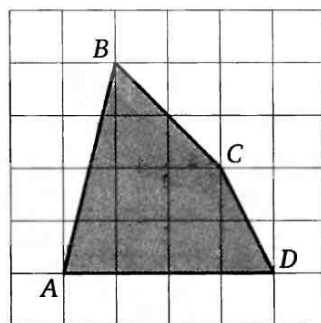
19. Найдите площадь трапеции $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



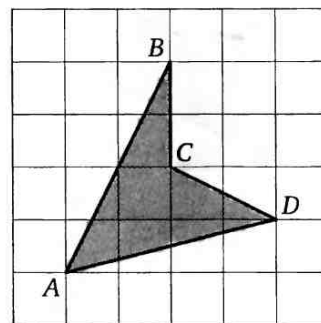
20. Найдите площадь ромба $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



21. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



22. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1.



9. Координаты и векторы

В этом параграфе представлены задачи на нахождение расстояний и углов на координатной плоскости с использованием формул расстояния между двумя точками, длины вектора, скалярного произведения векторов, угла между векторами, уравнений прямых и окружностей.

Общие сведения

Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Окружность с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, для которого точки A_1, A_2 имеют координаты соответственно (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Скалярное произведение векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(x_1, y_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2)$ с заданными координатами выражается формулой

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

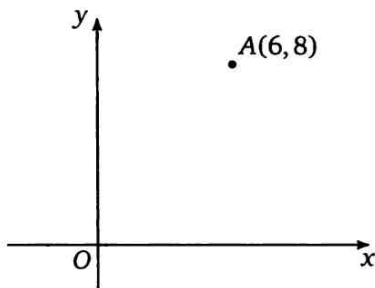
где a, b, c — некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора \vec{n} , перпендикулярного этой прямой и называемого вектором нормали.

Если две прямые пересекаются, то угол φ между ними равен углу между их нормальными $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

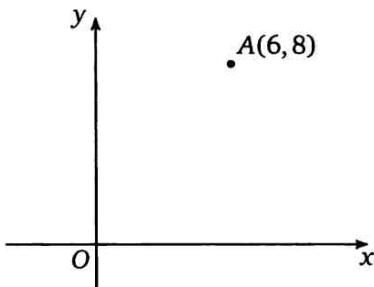
$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Задачи**Уровень А**

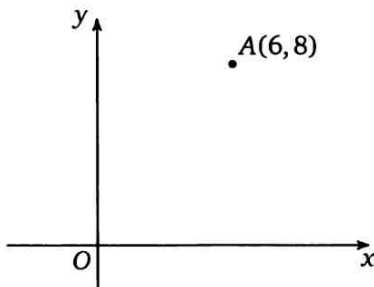
1. Из точки $A(6, 8)$ опущен перпендикуляр на ось абсцисс. Найдите абсциссу основания перпендикуляра.



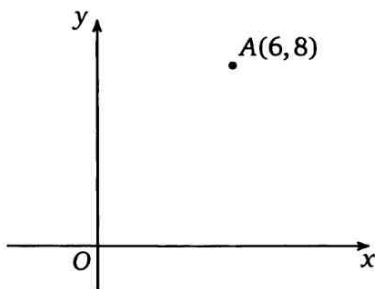
2. Через точку $A(6, 8)$ проведена прямая, параллельная оси абсцисс. Найдите ординату ее точки пересечения с осью Oy .



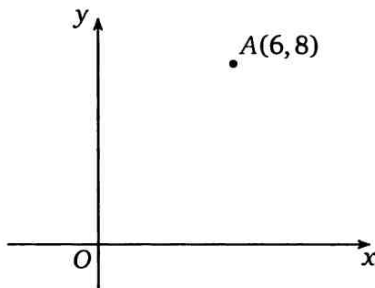
3. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до оси абсцисс.



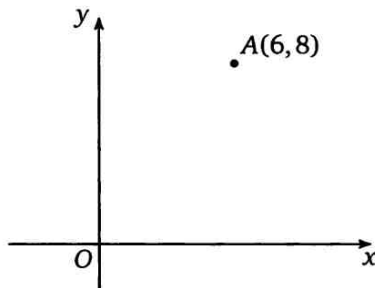
4. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до оси ординат.



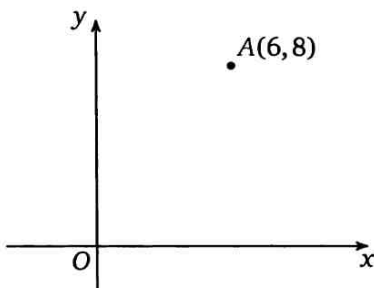
5. Найдите расстояние от точки A с координатами $(6, 8)$ до начала координат.



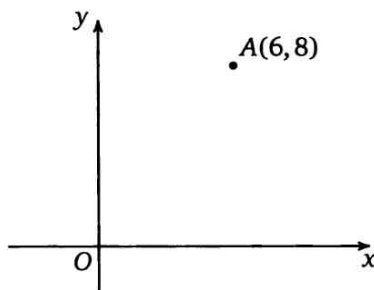
6. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Oy .



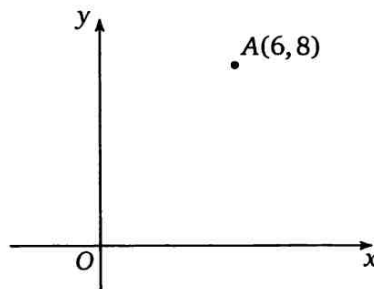
7. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно оси Ox .



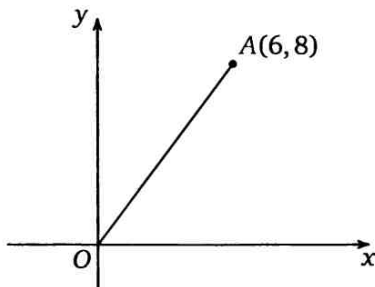
8. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно начала координат.



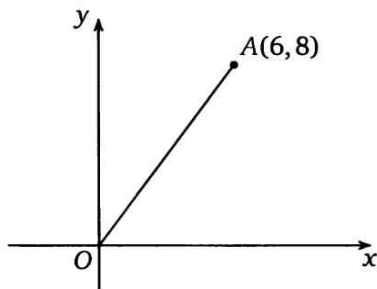
9. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(6, 8)$ относительно начала координат.



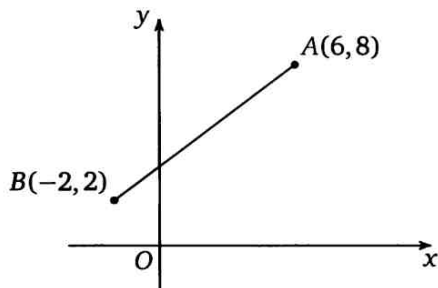
10. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.



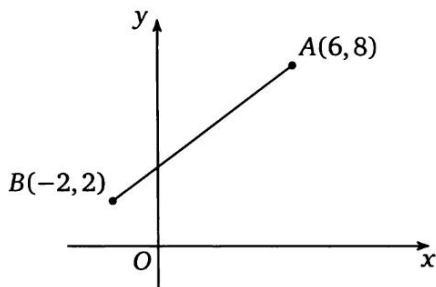
11. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.



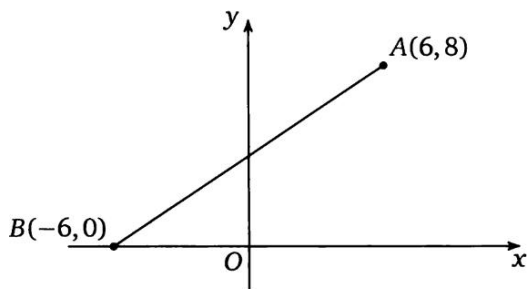
12. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.



