В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Москва, 2021

В книге представлено 169 геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений, предназначенных для учащихся с седьмого по одиннадцатый классы, распределённых по уровням трудности, направленных на формирование геометрических представлений и развитие исследовательских способностей обучающихся.

ВВЕДЕНИЕ

Обычно задачи на нахождение наибольших и наименьших значений решаются в курсе алгебры и начал математического анализа старших классов с помощью производной.

Вместе с тем, имеется важный класс геометрических задач на нахождение наибольших и наименьших значений, которые можно решать своими методами без помощи производной.

Эти задачи, с одной стороны, имеют большое значение, как для математики, так и для её приложений, а с другой стороны, развивают геометрические представления учащихся, формируют необходимые умения и навыки решения экстремальных задач, могут служить пропедевтикой изучения соответствующих разделов курса алгебры и начал математического анализа.

Здесь мы предлагаем такие задачи различного уровня трудности, которые распределены по уровням трудности и по классам с 7-го по 11-й класс. Задачи базового уровня трудности помечены буквой «А». Задачи среднего уровня трудности помечены буквой «В». Буквой «С» помечены задачи повышенного уровня трудности.

В конце пособия даны ответы и указания к решениям всех задач.

Геометрическим задачам на максимум и минимум посвящены книги [1 – 6] и др.

I. 7 класс

1.1(А). Точка A не принадлежит прямой b. Среди всех точек этой прямой найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 1.1). **(В).** Докажите, что найденная точка является искомой.

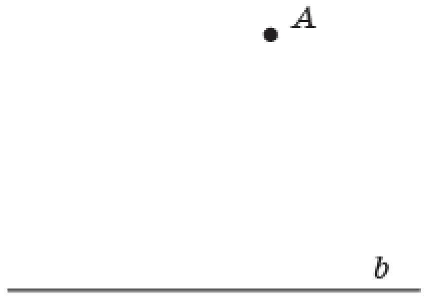


Рис. 1.1

1.2(А). Расстояние от точки A до прямой b равно d. Среди всех окружностей, проходящих через эту точку и касающихся данной прямой, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.2). Чему равен этот радиус? **(В).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

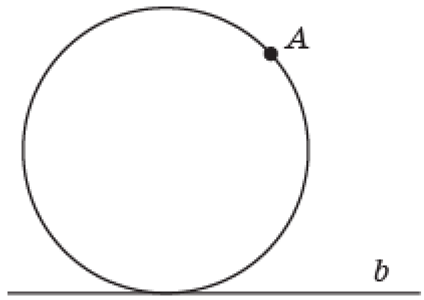


Рис. 1.2

1.3(А). Точка A расположена вне окружности с центром O. На этой окружности найдите точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 1.3). **(В).** Докажите, что найденная точка является искомой.

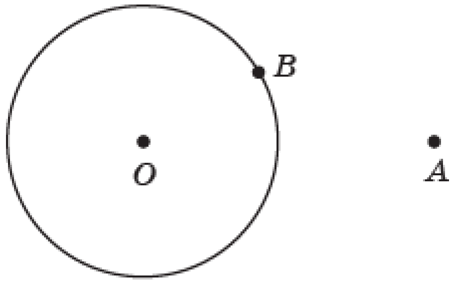


Рис. 1.3

1.4(А). Точка A расположена вне окружности с центром O. На этой окружности найдите точку C, расстояние до которой от точки A наибольшее (рис. 1.4). **(В).** Докажите, что найденная точка является искомой.

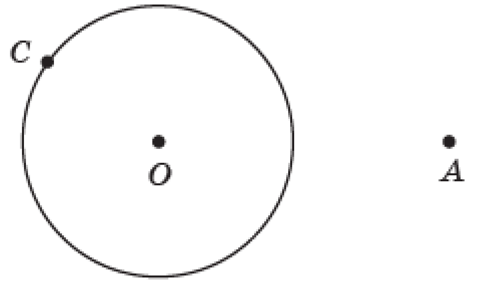


Рис. 1.4

1.5(А). Дана окружность с центром O и радиусом R. Точка A расположена на расстоянии d от центра этой окружности, $d > R$. Среди всех окружностей, проходящих через эту точку и касающихся данной окружности внешним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.5). Чему равен этот радиус? **(С).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

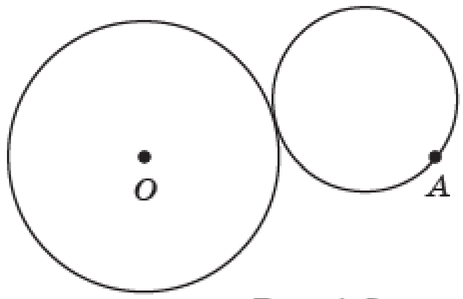


Рис. 1.5

1.6(А). Дана окружность с центром O и радиусом R. Точка A расположена на расстоянии d от центра этой окружности, $d > r$. Среди всех окружностей, проходящих через эту точку и касающихся данной окружности внутренним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.6). Чему равен этот радиус? **(С).** Докажите, что найденная точка является искомой.

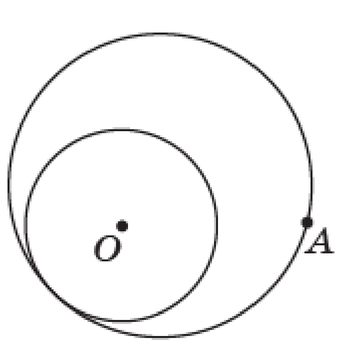


Рис. 1.6

1.7(A). Прямая *c* не имеет общих точек с окружностью с центром *O*. На этой окружности найдите точку *A*, расстояние от которой до прямой *c* наименьшее (рис. 1.7). **(B).** Докажите, что найденная точка является искомой.

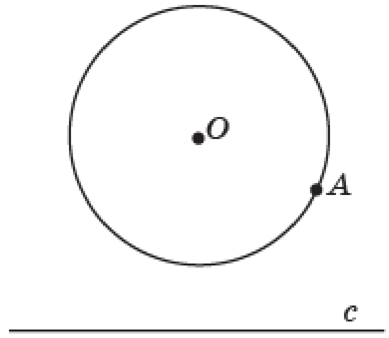


Рис. 1.7

1.8(A). Прямая *c* не имеет общих точек с окружностью с центром *O*. На этой окружности найдите точку *B*, расстояние от которой до прямой *c* наибольшее (рис. 1.8). **(B).** Докажите, что найденная точка является искомой.

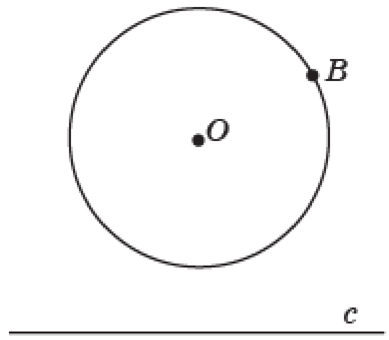


Рис. 1.8

1.9(A). Дана окружность с центром *O* и радиусом *R*. Прямая *c* расположена на расстоянии *d* от центра этой окружности, $d > R$. Среди всех окружностей, касающихся данной прямой и данной окружности внешним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.9). Чему равен этот радиус? **(C).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

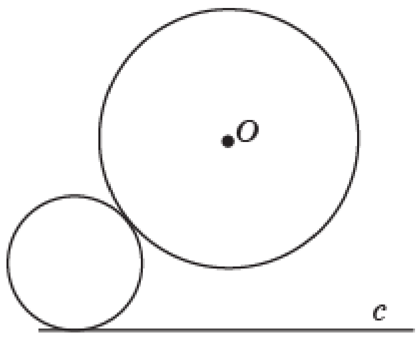


Рис. 1.9

1.10(А). Дана окружность с центром O и радиусом r. Прямая c расположена на расстоянии d от центра этой окружности, $d > r$. Среди всех окружностей, касающихся данной прямой и данной окружности внутренним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.10). Чему равен этот радиус? **(С).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

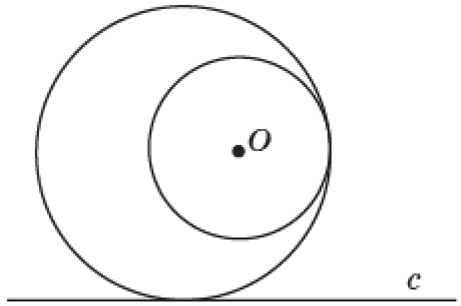


Рис. 1.10

1.11(А). Две окружности с центрами O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки B_1, B_2 на этих окружностях, расстояние между которыми наименьшее (рис. 1.11). **(В).** Докажите, что найденные точки являются искомыми.

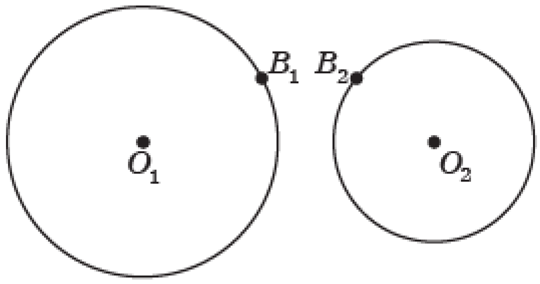


Рис. 1.11

1.12(А). Две окружности с центрами O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки C_1, C_2 на этих окружностях, расстояние между которыми наибольшее (рис. 1.12). **(В).** Докажите, что найденные точки являются искомыми.

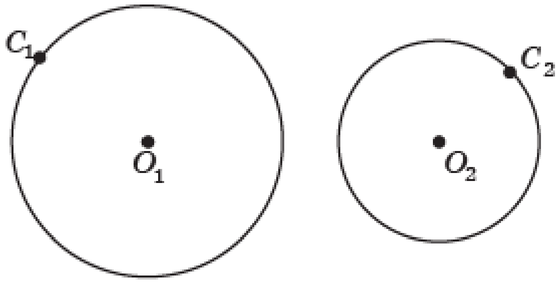


Рис. 1.12

1.13(А). Даны две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 соответственно. Расстояние между их центрами равно $d > R_1 + R_2$. Среди всех окружностей, касающихся данных окружностей внешним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.13). Чему равен этот радиус? **(С).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

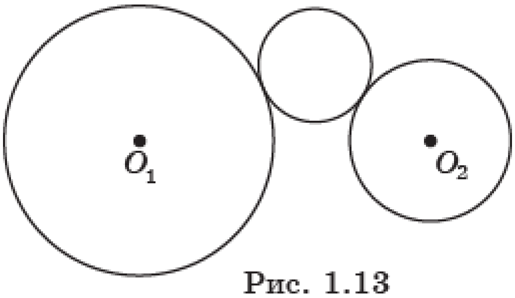


Рис. 1.13

1.14(А). Даны две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 соответственно. Расстояние между их центрами равно $d > R_1 + R_2$. Среди всех окружностей, касающихся данных окружностей внутренним образом, найдите окружность наименьшего радиуса (рис. 1.14). Чему равен этот радиус? **(С).** Докажите, что найденная окружность является искомой.

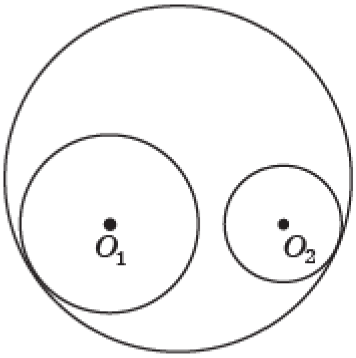


Рис. 1.14

1.15(А). Точки A и B расположены по разные стороны от прямой c. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 1.15). **(В).** Докажите, что найденная точка является искомой.

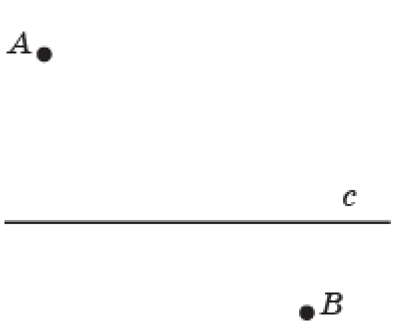


Рис. 1.15

1.16(C). (Задача Герона.) Точки A и B расположены по одну сторону от прямой c. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 1.16). Докажите, что найденная точка является искомой.

Рис. 1.16

Задачу Герона можно переформулировать, как задачу с практическим содержанием.

Задача об автобусной остановке. Два населённых пункта расположены по одну сторону от прямолинейного участка шоссе c (рис. 1.16). Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорожки до населённых пунктов. Укажите расположение остановки, при котором суммарная длина дорожек будет наименьшей.

1.17(B). На прямой c укажите точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 1.17).

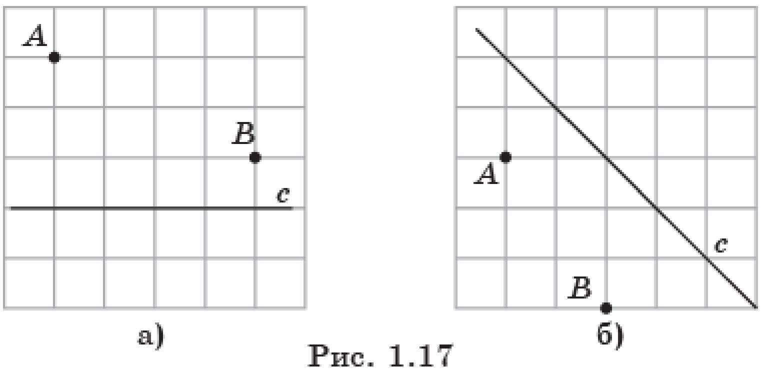


Рис. 1.17

1.18(B). Для данного отрезка AB найдите точку C на прямой c, для которой периметр треугольника ABC наименьший (рис. 1.18).

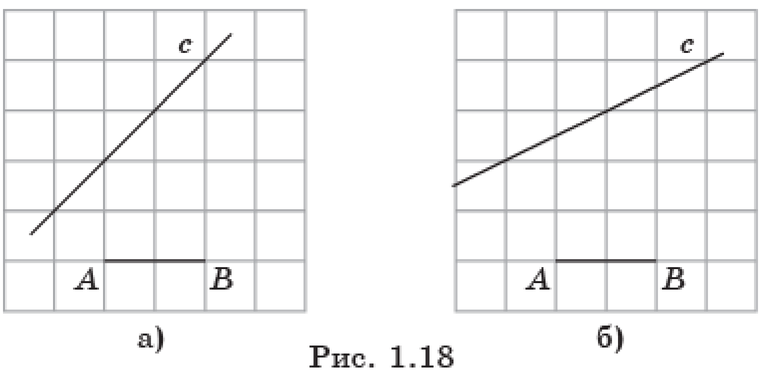


Рис. 1.18

1.19(B). Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону (рис. 1.19). На этой прямой найдите такую точку C, для которой разность расстояний $AC - CB$ наибольшая. **(C).** Докажите, что найденная точка является искомой.

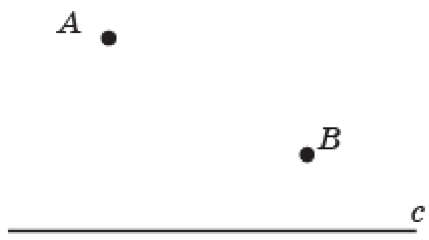


Рис. 1.19

1.20(C). Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по разные стороны. На этой прямой найдите такую точку C, для которой разность расстояний $AC - CB$ наибольшая (рис. 1.20). Докажите, что найденная точка является искомой.

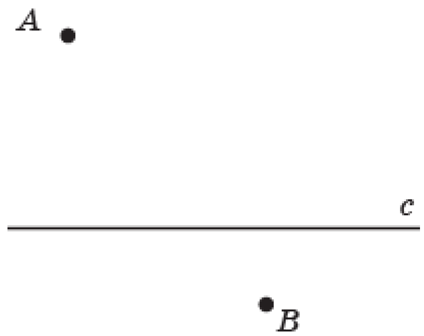


Рис. 1.20

1.21(B). На прямой c укажите точку C, для которой разность $AC - CB$ наибольшая (рис. 1.21).

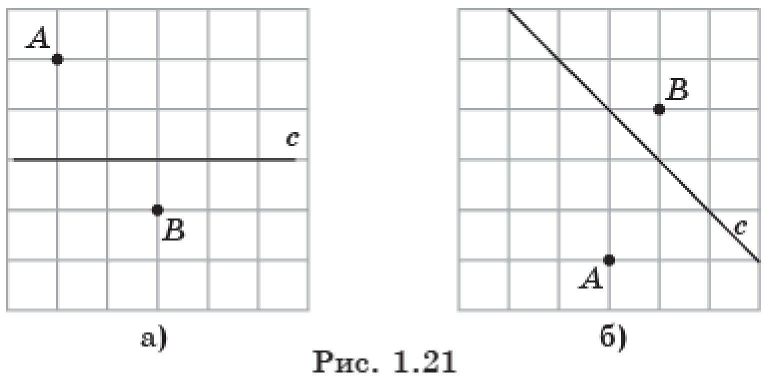


Рис. 1.21

1.22(С). Для данной точки C внутри острого угла aOb на его сторонах a и b найдите точки A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший (рис. 1.22). Докажите, что найденные точки являются искомыми.

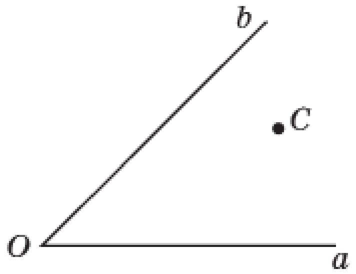


Рис. 1.22

1.23(С). Докажите, что в случае прямого или тупого углов aOb (рис. 1.23, а, б) на сторонах a и b не существует точек A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший.

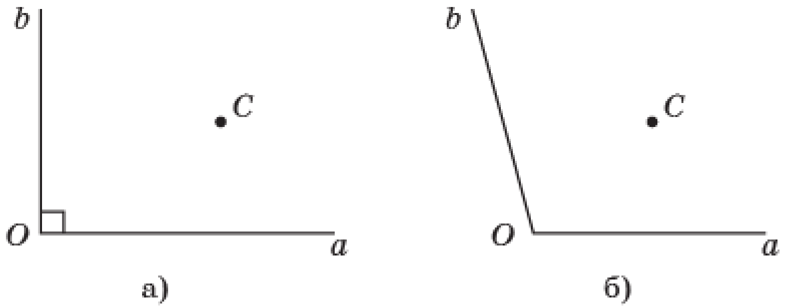


Рис. 1.23

1.24(В). Для данной точки C внутри острого угла aOb на его сторонах a и b найдите точки A и B соответственно, для которых периметр треугольника ABC наименьший (рис. 1.24).

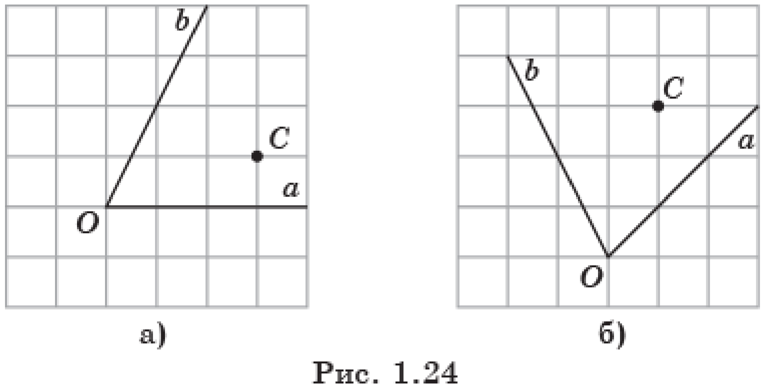


Рис. 1.24

1.25(С). (Задача Фаньяно.) На сторонах BC, AC, AB данного остроугольного треугольника ABC найдите точки A_1, B_1, C_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (рис. 1.25). Докажите, что найденные точки являются искомыми.

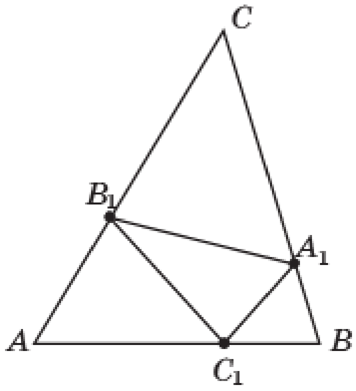


Рис. 1.25

1.26(В). На сторонах BC, AC, AB данного треугольника ABC укажите точки A_1, B_1, C_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший (рис. 1.26).

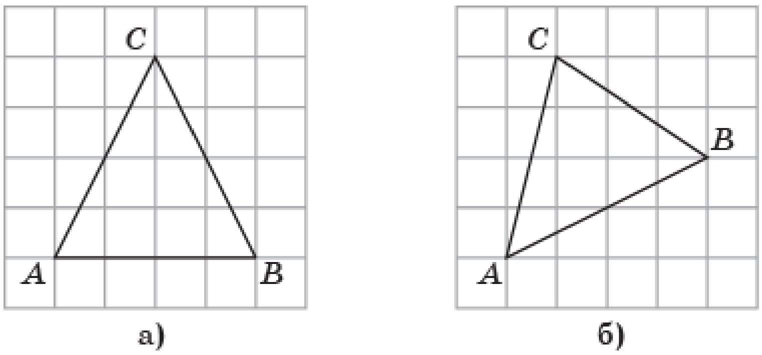


Рис. 1.26

1.27(А). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ укажите точку E, сумма расстояний от которой до вершин этого четырёхугольника наименьшая (рис. 1.27). **(В).** Докажите, что найденная точка является искомой.

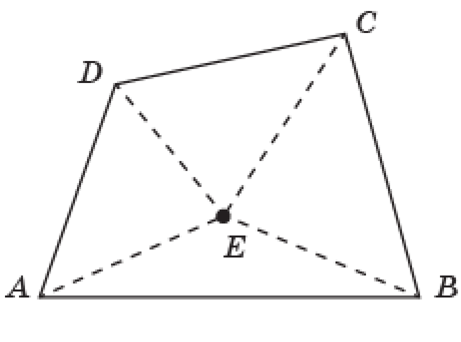


Рис. 1.27

Эту задачу можно переформулировать, как задачу с практическим содержанием.

Задача о колодце. Четыре соседа в садовом товариществе решили построить общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей. В каком месте следует расположить колодец?

1.28(А). Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две; б) три; в) четыре прямые?

1.29(С). Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

1.30(А). На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость: а) одна; б) две; в) три прямые?

1.31(С). На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n прямых?

1.32(А). Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две; б) три; в) четыре окружности?

1.33(С). Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей?

1.34(А). На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость: а) одна; б) две; в) три окружности?

1.35(С). На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей?

II. 8 класс

2.1(C). Населённые пункты A и D расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост BC и проложить дороги AB и CD, чтобы путь $ABCD$ имел наименьшую длину? Берега b, c реки предполагаются параллельными, ширина реки равна h, а мост строится перпендикулярно этим берегам. (рис. 2.1).

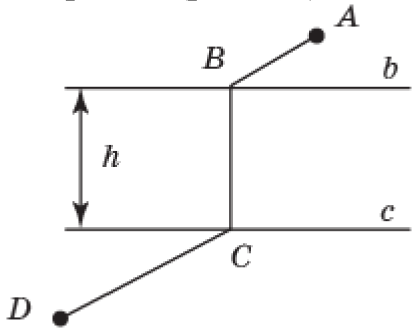


Рис. 2.1

2.2 (B). В условиях предыдущей задачи изобразите мост BC и дороги AB и CD так, чтобы путь $ABCD$ имел наименьшую длину (рис. 2.2).

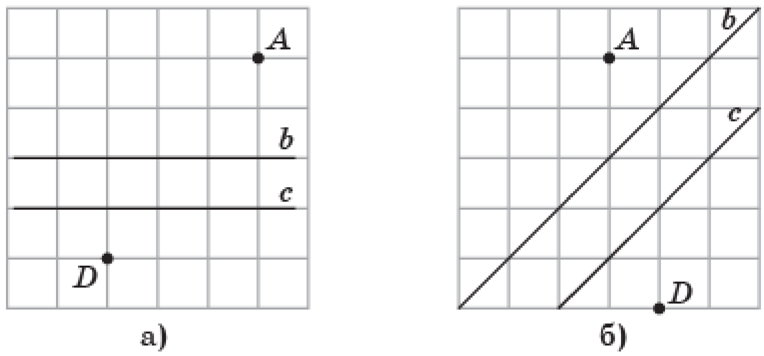


Рис. 2.2

2.3(B). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ найдите треугольник с наименьшим радиусом R описанной окружности (рис. 2.3).

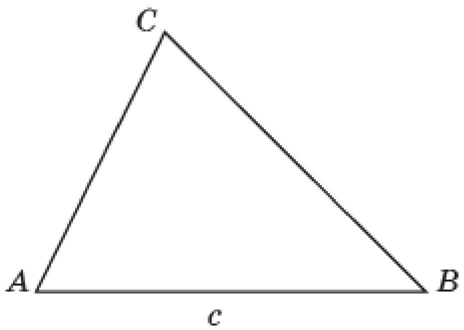


Рис. 2.3

2.4(B). Для данной окружности с центром O найдите хорду наименьшей длины, проходящую через данную точку C внутри этой окружности (рис. 2.4).

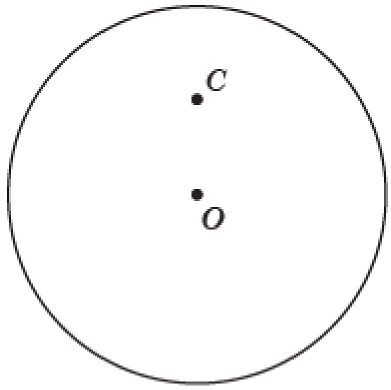


Рис. 2.4

2.5(B). Для двух данных пересекающихся окружностей с центрами O_1, O_2 найдите секущую AB наибольшей длины, проходящую через точку C пересечения этих окружностей (рис. 2.5).

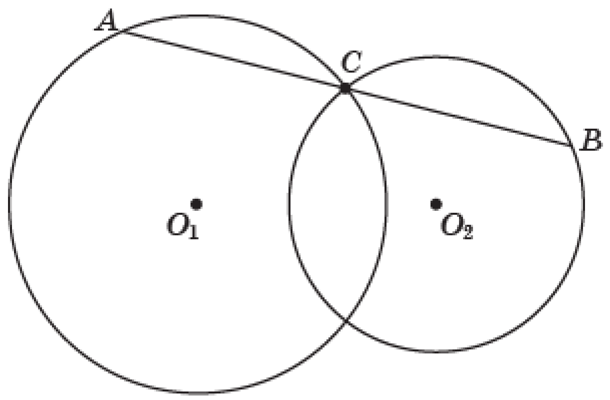


Рис. 2.5

2.6(C). Через данную точку C, расположенную внутри данного угла aOb, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник AOB наименьшего периметра (рис. 2.6).

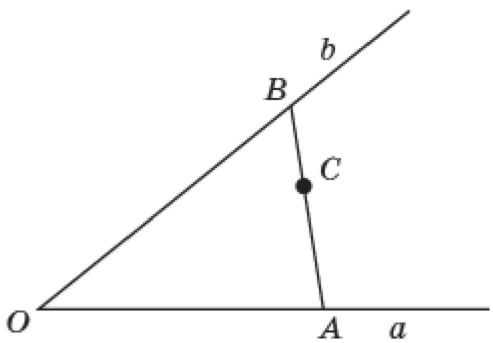


Рис. 2.6

2.7(С). Для данного треугольника ABC найдите равносторонний треугольник наименьшего периметра, описанный около этого треугольника (рис. 2.7).

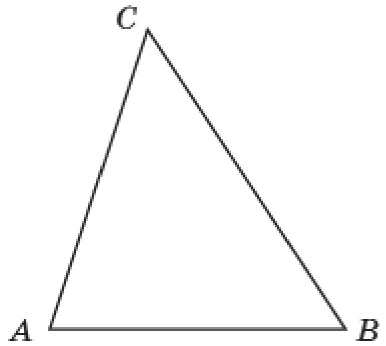


Рис. 2.7

2.8(С). На прямой c, параллельной отрезку AB, найдите такую точку C, из который этот отрезок виден под наибольшим углом, т. е. угол ACB наибольший (рис. 2.8).

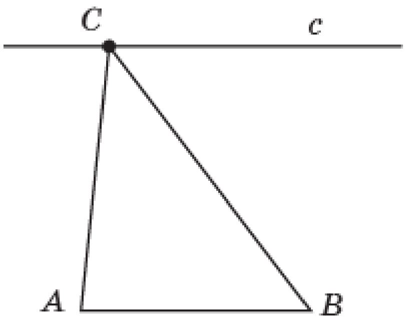


Рис. 2.8

2.9(В). На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом (рис. 2.9). Найдите величину этого угла.

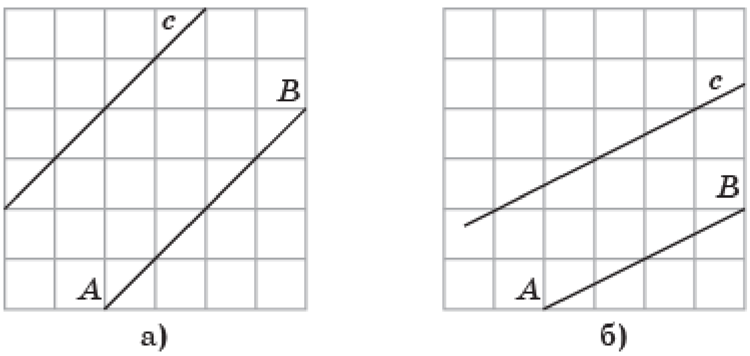


Рис. 2.9

2.10(С). На прямой *с* найдите точку *С*, из которой отрезок *АВ* виден под наибольшим углом (рис. 2.10).

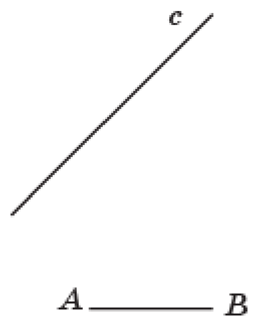


Рис. 2.10

2.11(В). На прямой *с* отметьте точку *С*, из которой отрезок *АВ* виден под наибольшим углом (рис. 2.11). Найдите величину этого угла.

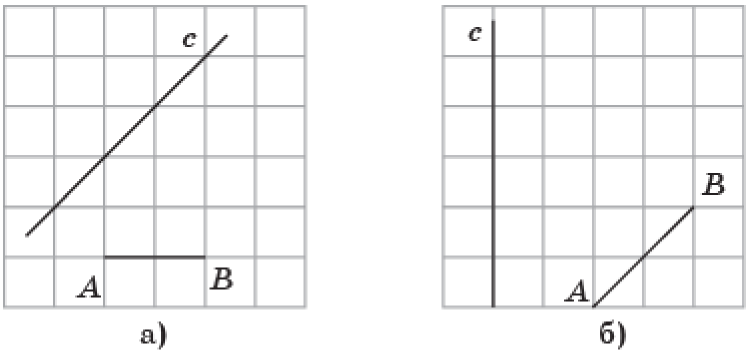


Рис. 2.11

2.12(С). На окружности найдите точку *С*, из которой отрезок *АВ* виден под: а) наибольшим; б) наименьшим углом (рис. 2.12).

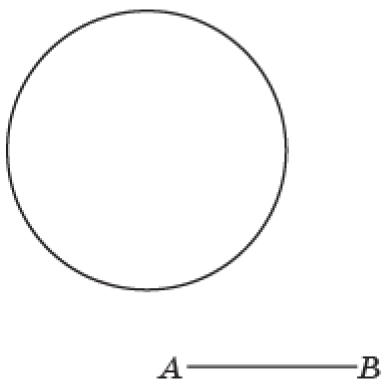


Рис. 2.12

2.13(С). На окружности отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под: а) наибольшим (рис. 2.13, а); б) наименьшим углом (рис. 2.13, б).

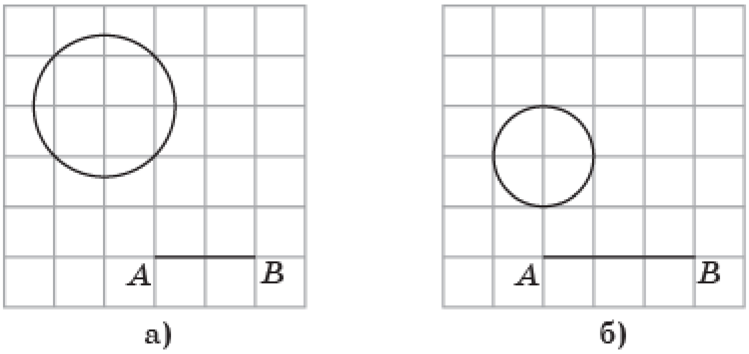


Рис. 2.13

2.14(В). На прямой c найдите точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом, т. е. угол ACB наибольший (рис. 2.14).

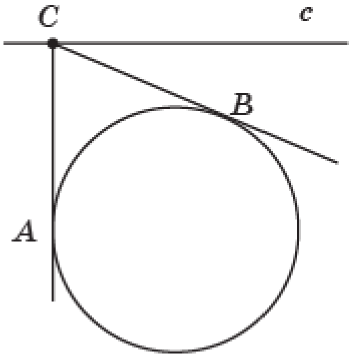


Рис. 2.14

2.15(В). На прямой c отметьте точку C, из которой данная окружность видна под наибольшим углом (рис. 2.15). Найдите величину этого угла.

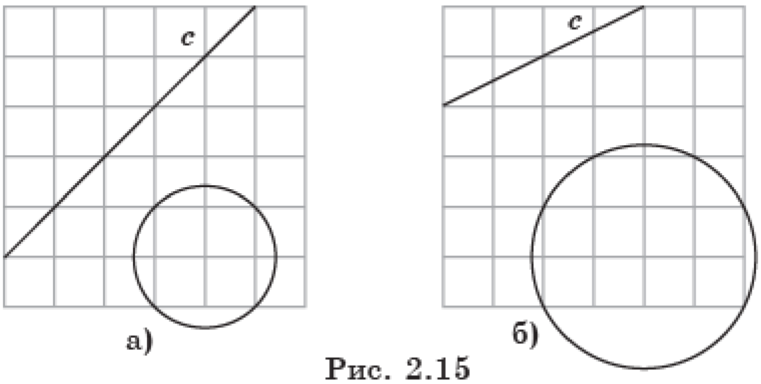


Рис. 2.15

2.16(В). На окружности с центром P найдите точку C, из которой данная окружность с центром O видна под: а) наибольшим; б) наименьшим углом (рис. 2.16).

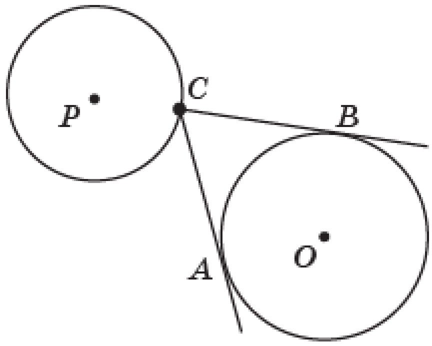


Рис. 2.16

2.17(В). На окружности с центром P отметьте точку C, из которой данная окружность с центром O видна под: а) наибольшим; б) наименьшим углом (рис. 2.17). Найдите величину этого угла.

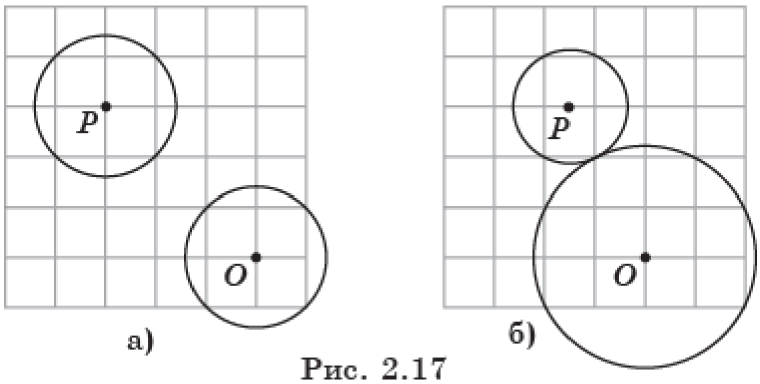


Рис. 2.17

2.18(В). Точка A расположена внутри окружности с центром O. На этой окружности найдите точку B, для которой угол ABO наибольший (рис. 2.18).

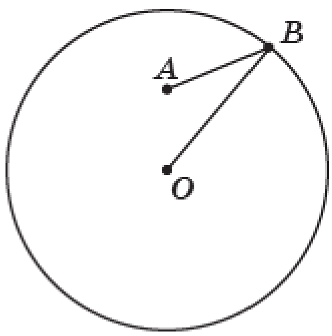


Рис. 2.18

2.19(С). Для данного квадрата *ABCD* найдите четырёхугольник *EFGH* наименьшего периметра, вписанный в этот квадрат (рис. 2.19).

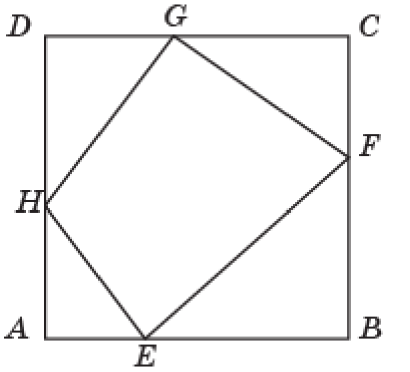


Рис. 2.19

2.20(С). Найдите прямую *c*, проходящую через вершину *C* треугольника *ABC*, сумма расстояний до которой от вершин *A* и *B* этого треугольника наибольшая (рис. 2.20).

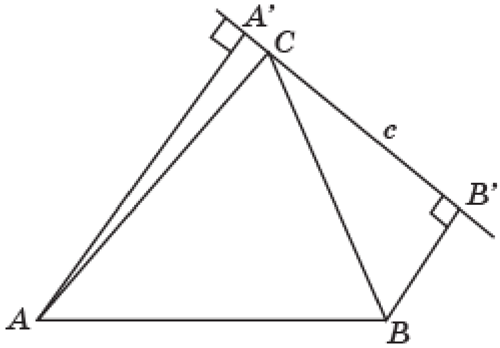


Рис. 2.20

Задача Ферма. Для треугольника *ABC* найдите такую точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

Данную задачу можно переформулировать как задачу с практическим содержанием.

Задача о колодце. Три соседа по садовому товариществу решили вырыть общий колодец и проложить к нему дорожки от своих домиков. Где нужно расположить колодец, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей?

Для решения этой задачи рассмотрим несколько случаев.

2.21(С). Докажите, что если углы треугольника меньше 120°, то точкой, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая, является точка Торричелли, т. е. такая точка, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°.

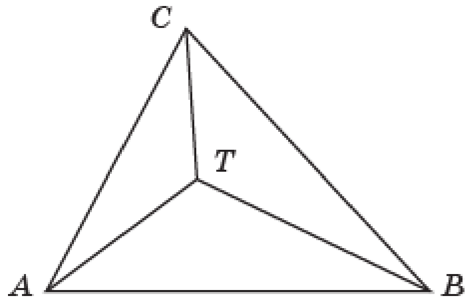


Рис. 2.21

2.22(C). Выясните, где будет располагаться точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая, если один из углов треугольника: а) равен 120°; б) больше 120° (рис. 2.22).

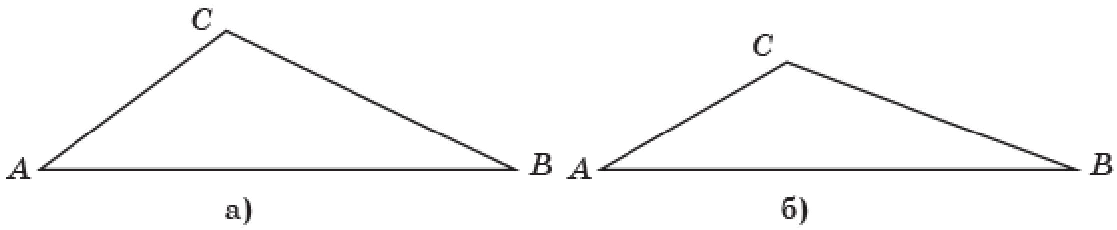


Рис. 2.22

2.23(C). Для данного треугольника *ABC* (рис. 2.23) постройте точку *T*, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.

