В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

ГЕОМЕТРИЯ С GEOGEBRA

Планиметрия

Издательство Прометей

МОСКВА

2018

УДК 514.1
ББК 22.15
С 50

Смирнов Владимир Алексеевич, д.ф.-м.н., профессор
Смирнова Ирина Михайловна, д.п.н., профессор

С 50 Геометрия с GeoGebra. Планиметрия / Смирнов В.А., Смирнова И. М. – М.: «Прометей», 2018. – 206 с.

ISBN 978-5-907003-43-9

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены возможности GeoGebra для использования её в обучении геометрии в школе, предложены задачи для самостоятельного решения, а также представлены решения этих задач.

ISBN 978-5-907003-43-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Программа GeoGebra это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта http://geogebra.org.

Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для использования её в обучении геометрии в школе, предложим задачи для самостоятельного решения. В конце пособия будут даны решения задач.

Начнем с планиметрии .

1. ИНСТРУМЕНТЫ GEOGEBRA

Рабочее окно этой программы имеет вид, показанный на рисунке 1.1.

Изображения объектов создаются в части окна, называемом «Полотно». Изначально в нём изображены оси координат.

Если нажать левой кнопкой мыши на маленький треугольник, расположенный слева от надписи «Полотно», то откроется дополнительная строка, в которой можно убрать оси координат, или выбрать в качестве фона клетчатую бумагу (рис. 1.2).

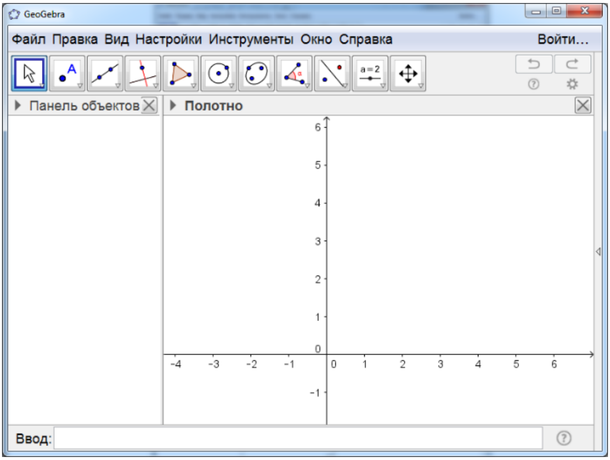

Рис. 1.1

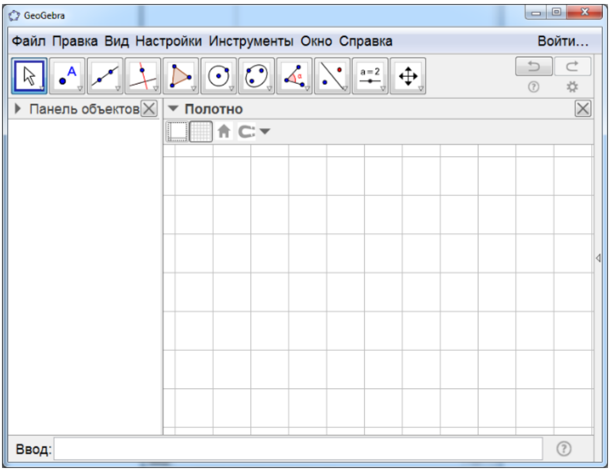

Рис. 1.2

В верхней части рабочего окна имеется панель инструментов - строка с окошками с изображением инструментов.

В крайнем левом окошке изображен курсор. Для выбора этого инструмента нужно нажать по нему левой кнопкой мыши. Появится подсказка (рис. 1.3).

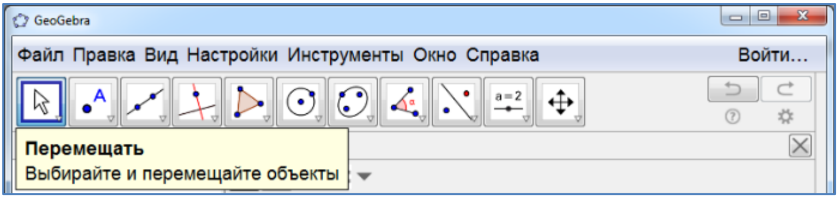

Рис. 1.3

Нажимая и удерживая левую кнопку мыши на выбранном объекте, его можно перемещать и поворачивать. Вторым слева расположено окошко с изображением точки. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.4).

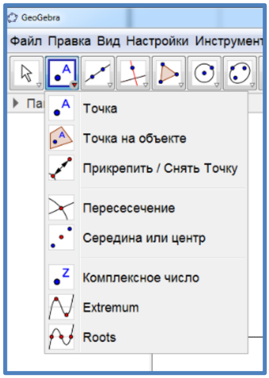

Рис. 1.4

Для получения изображения точек нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на **инструмент «Точка»** с изображением точки А.

Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить точки. На рисунке 1.5 показано изображение точек, полученных таким образом.

Нажимая левой кнопкой мыши на изображение точки и перемещая курсор, можно перемещать и саму точку.

Цвет, размеры и обозначения точек можно изменять. Для этого следует воспользоваться панелью объектов, расположенной в левой части рабочего окна.

Например, если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Точка», то откроется дополнительное окно (рис. 1.6).

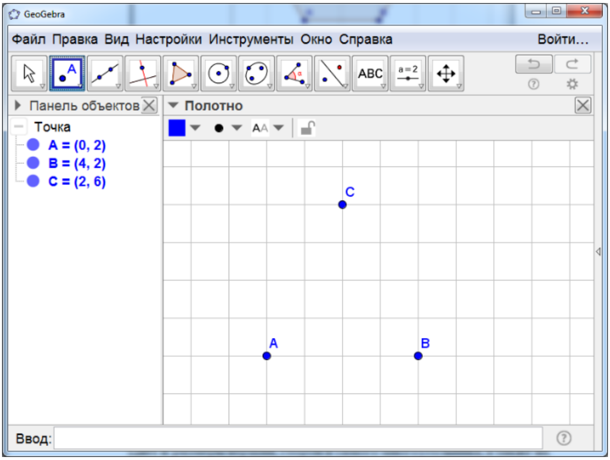

Рис. 1.5

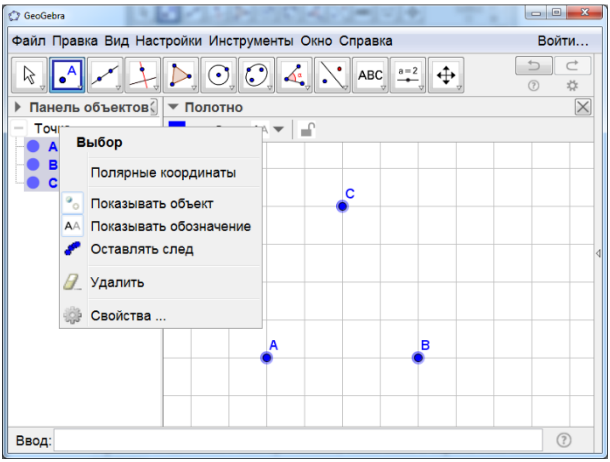

Рис. 1.6

Нажатием левой кнопкой мыши на строку «Свойства» открывается новое окно (рис. 1.7), в котором можно выбирать цвет и стиль изображения точек.

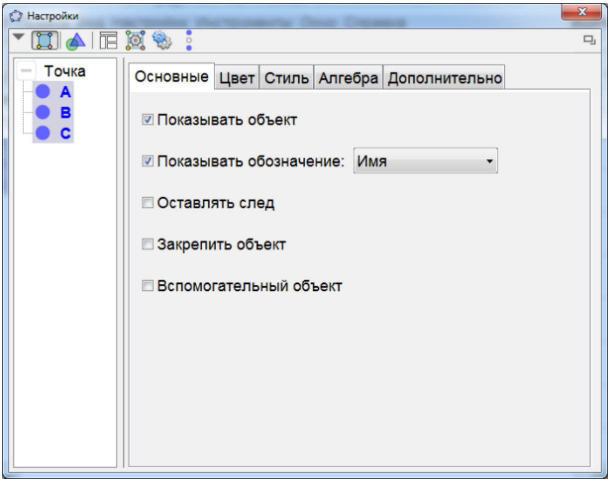

Рис. 1.7

На рисунке 1.8 показан пример такого выбора.

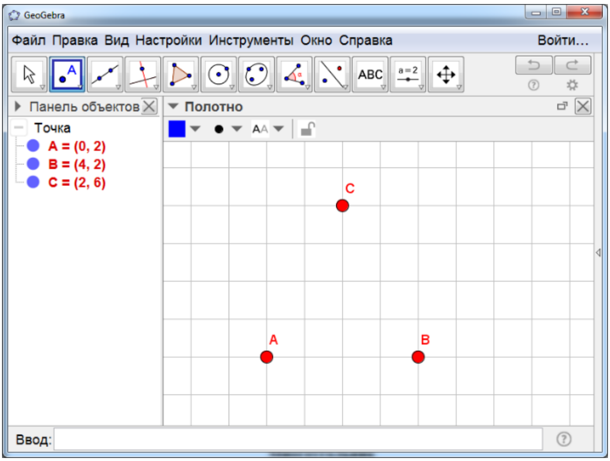

Рис. 1.8

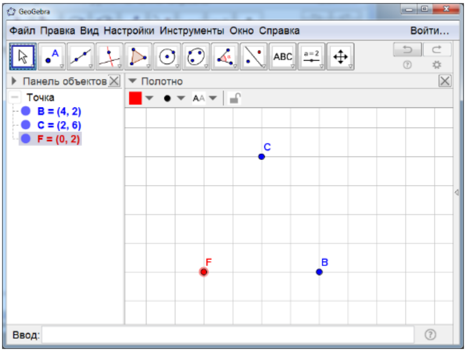

Рис. 1.9

Если же нажать левой кнопкой мыши по строке с обозначением одной из вершин, например, с надписью «A=(0, 2)», то откроется окно, в котором можно выбирать обозначение цвет и стиль именно этой вершины.

На рисунке 1.9 показан пример такого выбора.

Инструмент «Пересечение» с изображением двух пересекающихся прямых позволяет получать точки пересечение различных линий. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши поочерёдно на одну и другую линии. На полотне появятся точки их пересечения.

На рисунке 1.10 показаны полученные точки D и E пересечения прямой BC и окружности с центром A.

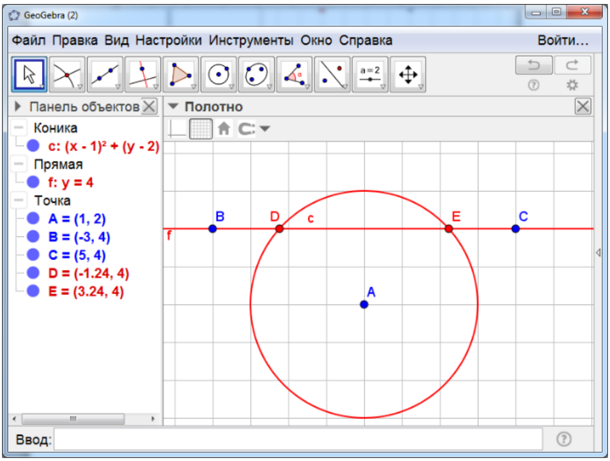

Рис. 1.10

Инструмент «Середина или центр» с изображением трёх точек позволяет получать изображение середины отрезка или центра окружности. Для этого нужно указать две точки, или отрезок, или окружность.

На рисунке 1.11 показана полученная точка C – середина отрезка AB. Положение и величину отрезка AB можно менять, при этом точка C останется его серединой.

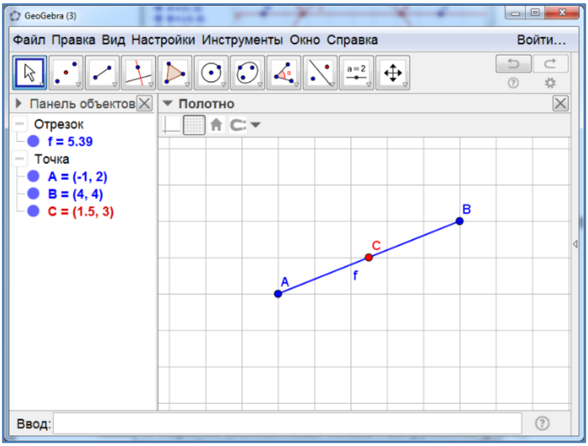

Рис. 1.11

Третьим слева в панели инструментов находится окошко с изображением прямой, проходящей через две точки. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.12).

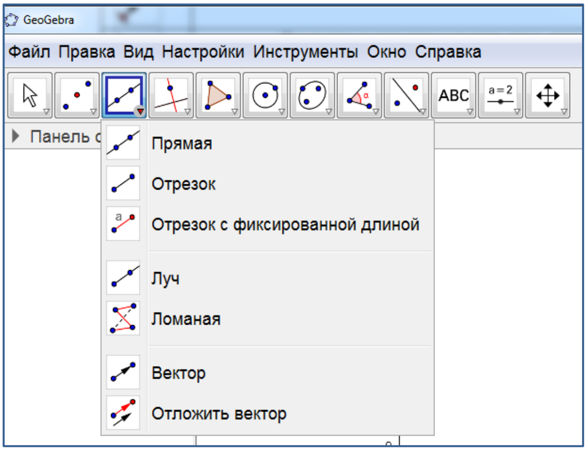

Рис. 1.12

Для получения изображения прямой нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на **инструмент «Прямая»** с изображением прямой. Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить две точки. На экране появится изображение этих точек и прямой, через них проходящей (рис. 1.13).

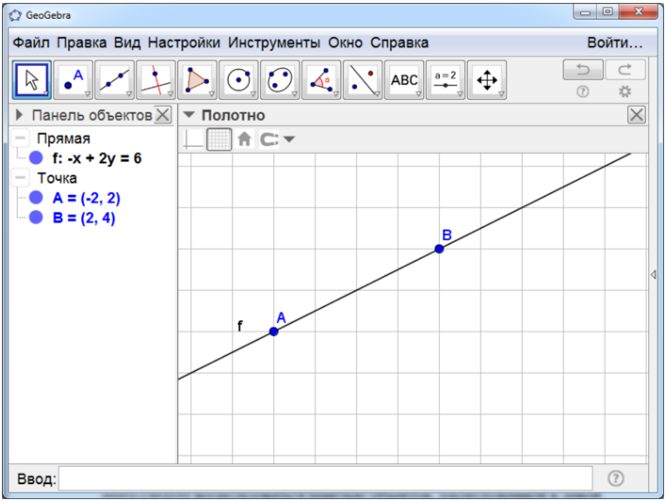

Рис. 1.13

Нажимая левой кнопкой мыши на изображение точки и перемещая курсор, можно перемещать саму точку, и саму прямую. Цвет, размеры и обозначения точек прямой можно изменять. Для этого следует воспользоваться панелью объектов, расположенной в левой части рабочего окна.

Например, если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Прямая», то откроется дополнительное окно, в котором, нажав на строку «Свойства», можно выбрать обозначение, цвет и стиль прямой.

Пример такого выбора показан на рисунке 1.14.

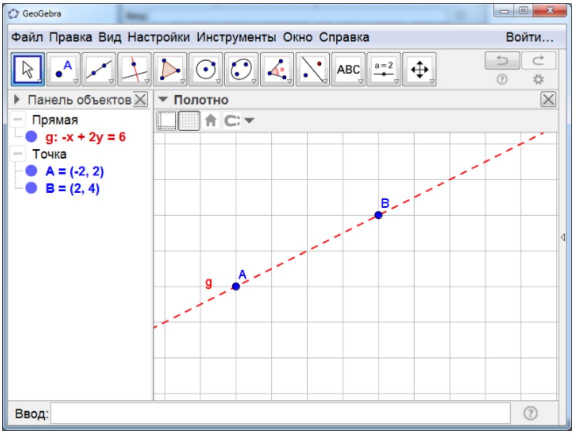

Рис. 1.14

Если нажать правой кнопкой мыши по надписи «Точка», то откроется дополнительное окно, в котором, нажав на строку «Свойства», можно выбрать обозначение, цвет и стиль точек.

Если нажать на одну из строк «A=(-2, 2)» или «B=(2, 4)», то откроется окно, в котором можно выбрать цвет и стиль соответствующей точки. Пример такого выбора показан на рисунке 1.15.

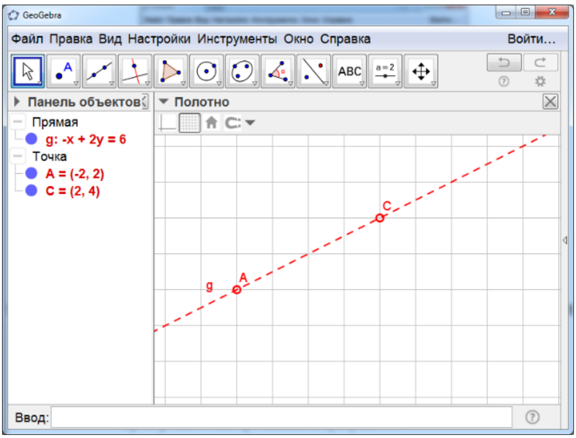

Рис. 1.15

Для получения изображения отрезка нужно сначала нажать левой кнопкой мыши на **инструмент «Отрезок»** с изображением отрезка.

Затем левой кнопкой мыши на полотне нужно отметить две точки. На экране появится изображение этих точек и отрезка, соединяющего эти точки (рис. 1.16).

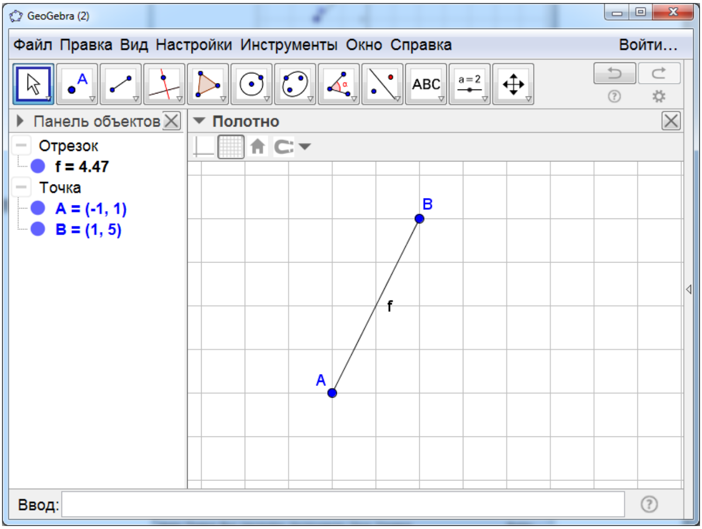

Рис. 1.16

Положение, цвет, размеры и обозначения точек и отрезка можно изменять аналогично тому, как это было сделано для прямой.

Инструмент «Отрезок с фиксированной длиной» позволяет получать изображение отрезка заданной длины. Для этого, после выбора инструмента, нужно указать один из концов отрезка и ввести его длину.

Для получения изображения луча нужно выбрать **инструмент «Луч»**, а затем указать вершину луча и точку на нём (рис. 1.17).

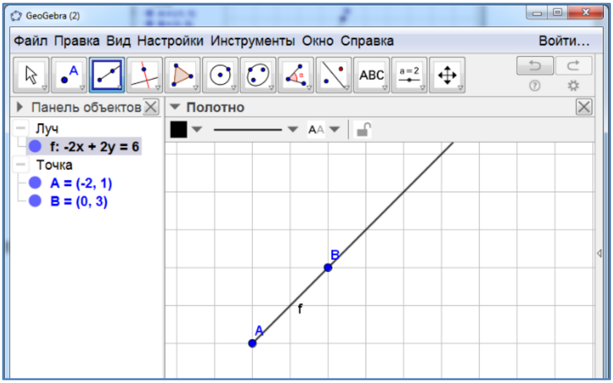

Рис. 1.17

Инструмент «Ломаная» позволяет получать изображение ломаной. Для этого, после выбора инструмента, нужно последовательно указать вершины ломаной, заканчивая в начальной вершине. Пример ломаной показан на рисунке 1.18.

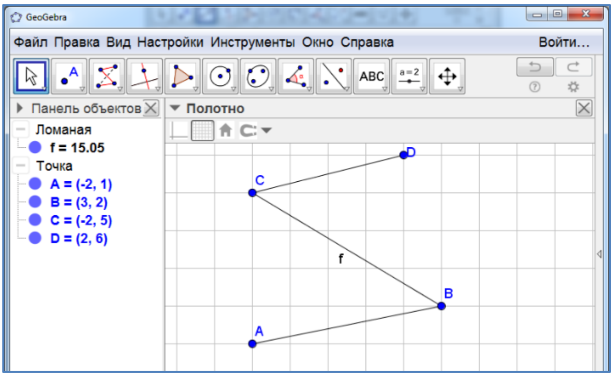

Рис. 1.18

Положение, цвет, размеры и обозначения точек и самой ломаной можно изменять аналогично тому, как это было сделано для прямой.

Инструмент «Вектор» позволяет получать изображение вектора. Для этого, после выбора инструмента, нужно последовательно указать начало и конец вектора. Пример вектора показан на рисунке 1.19.

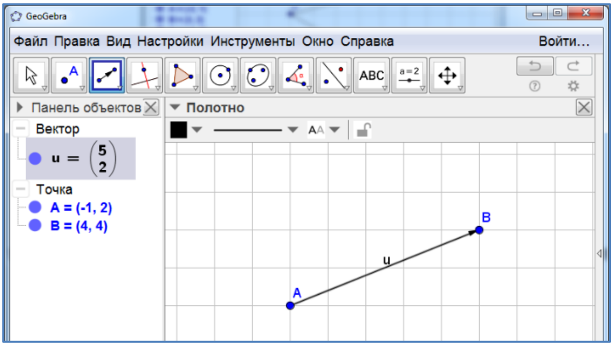

Рис. 1.19

Как и ранее, положение, цвет, размеры и обозначения точек и самого вектора можно изменять.

Инструмент «Отложить вектор» позволяет откладывать данный вектор от данной точки. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши начальную точку и исходный вектор. Соответствующий пример показан на рисунке 1.20.

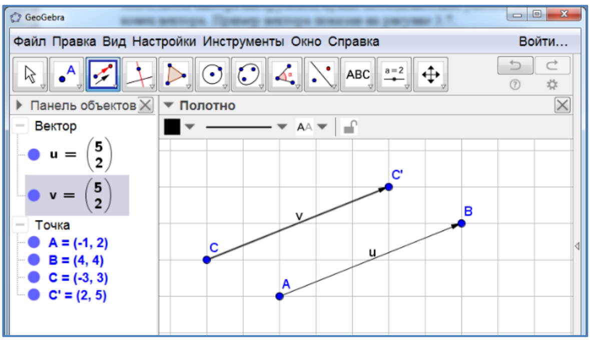

Рис. 1.20

Четвёртым слева в панели инструментов находится окошко с изображением прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.21).

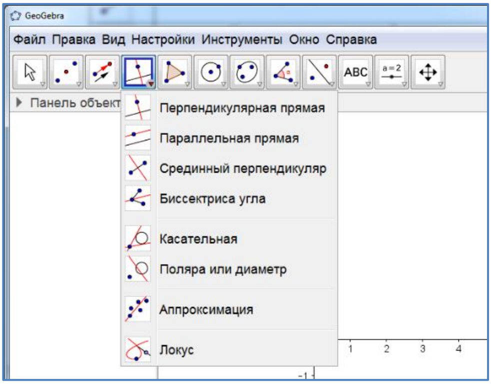

Рис. 1.21

Инструмент «Перпендикулярная прямая» позволяет проводить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и прямую. На рисунке 1.22 показана прямая g, проходящая через точку C и перпендикулярная прямой f.

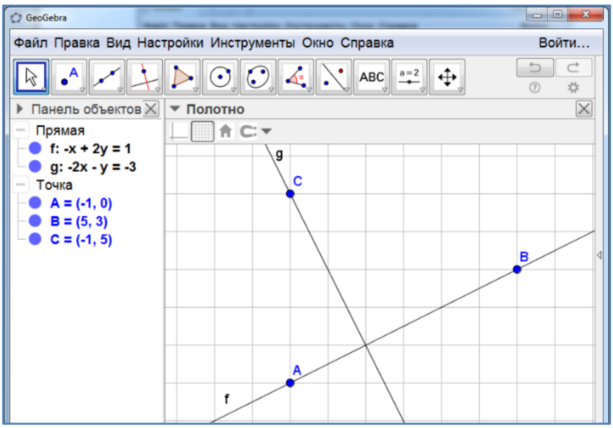

Рис. 1.22

Инструмент «Параллельная прямая» позволяет проводить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и прямую. На рисунке 1.23 показана прямая g, проходящая через точку C, и параллельная прямой f.

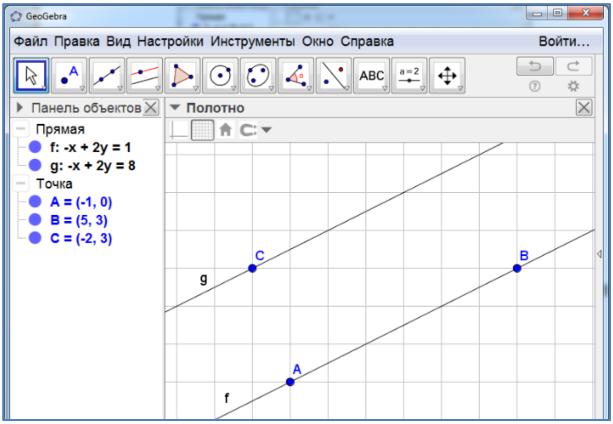

Рис. 1.23

Инструмент «Серединный перпендикуляр» позволяет строить серединный перпендикуляр к данному отрезку. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать две точки или отрезок. На рисунке 1.24 показан серединный перпендикуляр g к отрезку AB.

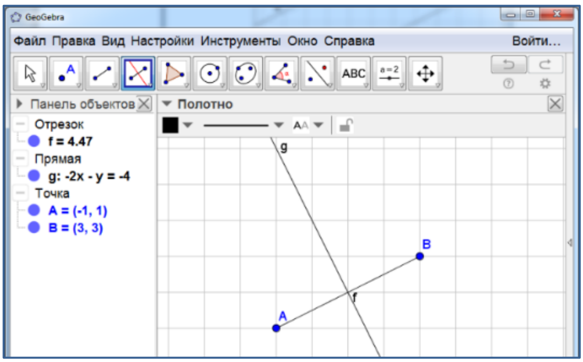

Рис. 1.24

Инструмент «Биссектриса угла» позволяет строить биссектрису данного угла. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать три точки, вторая из которых – вершина угла, или две пересекающиеся прямые. На рисунке 1.25 показана биссектриса h угла ABC.

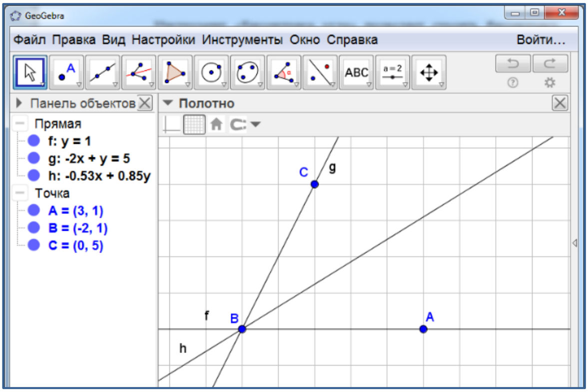

Рис. 1.25

Инструмент «Касательная» позволяет проводить касательную через данную точку к данной кривой. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать точку и кривую. На рисунке 1.26 показаны касательные к окружности с центром в точке A, проходящие через точку B.

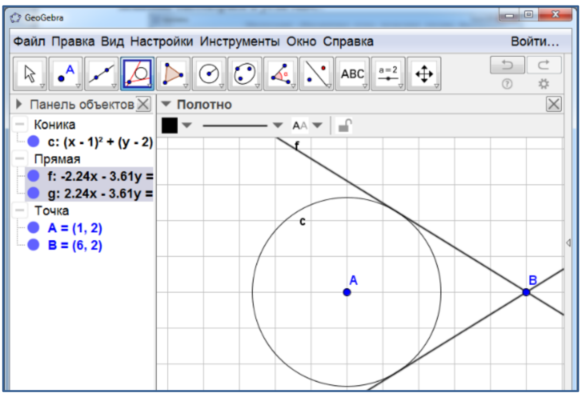

Рис. 1.26

Пятым слева в панели инструментов находится окошко с изображением треугольника. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.27).

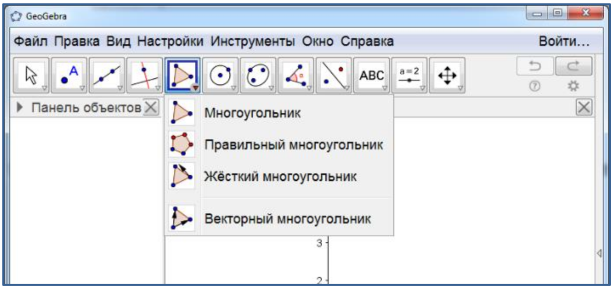

Рис. 1.27

Инструмент «Многоугольник» позволяет получать изображения многоугольников. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать вершины многоугольника, заканчивая в начальной вершине. На рисунке 1.28 показан пятиугольник, полученный таким образом.

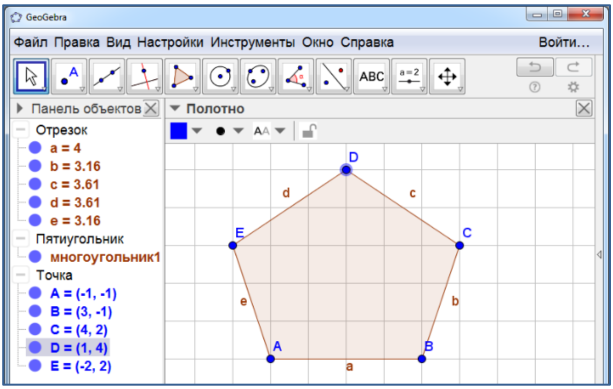

Рис. 1.28

Как и раньше, цвет, размеры вершин, сторон и самого многоугольника, а также их обозначения, можно изменять.

Инструмент «Правильный многоугольник» позволяет получать изображения правильных многоугольников. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить две соседние вершины многоугольника и в открывшемся окне указать число сторон. На рисунке 1.29 показаны правильные треугольник, четырёхугольник (квадрат), пятиугольник и шестиугольник, полученные таким образом.

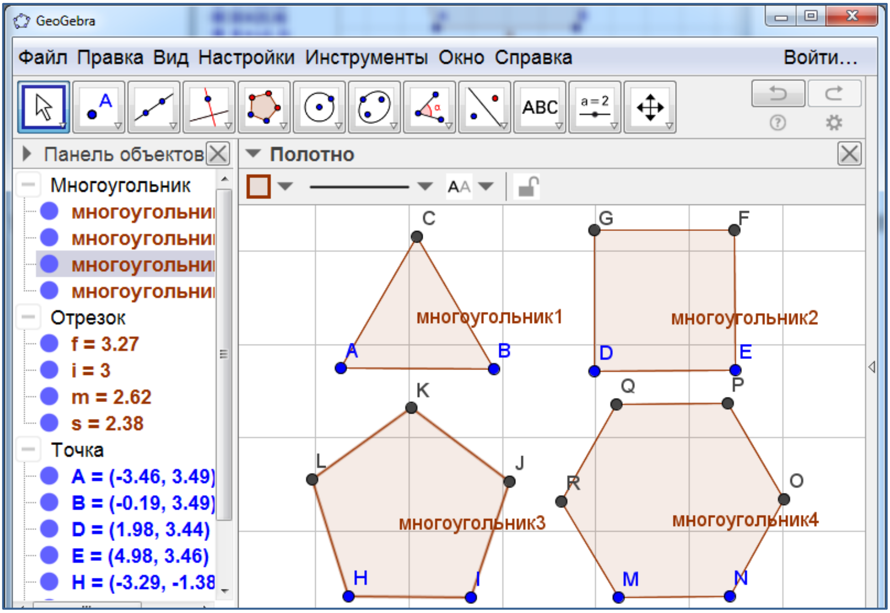

Рис. 1.29

Шестым слева находится окошко с изображением окружности. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.30).

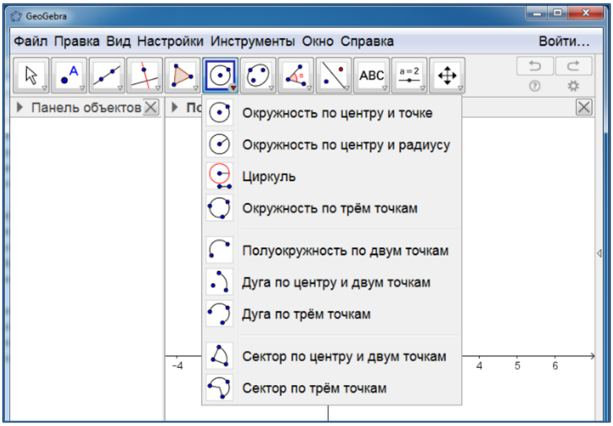

Рис. 1.30

Инструмент «Окружность по центру и точке» позволяет получать изображение окружности с данным центром и точкой на этой окружности. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать центр окружности и точку на ней. На рисунке 1.31 показана окружность, полученная таким образом.

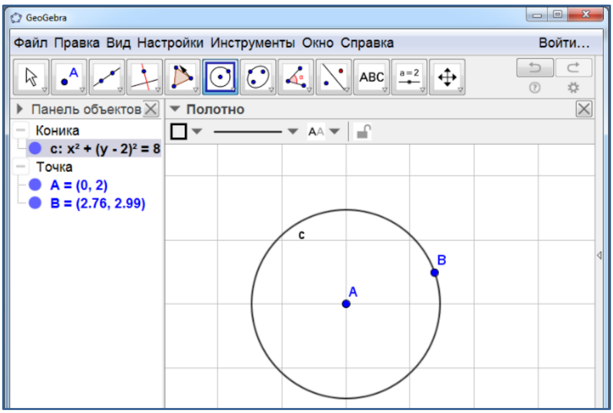

Рис. 1.31

Инструмент «Окружность по центру и радиусу» позволяет получать изображение окружности с данным центром и радиусом. Для этого нужно левой кнопкой мыши отметить центр окружности и в открывшемся окне указать радиус. На рисунке 1.32 показана окружность с радиусом 2.

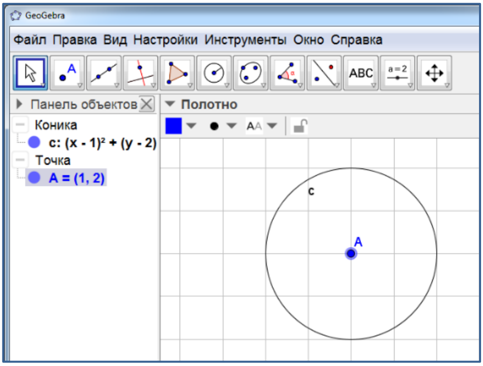

Рис. 1.32

Инструмент «Циркуль» позволяет строить окружности с данным центром и данным радиусом (отрезком). Для этого нужно левой кнопкой мыши указать отрезок или две точки, задающие радиус, а затем отметить центр окружности. На рисунке 1.33 показана окружность, полученная таким образом.

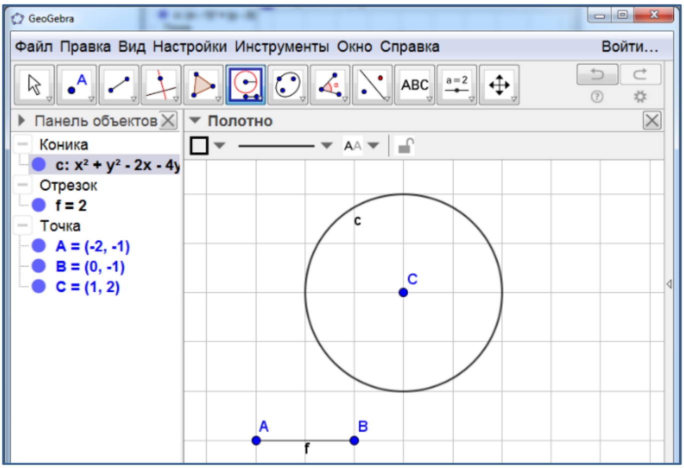

Рис. 1.33

Инструмент «Окружность по трём точкам» позволяет получать изображение окружности, проходящей через три точки. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. На рисунке 1.34 показана окружность, полученная таким образом.

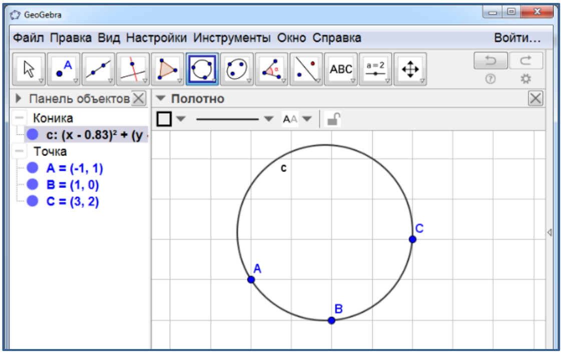

Рис. 1.34

Инструмент «Полуокружность по двум точкам» позволяет получать изображение полуокружности с данными концами. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать на полотне две точки – концы полуокружности. На рисунке 1.35 показана полуокружность, полученная таким образом.

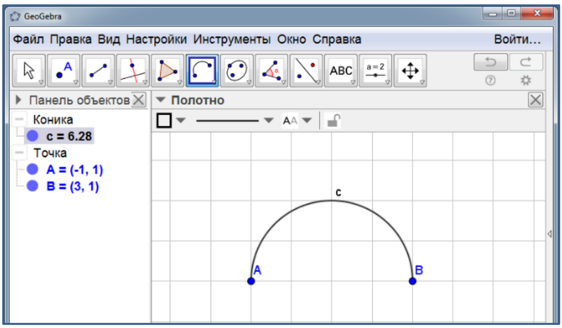

Рис. 1.35

Инструмент «Дуга по центру и двум точкам» позволяет получать изображение дуги окружности с данными центром и концами дуги. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр окружности и две точки – концы дуги. На рисунке 1.36 показана дуга окружности.

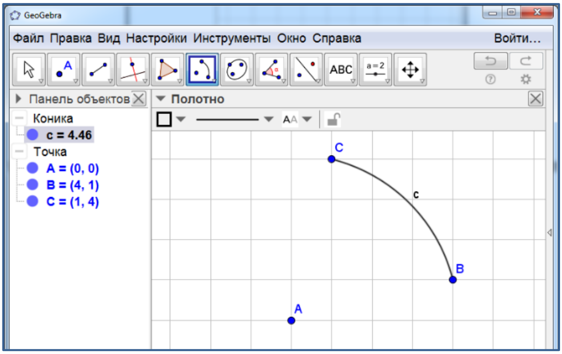

Рис. 1.36

Инструмент «Дуга по трём точкам» позволяет получать изображение дуги окружности, с данными концами и точкой на этой дуге. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и третья точки будут концами дуги. На рисунке 1.37 показана окружность, полученная таким образом.

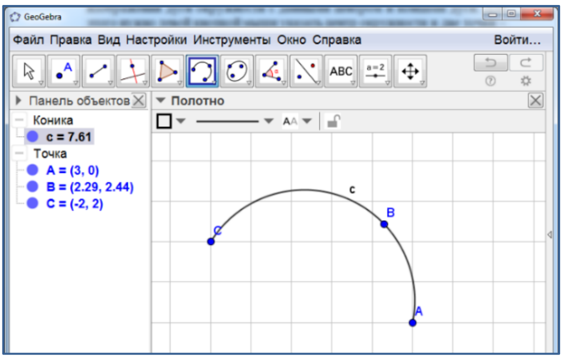

Рис. 1.37

Инструмент «Сектор по центру и двум точкам» позволяет получать изображение сектора окружности с данными центром и концами дуги сектора. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр окружности и две точки – концы дуги. На рисунке 1.38 показан сектор.

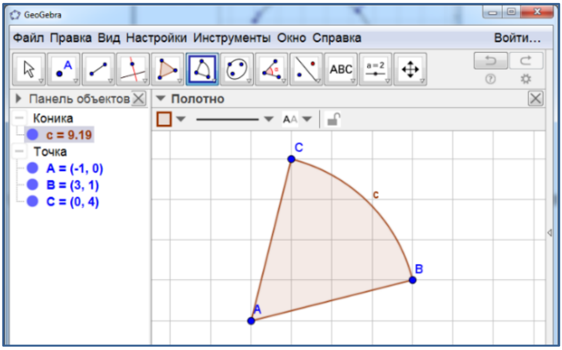

Рис. 1.38

Инструмент «Сектор по трём точкам» позволяет получать изображение сектора окружности, с данными концами дуги и точкой на этой дуге сектора. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и третья точки будут концами дуги сектора. На рисунке 1.39 показан сектор, полученный таким образом.

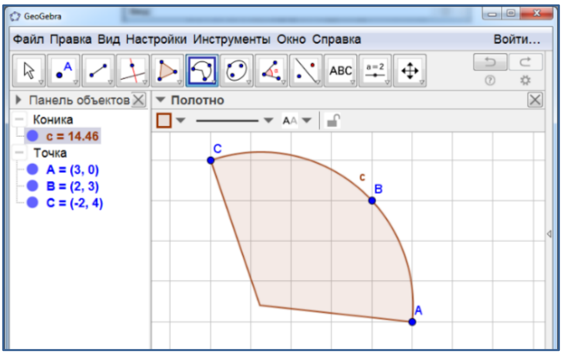

Рис. 1.39

Седьмым слева находится окошко с изображением эллипса и трёх точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.40).

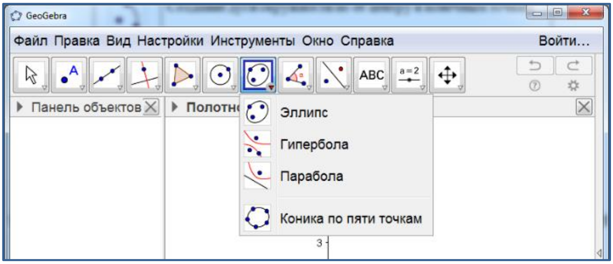

Рис. 1.40

Инструмент «Эллипс» позволяет получать изображение эллипса, с данными фокусами и точкой на нём. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и вторая точки будут фокусами эллипса. На рисунке 1.41 показан эллипс, полученный таким образом.

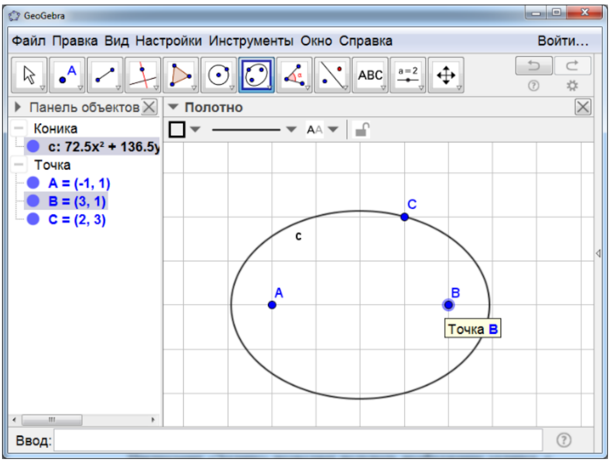

Рис. 1.41

Инструмент «Гипербола» позволяет получать изображение гиперболы с данными фокусами и точкой на этой гиперболе. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить три точки. Первая и вторая точки будут фокусами гиперболы. На рисунке 1.42 показана гипербола, полученная таким образом.

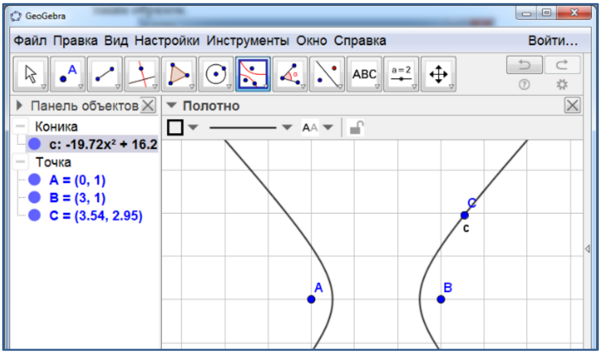

Рис. 1.42

Инструмент «Парабола» позволяет получать изображение параболы с данными фокусом и директрисой (прямой). Для этого нужно левой кнопкой мыши отметить точку (фокус) и указать прямую (директрису) параболы (как на рисунке 1.43).

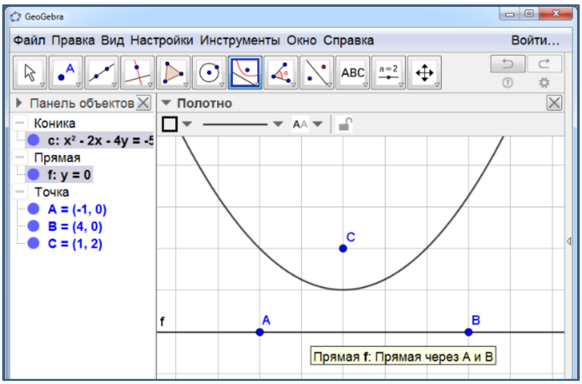

Рис. 1.43

Инструмент «Коника по пяти точкам» позволяет получать изображения эллипса, гиперболы или параболы, проходящих через пять данных точек. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно отметить пять точек. В зависимости от их расположения на полотне появятся эллипс, гипербола или парабола. На рисунке 1.44 показан эллипс.