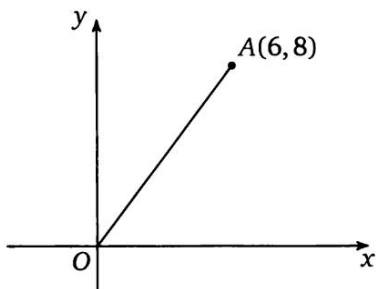
13. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.



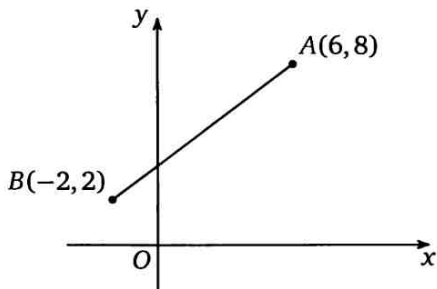
14. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-6, 0)$.



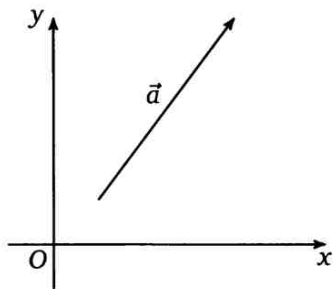
15. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$.



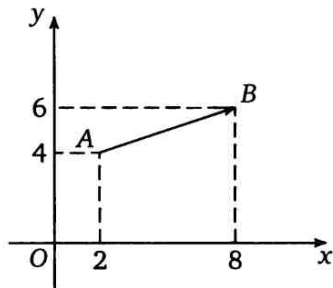
16. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(6, 8)$ и $B(-2, 2)$.



17. Найдите длину вектора $\vec{a}(6, 8)$.

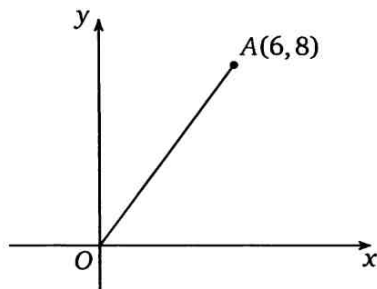


18. Найдите квадрат длины вектора \vec{AB} .

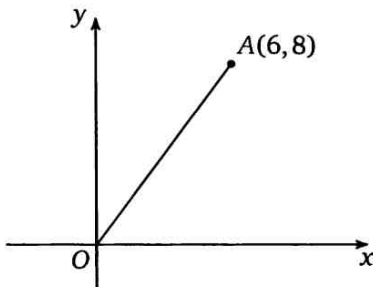


Уровень В

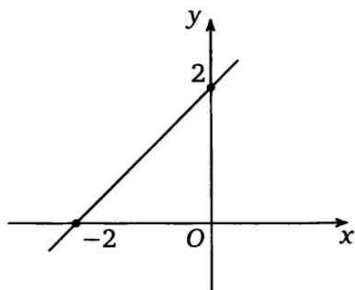
1. Найдите синус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, к оси абсцисс.



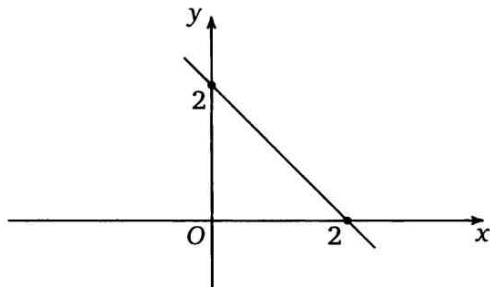
2. Найдите косинус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0, 0)$ и $A(6, 8)$, к оси абсцисс.



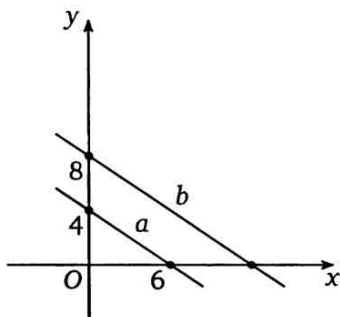
3. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(-2, 0)$ и $(0, 2)$.



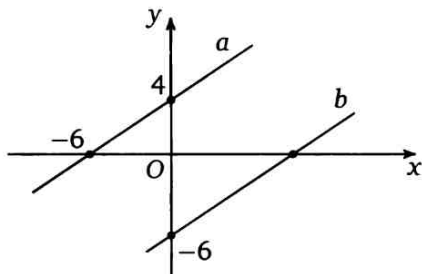
4. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(2, 0)$ и $(0, 2)$.



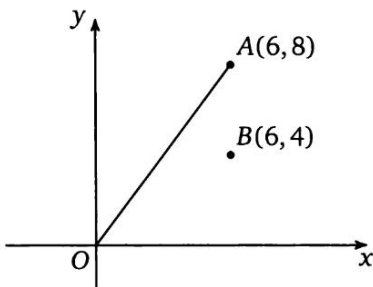
5. Прямая a проходит через точки с координатами $(0, 4)$ и $(6, 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0, 8)$ и параллельна прямой a . Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox .



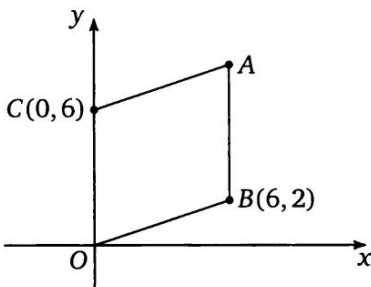
6. Прямая a проходит через точки с координатами $(0, 4)$ и $(-6, 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0, -6)$ и параллельна прямой a . Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox .



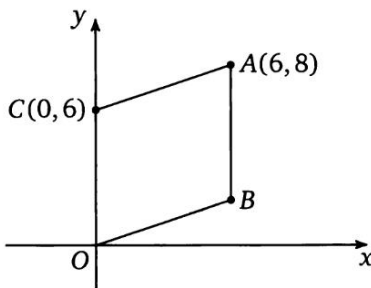
7. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(6, 4)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(6, 8)$.



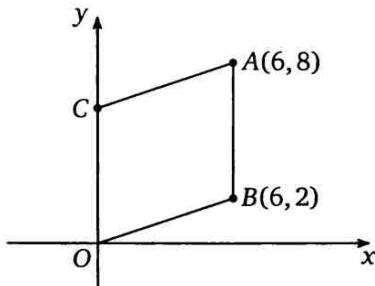
8. Точки $O(0, 0)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки A .



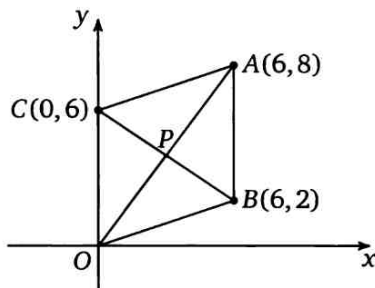
9. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $C(0, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки B .



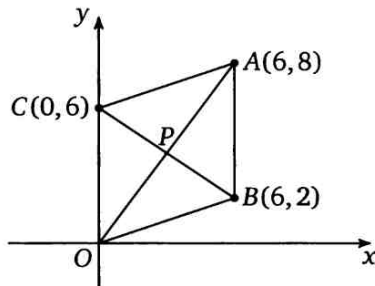
10. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки C .



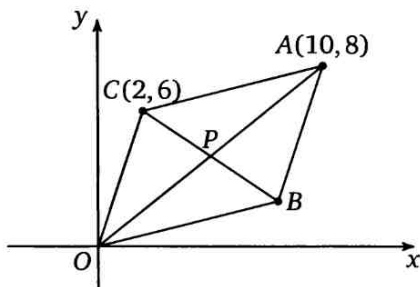
11. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей.