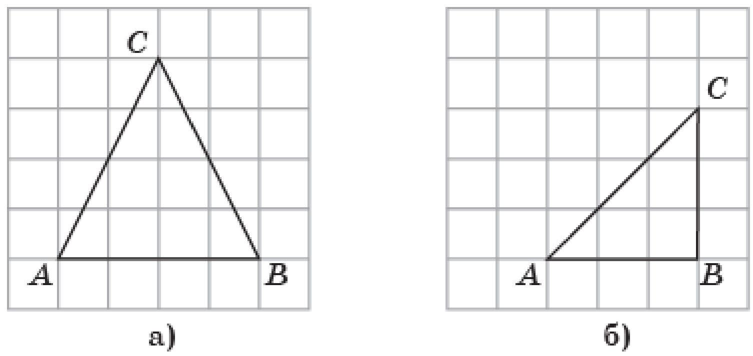


Рис. 2.23

Задача Штейнера. Пусть на плоскости задан набор точек A_1, …, A_n. Требуется найти связный граф с наименьшей суммой длин его рёбер, среди вершин которого имеются все данные точки и, возможно, некоторые другие точки B_1, …, B_m. (рис. 2.24), Такие графы будем называть минимальными для данного набора точек A_1, …, A_n.

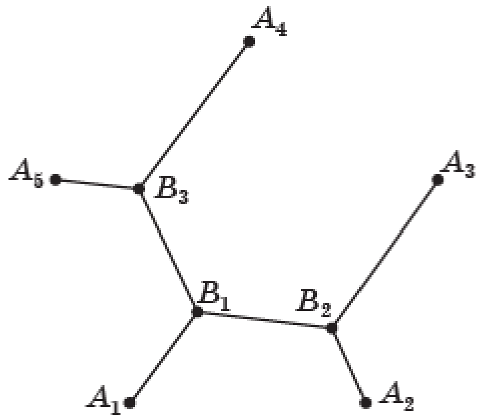


Рис. 2.24

Задачу Штейнера разобьём на несколько подзадач.

2.24, а(В). Докажите, что минимальный граф является деревом, т. е. не содержит замкнутых ломаных, состоящих из рёбер графа.

2.24, б(С). В минимальном графе углы, образованные двумя рёбрами с общей вершиной, не могут быть меньше 120°.

2.24, в(С). В вершинах минимального графа не может сходиться более трёх рёбер.

2.24, г(С). В вершинах минимального графа, добавленных к исходным точкам, может сходиться только три ребра, образующих между собой углы 120°.

2.24. д(С). Минимальный граф является простым, т. е. не имеет точек самопересечения.

2.24, е(С). Если число данных вершин равно n, то число m добавленных вершин минимального графа не превосходит $n - 2$.

2.25(С). Для точек, расположенных в вершинах прямоугольника $ABCD$, постройте минимальный граф (рис. 2.25).

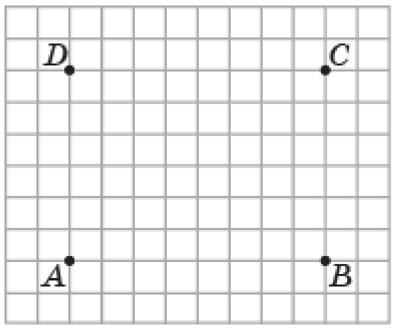


Рис. 2.25

2.26(С). Для точек, расположенных в вершинах правильного пятиугольника $ABCDE$, постройте минимальный граф (рис. 2.26).

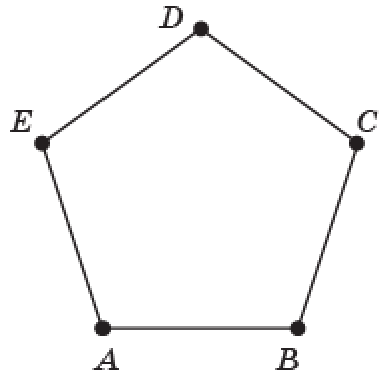


Рис. 2.26

2.27(С) Населённые пункты A и B расположены по одну сторону от шоссе c. Требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорожки до населённых пунктов так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей. Найдите положение точек C и D (рис. 2.27).

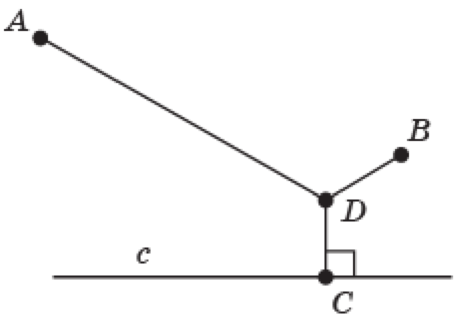


Рис. 2.27

2.28(С). Населённые пункты A, B, C расположены по одну сторону от прямолинейного участка шоссе c. Требуется построить автобусную остановку D и проложить от неё дорожки к населённым пунктам так, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей. Найдите положение точек D, E и F (рис. 2.28).

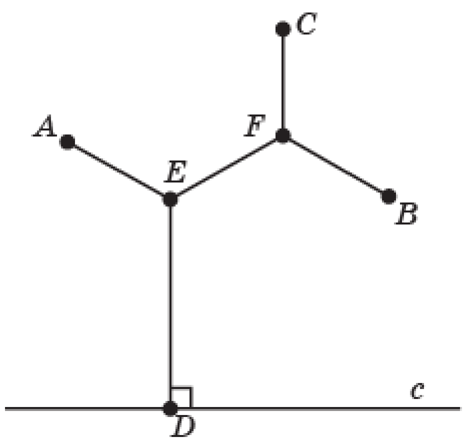


Рис. 2.28

2.29(С). Населённые пункты A и E, F расположены на противоположных берегах реки (рис. 2.29). В каком месте реки следует построить мост BC и проложить дороги, соединяющие пункт A с пунктами E и F, чтобы их суммарная длина была наименьшей? Берега b, c реки предполагаются параллельными, ширина реки равна h, а мост строится перпендикулярно этим берегам.

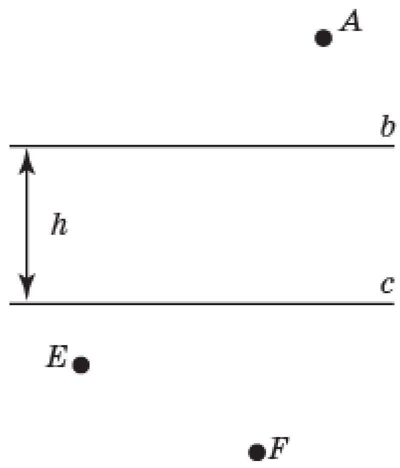


Рис. 2.29

2.30(С). Населённые пункты A, B и E, F расположены на противоположных берегах реки (рис. 2.30). В каком месте реки следует построить мост CD и проложить дороги, соединяющие пункты A и B с пунктами E и F, чтобы их суммарная длина была наименьшей? Берега c, d реки предполагаются параллельными, ширина реки равна h, а мост строится перпендикулярно этим берегам.

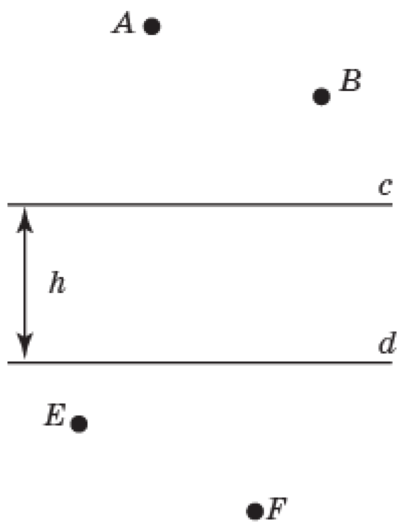


Рис. 2.30

III. 9 класс

3.1(С). Дана прямая c и две точки A и B. На прямой c найдите такую точку C, для которой сумма квадратов расстояний $AC^2 + BC^2$ наименьшая (рис. 3.1).

Рис. 3.1

3.2(С). Дана окружность и две точки A и B. На этой окружности найдите такую точку C, для которой сумма квадратов расстояний $AC^2 + BC^2$: а) наименьшая; б) наибольшая (рис. 3.2).

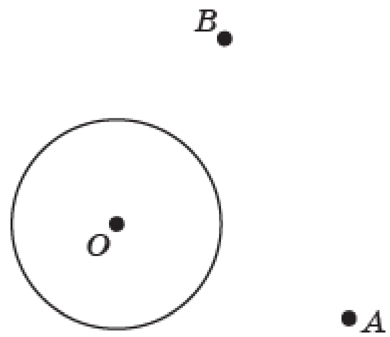


Рис. 3.2

3.3(С). Через точку C, расположенную внутри данного угла aOb, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник AOB наименьшей площади (рис. 3.3).

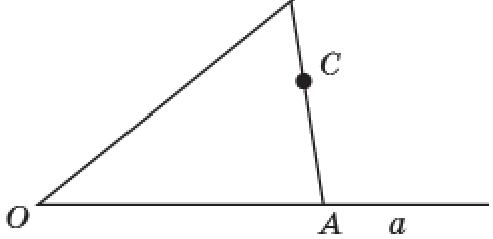


Рис. 3.3

3.4(А). Из всех треугольников ABC с двумя данными сторонами $BC = a$ и $AC = b$ найдите треугольник наибольшей площади (рис. 3.4). Чему равна эта площадь? **(В)** Поведите доказательство.

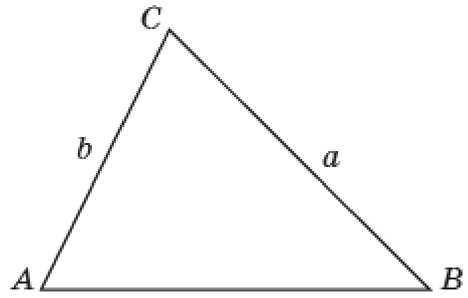


Рис. 3.4

3.5(В). Дана окружность с центром O и радиусом R. Через данную точку C проведите прямую, пересекающую данную окружность в точках A и B, для которых площадь треугольника AOB наибольшая (рис. 3.5). Чему равна эта площадь?

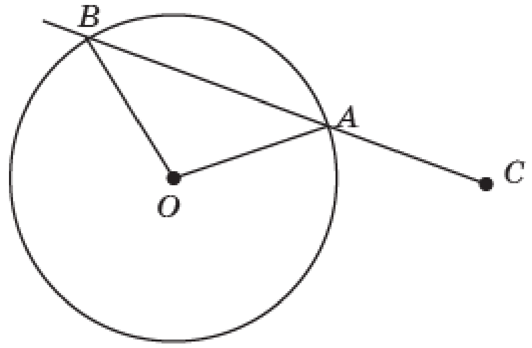


Рис. 3.5

3.6(В). На основании AB равнобедренного треугольника ABC найдите такие точки, сумма расстояний от которых до сторон AC и BC наименьшая (рис. 3.6).

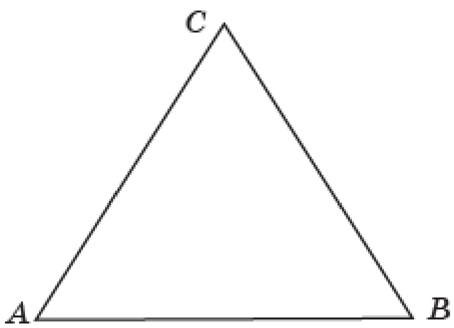


Рис. 3.6

3.7(С). В остроугольном треугольнике ABC $\angle A > \angle B$. Докажите, что из всех точек стороны AB наименьшая сумма расстояний до сторон AC и BC этого треугольника будет у точки A (рис. 3.7).

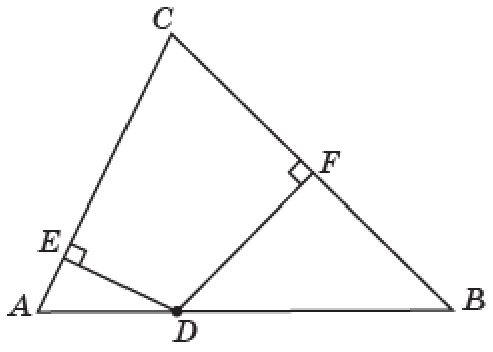


Рис. 3.7

3.8(С). Для правильного треугольника ABC найдите такие точки D, сумма расстояний от которых до сторон этого треугольника наименьшая (рис. 3.8).

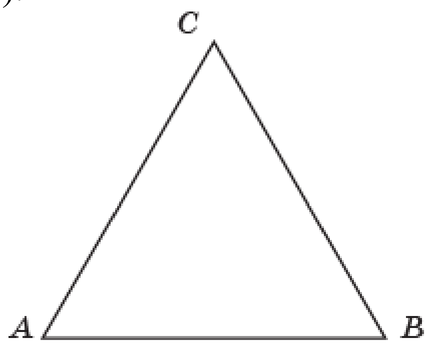


Рис. 3.8

3.9(С). В остроугольном треугольнике ABC $\angle A$ наибольший. Докажите, что из всех точек треугольника ABC наименьшая сумма расстояний до сторон этого треугольника будет у точки A (рис. 3.9).

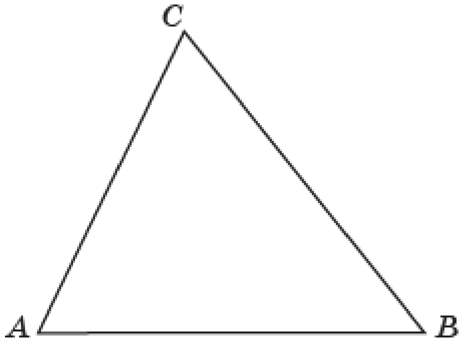


Рис. 3.9

3.10(С). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = a$ и данной площадью S найдите треугольник наименьшего периметра (рис. 3.10).

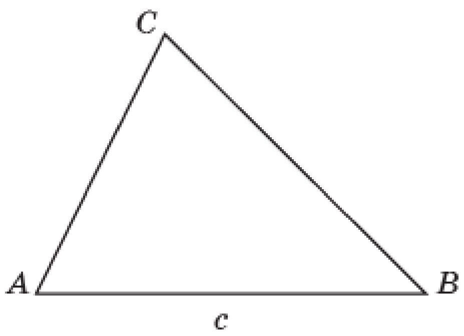


Рис. 3.10

3.11(С). Докажите, что из всех треугольников ABC с данной площадью S наименьший периметр может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.11).

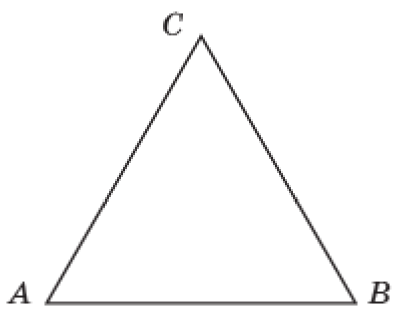


Рис. 3.11

3.12(С). Площадь треугольника равна 1. Укажите наименьший возможный периметр этого треугольника (рис. 3.12).

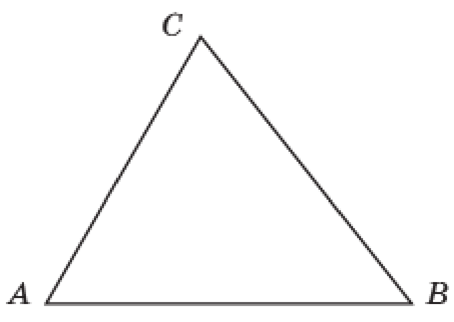


Рис. 3.12

3.13(С). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ и данным периметром P найдите треугольник наибольшей площади (рис. 3.13).

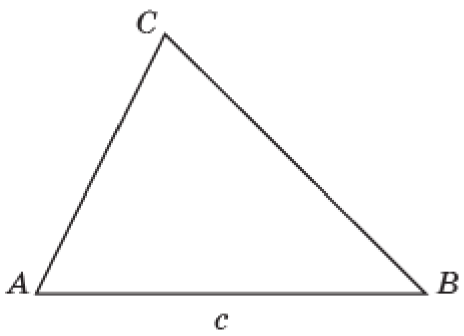


Рис. 3.13

3.14(С). Докажите, что из всех треугольников ABC с данным периметром P наибольшую площадь может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.14).

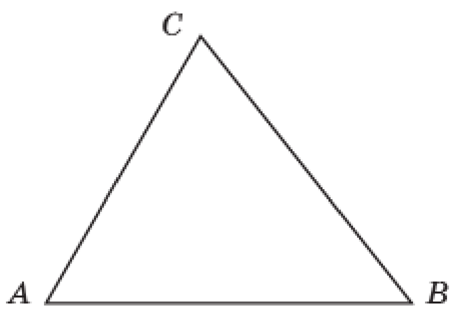


Рис. 3.14

3.15(С). Периметр треугольника равен 1. Укажите наибольшую возможную площадь этого треугольника (рис. 3.15).

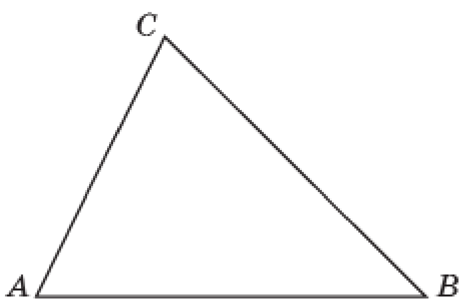


Рис. 3.15

3.16(А). Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой c найдите треугольник наибольшей площади (рис. 3.16). Чему равна эта площадь?

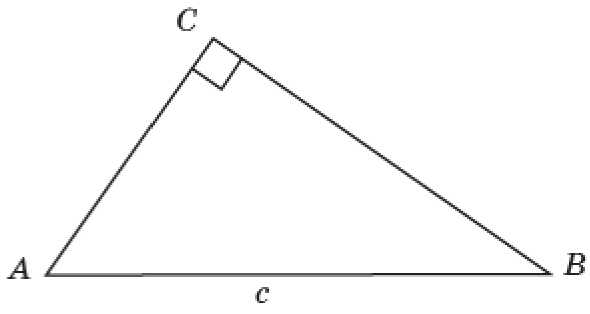


Рис. 3.16

3.17(А). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$, вписанных в данную окружность, найдите треугольник наибольшей площади (рис. 3.17).

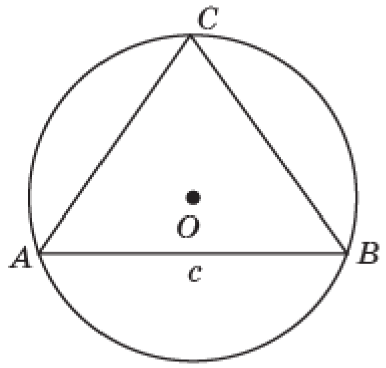


Рис. 3.17

3.18(В). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ и данным углом C найдите треугольник наибольшей площади (рис. 3.18).

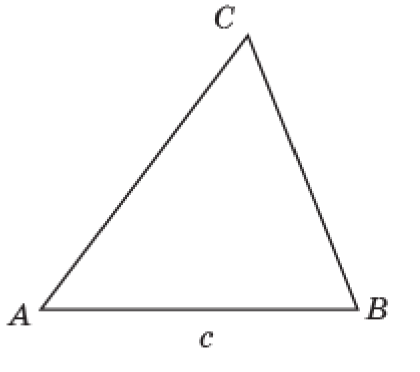


Рис. 3.18

3.19(С). Докажите, что из всех треугольников ABC, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.19). Найдите эту площадь, если радиус окружности равен 1.

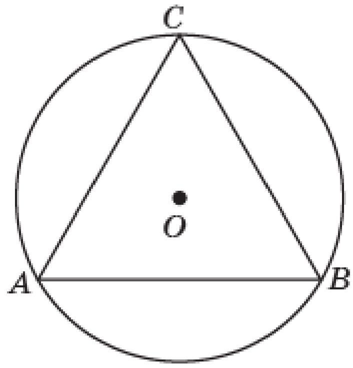


Рис. 3.19

3.20(С). Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ и данной площадью S найдите треугольник с наибольшим радиусом вписанной окружности (рис. 3.20).

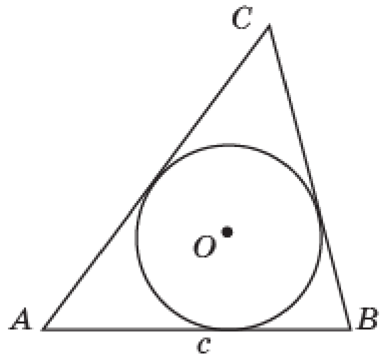


Рис. 3.20

3.21(С). Докажите, что из всех треугольников ABC с данной площадью S наибольший радиус вписанной окружности может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.21).

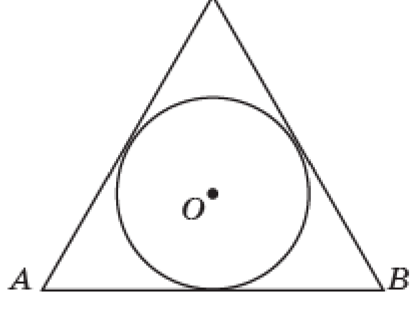


Рис. 3.21

3.22(С). Из всех треугольников *ABC* с данной стороной *AB*, описанных около данной окружности, найдите треугольник наименьшего периметра (рис. 3.22).

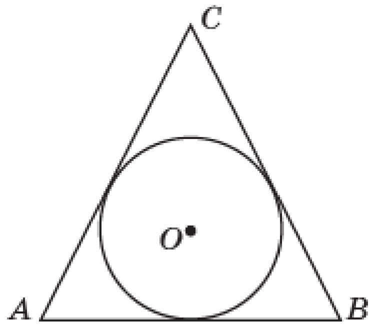


Рис. 3.22

3.23(С). Докажите, что из всех треугольников *ABC*, описанных около данной окружности, наименьший периметр может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.23).

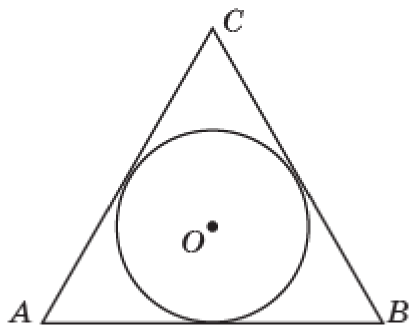


Рис. 3.23

3.24(С). Из всех треугольников *ABC* с данной стороной *AB*, описанных около данной окружности, найдите треугольник наименьшей площади (рис. 3.24).

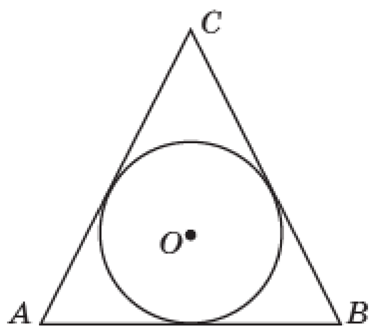


Рис. 3.24

3.25(С). Докажите, что из всех треугольников ABC, описанных около данной окружности, наименьшую площадь может иметь только равносторонний треугольник (рис. 3.25).

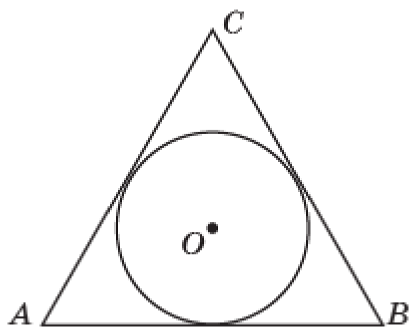


Рис. 3.25

3.26(С). Из всех треугольников ABC с данным углом C, описанных около данной окружности, найдите треугольник наименьшего периметра (рис. 3.26).

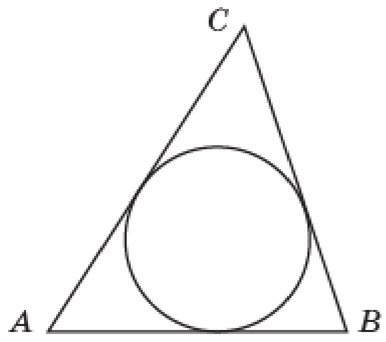


Рис. 3.26

3.27(С). Из всех треугольников ABC с данным углом C, описанных около данной окружности, найдите треугольник наименьшей площади (рис. 3.27).

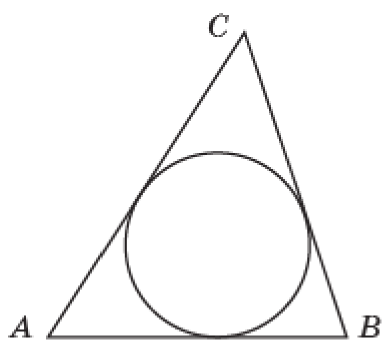


Рис. 3.27

3.28(А). Из всех параллелограммов $ABCD$ с данными сторонами $AB = a$, $AD = b$ найдите параллелограмм наибольшей площади (рис. 3.28). Чему равна эта площадь?

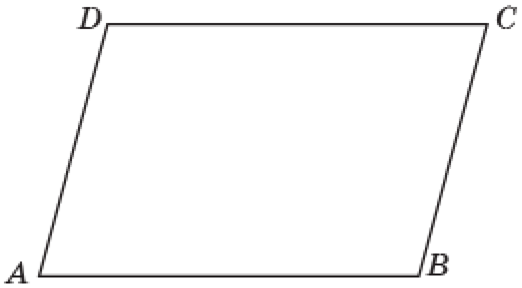


Рис. 3.28

3.29(А). Из всех прямоугольников $ABCD$ с данной диагональю $AC = d$ найдите прямоугольник наибольшей площади (рис. 3.29). Чему равна эта площадь?

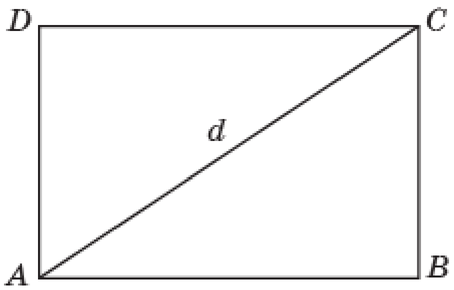


Рис. 3.29

3.30(В). Используя рисунок 3.30, докажите, что из всех прямоугольников данного полупериметра p наибольшую площадь имеет квадрат. Чему равна эта площадь?

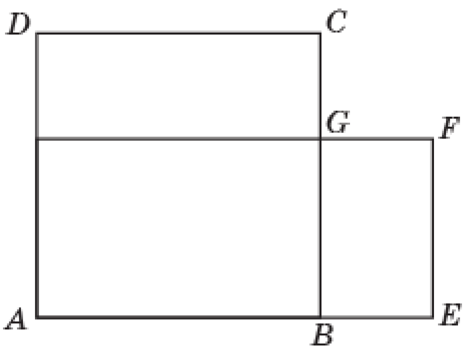


Рис. 3.30

3.31(B). Используя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, докажите, что из всех прямоугольников данного полупериметра p наибольшую площадь имеет квадрат (рис. 3.31).

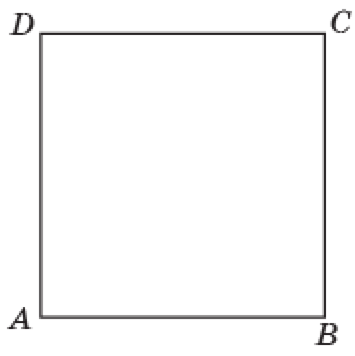


Рис. 3.31

3.32(B). Из всех параллелограммов $ABCD$ с данным периметром и данным острым углом найдите параллелограмм наибольшей площади (рис. 3.32).

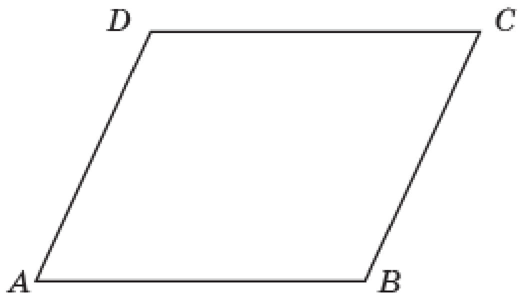


Рис. 3.32

3.33(C). Из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность радиусом R, найдите четырёхугольник наибольшей площади (рис. 3.33). Чему равна эта площадь?

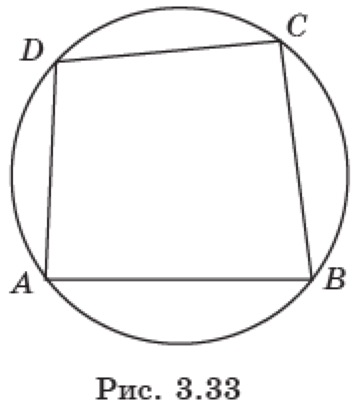


Рис. 3.33

3.34(С). Будем говорить, что прямоугольник вписан в равнобедренный треугольник, если одна сторона этого прямоугольника лежит на основании, а вершины противолежащей стороны принадлежат боковым сторонам данного равнобедренного треугольника.

Из всех прямоугольников, вписанных в данный равнобедренный треугольник (рис. 3.34), найдите прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если площадь данного треугольника равна 1?

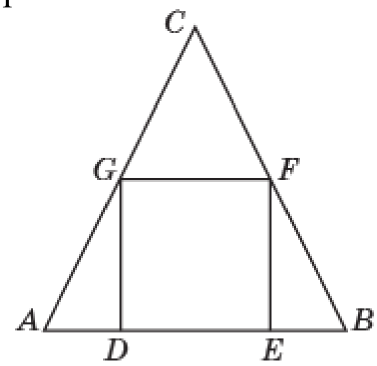


Рис. 3.34

3.35(С). Из всех прямоугольников, вписанных в данный полукруг (рис. 3.35), найдите прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если радиус соответствующего круга равен 1?

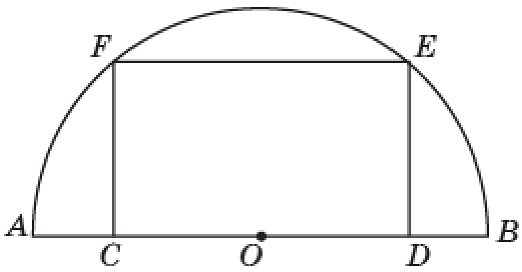


Рис. 3.35

3.36. Какая наибольшая сторона может быть у правильного треугольника, помещающегося в единичном квадрате?

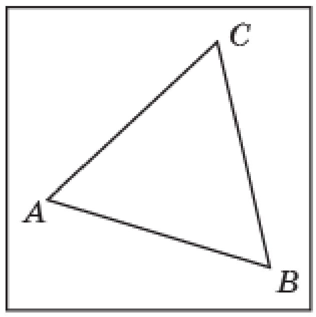


Рис. 3.36

3.37(C). Докажите, что из всех четырёхугольников *ABCD* данного периметра, наибольшую площадь может иметь только квадрат (рис. 3.37).

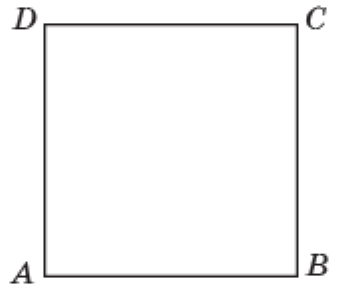


Рис. 3.37

Разобьём задачу на несколько подзадач. Для краткости четырёхугольник данного периметра, имеющий наибольшую площадь, будем называть максимальным.

3.37'(A). Докажите, что невыпуклый четырёхугольник не может быть максимальным, следовательно, максимальный четырёхугольник является выпуклым, т. е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок (рис. 3.37').

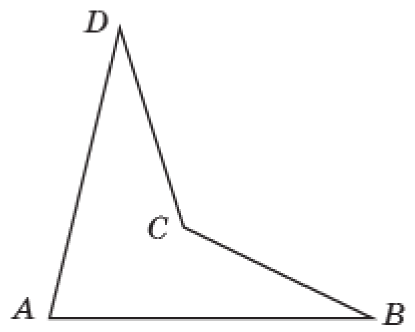


Рис. 3.37'

3.37''(C). Докажите, что у максимального четырёхугольника должны быть равны все стороны (рис. 3.37'').

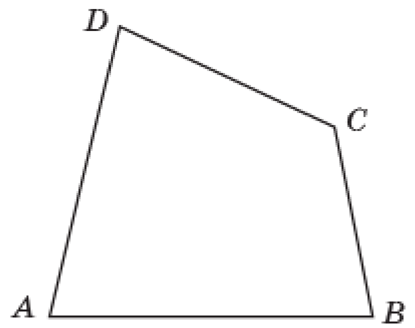


Рис. 3.37''

3.37'''(С). Докажите, что максимальным четырёхугольником может быть только квадрат (рис. 3.37''').

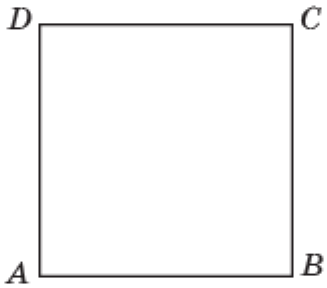


Рис. 3.37'''

Аналогичным образом, можно доказать, что из всех *n*-угольников данного периметра наибольшую площадь может иметь только правильный *n*-угольник.

Рассмотрим ещё одну важную задачу, называемую изопериметрической задачей, или задачей Дидоны.

3.38(С). (Изопериметрическая задача.) Среди всех простых замкнутых кривых данной длины найдите кривую, ограничивающую фигуру наибольшей площади (рис. 3.38).

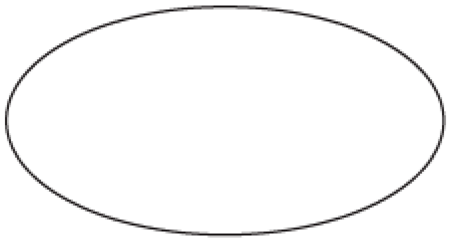


Рис. 3.38

Изопериметрической эта задача называется в связи с постоянством длины кривой, или, что то же самое, периметра искомой фигуры. С именем Дидоны она связывается по легенде, согласно которой финикийская царевна Дидона в IX веке до н. э., спасаясь от преследователей, заключила договор на покупку земли на побережье нынешнего Тунисского залива Средиземного моря с местным предводителем Ярбом. Она попросила совсем немного земли – столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Сделка состоялась, и тогда Дидона разрезала шкуру быка на тонкие тесёмки, связала из них верёвку, окружила ей довольно большую территорию и основала на ней крепость, в которой и спасалась от преследователей.

Вопрос состоял в том, какую форму должна иметь территория, ограниченная верёвкой, чтобы её площадь была наибольшей.

Заметим, что это не совсем тот вопрос, который мы сформулировали в изопериметрической задаче. Действительно, в задаче Дидоны верёвка не замкнута, её концы выходят на берег моря. Мы же рассматриваем замкнутые кривые.

Разобьём эту задачу на несколько подзадач. Для краткости, фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть максимальной.

3.38'(B). Докажите, что невыпуклая фигура (рис. 3.38') не может быть максимальной, следовательно, максимальная фигура является выпуклой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

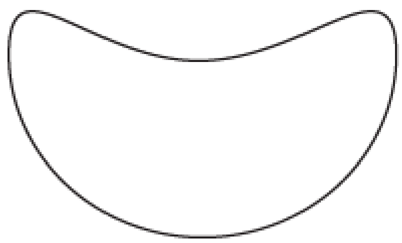


Рис. 3.38'

3.38''(B). Диаметром кривой будем называть хорду, делящую эту кривую на две части равной длины. Докажите, что диаметр кривой, ограничивающей максимальную фигуру, делит эту фигуру на две равновеликие части (рис. 3.38'').

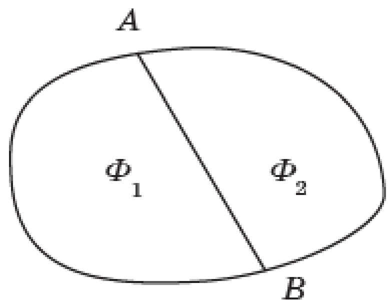


Рис. 3.38''

3.38'''(C). Докажите, что если AB – диаметр кривой, ограничивающей максимальную фигуру, то для любой точки C этой кривой, отличной от точек A и B, угол ACB равен 90^{o} (рис. 3.38'''). Таким образом, максимальная фигура должна быть ограничена окружностью.

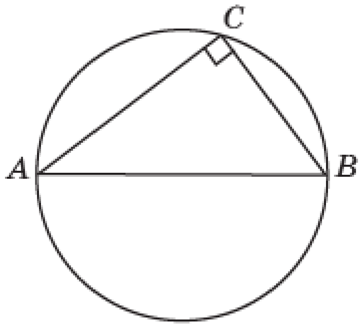


Рис. 3.38'''

3.39(С). (Задача Крамера.) Докажите, что n-угольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь среди всех n-угольников с такими же сторонами. В качестве примера рассмотрите вписанный четырёхугольник (рис. 3.39).

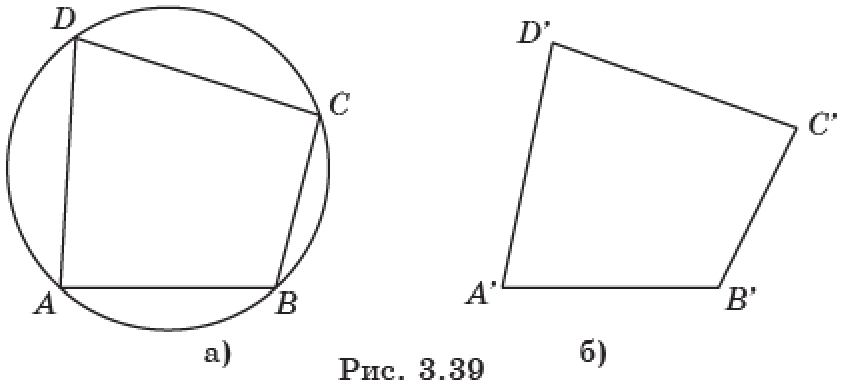


Рис. 3.39

IV. 10 класс

4.1(A). Точка A не принадлежит плоскости β. Среди всех точек этой плоскости найдите такую точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 4.1). **(B)** Докажите, что найденная точка является искомой.

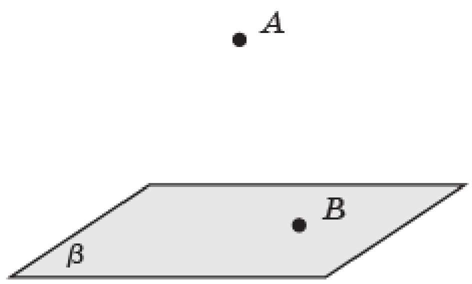


Рис. 4.1

4.2(B). Точка A не принадлежит плоскости β. Докажите, что не существует точки C на этой плоскости, для которой расстояние AC наибольшее (рис. 4.2).

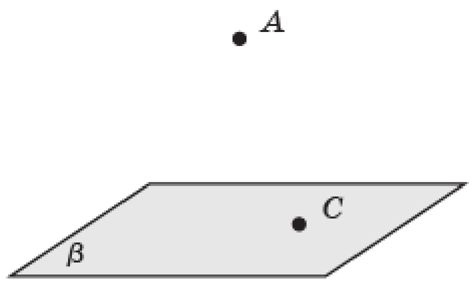


Рис. 4.2

4.3(A). Точки A и B расположены по разные стороны от плоскости γ. Найдите такую точку C на этой плоскости, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 4.3). **(B)** Докажите, что найденная точка является искомой.

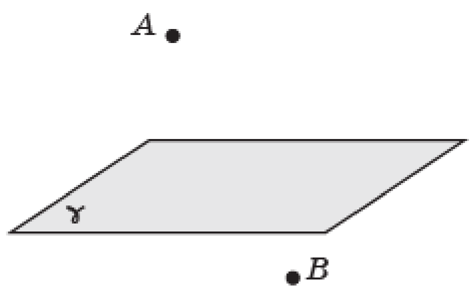


Рис. 4.3

4.4(С). (Задача Герона.) Точки *A* и *B* расположены по одну сторону от плоскости γ. Найдите такую точку *C* на этой плоскости, для которой сумма расстояний *AC* + *CB* наименьшая (рис. 4.4). Докажите, что найденная точка является искомой.