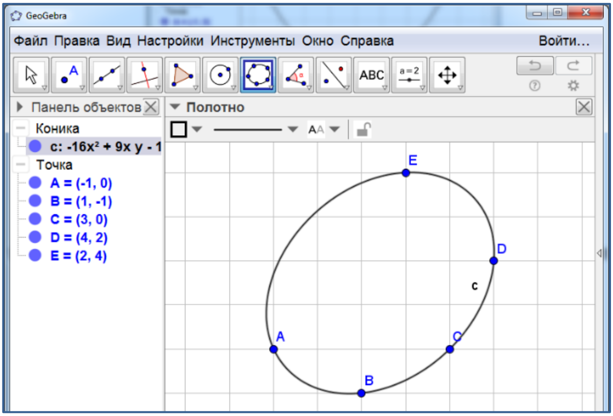

Рис. 1.44

Восьмым слева находится окошко с изображением угла. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.45).

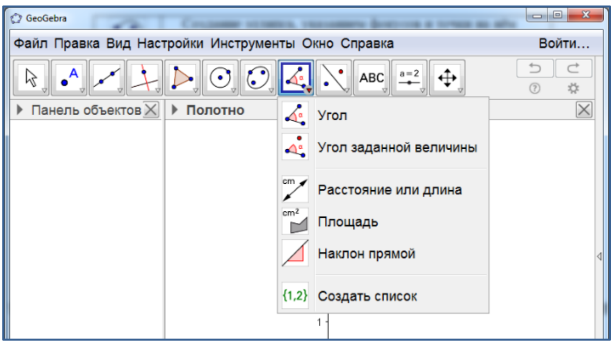

Рис. 1.45

Инструмент «Угол» позволяет находить величину угла. Для этого нужно указать три точки или две прямые, образующие угол. При этом на полотне появится величина этого угла. На рисунке 1.46 величина угла равна 52.13°.

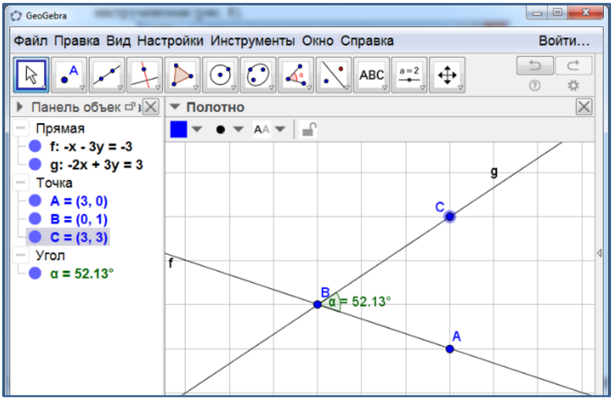

Рис. 1.46

Инструмент «Угол заданной величины» позволяет получать изображение угла заданной величины. Для этого нужно указать две точки. Первая из них будет принадлежать стороне угла, вторая будет вершиной угла. После этого откроется окно, в котором нужно указать величину угла. При этом на полотне появится третья точка, принадлежащая второй стороне угла. Сам угол можно получить, проводя лучи через данные точки. На рисунке 1.47 показан угол, полученный таким образом, величиной 45°.

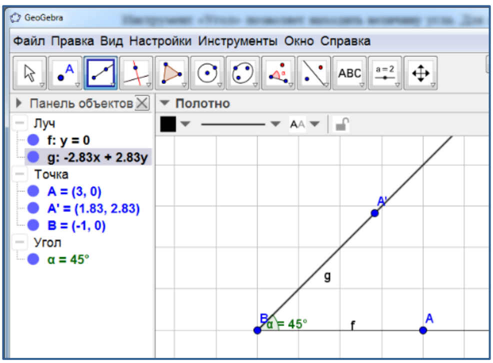

Рис. 1.47

Инструмент «Расстояние или длина» позволяет находить расстояние между двумя точками, периметр многоугольника, длину окружности и др.

Например, для нахождения расстояния между двумя точками нужно указать левой кнопкой мыши эти точки. На полотне появится расстояние между точками (рис. 1.48).

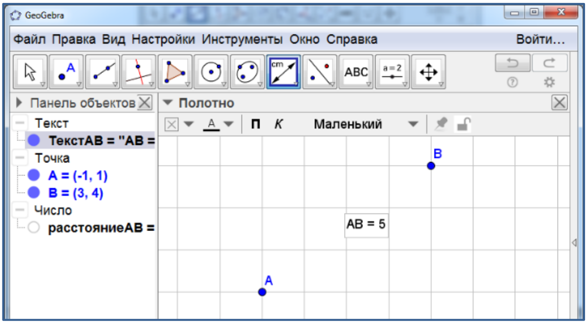

Рис. 1.48

Инструмент «Площадь» позволяет находить площади многоугольника, круга, эллипса и др. Для этого нужно указать соответствующую фигуру. После этого на полотне появится искомое значение площади (рис. 1.49).

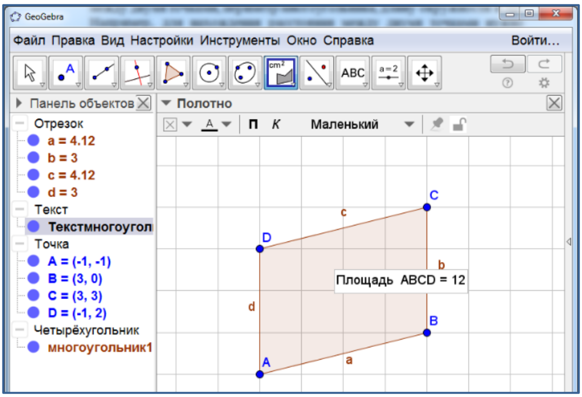

Рис. 1.49

Инструмент «Наклон прямой» позволяет находить угловой коэффициент прямой. Для этого нужно указать соответствующую прямую. После этого на полотне появится искомое значение углового коэффициента (рис. 1.50).

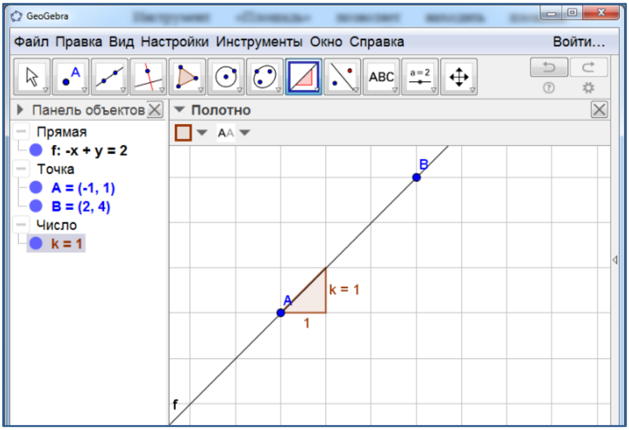

Рис. 1.50

Девятым слева находится окошко с изображением прямой и двух точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.51).

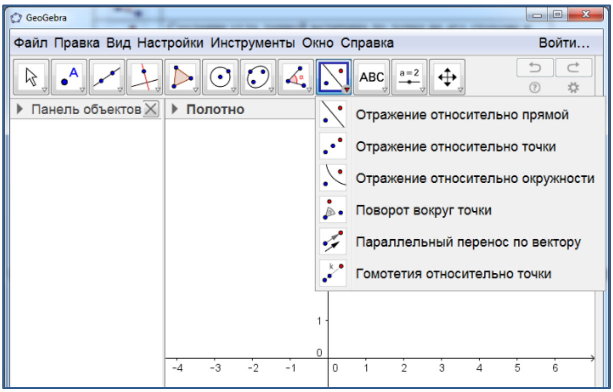

Рис. 1.51

Инструмент «Отражение относительно прямой» позволяет получать изображения фигуры, симметричной данной относительно прямой. Для этого нужно указать фигуру и прямую. После этого на полотне появится фигура, симметричная указанной. На рисунке 1.52 показан треугольник A′B′C′ симметричный треугольнику ABC относительно прямой DE.

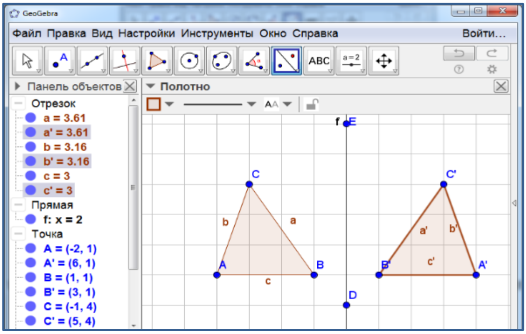

Рис. 1.52

Инструмент «Отражение относительно точки» позволяет получать изображения фигуры, центрально-симметричной данной. Для этого нужно указать фигуру и центр симметрии. После этого на полотне появится фигура, симметричная указанной. На рисунке 1.53 показан треугольник A′B′C′ симметричный треугольнику ABC относительно центра D.

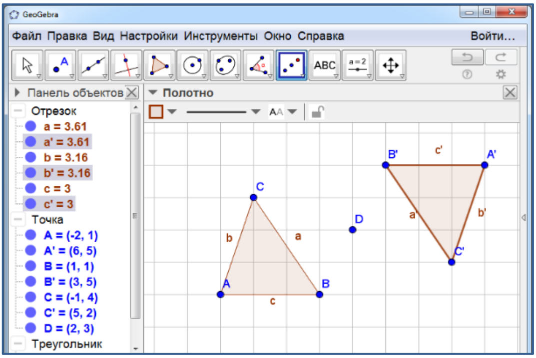

Рис. 1.53

Инструмент «Поворот вокруг точки» позволяет повернуть данную фигуру вокруг данной точки на данный угол. Для этого нужно указать фигуру и центр поворота. После этого появится окно, в котором нужно указать угол поворота. На рисунке 1.54 показан треугольник A′B′C′ полученный поворотом треугольника ABC вокруг центра D на угол 90° против часовой стрелки.

Этот инструмент можно использовать для создания анимации вращения фигуры.

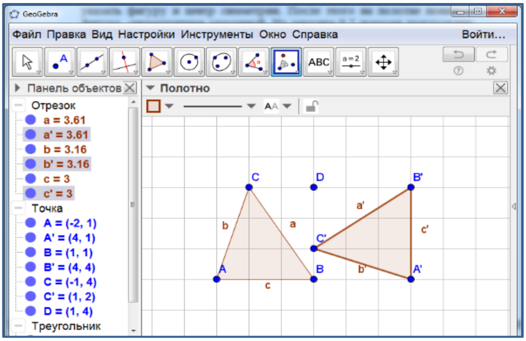

Рис. 1.54

Для этого нужно изобразить фигуру, например квадрат (рис. 1.55). Отметить точку, которая будет центром вращения. Создать ползунок, в котором угол α изменяется от 0° до 360°. Левой кнопкой мыши указать фигуру и центр поворота. Откроется окно, в котором, в качестве угла поворота нужно указать α. После этого нажать правой кнопкой мыши на ползунок и запустить анимацию. Фигура будет вращаться вокруг указанного центра поворота.

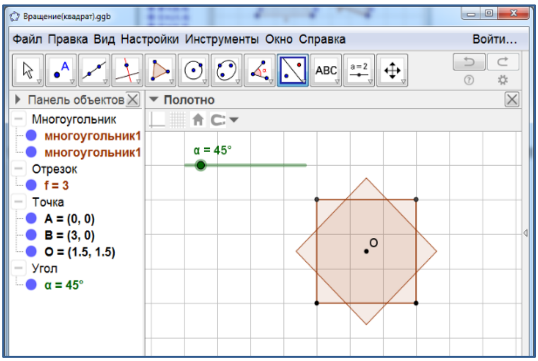

Рис. 1.55

Инструмент «Параллельный перенос по вектору» позволяет параллельно перенести данную фигуру на данный вектор. Для этого нужно указать фигуру и вектор. На рисунке 1.56 показан треугольник

A′B′C′ полученный параллельным переносом треугольника ABC на вектор DE.

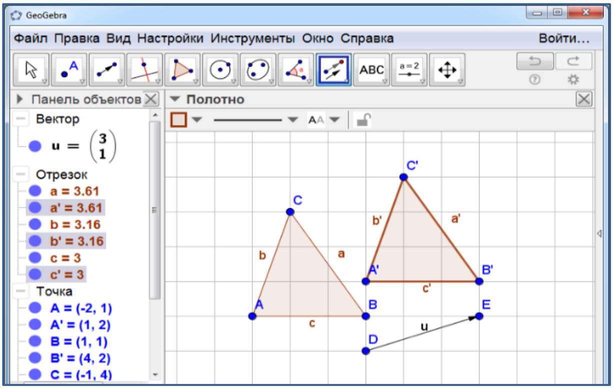

Рис. 1.56

Инструмент «Гомотетия относительно точки» позволяет получать изображение фигуры, гомотетичной данной. Для этого нужно указать фигуру и центр гомотетии. После этого появится окно, в котором нужно указать коэффициент гомотетии. На рисунке 1.57 показан треугольник A′B′C′, гомотетичный треугольнику ABC относительно точки D и коэффициентом 2.

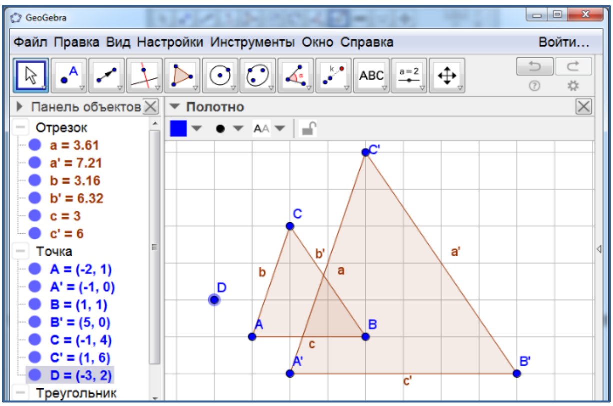

Рис. 1.57

Десятым слева находится окошко с изображением отрезка с точкой. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.58).

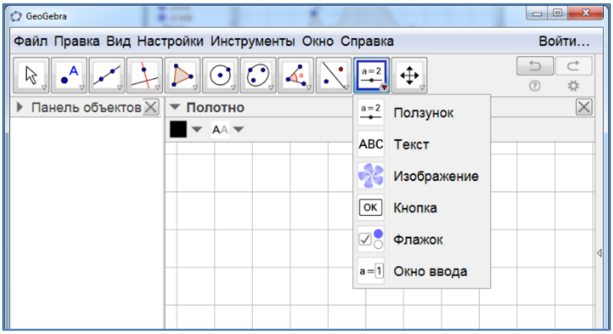

Рис. 1.58

Инструмент «Ползунок» позволяет рассматривать переменные значения длин и углов. Для создания ползунка нужно нажать левой кнопкой мыши на какое-нибудь место полотна. Откроется окно, изображённое на рисунке 59.

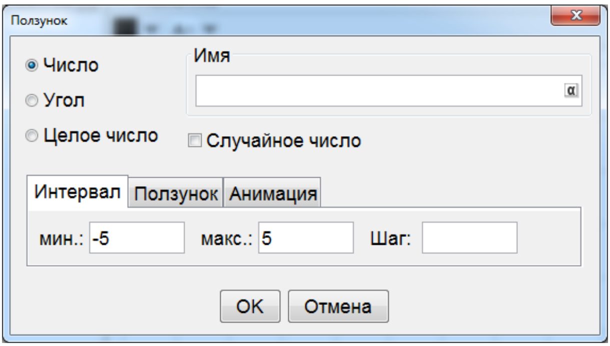

Рис. 1.59

В этом окне можно выбрать название и промежуток изменения переменной.

После этого длину отрезка, радиус окружности, величину угла и др. можно сделать переменной. Например, на рисунке 1.60 показана окружность радиуса r, где r перемещением ползунка можно менять от 0 до 5.

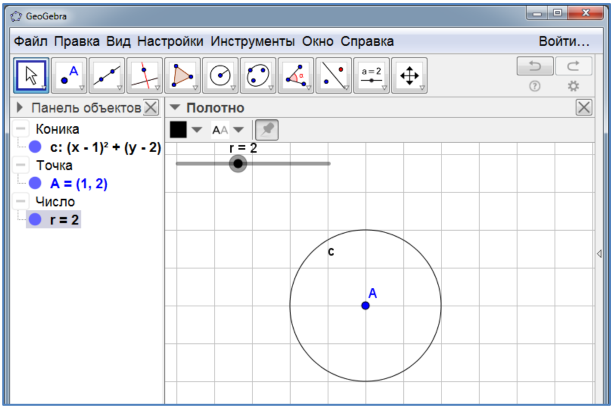

Рис. 1.60

Если нажать на ползунок правой кнопкой мыши, то откроется дополнительное окно (рис. 1.61).

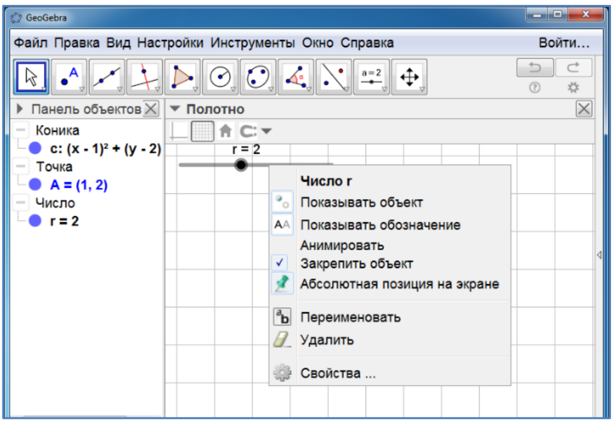

Рис. 1.61

Если в этом окне выбрать строку «Анимировать», то переменная r ползунка будет изменяться автоматически и вместе с ней будет изменяться окружность.

Полученное анимированное изображение можно сохранить в формате gif.

Инструмент «Текст» позволяет делать надписи. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши в каком-нибудь месте полотна. Откроется окно, в котором можно будет ввести текст. После закрытия окна надпись появится на полотне. На рисунке 1.62 рядом с равносторонним треугольником ABC сделана надпись «Равносторонний треугольник».

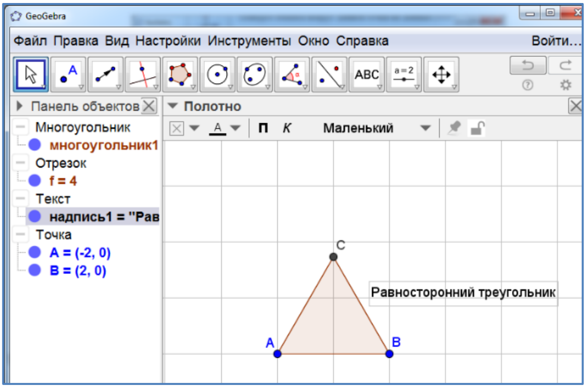

Рис. 1.62

Инструмент «Изображение» позволяет вставлять рисунки. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши по окошку с этим инструментом. Откроется окно, в котором можно

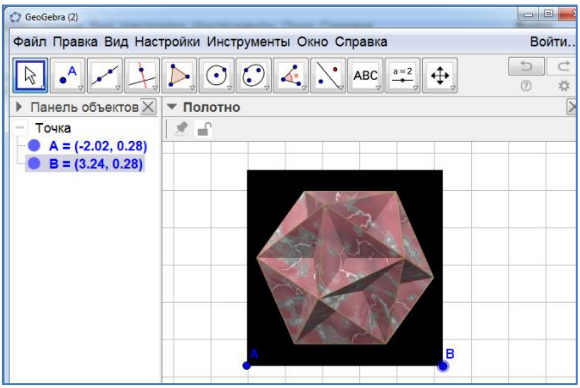

Рис. 1.63

выбрать файл с рисунком. На рисунке 1.63 показан вставленный многогранник.

Крайним справа находится окошко с изображением креста. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.64), которые позволяют перемещать чертёж, увеличивать или уменьшать его размеры и др.

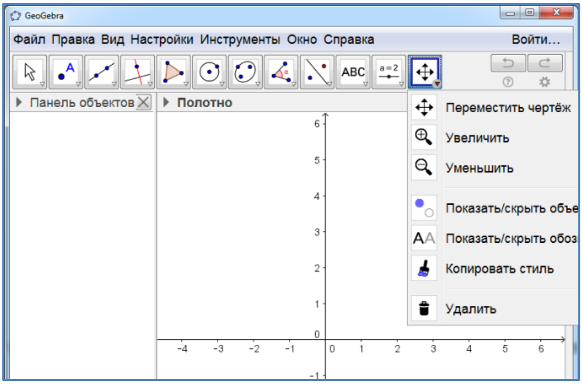

Рис. 1.64

Внизу рабочего окна находится строка **«Ввод»**, в которой можно набирать команды, или задавать фигуры аналитически. Например, если в этой строке набрать A=(3, 2) и нажать «Enter», то появится точка A. Если набрать f(x)=sin(x), то появится соответствующий график функции (рис. 1.65).

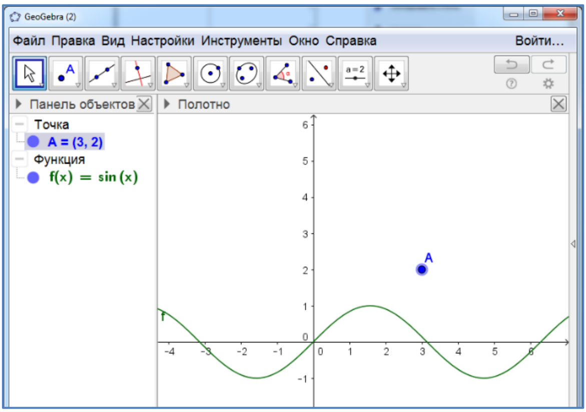

Рис. 1.65

В правом нижнем углу рабочего окна находится значок с изображением знака «?». Если на него нажать левой кнопкой мыши, то откроется окно с дополнительными командами (рис. 1.66).

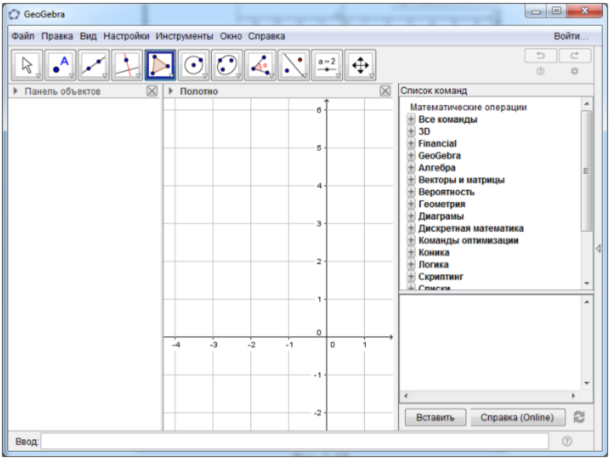

Рис. 1.66

Например, если изобразить треугольник ABC, написать в строке «Ввод» ВписаннаяОкружность[A,B,C], и нажать «Enter», то появится окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 1.67).

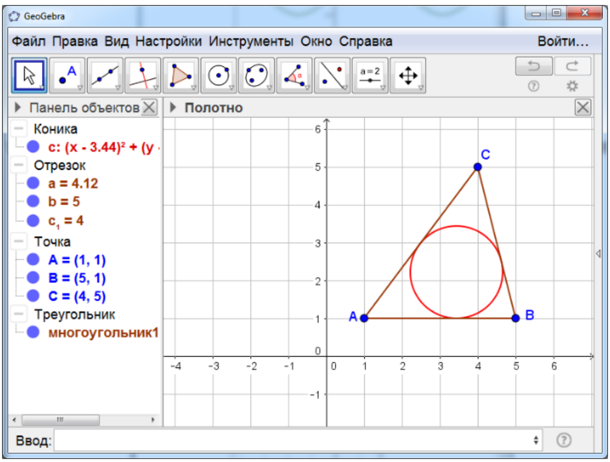

Рис. 1.67

2. ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим возможности программы GeoGebra для иллюстрации теорем школьного курса геометрии.

Теорема. Вертикальные углы равны.

1. Выберем инструмент «Прямая» и проведём прямые AB и CD.
2. Выберем инструмент «Пересечение» и получим точку пересечения O этих прямых.
3. Выберем инструмент угол и установим величины углов DOB и AOC.
4. Изменим цвет и толщину прямых.
5. Результат изображен на рисунке 2.1.

Расположение прямых можно изменять. При этом величины углов будут изменяться, но равенство вертикальных углов сохранится.

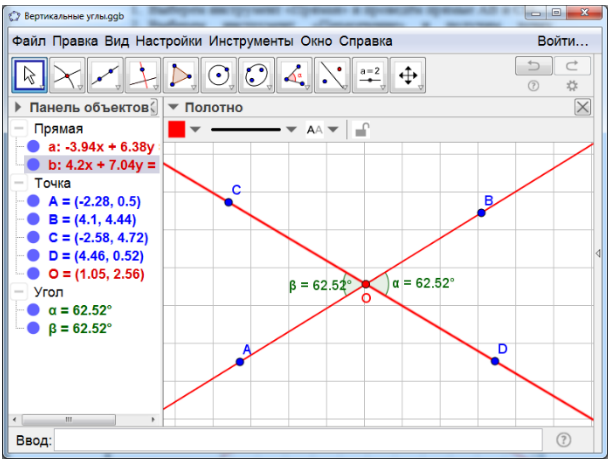

Рис. 2.1

Теорема. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Отрезки касательных, проведённых к окружности из данной точки, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

1. Построим окружность с данным центром O и точкой B на ней.
2. Отметим какую-нибудь точку C вне этой окружности.
3. Через точку C проведём касательные к окружности.
4. Найдём общие точки D и E этих касательных с окружностью.
5. Проведём отрезки OD и OE.
6. Установим величины углов ODC и OEC.
7. Установим длины отрезков CD и CE.
8. Изменим цвет, толщину линий и стиль линий.
9. Результат изображён на рисунке 2.2.

Радиус окружности и расположение точки C можно изменять, но величины углов ODC и OEC будут равны 90о, что означает перпендикулярность касательной и радиуса, проведённого в точку касания. Длины отрезков CD и CE будут меняться, но оставаться равными.

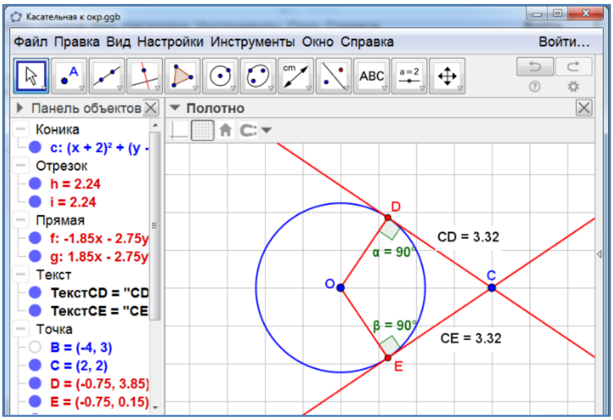

Рис. 2.2

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°.

1. Проведём прямую AB.
2. Выберем точку C и проведём через неё прямую, параллельную прямой AB.
3. Через точки A и C проведём секущую h.
4. Установим величины внутренних накрест лежащих и внутренних односторонних углов.
5. Изменим цвет, толщину линий и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 2.3.

Расположение параллельных прямых и секущей можно изменять, но равенство внутренних накрест лежащих углов сохранится, а внутренние односторонние углы будут составлять в сумме 180°.

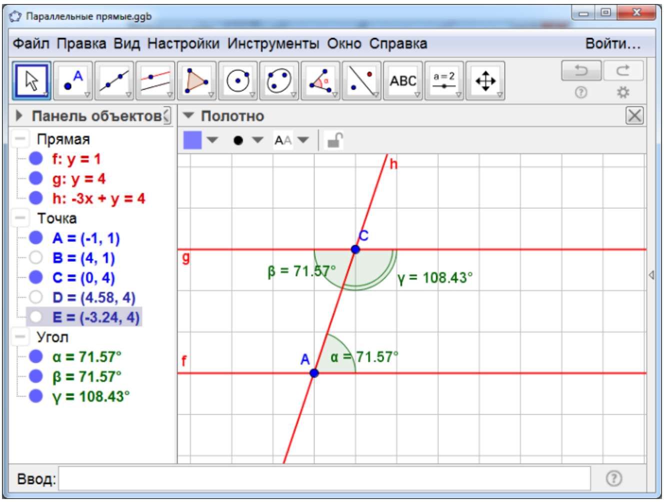

Рис. 2.3

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.

1. Построим треугольник ABC.
2. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой AB.
3. Установим величину углов треугольника и внутренних накрест лежащих углов к углам A и B.
4. Сделаем надпись $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
5. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 2.4.

Форму треугольника можно изменять, но сумма его углов будет равна 180°.

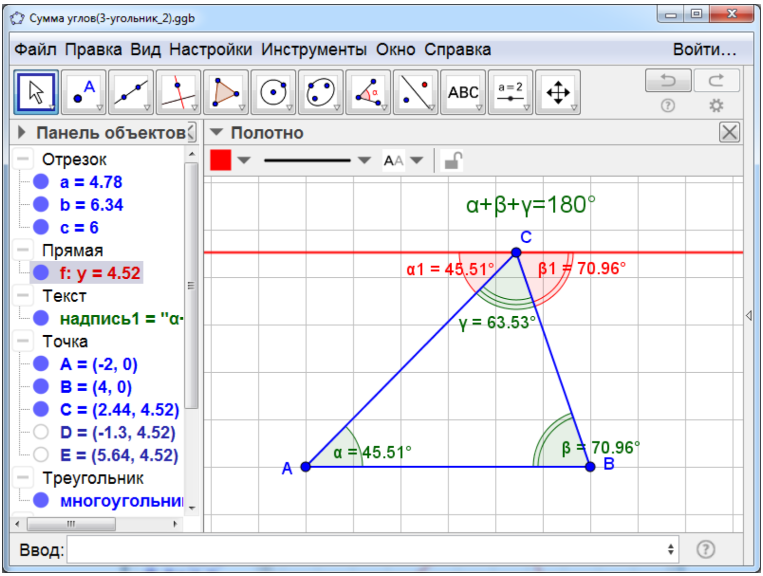

Рис. 2.4

Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

1. Построим треугольник ABC.
2. Проведём луч AB.
3. Установим величину углов A и C треугольника, а также внешнего угла с вершиной B.
4. Сделаем надпись $\beta = \alpha + \gamma$.
5. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 2.5.

Форму треугольника можно изменять, но внешний угол при вершине B будет равен сумме двух внутренних углов A и C.

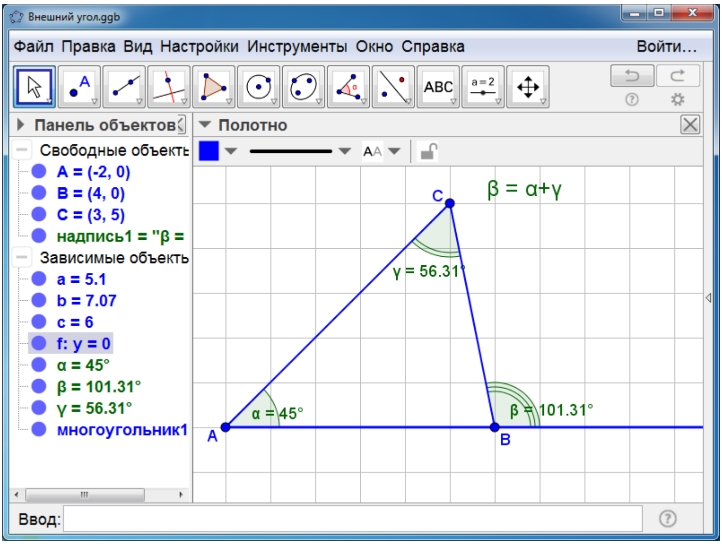

Рис. 2.5

Теорема. Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

1. Построим произвольный четырёхугольник ABCD.
2. Установим величины его углов.
3. Найдём сумму этих величин.
4. Убедимся в том, что она равна 360° (рис. 2.6).

Форму четырёхугольника можно менять, но сумма его углов будет оставаться равной 360°.

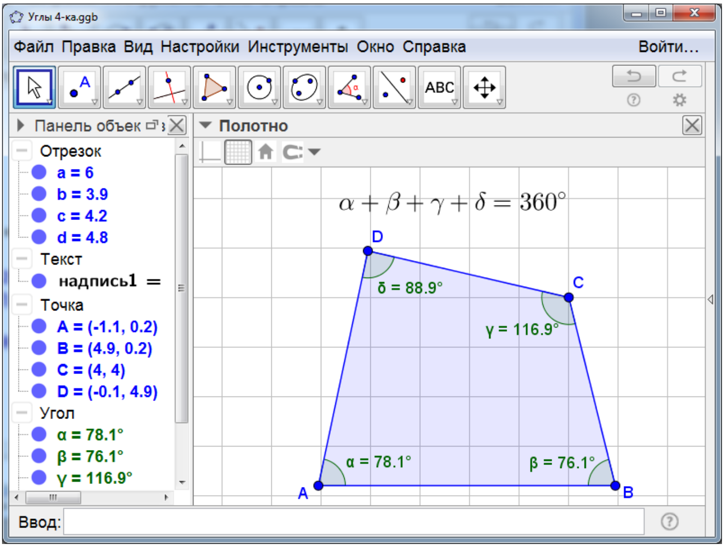

Рис. 2.6

Теорема. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

1. Построим параллелограмм ABCD.
2. Установим величины углов параллелограмма и величины его сторон.
3. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
4. Результат изображён на рисунке 2.7.

Форму параллелограмма можно изменять, но его противоположные стороны будут равны, и противоположные углы будут равны.

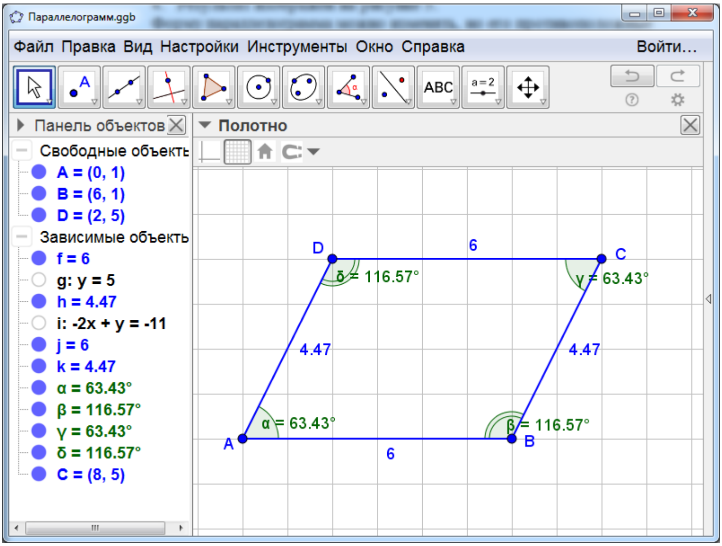

Рис. 2.7

Теорема. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

1. Построим параллелограмм ABCD.
2. Проведём диагонали AC и BD.
3. Определим их точку пересечения O.
4. Установим длины отрезков AO, OC, BO, OD.
5. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 2.8.

Форму параллелограмма можно изменять, но равенства AO = OC, BO = OD будут сохраняться.

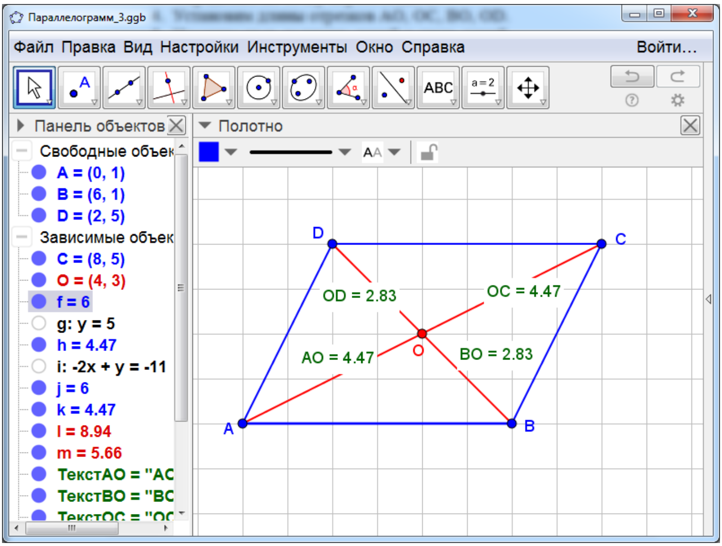

Рис. 2.8

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

1. Построим треугольник ABC.
2. Отметим середины сторон AC и BC.
3. Проведём отрезок DE.
4. Установим длины отрезков AB и DE.
5. Сделаем надпись $DE = \frac{1}{2}AB$.
6. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
7. Результат изображён на рисунке 2.9.

Форму треугольника можно изменять, но равенство $DE = \frac{1}{2}AB$ будет сохраняться.

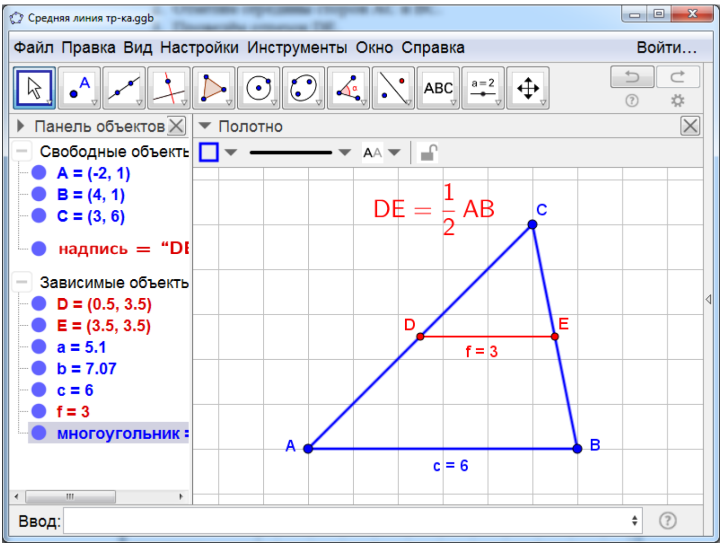

Рис. 2.9

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

1. Построим трапецию ABCD.
2. Отметим середины сторон AD и BC.
3. Проведём отрезок EF.
4. Установим длины отрезков AB, CD и EF.
5. Сделаем надпись $\mathrm{EF} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{CD})$.
6. Скроем обозначения построенных линий.
7. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
8. Результат изображён на рисунке 2.10.

Форму трапеции можно изменять, но равенство $\mathrm{EF} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{CD})$ будет сохраняться.

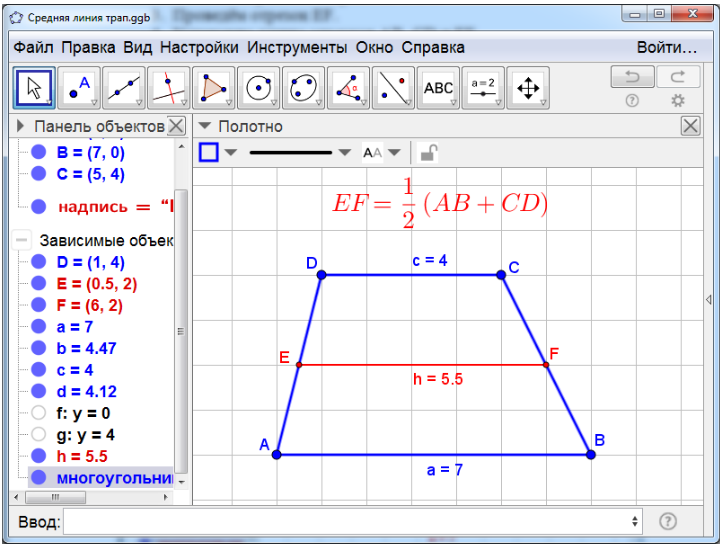

Рис. 2.10

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

1. Построим окружность с центром в точке О и радиусом ОА.
2. Построим центральный угол АОВ.
3. Построим вписанный угол АСВ.
4. Установим величины углов АОВ и АСВ.
5. Сделаем надпись $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.
6. Скроем обозначения построенных линий.
7. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
8. Результат изображён на рисунке 2.11.

Величину центрального угла можно изменять, но величина вписанного угла, опирающегося на ту же дугу, останется равной половине величины центрального угла.

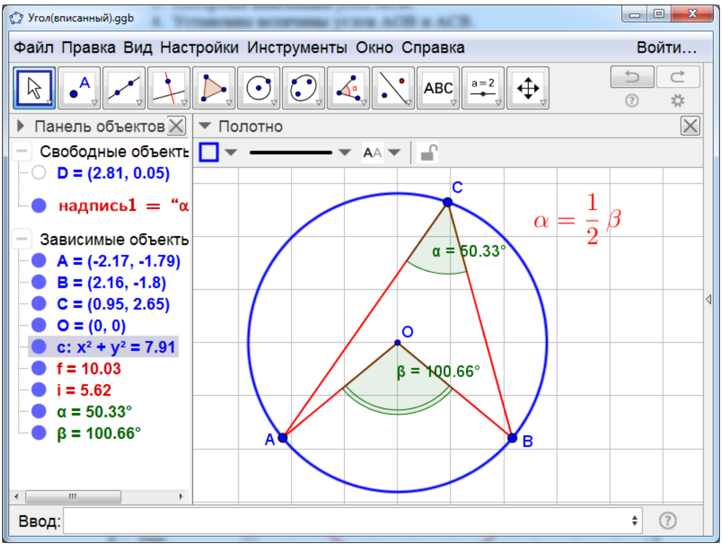

Рис. 2.11

Теорема. Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опирается этот угол и вертикальный к нему угол.

1. Построим окружность с центром в точке O и точкой P.
2. Проведём хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E.
3. Найдём величину угла AEB.
4. Найдём величины дуг $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$.
5. Сделаем надписи $\angle E = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{CD})$.
6. Скроем обозначения построенных линий.
7. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
8. Результат изображён на рисунке 2.12.

Величины дуг можно изменять, но величина угла E, останется равной полусумме дуг $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$.

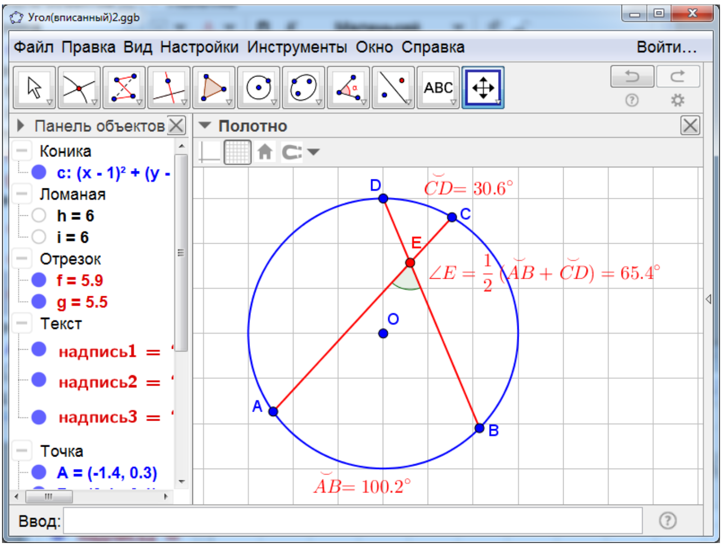

Рис. 2.12

Теорема. Угол с вершиной вне окружности измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри этого угла.

1. Построим окружность с центром в точке О и точкой Р.
2. Проведём отрезки АЕ и ВЕ, пересекающие окружность в точках в точке С и D.
3. Найдём величину угла АЕВ.
4. Найдём величины дуг $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$.
5. Сделаем надписи $\angle E = \frac{1}{2}(\breve{AB} - \breve{CD})$.
6. Скроем обозначения построенных линий.
7. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
8. Результат изображён на рисунке 2.13.

Величины дуг можно изменять, но величина угла Е, останется равной полуразности дуг $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$.

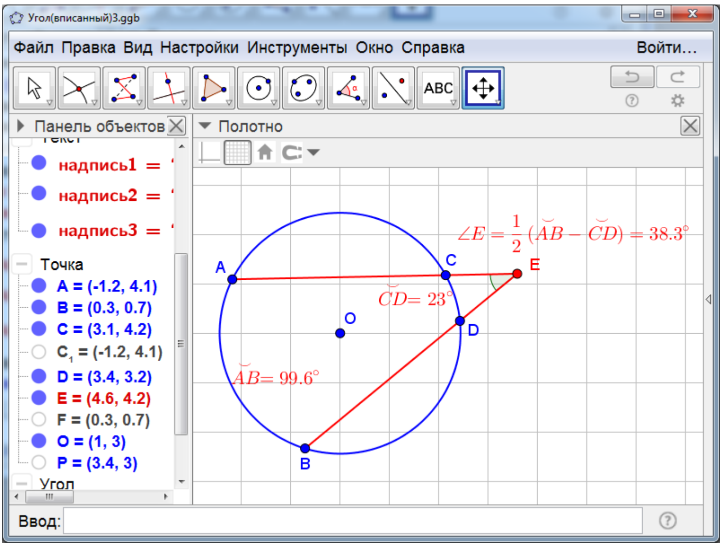

Рис. 2.13

Теорема. Сумма противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна 180º.

1. Построим окружность с центром О.
2. Впишем в неё четырёхугольник ABCD.
3. Установим величины его углов.
4. Скроем обозначения построенных линий.
5. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 2.14.

Форму четырёхугольника можно изменять, но сумма его противоположных углов будет равна 180º.