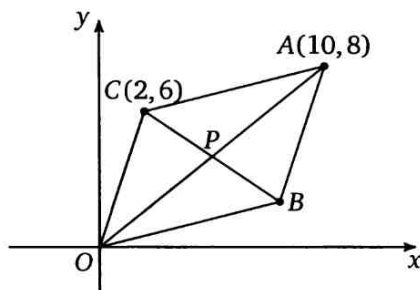
12. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(6, 2)$, $C(0, 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.



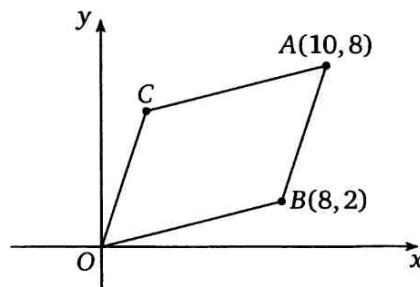
13. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $C(2, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки B .



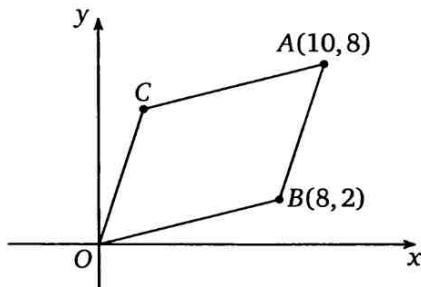
14. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $C(2, 6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки B .



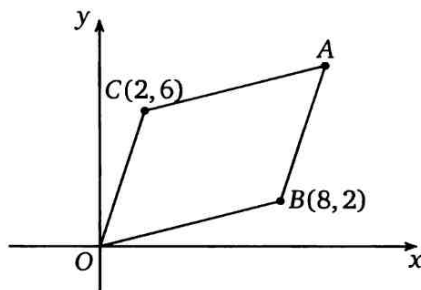
15. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки C .



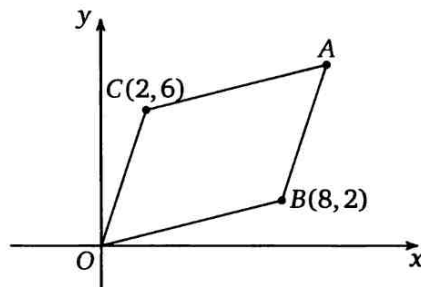
16. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$ и C являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки C .



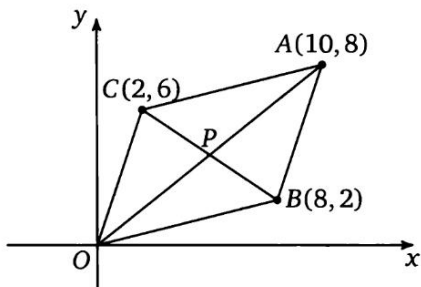
17. Точки $O(0, 0)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки A .



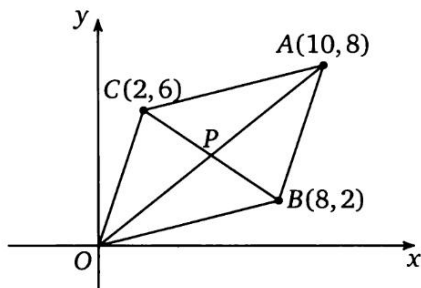
18. Точки $O(0, 0)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ и A являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки A .



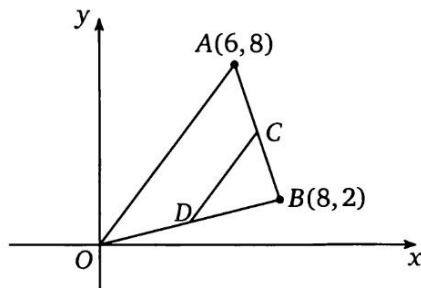
19. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей.



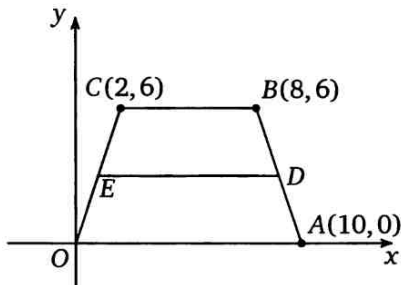
20. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ являются вершинами четырехугольника. Найдите ординату точки P пересечения его диагоналей.



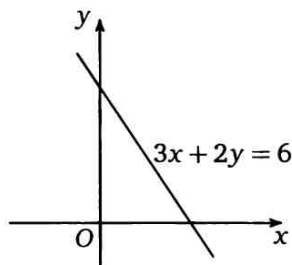
21. Точки $O(0, 0)$, $A(6, 8)$, $B(8, 2)$ являются вершинами треугольника. Найдите длину его средней линии CD .



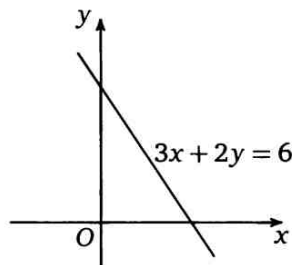
22. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 0)$, $B(8, 6)$, $C(2, 6)$ являются вершинами трапеции. Найдите длину ее средней линии DE .



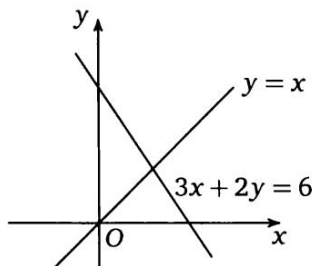
23. Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Ox .



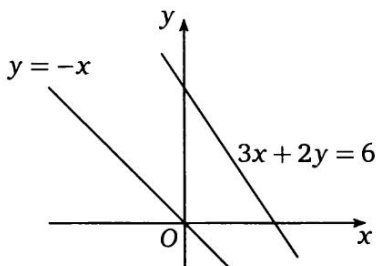
24. Найдите ординату точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x + 2y = 6$, с осью Oy .



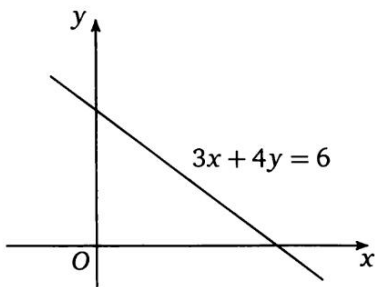
25. Найдите абсциссу точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = x$.



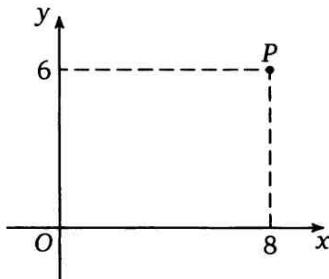
26. Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 2y = 6$ и $y = -x$.



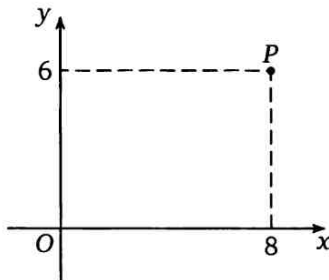
27. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $3x + 4y = 6$.



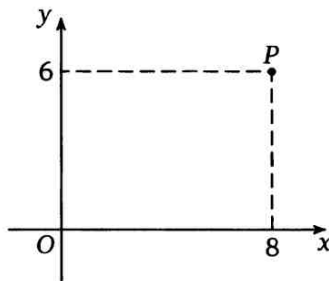
28. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $P(8, 6)$. Найдите ее радиус.