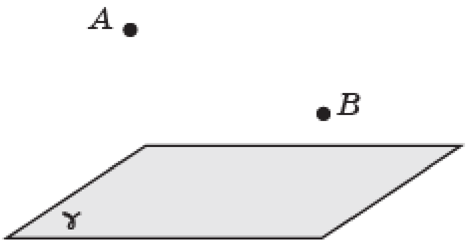


Рис. 4.4

4.5(В). Точки *A* и *B* расположены по одну сторону от плоскости γ (рис. 4.5). Найдите такую точку *C* на этой плоскости, для которой разность расстояний *AC* – *CB* наибольшая. **(С)** Докажите, что найденная точка является искомой.

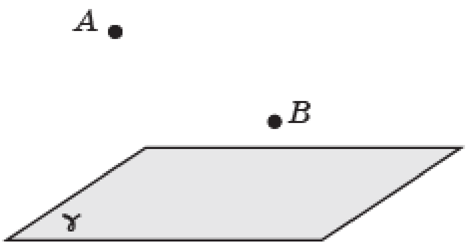


Рис. 4.5

4.6(С). Точки *A* и *B* расположены по разные стороны от плоскости γ. Найдите такую точку *C* на этой плоскости, для которой разность расстояний *AC* – *CB* наибольшая (рис. 4.6). Докажите, что найденная точка является искомой.

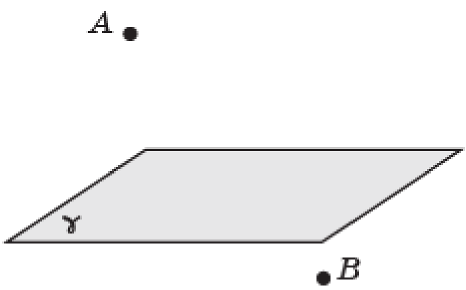


Рис. 4.6

4.7(C). На данных скрещивающихся прямых a и b найдите точки соответственно A и B, расстояние между которыми наименьшее (рис. 4.7). Докажите, что найденные точки являются искомыми.

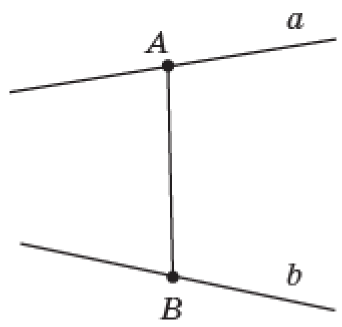


Рис. 4.7

4.8(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$, соединяющего середины рёбер AB и CD (рис. 4.8).

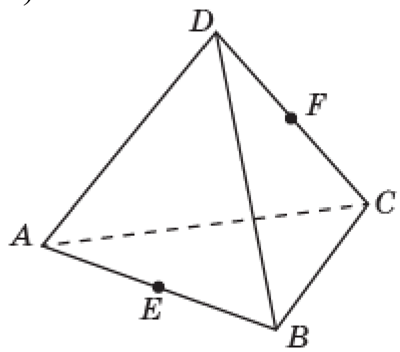


Рис. 4.8

4.9(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного октаэдра $ABCDEF$, соединяющего вершины A и C (рис. 4.9).

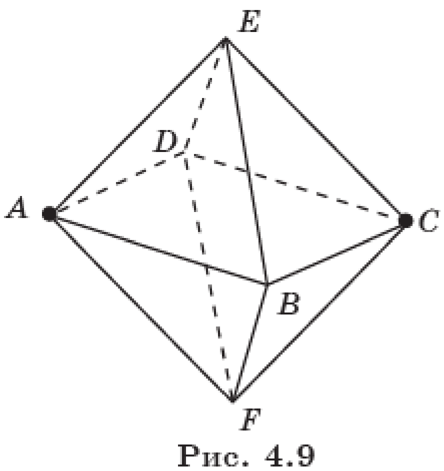


Рис. 4.9

4.10(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного октаэдра $ABCDEF$, соединяющего середины рёбер AE и FC (рис. 4.10).

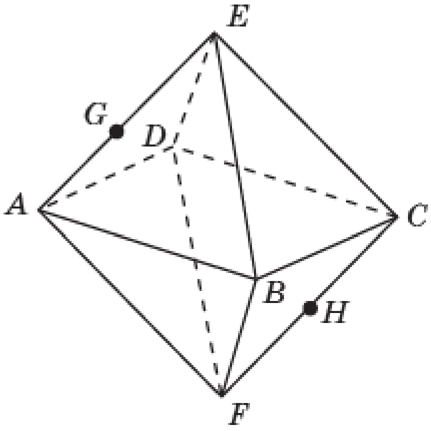


Рис. 4.10

4.11(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, соединяющего вершины A и C_1 (рис. 4.11).

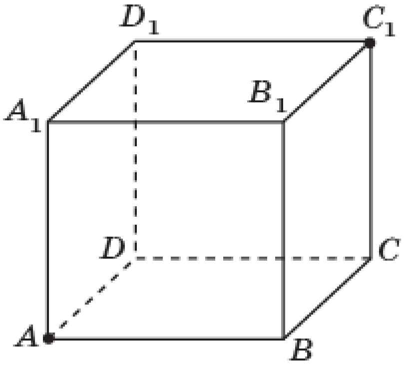


Рис. 4.11

4.12(C). Три ребра AB, AD, AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1 (рис. 4.12).

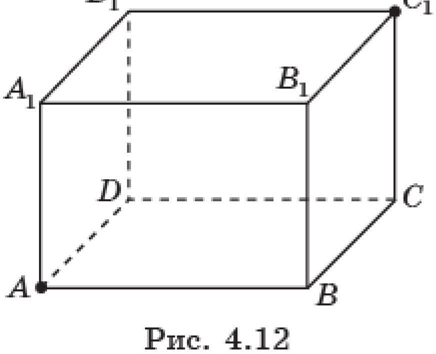


Рис. 4.12

4.13(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, все рёбра которой равны 1, из вершины A в середину E ребра SC (рис. 4.13).

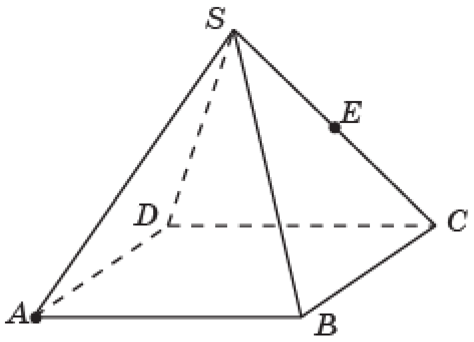


Рис. 4.13

4.14(C). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, соединяющего вершину A и середину D_1 ребра B_1C_1. Все рёбра призмы равны 1 (рис. 4.14).

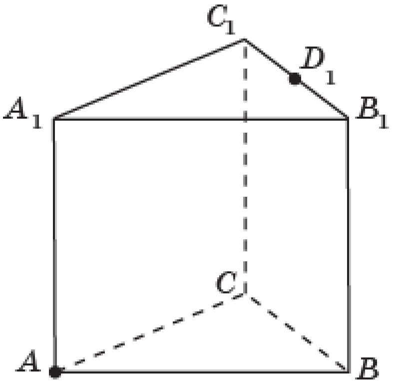


Рис. 4.14

4.15(C). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, соединяющего вершины A и D_1. Все рёбра призмы равны 1 (рис. 4.15).

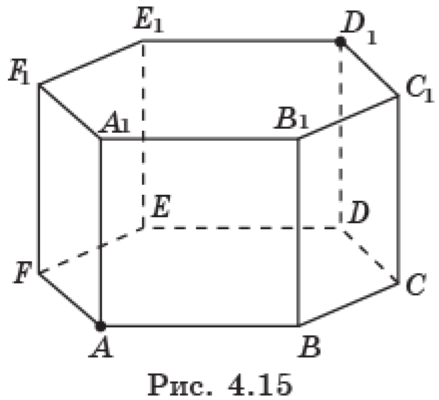


Рис. 4.15

4.16(B). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности икосаэдра, соединяющего середины рёбер AB и CD. Рёбра икосаэдра равны 1 (рис. 4.16).

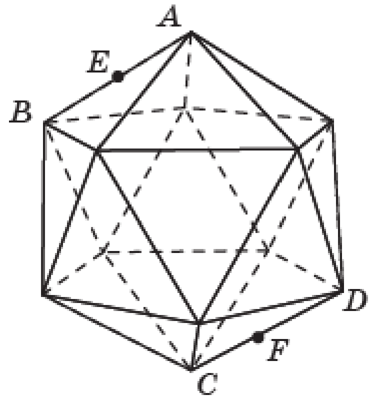


Рис. 4.16

4.17(C). Найдите длину кратчайшего пути по поверхности икосаэдра, соединяющего противолежащие вершины A и B. Рёбра икосаэдра равны 1 (рис. 4.17).

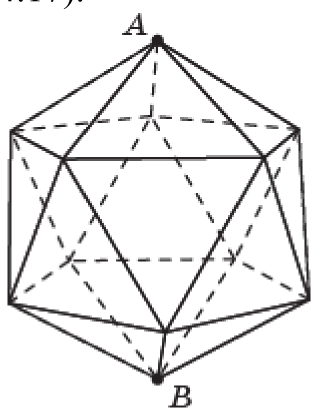


Рис. 4.17

4.18(B). На поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ найдите такие точки E, из которых ребро AB видно под наименьшим углом, т. е. угол AEB наименьший (рис. 4.18). Чему равен этот угол?

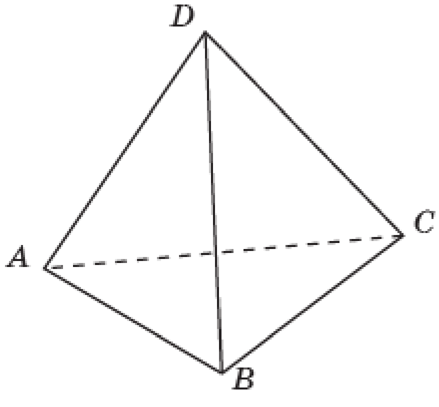


Рис. 4.18

4.19(B). На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите такие точки E, из которых диагональ BD_1 видна под наименьшим углом (рис. 4.19). Чему равен этот угол?

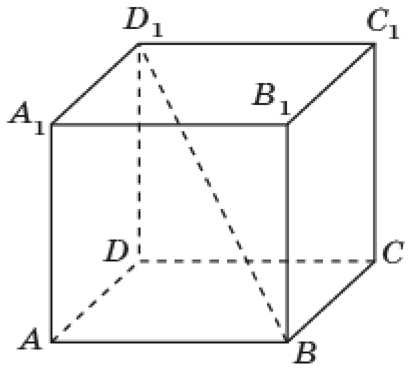


Рис. 4.19

4.20(B). На поверхности октаэдра $ABCDEF$ найдите такие точки G, из которых ребро AB видно под наименьшим углом (рис. 4.20). Чему равен этот угол?

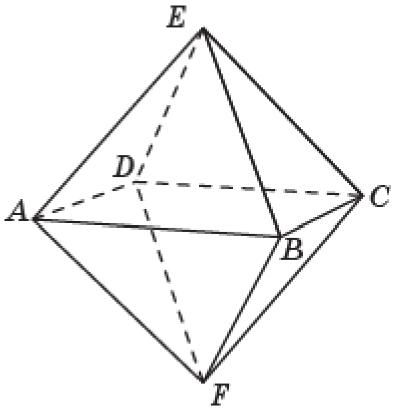


Рис. 4.20

4.21(C). На поверхности икосаэдра укажите такие точки, из которых ребро AB видно под наименьшим углом (рис. 4.21). Найдите тангенс этого угла.

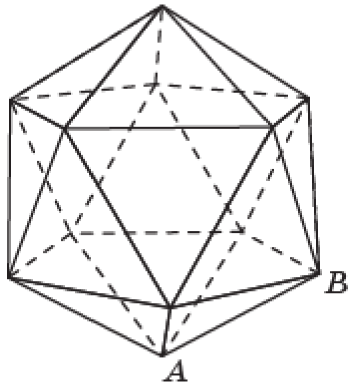


Рис. 4.21

4.22(C). На поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин A, C, B_1 наименьшая (рис. 4.22). Чему равна эта сумма?

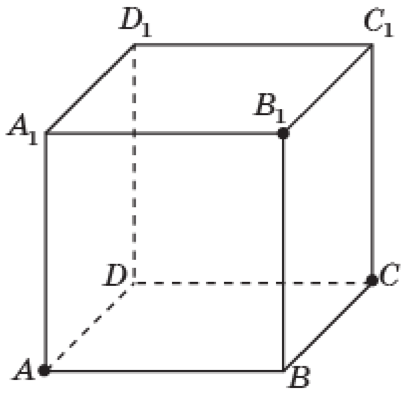


Рис. 4.22

4.23(C). На поверхности единичного октаэдра $ABCDEF$ найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин A, C, E наименьшая (рис. 4.23). Чему равна эта сумма?

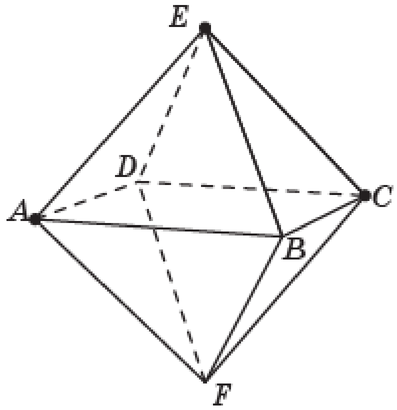


Рис. 4.23

4.24(C). На поверхности единичного икосаэдра найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин A, B, C наименьшая (рис. 4.24). Чему равна эта сумма?

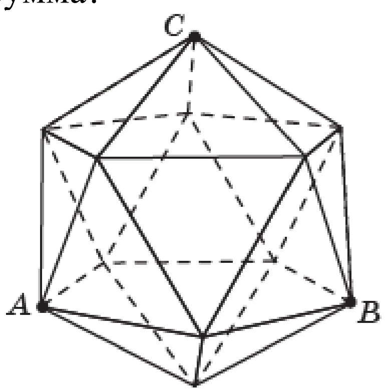


Рис. 4.24

4.25(В). Найдите сечение правильного единичного тетраэдра, проходящее через все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 4.25). Чему равен этот периметр?

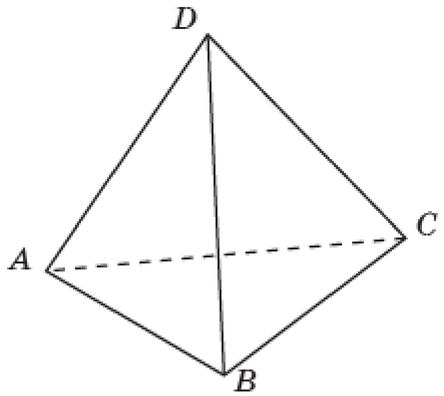


Рис. 4.25

4.26(В). Найдите сечение единичного куба, пересекающее все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 4.26). Чему равен этот периметр?

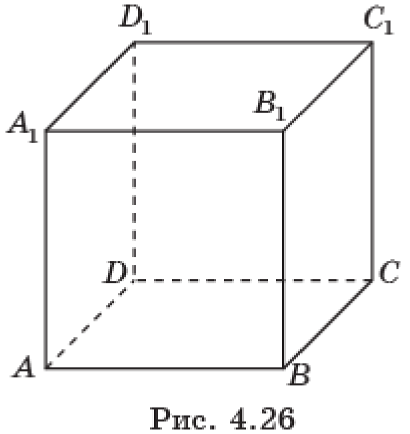


Рис. 4.26

4.27(В). Найдите сечение правильного единичного тетраэдра *ABCD*, параллельное двум противолежащим рёбрам *DA* и *BC*, наибольшей площади (рис. 4.27). Чему равна его площадь?

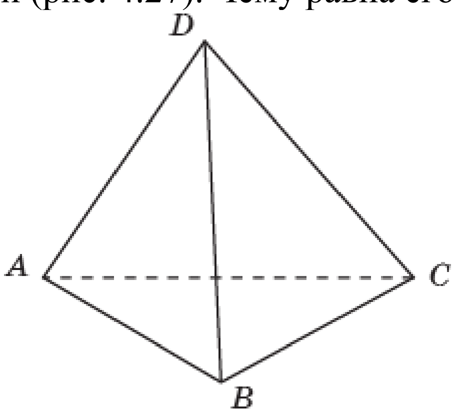


Рис. 4.27

4.28(С). Найдите сечение треугольной пирамиды $SABC$, параллельное двум противолежащим рёбрам SA и BC, наибольшей площади (рис. 4.28).

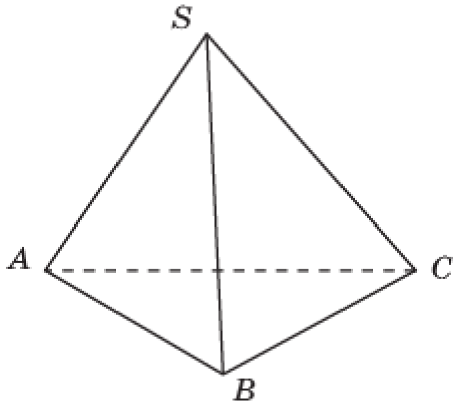


Рис. 4.28

4.29(В). Найдите сечение правильного тетраэдра $ABCD$, проходящее через середины двух противолежащих рёбер, наименьшей площади (рис. 4.29).

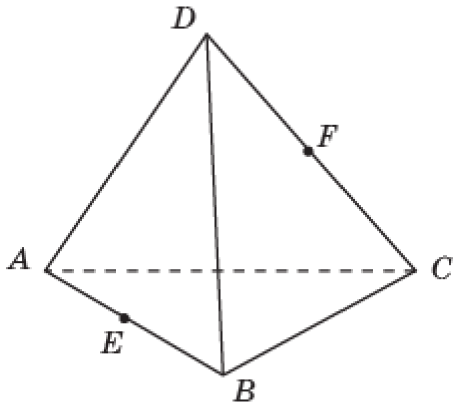


Рис. 4.29

4.30(С). Найдите сечение треугольной пирамиды $SABC$, проходящее через середины двух противолежащих рёбер, наименьшей площади (рис. 4.30).

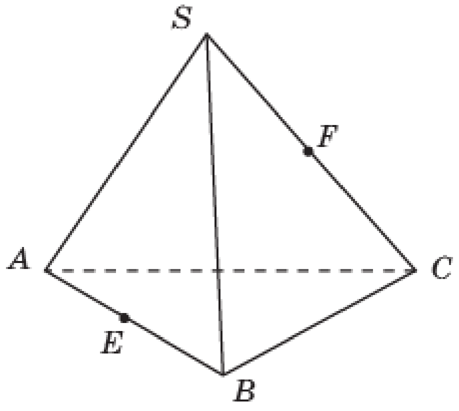


Рис. 4.30

4.31(B). Найдите сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через две противолежащие вершины B и D_1, наименьшей площади (рис. 4.31). Найдите эту площадь для единичного куба.

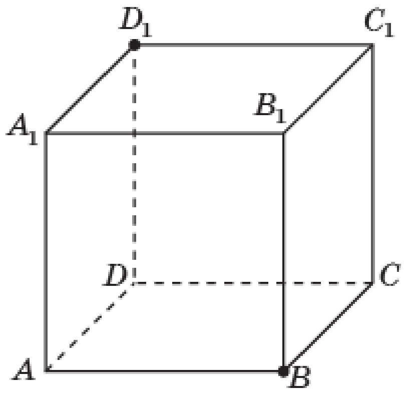


Рис. 4.31

4.32(B). Найдите сечение октаэдра $ABCDST$, проходящее через две противолежащие вершины A и C, наименьшей площади (рис. 4.32). Найдите эту площадь для единичного октаэдра.

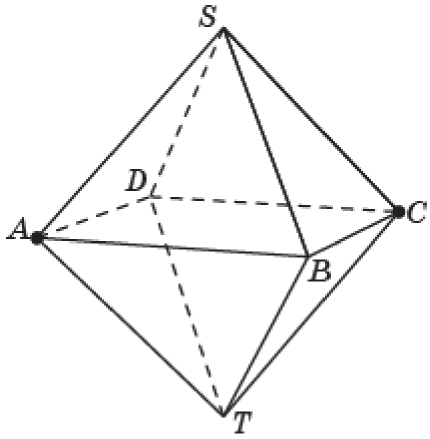


Рис. 4.32

4.33(C). Найдите сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, перпендикулярное диагонали DB_1, наибольшей площади (рис. 4.33). Найдите эту площадь для единичного куба.

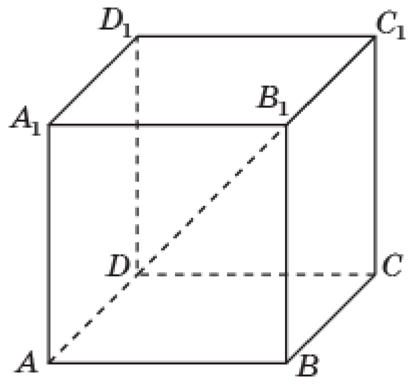


Рис. 4.33

4.34(С). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ стороны основания равны a, а боковые рёбра равны b. Найдите сечение этой пирамиды, параллельное прямым AC и SB, наибольшей площади (рис. 4.34).

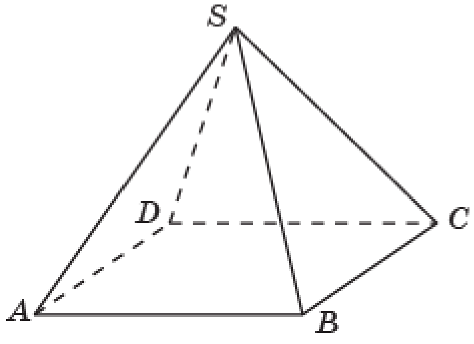


Рис. 4.34

4.35(С). Найдите сечение октаэдра $ABCDST$, параллельное двум противолежащим граням, наименьшей площади (рис. 4.35). Найдите эту площадь для единичного октаэдра.

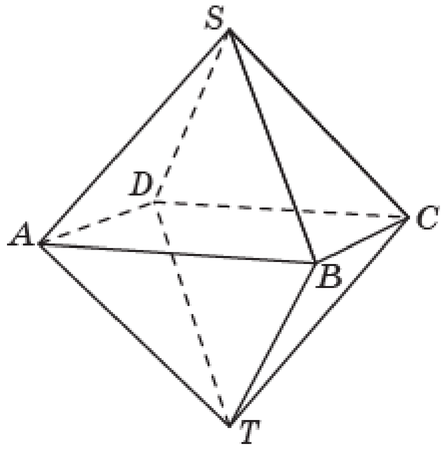


Рис. 4.35

V. 11 класс

5.1(B). Точка A, расположена вне сферы с центром O. На этой сфере найдите точку B, расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 5.1).

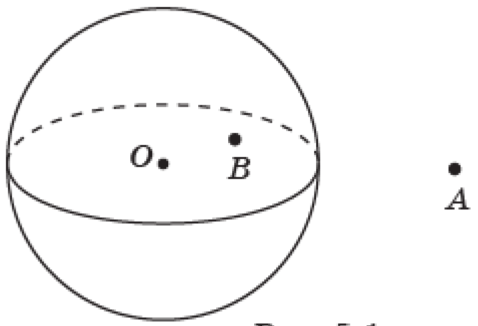


Рис. 5.1

5.2(B). Точка A, расположена вне сферы с центром O. На этой сфере найдите точку C, расстояние до которой от точки A наибольшее (рис. 5.2).

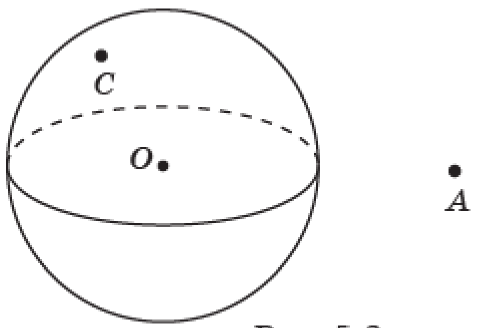


Рис. 5.2

5.3(B). Плоскость γ не имеет общих точек со сферой с центром O. На этой сфере найдите точку A, расстояние от которой до плоскости γ наименьшее (рис. 5.3).

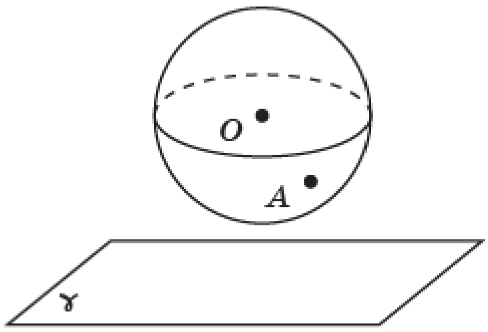


Рис. 5.3

5.4(В). Плоскость γ не имеет общих точек со сферой с центром O. На этой сфере найдите точку B, расстояние от которой до плоскости γ наибольшее (рис. 5.4).

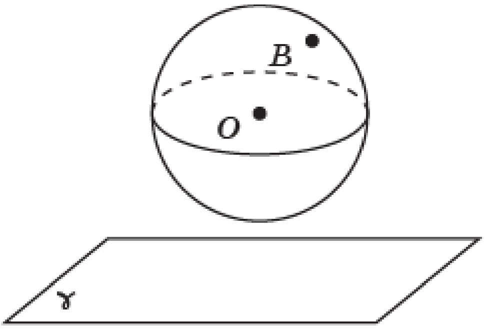


Рис. 5.4

5.5(В). Две сферы с центрами O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки B_1 и B_2 на этих сферах, расстояние между которыми наименьшее (рис. 5.5).

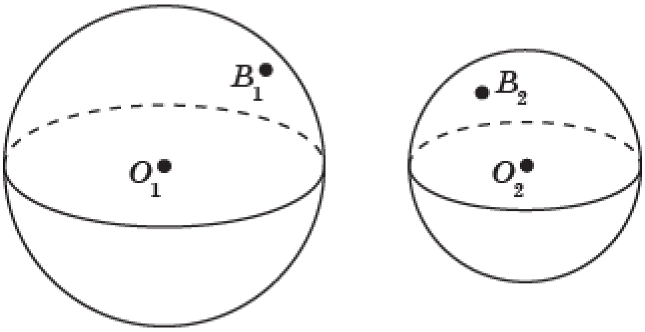


Рис. 5.5

5.6(В). Две сферы с центрами O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки C_1 и C_2 на этих сферах, расстояние между которыми наибольшее (рис. 5.6).

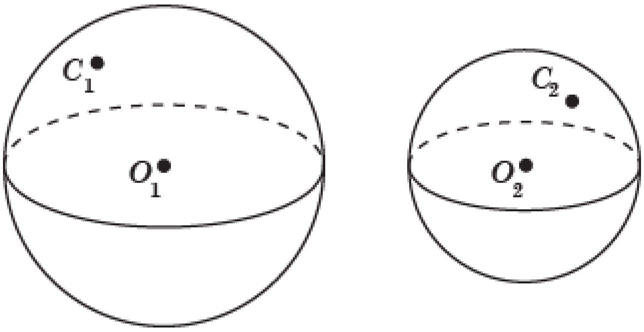


Рис. 5.6

5.7(B). Пункты A и B на поверхности Земного шара расположены на широте 54° в диаметрально-противоположных точках (рис. 5.7). Сравните длины двух дуг окружностей, соединяющих A и B, одна из которых идёт по широте, а вторая проходит через Северный полюс. Длина экватора равна 40000 км.

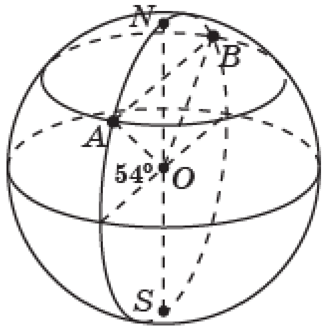


Рис. 5.7

5.8(C). На сфере даны две точки A и B. Укажите на этой сфере точки, из которых отрезок AB виден под: а) наибольшим; б) наименьшим углом (рис. 5.8).

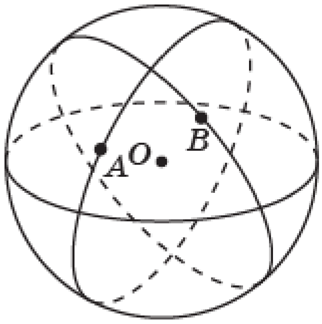


Рис. 5.8

5.9(B). Через точку C, расположенную внутри данного шара, проведите сечение этого шара наименьшей площади (рис. 5.9).

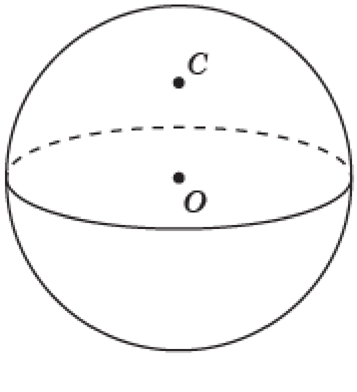


Рис. 5.9

5.10(B). Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки A и B (рис. 5.10).

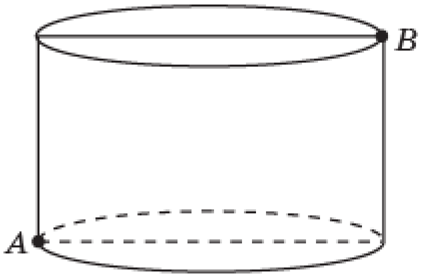


Рис. 5.10

5.11(C). На внутренней стенке цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края висит капля мёда, а на наружной стенке, в диаметрально-противоположной точке сидит муха (рис. 5.11). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до мёда. Радиус основания банки равен 10 см.

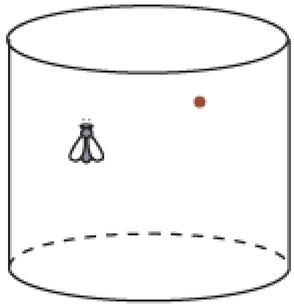


Рис. 5.11

5.12(B). Осевое сечение конуса – правильный треугольник SAB со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку C – середину образующей SB (рис. 5.12).

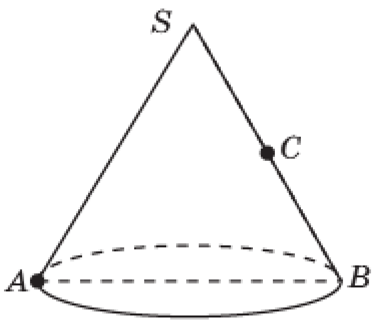


Рис. 5.12

5.13(В). Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник *SAB* со стороной основания 8 и боковой стороной 6. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки *A* в точку *C* – середину образующей *SB* (рис. 5.13).

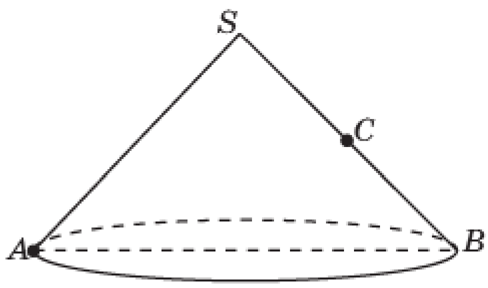


Рис. 5.13

5.14(В). Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник *ABC* со стороной основания 1 и боковой стороной 2. Найдите длину кратчайшей петли по поверхности этого конуса с началом и концом в точке *A* (рис. 5.14).

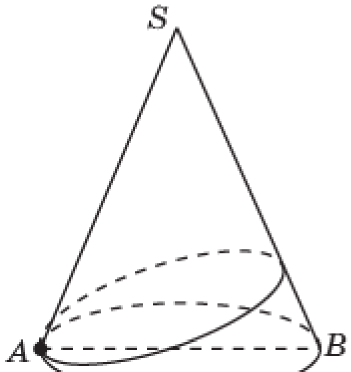


Рис. 5.14

5.15(В). Из всех конусов с данным радиусом основания найдите конус с наименьшим радиусом описанной сферы (рис. 5.15).

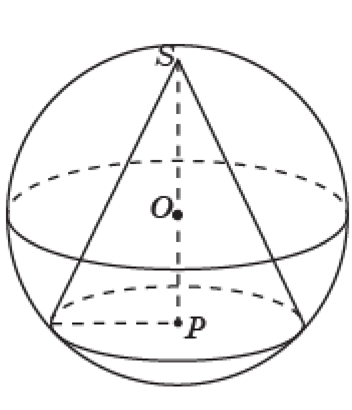


Рис. 5.15

5.16(С). Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой рёбер найдите параллелепипед наибольшего объёма (рис. 5.16).

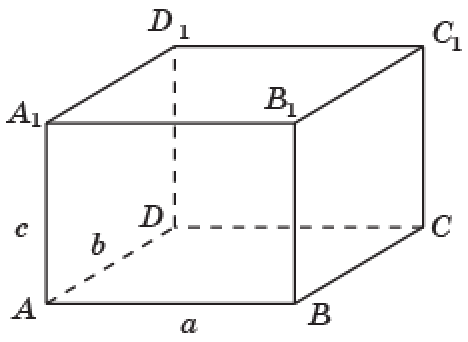


Рис. 5.16

5.17(С). Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной площадью поверхности S найдите параллелепипед наибольшего объёма (рис. 5.17).

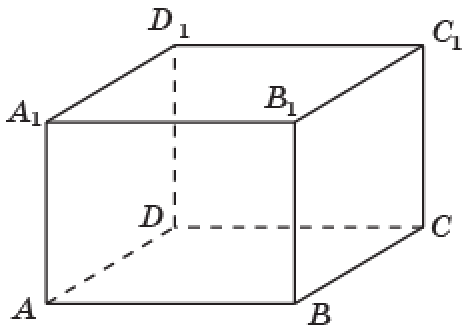


Рис. 5.17

5.18(С). Из всех прямоугольных параллелепипедов с данным объёмом V найдите параллелепипед наименьшей площади поверхности S (рис. 5.18).

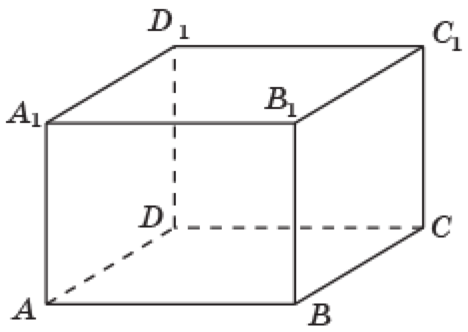


Рис. 5.18

5.19(С). Какие размеры должен иметь аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда без одной грани, чтобы при данной площади S поверхности в него вмещался наибольший объём воды (рис. 5.19)?

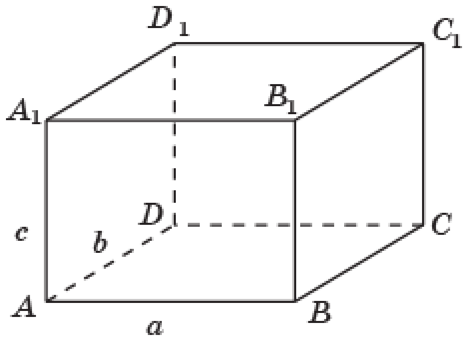


Рис. 5.19

5.20(С). Из прямоугольного листа жести требуется изготовить открытую сверху коробку. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и затем загибают получившиеся края (рис. 5.20). Найдите стороны вырезаемых квадратов, при которых получившаяся коробка имеет наибольший объём.

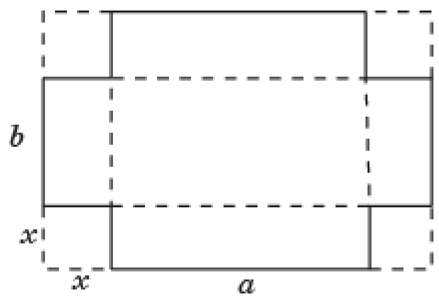


Рис. 5.20

5.21(С). Из всех цилиндров с данной площадью поверхности S найдите цилиндр наибольшего объёма (рис. 5.21).

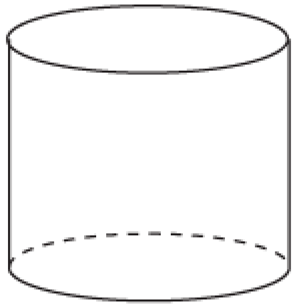


Рис. 5.21

5.22(С). Какие размеры должен иметь открытый цилиндрический сосуд, чтобы при данной площади S поверхности в него вмещался наибольший объём воды (рис. 5.22)?

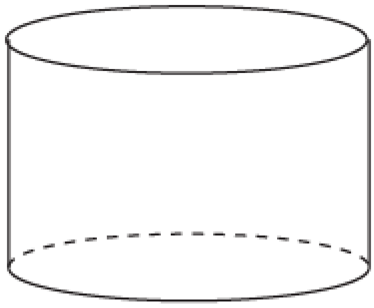


Рис. 5.22

5.23(С). Из всех конусов с данной образующей найдите конус наибольшего объёма (рис. 5.23).

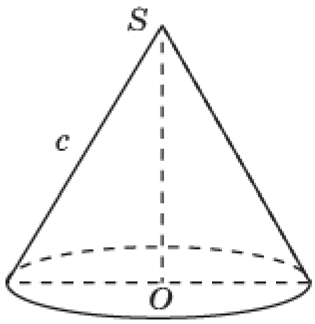


Рис. 5.23

5.24(С). Из всех конусов с данной площадью поверхности S найдите конус наибольшего объёма (рис. 5.24).

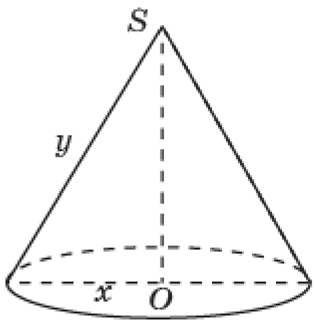


Рис. 5.24

5.25(С). Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу диаметром d, найдите параллелепипед наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 5.25)?

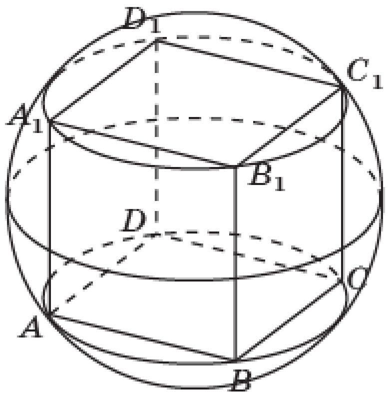


Рис. 5.25

5.26(С). Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, вписанного в сферу радиусом R (рис. 5.26).

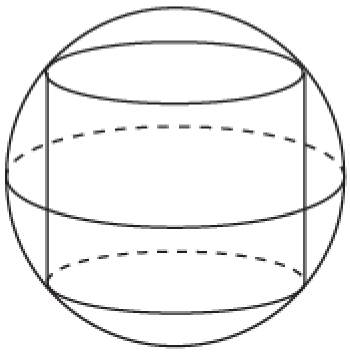


Рис. 5.26

5.27(С). Из всех цилиндров, вписанных в сферу радиусом R, найдите цилиндр наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 5.27)?

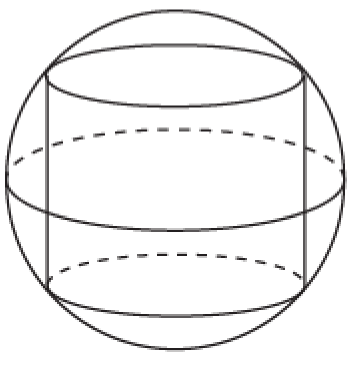


Рис. 5.27

5.28(С). Из всех конусов, вписанных в сферу радиусом R, найдите конус наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 5.28)?