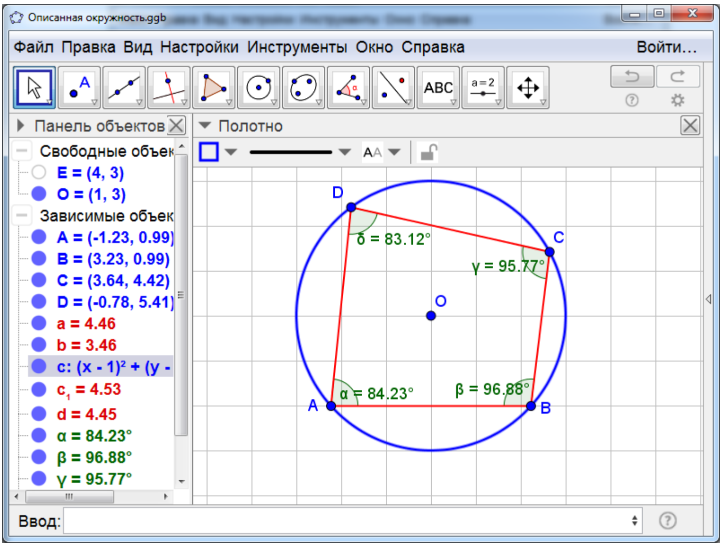

Рис. 2.14

Теорема. Суммы противоположных сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

1. Построим окружность с центром O.
2. Отметим точку A и проведём через неё касательные к окружности.
3. Отметим точку C и проведём через неё касательные к окружности.
4. Обозначим B, D точки пересечения касательных.
5. Построим четырёхугольник ABCD.
6. Скроем касательные.
7. Установим длины сторон четырёхугольника ABCD.
8. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
9. Результат изображён на рисунке 2.15.

Перемещая вершины A и C, форму четырёхугольника можно изменять, но суммы его противоположных сторон будут равны.

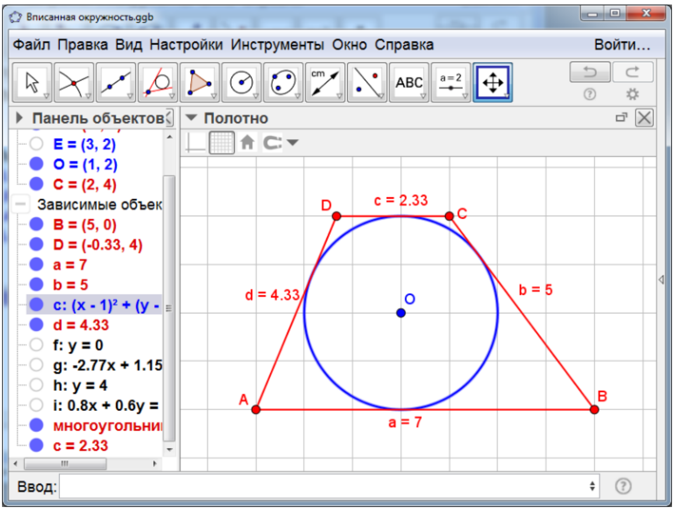

Рис. 2.15

Теорема. Центральная симметрия сохраняет расстояния между точками и переводит отрезки в отрезки.

1. Построим отрезок АВ.
2. Выберем на нём точку С
3. Отметим точку О – центр симметрии.
4. Построим фигуру, симметричную отрезку АВ относительно точки О.
5. Построим точку С′, симметричную точке С относительно точки О.
6. Изменим цвет и толщину линий.
7. Результат изображён на рисунке 2.16.

Положение отрезка АВ, точек С и О можно менять. При этом длина отрезка А′В′ будет равна длине отрезка АВ, и точка С′ будет принадлежать отрезку А′В′.

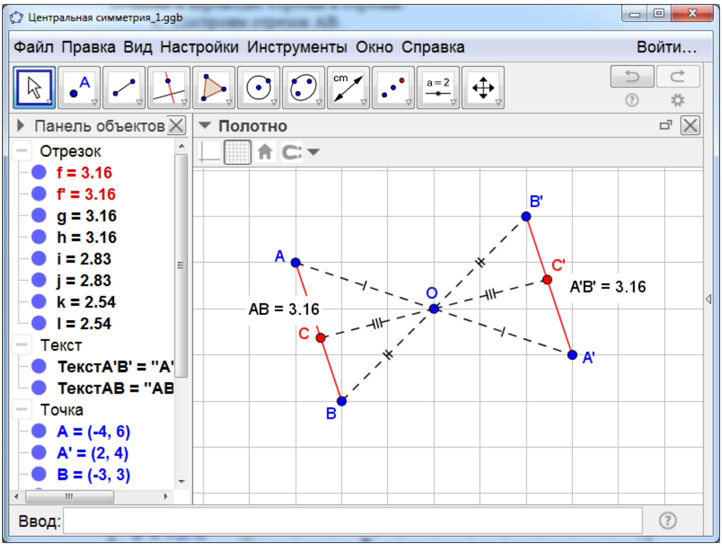

Рис. 2.16

Теорема. Поворот сохраняет расстояния между точками и переводит отрезки в отрезки.

1. Построим отрезок AB.
2. Выберем на нём точку C
3. Отметим точку O – центр поворота.
4. Создадим ползунок α, в котором угол α изменяется от 0° до 360°.
5. Повернём отрезок AB вокруг точки O на угол α.
6. Повернём точку C вокруг точки O на угол α.
7. Изменим цвет и толщину линий.
8. Результат изображён на рисунке 2.17.

Положение отрезка AB, точек C и O можно менять. При этом длина отрезка A′B′ будет равна длине отрезка AB, и точка C′ будет принадлежать отрезку A′B′.

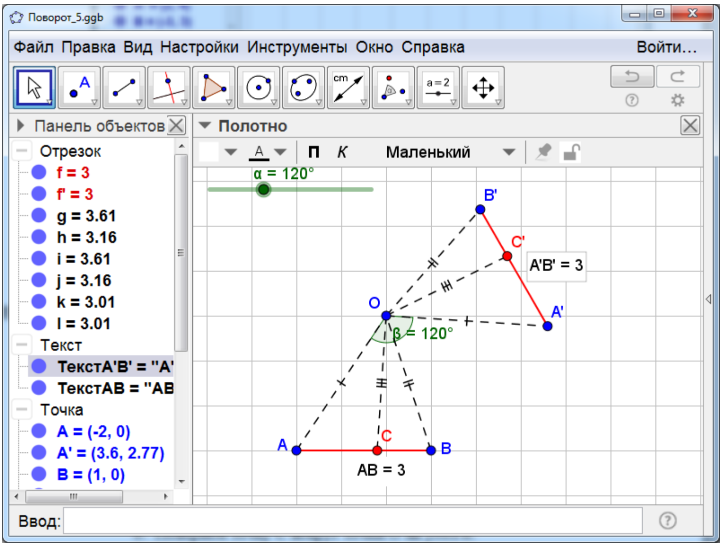

Рис. 2.17

Теорема. Осевая симметрия сохраняет расстояния между точками и переводит отрезки в отрезки.

1. Построим отрезок AB.
2. Выберем на нём точку C
3. Построим прямую c – ось симметрии.
4. Построим фигуру, симметричную отрезку AB относительно прямой c.
5. Построим точку C′, симметричную точке C относительно прямой c.
6. Изменим цвет и толщину линий.
7. Результат изображён на рисунке 2.18.

Положение отрезка AB, точек C и прямой c можно менять. При этом длина отрезка A′B′ будет равна длине отрезка AB, и точка C′ будет принадлежать отрезку A′B′.

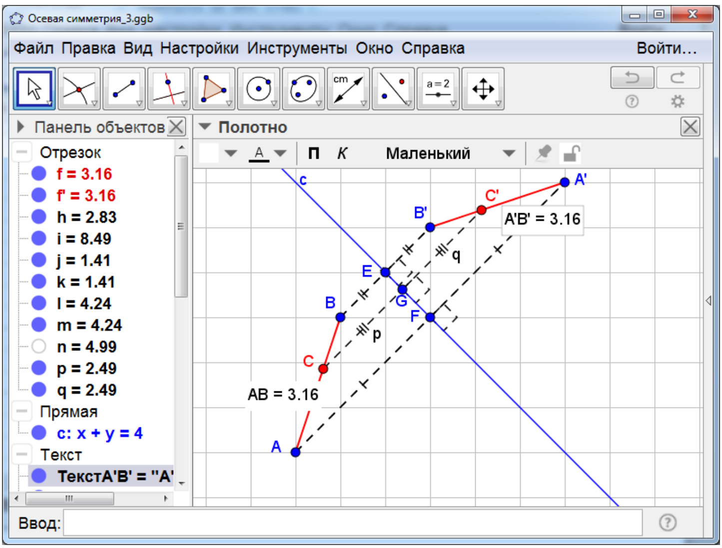

Рис. 2.18

Теорема. Параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и переводит отрезки в отрезки.

1. Построим отрезок AB.
2. Выберем на нём точку C
3. Построим вектор u.
4. Построим фигуру, полученную из отрезка AB параллельным переносом на вектор u.
5. Построим точку C′, полученную из точки C параллельным переносом на вектор u.
6. Изменим цвет и толщину линий.
7. Результат изображён на рисунке 2.19.

Положение отрезка AB, точек C и вектора u можно менять. При этом длина отрезка A′B′ будет равна длине отрезка AB, и точка C′ будет принадлежать отрезку A′B′.

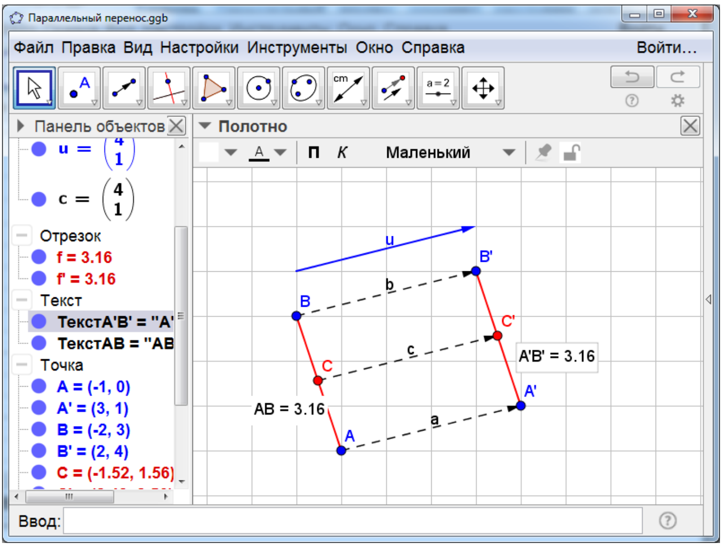

Рис. 2.19

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

1. Построим параллелограмм ABCD.
2. Проведём его высоту DH.
3. Установим площадь этого параллелограмма.
4. Изменим цвет и толщину линий.
5. Результат изображён на рисунке 2.20.

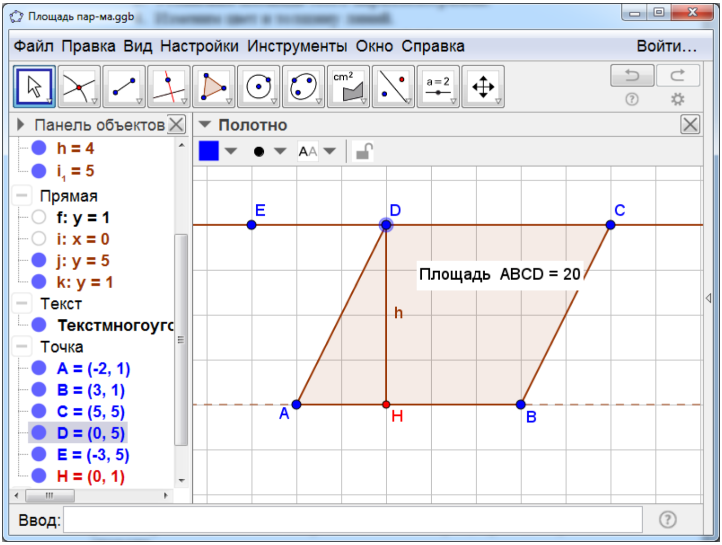

Рис. 2.20

Форму параллелограмма можно изменять, но его площадь будет равна произведению его стороны a на высоту h, проведённую к этой стороне. При этом, если сторону CD параллелограмма перемещать по прямой, параллельной прямой AB, то площадь параллелограмма не будет меняться.

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

1. Построим треугольник ABC.
2. Проведём его высоту CH.
3. Установим площадь этого треугольника.
4. Изменим цвет и толщину линий.
5. Результат изображён на рисунке 2.21.

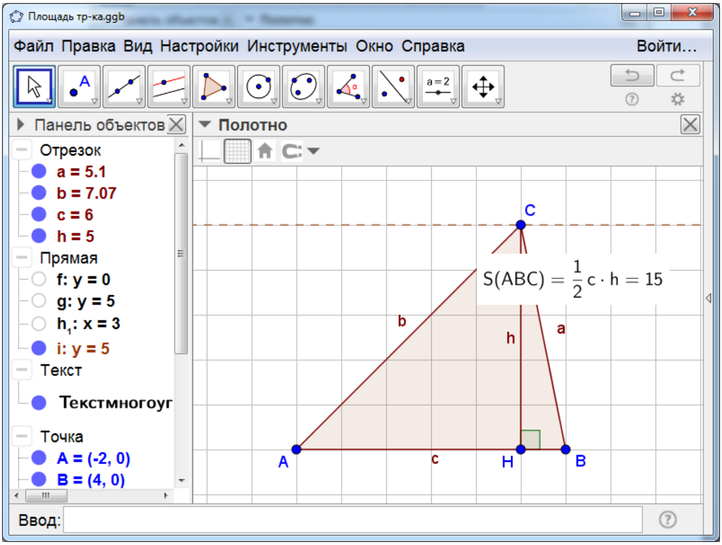

Рис. 2.21

Форму треугольника можно изменять, но его площадь будет равна половине произведения его стороны c на высоту h, проведённую к этой стороне. При этом, если вершину C треугольника перемещать по прямой, параллельной прямой AB, то площадь треугольника не будет меняться.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

1. Построим трапецию ABCD.
2. Проведём его высоту CH.
3. Установим площадь этой трапеции.
4. Изменим цвет и толщину линий.
5. Результат изображён на рисунке 2.22.

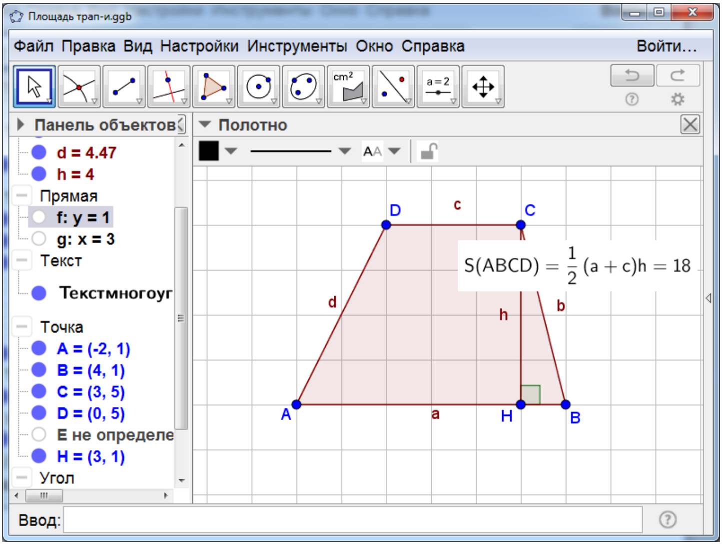

Рис. 2.22

Форму трапеции можно изменять, но её площадь будет равна произведению полусуммы оснований a и c на высоту h.

Теорема (Пифагора). В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

1. Построим прямоугольный треугольник ABC.
2. Отметим его углы.
3. Построим квадраты на сторонах треугольника ABC.
4. Скроем обозначения сторон этих квадратов.
5. Установим площади этих квадратов.
6. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
7. Результат изображён на рисунке 2.23.

Форму треугольника можно изменять, но площадь квадрата, построенного на гипотенузе, будет равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

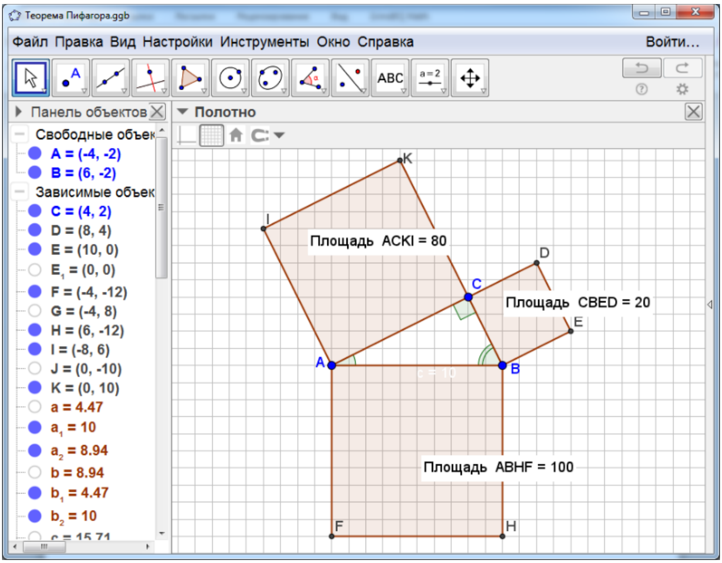

Рис. 2.23

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

1. Построим многоугольник ABCDEF.
2. С помощью инструмента «Гомотетия относительно точки» построим многоугольник A′B′C′D′E′F′, гомотетичный (подобный) многоугольнику ABCDEF с центром гомотетии G и коэффициентом 2.
3. Скроем обозначения сторон многоугольников.
4. Проведём отрезки GA′, GB′, GF′. Сделаем их пунктирными.
5. Установим площади этих многоугольников.
6. Результат изображён на рисунке 2.24.

Форму многоугольника ABCDEF можно изменять, но отношение площадей многоугольников A′B′C′D′E′F′ и ABCDEF не изменится и будет равно 4.

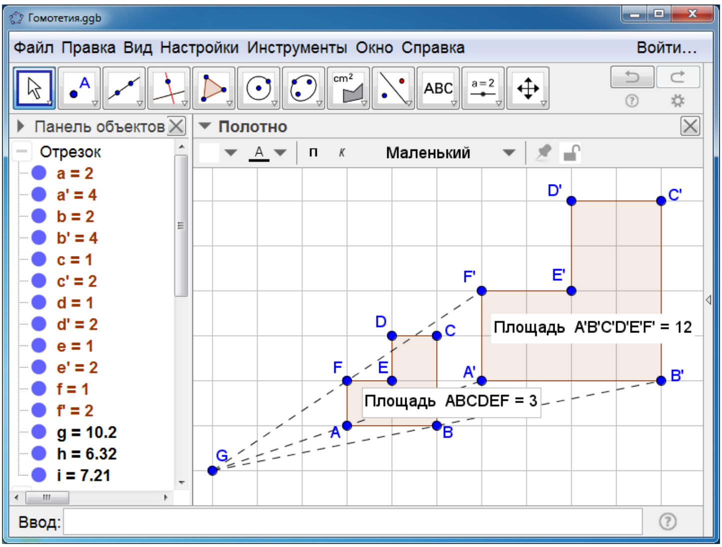

Рис. 2.24

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Серединный перпендикуляр к отрезку – геометрическое место точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

1. Построим отрезок AB.
2. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB.
3. Отметим на серединном перпендикуляре какую-нибудь точку C и соединим её отрезками с точками A и B.
4. Найдём расстояния от точки C до точек A и B.
5. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
6. Результат изображён на рисунке 3.1.

Расположение точек A, B, C можно изменять. При этом расстояния от точки C до точек A и B будут изменяться, но их равенство сохранится.

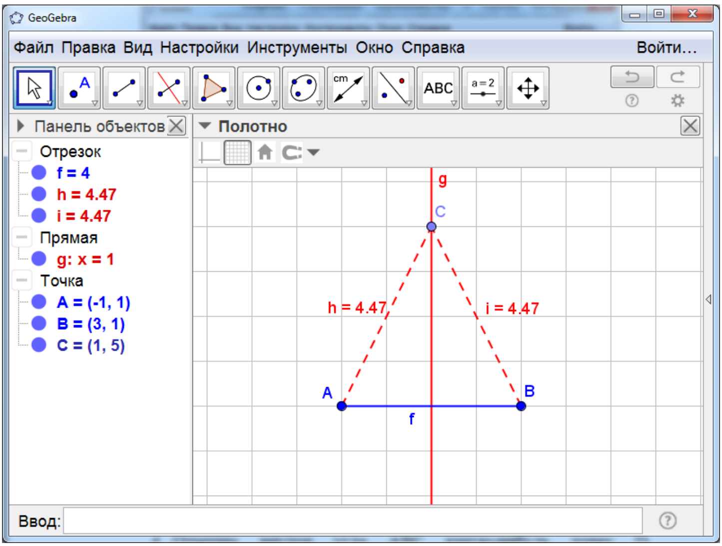

Рис. 3.1

Биссектриса угла – геометрическое место точек, равноудалённых от сторон этого угла.

1. Отметим на полотне точки A, B, C.
2. Проведём лучи AB и AC.
3. Проведём биссектрису угла BAC.
4. Отметим внутри угла BAC какую-нибудь точку D, принадлежащую этой биссектрисе.
5. Отметим дугами углы BAD и CAD, показывающими равенство этих углов.
6. Через точку D проведём прямые j и k, перпендикулярные прямым AB и AC. Отметим их точки пересечения E и F с этими прямыми.
7. Отметим прямые углы AED и AFD.

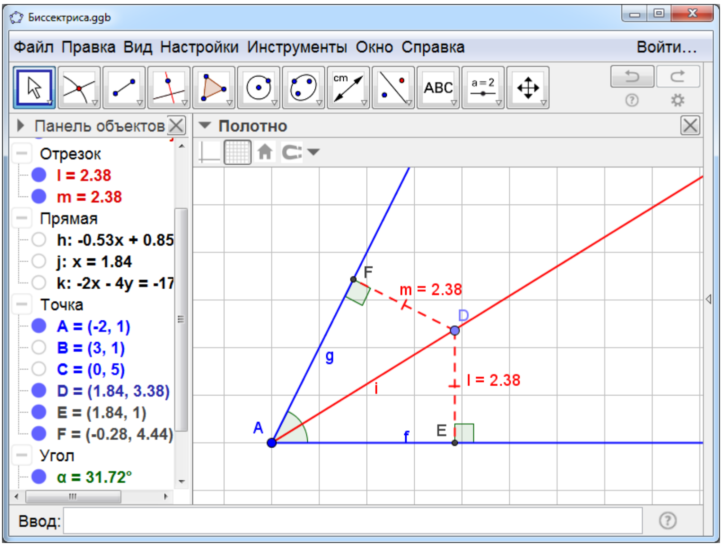

Рис. 3.2

8. Скроем прямые j и k.
9. Проведём отрезки DE и DF.
10. Найдём расстояния от точки D до точек E и F.
11. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
12. Результат изображён на рисунке 3.2.

Величину угла BAC и расположение точки D на биссектрисе можно изменять. При этом расстояния от точки D до сторон угла BAC будут изменяться, но их равенство сохранится.

Парабола – геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой d, называемой директрисой, не проходящей через точку F.

1. Отметим на полотне точку F.
2. Проведём прямую d.
3. С помощью инструмента «Парабола» проведём параболу.
4. Отметим на параболе точку C.
5. Через точку C проведём прямую f, перпендикулярную прямой d.
6. Отметим точку D пересечения этой прямой и прямой d.
7. Скроем прямую f.
8. Проведём отрезки CF и CD.
9. Найдём расстояния от точки C до точек F и D.
10. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
11. Результат изображён на рисунке 3.3.

Форму параболы и положение точки C можно изменять. При этом расстояния от точки C до точки F и прямой d будут изменяться, но их равенство сохранится.

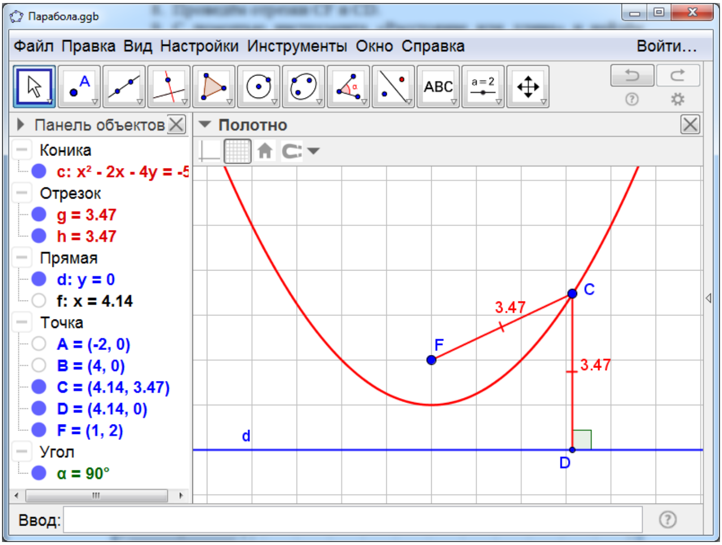

Рис. 3.3

Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

1. Создадим ползунки d и c > d.
2. Построим отрезок F_1F_2 = d.
3. Построим отрезок $F_2C = \frac{1}{2}(c - d)$.
4. Построим эллипс с фокусами F_1, F_2 и точкой C.
5. Отметим на эллипсе точку A.
6. Проведём отрезки AF_1, AF_2.
7. Найдём расстояния от точки A до точек F_1 и F_2.
8. Скроем лишние отрезки и точки.
9. Изменим цвет, толщину и стиль линий.
10. Результат изображён на рисунке 3.4.

Перемещая ползунки, расстояние между фокусами d и константу c можно менять. Положение точки A также можно изменять. При этом расстояния от точки A до точек F_1, F_2 будут изменяться, но их сумма будет равна c.

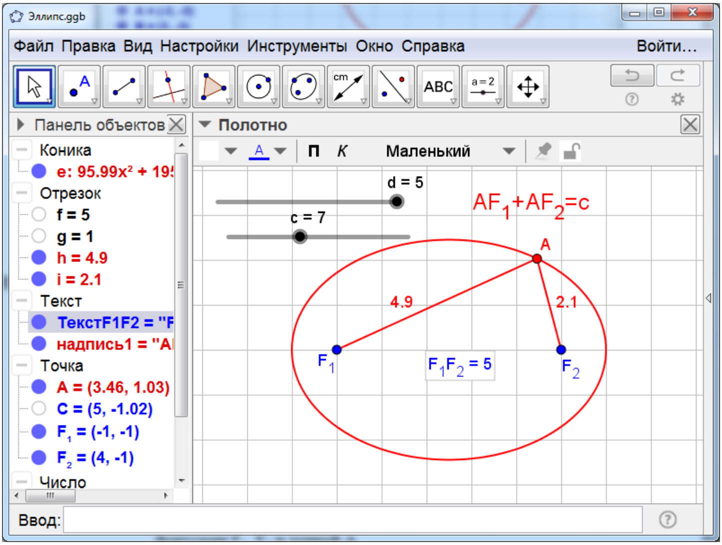

Рис. 3.4

Гипербола – геометрическое место точек, модуль разности от которых до двух данных точек есть величина постоянная.

1. Создадим ползунки d и c < d.
2. Построим отрезок $F_1F_2 = d$.
3. Построим отрезок $F_2C = \frac{1}{2}(c + d)$.
4. Построим гиперболу с фокусами F_1, F_2 и точкой C.
5. Отметим на гиперболе точку A.
6. Проведём отрезки AF_1, AF_2.
7. Найдём расстояния от точки A до точек F_1 и F_2.

8. Скроем лишние отрезки и точки.
9. Изменим цвет, толщину линий и стиль линий.
10. Результат изображён на рисунке 3.5.

Перемещая ползунки, расстояние между фокусами d и константу c можно менять. Положение точки A также можно изменять. При этом расстояния от точки A до точек F_1, F_2 будут изменяться, но их разность будет равна c.

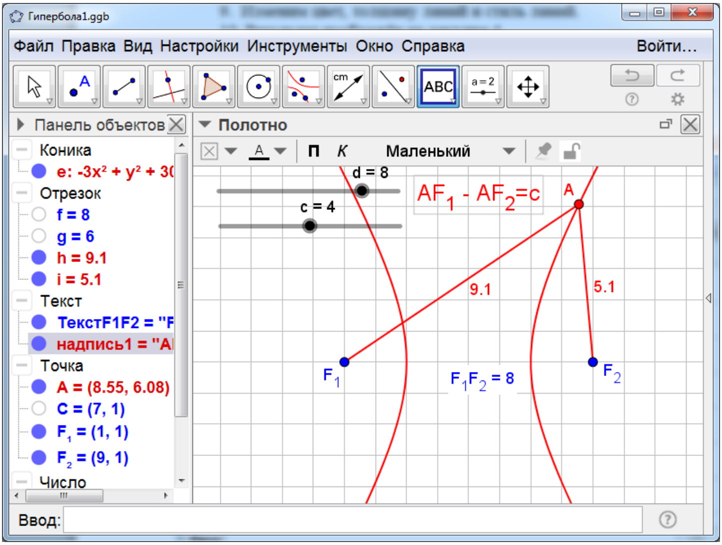

Рис. 3.5

Окружность Аполлония – геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно 1.

1. Создадим ползунки d и k>1.
2. Построим отрезок $AC=\frac{dk}{k+1}$.
3. Построим отрезок $AD=\frac{dk}{k-1}$.

4. Отметим середину O отрезка CD.
5. С центром в точке O и радиусом OC проведём окружность.
6. Отметим на этой окружности какую-нибудь точку E.
7. Соединим отрезками точку E с точками A и B.
8. Найдём расстояния от точки E до точек A и B.
9. Скроем лишние линии и изменим цвет, толщину и стиль линий.
10. Результат изображён на рисунке 3.6.

Перемещая ползунки, расстояние d и коэффициент k можно менять. Положение точки E также можно изменять. При этом расстояния от точки E до точек A, B будут изменяться, но их отношение $\frac{AE}{BE}$ будет равно k.

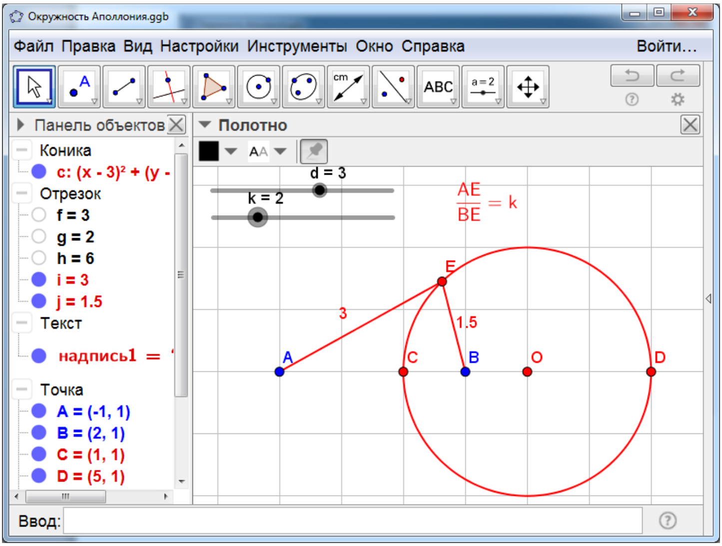

Рис. 3.6

Конхоида Никомеда – кривая, построенная следующим образом. Зафиксируем положительные числа a и b. На координатной плоскости отметим точку O(0, 0) – полюс конхоиды, и прямую g, задаваемую уравнением y = a – базис конхоиды. Для произвольной точки C базиса проведём прямую OC. Отложим на этой прямой от точки C в обе стороны отрезки AC и BC, длиной b. Геометрическое место точек A и B является конхоидой Никомеда.

Конхоида Никомеда задаётся уравнением $(x^2 + y^2)(y - a)^2 = (b\,y)^2$.

1. Создадим ползунки a и b.
2. На координатной плоскости отметим точку O(0, 0) – полюс конхоиды.
3. В строке «Ввод» наберём y=a и нажмём «Enter». Получим прямую – базис конхоиды.
4. В строке «Ввод» наберём $(x^2 + y^2)(y - a)^2 = (b\,y)^2$. Получим конхоиду.
5. Отметим на прямой какую-нибудь точку C и проведём через неё какую-нибудь прямую.
6. Обозначим A и B точки пересечения этой прямой с конхоидой.
7. Найдём расстояния от точки C до точек A и B. Убедимся в том, что они равны.
8. Скроем лишние линии и изменим цвет, толщину линий и стиль линий.
9. Результат изображён на рисунке 3.7.

Перемещая ползунки, числа a и b можно менять. Положение точки C также можно изменять. При этом расстояния от точки C до точек A, B будут оставаться равными.

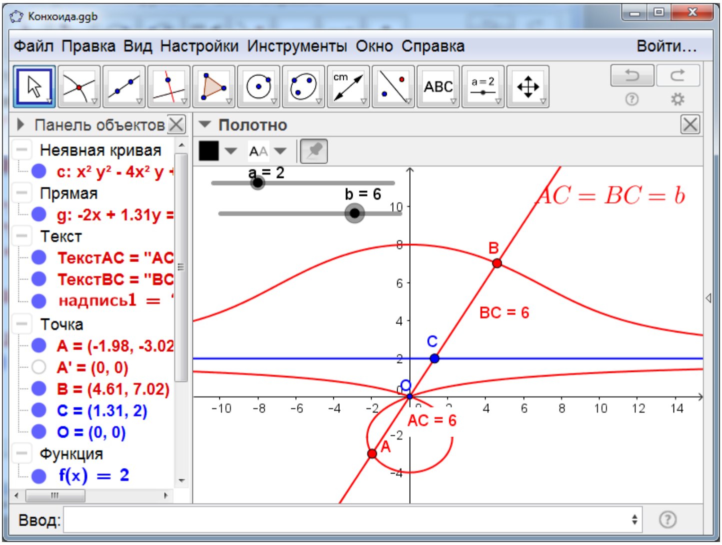

Рис. 3.7

Улитка Паскаля – кривая, которую можно определить как конхоиду, базисом которой является окружность. А именно, зафиксируем положительные числа a и b. На координатной плоскости отметим точку O(0, 0) – полюс, и прямую d, с центром P(a, 0) и радиусом a – базис. Для произвольной точки C базиса проведём прямую OC. Отложим на этой прямой от точки C в обе стороны отрезки AC и BC, длиной b. Геометрическое место точек A и B является Улиткой Паскаля.

Улитка Паскаля задаётся уравнением $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$.

1. Создадим ползунки a и b.
2. На координатной плоскости отметим точки O(0, 0) и P(a, 0).
3. Проведём окружность с центром в точке P и радиусом a.
4. В строке «Ввод» наберём $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. Получим улитку Паскаля.

5. Отметим на окружности какую-нибудь точку С и проведём прямую ОС.
6. Обозначим А и В точки пересечения этой прямой с улиткой Паскаля.
7. Найдём расстояния от точки С до точек А и В. Убедимся в том, что они равны.
8. Скроем лишние линии и изменим цвет, толщину и стиль линий.
9. Результат изображён на рисунке 3.8.

Перемещая ползунки, числа a и b можно менять. Положение точки С также можно изменять. При этом расстояния от точки С до точек А, В будут оставаться равными.

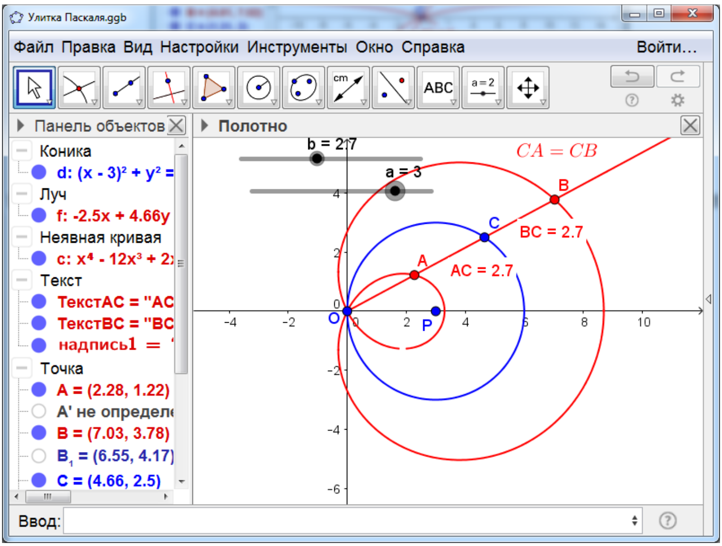

Рис. 3.8

Строфоида – кривая, построенная следующим образом. Зафиксируем положительное число a. На координатной плоскости отметим точки O(0, 0) и P(a, 0). Проведём прямые h и f, заданные соответственно уравнениями x = a, x = 2a. Для произвольного луча, проходящего через точку O, обозначим C точку его пересечения с прямой h. Отложим на этом луче от точки C в обе стороны отрезки AC и BC, равные отрезку CP. Геометрическое место точек A и B является строфоидой.

Строфоида задаётся уравнением $y^2(2a - x) = (x - a)^2x$.

1. Создадим ползунок a.
2. На координатной плоскости отметим точки O(0, 0) и P(a, 0).
3. В строке «Ввод» наберём x=a и нажмём «Enter». Получим прямую h.
4. В строке «Ввод» наберём x=2a и нажмём «Enter». Получим прямую f.
5. В строке «Ввод» наберём $y^2(2a - x) = (x - a)^2x$. Получим строфоиду.
6. Отметим на прямой h какую-нибудь точку C и проведём через неё луч OC.
7. Обозначим A и B точки пересечения этого луча со строфоидой.
8. Найдём расстояния от точки C до точек A, B и P. Убедимся в том, что они равны.
9. Скроем лишние линии и изменим цвет, толщину и стиль линий.
10. Результат изображён на рисунке 3.9.

Перемещая ползунок, число a можно менять. Положение точки C также можно изменять. При этом расстояния от точки C до точек A, B и P будут оставаться равными.

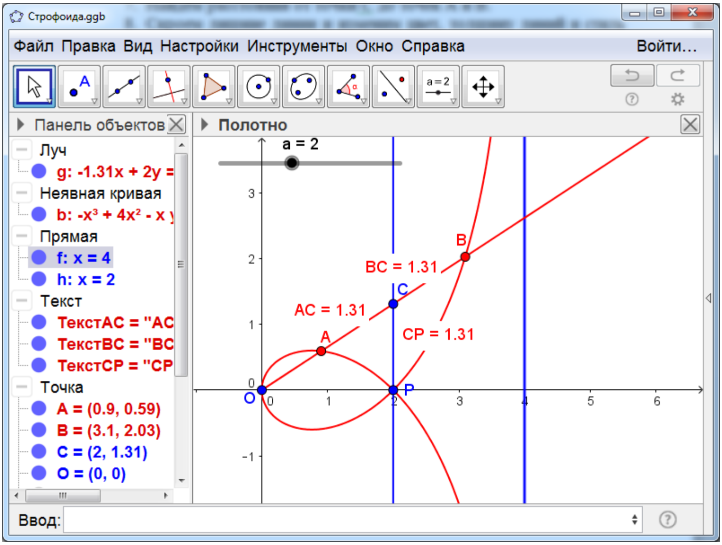

Рис. 3.9

Циссоида Диоклеса – кривая, построенная следующим образом. Зафиксируем положительное число a. На координатной плоскости отметим точки O(0, 0) и P(a, 0). Проведём прямую h, заданную уравнением x = 2a. Для произвольного луча, проходящего через точку O, обозначим C точку его пересечения с прямой h. Проведём окружность с центром в точке P и радиусом a. Обозначим B точку его пересечения с окружностью. Отложим на этом луче от точки O отрезок OA, равный отрезку BC. Геометрическое место точек A является циссоидой Диоклеса.

Циссоида Диоклеса задаётся уравнением $y^2(2a - x) = x^3$.

1. Создадим ползунок a.
2. На координатной плоскости отметим точки O(0, 0) и P(a, 0).
3. В строке «Ввод» наберём x=2a и нажмём «Enter». Получим прямую h.

4. Построим окружность с центром в точке P и радиусом a.
5. В строке «Ввод» наберём $y^2(2a - x) = x^3$. Получим циссоиду.
6. Отметим на прямой h какую-нибудь точку C и проведём через неё луч OC.
7. Обозначим A и B точки пересечения этого луча с циссоидой и окружностью соответственно.
8. Найдём длины отрезков OA и BC. Убедимся в том, что они равны.
9. Скроем лишние линии и изменим цвет, толщину и стиль линий.
10. Результат изображён на рисунке 3.10.

Перемещая ползунок, число a можно менять. Положение точки C также можно изменять. При этом длины отрезков OA и BC будут оставаться равными.

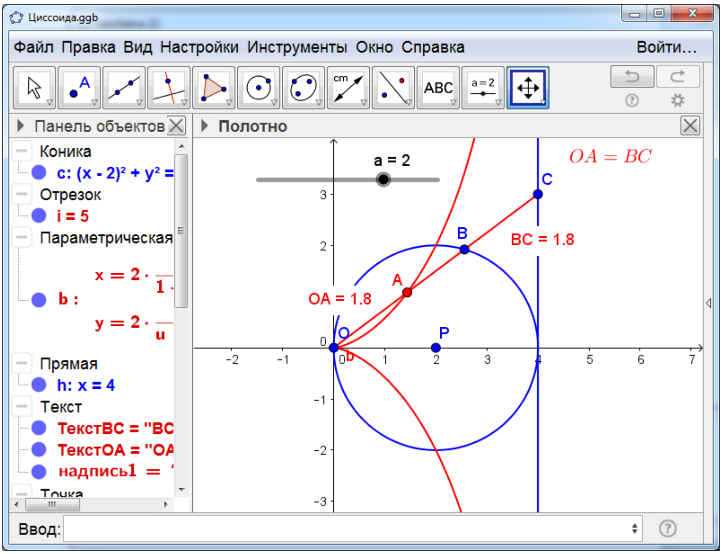

Рис. 3.10

Задача 1. Найдите ГМ центров окружностей, проходящих через две данные точки (рис. 3.11).

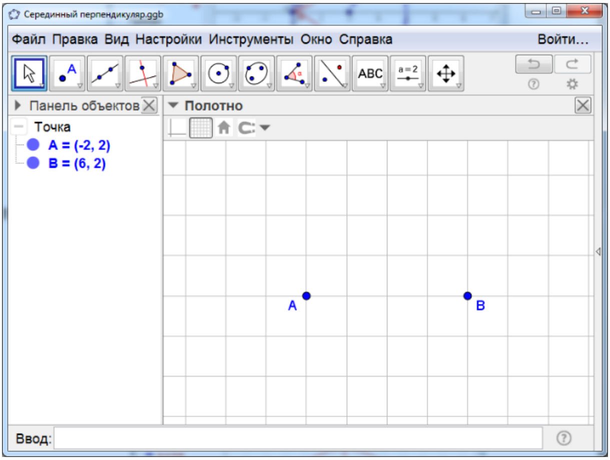

Рис. 3.11

Задача 2. Найдите ГМ вершин равнобедренных треугольников, основанием которых служит данный отрезок (рис. 3.12).

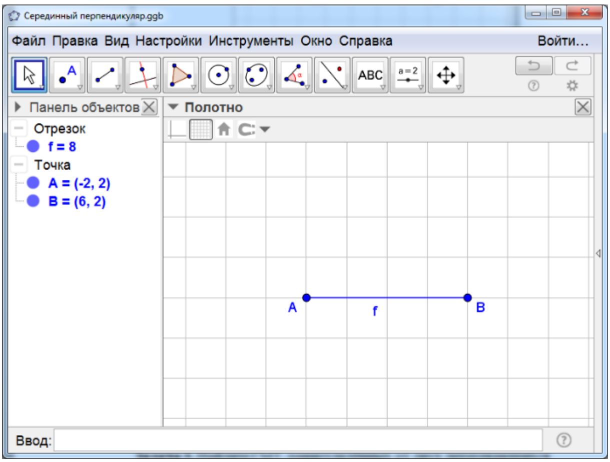

Рис. 3.12

Задача 3. Найдите ГМТ, равноудалённых от двух пересекающихся прямых (рис. 3.13).

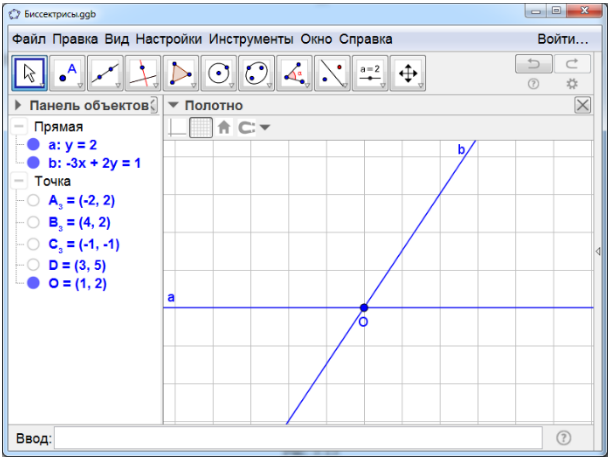

Рис. 3.13

Задача 4. Найдите ГМ центров окружностей, касающихся сторон данного угла (рис. 13.14).

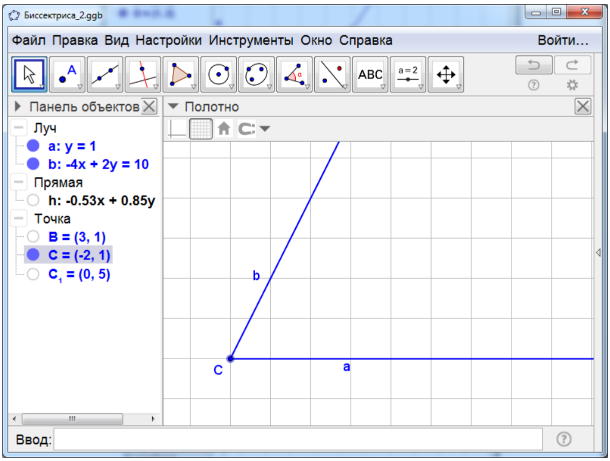

Рис. 13.14

Задача 5. Найдите ГМТ, из которых данная окружность видна под данным углом (рис. 3.15). Рассмотрите случай, когда угол равен 60°.