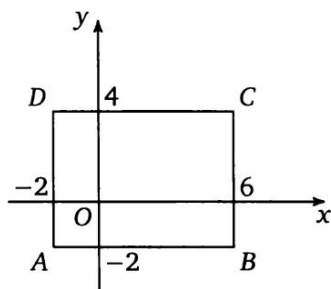
29. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс?



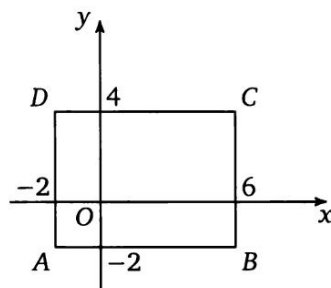
30. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась оси ординат?



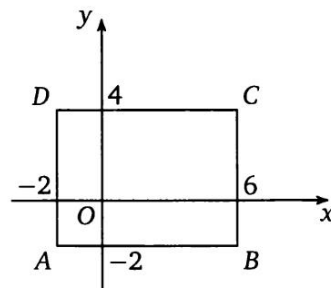
31. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.



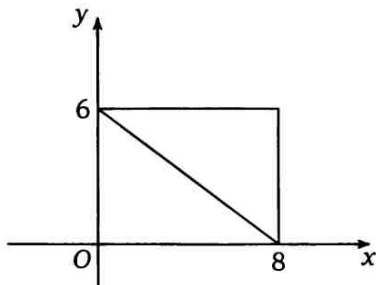
32. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.



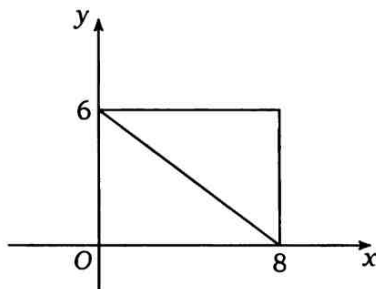
33. Найдите ординату центра окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(-2, -2)$, $(6, -2)$, $(6, 4)$, $(-2, 4)$.



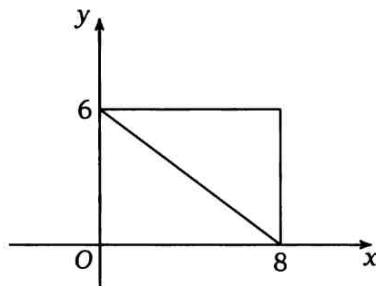
34. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.



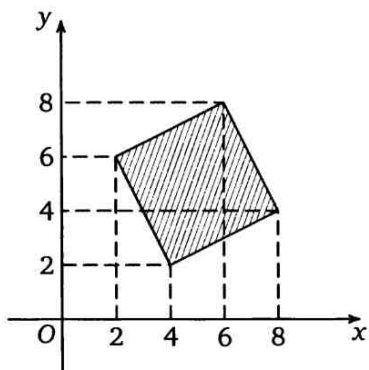
35. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.



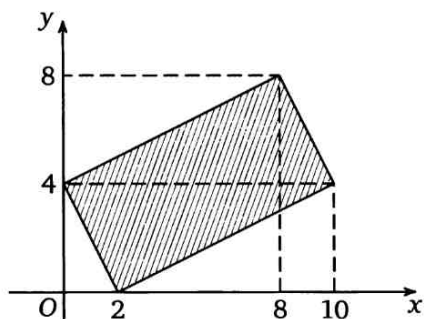
36. Найдите ординату центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8, 0)$, $(0, 6)$, $(8, 6)$.



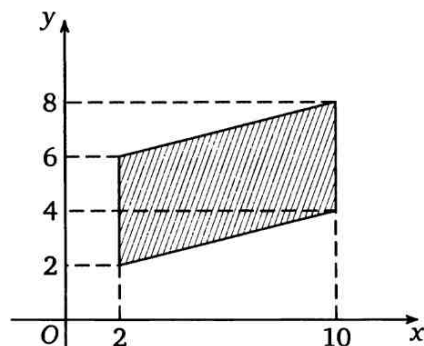
37. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(4, 2)$, $(8, 4)$, $(6, 8)$, $(2, 6)$.



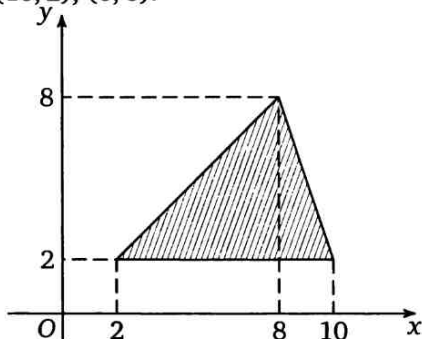
38. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 0)$, $(10, 4)$, $(8, 8)$, $(0, 4)$.



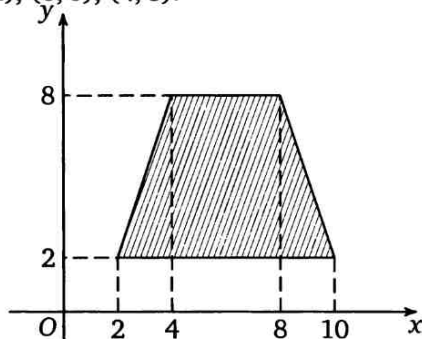
39. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 4)$, $(10, 8)$, $(2, 6)$.



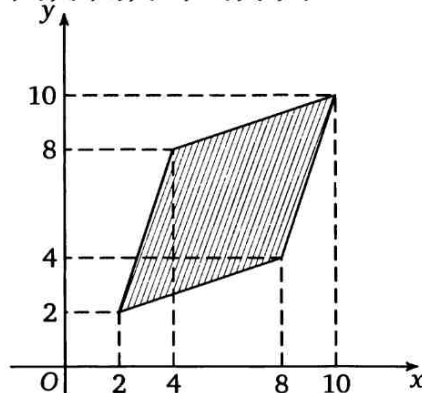
40. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 2)$, $(8, 8)$.



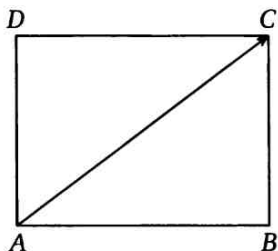
41. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(2, 2)$, $(10, 2)$, $(8, 8)$, $(4, 8)$.



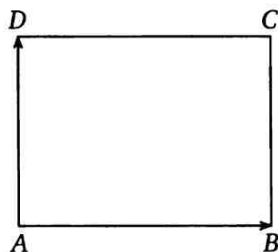
42. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты $(2, 2)$, $(8, 4)$, $(10, 10)$, $(4, 8)$.



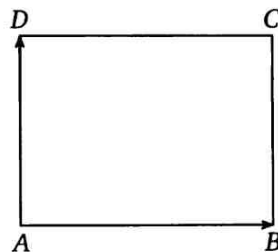
43. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора \overrightarrow{AC} .



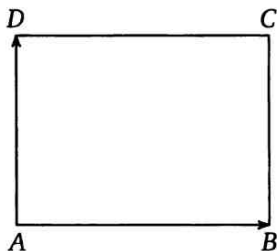
44. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .



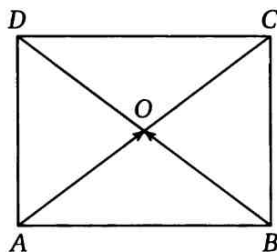
45. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .



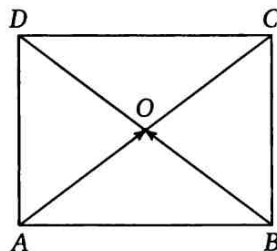
46. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{AD} .