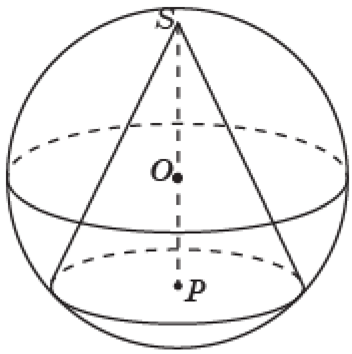


Рис. 5.28

5.29(С). Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найдите цилиндр наибольшей площади боковой поверхности (рис. 5.29).

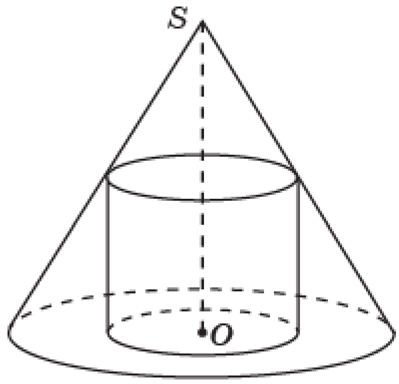


Рис. 5.29

5.30(С). Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найдите цилиндр наибольшего объёма (рис. 5.30).

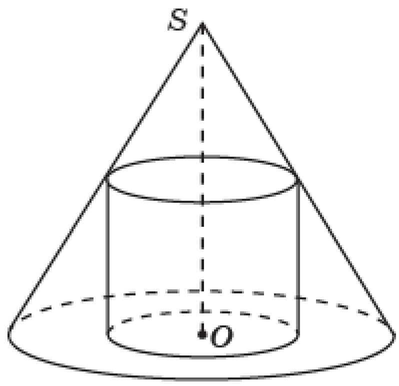


Рис. 5.30

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

I. 7 класс

1.1. Искомой точкой, расстояние до которой от данной точки A является наименьшим, будет основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую b (рис. О1.1).

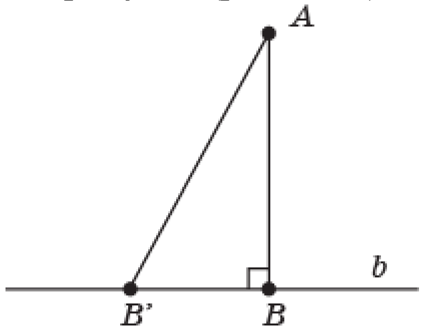


Рис. О1.1

Для любой другой точки B' этой прямой отрезок AB' будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB.

1.2. Из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую b. По условию, его длина равна d. Искомой окружностью будет окружность с центром в середине O отрезка AB и радиусом $R = \frac{d}{2}$ (рис. О1.2).

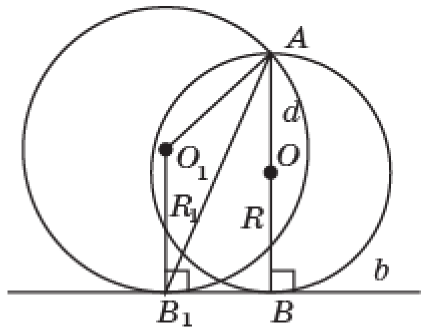


Рис. О1.2

Для любой другой окружности с центром O_1 и радиусом R_1, проходящей через точку A, опустим перпендикуляр O_1B_1 на прямую b. Тогда отрезок AB_1 является наклонной, а AB – перпендикуляром, проведёнными к прямой b. Следовательно, $AB_1 > AB$. С другой стороны, отрезок AB_1 является хордой, следовательно, он не превосходит диаметра окружности, т. е. выполняется неравенство $O_1A + O_1B_1 \geq AB_1$. Из этих неравенств получаем неравенство $2R_1 > 2R$. Следовательно, $R = \frac{d}{2}$ является наименьшим радиусом.

1.3. Искомой точкой является точка B пересечения отрезка AO с данной окружностью (рис. О1.3). Действительно, пусть B' – другая точка окружности. Воспользуемся неравенством треугольника.

Имеем, $AB + BO < AB' + B'O$. Так как $BO = B'O$, то из этого неравенства следует, что $AB < AB'$.

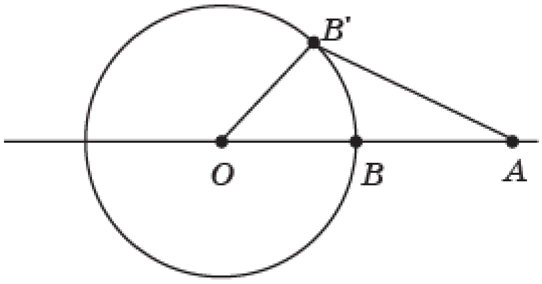


Рис. О1.3

1.4. Искомой точкой является точка C пересечения прямой AO с данной окружностью, не принадлежащая отрезку AO (рис. О1.4).

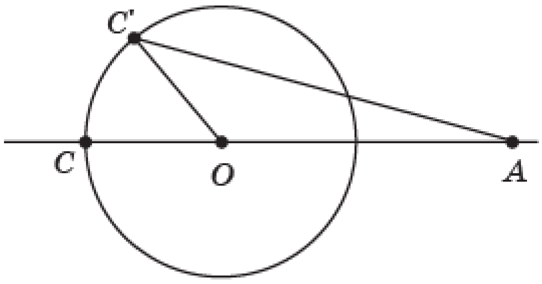


Рис. О1.4

Действительно, пусть C' – другая точка окружности. Воспользуемся неравенством треугольника. Имеем, $AC = AO + OC = AO + OC' > AC'$.

1.5. Искомой окружностью является окружность, центр P которой принадлежит отрезку OA, а радиус r равен $\frac{d-R}{2}$. Обозначим r' радиус другой окружности с центром P', касающейся данной окружности в точке B' и проходящей через точку A (рис. О1.5).

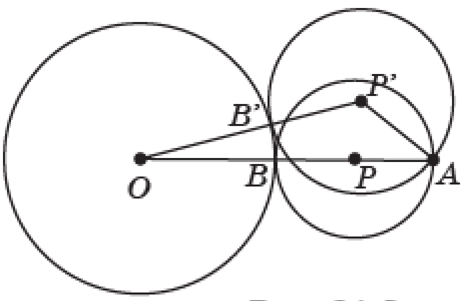


Рис. О1.5

Тогда $2r' + R = P'A + P'O > AO = 2r + R$. Следовательно, $r' > r$.

1.6. Искомой окружностью является окружность, центр P которой принадлежит отрезку OA, а радиус R равен $\frac{d+r}{2}$. Обозначим R' радиус другой окружности с центром P', касающейся данной окружности в точке B' и проходящей через точку A (рис. О1.6).

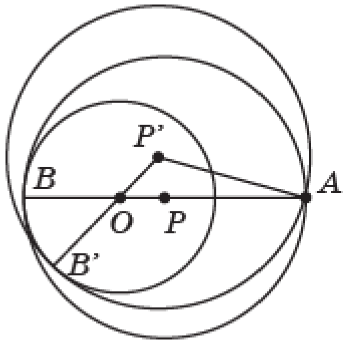


Рис. О1.6

Тогда $2R' - r = P'A + P'O > AO = 2R - r$. Следовательно, $R' > R$.

1.7. Искомой точкой является точка A пересечения перпендикуляра OC, опущенного из точки O на прямую c, с данной окружностью (рис. О1.7).

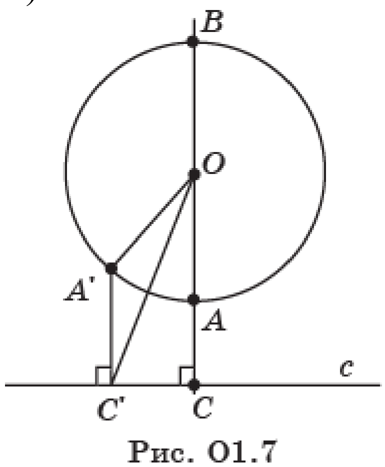


Рис. О1.7

Действительно, если A' – другая точка окружности, то $A'C' + OA' > OC' > OA + AC$. Так как $OA' = OA$, то из этих неравенств следует неравенство $A'C' > AC$.

1.8. Искомой точкой является точка B пересечения прямой, содержащей перпендикуляр OC, опущенный из точки O на прямую c, с данной окружностью, не принадлежащая этому перпендикуляру (рис. О1.8).

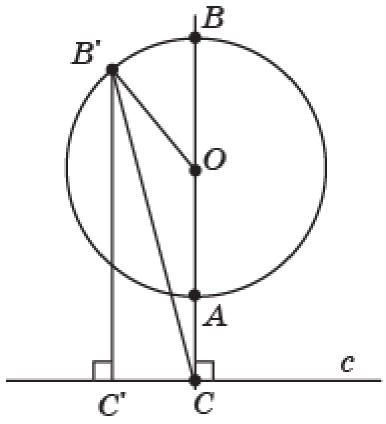


Рис. О1.8

Действительно, если B' – другая точка окружности, то $B'C' < B'C < OB' + OC = OB + OC = BC$.

1.9. Из центра O данной окружности опустим перпендикуляр OC на прямую c. Искомой окружностью является окружность, центр P которой принадлежит отрезку OC, а радиус r равен $\frac{d-R}{2}$. Обозначим r' радиус другой окружности с центром P', касающейся данной окружности и данной прямой соответственно в точках B' и C' (рис. О1.9).

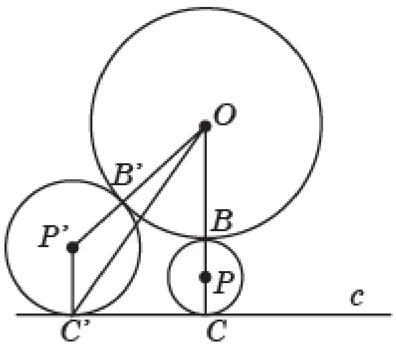


Рис. О1.9

Тогда $d = OC = R + 2r < OC' < OP' + P'C' = R + 2r'$. Следовательно, $r < r'$.

1.10. Из центра O данной окружности опустим перпендикуляр OC на прямую c. Искомой окружностью является окружность, центр P которой принадлежит отрезку OC, а радиус R равен $\frac{d+r}{2}$. Обозначим R' радиус другой окружности с центром P', касающейся данной окружности и данной прямой соответственно в точках B' и C' (рис. О1.10). Тогда $d = OC = 2R - r < OC' < OP' + P'C' = 2R' - r$. Следовательно, $R < R'$.

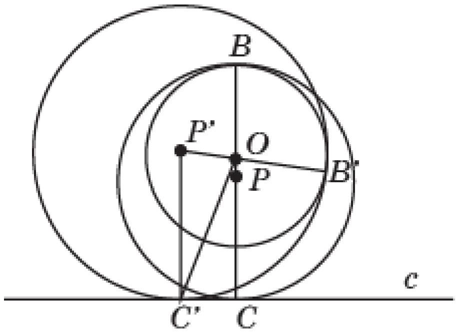


Рис. O1.10

1.11. Искомыми точками являются точки B_1 и B_2 пересечения отрезка O_1O_2 с данными окружностями (рис. O1.11).

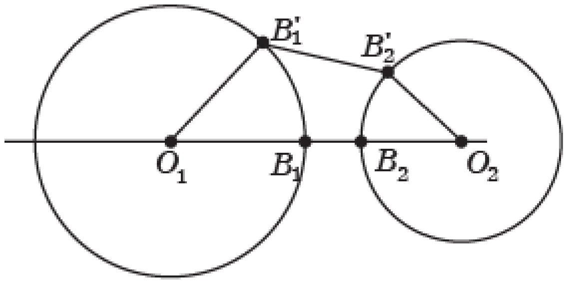


Рис. O1.11

Пусть B_1', B_2' – другие точки этих окружностей. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $O_1B_1' + B_1'B_2' + B_2'O_2 > O_1O_2 = O_1B_1 + B_1B_2 + B_2O_2$. Так как $O_1B_1' = O_1B_1$ и $B_2'O_2 = B_2O_2$, то будет выполняться неравенство $B_1'B_2' > B_1B_2$.

1.12. Искомыми точками являются точки C_1 и C_2 пересечения прямой O_1O_2 с данными окружностями, не принадлежащие отрезку O_1O_2 (рис. O1.12).

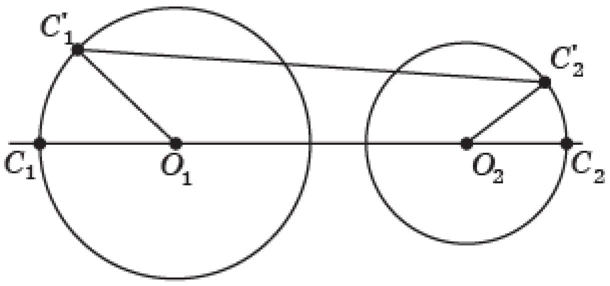


Рис. O1.12

Пусть C_1', C_2' – другие точки этих окружностей. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $C_1'C_2' < O_1C_1' + C_1'C_2' + C_2'O_2 = C_1O_1 + O_1O_2 + O_2C_2 = C_1C_2$.

1.13. Искомой окружностью является окружность, центр O которой принадлежит отрезку O_1O_2, а радиус R равен $\frac{d-R_1-R_2}{2}$. Обозначим A и B точки касания этой окружности с данными окружностями. Обозначим R' радиус другой окружности с центром O', касающейся данных окружностей в точках A' и B' (рис. O1.13).

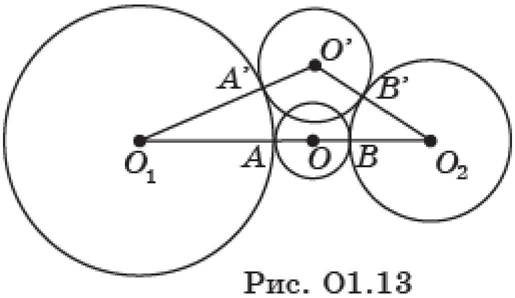


Рис. O1.13

Тогда $O_1O_2 = R_1 + 2R + R_2 < O'O_1 + O'O_2 = R_1 + 2R' + R_2$. Следовательно, $R < R'$.

1.14. Искомой окружностью является окружность, центр O которой принадлежит отрезку O_1O_2, а радиус R равен $\frac{d+R_1+R_2}{2}$. Обозначим A и B точки касания этой окружности с данными окружностями. Обозначим R' радиус другой окружности с центром O', касающейся данных окружностей в точках A' и B' (рис. O1.14).

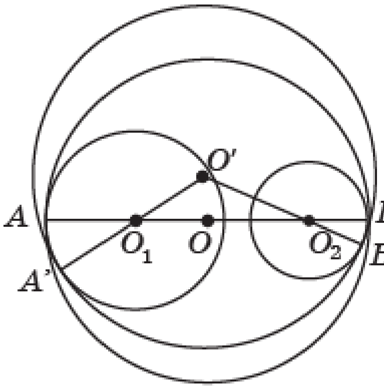


Рис. O1.14

Тогда $2R' = O'A' + O'B' = R_1 + O'O_1 + R_2 + O'O_2 > R_1 + d + R_2 = AB = 2R$. Следовательно, $R' > R$.

1.15. Искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и прямой c (рис. O1.15).

Действительно, из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' прямой c выполняется неравенство $AC' + C'B > AC + CB$, значит, сумма $AC + CB$ будет наименьшей.

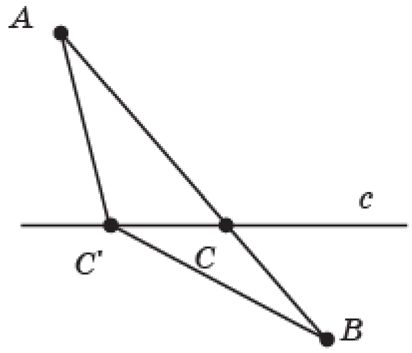


Рис. O1.15

1.16. Опустим на прямую c перпендикуляр BH и отложим на его продолжении отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка на прямой c (рис. O1.16).

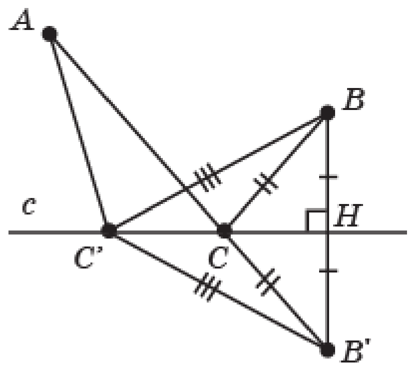


Рис. O1.16

Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой. Следовательно, искомой точкой является точка C пересечения прямой AB' с прямой c.

1.17. Решение показано на рисунке O1.17.

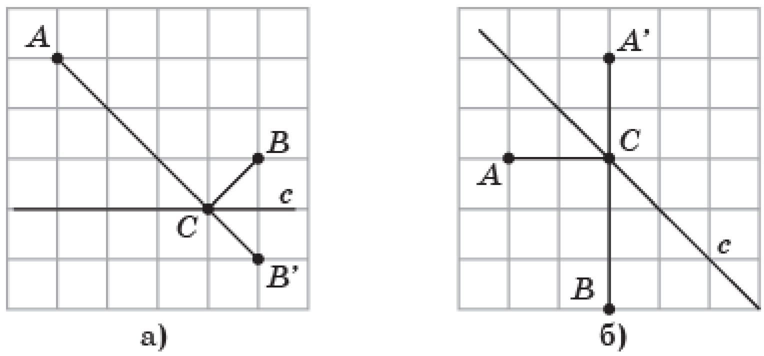


Рис. O1.17

1.18. Искомый треугольник *ABC* показан на рисунке O1.18.

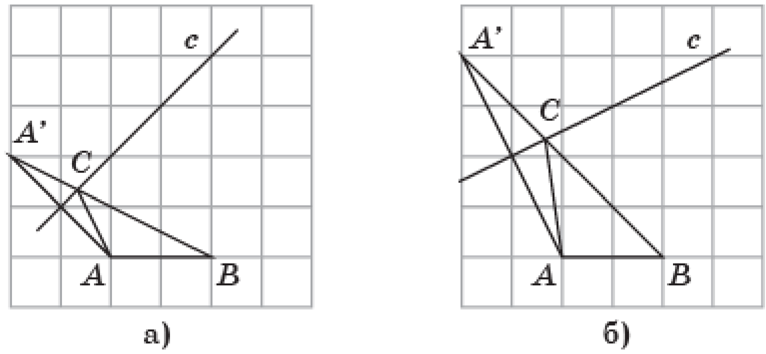


Рис. O1.18

1.19. Искомой точкой *C* является точка пересечения прямой *AB* и прямой *c* (рис. O1.19).

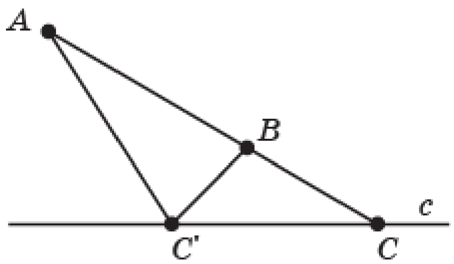


Рис. O1.19

Действительно, разность *AC* – *CB* равна *AB*. Для любой другой точки *C'* прямой *c* из неравенства треугольника следует, что выполняется неравенство *AC'* – *C'B* < *AB*.

1.20. Из точки *B* опустим на прямую *c* перпендикуляр *BH* и на его продолжении отложим отрезок *HB'*, равный *BH*. Пусть *C'* – произвольная точка на прямой *c*. Прямоугольные треугольники *BHC'* и *B'HC'* равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство *C'B* = *C'B'*. Поэтому разность *AC'* – *C'B* будет наибольшей тогда и только тогда, когда наибольшей будет равная ей разность *AC'* – *C'B'*. Ясно, что последняя разность является наибольшей в случае, если точки *A*, *B'*, *C'* принадлежат одной прямой. Следовательно, искомой точкой является точка *C* пересечения прямой *AB'* с прямой *c* (рис. O1.20).

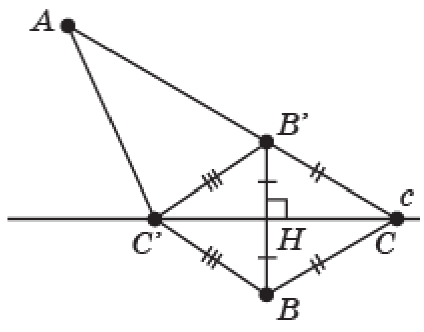


Рис. O1.20

1.21. Решение показано на рисунке О1.21.

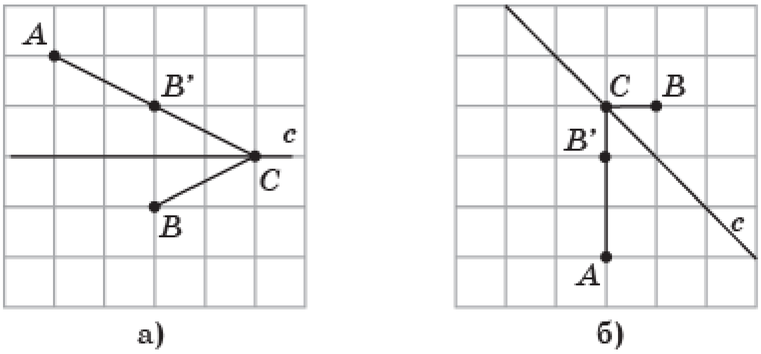


Рис. О1.21

1.22. Из точки *C* опустим на стороны *a* и *b* перпендикуляры *CH’* и *CH”* соответственно. Отложим на их продолжениях соответственно отрезки *H’C’*, *H”C”*, равные *CH’* и *CH”* (рис. О1.22).

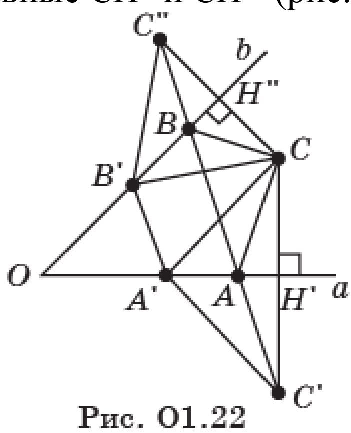


Рис. О1.22

Пусть *A‘*, *B’* – произвольные точки на сторонах угла *a* и *b* соответственно. Имеют место равенства *C’A’* = *CA‘*, *C”B’* = *CB’*. Периметр треугольника *CA‘B’* будет наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшей будет длина ломаной *C’A’B’C”*. Ясно, что она является наименьшей в случае, если точки *C’*, *A'*, *B'*, *C”* принадлежат одной прямой. Следовательно, искомыми точками *A* и *B* являются точками пересечения отрезка *C’C”* со сторонами угла.

1.23. В случае прямого угла прямая *C’C”* будет проходить через точку *O* (рис. О1.23, а).

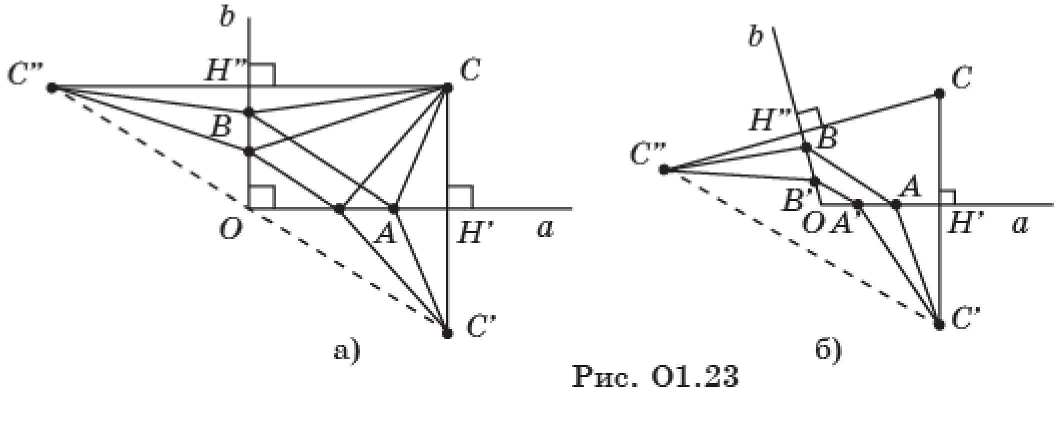


Рис. О1.23

В случае тупого угла прямая $C'C''$ не будет иметь с данным углом общих точек (рис. О1.23, б).

Для любых точек A, B на сторонах угла найдутся точки A', B', расположенные ближе к точке O, для которых длина ломаной $C'A'B'C''$ будет меньше длины ломаной $C'ABC''$. Таким образом, в этих случаях точек A, B на сторонах угла, для которых периметр треугольника ABC наименьший, не существует.

1.24. Решение показано на рисунке О1.24.

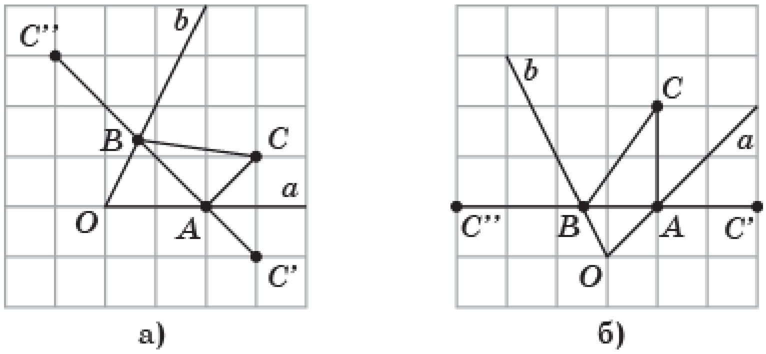


Рис. О1.24

1.25. На стороне AB зафиксируем точку C_1. На сторонах BC и AC найдём точки A_1 и B_1 соответственно, для которых периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший. На рисунке О1.25 показано построение этих точек.

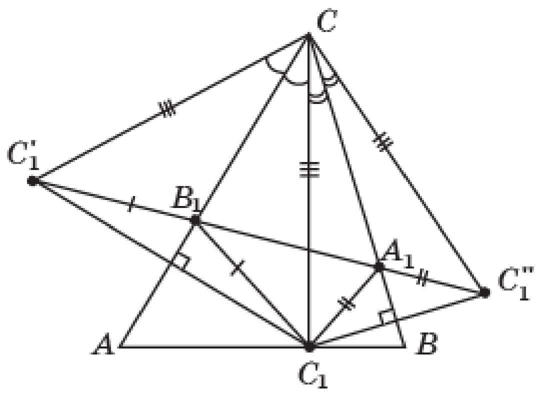


Рис. О1.25

Будем теперь менять положение точки C_1 на стороне AB и искать такое положение, при котором периметр треугольника $A_1B_1C_1$ наименьший.

Рассмотрим треугольник $CC'_1C''_1$. Он является равнобедренным ($CC'_1 = CC''_1 = CC_1$). Его основание $C'_1C''_1$ равно периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Его угол при вершине C равен удвоенному углу ACB, следовательно, не зависит от положения точки C_1.

Основание этого равнобедренного треугольника будет наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшей будет его боковая сторона, равная CC_1. Отрезок CC_1 будет наименьшим, если C_1 – основание высоты треугольника ABC. Аналогично, доказывается, что точки A_1, B_1 – основания высот треугольника ABC.

Таким образом, искомым треугольником является треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот данного треугольника ABC.

1.26. Решение показано на рисунке О1.26.

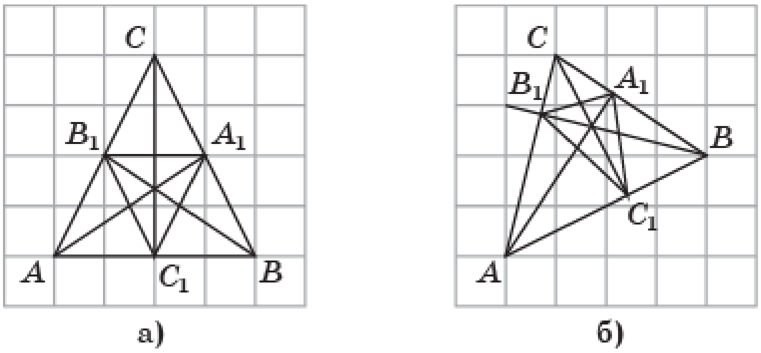


Рис. О1.26

1.27. Искомой точкой E является точка пересечения диагоналей данного четырёхугольника. Проведите доказательство самостоятельно, используя рисунок О1.27.

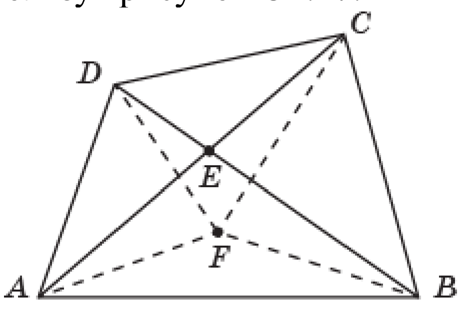


Рис. О1.27

1.29. Решение 1. Две прямые могут иметь не более одной общей точки (рис. О1.29, а). При добавлении третьей прямой может получиться не более двух новых точек пересечения (рис. О1.29, б).

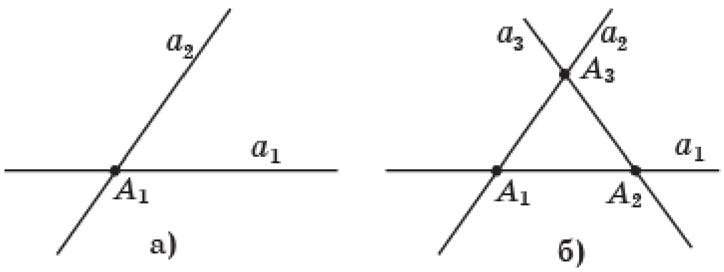


Рис. О1.29

При добавлении n-й прямой наибольшее число новых точек получается, если эта прямая пересекается с каждой из (n – 1)-й прямой в новых ночках. Число этих точек равно n – 1. Следовательно, наибольшее число всех точек попарных пересечений n прямых равно $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Решение 2. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой прямой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая из n прямых имеет n – 1 точку пересечения с остальными прямыми. При этом, поскольку каждая точка пересечения принадлежит двум прямым, общее число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.31. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счёт того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырёх частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 7 = 4 + 3. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Наибольшее число частей получается в случае, если новая n-я прямая пересекается со всеми имеющимися n – 1 прямыми. При этом она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n. Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно $2 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

1,33. Решение аналогично решению задачи 1.29. Наибольшее число точек пересечения равно $n(n-1)$.

1.35. Решение аналогично решению задачи 1.31. Наибольшее число частей равно $n(n-1) + 2$.

II. 8 класс

2.1. Через точку *A* проведём прямую, перпендикулярную прямой *b*, и отложим на ней отрезок *AA'*, равный *h*. Обозначим *C* точку пересечения отрезка *A'D* и прямой *c*. Через точку *C* проведём прямую, перпендикулярную прямой *c*, и обозначим *B* точку её пересечения с прямой *b*. Соединим отрезком точки *A* и *B*. Путь *ABCD* будет искомым кратчайшим путём (рис. О2.1). Действительно, для произвольного расположения моста *BC* четырёхугольник *AA'CB* будет параллелограммом (стороны *AA'*, *BC* равны и параллельны). Следовательно, *AB* = *A'C*. Длина пути *ABCD* равна длине пути *AA'CD*. Так как длина отрезка *AA'* постоянна и равна *h*, то длина пути *AA'CD* будет наименьшей, если наименьшей будет длина пути *A'CD,* т. е. в случае, если точки *A'*, *C*, *D* принадлежат одной прямой.

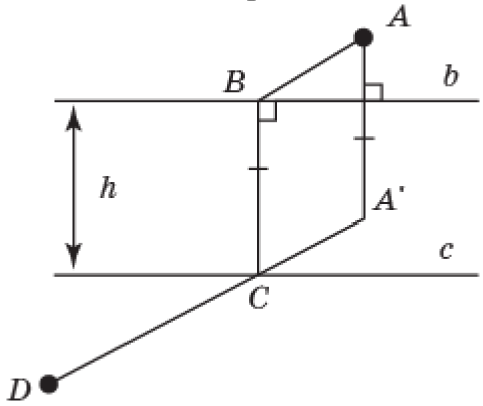


Рис. О2.1

2.2. Построение показано на рисунке О2.2.

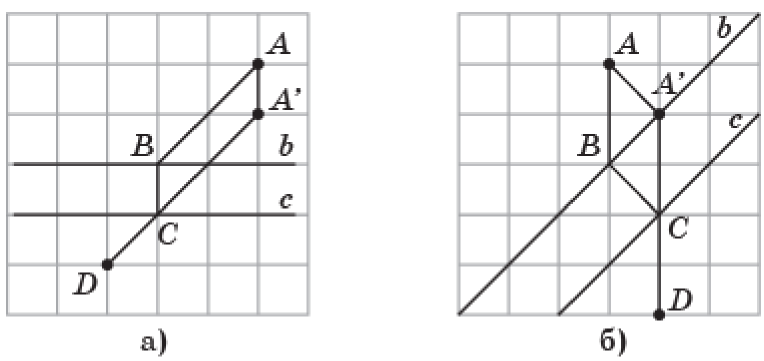


Рис. О2.2

2.3. Искомым треугольником является прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB* = *c* (рис. О2.3). В этом случае центр *O* описанной окружности принадлежит стороне *AB*. Во всех остальных случаях центр *O'* описанной окружности не принадлежит стороне *AB*, следовательно, *O'A* + *O'B* > *AB* = *OA* + *OB*. Значит, *O'A* > *OA*.

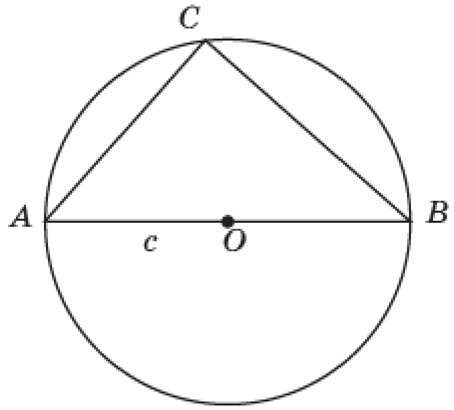


Рис. О2.3

2.4. Хорда AB будет иметь наименьшую длину в случае, если расстояние до неё от центра окружности будет наибольшим. Такой хордой является хорда AB, перпендикулярная прямой, проходящей через точки O и C (рис. О2.4).

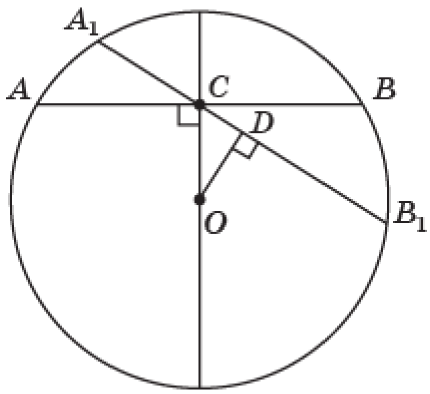


Рис. О2.4

2.5. Из центров данных окружностей опустим перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 на прямую AB (рис. О2.5).

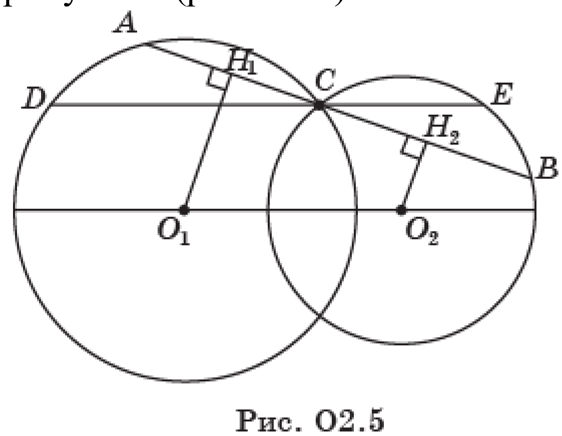


Рис. О2.5

Отрезок H_1H_2 является проекцией отрезка O_1O_2 на прямую AB и равен половине отрезка AB. Он имеет наибольшую длину, если равен отрезку O_1O_2, т. е. в случае, если прямая AB параллельна прямой O_1O_2. Искомой секущей наибольшей длины будет секущая DE, изображённая на рисунке О2.5.

2.6. Через точку C проведём окружность, касающуюся сторон угла в точках A', B'. Через точку C проведём касательную к этой окружности, пересекающую стороны a и b данного угла соответственно в точках A и B. Треугольник AOB будет искомым треугольником наименьшего периметра (рис. О2.6). Его периметр равен сумме $OA' + OB' = 2OA'$.

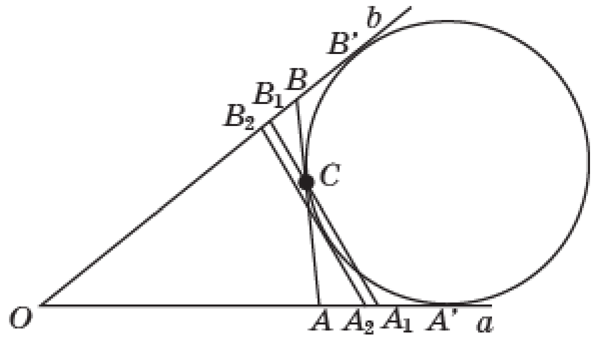


Рис. О2.6

Для другого треугольника A_1OB_1 прямая A_1B_1 будет пересекать окружность, следовательно, можно выбрать треугольник A_2OB_2, для которого прямая A_2B_2 касается окружности и параллельна прямой A_1B_1. Периметр треугольника A_2OB_2 равен периметру треугольника AOB и меньше периметра треугольника A_1OB_1.

2.7. Пусть C – наименьший из углов треугольника ABC. На сторонах BC и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построим равносторонние треугольники $A'BC$ и $AB'C$ соответственно (рис. О2.7).

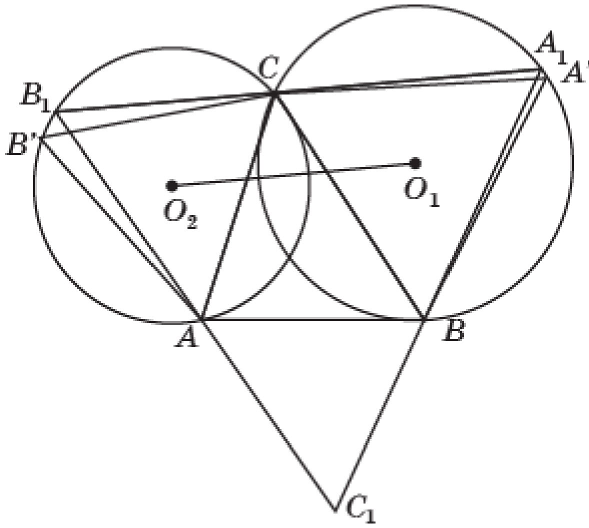


Рис. О2.7

Опишем около них окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой O_1O_2. Обозначим A_1, B_1 соответственно её точки пересечения с построенными окружностями. Проведём прямые A_1B и B_1A. Их точку пересечения обозначим C_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ будет искомым.

Действительно, две вершины искомых треугольников должны принадлежать построенным окружностям. Из них, в силу решения задачи 2.5, наибольшую сторону имеет треугольник, у которого сторона параллельна прямой O_1O_2.

2.8. Искомой точкой является точка C пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB с прямой c (рис. О2.8).

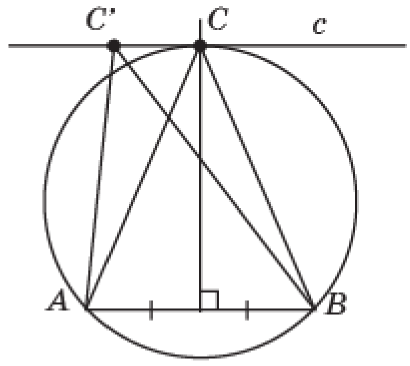


Рис. О2.8

Докажем, что для любой другой точки C' прямой c угол $AC'B$ будет меньше угла ACB. Около треугольника ABC опишем окружность. Она будет касаться прямой c в точке C. Угол ACB измеряется половиной дуги окружности, стягиваемой хордой AB. Для любой другой точки C' прямой c угол $AC'B$ измеряется полуразностью дуг окружности, заключённых внутри этого угла. Следовательно, $\angle AC'B < \angle ACB$.