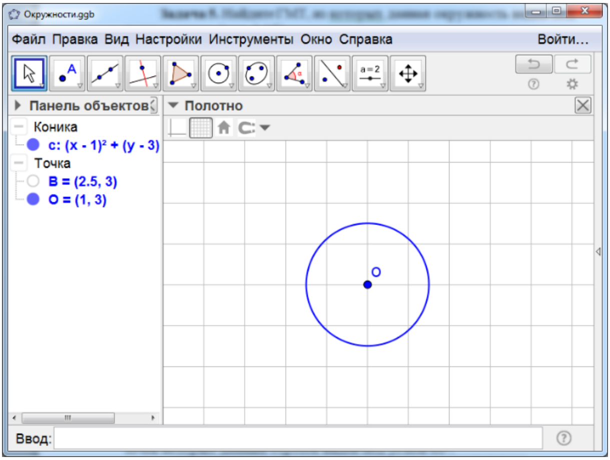

Рис. 3.15

Задача 6. Найдите ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом (рис. 3.16). Рассмотрите случай, когда угол равен 60°.

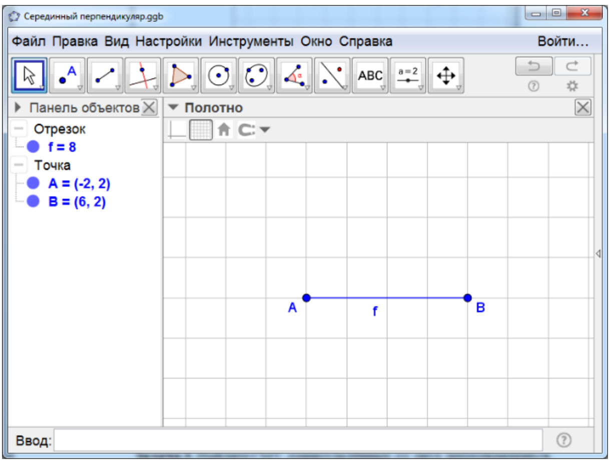

Рис. 3.16

Задача 7. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой, не проходящей через эту точку (рис. 3.17).

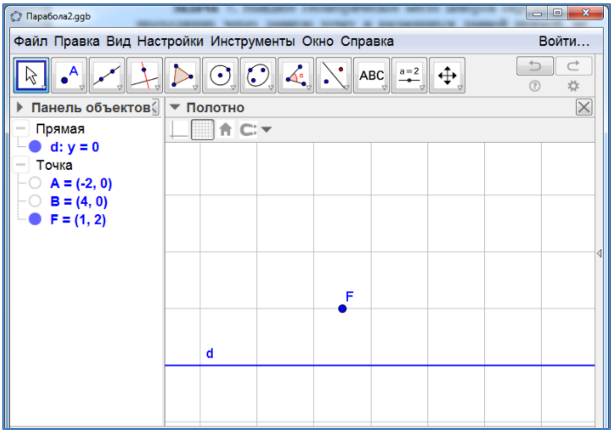

Рис. 3.17

Задача 8. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой *c* и данной окружности (рис. 3.18).

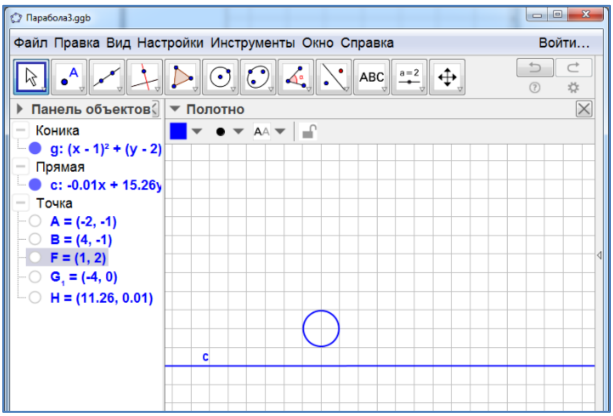

Рис. 3.18

Задача 9. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой c и данной окружности (рис. 3.19).

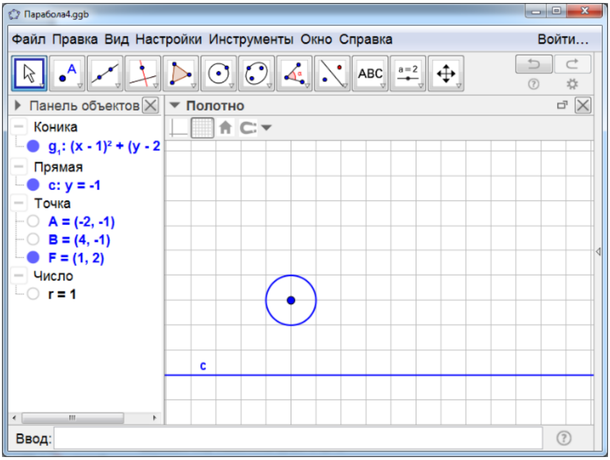

Рис. 3.19

Задача 10. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом двух данных окружностей (рис. 3.20).

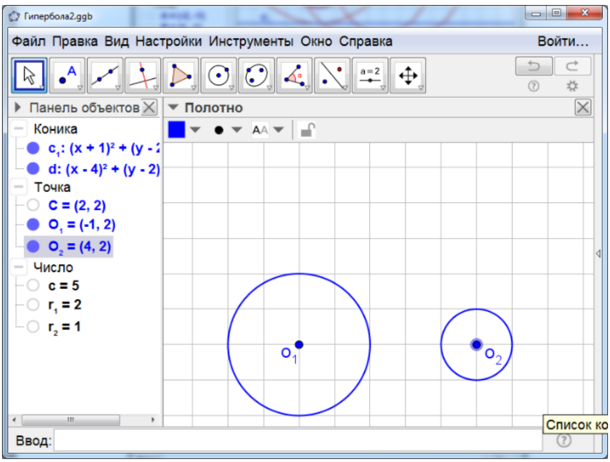

Рис. 3.20

Задача 11. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, одну из которой внешним образом, а другую – внутренним образом (рис. 3.21).

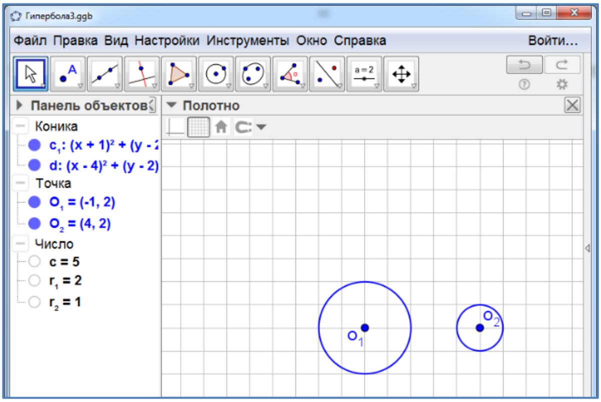

Рис. 3.21

Задача 12. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной точки на расстояние, в два раза меньшее, чем расстояние до данной прямой (рис. 3.22).

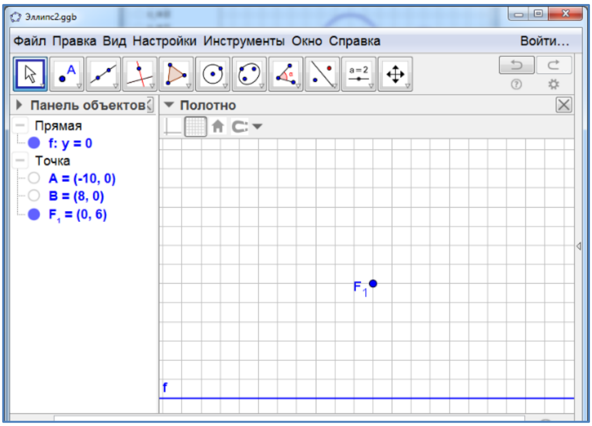

Рис. 3.22

Задача 13. Найдите геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна (рис. 3.23).

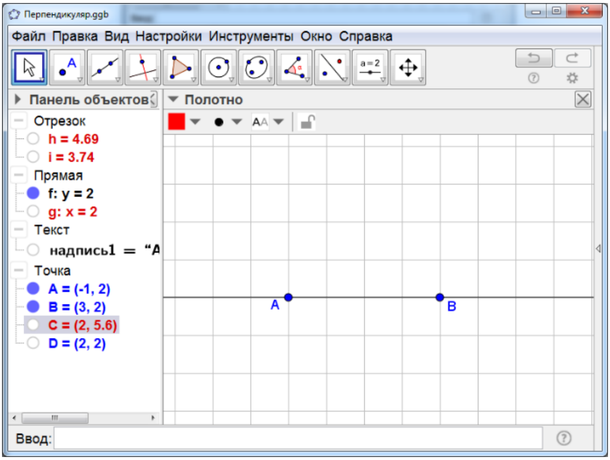

Рис. 3.23

Задача 14. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна (рис. 3.24).

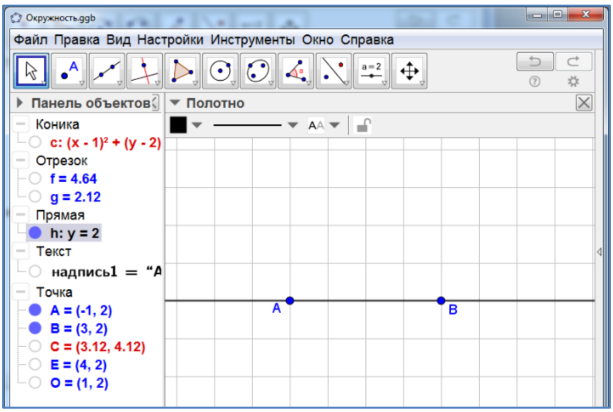

Рис. 3.24

4. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задача 1. Для данного треугольника ABC (рис. 4.1) постройте медиану CM.

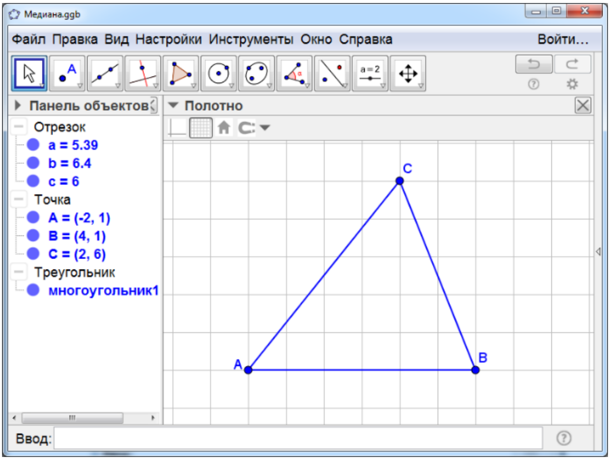

Рис. 4.1

Задача 2. Для данного треугольника ABC (рис. 4.2) постройте биссектрису CD.

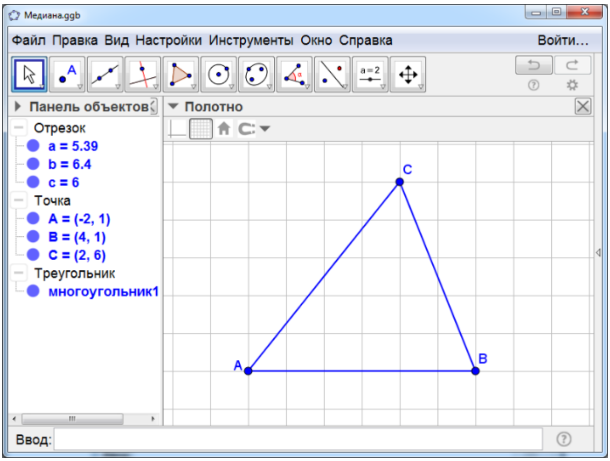

Рис. 4.2

Задача 3. Для данного остроугольного треугольника ABC (рис. 4.3) постройте высоту CH.

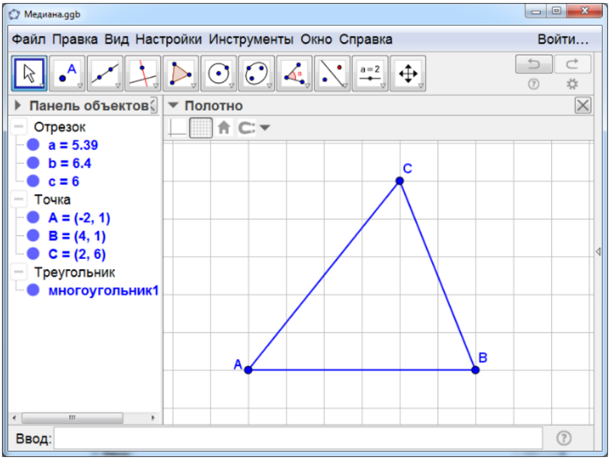

Рис. 4.3

Задача 4. Для данного тупоугольного треугольника ABC (рис. 4.4) постройте высоту CH.

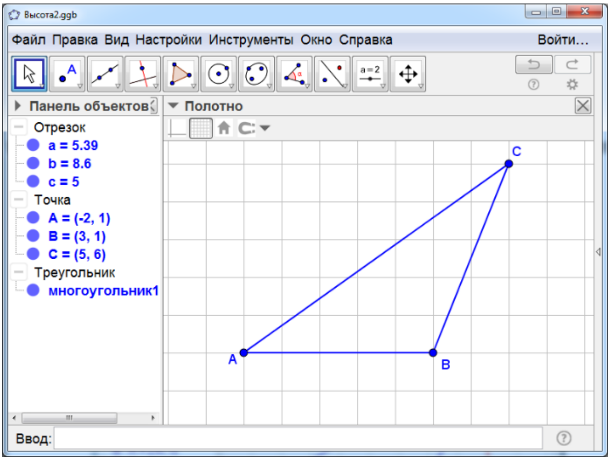

Рис. 4.4

Задача 5. Для данной прямой а и данной точки О, не принадлежащей этой прямой (рис. 4.5), постройте окружность с центром О, касающуюся данной прямой.

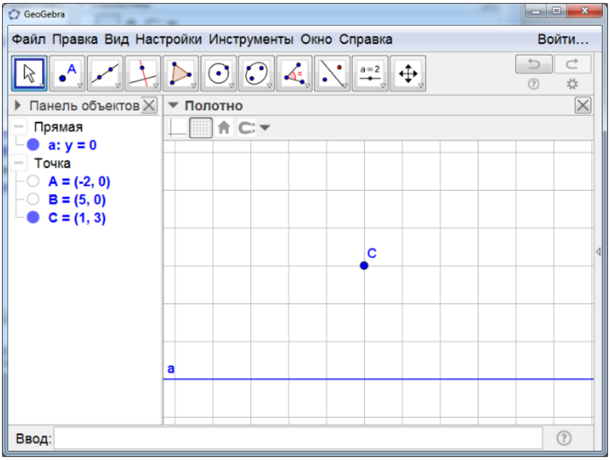

Рис. 4.5

Задача 6. Для данной окружности с центром О и данной точки Р, находящейся вне этой окружности (рис. 4.6), постройте окружности с центром Р, касающиеся данной окружности.

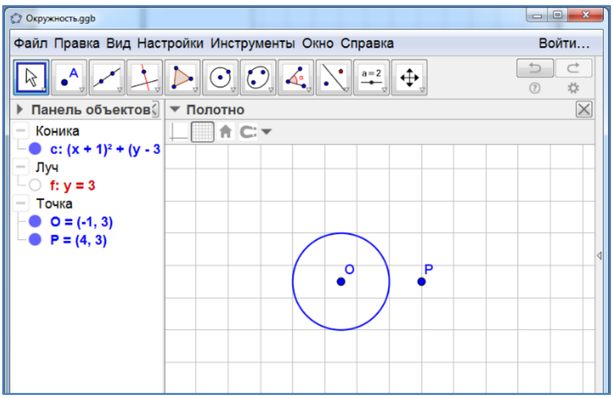

Рис. 4.6

Задача 7. Для данной окружности с центром O и данной точки P, находящейся внутри этой окружности (рис. 4.7), постройте окружности с центром P, касающиеся данной окружности.

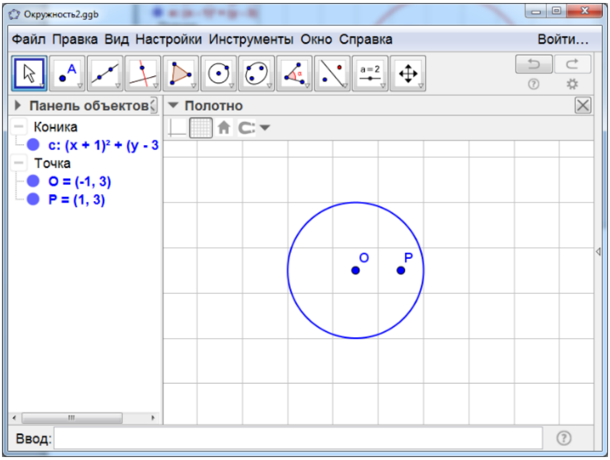

Рис. 4.7

Задача 8. Для двух данных окружностей с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1, R_2 ($R_1 > R_2$) (рис. 4.8) постройте общие внешние касательные.

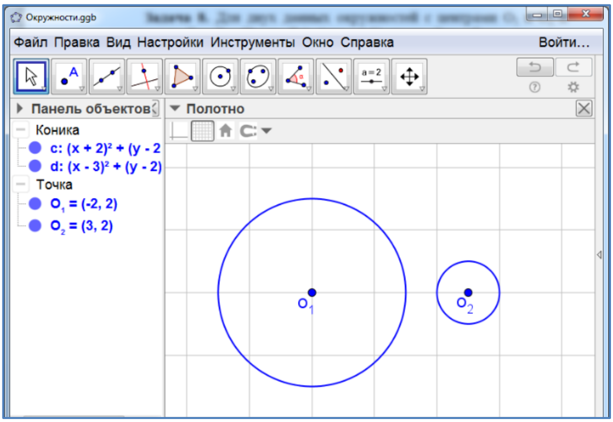

Рис. 4.8

Задача 9. Для двух данных окружностей с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 (рис. 4.9) постройте общие внутренние касательные.

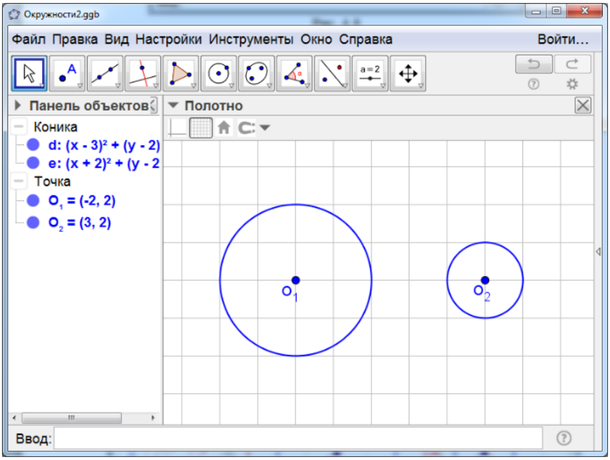

Рис. 4.9

Задача 10. Постройте треугольник, стороны которого равны a, b, c.

Задача 11. Постройте треугольник ABC, у которого AB = c, AC = b, $\angle B = \beta$.

Задача 12. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AC = b, BC = a и высоте CH = h.

Задача 13. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB = c, AC = b и высоте CH = h.

Задача 14. Постройте треугольник ABC по углу A = α, стороне AB = c, и высоте CH = h.

Задача 15. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB = c, AC = b и медиане CM = m.

Задача 16. Построить треугольник ABC по двум сторонам BC = a, AC = b и медиане CM = m.

Задача 17. Постройте треугольник ABC по двум сторонам BC = a, AC = b и радиусу описанной окружности R.

Задача 18. Постройте треугольник ABC по двум углам $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ и радиусу вписанной окружности r.

5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача 1. Покажите, что медианы треугольника (рис. 5.1) пересекаются в одной точке. Она называется центроидом треугольника.

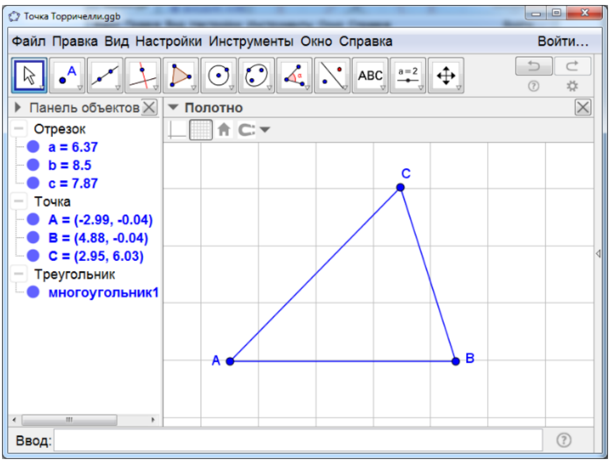

Рис. 5.1

Задача 2. Покажите, что биссектрисы треугольника (рис. 5.2) пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.

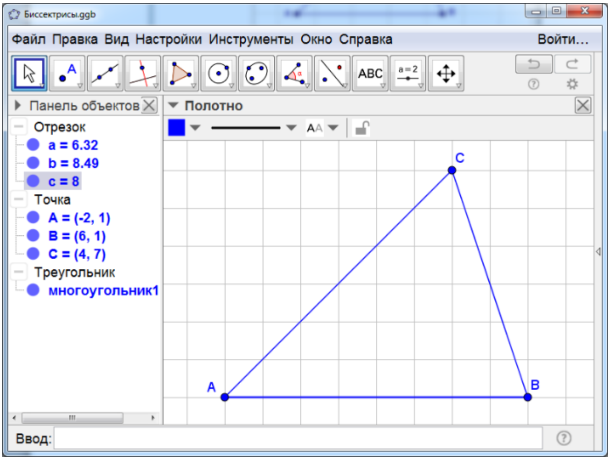

Рис. 5.2

Задача 3. Покажите, что высоты остроугольного треугольника (рис. 5.3) пересекаются в одной точке. Она называется ортоцентром.

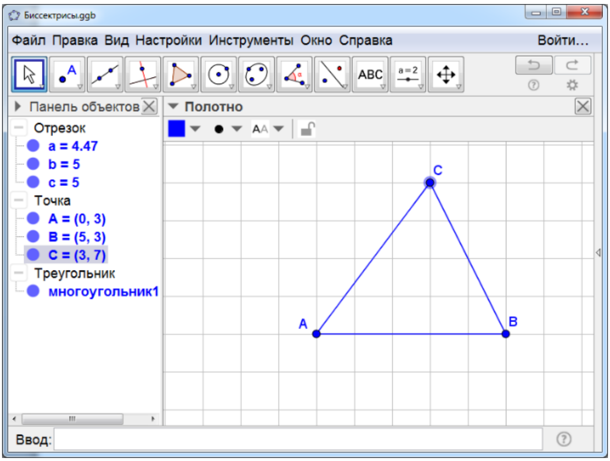

Рис. 5.3

Задача 4. Покажите, что продолжения высот тупоугольного треугольника (рис. 5.4) пересекаются в одной точке. Она называется ортоцентром.

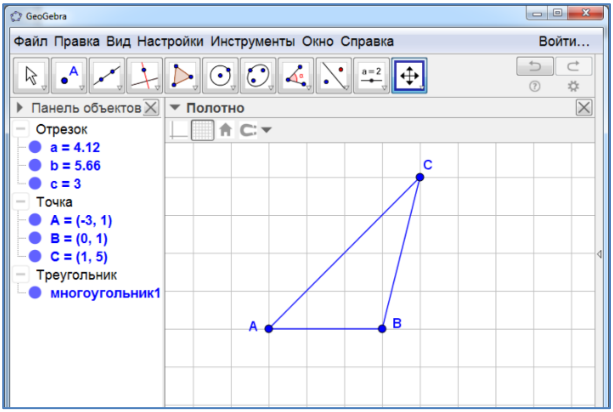

Рис. 5.4

Задача 5. Покажите, что серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника (рис. 5.5), пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности.

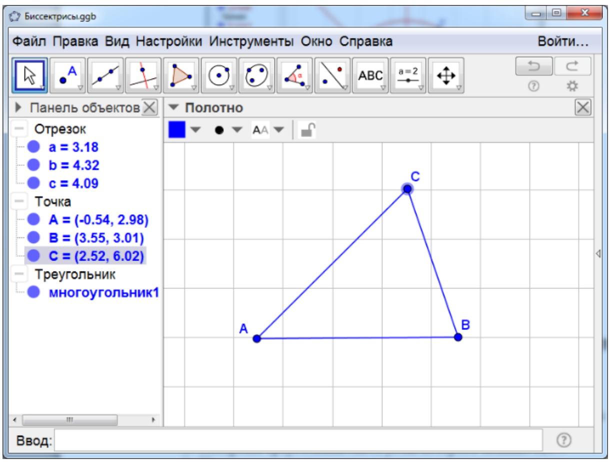

Рис. 5.5

Задача 6*. На сторонах треугольника ABC, углы которого меньше 120°, построили равносторонние треугольники (рис. 5.6). Покажите, что окружности, описанные около этих треугольников, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Торричелли. Из неё стороны треугольника видны под углом 120°.

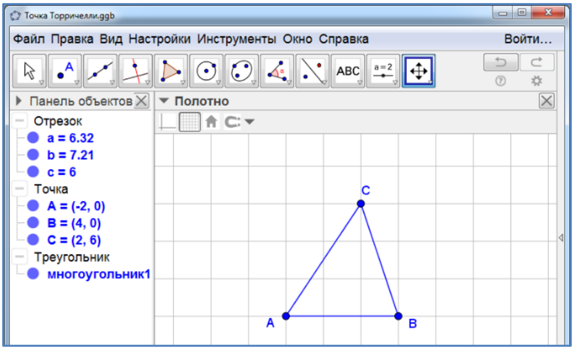

Рис. 5.6

Задача 7*. Покажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника (рис. 5.7) с точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Жергонна.

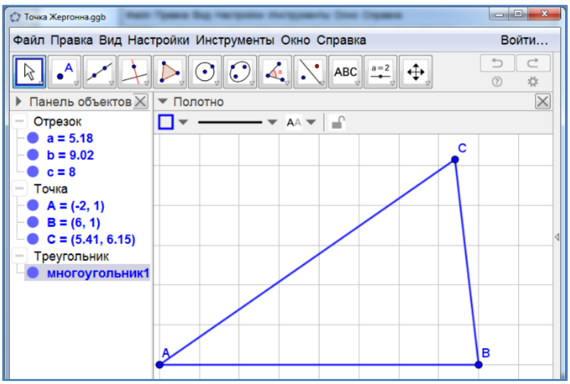

Рис. 5.7

Задача 8*. Покажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника (рис. 5.8) с точками касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Нагеля.

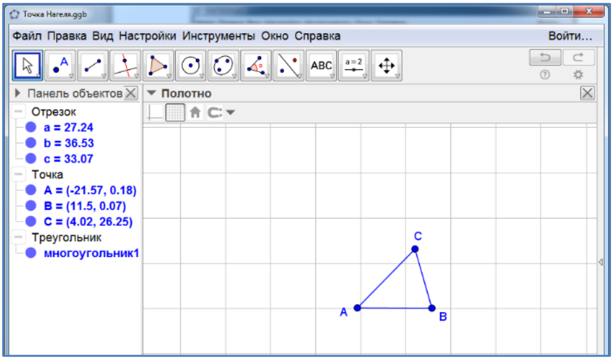

Рис. 5.8

Задача 9*. Покажите, что середины сторон треугольника (рис. 5.9), основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, принадлежат одной окружности. Она называется окружностью Эйлера.

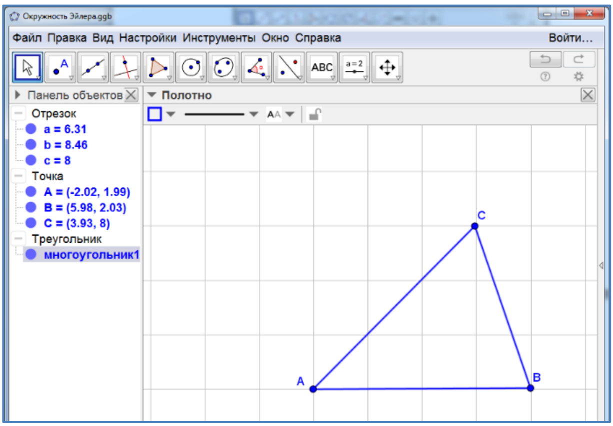

Рис. 5.9

Задача 10*. Покажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности, описанной около треугольника (рис. 5.10), на его стороны или их продолжения, принадлежат одной прямой. Она называется прямой Симсона.

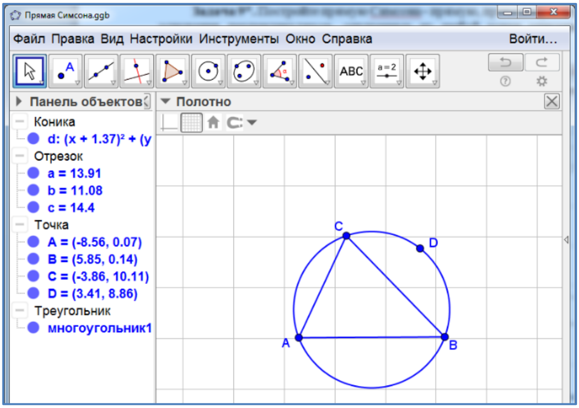

Рис. 5.10

Задача 11*. Покажите, что отрезки, симметричные медианам треугольника относительно биссектрис, выходящих из тех же вершин, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Лемуана (рис. 5.11).

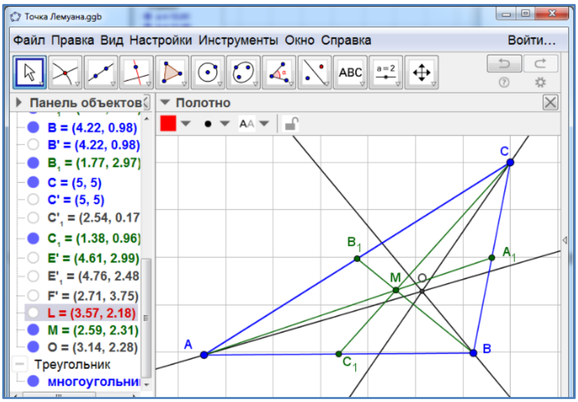

Рис. 5.11

Задача 12*. Антибиссектрисой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину этого треугольника с точкой противоположной стороны, симметричной основанию биссектрисы относительно основания медианы, проведённой из той же вершины. На рисунке 5.12 показана антибиссектриса CC_2'. Покажите, что антибиссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

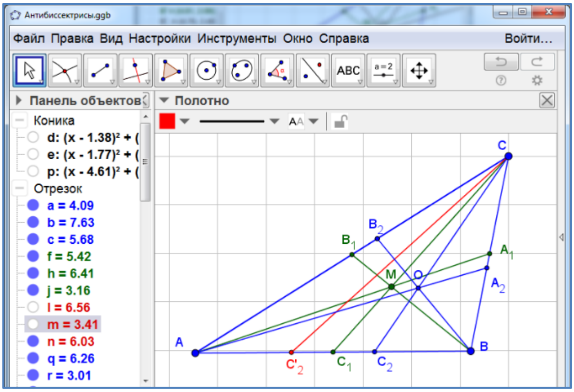

Рис. 5.12

6. РАВЕНСТВО ФИГУР. ДВИЖЕНИЯ

Задача 1. Равны ли отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 6.1?

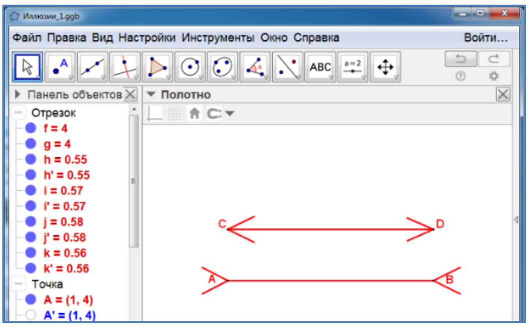

Рис. 6.1

Задача 2. Равны ли отрезки CD и EF, изображённые на рисунке 6.2?

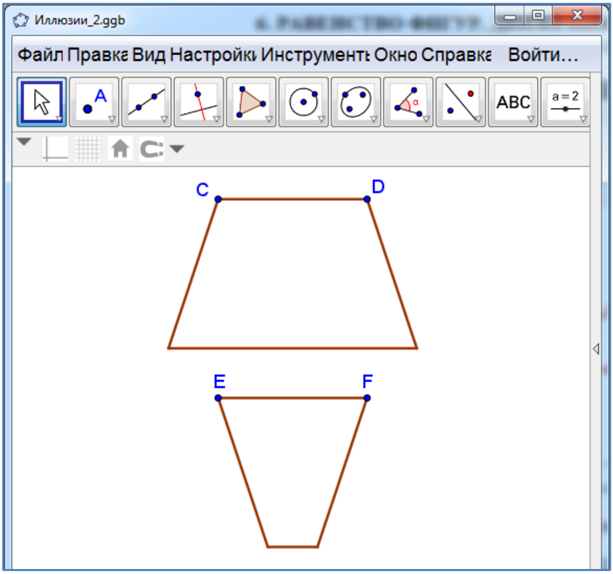

Рис. 6.2

Задача 3. Равны ли отрезки AB и BC, изображённые на рисунке 6.3?

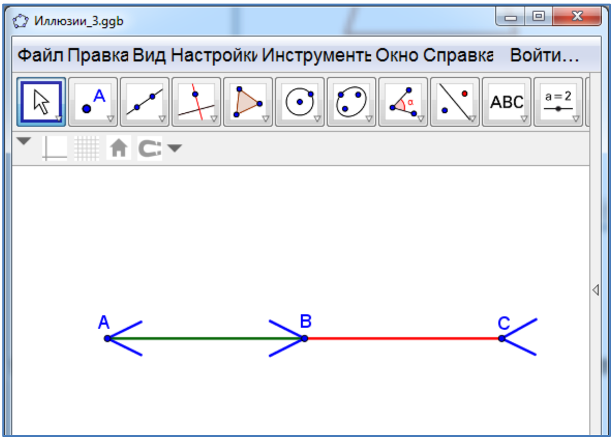

Рис. 6.3

Задача 4. Равны ли отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 6.4?

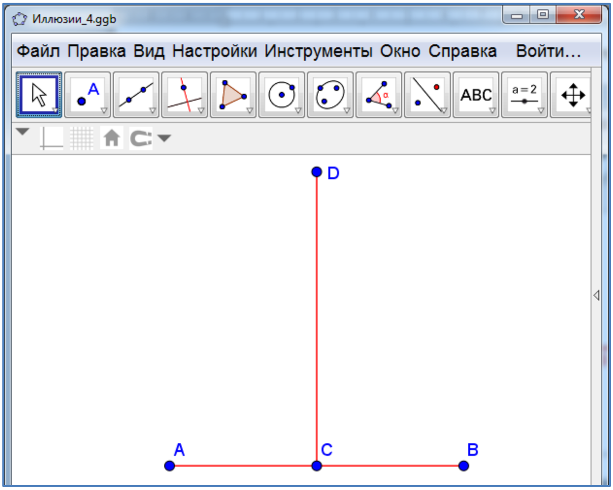

Рис. 6.4

Задача 5. Равны ли отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 6.5?

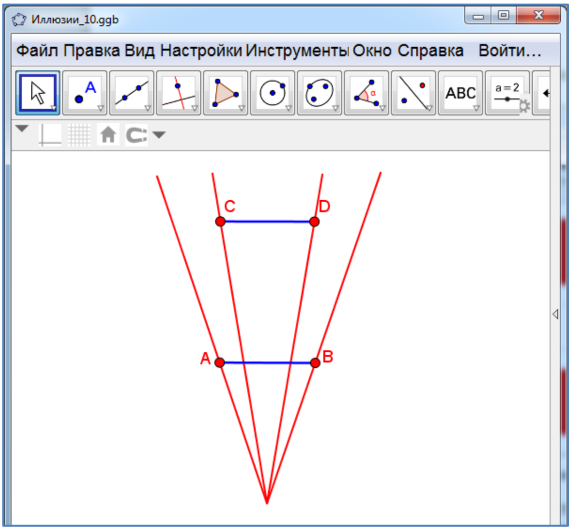

Рис. 6.5

Задача 6. Равны ли диаметры двух кругов, расположенных в центрах шести кругов, изображённых на рисунке 6.6?

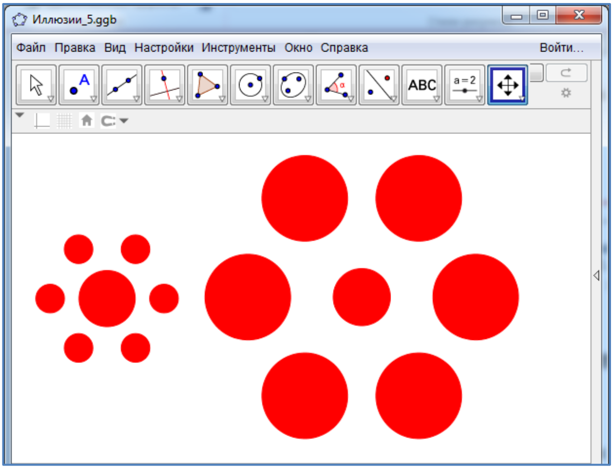

Рис. 6.6

Задача 7. Равны ли треугольники, изображённые на рисунке 6.7?

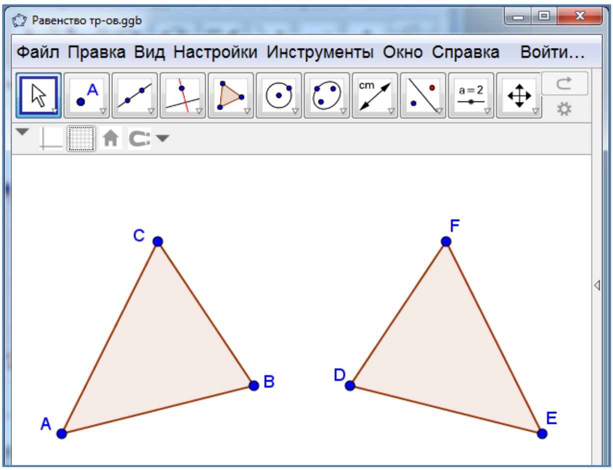

Рис. 6.7.

Задача 8. Равны ли треугольники, изображённые на рисунке 6.8?

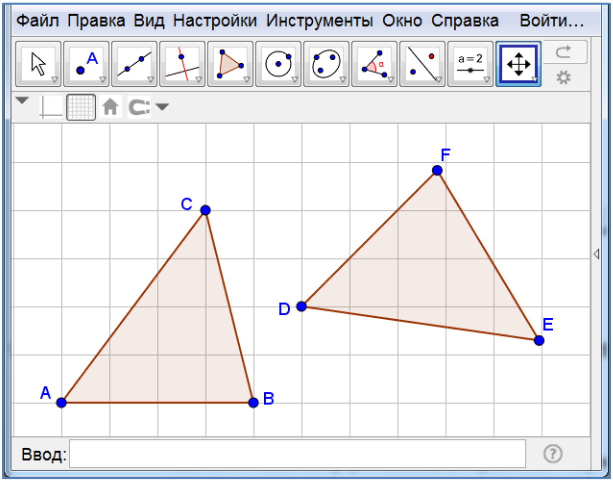

Рис. 6.8.

Задача 9. Постройте центр симметрии, при которой треугольник ABC переходит в треугольник A′B′C′ (рис. 6.9).

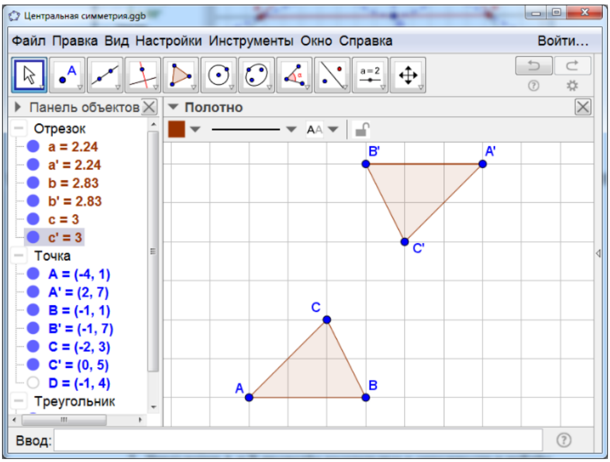

Рис. 6.9

Задача 10. Постройте центр симметрии, при которой треугольник ABC переходит в треугольник A′B′C′ (рис. 6.10).

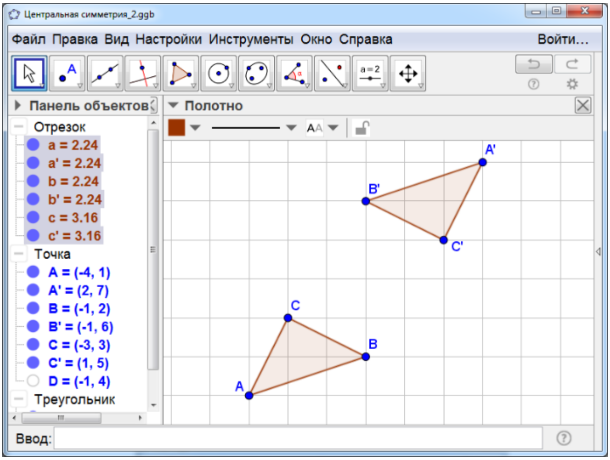

Рис. 6.10

Задача 11. Постройте центр поворота, при котором отрезок AB переходит в отрезок A′B′(рис. 6.11). Найдите угол поворота.

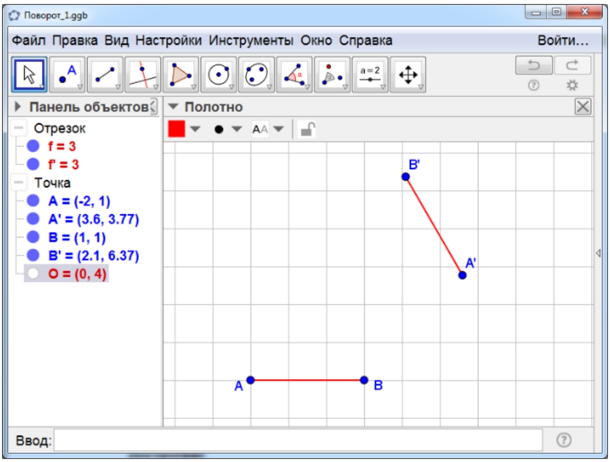

Рис. 6.11

Задача 12. Постройте центр поворота, при котором треугольник ABC переходит в треугольник A′B′C′ (рис. 6.12). Найдите угол поворота.

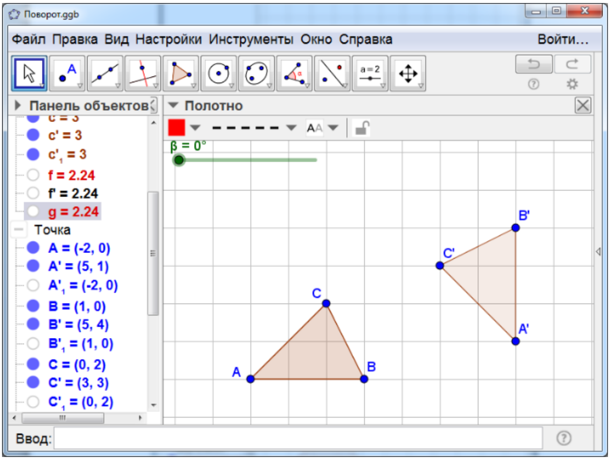

Рис. 6.12

Задача 13. Постройте ось симметрии, при которой треугольник ABC переходит в треугольник A′B′C′ (рис. 6.13).

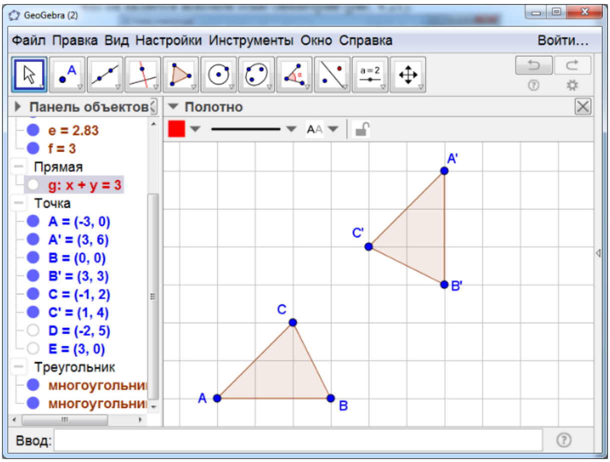

Рис. 6.13

Задача 14. Укажите какое-нибудь движение, переводящее один треугольник в другой (рис. 6.14).

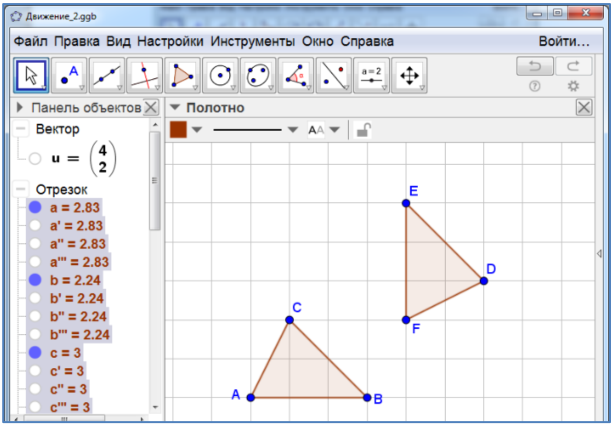

Рис. 6.14

Задача 15. Правильный треугольник (рис. 6.15) поверните вокруг точки G пересечения его медиан на угол 60°. Выясните, какая фигура является общей частью исходного треугольника и повернутого.