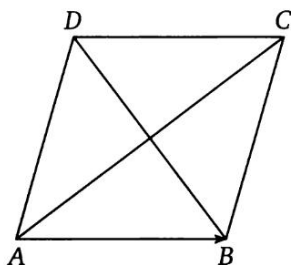
47. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов \vec{AO} и \vec{BO} .



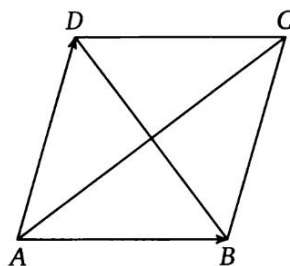
48. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов \vec{AO} и \vec{BO} .



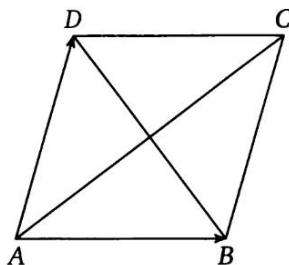
49. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора \vec{AB} .



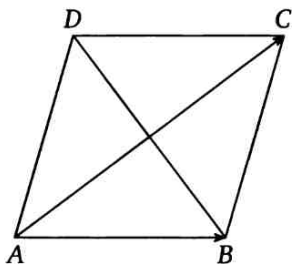
50. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.



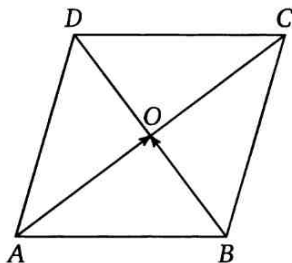
51. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



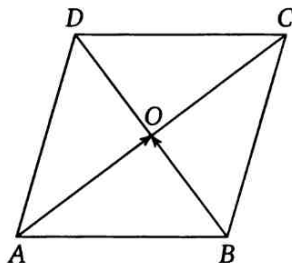
52. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



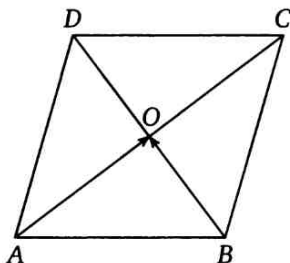
53. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Они пересекаются в точке O . Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



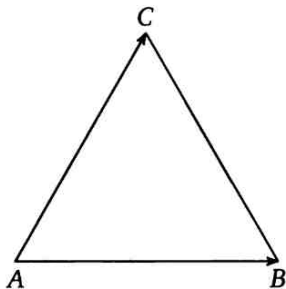
54. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Они пересекаются в точке O . Найдите длину вектора $\vec{AO} - \vec{BO}$.



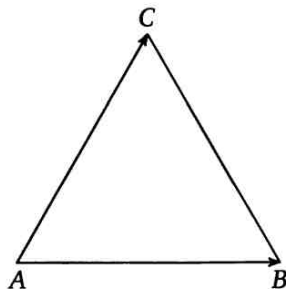
55. Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Они пересекаются в точке O . Найдите скалярное произведение векторов \vec{AO} и \vec{BO} .



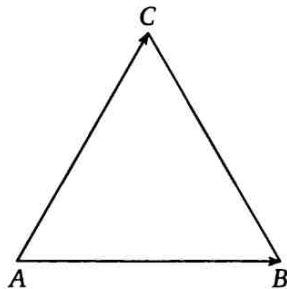
56. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.



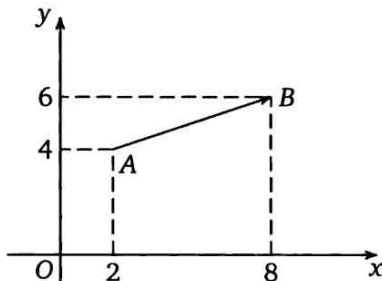
57. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



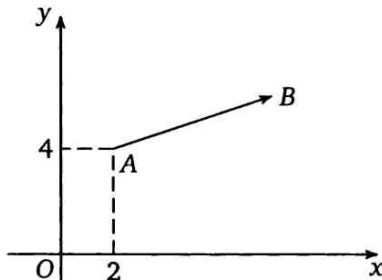
58. Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{AC} .



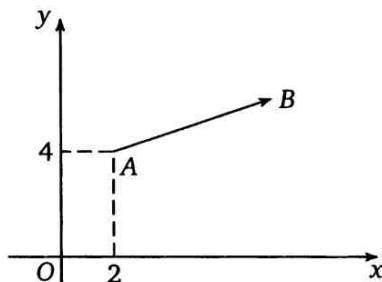
59. Найдите сумму координат вектора \vec{AB} .



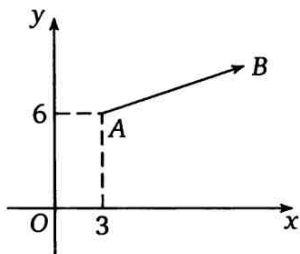
60. Вектор \vec{AB} с началом в точке $A(2, 4)$ имеет координаты $(6, 2)$. Найдите абсциссу точки B .



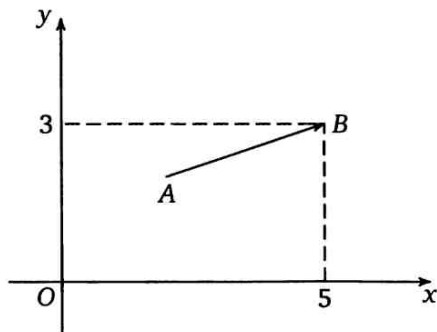
61. Вектор \vec{AB} с началом в точке $A(2, 4)$ имеет координаты $(6, 2)$.
Найдите ординату точки B .



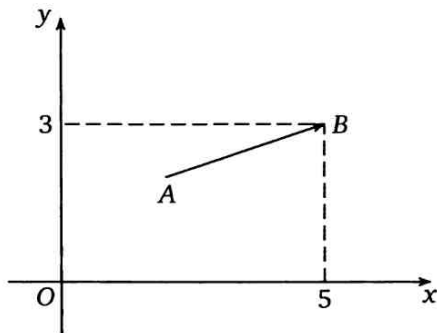
62. Вектор \vec{AB} с началом в точке $A(3, 6)$ имеет координаты $(9, 3)$.
Найдите сумму координат точки B .



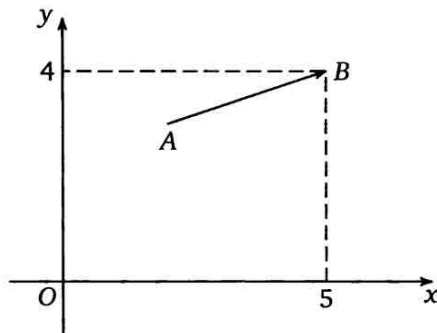
63. Вектор \vec{AB} с концом в точке $B(5, 3)$ имеет координаты $(3, 1)$.
Найдите абсциссу точки A .



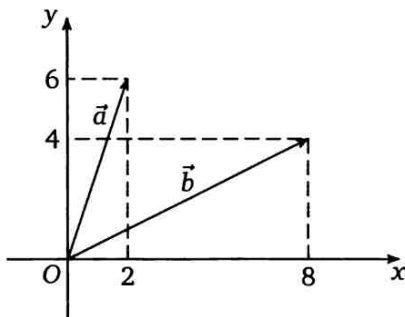
64. Вектор \vec{AB} с концом в точке $B(5, 3)$ имеет координаты $(3, 1)$.
Найдите ординату точки A .



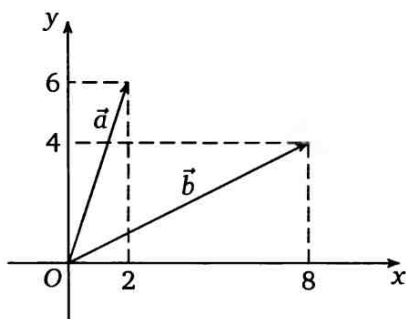
65. Вектор \vec{AB} с концом в точке $B(5, 4)$ имеет координаты $(3, 1)$.
Найдите сумму координат точки A .