2.9. Искомая точка C показана на рисунке О2.9. Угол равен 90°.

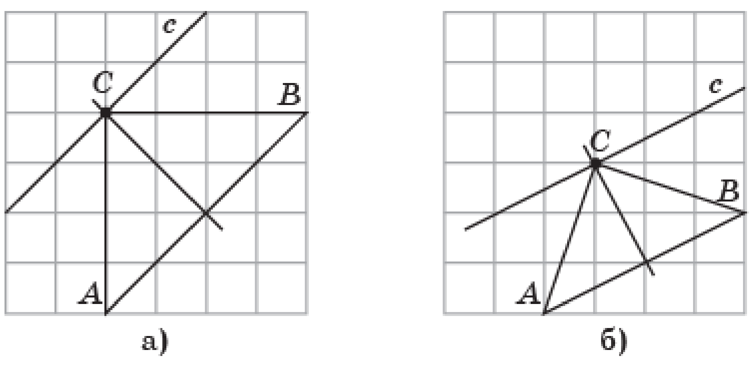


Рис. О2.9

2.10. Искомой точкой является точкой касания прямой *c* и окружности, проходящей через точки *A* и *B*. Любая другая точка *C'* данной прямой расположена вне этой окружности. Следовательно, угол *AC'B* будет меньше угла *ACB*.

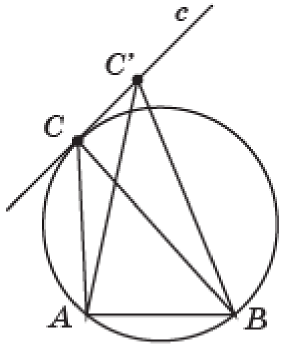


Рис. О2.10

2.11. Искомые точки *C* показаны на рисунке О2.11, а, б. Они являются точками касания прямой *c* и окружности, проходящей через точки *A* и *B*. Угол *ACB* равен 45°.

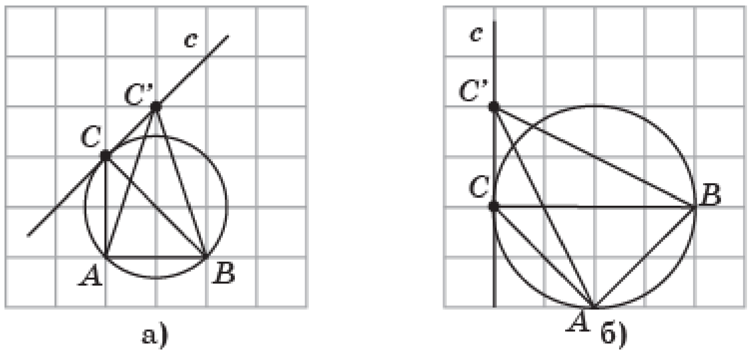


Рис. О2.11

2.12(С). В случае а рассмотрим окружность, проходящую через точки *A*, *B* и касающуюся данной окружности внешним образом в точке *C* (рис. О2.12, а). Эта точка *C* будет искомой, для неё угол *ACB* наибольший. Любая другая точка *C'* данной окружности расположена вне этой окружности. Следовательно, угол *AC'B* будет меньше угла *ACB*.

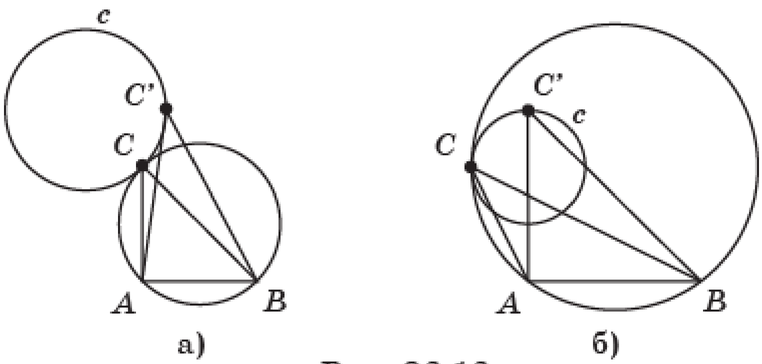


Рис. О2.12

В случае б рассмотрим окружность, проходящую через точки *A*, *B*, и касающуюся данной окружности внутренним образом в точке *C* (рис. О2.12, б). Эта точка *C* будет искомой, для неё угол *ACB* наименьший. Любая другая точка *C’* данной окружности расположена внутри построенной окружности. Следовательно, угол *AC’B* будет больше угла *ACB*.

2.13. Искомая точка *C*, для который угол *ACB* наибольший, показана на рисунке О2.13, а. Точка *C*, для который угол *ACB* наименьший, показана на рисунке О2.13, б.

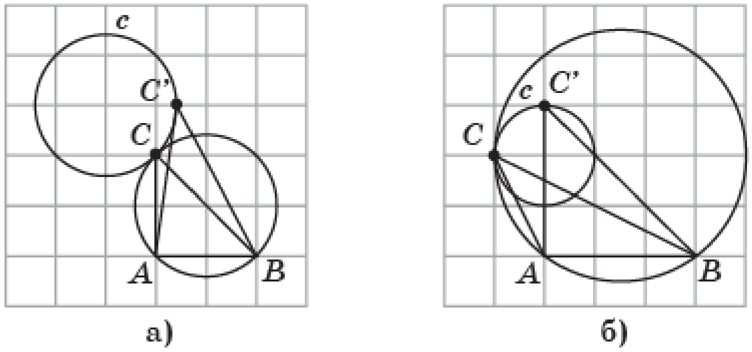


Рис. О2.13

2.14. Рассмотрим окружность, концентрическую с данной и касающуюся данной прямой в точке *C* (рис. О2.14). Эта точка *C* будет искомой, для которой угол *ACB* наибольший. Любая другая точка *C’* данной прямой расположена дальше центра *O* данной окружности, поэтому угол *A’C’B’* будет меньше угла *ACB*.

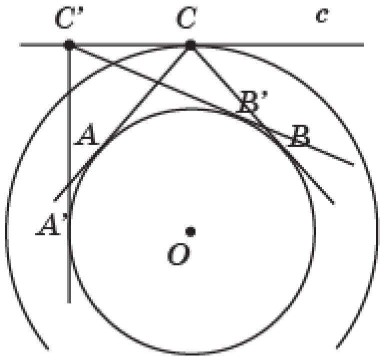


Рис. О2.14

2.15. Искомая точка *C* показана на рисунке О2.15. Она является точкой касания прямой *c* и окружности, концентрической с данной окружностью. Угол *ACB* равен 60°.

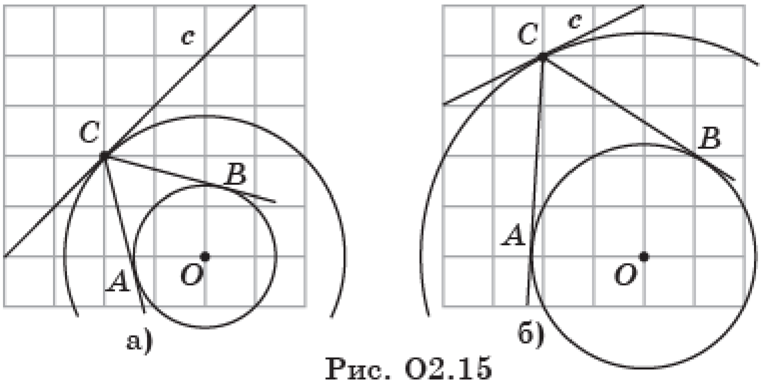


Рис. O2.15

2.16. Построим две окружности, концентрические с окружностью с центром O и касающиеся окружности с центром P соответственно внешним и внутренним образом. Искомыми точками C_1, C_2 будут точки касания этих окружностей с окружностью с центром P (рис. O2.16).

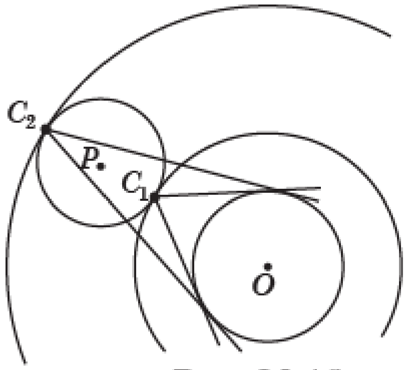


Рис. O2.16

2.17. Искомая точка C показана на рисунке O2.17. Угол ACB равен 60°.

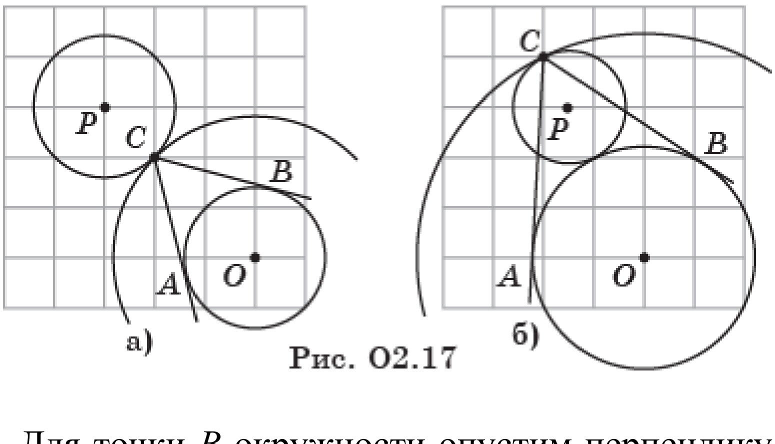


Рис. O2.17

2.18. Для точки B окружности опустим перпендикуляр OD на прямую AB. В прямоугольном треугольнике OBD гипотенуза OB постоянна (равна радиусу), следовательно, угол OBD тем больше, чем больше катет OD. Угол OBA будет наибольшим, когда угол OAB –

прямой. Следовательно, искомой точкой является точка C пересечения прямой, проходящей через точку A, перпендикулярной прямой OA, с данной окружностью (рис. О2.18).

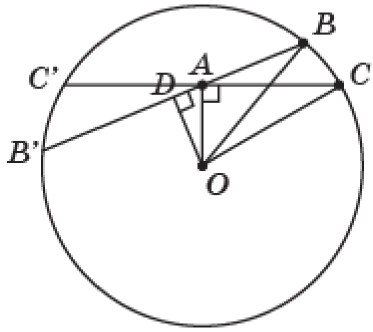


Рис. О2.18

2.19. Периметры четырёхугольников $EFGH$, вписанных в квадрат $ABCD$, равны длинам ломаных $EFG'H'E'$. Эти периметры будут наименьшими, если вершины соответствующих ломаных принадлежат одной прямой. Значит, искомыми четырёхугольниками будут прямоугольники $EFGH$, стороны которых параллельны диагоналям данного квадрата (рис. О2.19).

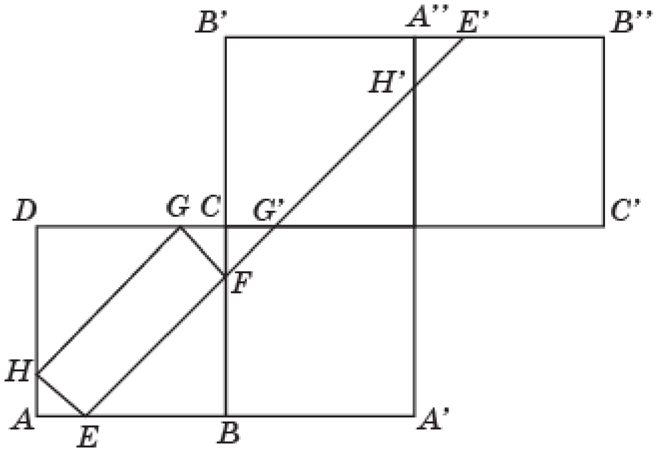


Рис. О2.19

2.20. Через вершину C треугольника ABC проведём какую-нибудь прямую c' и опустим на неё перпендикуляры AA' и BB'.

В случае, если эта прямая не пересекает сторону AB данного треугольника, то четырёхугольник $ABB'A'$ – трапеция (рис. О2.20, а). Сумма $AA' + BB'$ равна удвоенной средней линии DD' этой трапеции. Эта средняя линия будет наибольшей, если она равна медиане CD треугольника ABC. Следовательно, искомой прямой является прямая c, перпендикулярная медиане CD треугольника ABC.

В случае, если прямая *c’* пересекает сторону *AB* данного треугольника, сумма *AA’* + *BB’* не превосходит стороны *AB* треугольника *ABC*. Наибольшее значение этой суммы принимается для прямой *c*, перпендикулярной прямой *AB* (рис. О2.20, б).

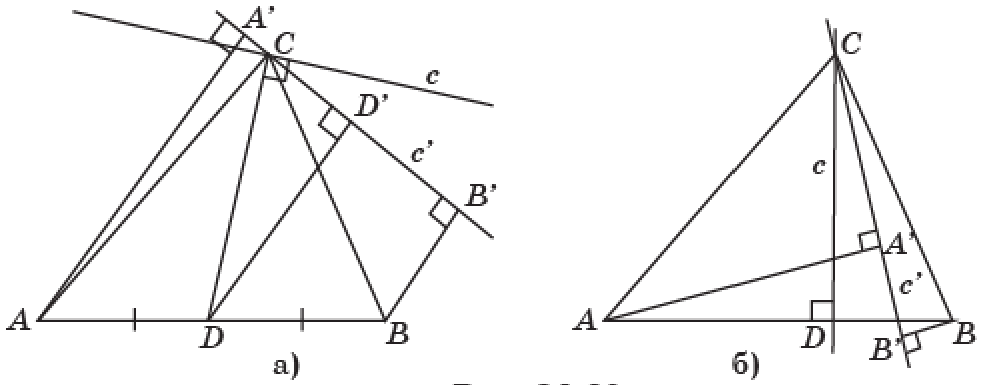


Рис. О2.20

Сравним наибольшие значения, принимаемые в первом и втором случаях. Это зависит от угла *C* треугольника *ABC*.

Если угол *C* острый, то удвоенная медиана *CD* больше стороны *AB*. В этом случае искомой прямой является прямая *c*, перпендикулярная этой медиане.

Если угол *C* прямой, то удвоенная медиана *CD* равна стороне *AB*. В этом случае искомыми прямыми являются две прямые. Одна из них перпендикулярна медиане *CD*, а другая – перпендикулярна стороне *AB*.

Если угол *C* тупой, то удвоенная медиана *CD* меньше стороны *AB*. В этом случае искомой прямой является прямая *c*, перпендикулярная стороне *AB*.

2.21. Пусть *D* – произвольная точка. Повернём треугольник *ABC* и точку *D* вокруг вершины *C* на угол 60°. При этом точка *A* перейдёт в точку *A’*, точка *B* – в точку *B’*, точка *D* – в точку *D’*. Треугольник *CDD’* – равносторонний, следовательно, *CD* = *DD’* (рис. О2.21).

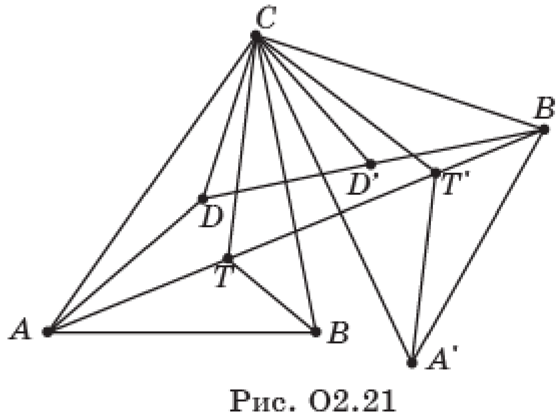


Рис. О2.21

Сумма расстояний $AD + BD + CD$ равна длине ломаной $ADD'B'$. Если точки A, D, D', B' принадлежат одной прямой, то сумма $AD + BD + CD$ будет наименьшей. Это будет, если углы ADC и BDC равны 120°, т. е. если точки D совпадает с точкой Торричелли T – такой точкой, из которой стороны треугольника ABC видны под углом 120°.

2.22. Если угол C треугольника ABC больше или равен 120°, то точка Торричелли не существует. Тем не менее, точка, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC наименьшая, существует. В этих случаях ею является вершина C треугольника ABC (рис. О2.22).

Для любой другой точки D сумма $AC + BC$ будет меньше длины ломаной $ADD'B'$, значит, меньше суммы $AD + BD + CD$.

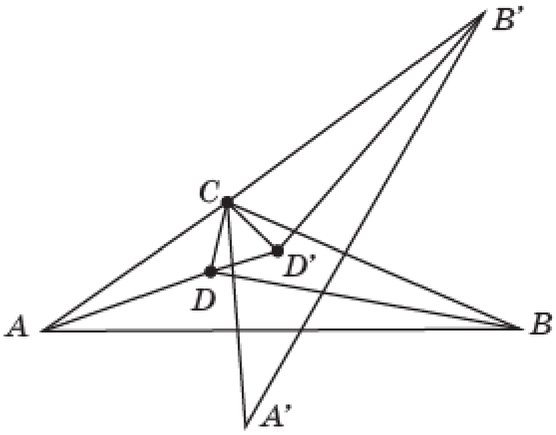


Рис. О2.22

2.23. Построение искомой точки T показано на рисунке О2.23.

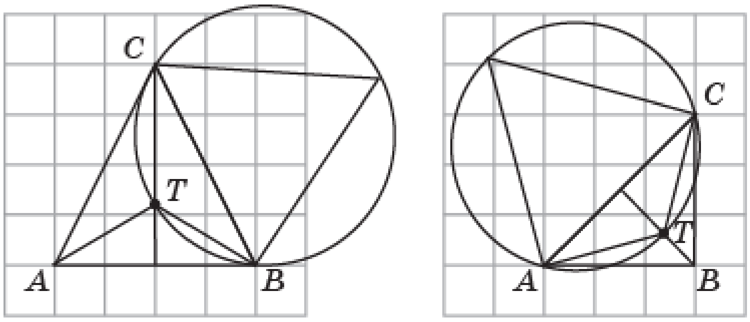


Рис. О2.23

2.24, а. Действительно, если в графе имеется замкнутая ломаная (рис. О2.24’, а), то одно из рёбер этой ломаной можно удалить.

Останется связный граф (рис. O2.24’, б) с меньшей суммой длин его рёбер. Следовательно, исходный граф не является минимальным.

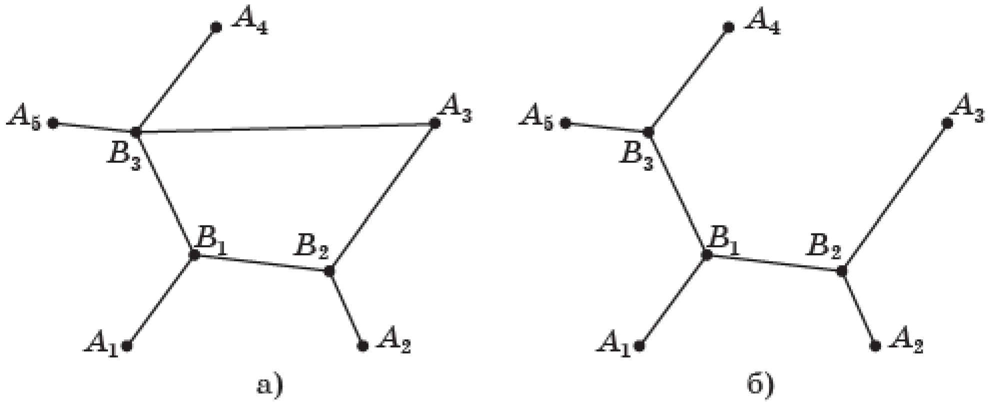


Рис. O2.24’

2.24, б. Действительно, пусть рёбра AC и BC графа образуют угол ACB, меньший 120° (рис. O2.24”, а). Обозначим D точку, из которой рёбра AC и BC видны под углом 120°. Добавим рёбра AD, BD, CD и удалим рёбра AC и BC. Полученный граф (рис. O2.24”, б) будет иметь меньшую сумму длин рёбер. Следовательно, исходный граф не является минимальным.

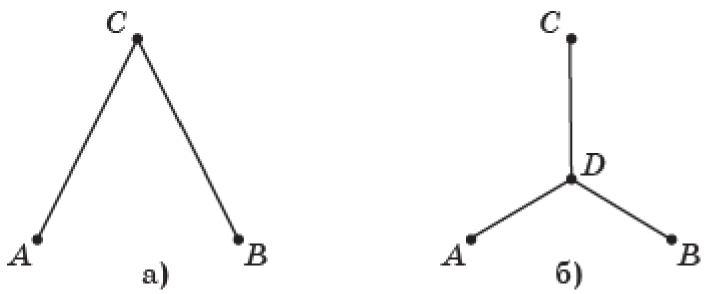


Рис. O2.24’’

2.24, в. В случае, если в вершине графа сходится более трёх рёбер, то один из углов, образованных этими рёбрами, меньше 120°. Следовательно, данный граф не является минимальным.

2.24, г. Если в добавленной вершине C сходится два ребра AC и BC, то данную вершину C можно убрать, а рёбра AC и BC заменить на ребро AB. Полученный граф будет иметь меньшее число добавленных вершин и сумму длин рёбер, не большую, чем исходный граф.

Если в добавленной вершине C сходится одно ребро AC, то его можно просто убрать. Полученный граф будет иметь меньшее число добавленных вершин и сумму длин рёбер, меньшую, чем исходный граф.

2.24, д. Ели два ребра графа имеют общую внутреннюю точку, то её можно добавить к вершинам графа, не изменив при этом сумму длин его рёбер. Тогда в этой вершиной будет сходиться четыре ребра. Следовательно, данный граф не является минимальным.

2.24, е. Так как минимальный граф является деревом, то для числа его вершин В и числа рёбер Р имеет место равенство В – Р = 1, где В = $n + m$. Так как в каждой данной точке графа сходится не менее одного ребра, а в каждой добавленной вершине сходится три ребра, то имеет место неравенство 2Р $\geq n + 3m$. Из этого неравенства и равенства Р = $n + m - 1$ следует искомое неравенство $m \leq n - 2$.

2.25. Построение минимального графа с добавленными точками E и F показано на рисунке О2.25.

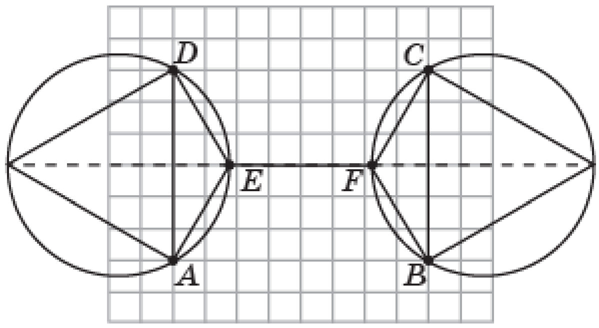


Рис. О2.25

2.26. Сведём данную задачу к задаче построения минимального графа для четырёх точек. Для этого построим равносторонний треугольник BCP и опишем около него окружность. Для точек A, P, D, E построим минимальный граф, аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче. Получим точки F и G. Соединим отрезком точки P и G и обозначим H точку его пересечения с окружностью, описанной около треугольника BCP. Соединим отрезками точку H с точками B и C. Получим минимальный граф с добавленными точками F, G и H (рис. О2.26).

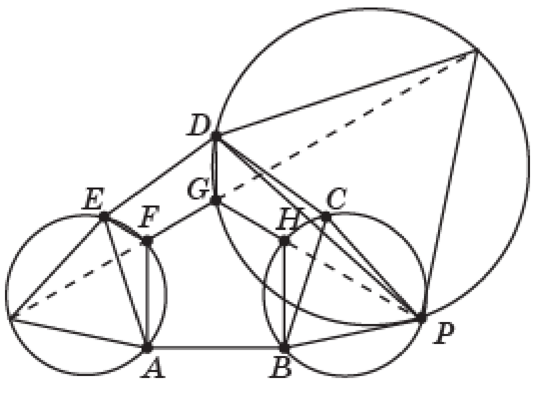


Рис. О2.26

Аналогичным образом строятся минимальные графы для большего числа точек.

2.27. Повернём отрезки AD, BD и CD вокруг точки A на угол 60° против часовой стрелки. Точка A останется на месте, точка B перейдёт в точку B', точка C – в точку C', точка D – в точку D' (рис. О2.27). При этом, $AD + BD + CD = B'D' + D'D + DC$. Последняя сумма будет наименьшей, если точки B', D', D, C принадлежат одной прямой. Это выполняется, если углы ADC и BDC равны 120°.

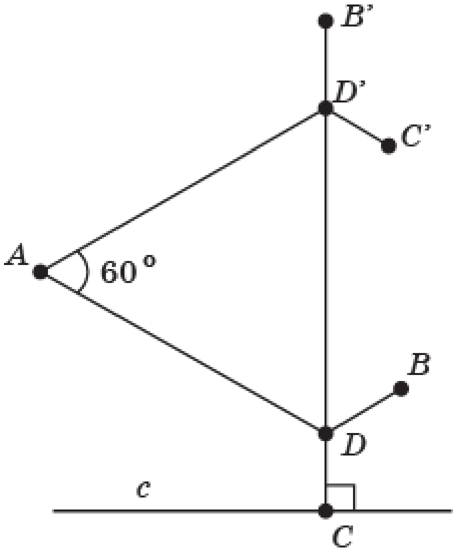


Рис. О2.27

2.28. Решение показано на рисунке О2.28.

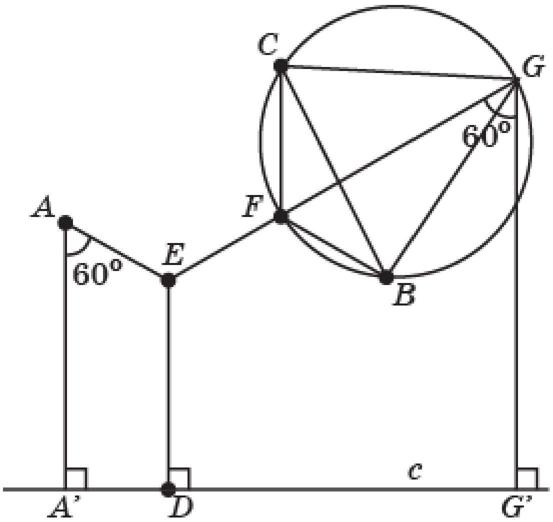


Рис. О2.28

Аналогично тому, как это было сделано для задачи Штейнера, можно доказать, что для минимального графа число m добавленных вершин не превосходит $n - 2$.

2.29. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную прямой b, и отложим на ней отрезок AA', равный h. Для точек A', E, F построим точку Торричелли D. Обозначим C точку пересечения отрезка $A'D$ и прямой c. Через точку C проведём прямую, перпендикулярную прямой c, и обозначим B точку её пересечения с прямой b. Соединим отрезками точки A и B, D и E, D и F. В результате получим искомые дороги, соединяющие пункт A с пунктами E и F, (рис. О2.29).

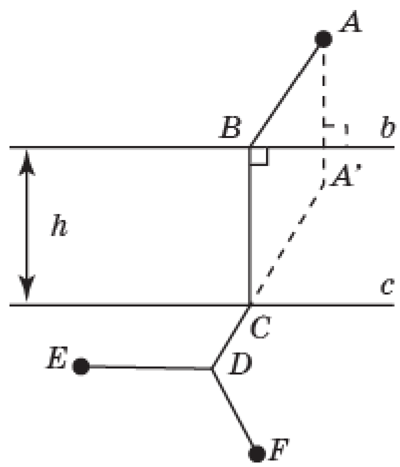


Рис. О2.29

2.30. Через точки A и B проведём прямые, перпендикулярные прямой c, и отложим на них соответственно отрезки AA', BB', равные h. Для точек A', B', E, F построим минимальный граф с дополнительными вершинами G', H. Обозначим D точку пересечения отрезка $G'H$ и прямой d. Через точку D проведём прямую, перпендикулярную прямой d, и обозначим C точку её пересечения с прямой c. Через точку G' проведём прямую, перпендикулярную прямой c, и отложим на ней отрезок $G'G = h$. Соединим отрезками точки A и G, B и G, C и G. В результате получим искомые дороги, соединяющие пункт A и B с пунктами E и F, (рис. 2.30).

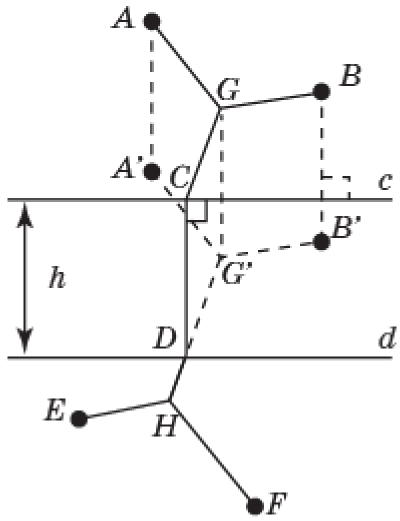


Рис. O2.30

III. 9 класс

3.1. Для произвольной точки C прямой c рассмотрим параллелограмм $ACBD$. Обозначим O точку пересечения его диагоналей. Воспользуемся теоремой о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Из неё следует, что сумма квадратов $AC^2 + BC^2$ будет наименьшей, если наименьшим будет отрезок OC. Это будет в случае, если искомая точка является основанием H перпендикуляра OH, опущенного из точки O на прямую c.

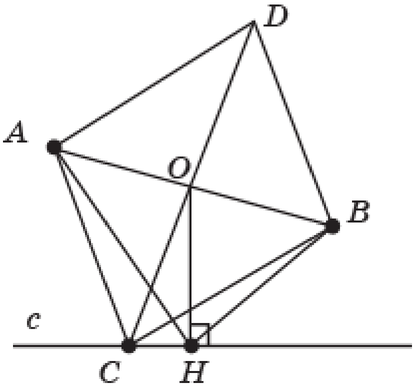


Рис. О3.1

3.2. Для произвольной точки C окружности с центром O рассмотрим параллелограмм $ACBD$. Обозначим E точку пересечения его диагоналей. Воспользуемся теоремой о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Из неё следует, что сумма квадратов $AC^2 + BC^2$ будет наименьшей или наибольшей, если соответственно наименьшим или наибольшим будет отрезок CE. Это будет в случае, если искомые точки C_1, C_2 являются точками пересечения прямой OE с окружностью (рис. О3.2).

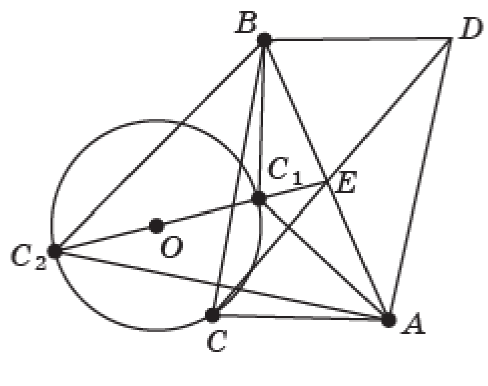


Рис. О3.2

3.3. Обозначим P точку, симметричную точке O относительно центра C. Проведём через неё прямые, параллельные прямым a, b, и обозначим B, A их точки пересечения соответственно с прямыми b, a. Получим параллелограмм $OAPB$ (рис. О3.3).

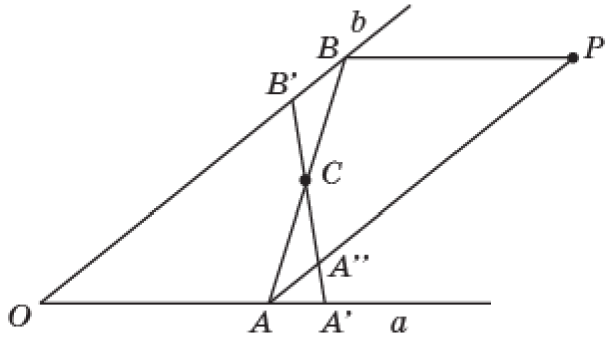


Рис. О3.3

Прямая AB будет искомой прямой, отсекающей треугольник AOB наименьшей площади. Для другой прямой $A'B'$, проходящей через точку C, одна из точек A' или B' не принадлежит отрезку OA или OB соответственно. Пусть, например, такой точкой является точка A'. Обозначим A'' точку пересечения прямой CA' со стороной AP параллелограмма. Площадь треугольника $A'OB'$ равна площади треугольника AOB плюс площадь треугольника $A'AC$ минус площадь треугольника $B'BC$. Так как площадь треугольника $A'AC$ больше площади треугольника $B'BC$, то площадь треугольника $A'OB'$ будет больше площади треугольника AOB.

3.4. Искомым треугольником является прямоугольный треугольника ABC с катетами $AC = b$ и $BC = a$ (рис. О3.4). Его площадь равна $\frac{1}{2}ab$.

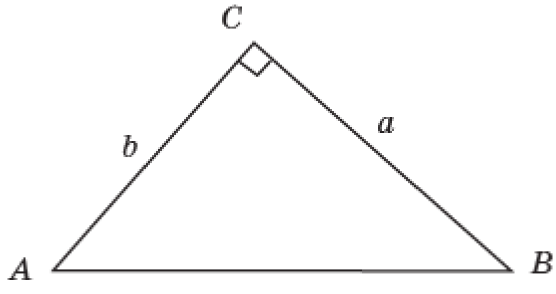


Рис. О3.4

3.5. Построим окружность с центром в точке O и радиусом $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Через точку C проведём касательную к этой окружности. Обозначим A и B точки пересечения этой касательной с данной окружностью. Треугольник AOB будет прямоугольным треугольником, следовательно, будет искомым треугольником, имеющим наибольшую площадь. Она равна $\frac{R^2}{2}$ (рис. О3.5).

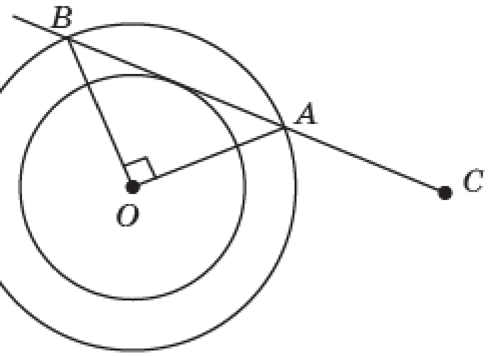


Рис. О3.5

3.6. Пусть в треугольнике *ABC* $BC = AC = a$. Для произвольной точки *D* стороны *AB* опустим перпендикуляры *DE* и *DF* на стороны *BC* и *AC* соответственно. Из вершины *A* опустим перпендикуляр *AG* на сторону *BC* (рис. О3.6). Для удвоенной площади $2S$ треугольника *ABC* имеем $2S = a(DE + DF) = a \cdot AG$. Следовательно, для любой точки *D* стороны *AB* треугольника *ABC* выполняется равенство $DE + DF = AG$. Значит, искомыми точками являются все точки стороны *AB*.

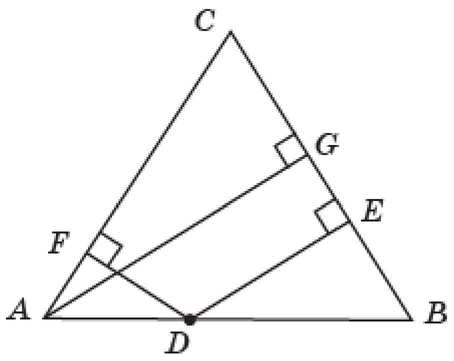


Рис. О3.6

3.7. Пусть в треугольнике *ABC* $BC = a$, $AC = b$, $a > b$. Для произвольной точки *D* стороны *AB*, отличной от точки *A*, опустим перпендикуляры *DE* и *DF* на стороны *BC* и *AC* соответственно. Из вершины *A* опустим перпендикуляр *AG* на сторону *BC* (рис. О3.7).

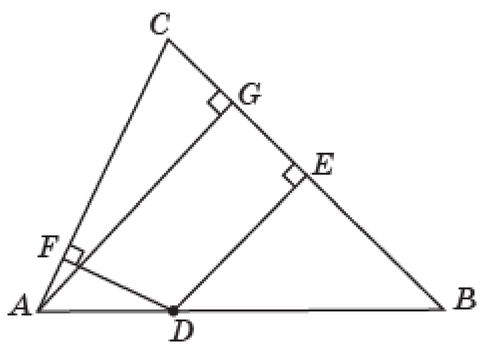


Рис. О3.7

Для удвоенной площади $2S$ треугольника ABC имеем $2S = a\cdot AG = a\cdot DE + b\cdot DF < a(DE + DF)$. Следовательно, выполняется неравенство $AG < DE + DF$. Значит, точка A является искомой.

3.8. Пусть в треугольнике ABC $BC = AC = AB = a$. Для любой точки D, расположенной на стороне треугольника ABC или внутри него, сумма расстояний от неё до сторон AB, AC, BC постоянна и равна удвоенной площади данного треугольника, делёной на a (рис. О3.8).

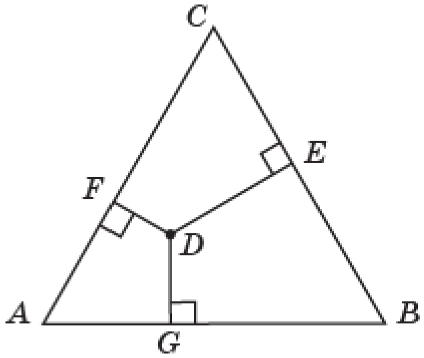


Рис. О3.8

Для точек, не принадлежащих данному треугольнику, эта сумма будет больше. Следовательно, искомыми точками являются все точки треугольника ABC.

3.9. Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $a > b$, $a > c$. Для произвольной точки D этого треугольника, отличной от точки A, опустим перпендикуляры DE, DF и DG соответственно на стороны BC, AC и AB. Из вершины A опустим перпендикуляр AH на сторону BC (рис. О3.9).

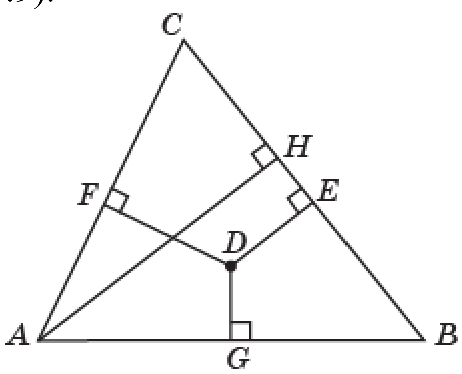


Рис. О3.9

Для удвоенной площади $2S$ треугольника ABC имеем $2S = a\cdot AH = a\cdot DE + b\cdot DF + c\cdot DG < a(DE + DF + DG)$. Следовательно, выполняется неравенство $AH < DE + DF + DG$.

3.10. Вершина C треугольника ABC с данной стороной $AB = a$ и данной площадью S принадлежит прямой c, параллельной прямой AB и удалённой от неё на расстояние $h = \frac{2S}{a}$ (рис. О3.10).

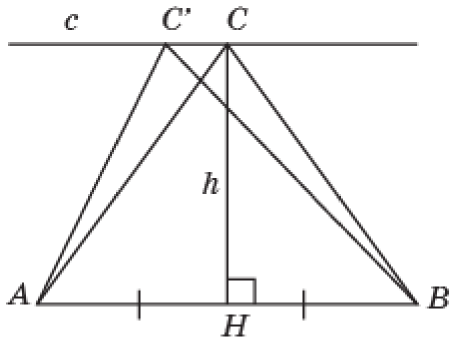


Рис. О3.10

В силу задачи Герона, из всех таких треугольников наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = a$ и высотой $h = \frac{2S}{a}$.

3.11. Если какие-нибудь стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC,$ то существует треугольник ABC_1 такой же площади, но меньшего периметра (рис. О3.11).