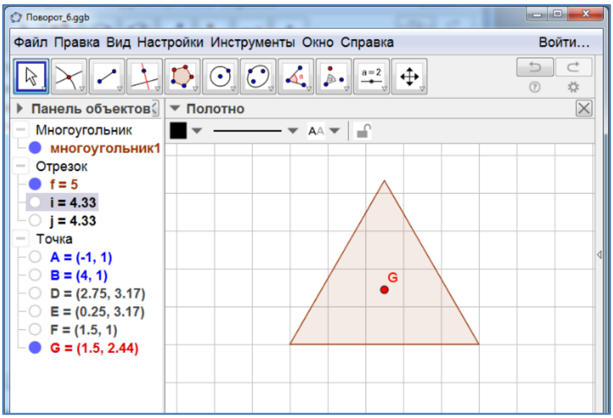

Рис. 6.15

Задача 16. Квадрат (рис. 6.16) поверните вокруг точки О пересечения его диагоналей на угол 45°. Выясните, какая фигура является общей частью исходного квадрата и повернутого.

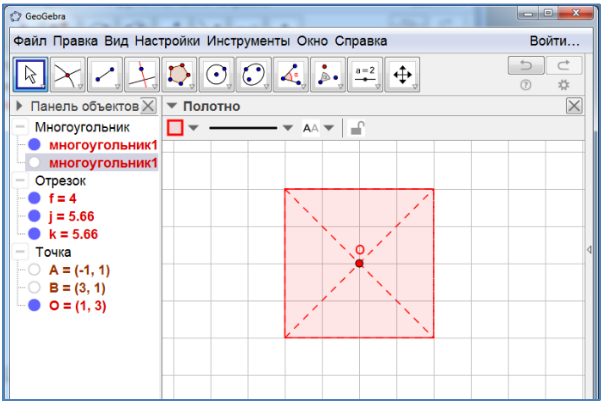

Рис. 6.16

7. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. На прямой с найдите точку С, для которой периметр треугольника АВС наименьший (рис. 7.1).

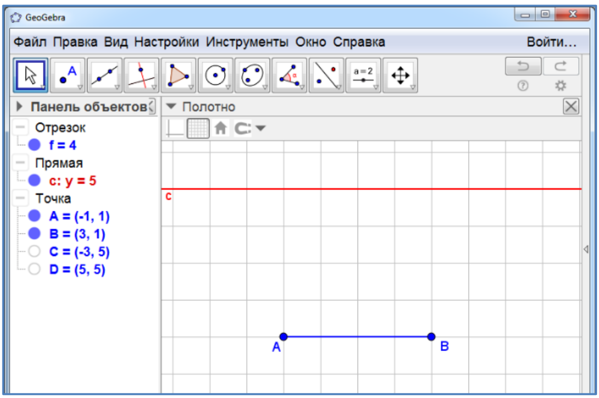

Рис. 7.1

Задача 2. На прямой c найдите точку C, для которой сумма AC + CB наименьшая (рис. 7.2).

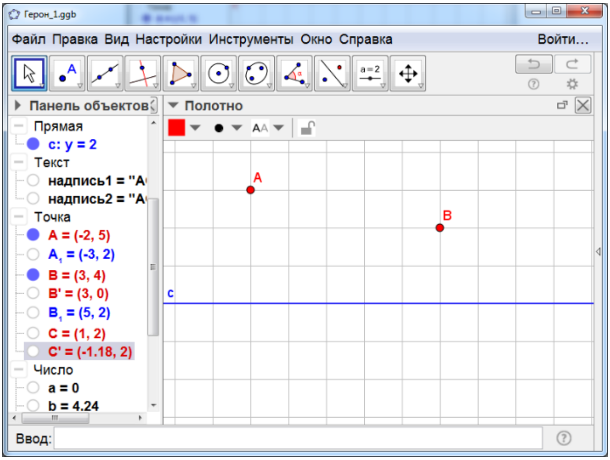

Рис. 7.2

Задача 3. На прямой c найдите точку C, для которой сумма AC + CB наименьшая (рис. 7.3).

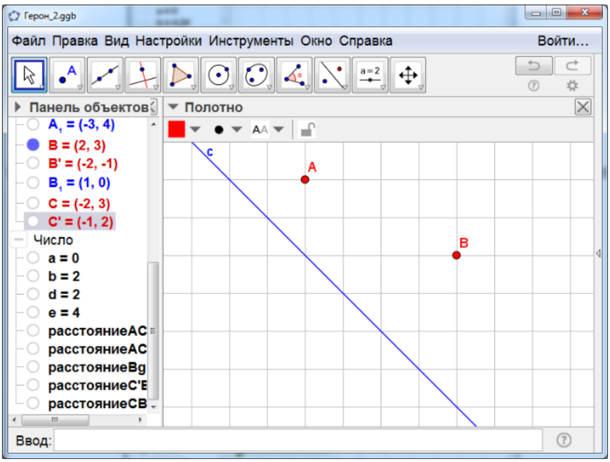

Рис. 7.3

Задача 4. На сторонах a и b данного угла найдите точки A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший (рис. 6.4).

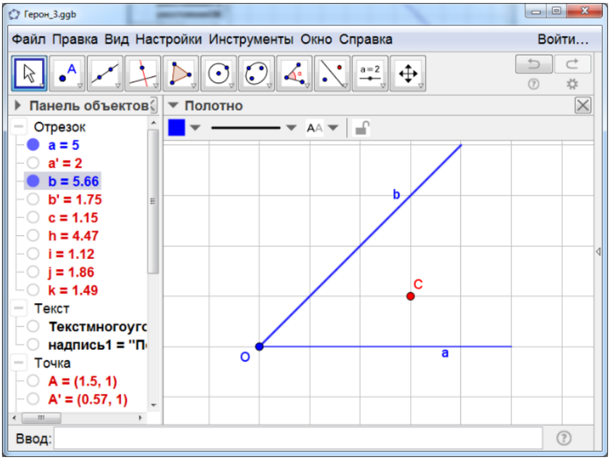

Рис. 7.4

Задача 5. Найдите точку, сумма расстояний от которой до трёх данных точек A, B, C наименьшая (рис. 7.5).

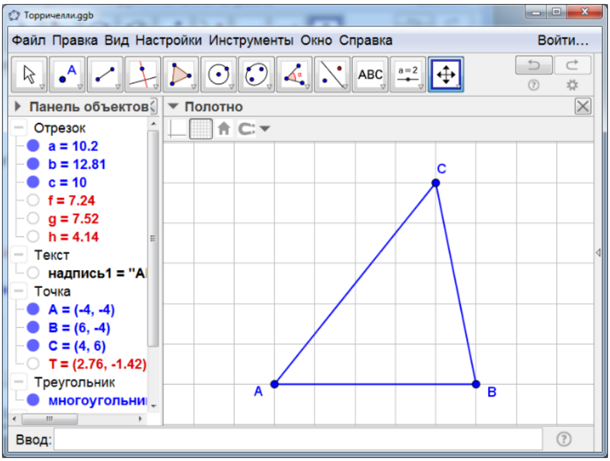

Рис. 7.5

Задача 6. Найдите точку, сумма расстояний от которой до прямой a и двух данных точек B, C наименьшая (рис. 7.6).

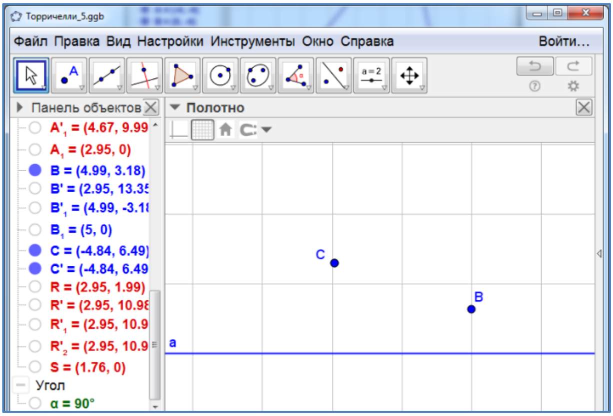

Рис. 7.6

Задача 7. Найдите точку, сумма расстояний от которой до данной точки A и двух данных прямых b, c наименьшая (рис. 7.7). Рассмотрите случаи, когда угол между прямыми: а) меньше 60°; б) равен 60°; в) больше 60°.

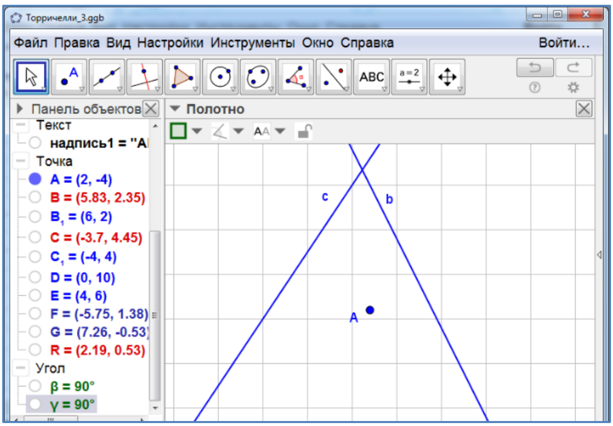

Рис. 7.7

Задача 8. Найдите точку R, сумма расстояний от которой до трёх данных прямых a, b, c наименьшая (рис. 7.8). Рассмотрите случаи, когда: а) углы между прямыми равны 60°; б) имеется угол, больший 60°.

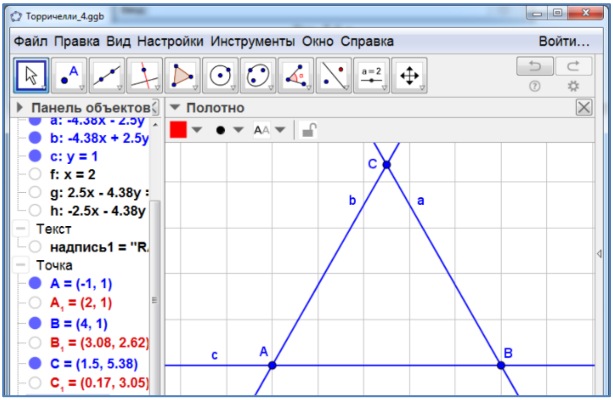

Рис. 7.8

Задача 9. Населённые пункты A, B, C, D соедините дорогами так, чтобы их суммарная длина была наименьшей.

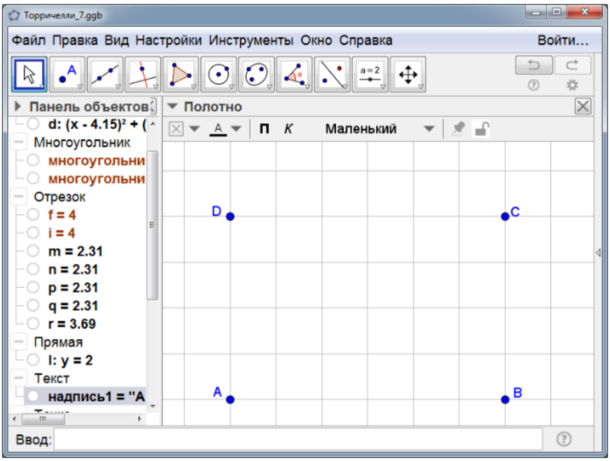

Рис. 7.9

Задача 10. Населённые пункты C и D расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост AB и проложить дороги CA и BD, чтобы путь CA + AB + BD имел наименьшую длину? (Берега a, b реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).

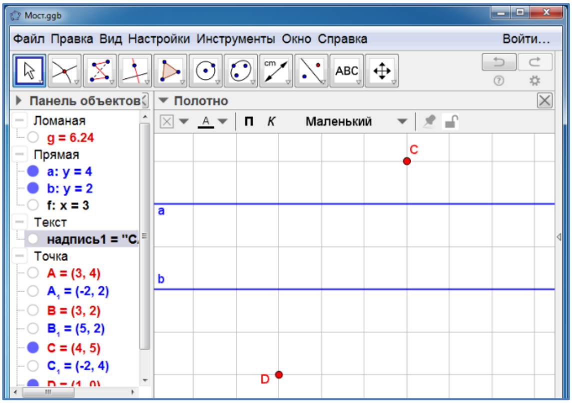

Рис. 7.10

Задача 11. На прямой c найдите точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом (рис. 7.11). Найдите величину этого угла.

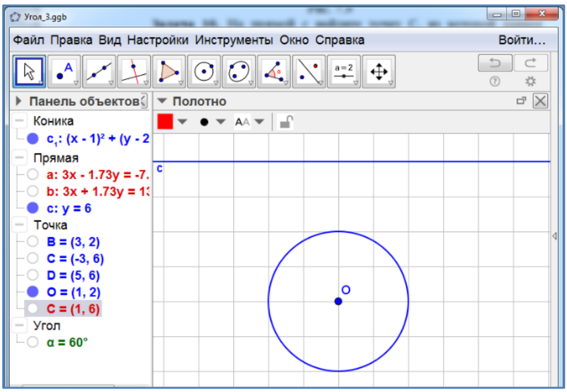

Рис. 7.11

Задача 12. На прямой c найдите точку C, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 7.12). Найдите величину этого угла.

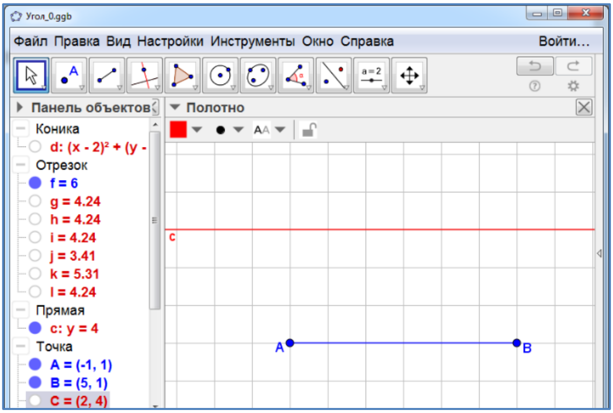

Рис. 7.12

Задача 13. На прямой c найдите точку C, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 7.13). Найдите величину этого угла.

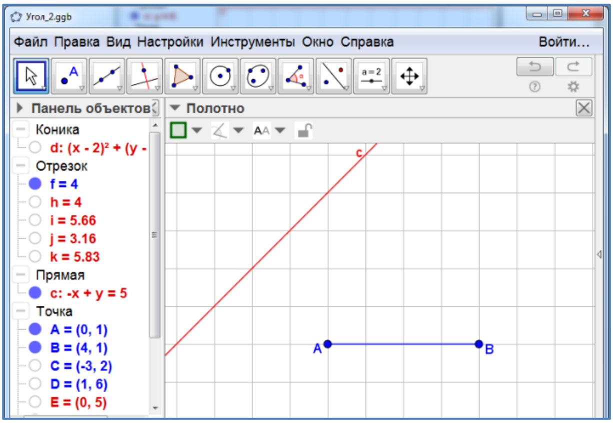

Рис. 7.13

Задача 14. Найдите прямоугольник данного периметра, площадь которого наибольшая. Рассмотрите случай, когда периметр равен 16 (рис. 7.14). Найдите величину наибольшей площади прямоугольника.

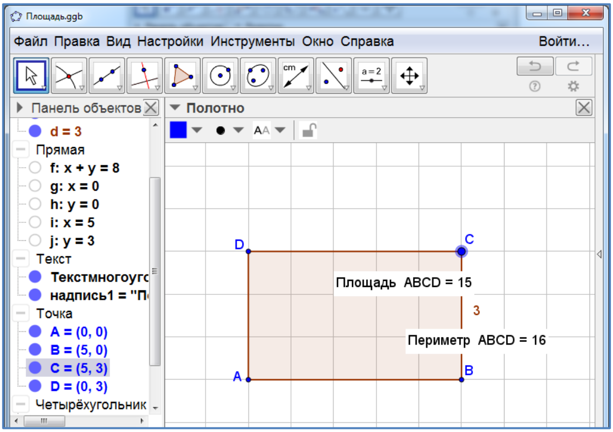

Рис. 7.14

8. ПАРКЕТЫ

Паркетом из многоугольников называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников, и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Всего существует одиннадцать правильных паркетов.

Здесь мы рассмотрим построение паркетов с помощью программы GeoGebra.

Паркет из квадратов

1. Построим квадрат.
2. На двух соседних сторонах квадрата создадим векторы.
3. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из квадратов.
4. Цвет и толщину линии можно изменять.
5. Результат изображен на рисунке 8.1.

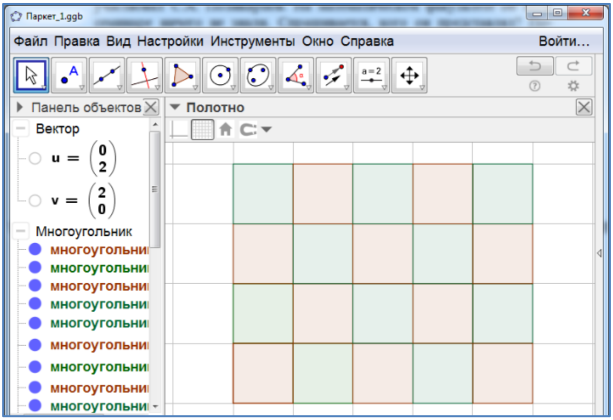

Рис. 8.1

Паркет из правильных треугольников

1. Построим правильный треугольник.
2. На двух соседних сторонах квадрата создадим векторы.
3. Используя параллельный перенос на вектор и осевую симметрию, построим паркет из правильных треугольников.
4. Цвет и толщину линии можно изменять.
5. Результат изображен на рисунке 8.2.

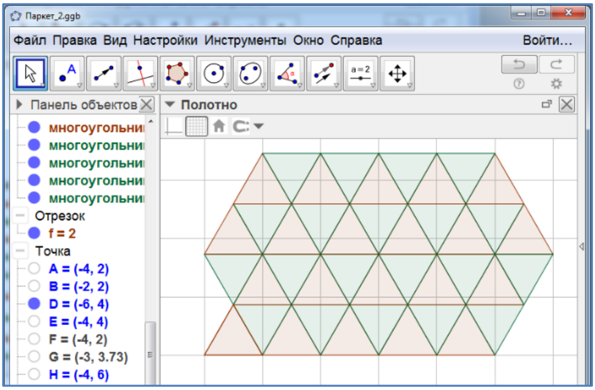

Рис. 8.2

Паркет из правильных шестиугольников

1. Построим правильный шестиугольник.
2. На диагоналях шестиугольника создадим векторы.
3. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных треугольников.
4. Цвет и толщину линии можно изменять.
5. Результат изображен на рисунке 8.3.

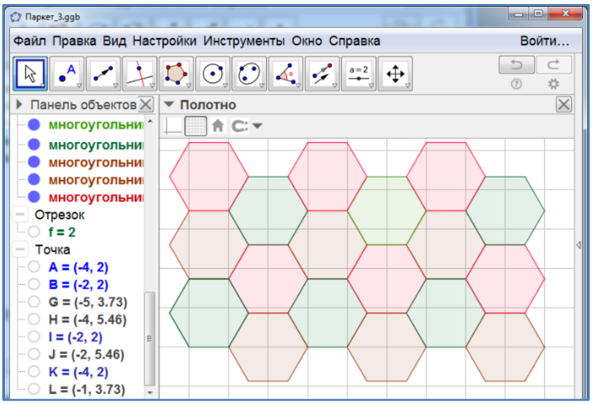

Рис.8.3

Задача 1. Продолжите построение паркета из правильных шестиугольников и треугольников (рис. 8.4) так, чтобы в каждой вершине сходилось два треугольника и два шестиугольника.

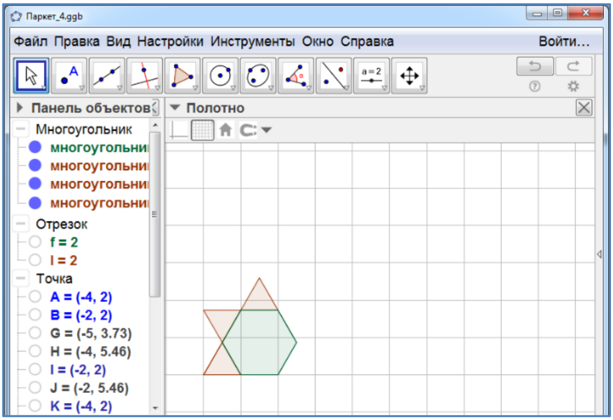

Рис. 8.4

Задача 2. Продолжите построение паркета из правильных шестиугольников и треугольников (рис. 8.5) так, чтобы в каждой вершине сходилось четыре треугольника и один шестиугольник.

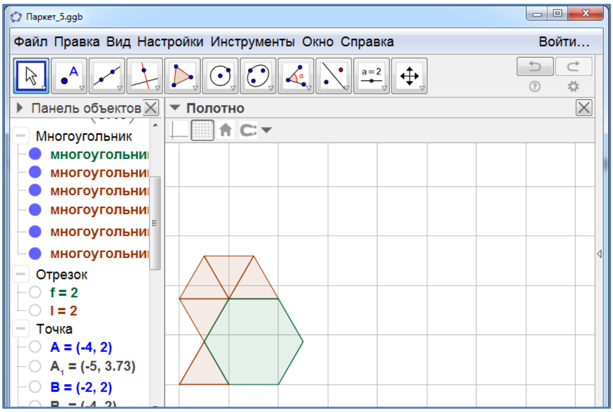

Рис. 8.5

Задача 3. Продолжите построение паркета из правильных треугольников и квадратов (рис. 8.6) так, чтобы в каждой вершине сходилось три треугольника и два квадрата.

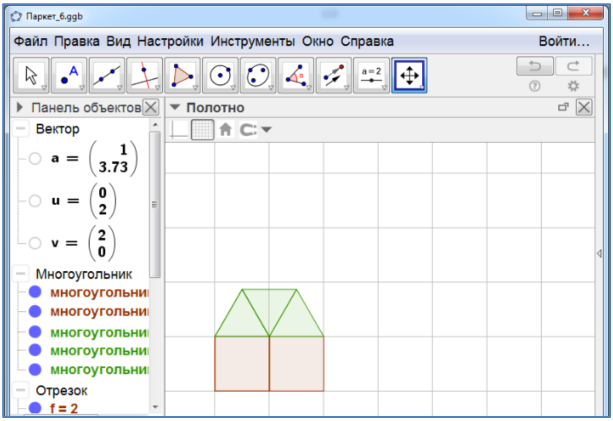

Рис. 8.6

Задача 4. Продолжите построение паркета из правильных треугольников и квадратов (рис. 8.7) так, чтобы в каждой вершине сходилось три треугольника и два квадрата.

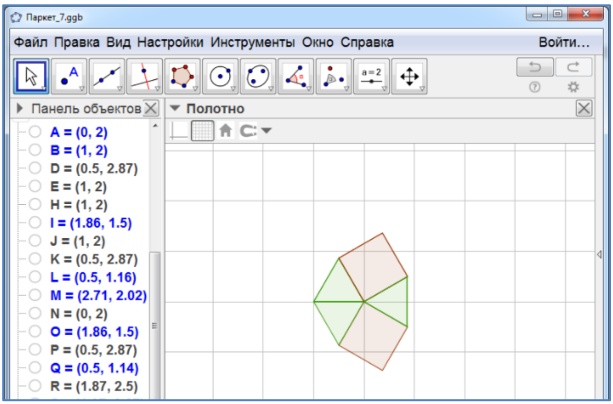

Рис. 8.7

Задача 5. Продолжите построение паркета из правильных треугольников, квадратов и шестиугольников (рис. 8.8) так, чтобы в каждой вершине сходилось один треугольник, два квадрата и шестиугольник.

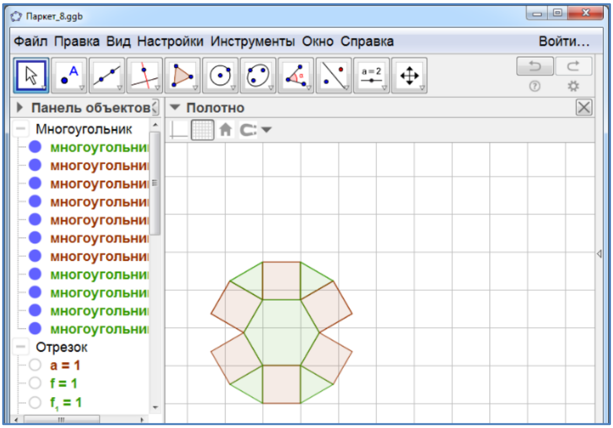

Рис. 8.8

Задача 6. Продолжите построение паркета из правильных треугольников и двенадцатиугольников (рис. 8.9) так, чтобы в каждой вершине сходилось один треугольник и два двенадцатиугольника.

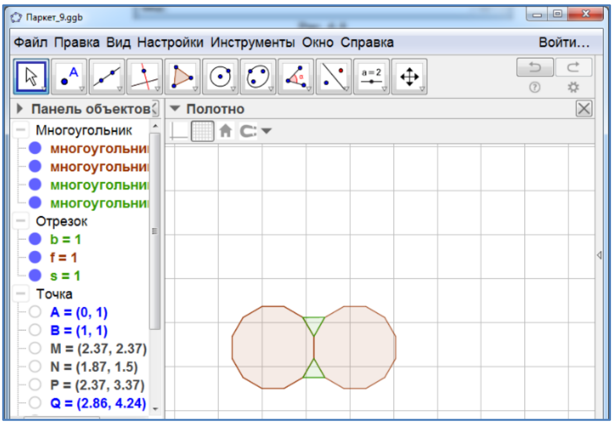

Рис. 8.9

Задача 7. Продолжите построение паркета из правильных шестиугольников, двенадцатиугольников и квадратов (рис. 8.10) так, чтобы в каждой вершине сходились квадрат, шестиугольник и двенадцатиугольник.

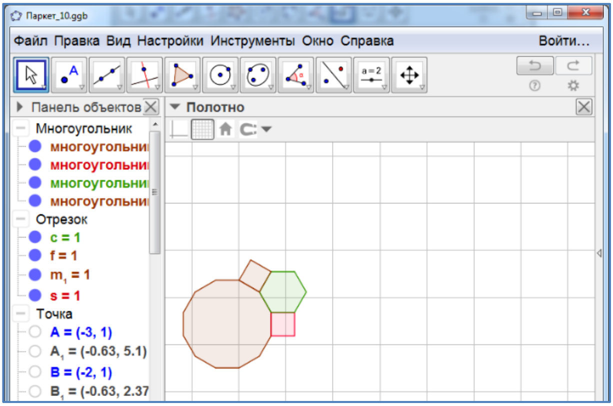

Рис. 8.10

Задача 8. Продолжите построение паркета из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 8.11) так, чтобы в каждой вершине сходились квадрат и два восьмиугольника.

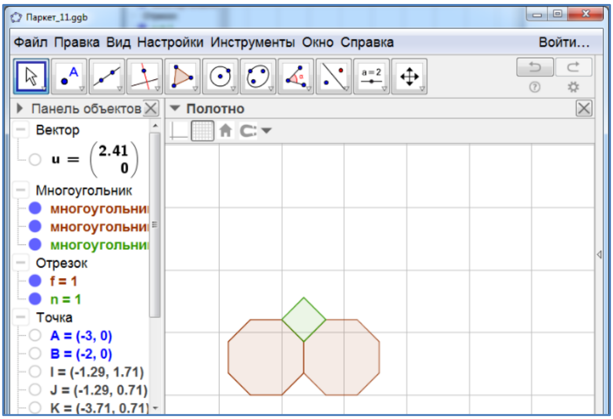

Рис. 8.11

Задача 9. Постройте паркет из четырёхугольников (рис. 8.12).

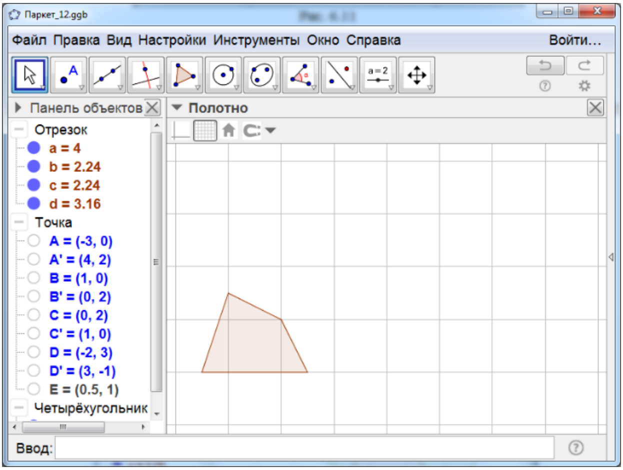

Рис. 8.12

Задача 10. Постройте паркет из четырёхугольников (рис. 8.13).

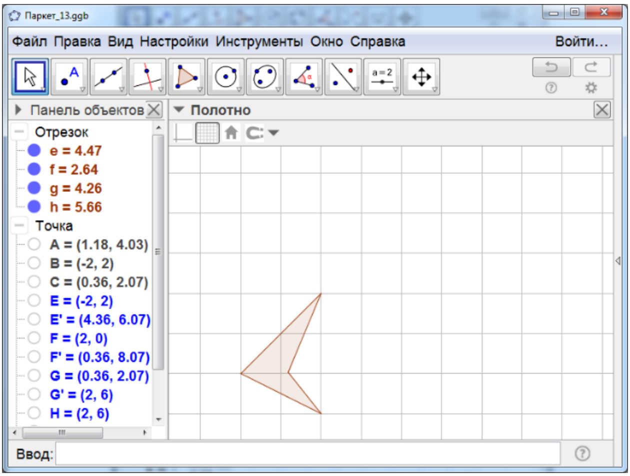

Рис. 8.13

Задача 11. Постройте паркет из четырёхугольников (рис. 8.14).

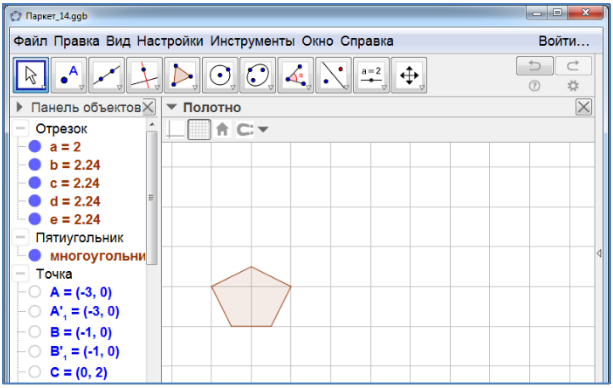

Рис. 8.14

9. КРИВЫЕ

Рассмотрим возможности программы GeoGebra для изображения кривых, заданных уравнениями.

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Прямая – график функции f(x)=a·x + b.

1. Создадим ползунки a, b.
2. В строке «Ввод» наберём f(x)=ax+b.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение прямой.
4. Коэффициенты a, b можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.1.

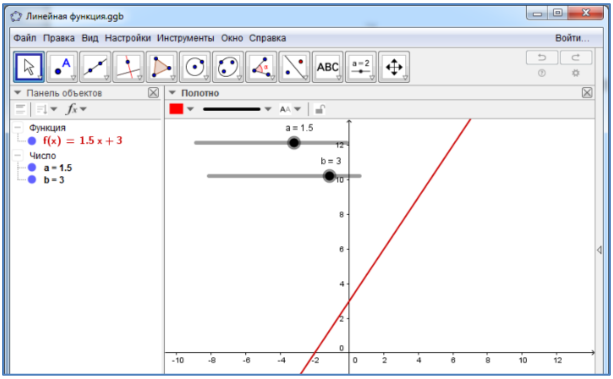

Рис. 9.1

Парабола – график функции f(x) = a·x² + b·x + c.

1. Создадим ползунки a, b, c.
2. В строке «Ввод» наберём f(x)=ax^2+bx+c.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение параболы.
4. Коэффициенты a, b, c можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.2.

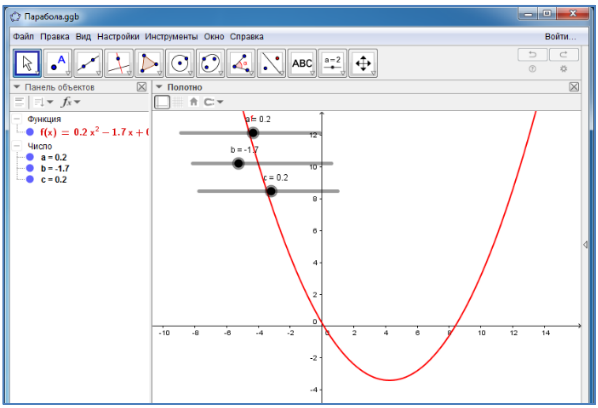

Рис. 9.2

Дробно-линейная функция f(x) $=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$.

1. Создадим ползунки a, b, c, d.
2. В строке «Ввод» наберём f(x) =(ax+b)/(cx+d).
3. Нажмем «Enter». Получим график дробно-линейной функции.
4. Коэффициенты a, b, c, d можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.3.

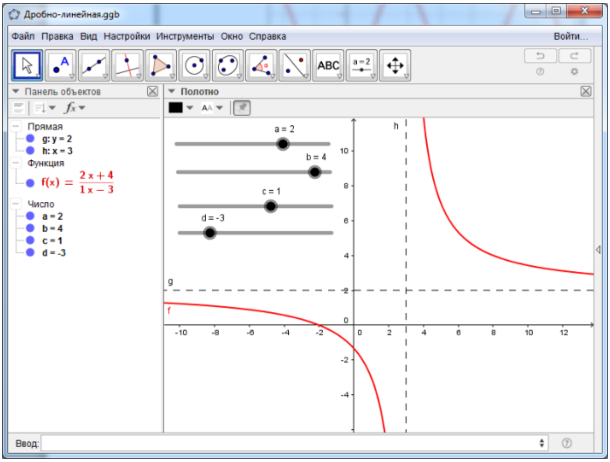

Рис. 9.3

Синусоида –график функции f(x) = c·sin(a·x + b).

1. Создадим ползунки a, b, c.
2. В строке «Ввод» наберём f(x) =c*sin(ax+b).
3. Нажмем «Enter». Получим изображение синусоиды.
4. Коэффициенты a, b, c можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.4.

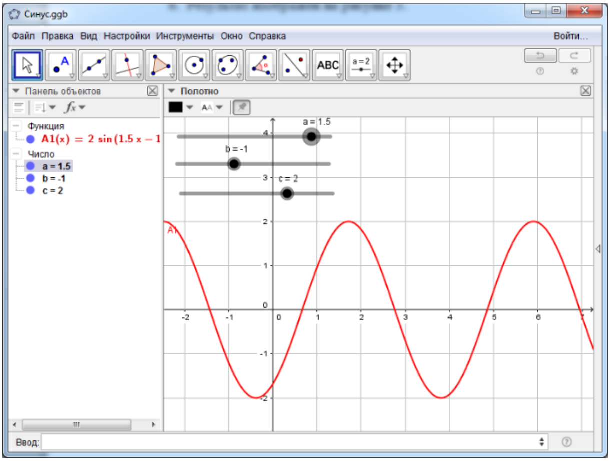

Рис. 9.4

Задача 1. Получите верзиеру – график функции f(x) = $\frac{a^3}{x^2+a^2}$.

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЕМ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Эллипс, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Создадим ползунки a, b.
2. В строке «Ввод» наберём x^2/a^2+y^2/b^2=1.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение эллипса.
4. Коэффициенты a, b можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.5.

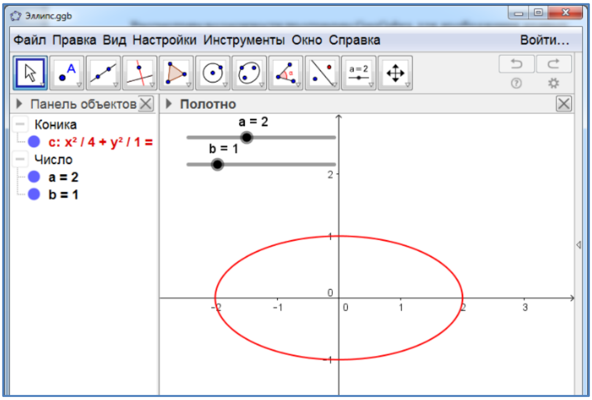

Рис. 9.5

Гипербола, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

1. Создадим ползунки a, b.
2. В строке «Ввод» наберём x^2/a^2-y^2/b^2=1.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение гиперболы.
4. Коэффициенты a, b можно изменять, перемещая точки на соответствующих ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. Результат изображен на рисунке 9.6.

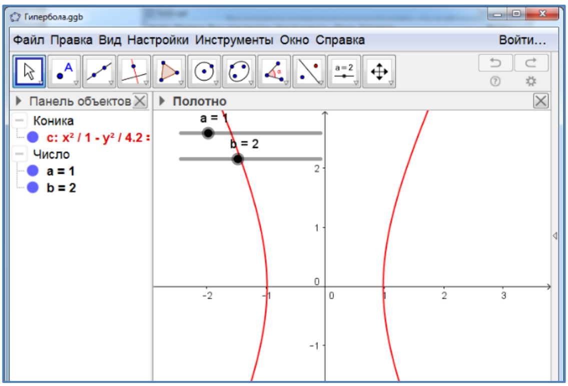

Рис. 9.6

Задача 2. Получите астроиду – кривую, заданную уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Задача 3. Получите каппу – кривой, заданную уравнением $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$.

Задача 4. Получите конхоиду Никомеда – кривую, заданную уравнением $(x^2 + y^2)(y – a)^2 = l^2y^2$.

Задача 5. Получите лемнискату Бернулли – кривую, заданную уравнением $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 – y^2)$.

Задача 6. Получите лист Декарта – кривую, заданную уравнением $x^3 + y^3 – 3a \cdot x \cdot y = 0$.

Задача 7. Получите строфоиду – кривую, заданную уравнением $y^2(2a – x) = (x – a)^2x$.

Задача 8. Получите улитку Паскаля – кривую, заданную уравнением $(x^2 + y^2 – 2a \cdot x)^2 = l^2(x^2 + y^2)$.

Задача 9. Получите циссоиду Диоклеса – кривую, заданную уравнением $y^2(2a – x) = x^3$.

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЕМ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Спираль Архимеда, $r = at, 0 \leq t \leq 8\pi$.

1. Создадим ползунок a, изменяющийся от 0 до 1.
2. В строке «Ввод» наберём Кривая[(a*t,t),t,0,8*Pi].
3. Нажмем «Enter». Получим изображение спирали Архимеда.
4. Коэффициент a можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. На рисунке 9.7 изображена спираль Архимеда для коэффициента a = 0,1.

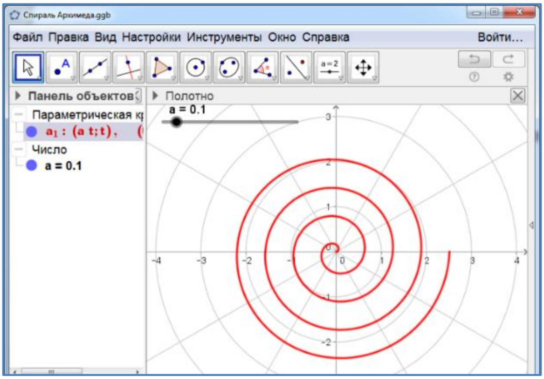

Рис. 9.7

Логарифмическая спираль, $r = a^t, -2\pi \leq t \leq 4\pi$**.**

1. Создадим ползунок а, изменяющийся от 1 до 2.
2. В строке «Ввод» наберём Кривая[(a^t,t),t,-2*Pi,4*Pi].
3. Нажмем «Enter». Получим изображение логарифмической спирали.
4. Коэффициент а можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.
6. На рисунке 9.8 изображена логарифмическая спираль для случая а = 1,1.

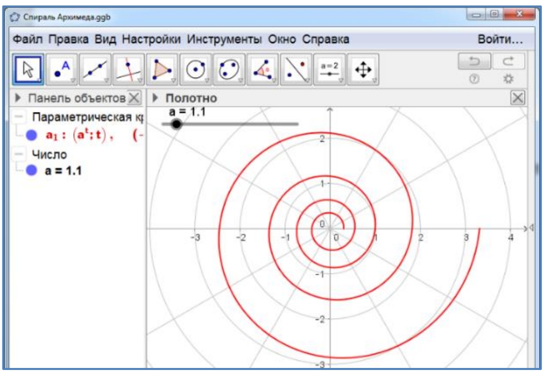

Рис. 9.8

Трилистник, $r = \sin 3t, 0 \le t \le 2\pi$.

1. В строке «Ввод» наберём Кривая[(sin(3t),t),t,0,2*Pi].
2. Нажмем «Enter». Получим изображение трилистника.
3. Цвет и толщину линии можно изменять.
4. Результат изображен на рисунке 9.9.

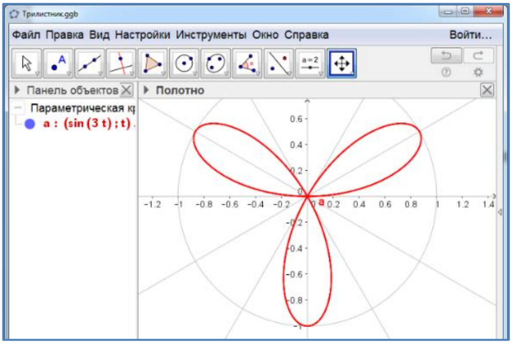

Рис. 9.9

Кардиоида, $r = 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi$.

1. В строке «Ввод» наберём Кривая[(1-cos(t),t),t,0,2*Pi].
2. Нажмем «Enter». Получим изображение кардиоиды.
3. Цвет и толщину линии можно изменять.
4. Результат изображен на рисунке 9.10.

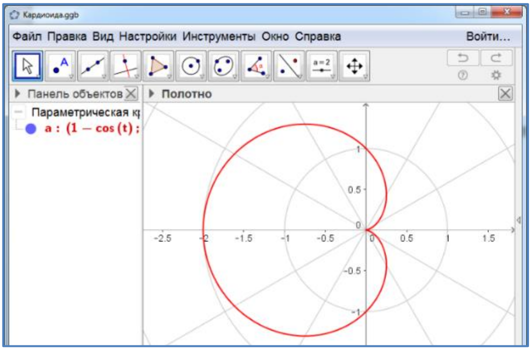

Рис. 9.10

Задача 10. Получите 5-листник - кривую, заданную уравнением $r = \sin 5t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Задача 11. Получите кривую, заданную уравнением $r = \sin(5t/3), 0 \leq t \leq 3\pi$.

Задача 12. Выясните, какая кривая задаётся уравнением $r = \cos t$.

Задача 13. Выясните, какая кривая задаётся уравнением $r = \sin t$.

Задача 14. Получите кривую, заданную уравнением $r = at^2, -4\pi \leq t \leq 4\pi$.

Задача 15. Получите кривую, заданную уравнением $r = 1/t, 0.5 \leq t \leq 8\pi$.

Задача 16. Выясните, какая кривая задаётся уравнением $r = \frac{1}{\cos t}$.

Задача 17. Выясните, какая кривая задаётся уравнением $r = \frac{1}{\sin t}$.

Задача 18. Получите кривую, заданную уравнением $r = 1 + \cos 3t + \sin^2 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Циклоида, $\begin{cases} x = t - \sin(t), \\ y = 1 - \cos(t). \end{cases}$

1. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-sin(t).
2. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-cos(t).
4. Нажмем «Enter».
5. Скроем графики функций f(t)=t-sin(t), g(t)=1-cos(t).
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,-Pi,3Pi].
7. Нажмем «Enter». Получим циклоиду.
8. Цвет и толщину линии можно изменять.
9. Результат изображен на рисунке 9.11.

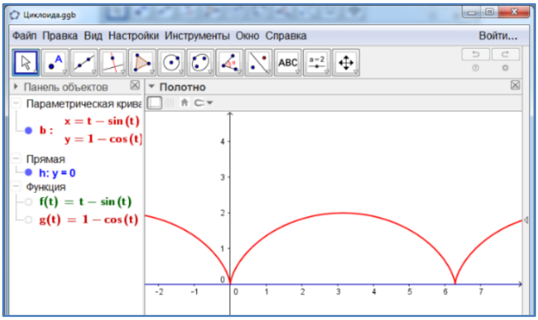

Рис. 9.11

Кардиоида, $\begin{cases} x = 2\cos(t) - \cos(2t), \\ y = 2\sin(t) - \sin(2t). \end{cases}$

1. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2cos(t) – cos(2t).
2. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём g(t)=2sin(t) – sin(2t).
4. Нажмем «Enter».
5. Скроем графики функций f(t) = 2cos(t) – cos(2t), g(t)=2sin(t) – sin(2t).
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,0,2*Pi].
7. Нажмем «Enter». Получим кардиоиду.
8. Цвет и толщину линии можно изменять.
9. Результат изображен на рисунке 9.12.

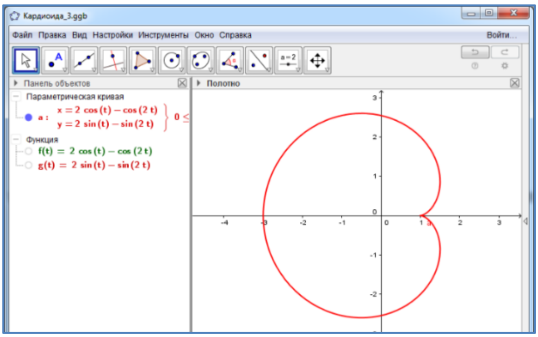

Рис. 9.12

Задача 19. Получите удлинённую циклоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin(t), \\ y = 1 - d \cdot \cos(t), \end{cases}$ d > 1.

Задача 20. Получите укороченную циклоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin(t), \\ y = 1 - d \cdot \cos(t), \end{cases}$ 0 < d < 1.

Задача 21. Получите удлинённую кардиоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos(t) - d \cdot \cos(2t), \\ y = 2\sin(t) - d \cdot \sin(2t). \end{cases}$ d > 1.

Задача 22. Получите укороченную кардиоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos(t) - d \cdot \cos(2t), \\ y = 2\sin(t) - d \cdot \sin(2t). \end{cases}$ 0 < d < 1.

Задача 23. Получите эпициклоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin\left(\frac{n+m}{n}t\right). \end{cases}$ Рассмотрите случай случая n = 5, m = 3.