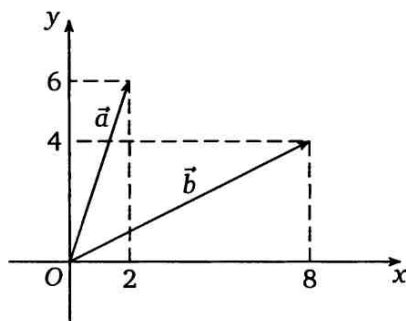
66. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



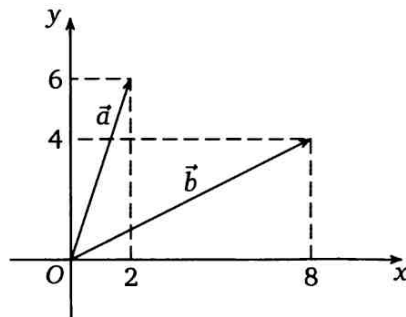
67. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



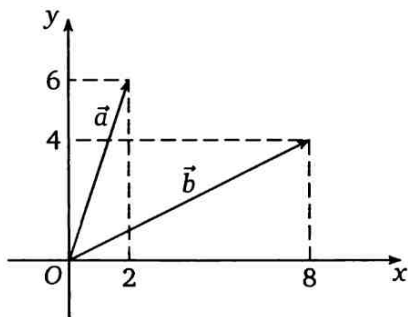
68. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



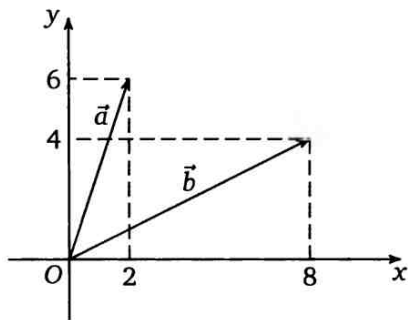
69. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



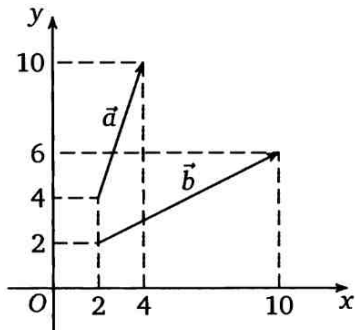
70. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .



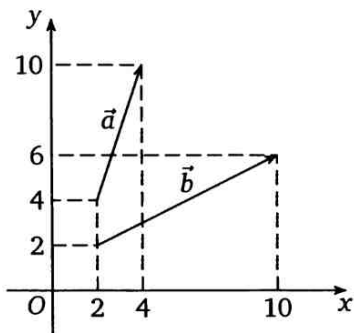
71. Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .



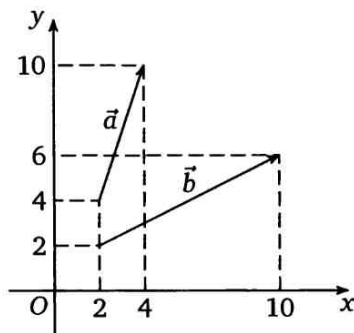
72. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



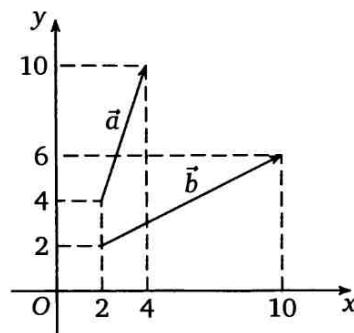
73. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



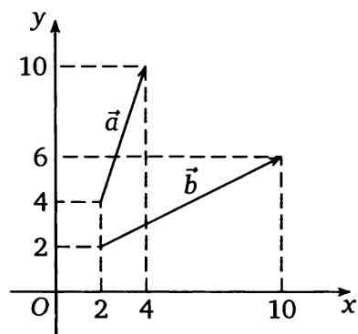
74. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



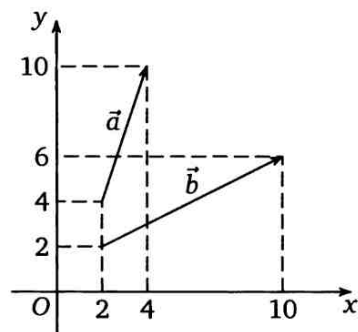
75. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



76. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

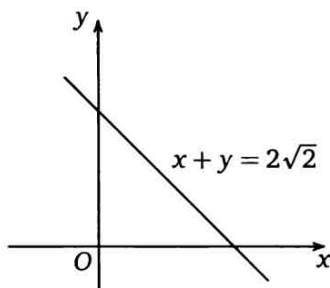


77. Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

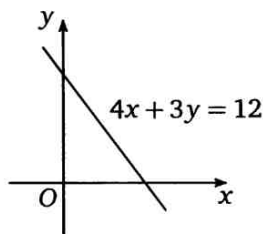


Уровень С

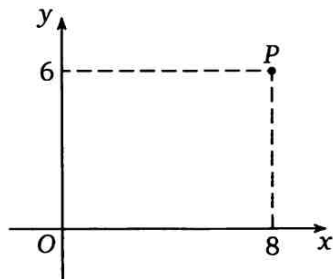
1. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $x + y = 2\sqrt{2}$.



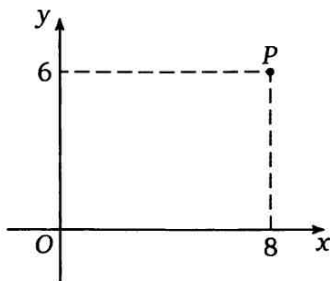
2. Найдите расстояние от начала координат до прямой, заданной уравнением $4x + 3y = 12$.



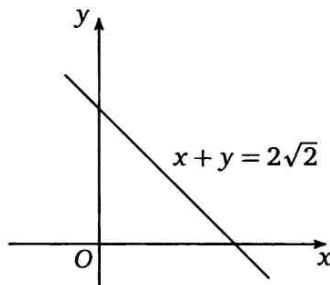
3. Какому наименьшему натуральному числу должен равняться радиус окружности с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы эта окружность пересеклась с осью абсцисс?



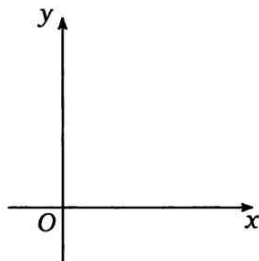
4. Какому наибольшему натуральному числу должен равняться радиус окружности с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы эта окружность не имела общих точек с осью ординат?



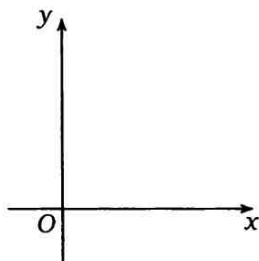
5. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась прямой, заданной уравнением $x + y = 2\sqrt{2}$?



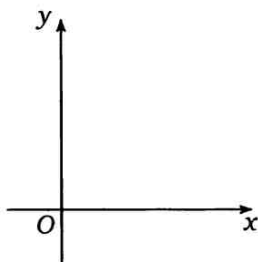
6. Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.



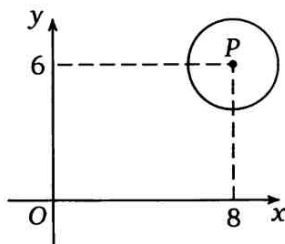
7. Найдите ординату центра окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.