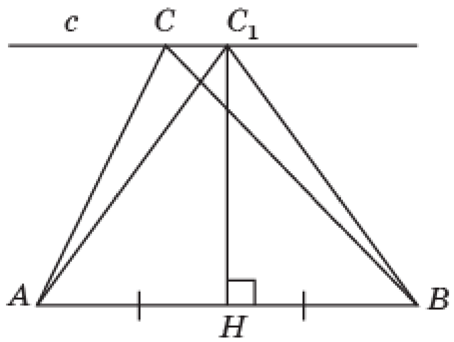


Рис. О3.11

3.12. Наименьший периметр будет у равностороннего треугольника, стороны которого равны $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$ (рис. О3.12).

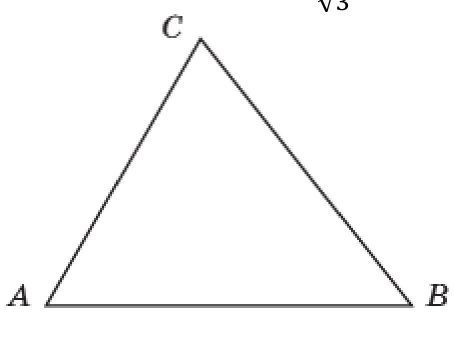


Рис. О3.12

3.13. Докажем, что искомым треугольником является равнобедренный треугольник с основанием AB. Пусть ABC – неравнобедренный треугольник с данной стороной AB и данным периметром P (рис. О3.13).

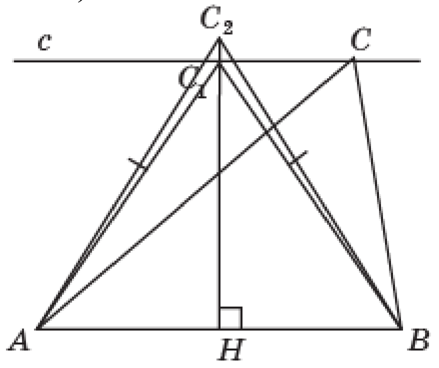


Рис. О3.13

Через вершину C проведём прямую c, параллельную прямой AB, и рассмотрим равнобедренный треугольник ABC_1 ($AC_1 = BC_1$), вершина C_1 которого принадлежит прямой c. Этот треугольник имеет ту же площадь, что и треугольник ABC, но меньший периметр. Равнобедренный треугольник ABC_2 данного периметра P будет иметь площадь, большую чем площадь треугольника ABC.

3.14. Если какие-нибудь стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC$, то существует треугольник ABC_1 такого же периметра, но большей площади (рис. О3.14).

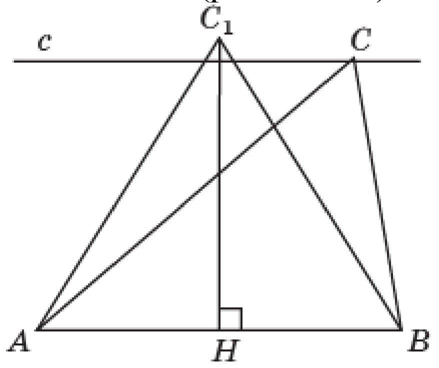


Рис. О3.14

3.15. Наибольшая площадь будет у равностороннего треугольника (рис. О3.15). Она равна $\frac{\sqrt{3}}{36}$.

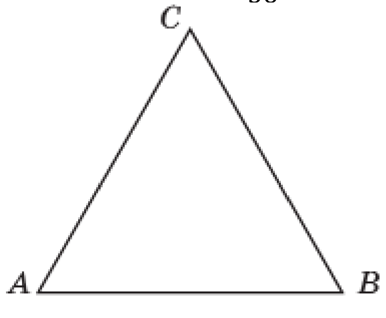


Рис. О3.15

3.16. Рассмотрим окружность с диаметром $AB = c$. Вершины C прямоугольных треугольников с гипотенузой AB принадлежат этой окружности (рис. О3.16). Из этих треугольников наибольшую высоту, следовательно, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник ABC_1. Его площадь равна $\frac{c^2}{4}$.

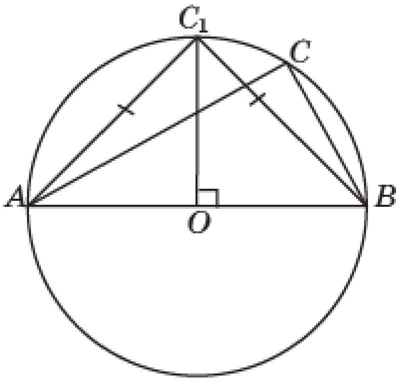


Рис. О3.16

3.17. Если какие-нибудь две стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC,$ то существует равнобедренный вписанный треугольник ABC_1 ($AC_1 = BC_1$) большей площади (рис. О3.17). Значит, искомым треугольником является равнобедренный треугольник.

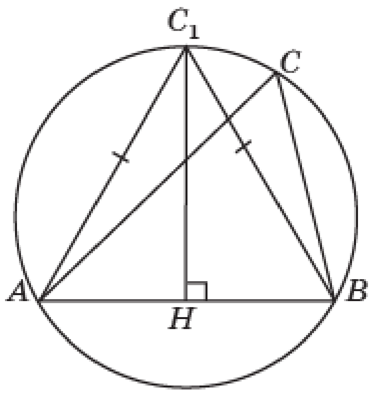


Рис. О3.17

3.18. Воспользуемся тем, что вершины C этих треугольников принадлежат окружности. Следовательно, искомым треугольником является равнобедренный треугольник (рис. О3.18).

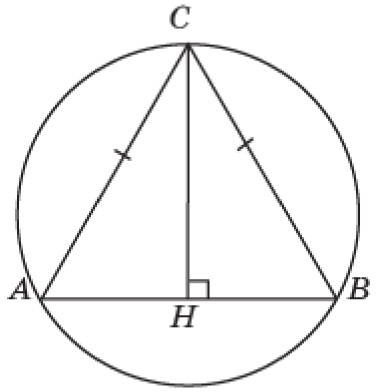


Рис. О3.18

3.19. Если какие-нибудь две стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC$, то существует равнобедренный вписанный треугольник ABC_1 ($AC_1 = BC_1$) большей площади (рис. О3.19). Следовательно, у треугольника, вписанного в окружность, имеющего наибольшую площадь, должны быть равны все стороны.

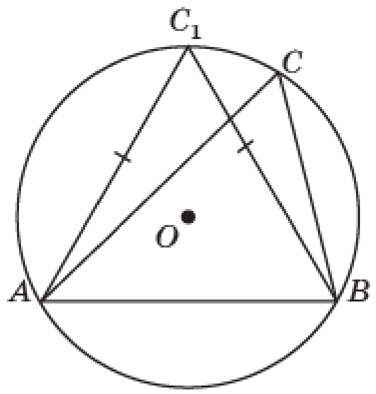


Рис. О3.19

Если радиус окружности равен 1, то искомая площадь равностороннего треугольника равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3.20. Искомым треугольником является равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) с данной стороной $AB = c$, описанный около данной окружности (рис. О3.20).

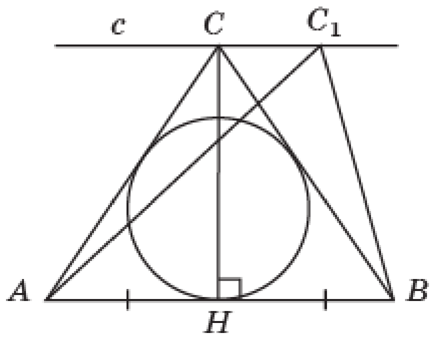


Рис. О3.20

Для треугольника ABC_1 с такой же площадью, у которого $AC_1 \neq BC_1$, периметр будет больше. Из формулы радиуса вписанной окружности $r = \frac{2S}{P}$ следует, что радиус r, вписанной в него окружности, будет меньше.

3.21. Если какие-нибудь две стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC$, то существует равнобедренный треугольник ABC_1 ($AC_1 = BC_1$) с такой же площадью, но с меньшим периметром, следовательно, с большим радиусом вписанной окружности (рис. О3.21). Значит, у треугольника с данной площадью, имеющего наибольший радиус вписанной окружности, должны быть равны все стороны.

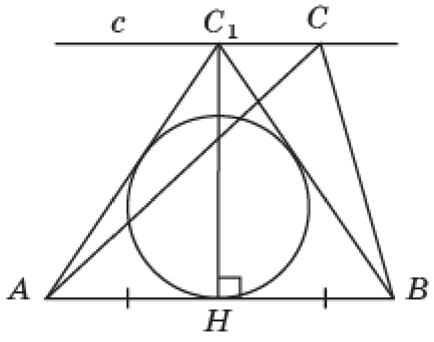


Рис. О3.21

3.22. Докажем, что искомым треугольником является равнобедренный треугольник с основанием AB. Рассмотрим треугольник ABC с данной стороной AB, описанный около данной окружности радиусом r. Предположим, что $AC \neq BC$. Через вершину C этого треугольника проведём прямую c, параллельную прямой AB. Отметим точку C_1 на прямой c, для которой $AC_1 = BC_1$. У равнобедренного треугольника ABC_1 будет такая же площадь, как и треугольник ABC, но меньший периметр (рис. О3.22).

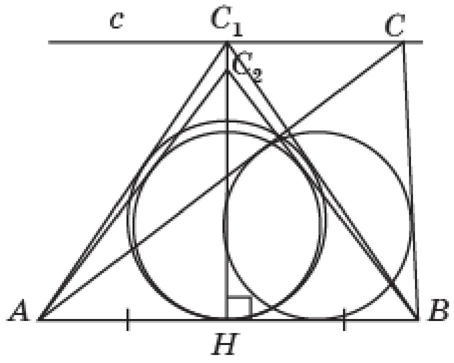


Рис. О3.22

Из формулы радиуса вписанной окружности следует, что радиус r_1, окружности, вписанной в треугольник ABC_1, будет больше радиуса окружности r, вписанной в треугольник ABC. На высоте C_1H треугольника ABC_1 возьмём точку C_2, для которой радиус вписанной окружности равен радиусу r. Равнобедренный треугольник ABC_2 будет искомым равнобедренным треугольником наименьшего периметра.

3.23. Если какие-нибудь две стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC,$ то существует равнобедренный треугольник ABC_1 ($AC_1 = BC_1$) с меньшим периметром и такой же площади S (рис. О3.23). Из формулы $r = \frac{S}{p}$ следует, что радиус окружности, вписанной в этот треугольник, больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC. Следовательно, существует равнобедренный треугольник ABC_2, описанный около данной окружности, меньшего периметра. Значит, у треугольника с наименьшим периметром, описанного около данной окружности, должны быть равны все стороны.

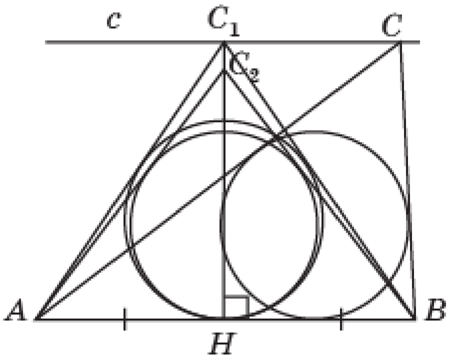


Рис. О3.23

3.24. Докажем, что искомым треугольником является равнобедренный треугольник с основанием AB. Рассмотрим треугольник ABC с данной стороной AB, описанный около данной окружности радиусом r. Предположим, что $AC \neq BC$. Через вершину C этого треугольника проведём прямую c, параллельную прямой AB. Отметим точку C_1 на прямой c, для которой $AC_1 = BC_1$. У равнобедренного треугольника ABC_1 будет такая же площадь, как и треугольник ABC, но меньший периметр. Из формулы радиуса вписанной окружности следует, что радиус r_1, окружности, вписанной в треугольник ABC_1, будет больше радиуса окружности r, вписанной в треугольник ABC. На высоте C_1H треугольника ABC_1 возьмём точку C_2, для которой радиус вписанной окружности равен радиусу r. Равнобедренный треугольник ABC_2 будет искомым равнобедренным треугольником наименьшей площади (рис. О3.24).

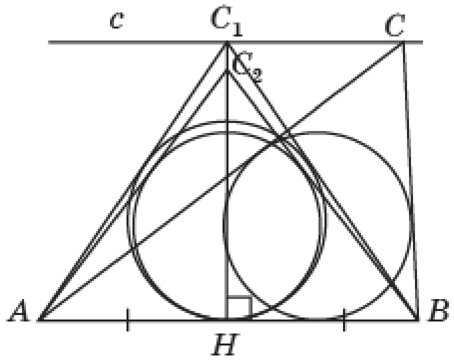


Рис. О3.24

3.25. Если какие-нибудь две стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq BC$, то существует равнобедренный треугольник ABC_2 ($AC_2 = BC_2$) с меньшей площадью (рис. О3.25). Значит, у треугольника с наименьшей площадью, описанного около данной окружности, должны быть равны все стороны.

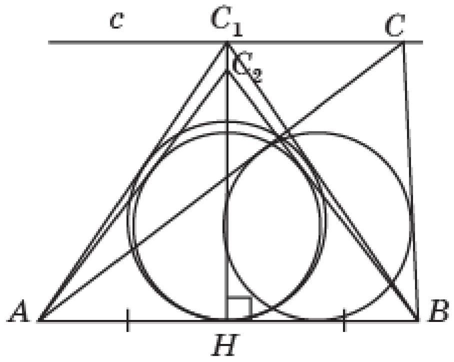


Рис. О3.25

3.26. Докажем, что искомым треугольником является равнобедренный треугольник. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC$) с данным углом C, описанный около данной окружности, $A'B'C$ – неравнобедренный треугольник ($A'C < B'C$) с этим же углом C, описанный около этой окружности (рис. О3.26).

Рис. О3.26

Обозначим D и E точки касания окружности соответственно сторон BC и AC треугольника ABC. Обозначим F точку пересечения отрезков AB и $A'B'$. Через точку B проведём прямую, параллельную прямой AC, и обозначим G её точку пересечения с отрезком $A'B'$.

Докажем, что периметр треугольника $A'B'C$ больше периметра треугольника ABC. Так как периметры треугольников ABC и $A'B'C$ равны соответственно $CD + CE + 2AE + 2BD$ и $CD + CE + 2A'E + 2B'D$, то достаточно доказать, что $B'B > A'A$. Действительно, треугольники $A'AF$ и GBF подобны, причём, $BF > AF$. Следовательно, $BG > A'A$. В треугольнике $A'B'C$ угол B' меньше угла A', который равен углу $B'GB$. Значит, в треугольнике $B'GB$ угол G больше угла B'. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $B'B > BG$, следовательно, выполняется неравенство $B'B > A'A$.

3.27. Из решения предыдущей задачи следует, что искомым треугольником является равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) (рис. О3.27).

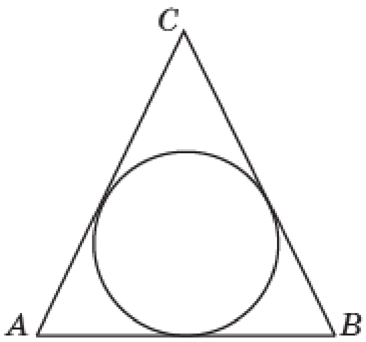


Рис. О3.27

3.28. Искомым параллелограммом $ABCD$ с данными сторонами $AB = a$, $AD = b$ является прямоугольник (рис. О3.28). Его площадь равна ab.

Рис. О3.28

3.29. Искомым прямоугольником является квадрат с данной диагональю $AC = d$ (рис. О3.29). Его площадь равна $\frac{d^2}{2}$.

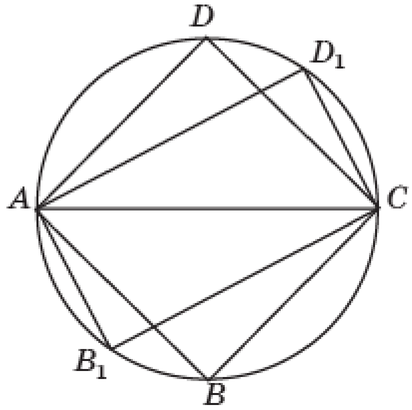


Рис. О3.29

3.30. Рассмотрим квадрат *ABCD* и прямоугольник *AEFH* с тем же периметром (рис. О3.30). Докажем, что площадь прямоугольника меньше площади квадрата.

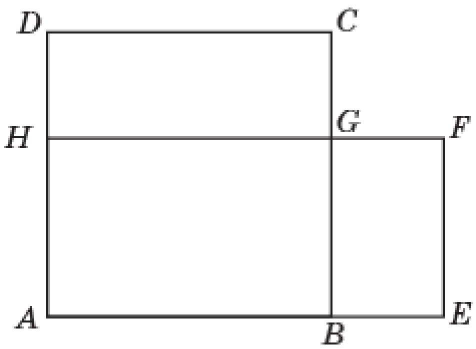


Рис. О3.30

Площадь квадрата равна сумме площадей прямоугольников *ABGH* и *HGCD*. Площадь прямоугольника равна сумме площадей прямоугольников *ABGH* и *BEFG*. Из равенства периметров прямоугольника и квадрата следует равенство сторон *BE* и *HD*. Так как $BG < HG$, то площадь прямоугольника *BEFG* меньше площади прямоугольника *HGCD*, следовательно, площадь прямоугольника *AEFH* меньше площади квадрата *ABCD*.

3.31. Пусть в прямоугольнике *ABCD* $AB = a$, $AD = b$, $a + b = p$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2},$$

которое выполняется для неотрицательных чисел a, b, равенство в котором принимается только если $a = b$. Наибольшее значение площади $S = a \cdot b$ принимается, если $a = b = \frac{p}{2}$. Следовательно, искомым прямоугольником наибольшей площади является квадрат (рис. О3.31).

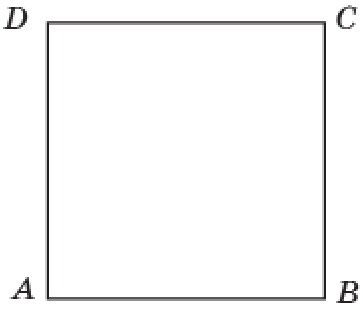


Рис. О3.31

3.32. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \varphi$. Воспользуемся формулой площади параллелограмма $ABCD$

$$S = a \cdot b \cdot \sin\varphi.$$

Так как угол параллелограмма фиксирован, то наибольшая площадь у него будет, если наибольшим будет произведение $a \cdot b$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2},$$

которое выполняется для неотрицательных чисел a, b, равенство в котором принимается только если $a = b$.

Обозначим полупериметр параллелограмма p. Тогда $a + b = p$. Наибольшее значение $a \cdot b$ принимается, если $a = b = \frac{p}{2}$. Следовательно, искомым параллелограммом наибольшей площади является ромб (рис. О3.32).

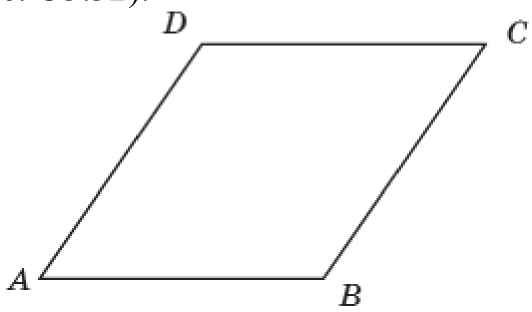


Рис. О3.32

3.33. Воспользуемся тем, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. Наибольшими диагоналями четырёхугольника, вписанного в окружность, являются диаметры этой окружности. Синус угла между диагоналями будет наибольшим, если эти диагонали перпендикулярны. Таким образом, наибольшую площадь будет иметь четырёхугольник, диагоналями которого являются перпендикулярные диаметры окружности. Этот четырёхугольник – квадрат (рис. О3.33). Его площадь равна $2R^2$.

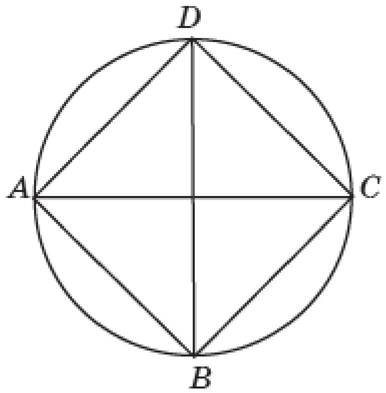


Рис. О3.33

3.34. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC сторона основания AB равна c, а высота CH, опущенная на это основание, равна h. Рассмотрим прямоугольник $DEFG$, сторона DE которого содержится в стороне AB, а вершины F, G принадлежат соответственно сторонам BC и AC треугольника ABC (рис. О3.34).

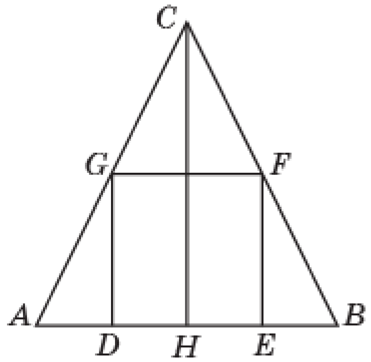


Рис. О3.34

Обозначим стороны DE и DG этого прямоугольника соответственно x и y. Тогда $\frac{y}{h} = \frac{c-x}{c}$. Следовательно, $y = \frac{h(c-x)}{c}$. Площадь прямоугольника равна $xy = \frac{h(cx-x^2)}{c}$. Наибольшее значение этой площади принимается, если наибольшее значение принимает выражение $cx - x^2 = \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2$. Это будет, если $x = \frac{c}{2}$. В этом случае $y = \frac{h}{2}$. Таким образом, стороны искомого прямоугольника равны $\frac{c}{2}$ и $\frac{h}{2}$. Его площадь равна половине площади данного треугольника, т. е. равна 0,5.

3.35. Решение 1. Пусть радиус круга равен R, AB – диаметр, ограничивающий полукруг, O – центр соответствующего круга. Рассмотрим прямоугольник $CDEF$, сторона CD которого содержится в диаметре AB, а вершины E, F принадлежат полуокружности (рис. О3.35).

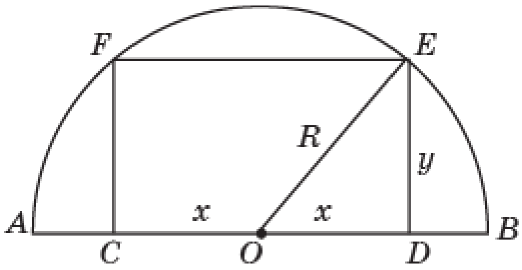


Рис. 3.О35

Обозначим $CO = OD = x$, $DE = y$. Тогда $x^2 + y^2 = R^2$, а площадь S прямоугольника $CDEF$ равна $2xy$. Квадрат этой площади равен $4x^2y^2$. Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим. Получим неравенство

$$4x^2y^2 \leq 4\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = R^4.$$

Причём, равенство в этом неравенстве достигается в случае, если $x = y = \frac{\sqrt{2}R}{2}$. Таким образом, у искомого прямоугольника стороны равны $\sqrt{2}R$ и $\frac{\sqrt{2}R}{2}$. Его площадь равна R^2.

Решение 2. Воспользуемся тем, что из всех четырёхугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат (задача 3.33). В частности, из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Следовательно, из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, наибольшую площадь будет иметь прямоугольник, являющийся половиной этого квадрата. Если радиус окружности равен R, то площадь сторона квадрата равна $\sqrt{2}R$, а его площадь равна $2R^2$. Площадь искомого прямоугольника равна R^2.

3.36. Будем называть правильный треугольник с наибольшей стороной, помещающийся в единичном квадрате, максимальным. Ясно, что вершины максимального треугольника ABC должны лежать на сторонах квадрата. Если хотя бы одна вершина, например C, лежит внутри квадрата, то треугольник ABC можно немного подвинуть в направлении, перпендикулярном противолежащей стороне, а затем увеличить его стороны гомотетией с центром в этой вершине. Получим треугольник *A'B'C'* (рис. О3.36, а) с большей стороной, помещающийся в квадрате.

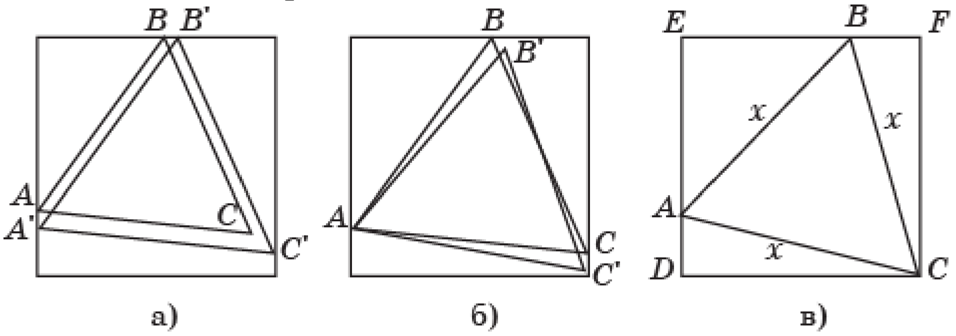


Рис. О3.36

Докажем, что одна из вершин максимального треугольника должна совпадать с вершиной квадрата. Если это не так, то на одной из сторон квадрата нет вершин треугольника (рис. О3.36, б). Тогда треугольник *ABC* можно немного повернуть вокруг вершины *A*, а затем увеличить его стороны гомотетией с центром в *A*. В результате получим треугольник, помещающийся в квадрате и имеющий большую сторону. Пусть теперь вершина *C* треугольника *ABC* совпадает с вершиной единичного квадрата (рис. О3.36, в), а сторона треугольника равна *x*. Тогда $AD = \sqrt{x^2-1}$, AE = 1- $\sqrt{x^2-1}$, AB = $\sqrt{2}(1-\sqrt{x^2-1})$. Следовательно, *x* должно удовлетворять уравнению $x = \sqrt{2}(1-\sqrt{x^2-1})$, решая которое, находим $x = \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

3.37'. Докажем, что максимальный четырёхугольник является выпуклым. Если четырёхугольник *ABCD* невыпуклый, то существует диагональ, например *BD*, в нём не содержащаяся. Обозначим *C'* точку, симметричную точке *C* относительно прямой *BD*. Полученный четырёхугольник *ABC'D* будет иметь тот же периметр, но большую площадь (рис. О3.37'). Следовательно, исходный четырёхугольник немаксимальный.

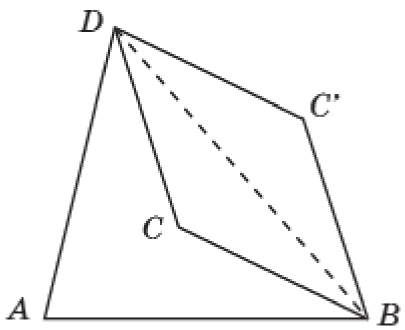


Рис. О3.37'

3.37''. Докажем, что у максимального четырёхугольника должны быть равны стороны. Пусть у максимального четырёхугольника $ABCD$ есть две неравные стороны, например, $CD > BC$. Треугольник BCD можно заменить на треугольник $BC'D$ с таким же периметром, но большей площади. У полученного четырёхугольника $ABC'D$ будет тот же периметр, что и исходный, но его площадь будет больше (рис. О3.37''). Следовательно, исходный четырёхугольник $ABCD$ немаксимальный.

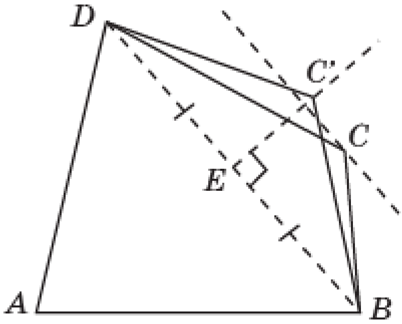


Рис. О3.37''

3.37'''. Докажем, что максимальным четырёхугольником может быть только квадрат. Так как у максимального четырёхугольника должны быть равны стороны, то он будет ромбом. Ясно, что среди ромбов данного периметра наибольшую площадь имеет ромб, у которого равны углы, т. е. квадрат (рис. О3.37''').

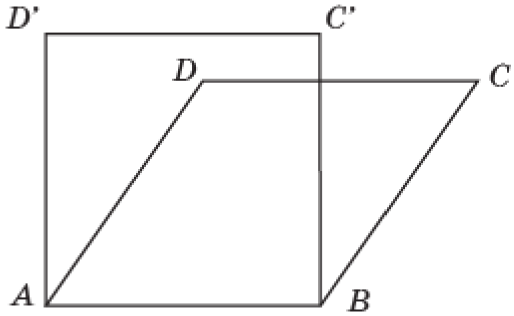


Рис. О3.37'''

3.38'. Если фигура Φ невыпуклая, то существует отрезок AB, концы которого принадлежат кривой, а внутренние его точки расположены во внешней области (рис. О3.38').

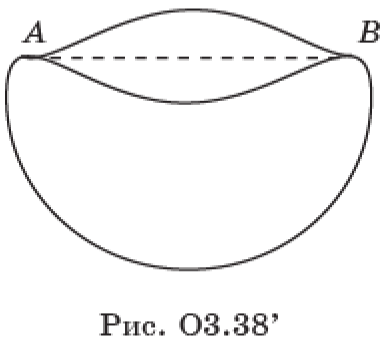


Рис. О3.38'

Заменим дугу исходной кривой, соединяющую точки A, B, на симметричную ей дугу относительно прямой AB. Соответствующая ей фигура Φ' будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура немаксимальная.

3.38''. Пусть хорда AB делит кривую на две части равной длины (рис. 3.38'').

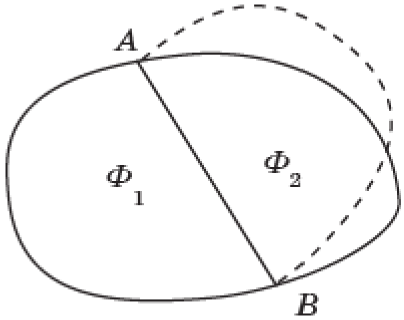


Рис. О3.38''

Предположим, что площади образовавшихся частей Φ_1, Φ_2 фигуры Φ не равны, например, $S(\Phi_1) > S(\Phi_2)$. Построим фигуру Φ' того же самого периметра, но большей площади. Для этого в фигуре Φ заменим фигуру Φ_2 на фигуру, симметричную Φ_1 относительно прямой AB. Полученная фигура Φ' будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура немаксимальная.

3.38'''. Пусть хорда AB делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру Φ, на две части равной длины (рис. О3.38''', а).

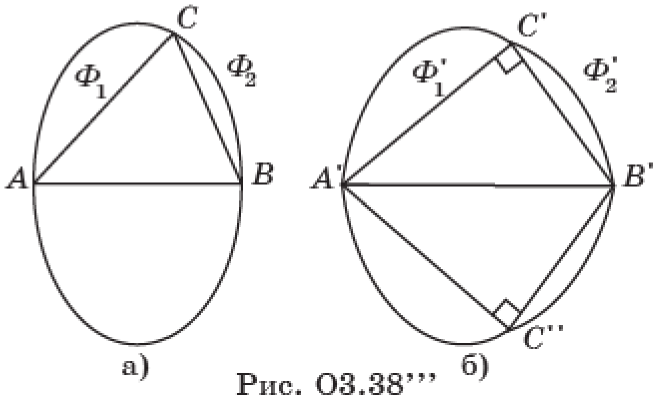


Рис. О3.38'''

Тогда она делит фигуру Φ на две части равной площади. Если кривая не окружность, то на ней найдётся точка C, для которой $\angle ACB \neq 90^o$. Предположим, например, что точка C принадлежит верхней части фигуры Φ. Построим новую фигуру Φ'. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A'B'C'$ с прямым углом C', у которого

A'B' = *AB*, *B'C'* = *BC* (рис. О3.38''', б). Площадь треугольника *A'B'C'* больше площади треугольника *ABC*. Действительно, площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, а синус принимает наибольшее значение, равное единице, если угол равен $90°$.

Присоединим к катетам треугольника *A'B'C'* соответствующие части $Ф_1'$ и $Ф_2'$, равные соответственно частям $Ф_1$ и $Ф_2$ исходной фигуры. Полученную фигуру отразим симметрично относительно *A'B'*. Фигура *Ф'*, состоящая из обеих этих частей, будет искомой. Ясно, что она ограничена кривой той же длины. Однако, т. к. площадь треугольника *A'B'C'* больше площади треугольника *ABC*, площадь верхней части фигуры *Ф'* будет больше площади верхней части фигуры *Ф*. Аналогично, площадь нижней части фигуры *Ф'* будет больше площади нижней части фигуры *Ф*. Таким образом, площадь всей фигуры *Ф'* будет больше площади исходной фигуры *Ф*. Следовательно, исходная фигура немаксимальна.

Что и завершает решение задачи Дидоны.

3.39. Решение задачи использует решение изопериметрической задачи. А именно, сравним первый многоугольник, вписанный в окружность (рис. О3.39, а), с многоугольником с такими же сторонами, но не являющийся вписанным в окружность (рис. О3.39, б). Дополним второй многоугольник сегментами, дополняющими первый многоугольник до круга. Так как этот многоугольник не является вписанным в окружность, то такое дополнение приведёт к фигуре, отличной от круга.

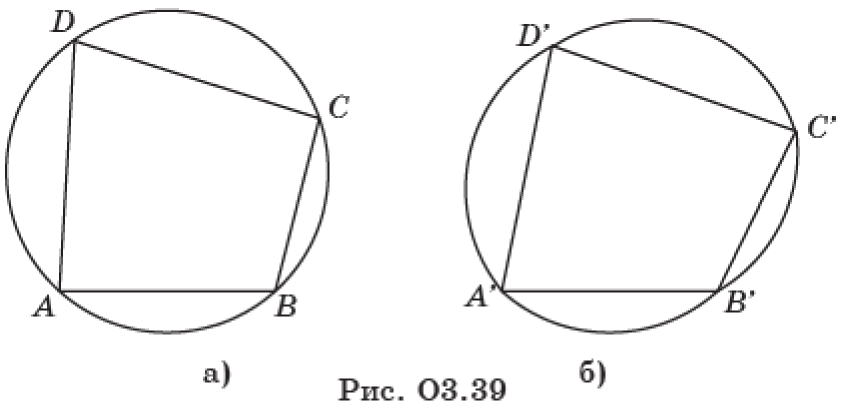


Рис. О3.39

Поскольку периметр полученной фигуры равен периметру круга, то её площадь, в силу изопериметрической задачи, будет меньше площади круга. Значит, площадь второго многоугольника меньше площади первого многоугольника.

IV. 10 класс

4.1. Искомой точкой, расстояние от которой до данной точки A является наименьшим, будет основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β (рис. О4.1).

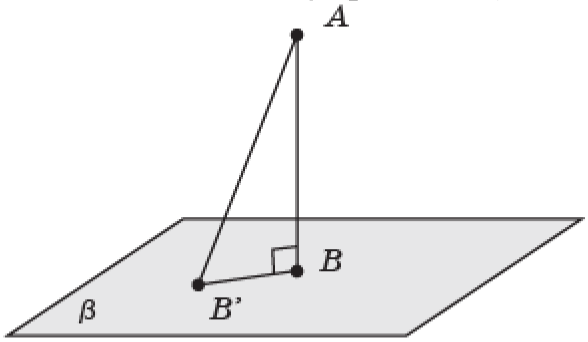


Рис. О4.1

Для любой другой точки B' этой плоскости отрезок AB' будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB.

4.2. Докажем, что такой точки не существует. Пусть B – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β. Для произвольной точки C этой плоскости рассмотрим точку C', лежащую на прямой BC по ту же сторону от точки B, что и точка C, и $BC' > BC$ (рис. О4.2).

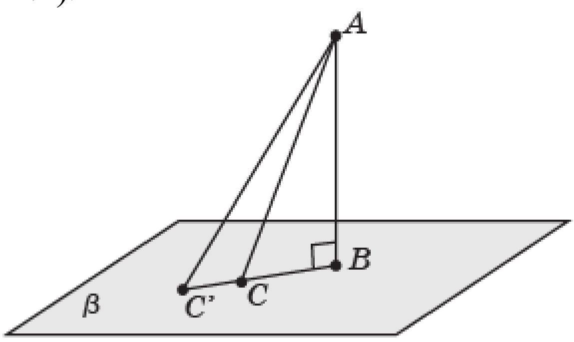


Рис. О4.2

Так как угол $AC'B$ острый и против большего угла лежит большая сторона, то сторона AC' треугольника ACC' будет больше стороны AC.

4.3. Искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB и плоскости γ (рис. О4.3).

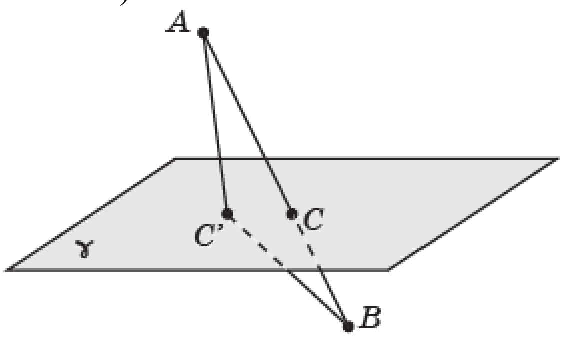


Рис. О4.3

Действительно, из неравенства треугольника следует, что для любой другой точки C' этой плоскости выполняется неравенство $AC' + C'B > AC + CB$, значит, сумма $AC + CB$ будет наименьшей.

4.4. Опустим на плоскость γ перпендикуляр BH и отложим на его продолжении отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка на плоскости γ (рис. O4.4).

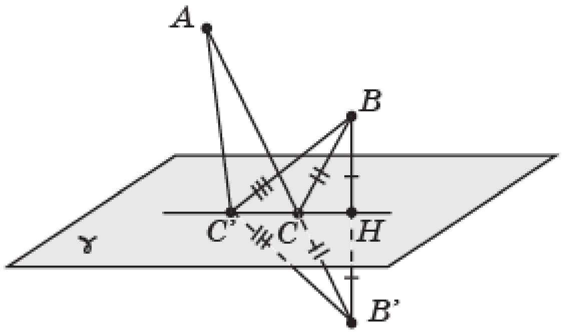


Рис. O4.4

Прямоугольные треугольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой, т. е. искомая точка C является точкой пересечения прямой AB' с плоскостью γ.

4.5. Искомой точкой C является точка пересечения прямой AB и плоскости γ (рис. O4.5).

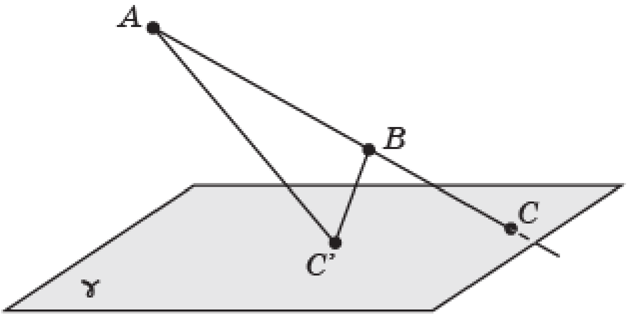


Рис. O4.5

Действительно, разность $AC - CB$ равна AB. Для любой другой точки C' этой плоскости из неравенства треугольника следует, что выполняется неравенство $AC' - C'B < AB$.

4.6. Из точки B опустим на плоскость γ перпендикуляр BH и на его продолжении отложим отрезок HB', равный BH. Пусть C' – произвольная точка плоскости γ. Прямоугольные треугольники BHC'

и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Поэтому разность $AC' - C'B$ будет наибольшей тогда и только тогда, когда наибольшей будет равная ей разность $AC' - C'B'$. Ясно, что последняя разность является наибольшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой, т. е. искомая точка C является точкой пересечения прямой AB' с плоскостью γ (рис. О4.6).