Задача 24. Получите гипоциклоиду – кривую задаваемую параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin\left(\frac{n+m}{n}t\right). \end{cases}$ Рассмотрите случай m = 5, m = -2.

ТРАЕКТОРИИ

Программа GeoGebra дает возможность создавать анимацию и получать кривые, как траектории движения точек.

Циклоида – траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по прямой.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём y=0. Нажмем «Enter».

3. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-sin(t). Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-cos(t). Нажмем «Enter».
5. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
6. Появится часть циклоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
7. В строке «Ввод» наберём A=(a, 1). Нажмём «Enter».
8. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
9. Построим отрезок с концами A, B.
10. Построим окружность с центром A и точкой B.
11. Уберём обозначения точек A и B.
12. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
13. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
14. Цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.13.

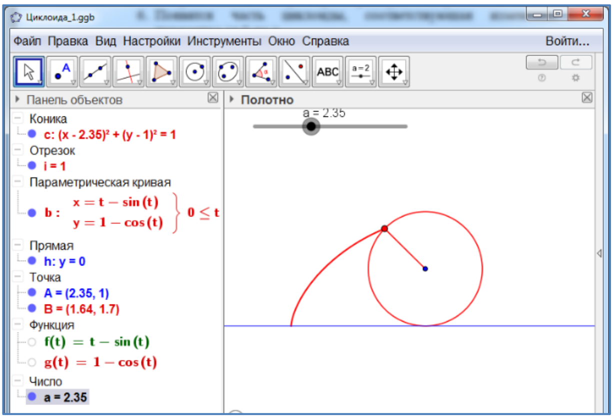

Рис. 9.13

Кардиоида – траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём A=(0, 0). Нажмем «Enter».
3. Построим окружность с центром A и радиусом 1.
4. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2(1-cos(t))*cos(t)+1. Нажмем «Enter».
5. В строке «Ввод» наберём g(t)=2(1-cos(t))sin(t). Нажмем «Enter».
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
7. Появится часть кардиоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
8. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
9. В строке «Ввод» наберём C=(2cos(a), 2sin(a)). Нажмём «Enter».
10. Построим отрезок с концами B, C.
11. Построим окружность с центром C и точкой B.
12. Уберём обозначения точек B и C.
13. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
14. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
15. Цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.14.

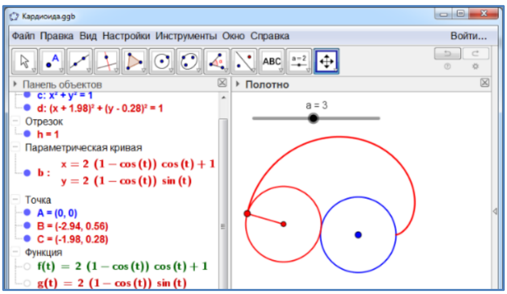

Рис. 9.14

Задача 25. Получите траекторию движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой (удлинённая циклоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin(t)\,, \\ y = 1 - d \cdot \cos(t)\,, \end{cases}$ d > 1.

Задача 26. Получите траекторию движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по прямой (укороченная циклоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin(t)\,, \\ y = 1 - d \cdot \cos(t)\,, \end{cases}$ 0 < d < 1.

Задача 27. Получите траекторию движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса (удлинённая кардиоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos(t) - d \cdot \cos(2t), \\ y = 2\sin(t) - d \cdot \sin(2t). \end{cases}$ d > 1.

Задача 28. Получите траекторию движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса (укороченная кардиоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2\cos(t) - d \cdot \cos(2t), \\ y = 2\sin(t) - d \cdot \sin(2t). \end{cases}$ 0 < d < 1.

Задача 29. Получите траекторию движения точки, закреплённой на окружности радиуса m, катящейся с внешней стороны по другой окружности радиуса n (эпициклоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin\left(\frac{n+m}{n}t\right). \end{cases}$ Рассмотрите случай случая n = 5, m = 3.

Задача 30. Получите траекторию движения точки, закреплённой на окружности радиуса |m|, катящейся с внутренней стороны по другой окружности радиуса n (гипоциклоида). Эта кривая задаётся параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin\left(\frac{n+m}{n}t\right). \end{cases}$ Рассмотрите случай m = 5, m = -2.

ОТВЕТЫ

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Задача 1. Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки (рис. 3.1).

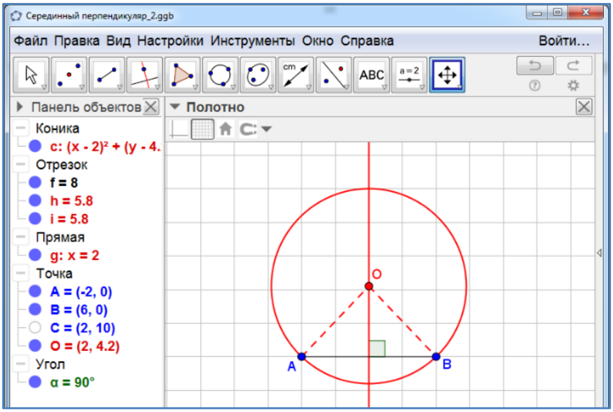

Рис. 3.1

Задача 2. Серединный перпендикуляр к данному отрезку без середины этого отрезка (рис. 3.2).

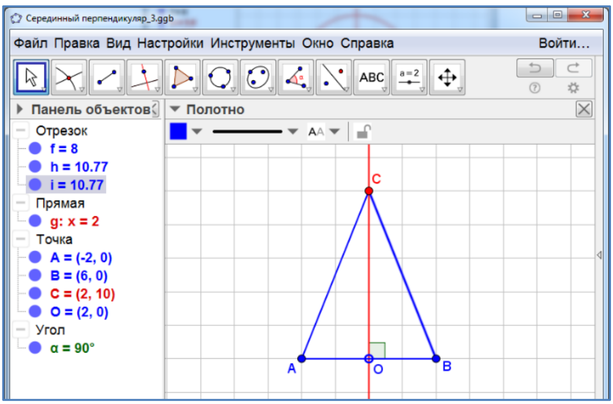

Рис. 3.2

Задача 3. Две перпендикулярные прямые (рис. 3.3), содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

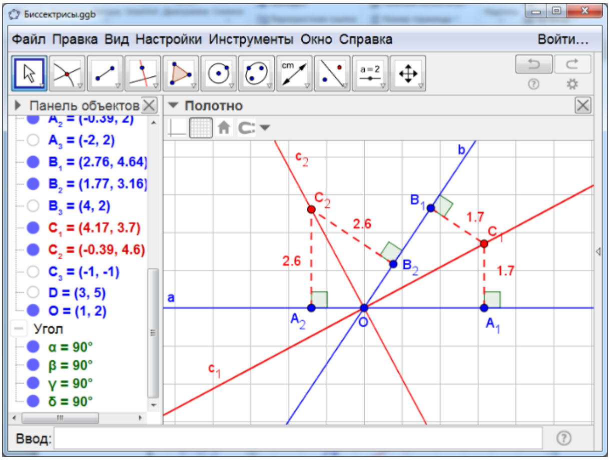

Рис. 3.3

Задача 4. Биссектриса данного угла без её вершины (рис. 13.4).

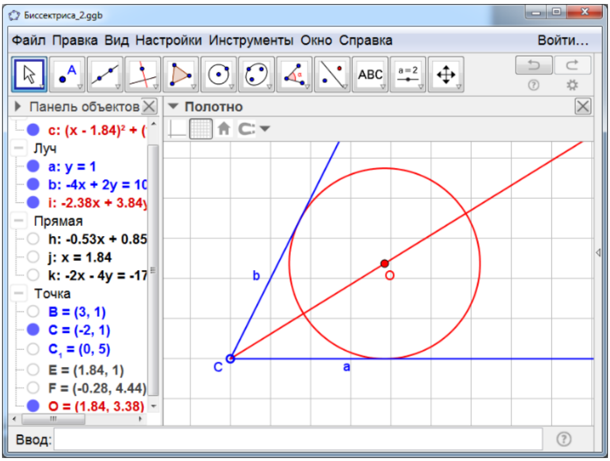

Рис. 13.4

Задача 5. Окружность, концентрическая с данной окружностью, радиус которой в два раза больше радиуса данной окружности (рис. 3.5).

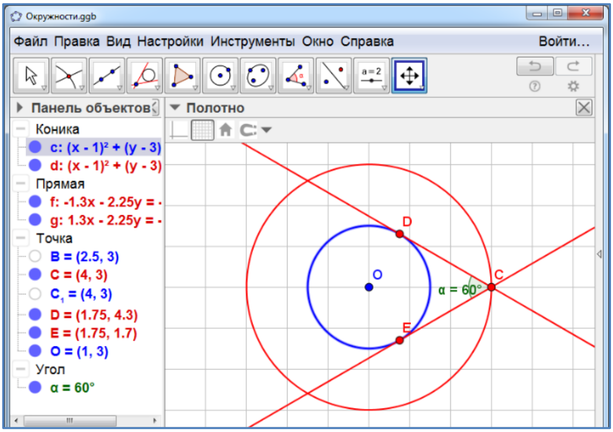

Рис. 3.5

Задача 6. Две симметричные дуги окружности, стягиваемые данным отрезком без их концов. На рисунке 3.6 показаны дуги окружности, из точек которых данный отрезок виден под углом 60°.

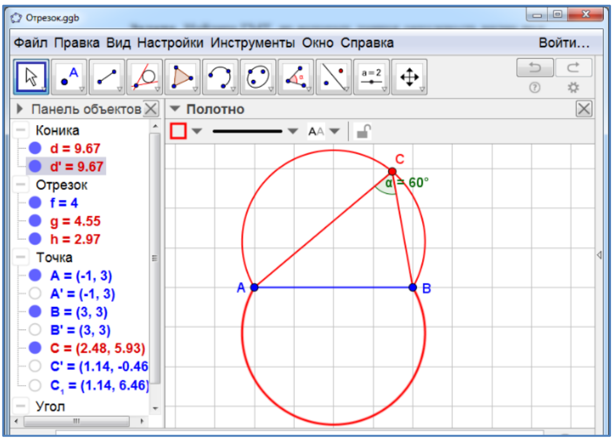

Рис. 3.6

Задача 7. Парабола, фокусом которой является данная точка, а директрисой – данная прямая (рис. 3.7).

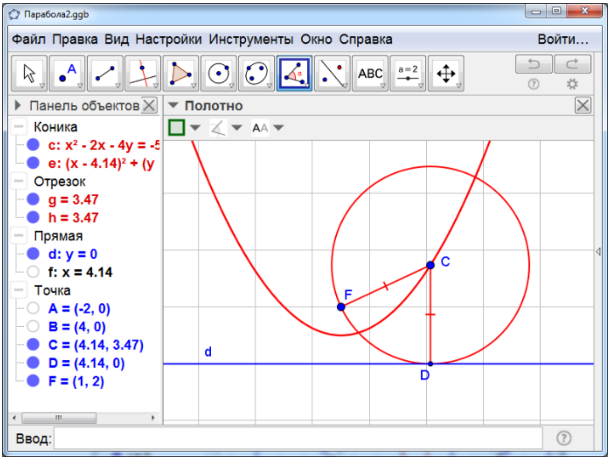

Рис. 3.7

Задача 8. Парабола, фокусом которой является центр данной окружности, а директрисой – прямая, параллельная данной (рис. 3.8).

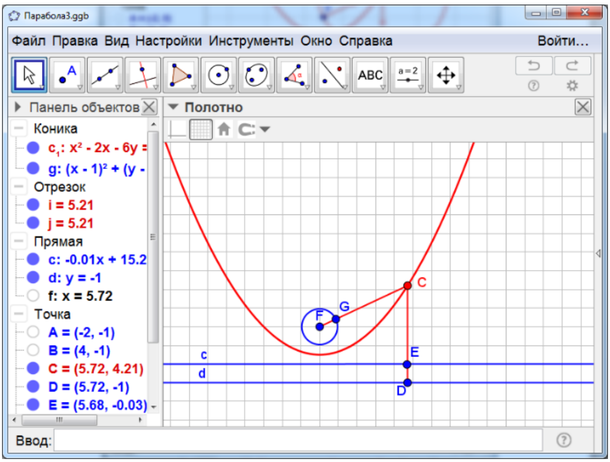

Рис. 3.8

Задача 9. Две параболы, фокусом которых является данная точка, а директрисами – прямые d_1, d_2, параллельные данной прямой c (рис. 3.9).

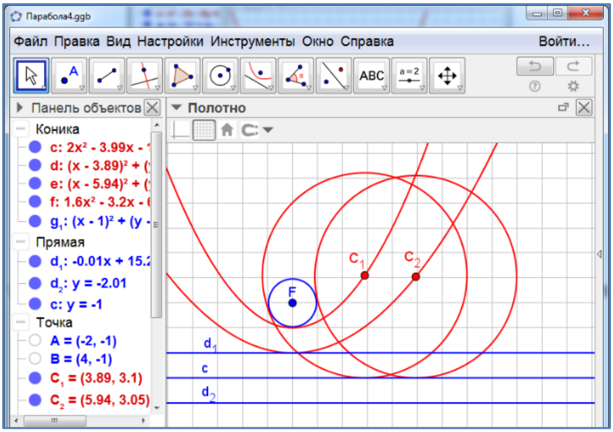

Рис. 3.9

Задача 10. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом двух данных окружностей.

Ответ. Ветвь гиперболы, фокусами которой являются центры данных окружностей (рис. 3.10).

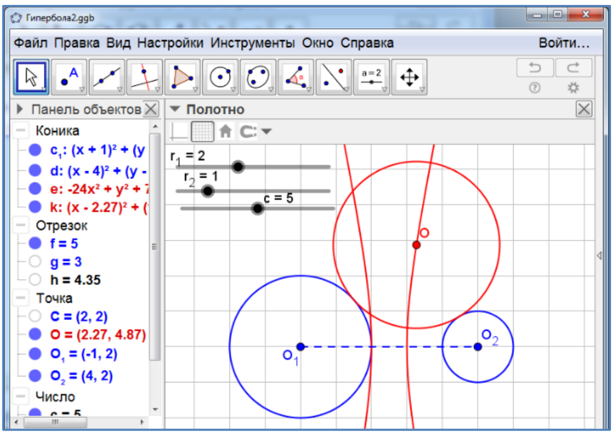

Рис. 3.10

Задача 11. Гипербола, фокусами которой являются центры данных окружностей (рис. 3.11).

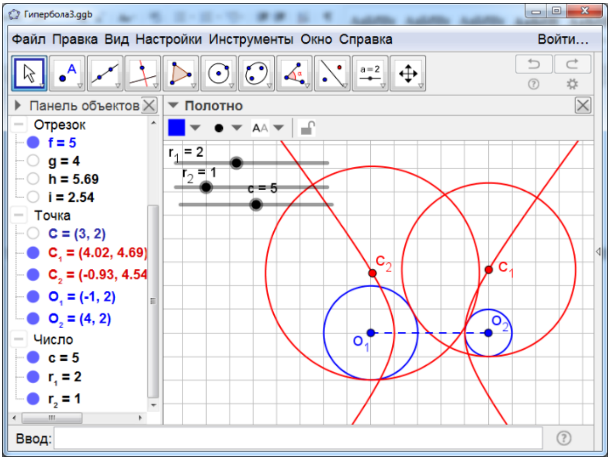

Рис. 3.11

Задача 12. Эллипс (рис. 3.12).

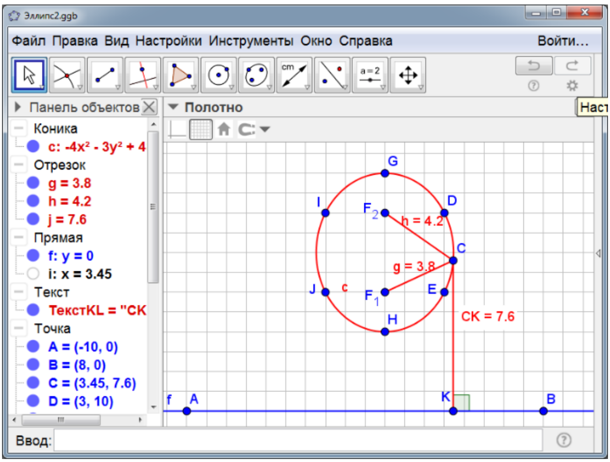

Рис. 3.12

Задача 13. Прямая, перпендикулярная прямой АВ (рис. 3.13).

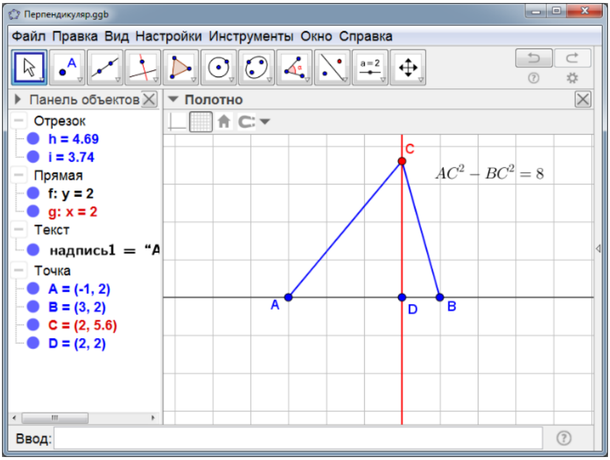

Рис. 3.13

Задача 14. Окружность с центром в середине отрезка АВ (рис. 3.14).

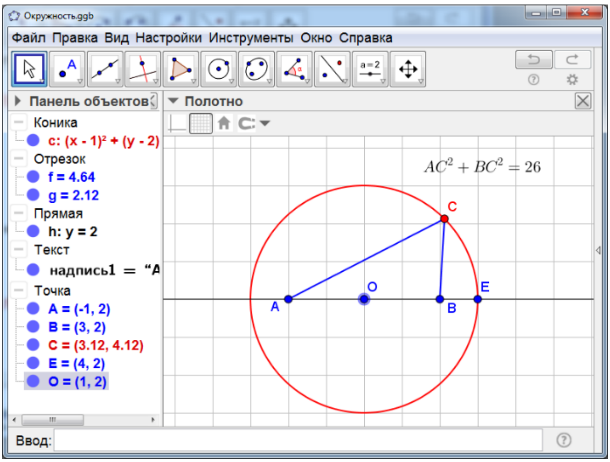

Рис. 3.14

4. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задача 1. Отметим середину M отрезка AB. Соединим отрезком точки C и M. CM – искомая медиана (рис. 4.1).

Перемещая вершины, форму треугольника можно менять. При этом CM остаётся медианой.

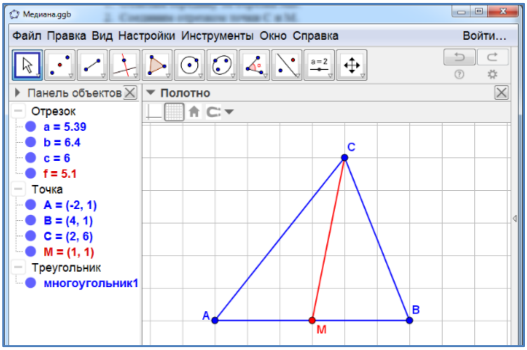

Рис. 4.1

Задача 2. Проведём биссектрису угла ACB. Найдём её точку пересечения D со стороной AB. Соединим отрезком точки C и D. Скроем биссектрису угла. Отрезок CD – искомая биссектриса треугольника (рис. 4.2).

Перемещая вершины, форму треугольника можно менять. При этом CD остаётся биссектрисой.

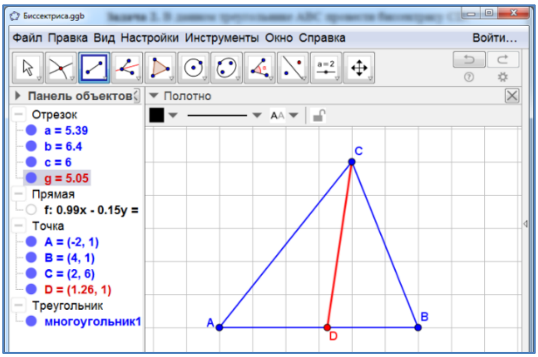

Рис. 4.2

Задача 3. Через вершину C проведём прямую, перпендикулярную AB. Найдём её точку пересечения H со стороной AB. Соединим отрезком точки C и H. Скроем прямую. Отрезок CH – искомая высота треугольника (рис. 4.3).

Перемещая вершины, форму треугольника можно менять. При этом CH остаётся высотой.

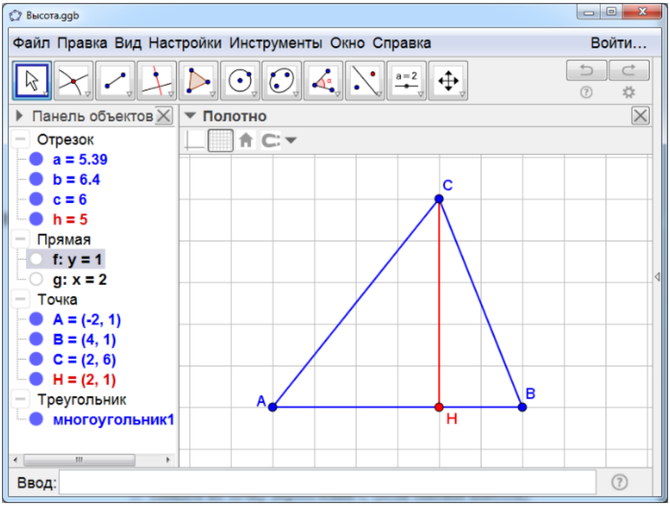

Рис. 4.3

Задача 4. Проведём луч AB. Через вершину C проведём прямую, перпендикулярную AB. Найдём её точку пересечения H с лучом AB. Соединим отрезком точки C и H. Скроем прямую. Отрезок CH – искомая высота треугольника (рис. 4.4).

Перемещая вершины, форму треугольника можно менять. При этом CH остаётся высотой.

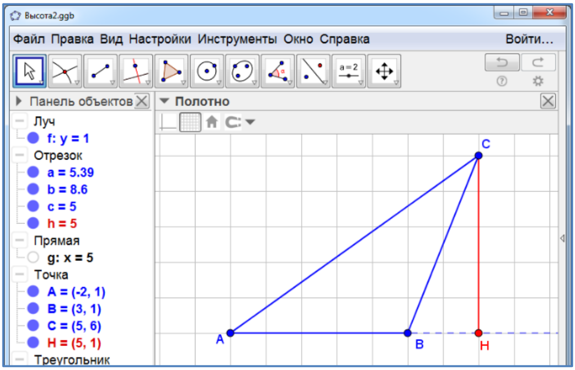

Рис. 4.4

Задача 5. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную данной прямой a. Найдём точку A их пересечения. C центром в точке A проведём окружность, проходящую через точку A (рис. 4.5). Эта окружность будет искомой окружностью с центром O, касающейся данной прямой.

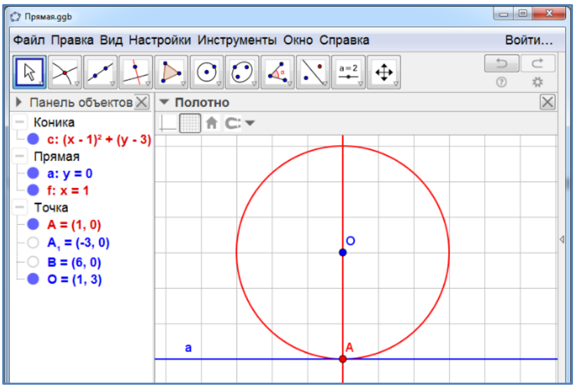

Рис. 4.5

Задача 6. Проведём луч OP. Найдём точки A и B его пересечения с данной окружностью. С центром в точке P проведём окружности, проходящие через точки A и B (рис. 4.6). Эти окружности будут искомыми окружностями с центром P, касающиеся данной окружности соответственно внешним и внутренним образами.

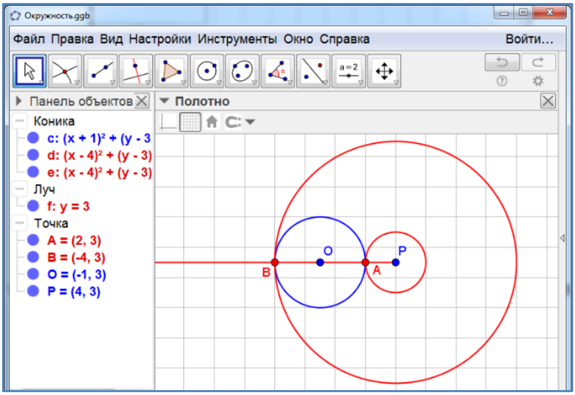

Рис. 4.6

Задача 7. Проведём прямую OP. Найдём точки A и B её пересечения с данной окружностью. С центром в точке P проведём окружности, проходящие через точки A и B (рис. 4.7). Эти окружности будут искомыми окружностями с центром P, касающиеся данной окружности внутренним образом.

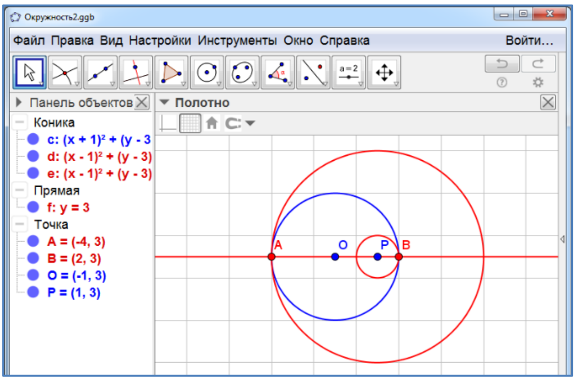

Рис. 4.7

Задача 8. С центром в точке O_1 и радиусом $R_1 - R_2$ построим окружность. Через точку O_2 проведём к ней касательные. Через точку O_1 проведём прямые, перпендикулярные этим касательным. Найдём их точки пересечения A и B с данной окружностью. Через точки A и B проведём прямые, соответственно параллельные построенным касательным. Эти прямые будут искомыми общими внешними касательными к данным окружностям (рис. 4.8).

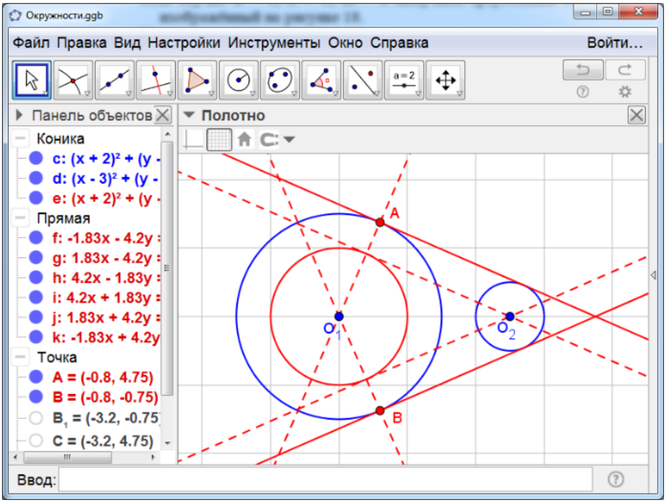

Рис. 4.8

Задача 9. С центром в точке O_1 и радиусом $R_1 + R_2$ построим окружность. Через точку O_2 проведём к ней касательные. Через точку O_1 проведём прямые, перпендикулярные этим касательным. Найдем их точки пересечения A и B с данной окружностью. Через точки A и B проведем прямые, соответственно параллельные построенным касательным. Эти прямые будут искомыми общими внутренними касательными к данным окружностям (рис. 4.9).

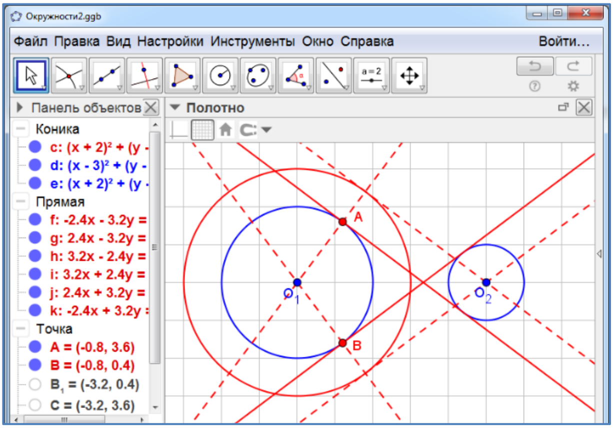

Рис. 4.9

Задача 10. Создадим ползунки a, b, c, изменяющиеся от 0 до 5. Построим отрезок AB = c. С центром в точке A построим окружность радиуса b. С центром в точке B построим окружность радиуса a. Найдём их точку пересечения C (если таковая имеется). Соединим отрезками точки A и C, B и C. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае a = 3, b = 4, c = 5 результат изображён на рисунке 4.10.

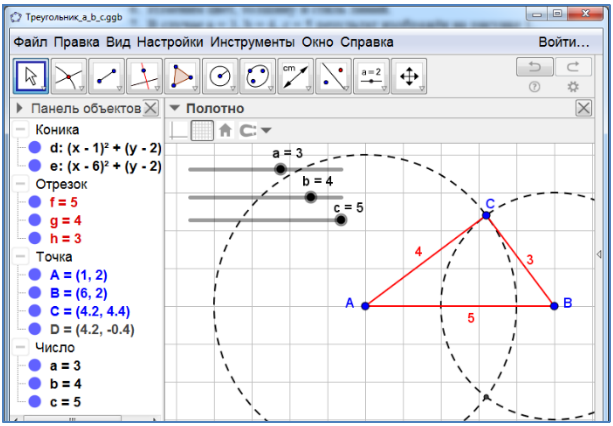

Рис. 4.10

Задача 11. Создадим ползунки b, c, изменяющиеся от 0 до 5, и β ($0° < \beta < 90°$). Построим отрезок $AB = c$. С центром в точке A построим окружность радиуса b. Построим угол $ABC = \beta$. Найдём точки пересечения луча AC с окружностью (если таковые имеются). Соединим отрезками точки A и B, A и C_1, A и C_2, B и C_2. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае $b = 4$, $c = 5$, $\beta = 45°$ получаем два треугольника ABC_1 и ABC_2 (рис. 4.11).

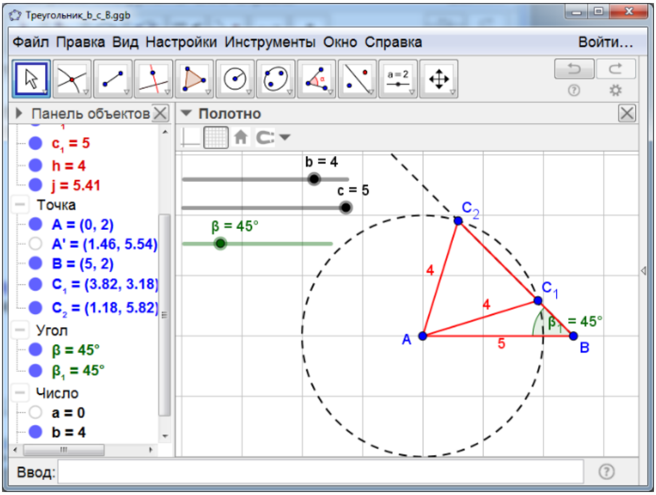

Рис. 4.11

Задача 12. Создадим ползунки a, b, h, изменяющиеся от 0 до 5. Создадим точку C. проведём луч с вершиной C и отложим на нём отрезок $CH = h$. Через точку H проведём прямую, перпендикулярную CH. С центром в точке C построим окружности радиусов a и b. Найдём их точки пересечения A, B_1 и B_2 (если таковая имеется) с построенной прямой. Соединим отрезками точки A и C, B_1 и C, B_2 и C, A и B_1. В случае $a = 4$, $b = 5$, $h = 3$ получаем два треугольника AB_1C и AB_2C (рис. 4.12).

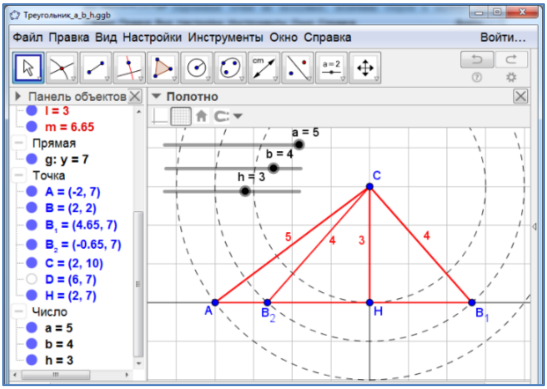

Рис. 4.12

Задача 13. Создадим ползунки b, c, h, изменяющиеся от 0 до 5. Построим отрезок AB = c. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную AB и отложим на ней отрезок BD = h. Через точку D проведём прямую, параллельную AB. С центром в точке A построим окружность радиуса b. Найдём её точки пересечения C_1 и C_2 с построенной прямой. Через точки C_1, C_2 проведём прямые, перпендикулярные AB, и обозначим их точки пересечения H_1, H_2. Соединим отрезками точки A и C_1, A и C_2, B и C_1, B и C_2, C_1 и H_1, C_2 и H_2. В случае c = 5, b = 4, h = 3 получаем два треугольника ABC_1 и ABC_2 (рис. 4.13).

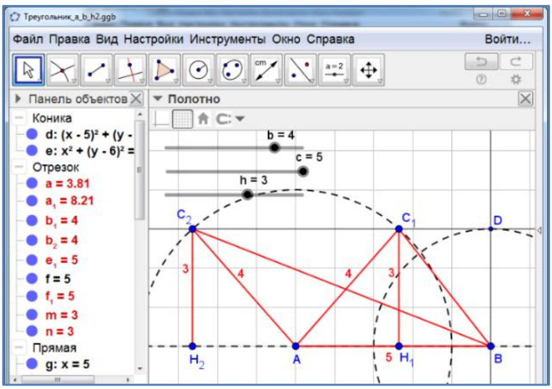

Рис. 4.13

Задача 14. Создадим ползунок α, изменяющийся от 0° до 180°, ползунки c, h, изменяющиеся от 0 до 5. Построим отрезок AB = c. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную AB и отложим на ней отрезок BD = h. Через точку D проведём прямую, параллельную AB. Проведём луч с вершиной A, образующий с AB угол α. Найдём его точку пересечения C с проведённой прямой. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную AB, и найдём их точку пересечения H. Соединим отрезками точки A и C, B и C, C и H. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае α = 45°, c = 5, h = 3 получаем треугольник ABC, изображённый на рисунке 4.14.

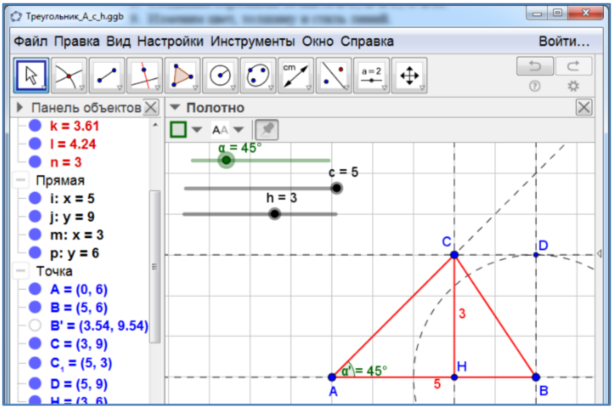

Рис. 4.14

Задача 15. Создадим ползунки b, c, m, изменяющиеся от 0 до 5. Построим отрезок AB = c. Отметим его середину M. Построим окружность с центром в точке M и радиусом m. С центром в точке A построим окружность радиуса b. Найдём точку пересечения этих окружностей C (если таковая имеется). Соединим отрезками точки A и C, B и C, C и M. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае c = 5, b = 4, m = 3 получаем треугольник ABC, изображённый на рисунке 4.15.

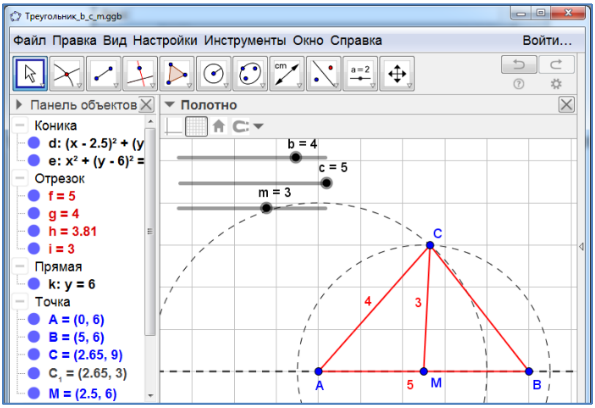

Рис. 4.15

Задача 16. Создадим ползунки a, b, m, изменяющиеся от 0 до 5. Построим отрезок CC′ = 2m. Отметим его середину M. Построим окружность с центром в точке C′ и радиусом a. Построим окружность с центром в точке C и радиусом b. Найдём точку A пересечения этих окружностей (если таковая имеется). Проведём луч AM и отложим на нём отрезок MB = AM. Соединим отрезками точки A и B, A и C, B и C, C и M. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае a = 4, b = 5, m = 3 получаем треугольник ABC, изображённый на рисунке 4.16.

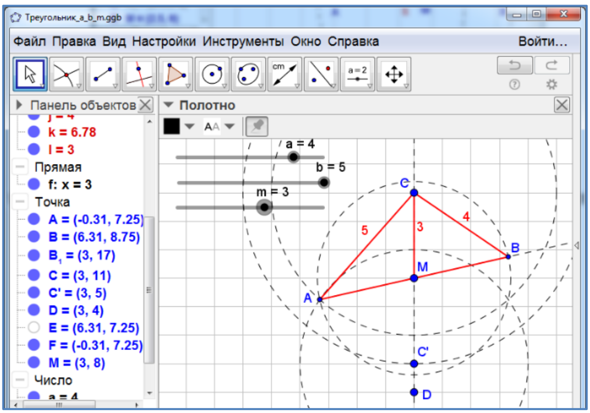

Рис. 4.16

Задача 17. Создадим ползунки a, b, R, изменяющиеся от 0 до 5. Построим окружность с центром O и радиусом R. Отметим точку C на этой окружности. Проведём окружность с центром в точке C и радиусом b. Найдём точку A пересечения этих окружностей (если таковая имеется). Проведём окружность с центром в точке C и радиусом a. Найдём точки B_1 и B_2 её пересечения с первой окружностью (если таковые имеются). Соединим отрезками точки A и C, A и B_1, A и B_2, B_1 и C, B_2 и C. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае a = 4, b = 5, R = 3 получаем треугольники AB_1C и AB_2C, изображённые на рисунке 4.17.

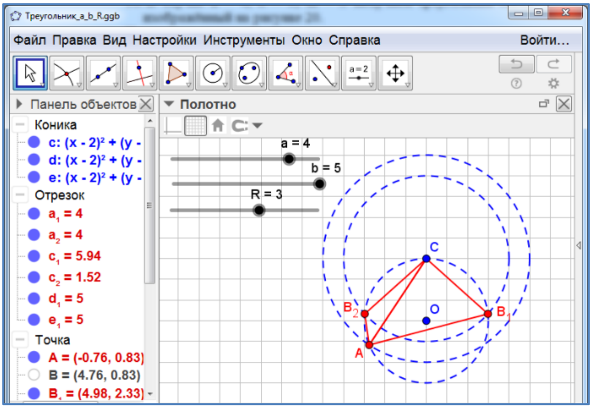

Рис. 4.17

Задача 18. Создадим ползунки α, β, изменяющиеся от 0° до 90°, и ползунок r, изменяющийся от 0 до 5. Построим окружность с центром O и радиусом r. Отметим точку D на этой окружности. Через точку D проведём касательную к окружности. Через точку O проведём луч под углом $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и найдём его точку пересечения A с касательной. Через точку O проведём луч под углом $90^\circ - \frac{\beta}{2}$ и найдём его точку пересечения B с касательной. Через точки A и B проведём касательные к окружности и найдём их точку пересечения C. Соединим отрезками точки A, В и С. Изменим цвет, толщину и стиль линий. В случае $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $r = 3$ получаем треугольник ABC, изображённые на рисунке 4.18.

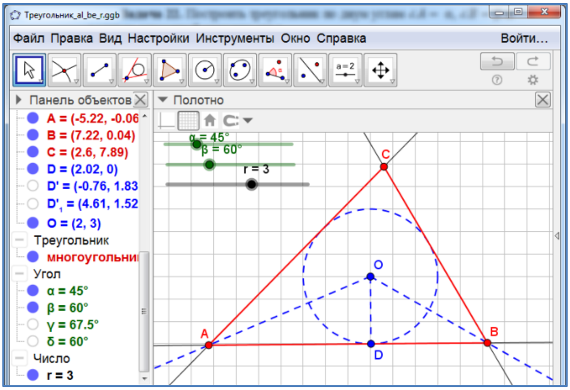

Рис. 4.18

5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача 1. Построим треугольник ABC. Отметим середины его сторон точками D, E, F. Проведём медианы CD, AE, BF. Установим их точку пересечения G. Найдём длины отрезков CG и GD. Сделаем надпись $DG = \frac{1}{2}GC$. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.1.

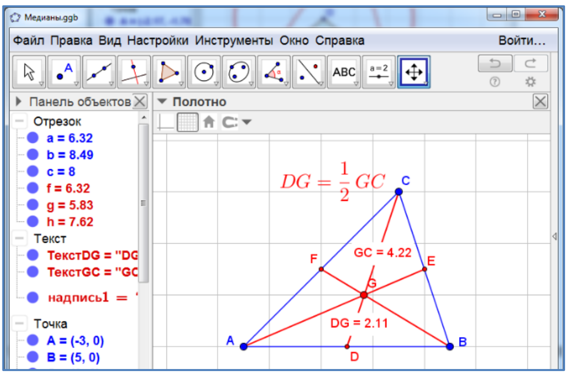

Рис. 5.1

Форму треугольника можно изменять, но медианы будут пересекаться в одной точке – центроиде.

Задача 2. Построим треугольник ABC. Проведем биссектрисы его углов. Отметим их точки пересечения D, E, F со сторонами треугольника. Скроем биссектрисы углов. Проведём отрезки AD, BE, CF. Установим их точку пересечения G. Отметим углы при вершинах треугольника, образованные биссектрисами. Через точку G проведём прямую, перпендикулярную прямой AB и найдём их точку пересечения H. Скроем проведённую прямую и проведём отрезок GH. Проведём окружность с центром O и точкой H. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.2.

Форму треугольника можно изменять, но биссектрисы будут пересекаться в одной точке – центре вписанной окружности.

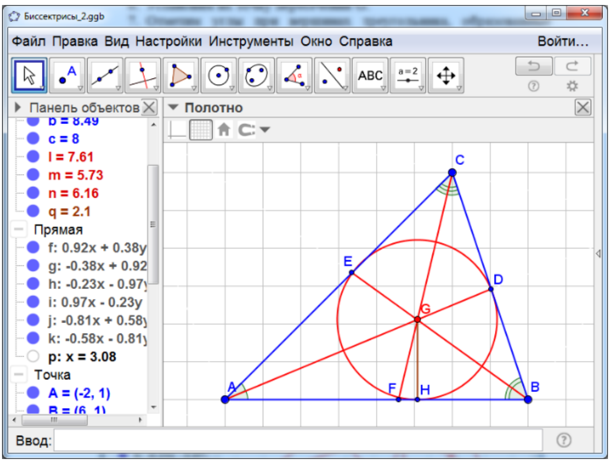

Рис. 5.2

Задача 3. Построим треугольник ABC. Через его вершины проведём прямые, перпендикулярные противоположным сторонам и найдём их точки пересечения D, E, F с этими сторонами. Проведём высоты AD, BE, CF. Установим их точку пересечения G. Отметим углы при основаниях высот. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.3.

Форму треугольника можно изменять, но высоты или их продолжения будут пересекаться в одной точке.

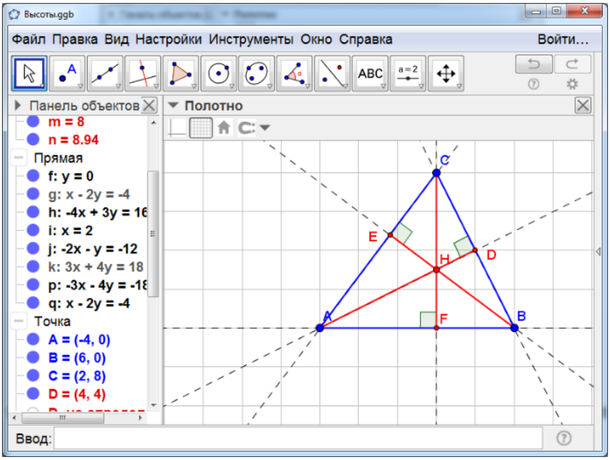

Рис. 5.3

Задача 4. Построим тупоугольный треугольник ABC. Через его вершины проведём прямые, перпендикулярные противоположным сторонам. Установим их точку пересечения H. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.4.

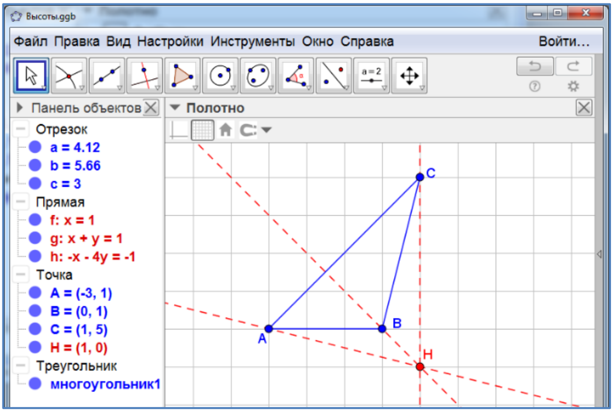

Рис. 5.4

Задача 5. Построим треугольник ABC. Проведём серединные перпендикуляры к его сторонам. Отметим прямые углы. Установим точку пересечения O серединных перпендикуляров. Соединим отрезками точку O с вершинами треугольника. Проведём окружность с центром O и радиусом OA. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.5.

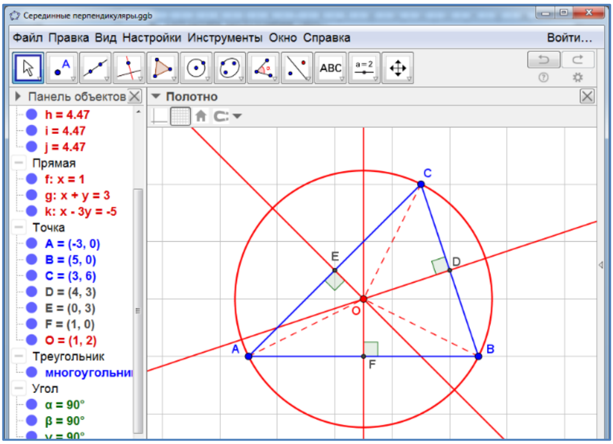

Рис. 5.5

Задача 6*. Построим треугольник ABC, углы которого меньше 120°. На его сторонах построим равносторонние треугольники. Опишем около них окружности. Отметим их точку пересечения. Найдём величины углов, под которыми виды стороны треугольника из этой точки. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.6.

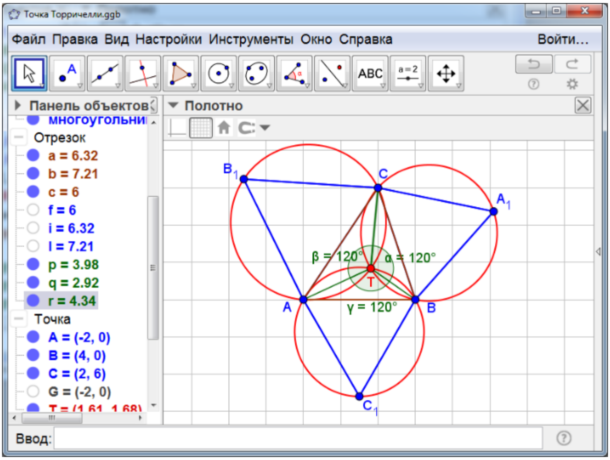

Рис. 5.6

Задача 7*. Построим треугольник ABC. Построим вписанную окружность. Отметим точки касания этой окружности со сторонами треугольника. Соединим отрезками вершины треугольника с точками касания. Отметим их точку пересечения. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.7.

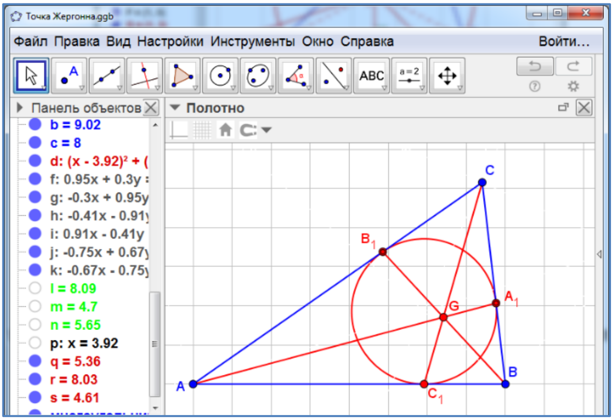

Рис. 5.7

Задача 8*. Построим треугольник ABC. Построим вневписанные окружности. Отметим точки касания этих окружностей со сторонами треугольника. Соединим отрезками вершины треугольника с точками касания. Отметим их точку пересечения. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль линий. Результат изображён на рисунке 5.8.

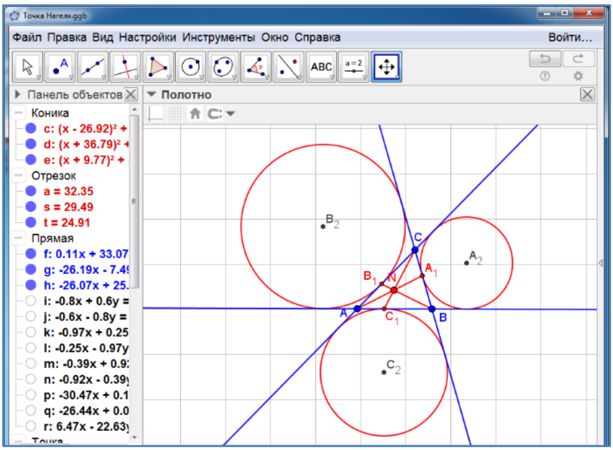

Рис. 5.8

Задача 9*. Построим треугольник ABC. Отметим середины его сторон. Проведём высоты треугольника и отметим их точку пересечения - ортоцентр. Отметим середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром. Проведём окружность через какие-нибудь три полученные точки. Она пройдёт и через остальные шесть точек. Скроем обозначения построенных линий. Изменим цвет, толщину и стиль точек и линий. Результат изображён на рисунке 5.9.

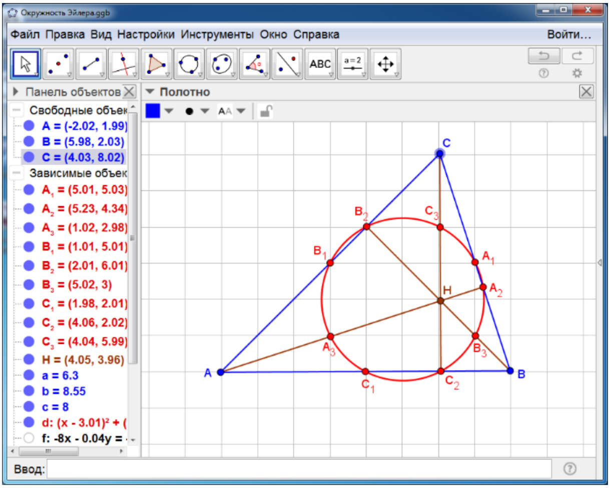

Рис. 5.9

Задача 10*. Построим треугольник ABC. Опишем около него окружность. Выберем точку D на этой окружности. Проведём через неё прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, и отметим их точки пересечения E, F, G с этими сторонами или их продолжениями. Проведём прямую через две из этих точек. Убедимся в том, что третья точка также принадлежит этой прямой (рис. 5.10).

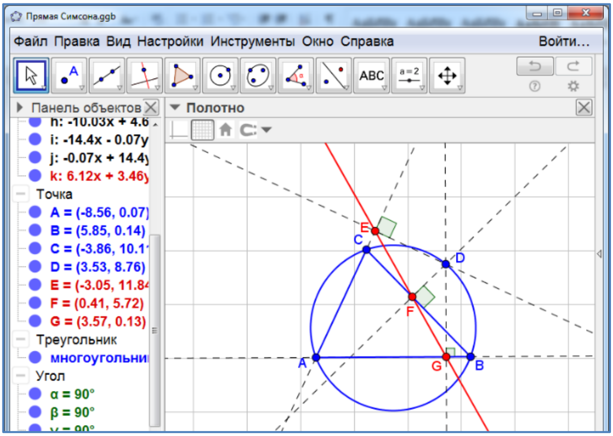

Рис. 5.10

Задача 11*. Построим треугольник ABC. Проведём медианы AA_1, BB_1, CC_1. Через вершины A, B, C проведем биссектрисы. Построим отрезки, симметричные медианам относительно соответствующих биссектрис (рис. 5.11). Убедимся в том, что они пересекаются в одной точке L.

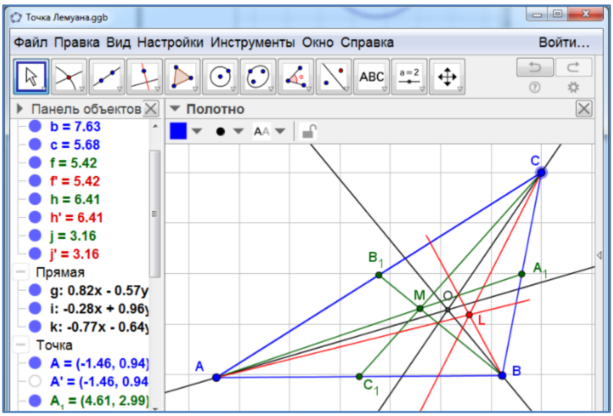

Рис. 5.11

Задача 12*. Построим треугольник ABC. Проведём медианы AA_1, BB_1, CC_1. Проведем биссектрисы AA_2, BB_2, CC_2. Построим точки A_2', B_2',

C_2', симметричные основаниям биссектрис A_2, B_2, C_2 относительно соответствующих оснований медиан A_1, B_1, C_1 (рис. 5.12). Соединим отрезками вершины треугольника с соответствующими построенными точками. Убедимся в том, что они пересекаются в одной точке P.

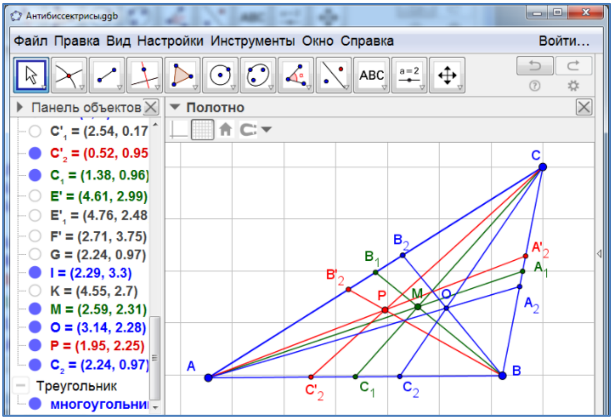

Рис. 5.12

6. РАВЕНСТВО ФИГУР. ДВИЖЕНИЯ

Задача 1. Измерения длины показывают, что данные отрезки равны (рис. 6.1).

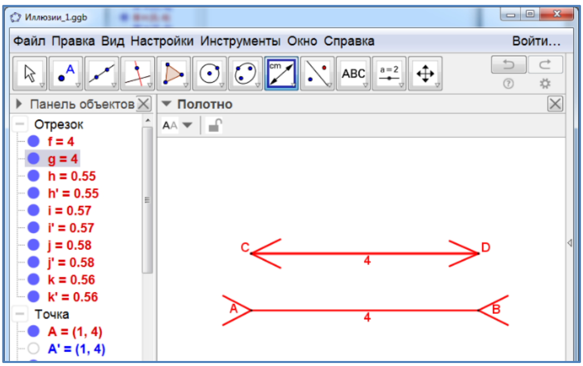

Рис. 6.1

Задача 2. Измерения длины показывают, что данные отрезки равны (рис. 6.2).

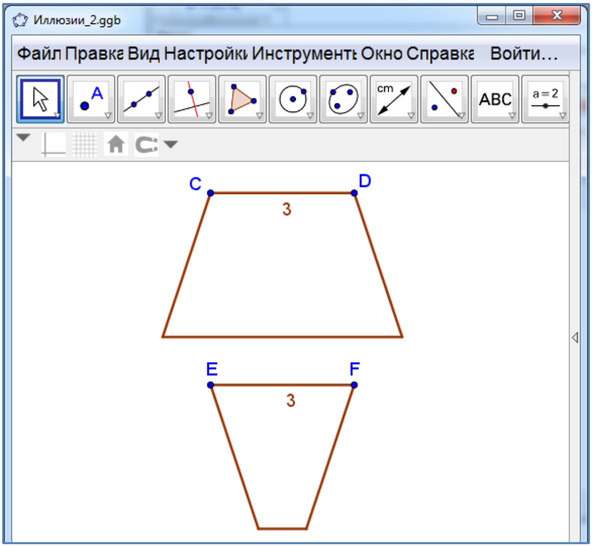

Рис. 6.2

Задача 3. Измерения длины показывают, что данные отрезки равны (рис. 6.3).

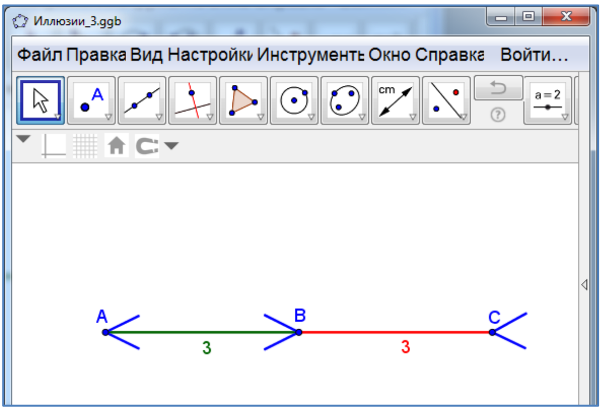

Рис. 6.3

Задача 4. Измерения длины показывают, что данные отрезки равны (рис. 6.4).

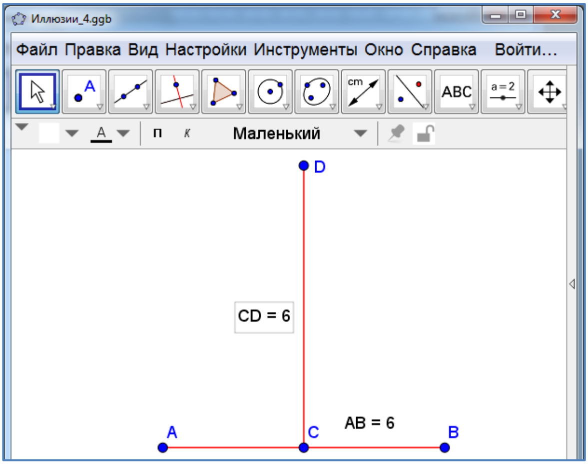

Рис. 6.4

Задача 5. Измерения длины показывают, что данные отрезки равны (рис. 6.5).

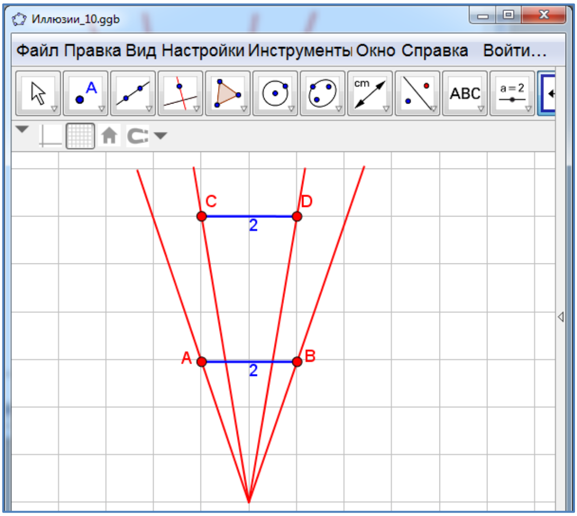

Рис. 6.5

Задача 6. Радиусы этих кругов равны половине стороны квадратных клеток (рис. 6.6).

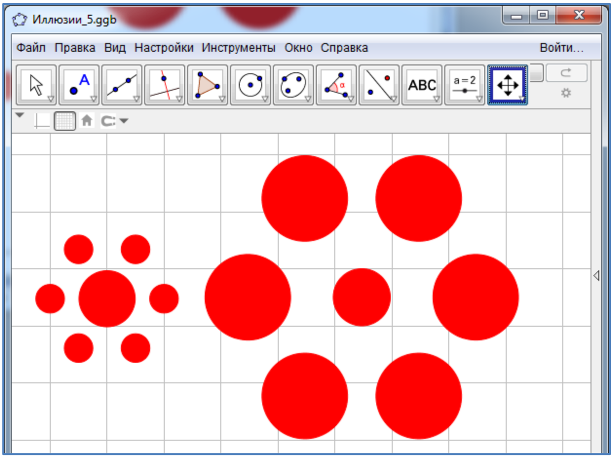

Рис. 6.6

Задача 7. Измерения длин сторон треугольников показывают, что данные треугольники равны (рис. 6.7).

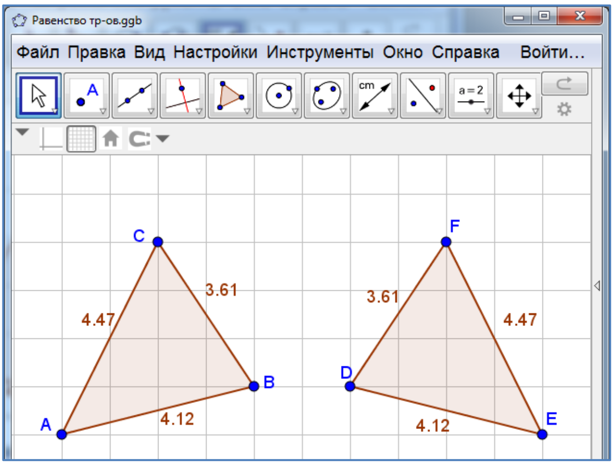

Рис. 6.7

Задача 8. Измерения длин сторон треугольников показывают, что данные треугольники равны (рис. 6.8).

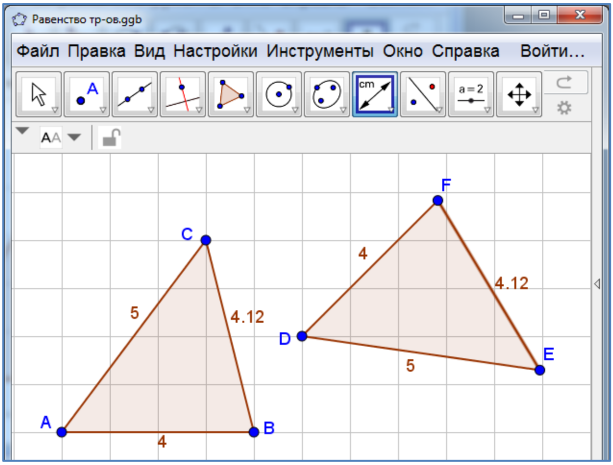

Рис. 6.8

Задача 9. Проведём отрезок CC′. Построим середину O этого отрезка. Непосредственная проверка показывает, что она является искомым центром симметрии (рис. 6.9).

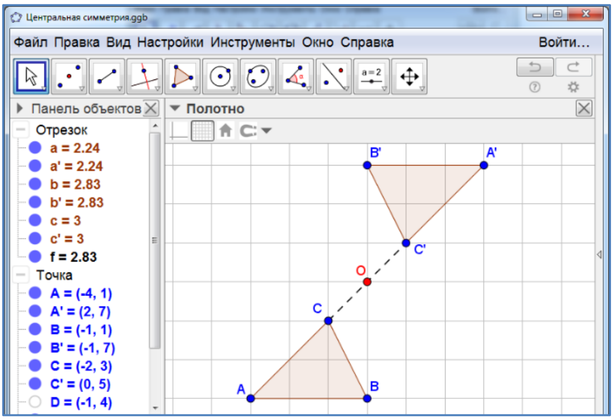

Рис. 6.9

Задача 10. Искомый центр симметрии изображён на рисунке (рис. 6.10).

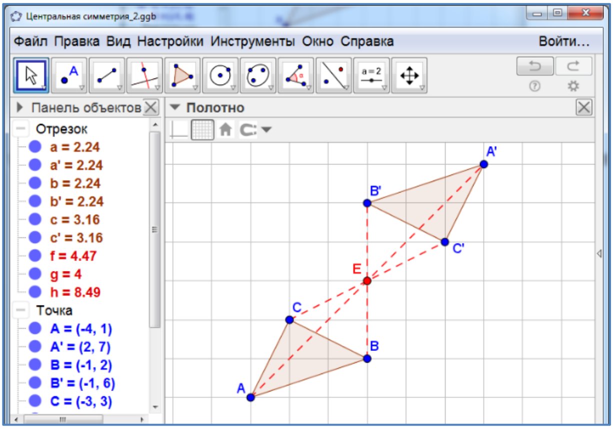

Рис. 6.10

Задача 11. Проведём отрезки AA′, BB′. Построим серединные перпендикуляры к этим отрезкам. Найдём точку O пересечения этих серединных перпендикуляров. Непосредственная проверка показывает, что она является искомым центром поворота (рис. 6.11). Угол поворота равен 120°.

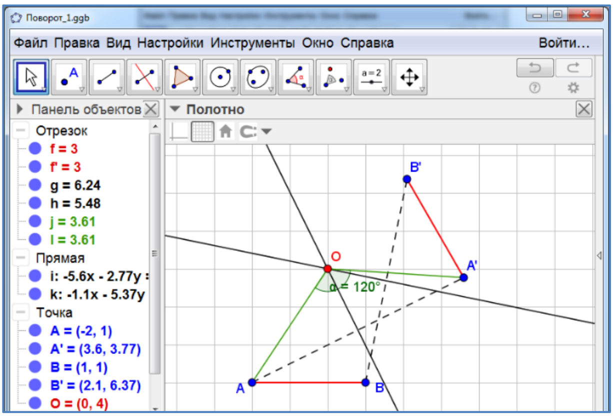

Рис. 6.11

Задача 12. Искомый центр поворота изображён на рисунке (рис. 6.12). Угол поворота равен 90º.

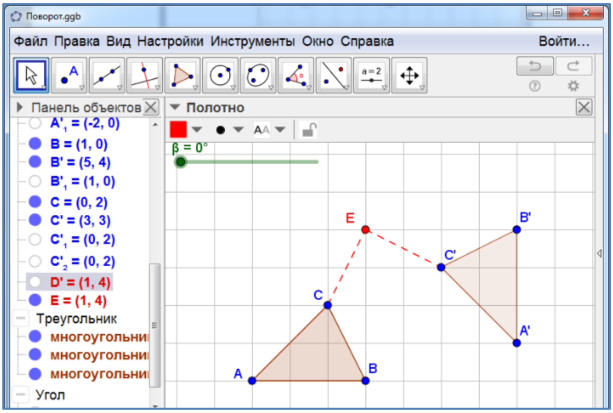

Рис. 6.12

Задача 13. Проведём отрезок CC′. Построим серединный перпендикуляр к этому отрезку. Непосредственная проверка показывает, что он является искомой осью симметрии (рис. 6.13).

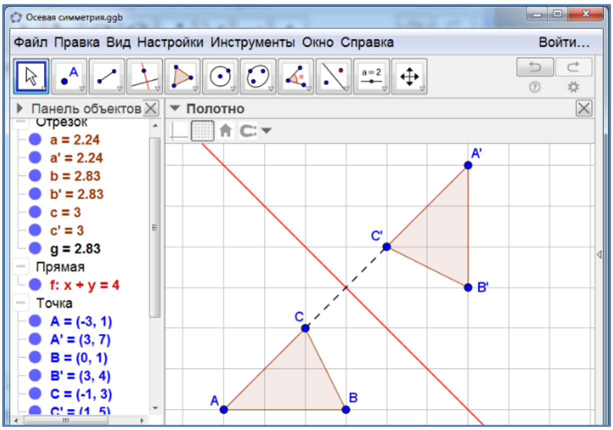

Рис. 6.13

Задача 14. Треугольник ABC переводится в треугольник FED последовательным выполнением поворота вокруг точки G и симметрии относительно прямой EF (рис. 6.14).

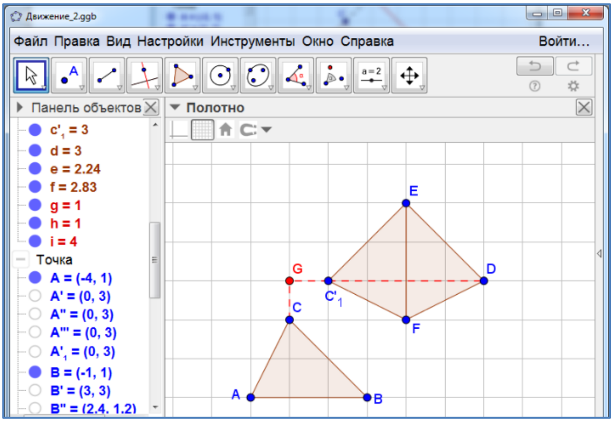

Рис. 6.14

Задача 15. Правильный шестиугольник (рис. 6.15).

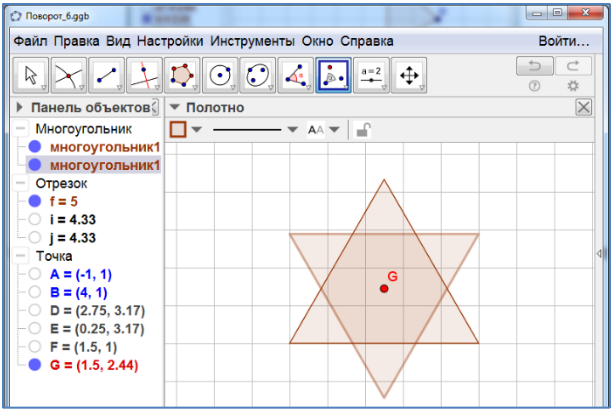

Рис. 6.15

Задача 16. Правильный восьмиугольник (рис. 6.16).

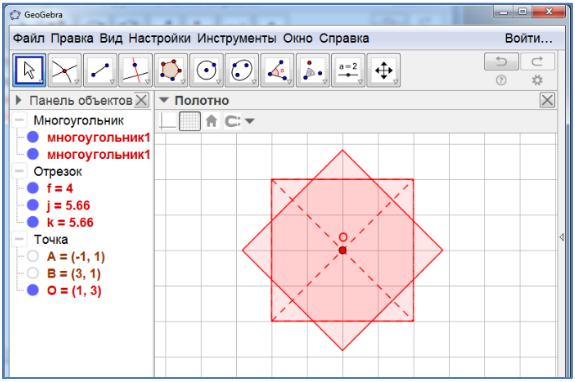

Рис. 6.16

7. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Построим отрезок AB. Проведём прямую c, параллельную AB. Отметим на этой прямой точку C. Соединим её отрезками с точками A и B (рис. 7.1). Перемещая точку C по прямой c, найдём положение, при котором периметр треугольника ABC наименьший. Соответствующая точка C показана на рисунке 7.1.

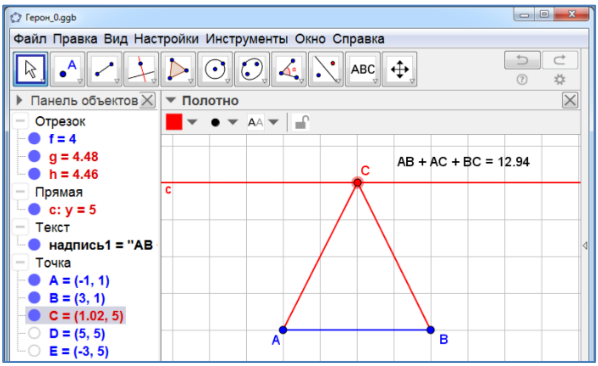

Рис. 7.1

Задача 2. Искомая точка C изображена на рисунке 7.2. Для любой другой точки C′ сумма AC′ + C′B будет больше суммы AC + CB.

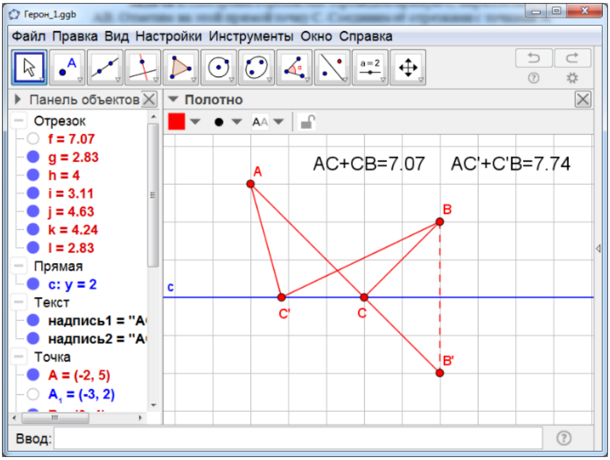

Рис. 7.2

Задача 3. Искомая точка C изображена на рисунке 7.3. Для любой другой точки C′ сумма AC′ + C′B будет больше суммы AC + CB.

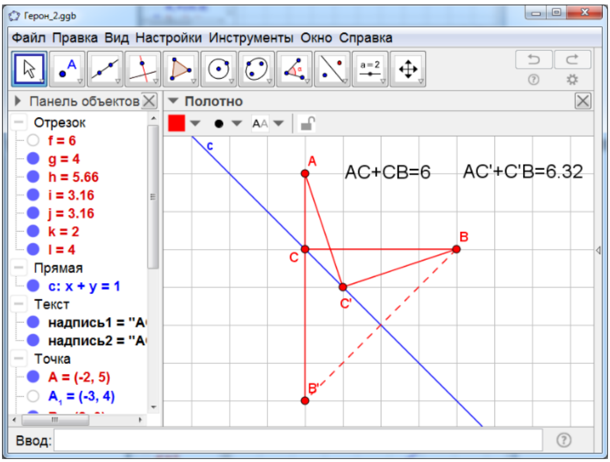

Рис. 7.3

Задача 4. Искомые точки A и B изображены на рисунке 7.4. Для любых других точек A′ и B′ периметр треугольника A′B′C будет больше периметра треугольника ABC.

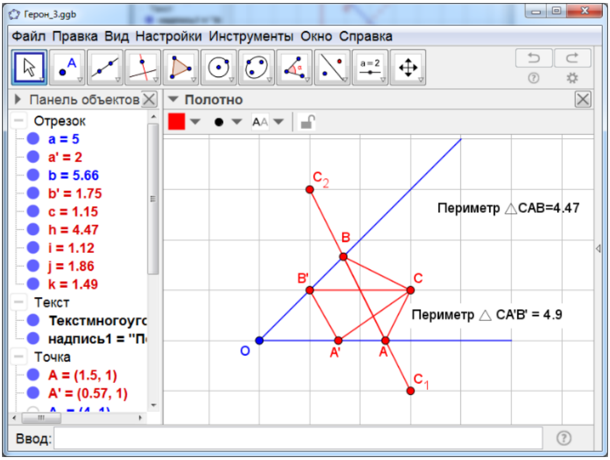

Рис. 7.4

Задача 5. Искомой точкой является точка Торричелли (рис. 7.5).

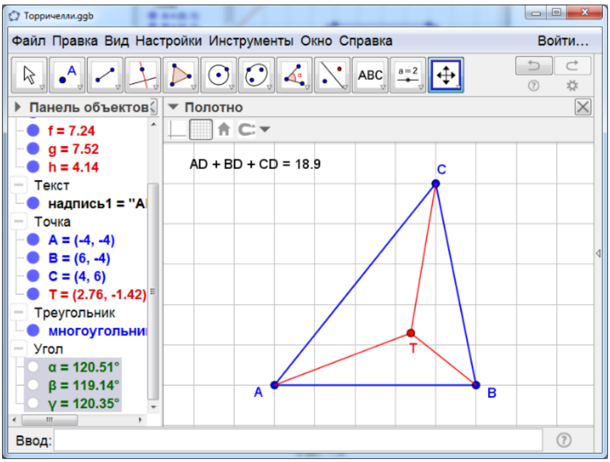

Рис. 7.5

Задача 6. Искомой точкой является точка R, для которой углы A_1RB, A_1RC равны 120° (рис. 7.6). Для доказательства этого повернём отрезки A_1R, BR, CR вокруг точки C на угол 60°. Тогда сумма RA_1 + RB + RC равна сумме A_1R + RR′ + R′B′. Она является наименьшей, если точки A_1, R, R′, B′ принадлежат одной прямой. Это выполняется, если углы A_1RB, A_1RC равны 120°

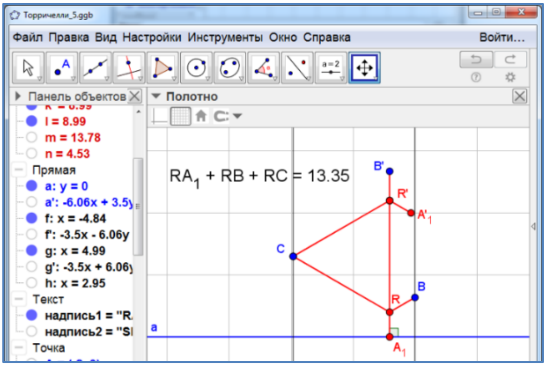

Рис. 7.6

Задача 7. а) Повернём прямые *b*, *c*, точку *R* и отрезки *RA*, *RB*, *RC* вокруг точки *A* на угол 60° (рис. 7.7,а). Сумма расстояний от точки *R* до прямых *b*, *c* и точки *A* будет равна длине ломаной *CRR′B′*. Эта сумма будет наименьшей, если точка *R* совпадает с точкой *A*;

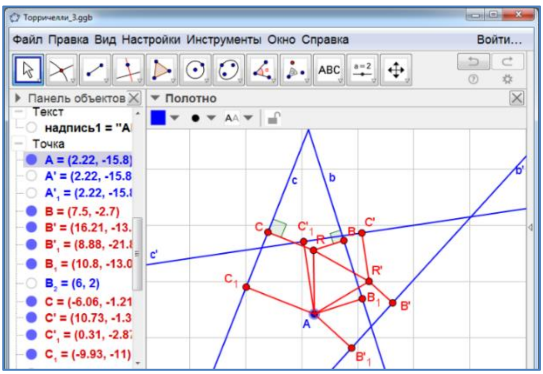

Рис. 7.7,а

б) повернём прямые b, c, точку R и отрезки RA, RB, RC вокруг точки A на угол 60° (рис. 7.7,б). Сумма расстояний от точки R до прямых b, c и точки A будет равна длине ломаной $CRR'B'$. Эта сумма будет наименьшей, если точка R принадлежит отрезку AB_1, образующий с прямой c угол 30°;

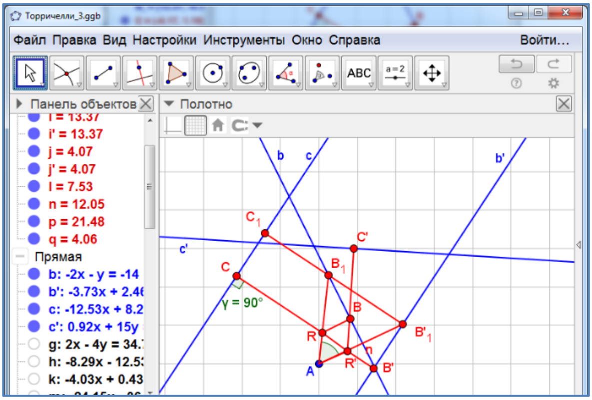

Рис. 7.7,б

Задача 8. а) Искомыми точками являются все точки треугольника ABC (рис. 7.8,а);

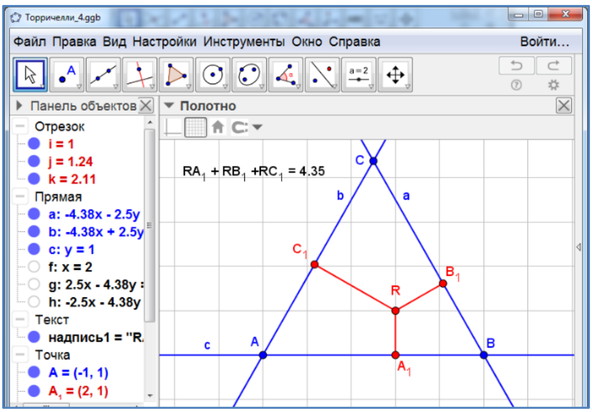

Рис. 7.8,а

б) Искомой точкой является вершина треугольника, в которой угол наибольший (рис. 7.8, б).

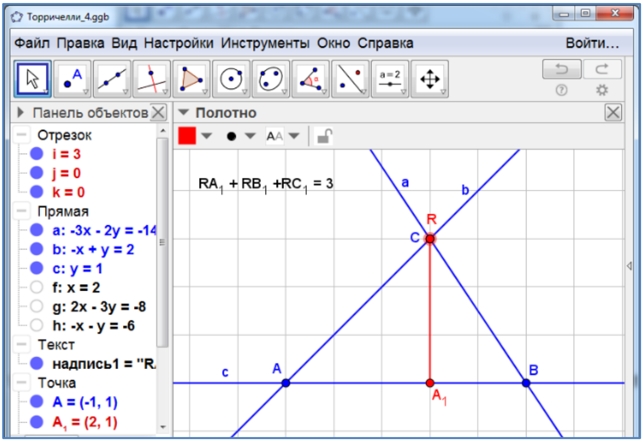

Рис. 7.8,б

Задача 9. Искомое положение точек показано на рисунке 7.9.

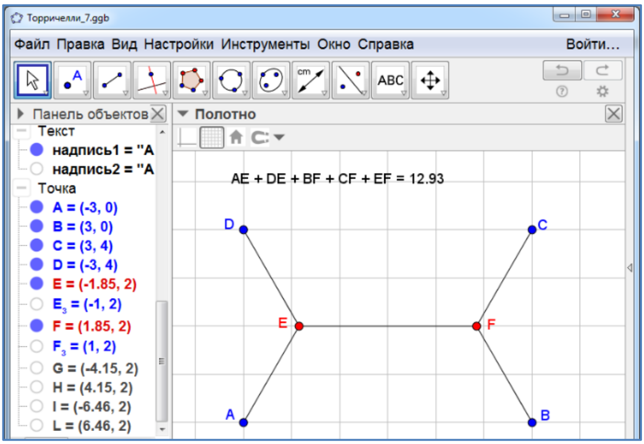

Рис. 7.9

Задача 10. Искомое положение моста показано на рисунке 7.10.

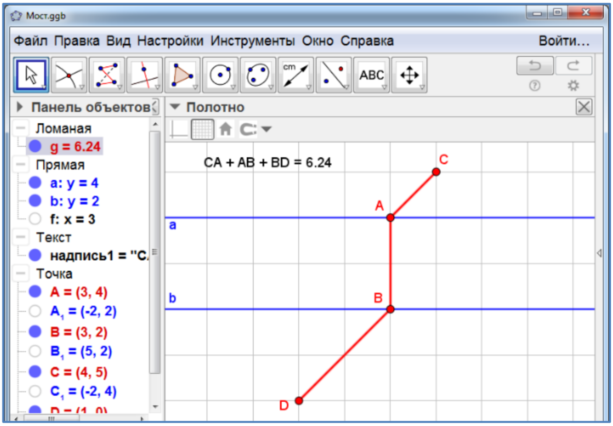

Рис. 7.10

Задача 11. На прямой с отметим точку С. Проведём через неё касательные к окружности. Установим угол между ними. Перемещая точку С по прямой с, найдём её положение, при котором угол между касательными наибольший. Соответствующая точка С показана на рисунке 7.11. Угол равен 60º.

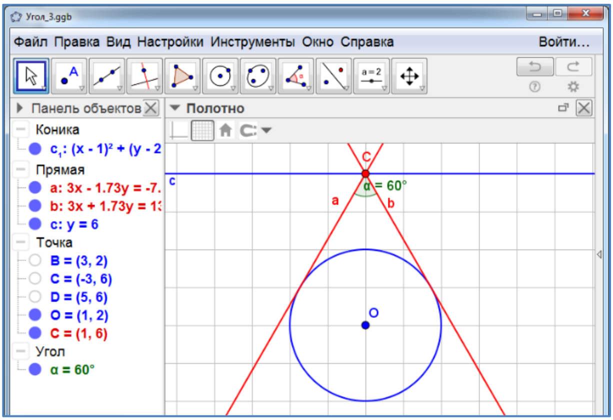

Рис. 7.10

Задача 12. На прямой c отметим точку C. Соединим её отрезками с точками A и B, Перемещая точку C по прямой c, найдём положение, при котором угол ACB наибольший. Соответствующая точка C показана на рисунке 7.12. Угол равен 90°.

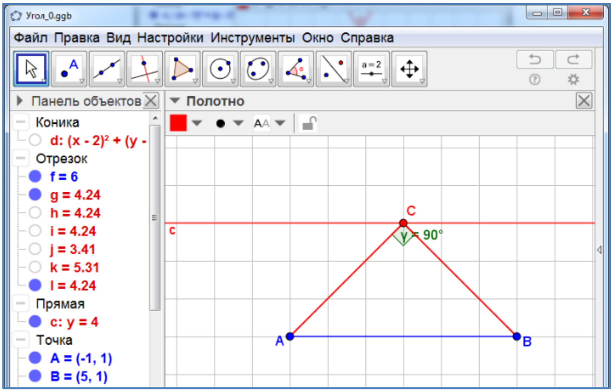

Рис. 7.12

Задача 13. На прямой c отметим точку C. Соединим её отрезками с точками A и B, Перемещая точку C по прямой c, найдём положение, при котором угол ACB наибольший. Соответствующая точка C показана на рисунке 7.13. Угол равен 45°.

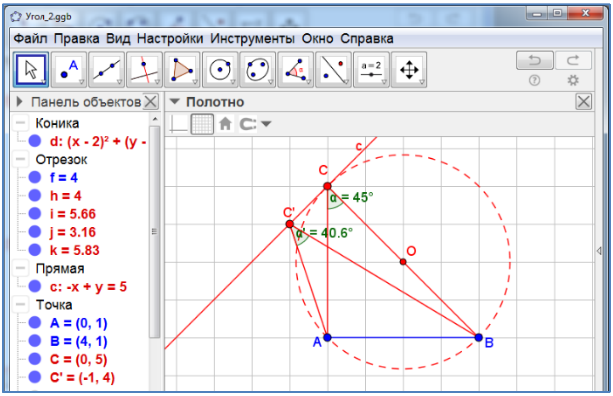

Рис. 7.13

Задача 14. Проведём прямые a: x = 0, b: y = 0, c: x + y = 6. Отметим точку C на прямой c. Опустим из неё перпендикуляры CB и CD на прямые b и a соответственно. Построим прямоугольник ABCD и найдём его площадь. Перемещая точку C по прямой c, установим её положение, при котором площадь наибольшая. Соответствующая точка C показана на рисунке 7.14. Площадь равна 16.

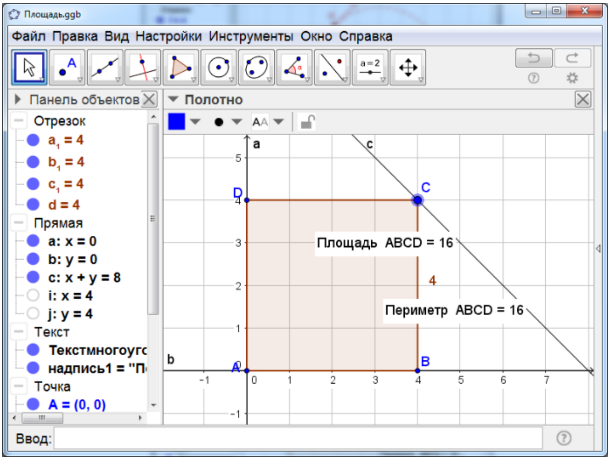

Рис. 7.14

8. ПАРКЕТЫ

Задача 1. Построим правильный шестиугольник. На его стороне построим правильный треугольник. На диагоналях шестиугольника создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных шестиугольников и треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.1.

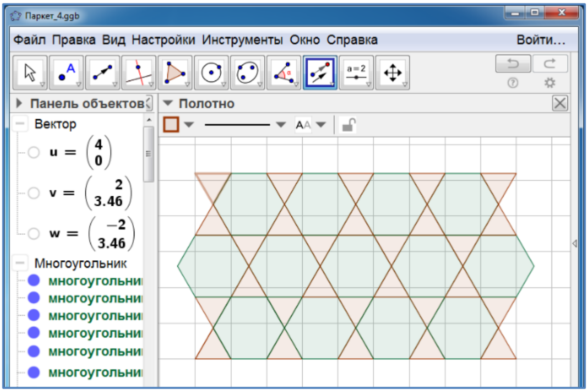

Рис. 8.1

Задача 2. Построим правильный шестиугольник. На его стороне построим правильный треугольник. На диагоналях шестиугольника создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных шестиугольников и треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.2.

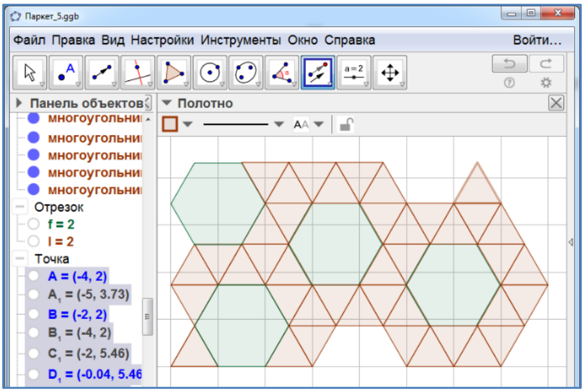

Рис. 8.2

Задача 3. Построим квадрат. На его стороне построим правильный треугольник. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из квадратов и правильных треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.3.

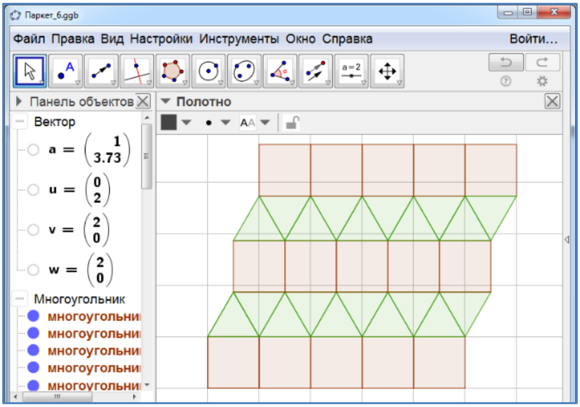

Рис. 8.3

Задача 4. Построим правильный треугольник. На его стороне построим квадрат. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из квадратов и правильных треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.4.

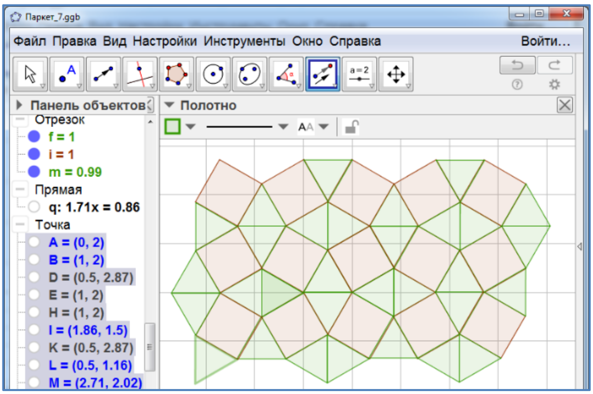

Рис. 8.4

Задача 5. Построим правильный треугольник. На его стороне построим квадрат. На стороне квадрата построим правильный треугольник. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных шестиугольников, квадратов и треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.5.