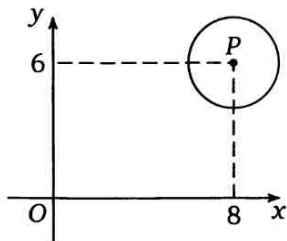
8. Найдите абсциссу центра окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.



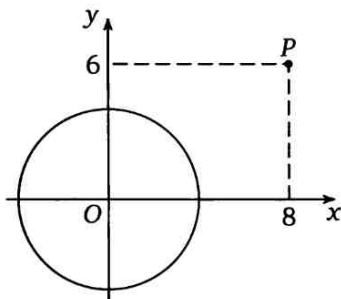
9. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в точке $P(8, 6)$ и радиусом 2?



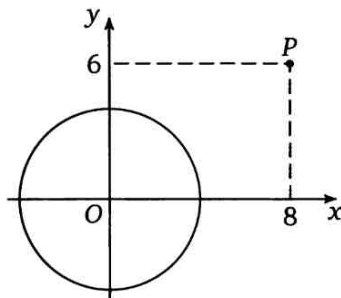
10. Какого радиуса должна быть окружность с центром в начале координат, чтобы она касалась внутренним образом окружности с центром в точке $P(8, 6)$ и радиусом 2?



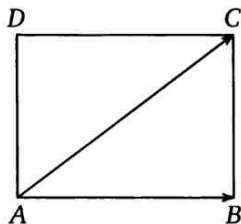
11. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась внешним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 4?



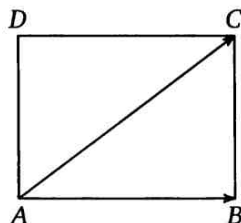
12. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(8, 6)$, чтобы она касалась внутренним образом окружности с центром в начале координат и радиусом 4?



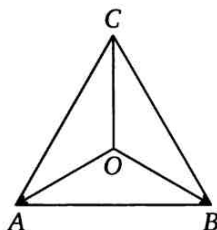
13. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов \vec{AB} и \vec{AC} .



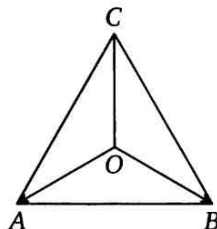
14. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите квадрат длины вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.



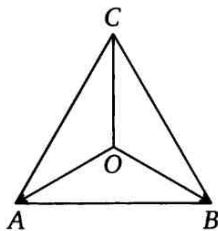
15. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\vec{OA} + \vec{OB}$.



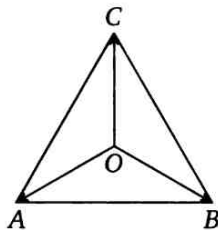
16. Стороны правильного треугольника ABC равны 3, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\vec{OA} - \vec{OB}$.



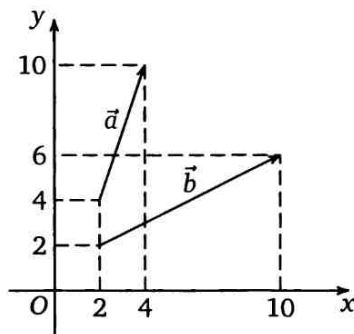
17. Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$, O — центр описанной окружности. Найдите скалярное произведение векторов \vec{OA} и \vec{OB} .



18. Стороны правильного треугольника ABC равны $\sqrt{3}$, O — центр описанной окружности. Найдите длину вектора $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.



19. Для данных векторов \vec{a} и \vec{b} найдите число t , при котором вектор \vec{a} перпендикулярен вектору $\vec{a} - t\vec{b}$.



ОТВЕТЫ

1. Углы треугольника

Уровень А

1. 61. 2. 62. 3. 28. 4. 104. 5. 31. 6. 116. 7. 64. 8. 69. 9. 51. 10. 41.
11. 160. 12. 40. 13. 72. 14. 30. 15. 34. 16. 10. 17. 38. 18. 74. 19. 52.
20. 48.

Уровень В

1. 32. 2. 108. 3. 130. 4. 119. 5. 61. 6. 45. 7. 116. 8. 36. 9. 37. 10. 16.
11. 24. 12. 42. 13. 65. 14. 21. 15. 31. 16. 40. 17. 56. 18. 49. 19. 82. 20. 120.

2. Тригонометрические функции углов

Уровень А

1. 0,5. 2. -1,5. 3. -1. 4. 1,5. 5. -0,5. 6. -3. 7. 1. 8. -1. 9. -1.
10. 0,6. 11. 0,8. 12. 0,75. 13. 0,75. 14. 0,8. 15. 0,6. 16. 0,75. 17. 0,75.
18. 0,6. 19. 0,8. 20. 0,6. 21. 0,8. 22. 2. 23. 2. 24. 1. 25. 2. 26. 4.
27. 0,5. 28. 4. 29. 2. 30. 2.

Уровень В

1. 0,6. 2. 0,8. 3. 0,8. 4. 0,6. 5. 0,8. 6. 0,6. 7. 0,6. 8. 0,8. 9. 0,8.
10. 0,6. 11. 0,75. 12. 0,75. 13. 0,8. 14. 0,6. 15. 0,6. 16. 0,8. 17. 0,8.
18. 0,6. 19. 0,6. 20. -0,6. 21. 0,8. 22. 0,8. 23. 0,8. 24. 0,8. 25. 0,5.
26. 0,8. 27. -0,6. 28. -2. 29. 1. 30. -2. 31. -2. 32. 2. 33. 2. 34. 1.
35. 2. 36. 1. 37. 0,5. 38. 2. 39. -2. 40. -1.

3. Решение треугольников

Уровень А

1. 2. 2. 6. 3. 3. 4. 4. 5. 2. 6. 6. 7. 3. 8. 4. 9. 1. 10. 4. 11. 6. 12. 2.
13. 2. 14. 4. 15. 3. 16. 5. 17. 12. 18. 12. 19. 5. 20. 5. 21. 10. 22. 10.
23. 24. 24. 5.

Уровень В

1. 1,5. 2. 1,5. 3. 1. 4. 1. 5. 16. 6. 9. 7. 1,5. 8. 1. 9. 9. 10. 3. 11. 4.
12. 60. 13. 12. 14. 15. 15. 12. 16. 15. 17. 1,5. 18. 1,5. 19. 2. 20. 30.

Уровень С

1. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 2. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 3. 30° . 4. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 5. $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$. 6. 45°
7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 8. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 9. 150° . 10. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 11. $\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$.
12. 135° . 13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 14. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 15. 1. 16. 3. 17. 14. 18. 45° . 19. $2\frac{2}{3}$.
20. 2,4.

4. Четырехугольники

Уровень А

1. 120. 2. 130. 3. 125. 4. 120. 5. 10. 6. 12. 7. 10. 8. 60. 9. 12. 10. 2.
11. 56. 12. 2. 13. 1,5. 14. 115. 15. 23. 16. 38. 17. 5. 18. 4. 19. 5.
20. 3.

Уровень В

1. 126. 2. 90. 3. 20. 4. 20. 5. 28. 6. 10. 7. 3. 8. 48. 9. 10. 10. 10.
11. 5. 12. 15. 13. 69. 14. 23. 15. 10. 16. 3. 17. 15. 18. 4. 19. 20.
20. 9. 21. 14. 22. 0,5. 23. 12. 24. 9. 25. 40. 26. 30. 27. 40. 28. 5.
29. 2. 30. 6.