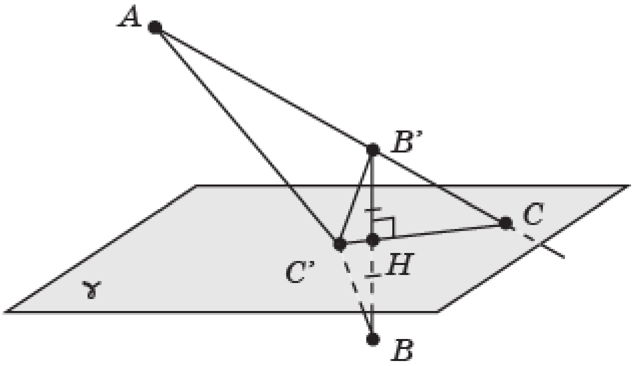


Рис. О4.6

4.7. Искомым отрезком, имеющим наименьшую длину, будет общий перпендикуляр AB к данным прямым a, b (рис. О4.7).

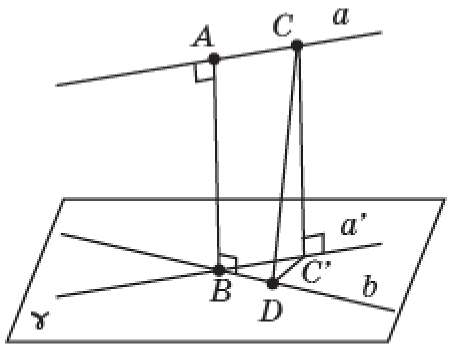
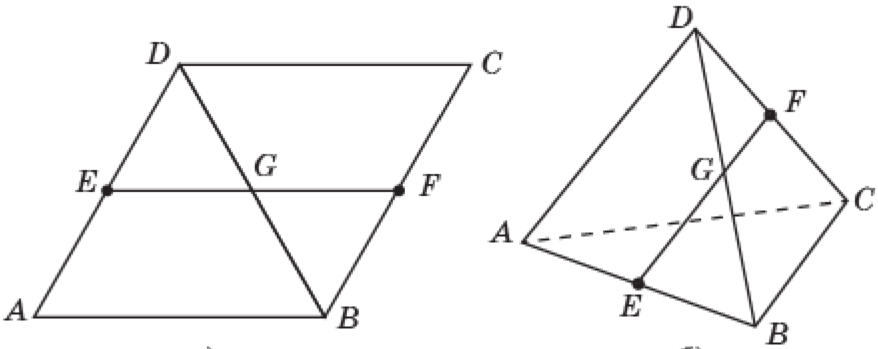


Рис. О4.7

Действительно, пусть C, D – другие точки, принадлежащие этим прямым. Опустим перпендикуляр CC' на прямую a', проходящую через точку B и параллельную прямой a. Прямая CC' будет перпендикулярна плоскости γ, содержащей прямые a' и b. Отрезок CC' будет перпендикуляром к этой плоскости, а отрезок CD – наклонной. Значит, $AB = CC' < CD$.

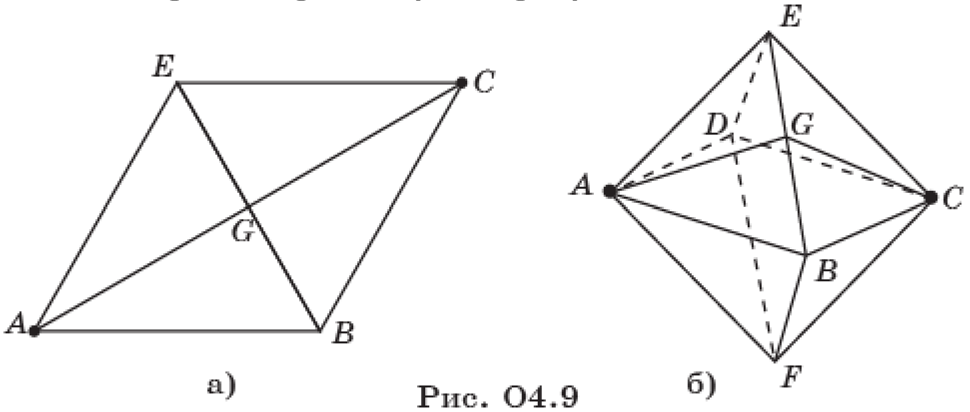
4.8. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображённую на рисунке О4.8, а. Соответствующий путь по поверхности данного тетраэдра изображён на рисунке О4.8, б. Его длина равна 1.



а) б)

Рис. О4.8

4.9. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного октаэдра, изображённую на рисунке О4.9, а.

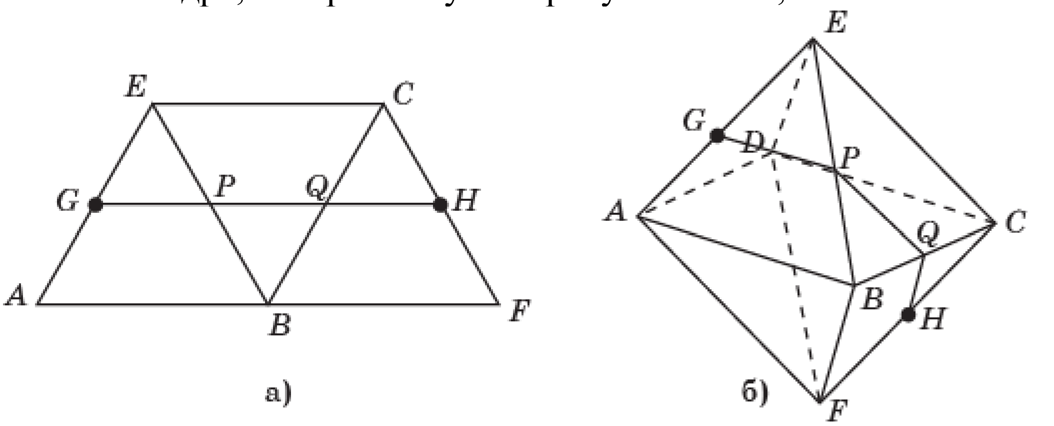


а) б)

Рис. О4.9

Искомый путь проходит через середину G ребра BE октаэдра. Его длина равна $\sqrt{3}$ (рис. О4.9, б).

4.10. Рассмотрим развёртку, состоящую из трёх соседних граней данного октаэдра, изображённую на рисунке О4.10, а.

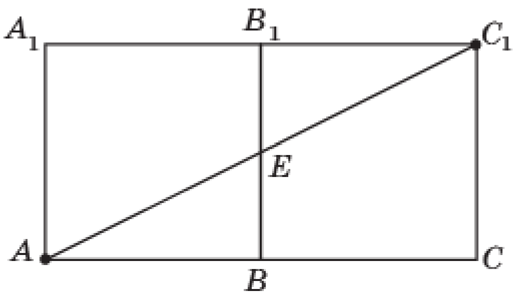


а) б)

Рис. О4.10

Искомый путь проходит через середины P и Q рёбер октаэдра. Его длина равна 1,5 (рис. О4.10, б).

4.11. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней куба, изображённую на рисунке О4.11, а.



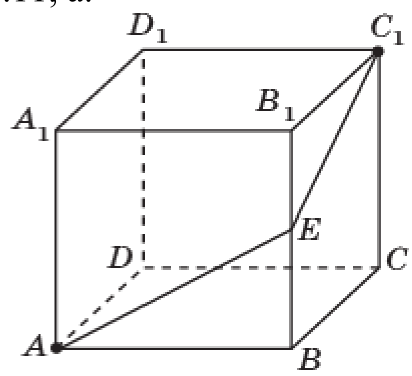
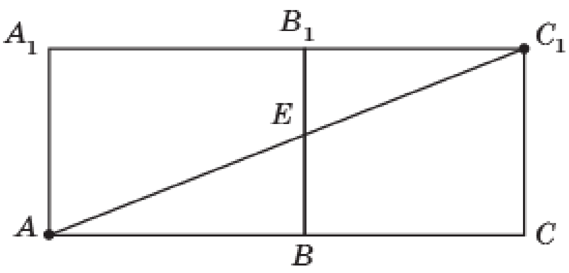


Рис. О4.11

Кратчайшим путём из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответствующий путь по поверхности куба изображён на рисунке О4.11, б.

Заметим, что указанный путь из A в C_1 является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины рёбер BB_1, A_1B_1, A_1D_1, DD_1, CD и BC.

4.12. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного параллелепипеда, изображённую на рисунке О4.12’, а.



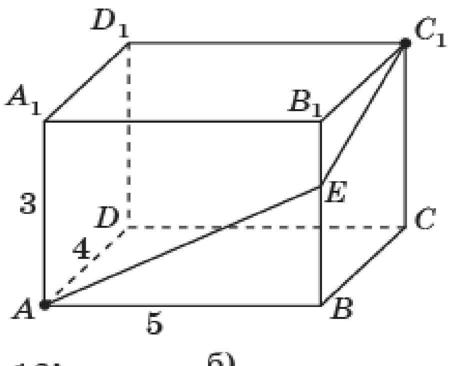


Рис. О4.12’

Кратчайшим путём по развёртке этих граней из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $3\sqrt{10}$. Соответствующий путь на поверхности параллелепипеда изображён на рисунке О4.12’, б.

Однако этот путь не является кратчайшим. Рассмотрим две другие возможные развёртки граней данного параллелепипеда. Одна из них изображена на рисунке О4.12’’, а.

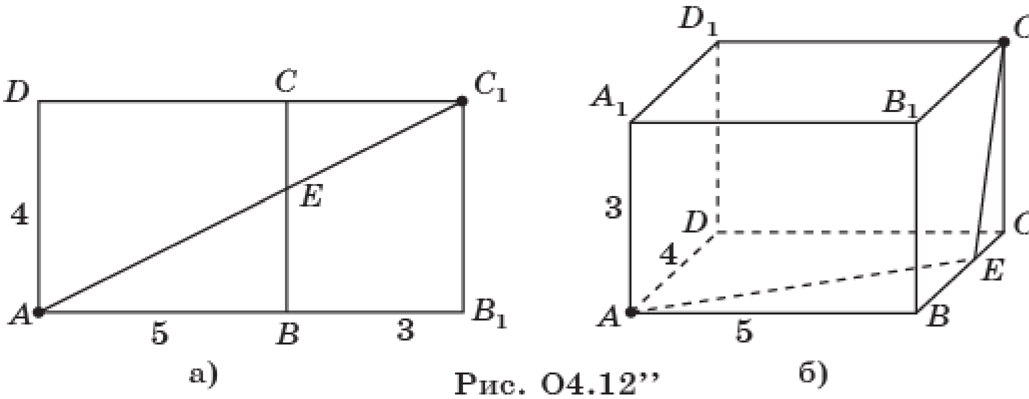


Рис. О4.12’’

Соответствующий путь на поверхности параллелепипеда изображён на рисунке О4.12’’, б. Его длина равна $4\sqrt{5}$.

Другая развёртка показана на рисунке О4.12’’’, а.

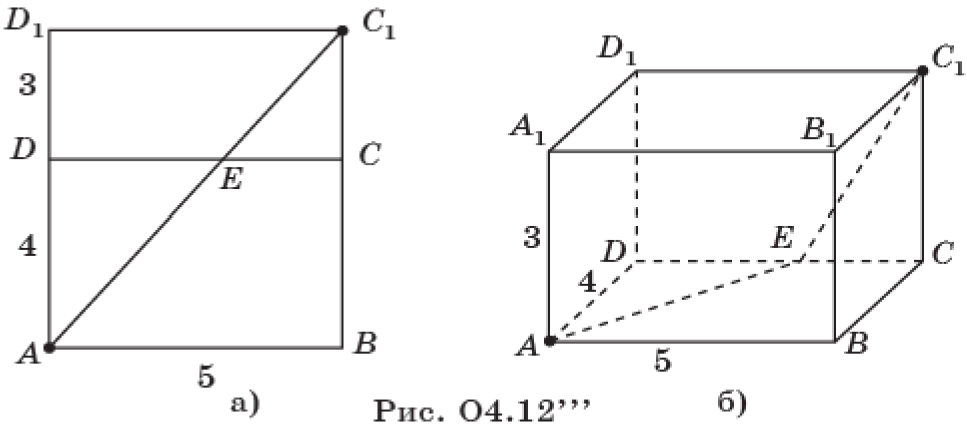


Рис. О4.12’’’

Соответствующий путь на поверхности параллелепипеда изображён на рисунке О4.12’’’, б. Его длина равна $\sqrt{74}$.

Непосредственные вычисления показывают, что этот путь является кратчайшим.

4.13. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух боковых граней пирамиды, изображённую на рисунке О4.13, а.

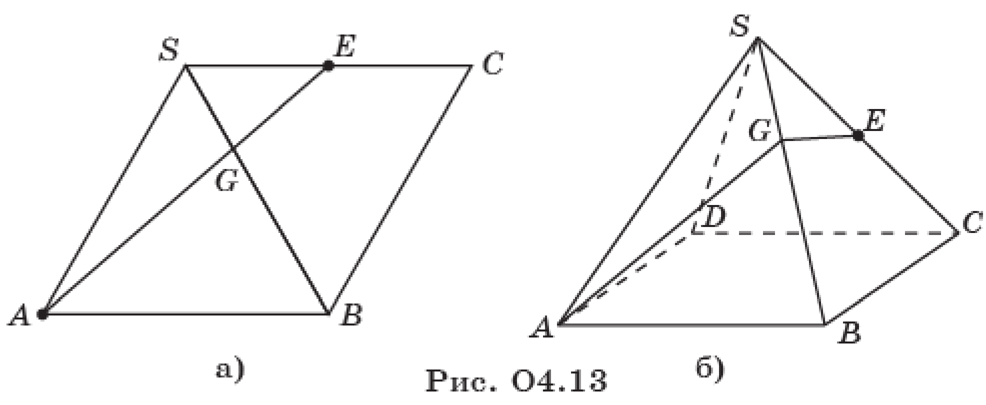


Рис. О4.13

Кратчайшим путём из A в E является отрезок AE, длину которого можно вычислить, используя теорему косинусов. Эта длина равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Соответствующий путь по поверхности пирамиды изображён на рисунке О4.13, б.

4.14. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух боковых граней призмы, изображённую на рисунке О4.14', а.

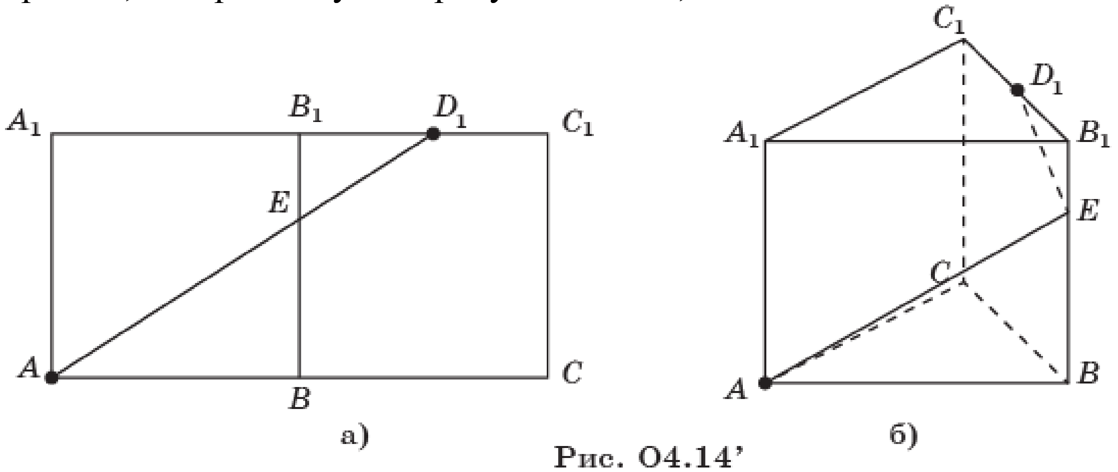


Рис. О4.14'

Соответствующий путь по поверхности призмы изображён на рисунке О4.14', б. Его длина равна $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развёртка изображена на рисунке О4.14'', а.

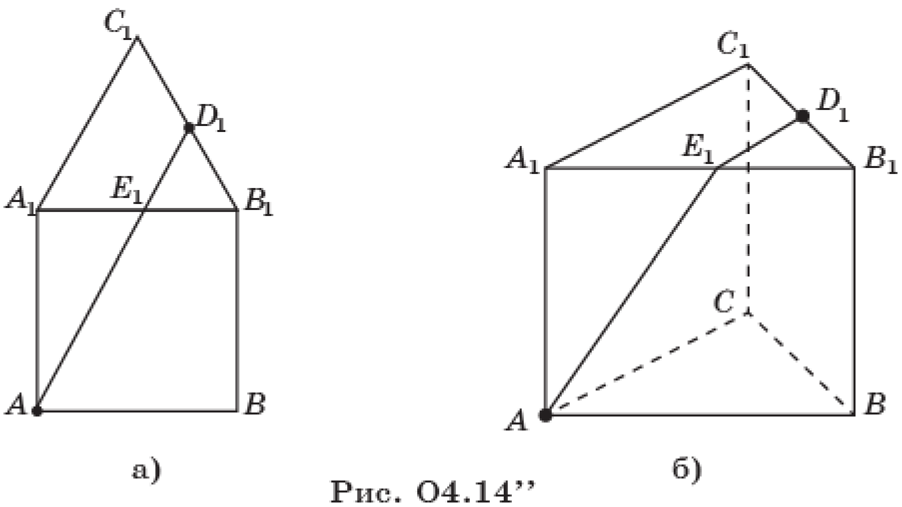
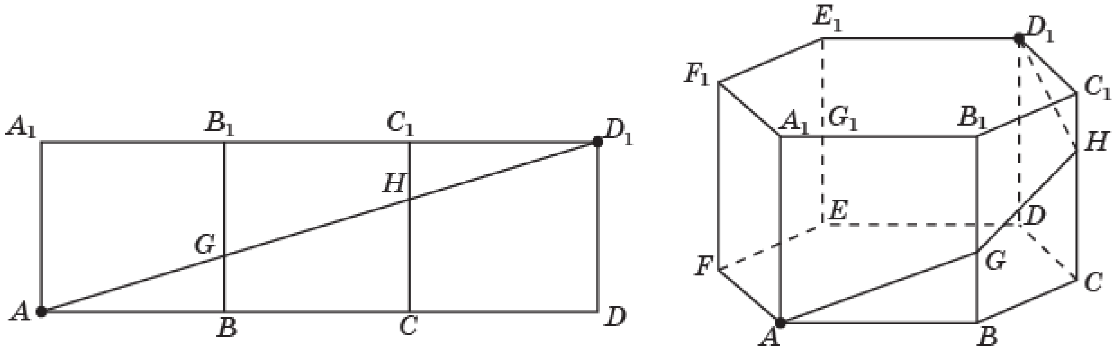


Рис. О4.14''

В этом случае кратчайшим путём является отрезок AD_1, длина которого равна $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображён на рисунке О4.14'', б.

4.15. Рассмотрим развёртку, состоящую из трёх боковых граней призмы, изображённую на рисунке O4.15’, а.

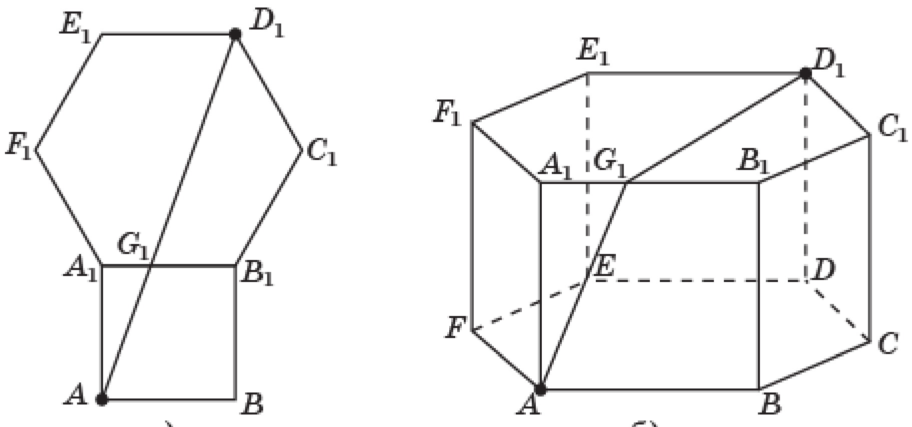


а) б)

Рис. O4.15’

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD_1 и равна $\sqrt{10}$. Соответствующий путь на поверхности призмы изображён на рисунке O4.15’, б.

Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развёртка изображена на рисунке O4.15’’, а.



а) б)

Рис. O4.15’’

В этом случае кратчайшим путём является отрезок AD_1, длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}} < \sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображён на рисунке O4.15’’, б.

4.16. Рассмотрим развёртку, состоящую из пяти граней икосаэдра, изображённую на рисунке O4.16, а. Искомым путём является отрезок EF. Соответствующий путь по поверхности икосаэдра показан на рисунке O4.16, б. Его длина равна 2,5.

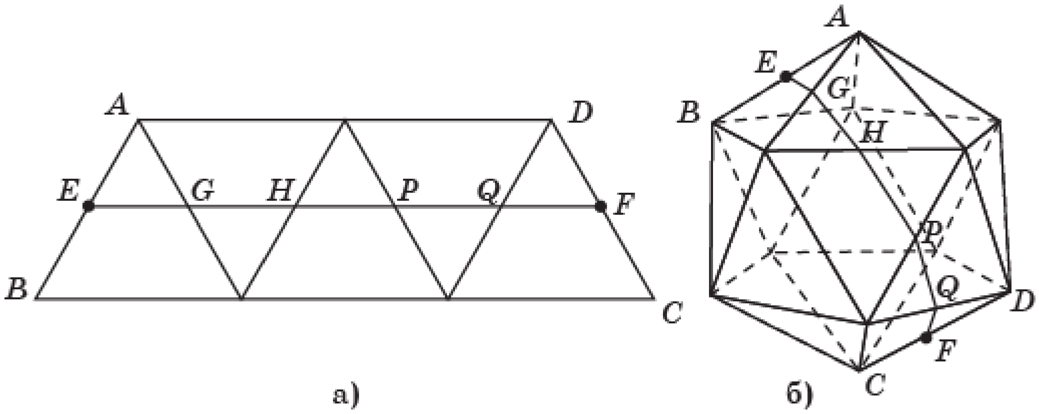


Рис. О4.16

4.17. Рассмотрим развёртку, состоящую из четырёх граней икосаэдра, изображённую на рисунке (О4.17, а). Искомым путём является отрезок AB. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны соответственно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Длина искомого пути AB равна $\sqrt{7}$. Соответствующий путь по поверхности икосаэдра показан на рисунке О4.17, б.

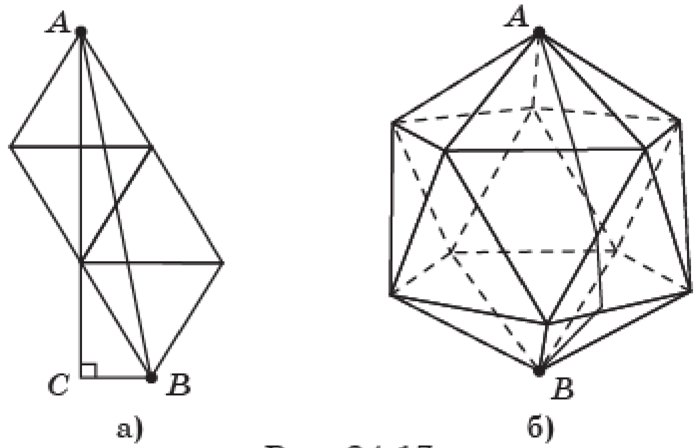


Рис. О4.17

4.18. Искомыми точками являются вершины C и D данного тетраэдра. Углы, под которыми из этих точек видно ребро AB, равны 60° (рис. О4.18).

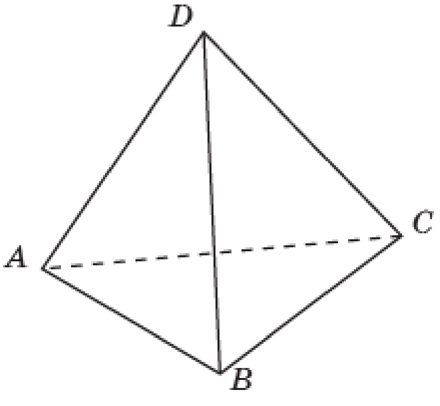


Рис. О4.18

4.19. Искомыми точками являются вершины A, D, C, A_1, B_1, C_1 данного куба. Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BD_1, равны 90° (рис. O4.19).

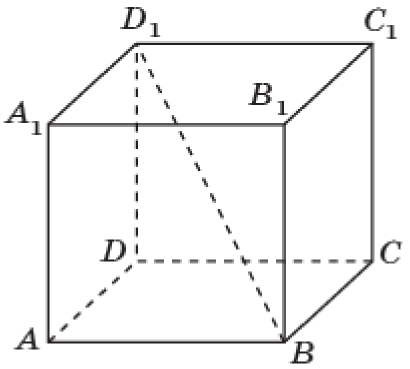


Рис. O4.19

4.20. Искомыми точками являются вершины C, D данного октаэдра. Углы, под которыми из этих точек видно ребро AB, равны 45° (рис. O4.20).

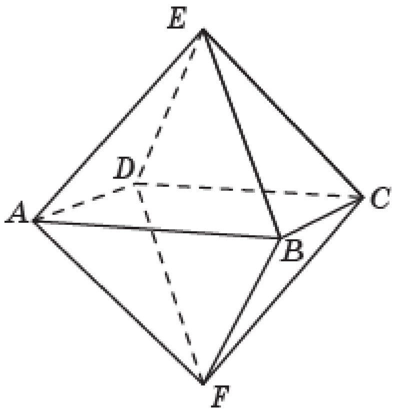


Рис. O4.20

4.21. Искомыми точками являются вершины C, D данного икосаэдра. Тангенс угла, под которым из этих точек видно ребро AB, равен золотому отношению $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (рис. O4.21).

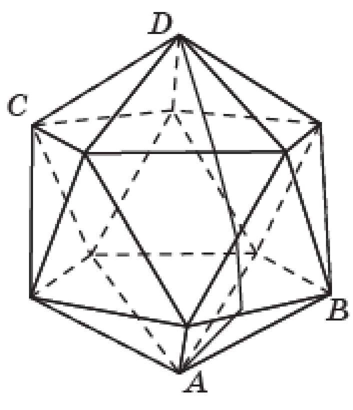


Рис. O4.21

4.22. Рассмотрим развёртку двух граней куба (рис. О4.22, а).

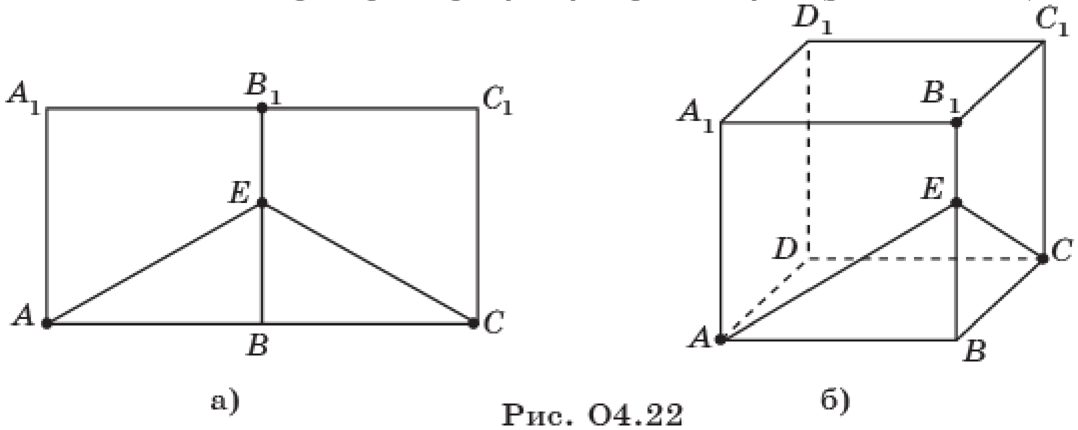


Рис. О4.22

Воспользуемся решением задачи Ферма. Искомой точкой будет такая точка E на ребре BB_1, для которой углы B_1EA и B_1EC равны 120° (рис. О4.22, б). Непосредственные вычисления показывают, что $AE + B_1E + CE = \sqrt{3} + 1$. Аналогичными точками являются середины рёбер AB и BC.

4.23(С). Рассмотрим развёртку двух граней октаэдра (рис. О4.23, а).

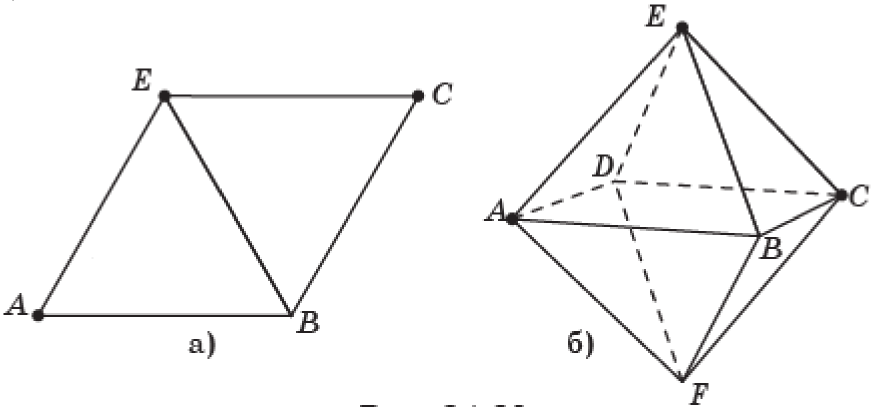


Рис. О4.23

Воспользуемся решением задачи Ферма. Искомой точкой будет точка E, $AE + CE = 2$ (рис. О4.23, б).

4.24(С). Рассмотрим развёртку четырёх граней икосаэдра (рис. О4.24, а).

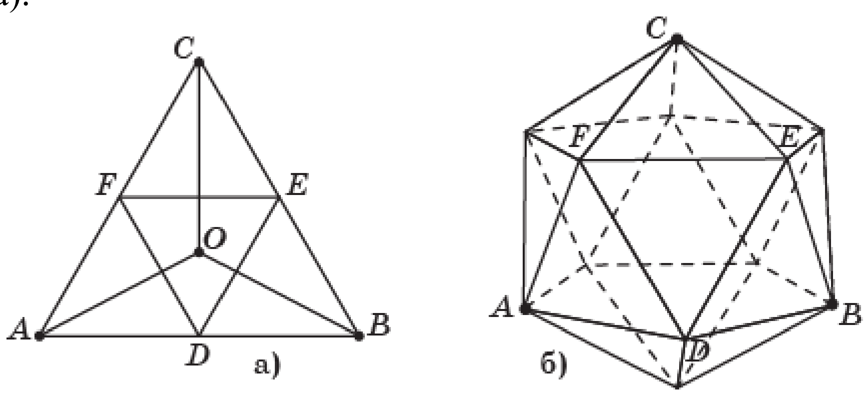
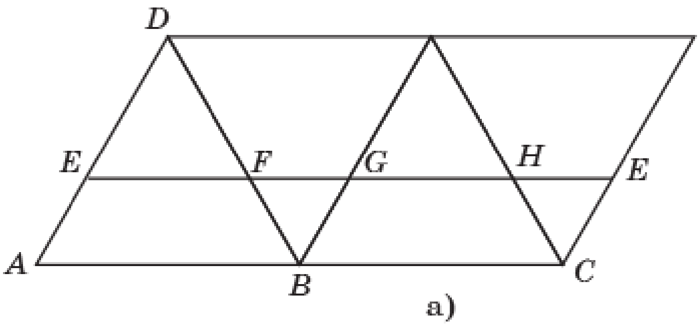


Рис. О4.24

Воспользуемся решением задачи Ферма. Искомой точкой будет такая центр O окружности, описанной около треугольника DEF (рис. O4.24, б), $AO + BO + CO = 2\sqrt{3}$.

4.25. Искомым сечением является сечение, параллельное двум противолежащим рёбрам тетраэдра (рис. O4.25, б). Так как соответствующим путём на развёртке является отрезок (рис. O4.25, а), то это сечение имеет наименьший периметр, равный 2.



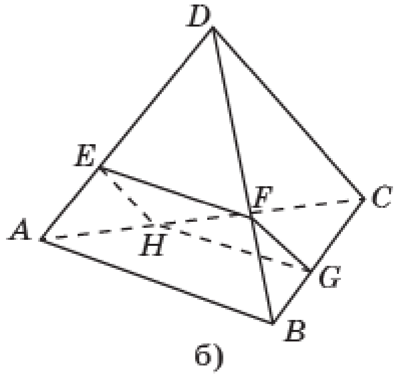
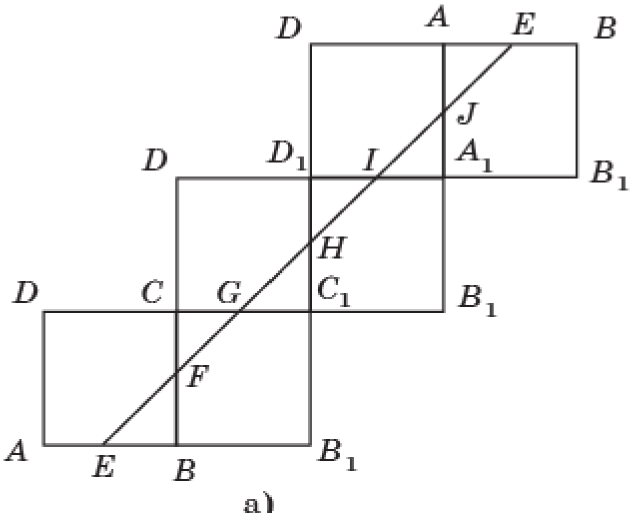


Рис. O4.25

4.26. Искомым сечением является сечение, перпендикулярное диагонали куба (рис. O4.26, б). Так как соответствующим путём на развёртке является отрезок (рис. O4.26, а), то это сечение имеет наименьший периметр, равный $3\sqrt{2}$.



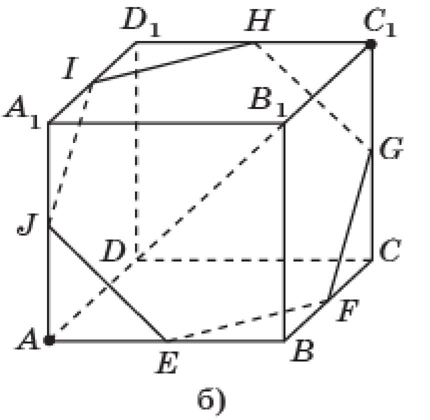


Рис. O4.26

4.27. В сечениях правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостями, параллельными прямым AD и BC, получаются прямоугольники $EFGH$ с фиксированным периметром, равным сумме рёбер AD и BC. Из таких прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат, получающийся в сечении, проходящим через середину ребра *AB* (рис. О4.27). Его площадь равна $\frac{1}{4}$.

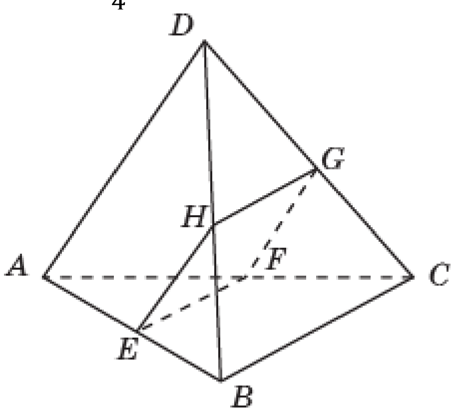


Рис. О4.27

4.28. В сечениях пирамиды *SABC* плоскостями, параллельными прямым *AS* и *BC*, получаются параллелограммы *DEFG* с фиксированным острым углом, равным углу между прямыми *AD* и *BC*. Наибольшая площадь будет у параллелограмма, у которого наибольшее произведение двух соседних сторон. Имеем, $DE = \frac{AD}{AB} \cdot BC, DG = \frac{BD}{AB} \cdot SA$. Следовательно, $DE \cdot DG = \frac{AD \cdot BD}{AB^2} \cdot BC \cdot SA$.

Учитывая, что *AB*, *BC*, *SA* фиксированы, получаем, что произведение $DE \cdot DG$ будет наибольшим, если наибольшим будет произведение $AD \cdot BD$. Так как сумма *AD* + *BD* постоянна и равна *AB*, то это произведение будет наибольшим, если *AD* = *BD*. Таким образом, искомым сечением будет сечение, проходящее через середины двух противолежащих рёбер данной пирамиды (рис. О4.28).

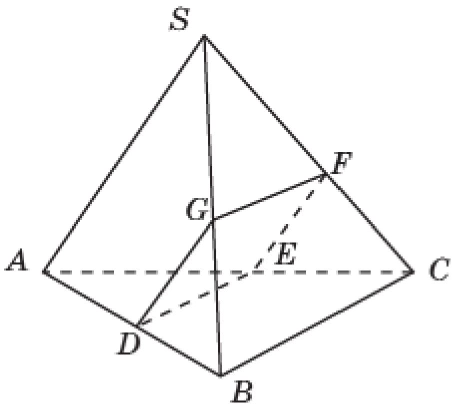


Рис. О4.28

4.29. Рассмотрим сечение *EFGH* правильного тетраэдра *ABCD* плоскостью, проходящей через середины *E*, *G* соответственно рёбер *AB* и *CD*. Проведём диагональ *EG* и опустим на неё перпендикуляры *FF'* и *HH'* (рис. О4.29, а). Площадь четырёхугольника *EFGH* равна

$\frac{1}{2}EG(FF' + HH')$. Она будет наименьшей, если наименьшей будет сумма *FF' + HH'*. Эта сумма будет наименьшей, если *FF'* и *HH'* будут перпендикулярны соответственно рёбрам *AC* и *BD*. Это будет, если точки *F* и *H* являются серединами этих рёбер. Искомым четырёхугольником наименьшей площади является квадрат *EFGH* (рис. О4.29, б).

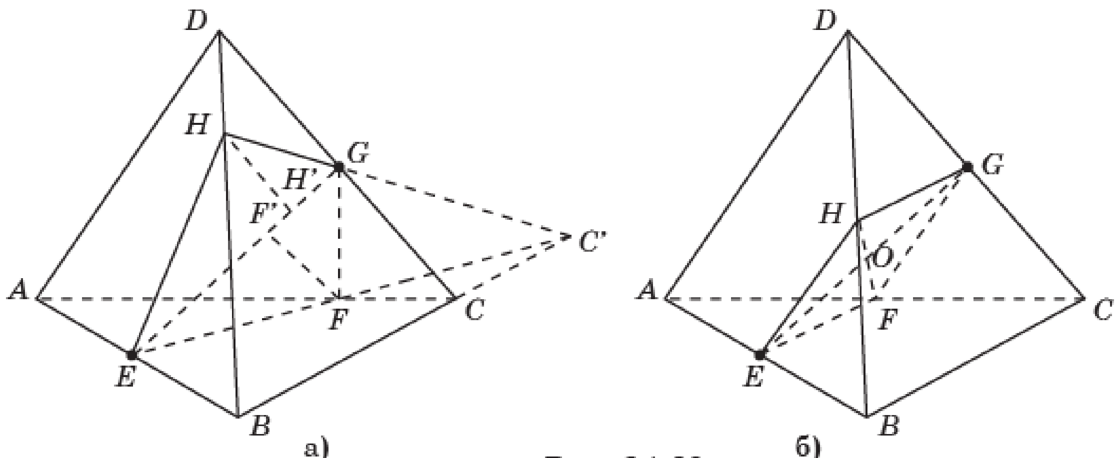


Рис. О4.29

4.30. Рассмотрим сечение *DEFG* пирамиды *SABC* плоскостью, проходящей через середины *D*, *F* соответственно рёбер *AB* и *SC*. Проведём диагональ *DF*, и опустим на неё перпендикуляры *EE'* и *GG'* (рис. О4.30).

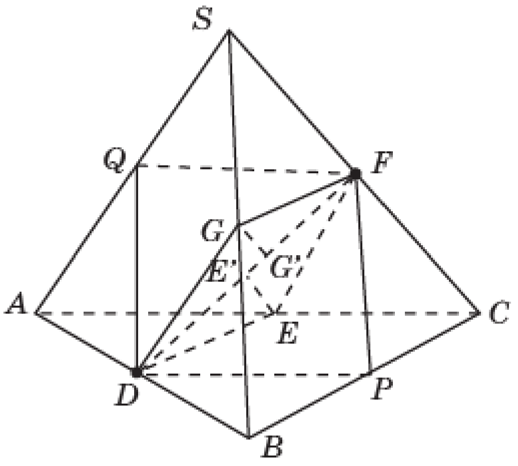


Рис. О4.30

Площадь четырёхугольника *DEFG* равна $\frac{1}{2}DF(EE' + GG')$. Она будет наименьшей, если наименьшей будет сумма *EE' + GG'*.

Через прямую *DF* проведём плоскость, параллельную прямым *AC* и *SB*. В сечении получим параллелограмм *DPFQ*. Отрезки *EE'* и *GG'* являются наклонными к этой плоскости. Они будут наименьшими, если они будут перпендикулярны плоскости сечения *DPFQ*. Таким образом, искомым четырёхугольником наименьшей площади является четырёхугольник $DEFG$, плоскость которого перпендикулярна плоскости сечения $DPFQ$.

4.31. Сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B, D_1 и точку E на ребре AA_1, будет параллелограмм BFD_1E. Из точи E опустим перпендикуляр EG на прямую BD_1. Площадь сечения равна $BD_1 \cdot EG$. Она будет наименьшей, если наименьшим будет отрезок EG, т. е. если этот отрезок будет общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BD_1. Это будет, если точка E является серединой ребра AA_1. Таким образом, искомым сечением наименьшей площади является ромб BFD_1E (рис. О4.31). Для единичного куба его площадь равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

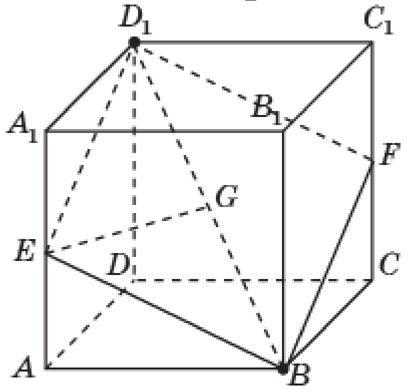


Рис. О4.31

4.32. Сечением октаэдра $ABCDST$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и точку E на ребре SD, будет параллелограмм $AFCE$. Из точи E опустим перпендикуляр EH на прямую AC. Площадь сечения равна $AC \cdot EH$. Она будет наименьшей, если наименьшим будет отрезок EH, т. е. если этот отрезок будет общим перпендикуляром к прямым AC и SD. Это будет, если точка E является серединой ребра SD. Таким образом, искомым сечением наименьшей площади является ромб $AFCE$ (рис. О4.32). Для единичного октаэдра его площадь равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

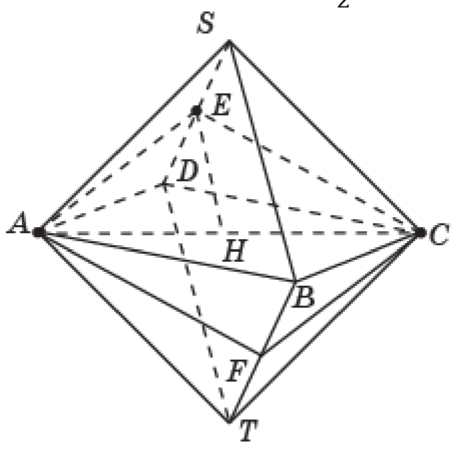


Рис. О4.32

4.33. Среди сечений единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, перпендикулярными диагонали DB_1, пересекающими ребро BB_1, наибольшую площадь будет иметь треугольник A_1BC_1 (рис. О4.33, а).

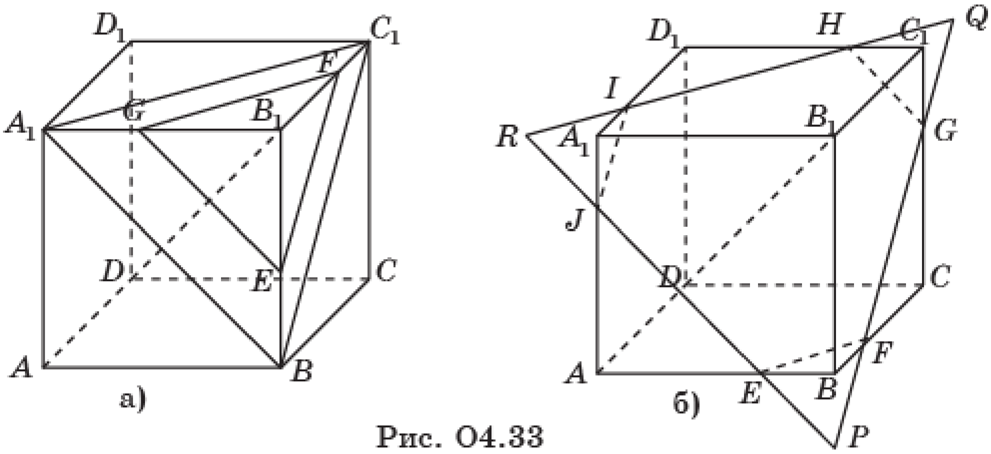


Рис. О4.33

Рассмотрим сечение $EFGHIJ$, пересекающее ребро AB в точке E. Обозначим $BE = BF = x$. Тогда $A_1I = A_1J = C_1G = C_1H = x$. Достроим это сечение до правильного треугольника PQR (рис. О4.33, б). Его стороны равны $\sqrt{2}(1+x)$. Следовательно, его площадь равна $\frac{\sqrt{3}(1+x)^2}{2}$. Шестиугольник $EFGHIJ$ получается отрезанием от треугольника PQR трёх правильных треугольников, стороны которых равны $\sqrt{2}x$. Сумма их площадей равна $\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{\sqrt{3}(1+x)^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+2x-2x^2)$. Преобразуем это выражение к виду $\sqrt{3}\left(\frac{3}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2\right)$. Оно принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомым сечением наибольшей площади будет правильный шестиугольник, вершинами которого являются середины рёбер куба. Для единичного куба площадь этого сечения равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4.34. Если плоскость сечения пересекает ребро AD (рис. О4.34, а), то его площадь не превосходит площади сечения, проходящего через вершину A. Пусть плоскость сечения пересекает ребро AB в точке E (О4.34, б). Сечением будет пятиугольник $EFIGJ$. Обозначим $BE = x$. Тогда $BH = EH = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, $EJ = FI = \frac{b(a-x)}{a}$, $DH = \frac{(2-x)\sqrt{2}}{2}$, $GH = \frac{b(2-x)}{2}$. Площадь прямоугольной трапеции $EHGJ$ равна $\left(\frac{b(a-x)}{a} + \frac{b(2-x)}{2}\right)\frac{x\sqrt{2}}{4}$. Площадь сечения $EFIGJ$ равна $\frac{4abx-(ab+2b)x^2}{a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Наибольшее значение эта площадь имеет при $x = \frac{2a}{a+2}$.

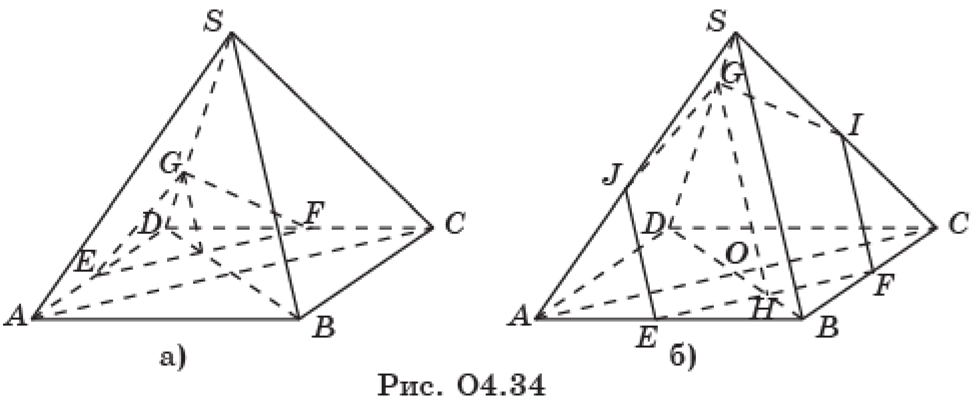


Рис. О4.34

4.35. Рассмотрим сечение *EFGHIJ* единичного октаэдра, параллельное плоскости грани *SBC*. Обозначим *BE* = *BJ* = *x*. Тогда *CF* = *CG* = *SH* = *SI* = *x*. Достроим это сечение до правильного треугольника *PQR* (рис. О4.35). Его стороны равны $1 + x$. Следовательно, его площадь равна $\frac{\sqrt{3}(1+x)^2}{4}$. Шестиугольник *EFGHIJ* получается отрезанием от треугольника *PQR* трёх правильных треугольников, стороны которых равны x. Сумма их площадей равна $\frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{\sqrt{3}(1+x)^2}{4} - \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2x - 2x^2)$. Преобразуем это выражение к виду $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2\right)$. Оно принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомым сечением наибольшей площади будет правильный шестиугольник, вершинами которого являются середины рёбер октаэдра. Для единичного октаэдра площадь этого сечения равна $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

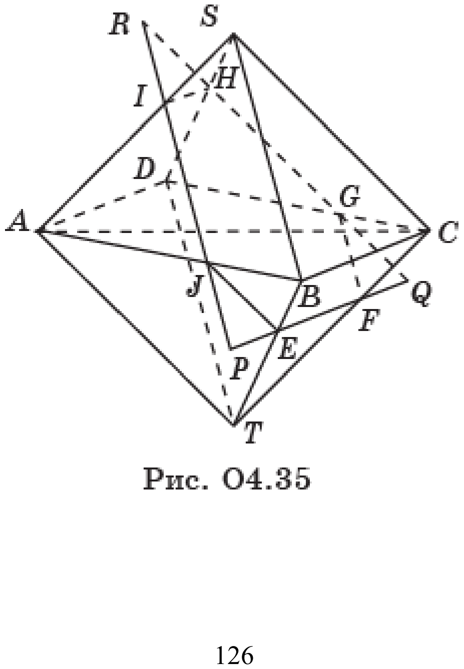


Рис. О4.35

V. 11 класс

5.1. Искомой точкой является точка B пересечения отрезка AO с данной сферой (рис. О5.1). Действительно, пусть B' – другая точка этой сферы. Воспользуемся неравенством треугольника. Имеем, $AB + BO < AB' + B'O$. Так как $BO = B'O$, то из этого неравенства следует, что $AB < AB'$.

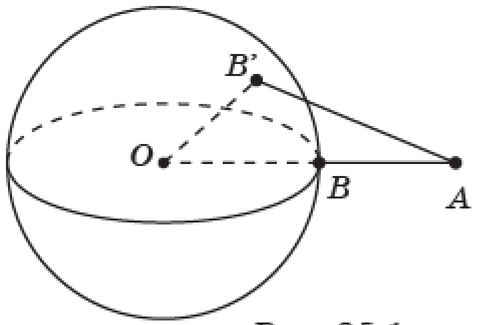


Рис. О5.1

5.2. Искомой точкой является точка C пересечения прямой AO с данной сферой, не принадлежащая отрезку AO (рис. О5.2).

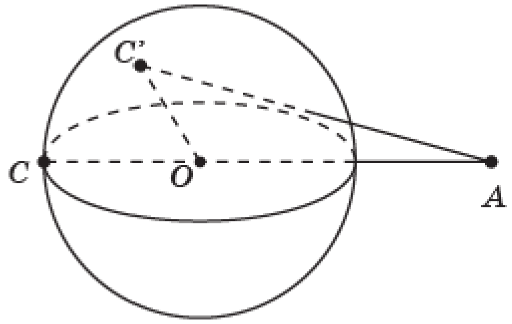


Рис. О5.2

Действительно, пусть C' – другая точка этой сферы. Воспользуемся неравенством треугольника. Имеем, $AC = AO + OC = AO + OC' > AC'$.

5.3. Искомой точкой является точка A пересечения перпендикуляра OC, опущенного из точки O на плоскость γ, с данной сферой (рис. О5.3).

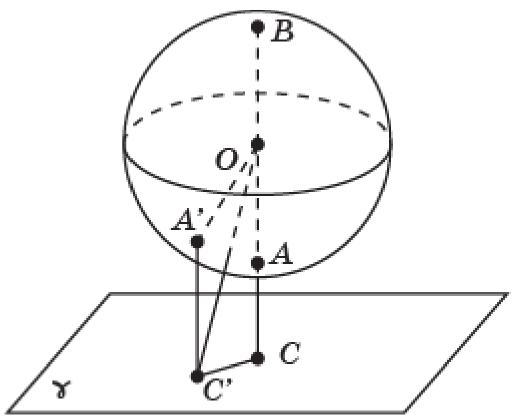


Рис. О5.3

Действительно, если A' – другая точка этой сферы, то $A'C' + OA' > OC' > OA + AC$. Так как $OA' = OA$, то из этих неравенств следует неравенство $A'C' > AC$.

5.4. Искомой точкой является точка B пересечения прямой, содержащей перпендикуляр OC, опущенный из точки O на плоскость γ, с данной сферой, не принадлежащая этому перпендикуляру (рис. О5.4).

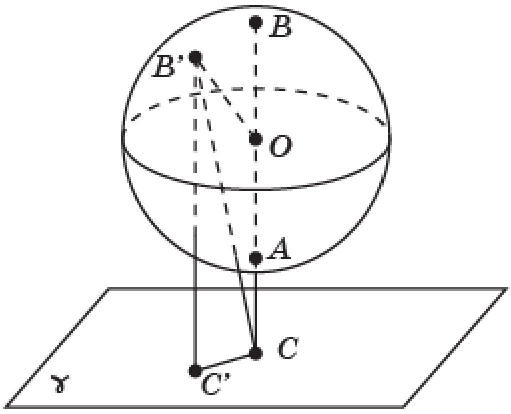


Рис. О5.4

Действительно, если B' – другая точка этой сферы, то $B'C' < B'C < OB' + OC = OB + OC = BC$.

5.5. Искомыми точками являются точки B_1 и B_2 пересечения отрезка O_1O_2 с данными сферами (рис. О5.5).

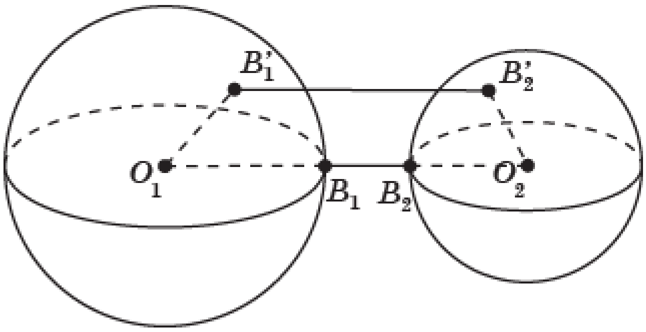


Рис. О5.5

Пусть B_1', B_2' – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $O_1B_1' + B_1'B_2' + B_2'O_2 > O_1O_2 = O_1B_1 + B_1B_2 + B_2O_2$. Так как $O_1B_1' = O_1B_1$ и $B_2'O_2 = B_2O_2$, то будет выполняться неравенство $B_1'B_2' > B_1B_2$.

5.6. Искомыми точками являются точки C_1 и C_2 пересечения прямой O_1O_2 с данными сферами, не принадлежащие отрезку O_1O_2 (рис. О5.6).

Пусть C_1', C_2' – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $C_1'C_2' < O_1C_1' + C_1'C_2' + C_2'O_2 = C_1O_1 + O_1O_2 + O_2C_2 = C_1C_2$.

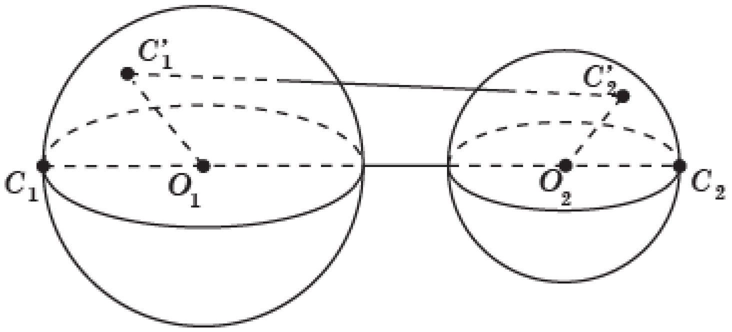


Рис. О5.6

5.7. Длина дуги окружности, расположенной на широте 54°, равна 20000·cos54°≈12000 (км). Длина дуги окружности, проходящей через Северный полюс, равна 8000 км (рис. О5.7). Этот путь и является кратчайшим.

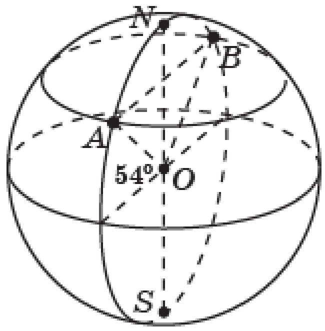


Рис. О5.7

5.8. Искомыми точками являются соответственно точки дуг $\overset{\frown}{ACB}$ и $\overset{\frown}{ADB}$ большой окружности данной сферы (рис. О5.8).

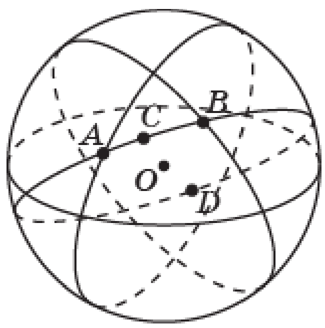


Рис. О5.8

5.9. Сечение шара, проходящее через точку C, будет иметь наименьшую площадь в случае, если расстояние от центра O этого шара до плоскости сечения будет наибольшим. Таким сечение является сечение, плоскость которого перпендикулярная прямой OC, (рис. O5.9).

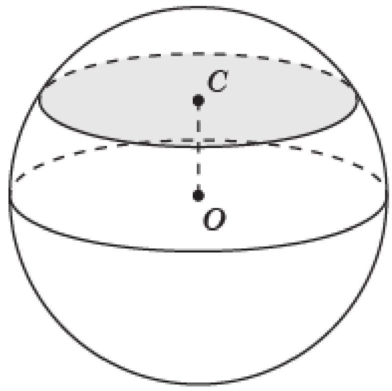


Рис. O5.9

5.10. Развёрткой боковой поверхности этого цилиндра является прямоугольник со сторонами 2π и 1, изображённый на рисунке O5.10, а.

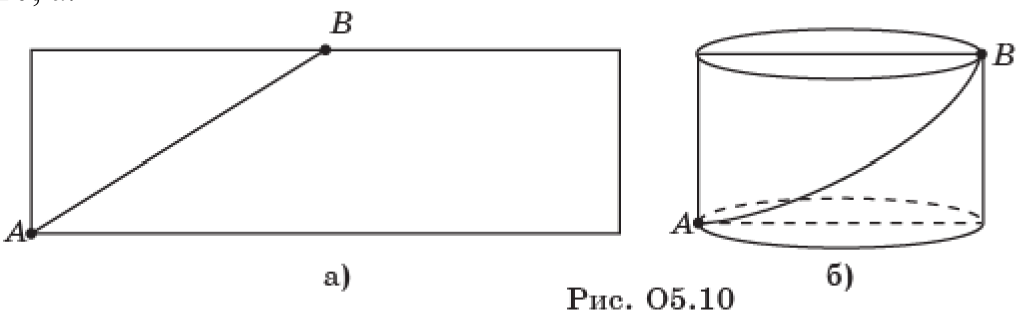


Рис. O5.10

Кратчайшим путём из точки A в точку B является отрезок AB, длина которого равна $\sqrt{\pi^2+1}$. Соответствующий путь по поверхности цилиндра изображён на рисунке O5.10, б.

5.11. Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. O5.11, а). Кратчайшим путём между точками A и B является отрезок AB. Однако, чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке C.

Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно стороны прямоугольника. Тогда отрезки BC и $B'C$ равны, следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка AB'. Она равна $2\sqrt{25\pi^2+9}$. Соответствующий путь по поверхности банки изображён на рисунке O5.11, б.

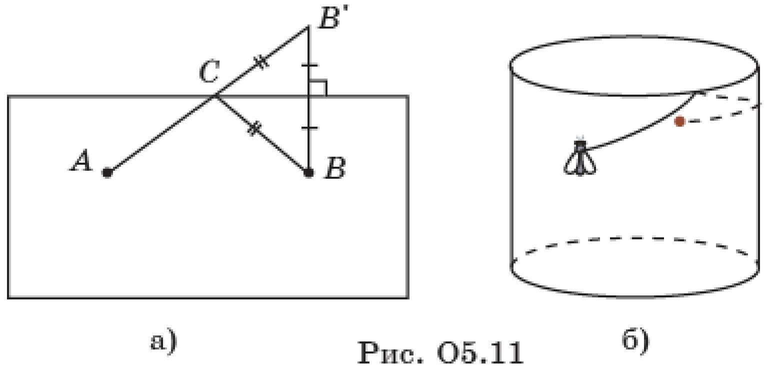


Рис. О5.11

5.12. Развёрткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиусом 1 (рис. О5.12, а).

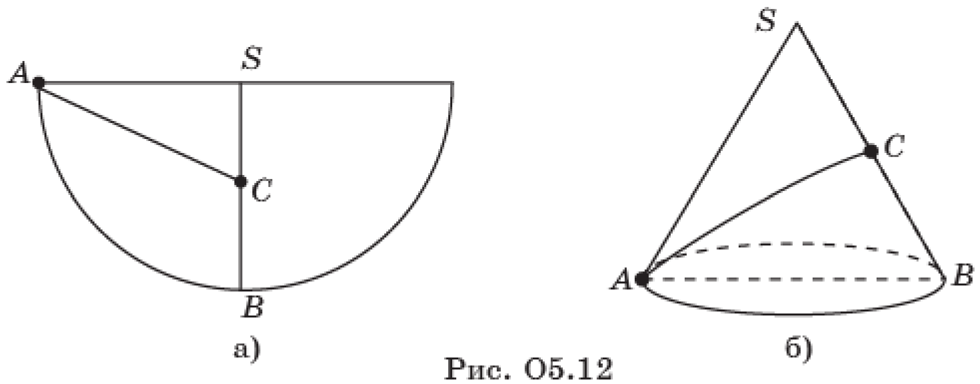


Рис. О5.12

Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке О5.12, б.

5.13. Развёрткой боковой поверхности этого конуса является сектор с углом 240° (рис. О5.13, а).

Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC, длина которого равна $3\sqrt{7}$. Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке О5.13, б.

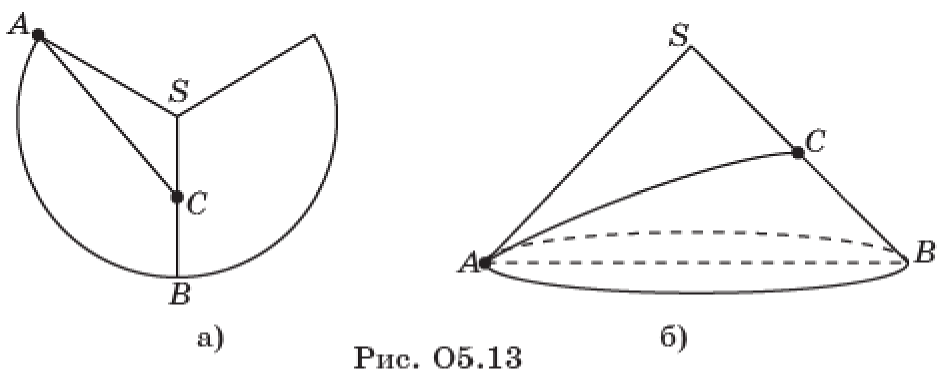


Рис. О5.13

5.14. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 90°. Кратчайшим путём является отрезок *A'A''*, длина которого равна $2\sqrt{2}$ (рис. О5.14, а). Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке О5.14, б.

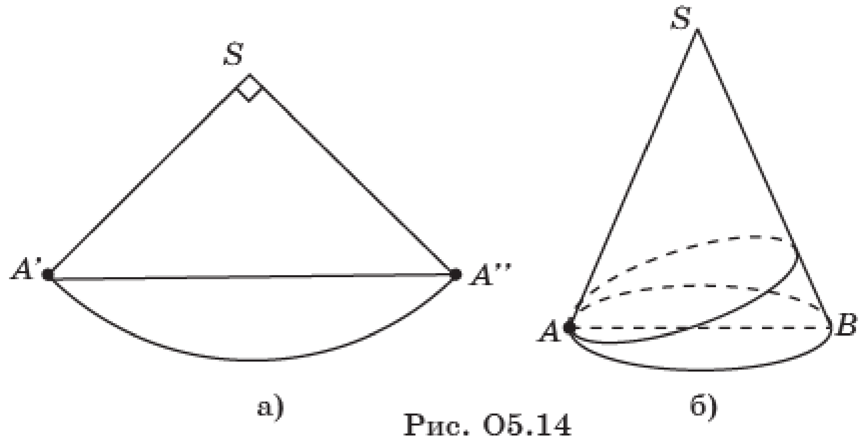


Рис. О5.14

5.15. Искомым конусом является конус, у которого осевое сечение – прямоугольный треугольник *SAB* с гипотенузой *AB* (рис. О5.15).

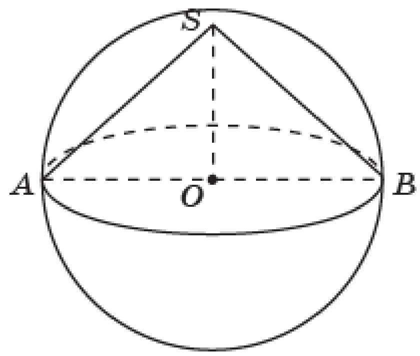


Рис. О5.15

В этом случае центр *O* описанной сферы совпадает с центром основания конуса, и радиус описанной сферы равен радиусу основания конуса. В остальных случаях радиус описанной сферы больше радиуса основания конуса.

5.16. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c. По условию сумма $a + b + c$ фиксирована. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб.

Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $a = b = c$.

Из него следует неравенство $V \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$, равенство в котором достигается, если $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед – куб (рис. О5.16).

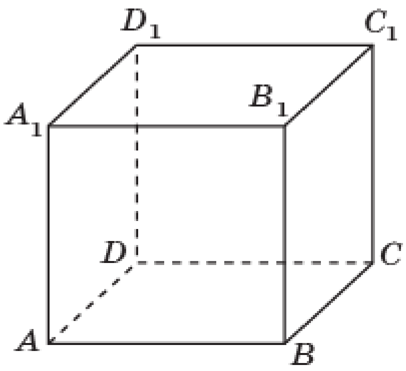


Рис. О5.16

5.17. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. По условию $ab + ac + bc = \frac{S}{2}$. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб (рис. О5.17).

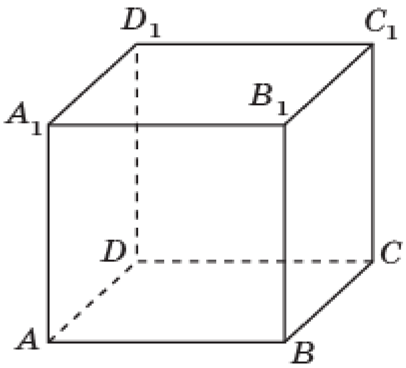


Рис. О5.17

Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = ab$, $y = ac$, $z = bc$. Получим неравенство $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{S}{6}$. Из него следует неравенство $V \leq \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$, равенство в котором достигается, если $ab = ac = bc$, т. е. в случае $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед - куб.

5.18. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. По условию произведение $abc = V$ фиксировано. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб (рис. О5.18).

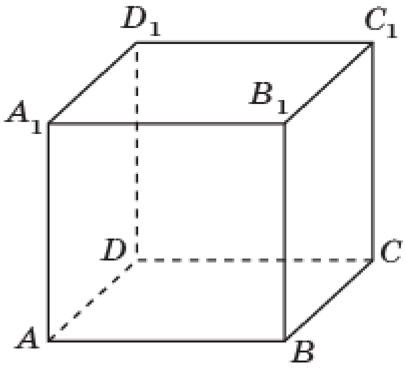


Рис. О5.18

Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = ab$, $y = ac$, $z = bc$. Получим неравенство $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \frac{ab+ac+bc}{3}$. Из него следует неравенство $\sqrt[3]{V^2} \le \frac{S}{6}$, равенство в котором достигается, если $ab = ac = bc$, т. е. в случае $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед – куб, $S = 6\sqrt[3]{V^2}$.

5.19. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. По условию $ab + 2ac + 2bc = S$ (рис. О5.19).

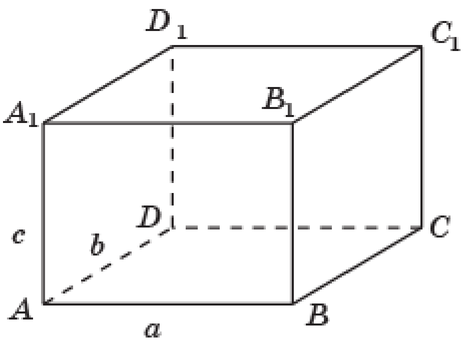


Рис. О5.19

Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = ab$, $y = 2ac$, $z = 2bc$. Получим неравенство $\sqrt[3]{4a^2b^2c^2} \le \frac{S}{3}$. Из него следует неравенство $2V \le \left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, равенство в котором достигается, если $ab = 2ac = 2bc$, т. е. в случае $a = b = 2c = \sqrt{\frac{S}{3}}$.

5.20. Обозначим стороны прямоугольника a и b, а стороны вырезаемых квадратов x (рис. О5.20).

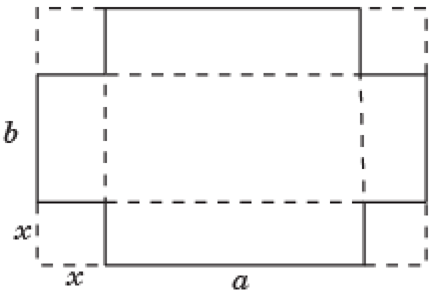


Рис. О5.20

Тогда объём коробки с открытым верхом будет равен $(a-2x)(b-2x)x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Производная обращается в ноль, если

$$x_{1,2} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Допустимым значением является

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

5.21. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а его высота равна y. Тогда $2\pi x^2 + 2\pi xy = S$. Откуда $y = \frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}$. Следовательно, $V = \frac{S}{2}x - \pi x^3$ (рис. О5.21).

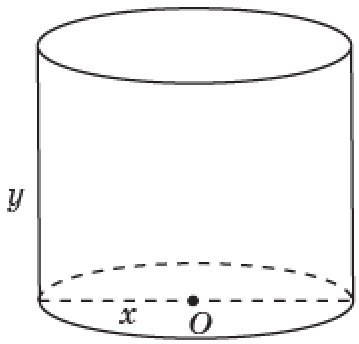


Рис. О5.21

Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{S}{2} - 3\pi x^2$. Производная обращается в ноль, если $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Отсюда находим $y = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. Таким образом, искомым цилиндром наибольшего объёма является цилиндр, осевым сечением которого является квадрат.

5.22. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а его высота равна y. Тогда $\pi x^2 + 2\pi xy = S$. Откуда $y = \frac{S-\pi x^2}{2\pi x}$. Следовательно, $V = \frac{Sx-\pi x^3}{2}$ (рис. О5.22).

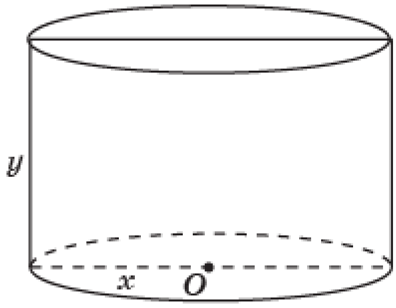


Рис. О5.22

Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{S-3\pi x^2}{2}$. Производная обращается в ноль, если $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Отсюда находим $y = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Таким образом, искомым цилиндром наибольшего объёма является цилиндр, осевым сечением которого является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой.

5.23. Пусть образующая конуса равна c. Обозначим x высоту этого конуса (рис. О5.23). Тогда его объём равен $\frac{1}{3}\pi(c^2 - x^2)x$.

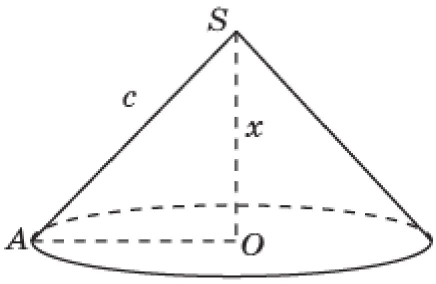


Рис. О5.23

Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{1}{3}\pi c^2 - \pi x^2$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{c\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, искомым конусом наибольшего объёма является конус, высота которого равна $\frac{c\sqrt{3}}{3}$.

5.24. Пусть радиус основания конуса равен x, а его образующая равна y. Тогда $\pi x^2 + \pi xy = S$. Откуда $y = \frac{S-\pi x^2}{\pi x}$. Следовательно, $V =$

$\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2 - x^2}$. Отметим, что объём V будет наибольшим, если наибольшим будет квадрат V^2 этого объёма. Имеем, $V^2 = \frac{\pi^2 x^4(y^2 - x^2)}{9} = \frac{S(Sx^2 - 2\pi x^4)}{9}$. Его наибольшее значение принимается, если $x^2 = \frac{S}{4\pi}$. Значит, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Из формулы $y = \frac{S - \pi x^2}{\pi x}$ находим $y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Таким образом, искомым конусом наибольшего объёма является конус, у которого образующая в три раза больше радиуса основания (рис. О5.24).

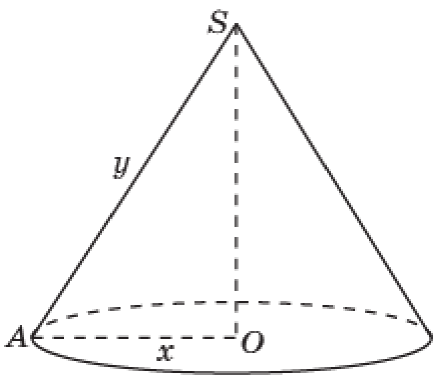


Рис. О5.24

5.25. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c. По условию $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб (рис. О5.25).

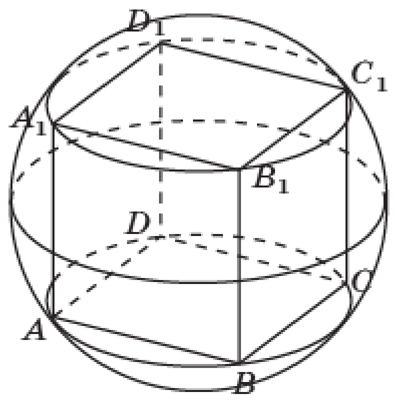


Рис. О5.25

Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = a^2, y = b^2, z = c^2$. Получим неравенство $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{d^2}{3}$. Из него следует неравенство $V \leq \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$, равенство в котором достигается, если $a^2 = b^2 =$

c^2, т. е. в случае $a = b = c$. Следовательно, искомый прямоугольный параллелепипед – куб, объём которого равен $\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.

5.26. Заметим, что площадь боковой поверхности цилиндра будет наибольшей в случае, если наибольшую площадь имеет его осевое сечение. При этом, осевое сечение является прямоугольником, вписанным в окружность радиусом R (рис. О5.26).

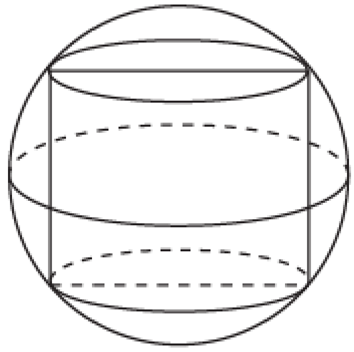


Рис. О5.26

Воспользуемся тем, что из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Из этого следует, что высота цилиндра равна удвоенному радиусу основания и равна $\sqrt{2}R$.

5.27. Пусть высота цилиндра равна $2x$. Тогда радиус r основания равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Объём V цилиндра равен $\pi(R^2 - x^2) \cdot 2x$ (рис. О5.27).

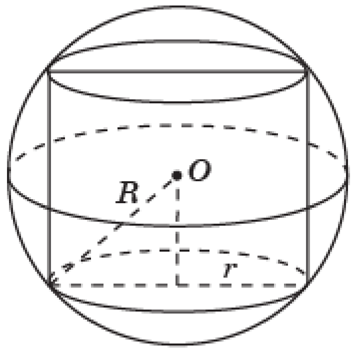


Рис. О5.27

Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $2\pi R^2 - 4\pi x^2$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Следовательно, высота искомого цилиндра равна $\sqrt{2}R$, радиус основания равен $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Таким образом, искомым цилиндром наибольшего объёма является цилиндр, осевым сечением которого является квадрат. Объём этого цилиндра равен $\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{2}$.

5.28. Пусть высота конуса равна x. Тогда квадрат радиуса основания равен $R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2$. Объём V конуса равен $\frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2)\cdot x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{4}{3}\pi Rx - \pi x^2$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{4R}{3}$. Следовательно, высота искомого конуса равна $\frac{4R}{3}$, радиус основания равен $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$. Объём этого конуса равен $\frac{32\pi R^3}{81}$ (рис. О5.28).

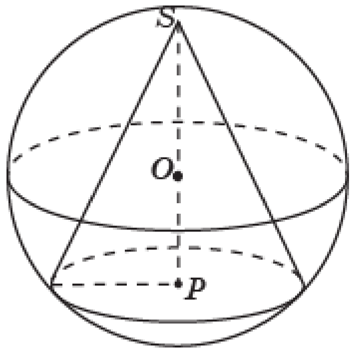


Рис. О5.28

5.29. Пусть радиус основания данного конуса равен R, а высота равна h. Обозначим радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в данный конус, соответственно x и y (рис. О5.29).

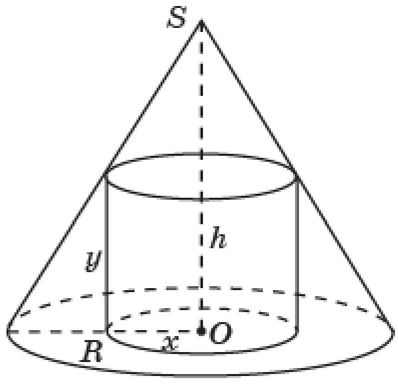


Рис. О5.29

Тогда $\frac{R-x}{R} = \frac{y}{h}$. Следовательно, $y = \frac{h(R-x)}{R}$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi xy = \frac{2\pi x h(R-x)}{R}$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{2\pi h}{R}(Rx - x^2)$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{R}{2}$. Следовательно, радиус основания искомого цилиндра равен $\frac{R}{2}$.

5.30. Пусть радиус основания данного конуса равен R, а высота равна h. Обозначим радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в данный конус, соответственно x и y (рис. O5.30).

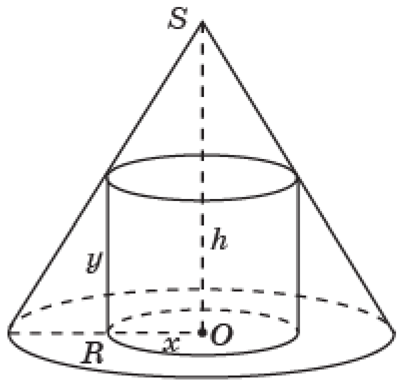


Рис. O5.30

Тогда $\frac{R-x}{R} = \frac{y}{h}$. Следовательно, $y = \frac{h(R-x)}{R}$. Объём цилиндра равен $\pi x^2 y = \frac{\pi x^2 h(R-x)}{R}$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{\pi h}{R}(2Rx - 3x^2)$. Производная обращается в ноль, если $x = \frac{2R}{3}$. Следовательно, радиус основания искомого цилиндра равен $\frac{2R}{3}$.

Литература

1. Возняк Г. М. Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.

2. Нагибин Ф. Ф. Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.

3. Пржевальский Е. Собрание геометрических теорем и задач. – 9-е изд. – М.: Типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1909.

4. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.

5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