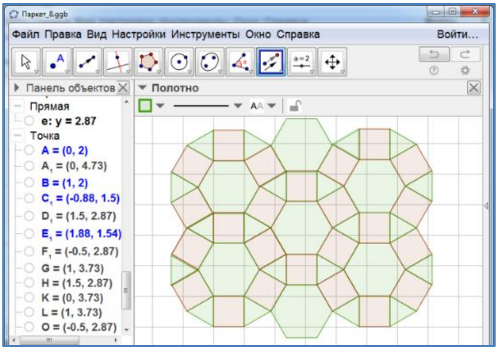

Рис. 8.5

Задача 6. Построим правильный двенадцатиугольник. На его стороне построим правильный треугольник. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных двенадцатиугольников и треугольников. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.6.

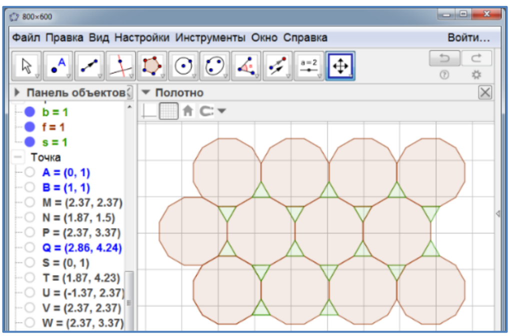

Рис. 8.6

Задача 7. Построим правильный двенадцатиугольник. На его сторонах построим правильный шестиугольник и квадрат. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.7.

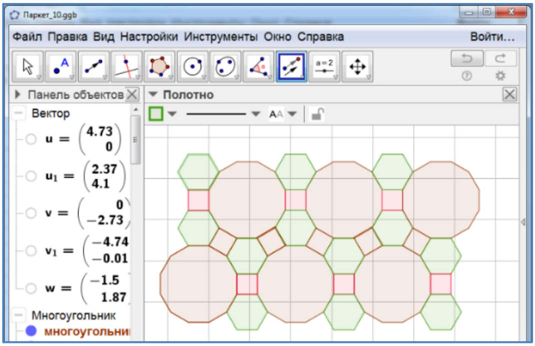

Рис. 8.7

Задача 8. Построим правильный восьмиугольник. На его стороне построим квадрат. Создадим векторы. Используя параллельный перенос на вектор, построим паркет из правильных восьмиугольников и квадратов. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.8.

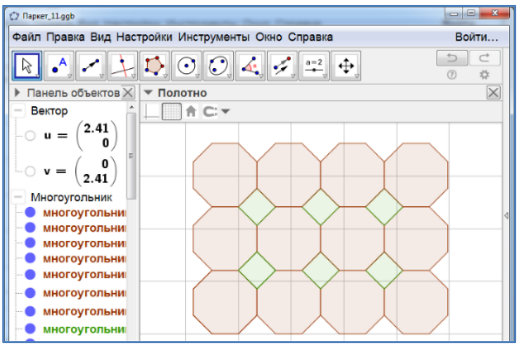

Рис.8.8

Задача 9. Построим выпуклый четырёхугольник. Последующие четырёхугольники получаются из предыдущих центральной симметрией относительно середины сторон или параллельным переносом. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.9.

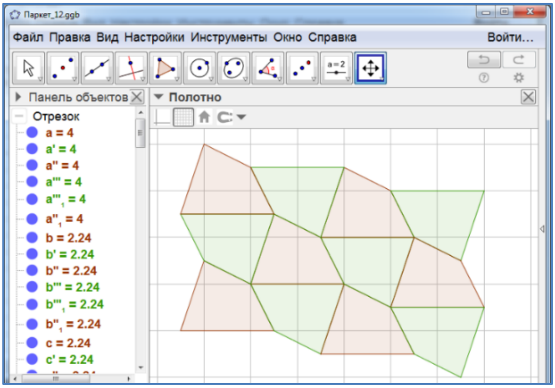

Рис. 8.9

Задача 10. Построим невыпуклый четырёхугольник. Последующие четырёхугольники получаются из предыдущих центральной симметрией относительно середины сторон или параллельным переносом. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.10.

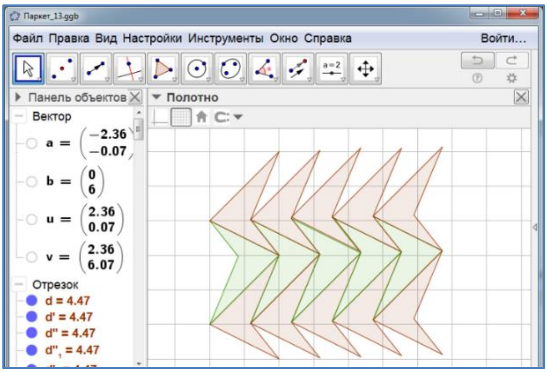

Рис. 8.10

Задача 11. Построим пятиугольник, как показано на рисунке 8.11. Последующие пятиугольники получаются из предыдущих центральной симметрией или параллельным переносом. Цвет и толщину линии можно изменять. Результат изображен на рисунке 8.11.

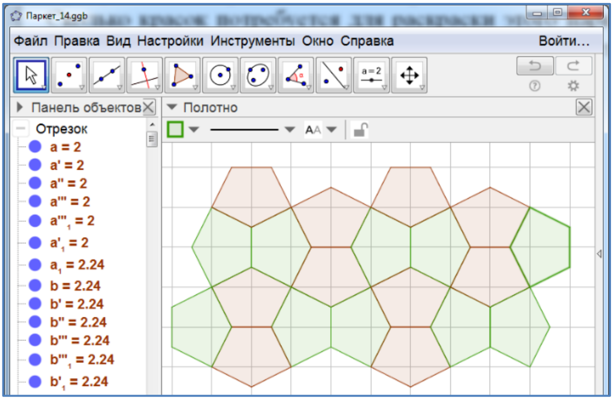

Рис. 8.11

9. КРИВЫЕ

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Задача 1. Верзиера –график функции f(x) = $\frac{a^3}{x^2+a^2}$.

1. Создадим ползунок а.
2. В строке «Ввод» наберём f(x) =a^3/(x^2+a^2).
3. Нажмем «Enter». Получим изображение верзиеры.
4. Коэффициент а можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.1.

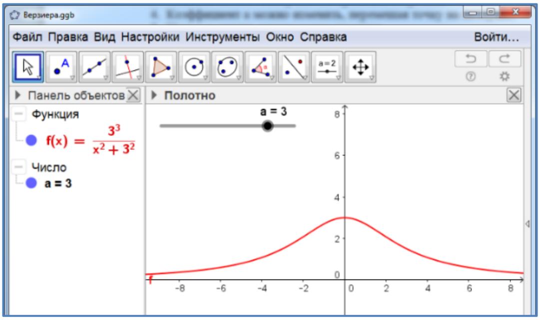

Рис. 9.1

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЕМ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Задача 2. Астроида, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1. Создадим ползунок a.
2. В строке «Ввод» наберём x^(2/3)+y^(2/3)=a^(2/3).
3. Нажмем «Enter». Получим изображение астроиды.
4. Коэффициент a можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.2.

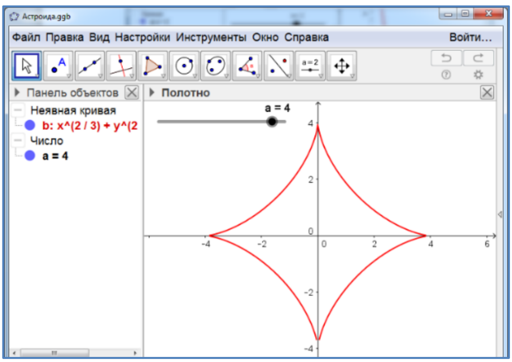

Рис. 9.2

Задача 3. Каппа, $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$.

1. Создадим ползунок a.
2. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)y^2=a^2x^2.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение каппы.
4. Коэффициент a можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.3.

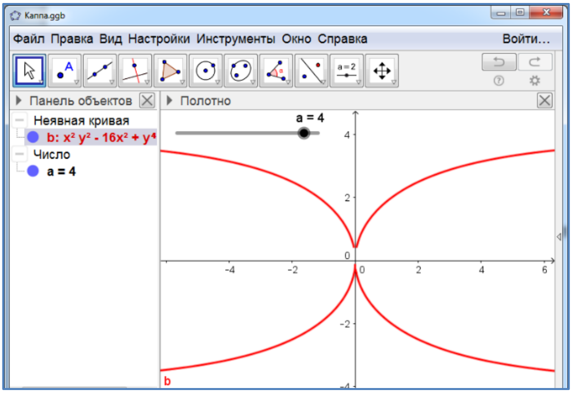

Рис. 9.3

Задача 4. Конхоида Никомеда, $(x^2 + y^2)(y - a)^2 = l^2y^2$.

1. Создадим ползунки a, l.
2. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)(y-a)^2=l^2y^2.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение конхоиды Никомеда.
4. Коэффициент a, l можно изменять, перемещая соответствующие точки на ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.4.

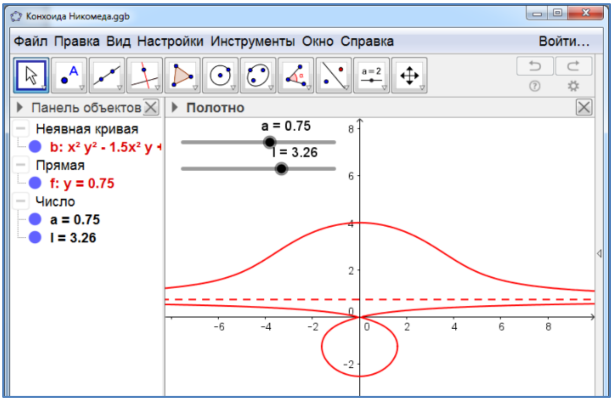

Рис. 9.4

Задача 5. *Лемниската Бернулли*, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

1. Создадим ползунок a.
2. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).
3. Нажмем «Enter». Получим изображение конхоиды Никомеда.
4. Коэффициент a можно изменять, перемещая точку на ползунке.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.5.

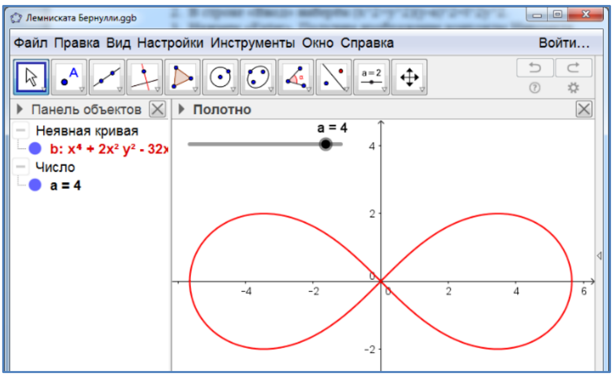

Рис. 9.5

Задача 6. *Лист Декарта*, $x^3 + y^3 - 3a \cdot x \cdot y = 0$.

1. Создадим ползунок а.
2. В строке «Ввод» наберём x^3+y^3-3a*xy=0.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение конхоиды Никомеда.
4. В строке «Ввод» наберём x+y+a=0.
5. Нажмем «Enter». Получим асимптоту конхоиды Никомеда.
6. Коэффициент а можно изменять, перемещая точку на ползунке.
7. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.6.

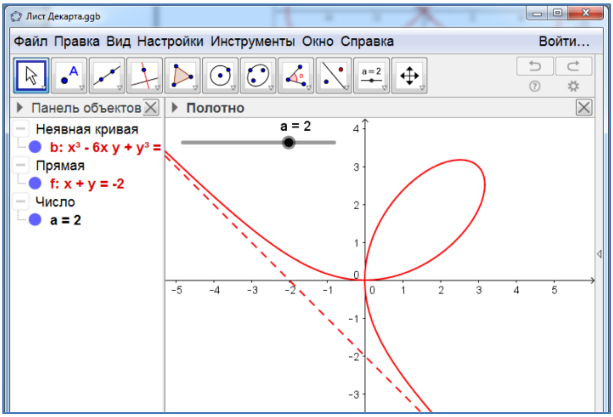

Рис. 9.6

Задача 7. Строфоида, $y^2(2a - x) = (x - a)^2x$.

1. Создадим ползунок а.
2. В строке «Ввод» наберём y^2(2a-x)=(x-a)^2x.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение Строфоиды.
4. В строке «Ввод» наберём x=2a.
5. Нажмем «Enter». Получим асимптоту Строфоиды.
6. Коэффициент а можно изменять, перемещая точку на ползунке.
7. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.7.

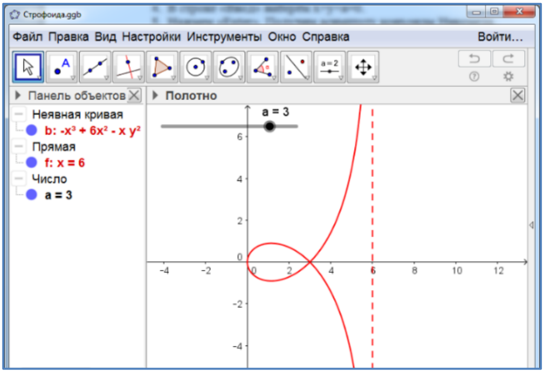

Рис. 9.7

Задача 8. Улитка Паскаля, $(x^2 + y^2 – 2a·x)^2 = l^2(x^2 + y^2)$.

1. Создадим ползунки a, l.
2. В строке «Ввод» наберём (x^2+y^2-2ax)^2=l^2(x^2+y^2).
3. Нажмем «Enter». Получим изображение конхоиды Никомеда.
4. Коэффициент a, l можно изменять, перемещая соответствующие точки на ползунках.
5. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.8.

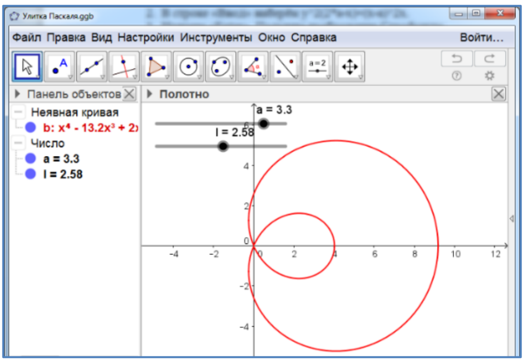

Рис. 9.8

Задача 9. Циссоида Диоклеса, $y^2(2a - x) = x^3$.

1. Создадим ползунок a.
2. В строке «Ввод» наберём y^2(2a-x)=x^3.
3. Нажмем «Enter». Получим изображение Строфоиды.
4. В строке «Ввод» наберём x=2a.
5. Нажмем «Enter». Получим асимптоту циссоиды Диоклеса.
6. Коэффициент a можно изменять, перемещая точку на ползунке.
7. Цвет и толщину линии можно изменять.
8. Результат изображен на рисунке 9.9.

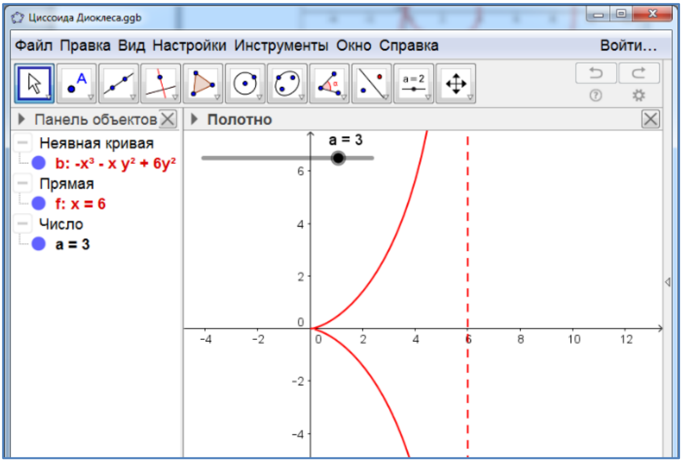

Рис. 9.9

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЕМ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Задача 10. Искомая кривая изображена на рисунке 9.10.

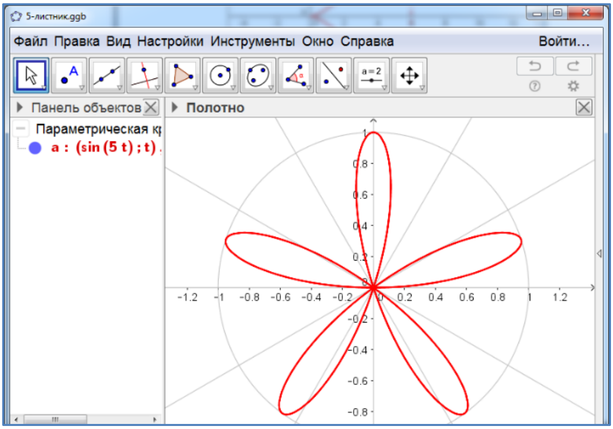

Рис. 9.10

Задача 11. Искомая кривая изображена на рисунке 9.11.

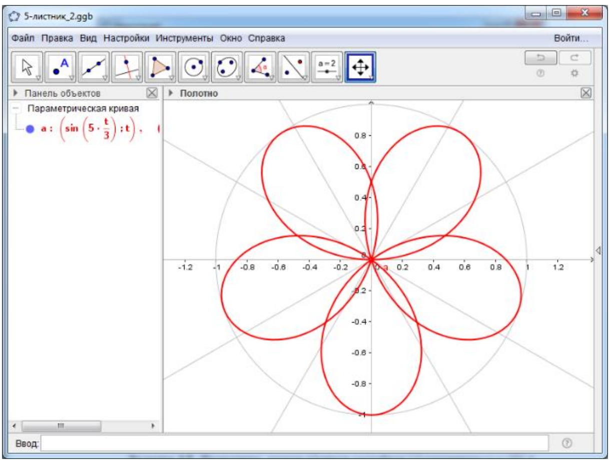

Рис. 9.11

Задача 12. Искомой кривой является окружность (рис. 9.12). Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать (cos(t);t) и нажать «Enter».

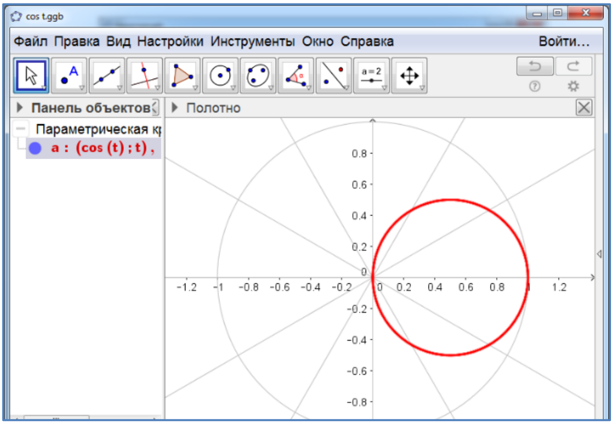

Рис. 9.12

Задача 13. Искомой кривой является окружность (рис. 9.13). Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать (sin(t);t) и нажать «Enter».

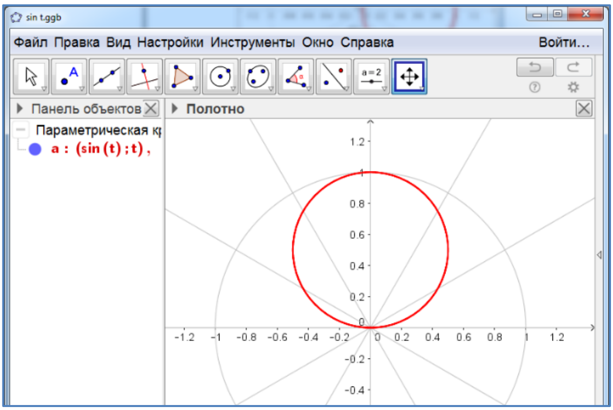

Рис. 9.13

Задача 14. $r = at^2, 0 \leq t \leq 8\pi$.

1. Создадим ползунок a, ($0 < a < 1$).
2. В строке «Ввод» наберём Кривая[(a*t^2;t),t,0,8*Pi].
3. Нажмем «Enter».
4. На рисунке 9. 14 изображена кривая для случая a = 0.5.

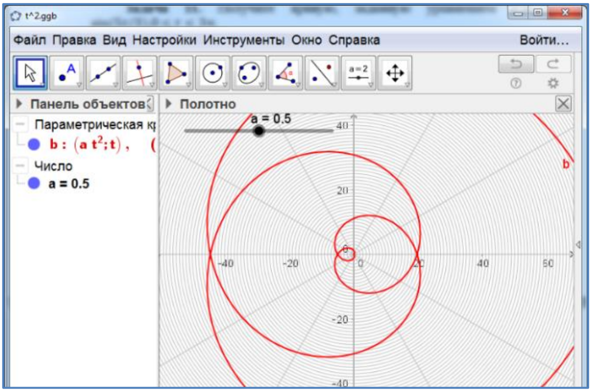

Рис. 9.14

Задача 15. Искомая кривая изображена на рисунке 9.15. Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать Кривая[(1/t;t),t,0.5,8*Pi] и нажать «Enter».

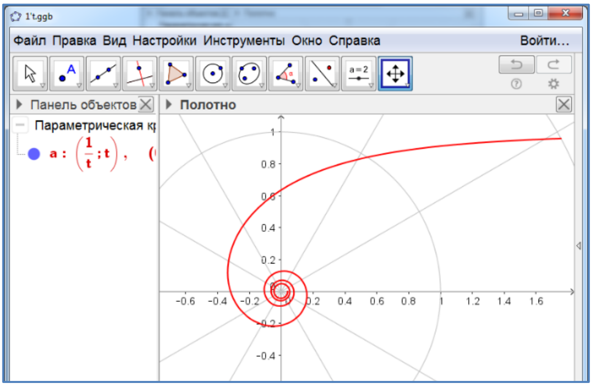

Рис. 9.15

Задача 16. Искомой кривой является прямая (рис. 9.16). Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать (1/cos(t);t) и нажать «Enter».

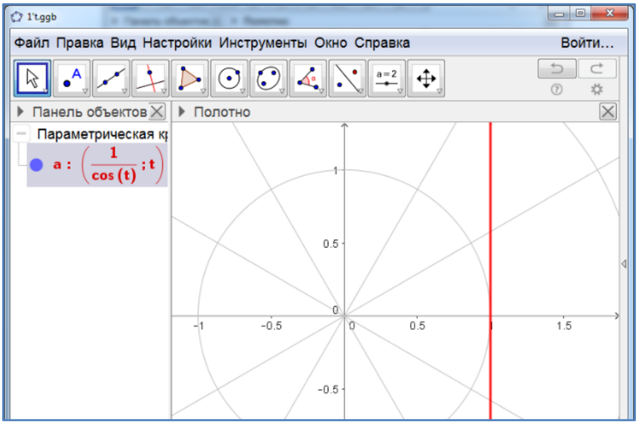

Рис. 9.16

Задача 17. Искомой кривой является прямая (рис. 9.17). Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать (1/sin(t);t) и нажать «Enter».

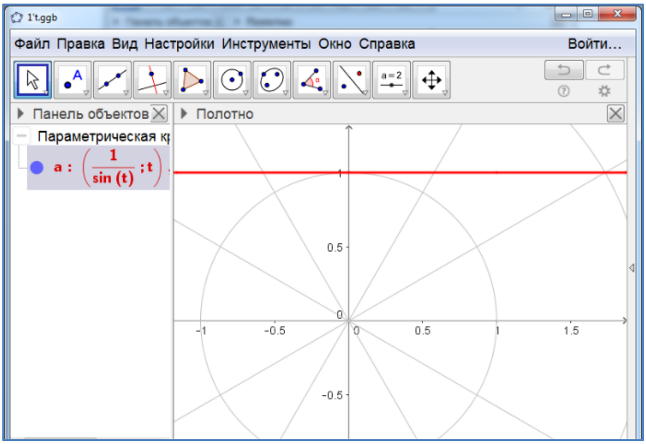

Рис. 9.17

Задача 18. Искомая кривая изображена на рисунке 9.18. Для её получения в строке «Ввод» достаточно набрать $(1+\cos 3t + \sin^2 3t; t)$ и нажать «Enter».

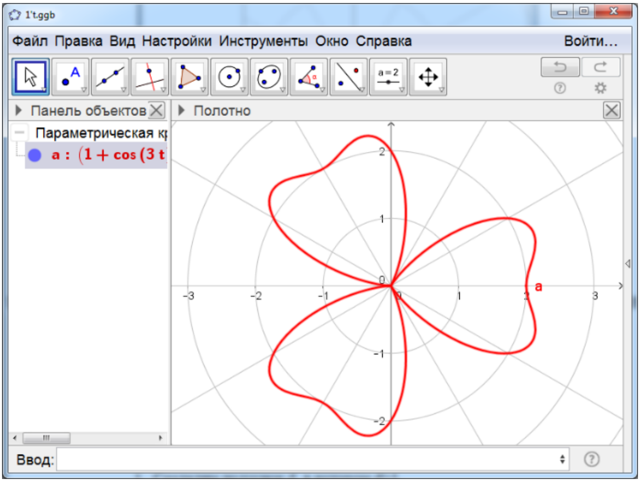

Рис. 9.18

КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Задача 19. Удлинённая циклоида, $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin t\,, \\ y = 1 - d \cdot \cos t\,. \end{cases}$

1. Создадим ползунок d, в котором d>1.
2. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-dsin(t).
3. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-dcos(t).
5. Нажмем «Enter».
6. Скроем графики функций f(t)=t-dsin(t), g(t)=1-dcos(t).
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,-Pi,3Pi].

8. Нажмем «Enter». Получим удлинённую циклоиду (рис. 9.19).

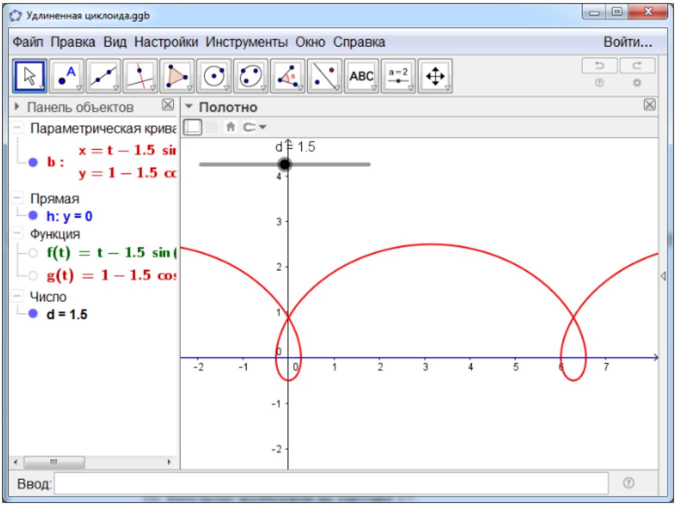

Рис. 9.19

Задача 20. Укороченная циклоида, $\begin{cases} x = t - \mathrm{d} \cdot \sin t\,, \\ y = 1 - d \cdot \cos t\,. \end{cases}$

1. Создадим ползунок d, в котором 0<d<1.
2. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-dsin(t).
3. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-dcos(t).
5. Нажмем «Enter».
6. Скроем графики функций f(t)=t-dsin(t), g(t)=1-dcos(t).
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,-Pi,3Pi].
8. Нажмем «Enter». Получим удлинённую циклоиду.
9. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.20.

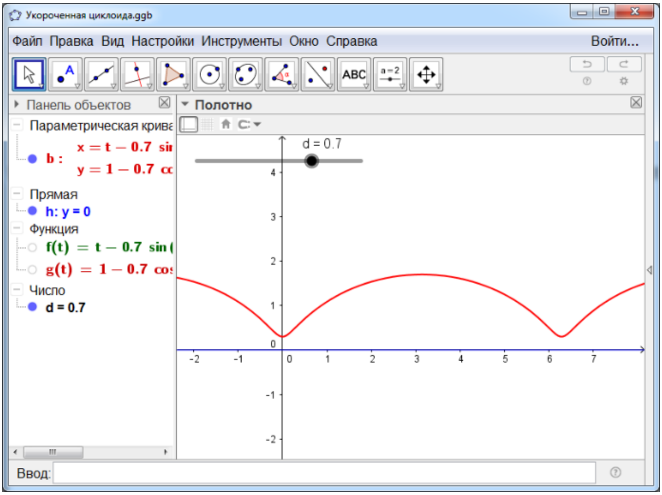

Рис. 9.20

Задача 21. Удлинённая кардиоида, $\begin{cases} x = 2\cos t - d \cdot \cos 2t, \\ y = 2\sin t - d \cdot \sin 2t. \end{cases}$

1. Создадим ползунок d, в котором d>1.
2. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2cos(t) – dcos(2t).
3. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)=2sin(t) – dsin(2t).
5. Нажмем «Enter».
6. Скроем графики функций f(t) = 2cos(t) - cos(2t), g(t)= 2sin(t) - sin(2t).
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,0,2Pi].
8. Нажмем «Enter». Получим удлинённую кардиоиду.
9. Цвет и толщину линии можно изменять.
10. Для случая d=1,5 результат изображен на рисунке 9.21.

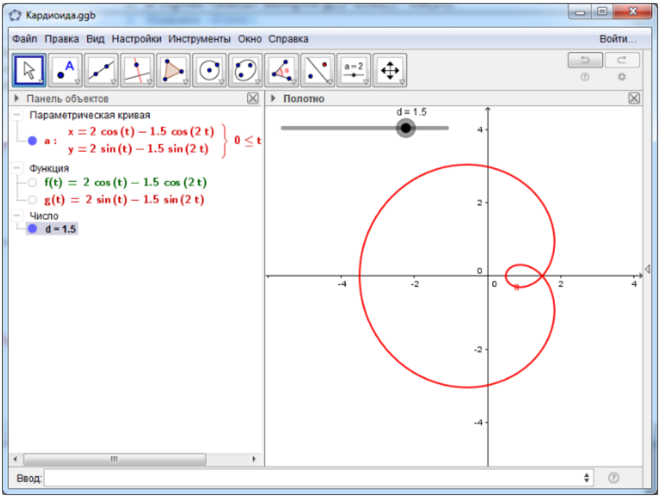

Рис. 9.21

Задача 22. Укороченная кардиоида, $\begin{cases} x = 2\cos t - d \cdot \cos 2t, \\ y = 2\sin t - d \cdot \sin 2t. \end{cases}$

1. Создадим ползунок d, в котором 0<d<1.
2. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2cos(t) – dcos(2t).
3. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)=2sin(t) – dsin(2t).
5. Нажмем «Enter».
6. Скроем графики функций f(t) = 2cos(t) - cos(2t), g(t)= 2sin(t) - sin(2t).
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,0,2Pi].
8. Нажмем «Enter». Получим удлинённую кардиоиду.
9. Цвет и толщину линии можно изменять.
10. Для случая d=0,75 результат изображен на рисунке 9.22.

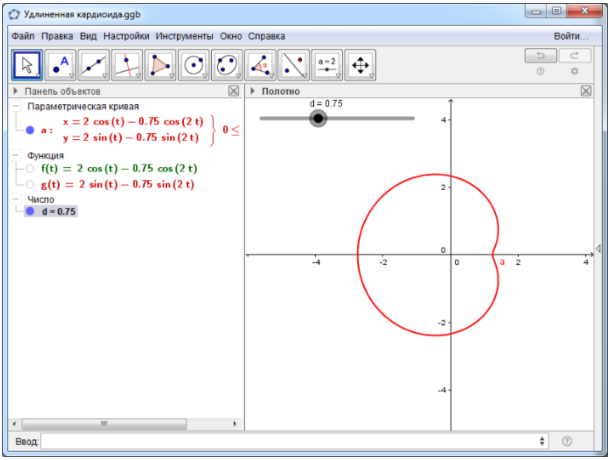

Рис. 9.22

Задача 23. Эпициклоида, $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin(\frac{n+m}{n}t). \end{cases}$

1. В строке «Ввод» наберём n=5. Нажмем «Enter».
2. В строке «Ввод» наберём m=3. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» f(t) = (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
5. Скроем графики функций f(t)= (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n), g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n).
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,0,10Pi].
7. Нажмем «Enter». Получим кардиоиду.
8. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.23.

Значения n и m можно менять, получая различные эпициклоиды.

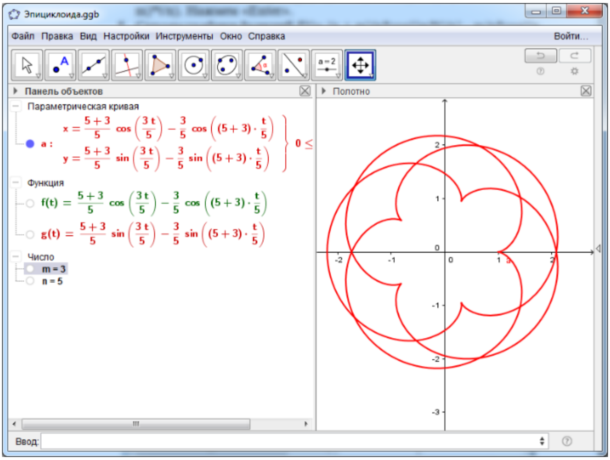

Рис. 9.23

Задача 24. Гипоциклоида, $\begin{cases} x = \frac{n+m}{n}\cos\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\cos(\frac{n+m}{n}t), \\ y = \frac{n+m}{n}\sin\left(\frac{m}{n}t\right) - \frac{m}{n}\sin(\frac{n+m}{n}t). \end{cases}$

1. В строке «Ввод» наберём n=5. Нажмем «Enter».
2. В строке «Ввод» наберём m=-2. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» f(t) = (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
5. Скроем графики функций f(t)= (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n), g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n).
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t),g(t),t,0,10Pi].
7. Нажмем «Enter». Получим кардиоиду.
8. Цвет и толщину линии можно изменять.

Результат изображен на рисунке 9.24.

Значения n и m можно менять. При отрицательных m получаются различные гипоциклоиды.

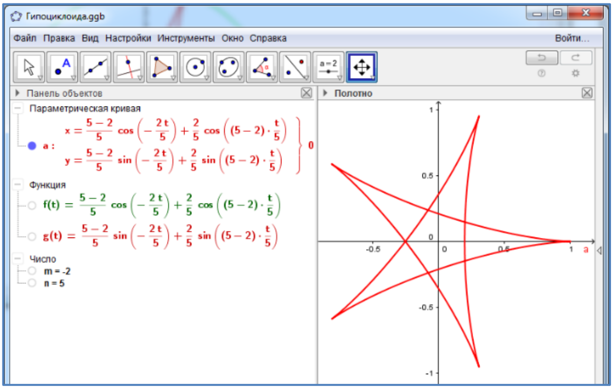

Рис. 9.24

ТРАЕКТОРИИ

Задача 25. Удлинённая циклоида – траектория движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём d=1,5. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём y=0. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-dsin(t). Нажмем «Enter».
5. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-dcos(t). Нажмем «Enter».
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
7. Появится часть циклоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
8. В строке «Ввод» наберём A=(a, 1). Нажмём «Enter».
9. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
10. Построим отрезок с концами A, B.
11. Построим окружность с центром A и точкой B.
12. Уберём обозначения точек A и B.

13. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
14. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
15. Значение d, цвет и толщину линий можно изменять.
16. Один из моментов движения изображен на рисунке 9.25.

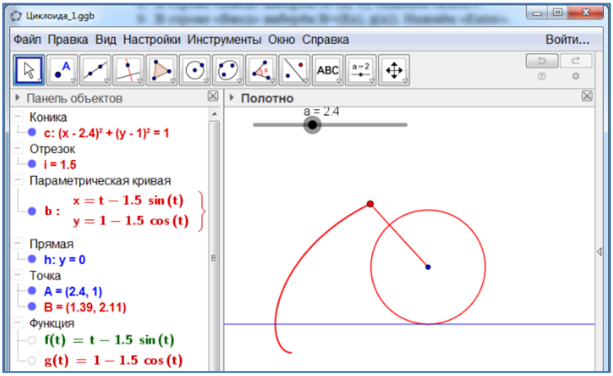

Рис. 9.25

Задача 26. Укороченная циклоида– траектория движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по прямой.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём d=0,5. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём y=0. Нажмем «Enter».
4. В строке «Ввод» наберём f(t)=t-dsin(t). Нажмем «Enter».
5. В строке «Ввод» наберём g(t)=1-dcos(t). Нажмем «Enter».
6. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
7. Появится часть циклоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
8. В строке «Ввод» наберём A=(a, 1). Нажмём «Enter».
9. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».

10. Построим отрезок с концами A, B.
11. Построим окружность с центром A и точкой B.
12. Уберём обозначения точек A и B.
13. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
14. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
15. Значение d, цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.26.

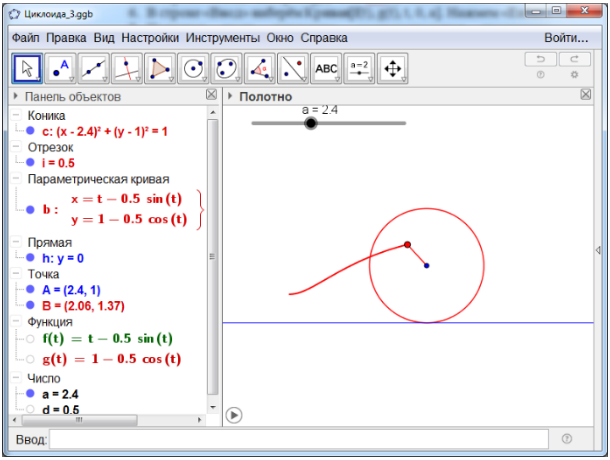

Рис. 9.26

Задача 27. Удлинённая кардиоида – траектория движения точки, закреплённой на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём d=1.5. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём A=(0, 0). Нажмем «Enter».
4. Построим окружность с центром A и радиусом 1.

5. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2cos(t) – dcos(2t). Нажмем «Enter».
6. В строке «Ввод» наберём g(t)= 2sin(t) – dsin(2t). Нажмем «Enter».
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
8. Появится часть кардиоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
9. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
10. В строке «Ввод» наберём C=(2cos(a), 2sin(a)). Нажмём «Enter».
11. Построим отрезок с концами B, C.
12. Построим окружность с центром C и радиусом 1.
13. Уберём обозначения точек B и C.
14. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
15. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
16. Цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.27.

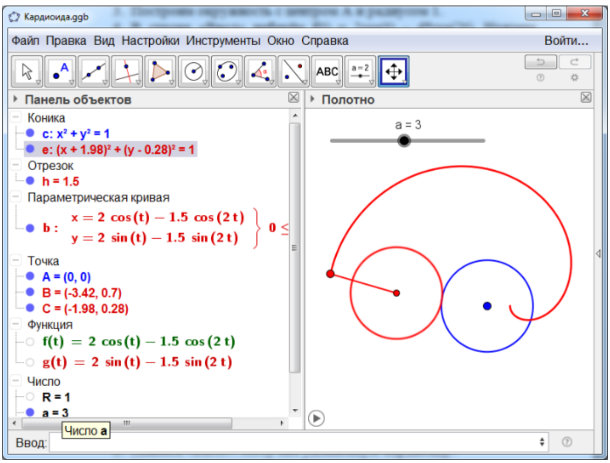

Рис. 9.27

Задача 28. Укороченная кардиоида – траектория движения точки, закреплённой на радиусе окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса.

1. Создадим ползунок a (0<a<2Pi).
2. В строке «Ввод» наберём d=0.5. Нажмем «Enter».
3. В строке «Ввод» наберём A=(0, 0). Нажмем «Enter».
4. Построим окружность с центром A и радиусом 1.
5. В строке «Ввод» наберём f(t) = 2cos(t) – dcos(2t). Нажмем «Enter».
6. В строке «Ввод» наберём g(t)= 2sin(t) – dsin(2t). Нажмем «Enter».
7. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
8. Появится часть кардиоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
9. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
10. В строке «Ввод» наберём C=(2cos(a), 2sin(a)). Нажмём «Enter».
11. Построим отрезок с концами B, C.
12. Построим окружность с центром C и радиусом 1.
13. Уберём обозначения точек B и C.

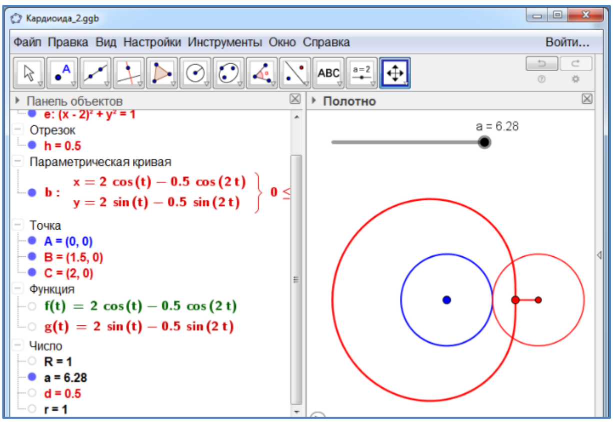

Рис. 9.28

14. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
15. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
16. Цвет и толщину линий можно изменять.
17. Один из моментов движения изображен на рисунке 9.28.

Задача 29. Эпициклоида – траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся внешним образом по другой окружности.

1. В строке «Ввод» наберём n=5. Нажмем «Enter».
2. В строке «Ввод» наберём m=2. Нажмем «Enter».
3. Создадим ползунок a (0<a<2nPi).
4. В строке «Ввод» наберём A=(0, 0). Нажмем «Enter».
5. Построим окружность с центром A и радиусом 1.
6. В строке «Ввод» наберём f(t) = (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
7. В строке «Ввод» наберём g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
8. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
9. Появится часть эпициклоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
10. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
11. В строке «Ввод» наберём C = ((m+n)/n*cos(ma/n), (m+n)/n*sin(ma/n)). Нажмём «Enter».
12. Построим отрезок с концами B, C.
13. Построим окружность с центром C и радиусом m/n.
14. Уберём обозначения точек B и C.

15. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
16. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
17. Цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.29.

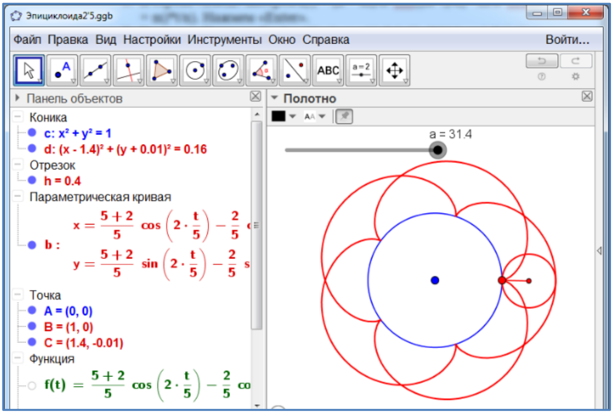

Рис. 9.29

Задача 30. Гипоциклоида – траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся внутри другой окружности.

1. В строке «Ввод» наберём n=5. Нажмем «Enter».
2. В строке «Ввод» наберём m=-2. Нажмем «Enter».
3. Создадим ползунок a (0<a<2nPi).
4. В строке «Ввод» наберём A=(0, 0). Нажмем «Enter».
5. Построим окружность с центром A и радиусом 1.
6. В строке «Ввод» наберём f(t) = (n + m)/n*cos((mt)/n) - m/n*cos((n + m)t/n). Нажмем «Enter».
7. В строке «Ввод» наберём g(t)= (n + m)/n*sin((mt)/n) - m/n*sin((n + m)t/n). Нажмем «Enter».

8. В строке «Ввод» наберём Кривая[f(t), g(t), t, 0, a]. Нажмем «Enter».
9. Появится часть эпициклоиды, соответствующая изменению параметра от 0 до a.
10. В строке «Ввод» наберём B=(f(a), g(a)). Нажмём «Enter».
11. В строке «Ввод» наберём C = ((m+n)/n*cos(ma/n), (m+n)/n*sin(ma/n)). Нажмём «Enter».
12. Построим отрезок с концами B, C.
13. Построим окружность с центром C и радиусом m/n.
14. Уберём обозначения точек B и C.
15. Нажмём правой кнопкой мыши на ползунок a и, в появившемся окне, выберем инструмент «Анимировать».
16. Получим анимацию катящейся окружности и траекторию движения точки, закреплённой на этой окружности.
17. Цвет и толщину линий можно изменять.

Один из моментов движения изображен на рисунке 9.30.

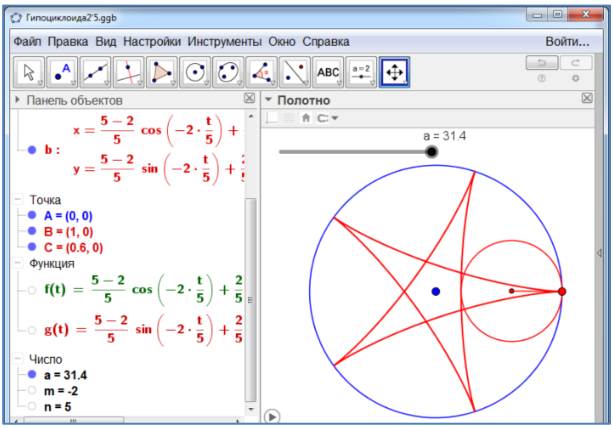

Рис. 9.30

Смирнов Владимир Алексеевич
Смирнова Ирина Михайловна

ГЕОМЕТРИЯ С GEOGEBRA.
ПЛАНИМЕТРИЯ

Подписано в печать 31.01.2018
Формат 60 × 84/16. Объем 13 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 692

Издательство «Прометей»
115035 г. Москва, ул. Садовническая, 72, стр. 1
Тел./факс: 8 (495) 799-54-29
E-mail: info@prometej.su

ISBN 978-5-907003-43-9

9 785907 003439