Уровень С

1. 12. 2. 18° . 3. 2. 4. 120° . 5. 10. 6. 20. 7. 9. 8. 45° . 9. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 10. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

5. Углы, вписанные в окружность

Уровень А

1. 90. 2. 2. 3. 30. 4. 3. 5. 150. 6. 45. 7. 2. 8. 135. 9. 60. 10. 3.
11. 120. 12. 3. 13. 2. 14. 1. 15. 36. 16. 36. 17. 36. 18. 40. 19. 45.
20. 135.

Уровень В

1. 105. 2. 100. 3. 104. 4. 35. 5. 122. 6. 108. 7. 60. 8. 70. 9. 110.
10. 40. 11. 46. 12. 64. 13. 118. 14. 58. 15. 26. 16. 62. 17. 26. 18. 114.
19. 40. 20. 20. 21. 45. 22. 45. 23. 135.

Уровень С

1. 56. 2. 20. 3. 55. 4. 82. 5. 48. 6. 128. 7. 52. 8. 228. 9. 61. 10. 44.
11. 30. 12. 60. 13. 45. 14. 45.

6. Многоугольники и окружность

Уровень А

1. 1. 2. 3. 3. 2. 4. 4,5. 5. 6. 6. 8. 7. 2,5. 8. 8. 9. 2. 10. 2,5. 11. 10.
12. 2. 13. 4. 14. 6. 15. 6. 16. 2,5. 17. 2,5. 18. 2. 19. 18. 20. 0,5.
21. 1. 22. 2. 23. 8. 24. 0,25. 25. 8. 26. 2. 27. 2. 28. 1,5. 29. 2.

Уровень В

1. 1. 2. 30. 3. 3. 4. 1. 5. 45. 6. 1. 7. 1. 8. 150. 9. 1. 10. 1. 11. 25.
12. 6. 13. 6. 14. 7. 15. 82. 16. 122. 17. 90. 18. 24. 19. 5. 20. 5.
21. 2. 22. 4. 23. 1. 24. 1. 25. 1,5. 26. 22. 27. 4. 28. 10. 29. 2.
30. 52. 31. 7. 32. 14. 33. 12. 34. 24. 35. 4. 36. 1. 37. 1. 38. 5.

Уровень С

1. $2\frac{1}{6}$. 2. $\frac{\sqrt{442}}{10}$. 3. $\sqrt{5}$. 4. $\sqrt{5}$. 5. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 6. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. 7. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 8. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

7. Поворот, центральная и осевая симметрии

Уровень А

1. 180. 2. 2. 3. 120. 4. 90. 5. 180. 6. 180. 7. 180. 8. 72. 9. 60.
10. 60. 11. 180. 12. 90. 13. 90. 14. 90. 15. 60. 16. 60. 17. 120. 18. 180. 19. 90.
20. 180. 21. 120.

Уровень В

1. 6. 2. 60. 3. 2. 4. 2. 5. 8. 6. 45. 7. 10. 8. 36. 9. 12. 10. 30.
11. 180. 12. 60. 13. 90. 14. 3. 15. 90. 16. -1. 17. 45. 18. -1. 19. 75.
20. -3. 21. 180. 22. 90. 23. 180. 24. 45. 25. 225. 26. 4. 27. 2. 28. 6.
29. -4. 30. -3. 31. 3. 32. 4. 33. 5. 34. 6. 35. 6. 36. 4. 37. 2.
38. 2. 39. 2. 40. 0. 41. 2. 42. 4. 43. 0. 44. 6. 45. 4. 46. 2. 47. 2.
48. 1. 49. 20. 50. 26. 51. -3. 52. -2. 53. -4. 54. 2. 55. 2. 56. 4.

Уровень С

1. 24. 2. 36. 3. 4. 4. 4. 5. 1. 6. 4. 7. 1. 8. 8. 9. 1. 10. 120. 11. 2.
12. 3. 13. 90. 14. 2. 15. 2. 16. 60. 17. 3. 18. 2. 19. 3. 20. 90. 21. -3.
22. 4. 23. 4. 24. 4. 25. 6. 26. 20. 27. 4. 28. 2. 29. 120. 30. 3.

8. Площадь**Уровень А**

1. 0,5. 2. 2. 3. 6. 4. 40. 5. 0,5. 6. 20. 7. 8. 8. 25. 9. 100. 10. 24.
 11. 1. 12. 2. 13. 6. 14. 50. 15. 0,25. 16. 2. 17. 0,25. 18. 1. 19. 6.
 20. 8.

Уровень В

1. 18. 2. 6. 3. 18. 4. 18. 5. 14. 6. 48. 7. 13. 8. 48. 9. 8. 10. 2.
 11. 30. 12. 6. 13. 8. 14. 8. 15. 24. 16. 3. 17. 2. 18. 24. 19. 6. 20. 12.
 21. 10. 22. 20. 23. 30. 24. 6. 25. 6. 26. 24. 27. 3. 28. 8. 29. 7.
 30. 15. 31. 8. 32. 160. 33. 30. 34. 16. 35. 45. 36. 160. 37. 5. 38. 42.
 39. 30. 40. 22. 41. 30. 42. 1. 43. 12. 44. 135. 45. 4. 46. 10. 47. 10.
 48. 8. 49. 4,5. 50. 6. 51. 10,5. 52. 9. 53. 10,5. 54. 5. 55. 1,25.

Уровень С

1. 256. 2. 8. 3. 48. 4. 1. 5. 45. 6. 600. 7. 10. 8. 30. 9. 75. 10. 72.
 11. 5. 12. 6. 13. 9. 14. 12. 15. 6. 16. 30. 17. 7. 18. 2,5. 19. 4,5.
 20. 8. 21. 9. 22. 5.

9. Координаты и векторы**Уровень А**

1. 6. 2. 8. 3. 8. 4. 6. 5. 10. 6. -6. 7. -8. 8. -6. 9. -8. 10. 4.
 11. 3. 12. 5. 13. 2. 14. 4. 15. 10. 16. 10. 17. 10. 18. 40.

Уровень В

1. 0,8. 2. 0,6. 3. 1. 4. -1. 5. 12. 6. 9. 7. -4. 8. 8. 9. 2. 10. 6.
 11. 4. 12. 3. 13. 8. 14. 2. 15. 2. 16. 6. 17. 10. 18. 8. 19. 5. 20. 4.
 21. 5. 22. 8. 23. 2. 24. 3. 25. 1,2. 26. -6. 27. -0,75. 28. 10. 29. 6.
 30. 8. 31. 5. 32. 2. 33. 1. 34. 5. 35. 4. 36. 3. 37. 20. 38. 40.
 39. 32. 40. 24. 41. 36. 42. 32. 43. 10. 44. 10. 45. 10. 46. 0. 47. 6.
 48. 8. 49. 10. 50. 16. 51. 12. 52. 10. 53. 10. 54. 10. 55. 0. 56. 6.
 57. 3. 58. 4,5. 59. 8. 60. 8. 61. 6. 62. 21. 63. 2. 64. 2. 65. 5. 66. 20.
 67. 200. 68. -4. 69. 40. 70. 40. 71. 45. 72. 20. 73. 200. 74. -4.
 75. 40. 76. 40. 77. 45.

Уровень С

1. 2. 2. 2,4. 3. 7. 4. 7. 5. 2. 6. 3. 7. 0. 8. 1. 9. 8. 10. 12. 11. 6.
 12. 14. 13. 6. 14. 292. 15. 2. 16. 3. 17. -2. 18. 0. 19. 1.

Владимир Алексеевич Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ. ПЛАНИМЕТРИЯ: Пособие для подготовки к ЕГЭ

Под редакцией А. Л. Семёнова, И. В. Яценко.

Подписано в печать 11.09.2009 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 16. Тираж 5000 экз. Заказ № 18392.

Книга издана в авторской редакции

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано по StP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru
