В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА

ЗАДАЧИ НА ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Учебное пособие

для 10-11 классов общеобразовательных учреждений

2020

ВВЕДЕНИЕ

Умения изображать пространственные фигуры и их конфигурации составляют основу изучения стереометрии, а сами эти умения не менее важны, чем умения доказывать утверждения, находить геометрические величины (длины, углы, площади, объёмы).

Более того, от умения учащихся правильно изображать пространственные фигуры во многом зависит и правильность решения задач на доказательство и нахождение геометрических величин.

Хорошо выполненное изображение пространственной фигуры помогает найти решение стереометрической задачи. Наоборот, плохо выполненный рисунок затрудняет решение задачи, может приводить к ошибкам.

Настоящее пособие по геометрии соответствует программе по математике и предназначено для работы в старших классах общеобразовательных школ.

Оно содержит некоторые сведения о параллельном и ортогональном проектированиях, используемых при изображении пространственных фигур, а также сто тридцать шесть задач на изображение пространственных фигур на клетчатой бумаге.

Желательно, чтобы учащиеся имели тетради в клетку, в которых они выполняли бы изображения пространственных фигур, приведённые в данном пособии, а сами задачи на изображение пространственных фигур входили бы в самостоятельные и контрольные работы, наряду с задачами на доказательство и нахождение геометрических величин.

Желаем успехов в изучении стереометрии!

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно в геометрии для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть π - некоторая плоскость, *l* - пересекающая её прямая (рис. 1).

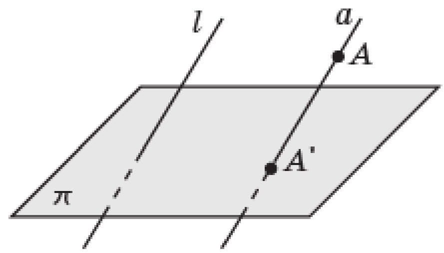

Рис. 1

Через произвольную точку *A*, не принадлежащую прямой *l*, проведём прямую, параллельную прямой *l*. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется параллельной проекцией точки *A* на плоскость π в направлении прямой *l*. Обозначим её *A*'. Если точка *A* принадлежит прямой *l*, то параллельной проекцией *A* на плоскость π считается точка пересечения прямой *l* с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке *A* пространства сопоставляется её проекция *A*' на плоскость π. Это соответствие называется ***параллельным проектированием*** на плоскость π в направлении прямой *l*.

Пусть *Ф* - некоторая фигура в пространстве. Проекции её точек на плоскость π образуют фигуру *Ф'*, которая называется ***параллельной проекцией*** фигуры *Ф* на плоскость π в направлении прямой *l*. Говорят также, что фигура *Ф'* получена из фигуры *Ф* параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим некоторые свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой *l*, то её проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой *l*, то её проекцией является прямая.

Доказательство. Ясно, что если прямая *k* параллельна или совпадает с прямой *l*, то её проекцией в направлении этой прямой на плоскость π будет точка пересечения прямой k и плоскости π. Пусть k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 2).

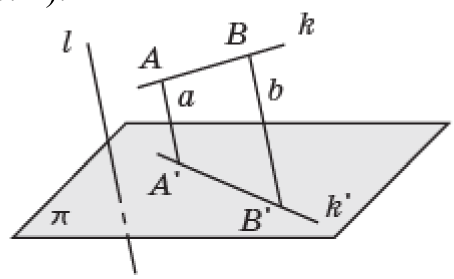

Рис. 2

Возьмём какую-нибудь точку A на прямой k и проведём через неё прямую a, параллельную l. Её пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведём плоскость α. Её пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k.

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, или нет. Параллельное проектирование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на прямой, не параллельной и не совпадающей с прямой l. В частности, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Ясно, что если отрезок лежит на прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, то его проекцией будет точка. Пусть точки A, B и C принадлежат прямой k, не параллельной и не совпадающей с прямой l; k' – проекция прямой k на плоскость π в направлении прямой l; A', B', C' – проекции точек A, B и C соответственно; a, b, c – соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой l (рис. 3).

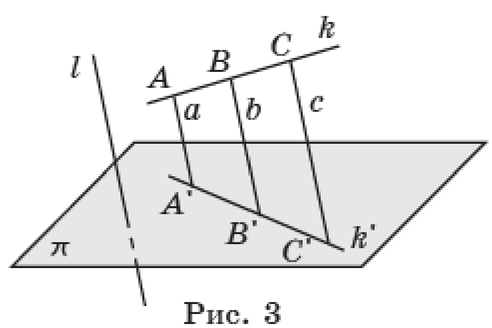

Рис. 3

Тогда из теоремы о пропорциональных отрезках планиметрии следует равенство отношений $AB : BC = A'B' : B'C'$. В частности, если точка B - середина отрезка AC, то B' - середина отрезка $A'C'$.

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой l, то их проекции в направлении l могут быть или параллельными прямыми, или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 - параллельные прямые, не параллельные прямой l. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 4).

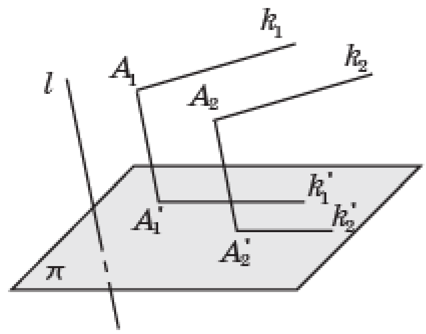

Рис. 4

Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой, по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны.

Свойство 4. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то её проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.

Доказательство. Определим преобразование фигуры F в фигуру F', сопоставляя точкам фигуры F их проекции. Тогда, если A и B - точки фигуры F, и A', B' - их проекции, то $ABB'A'$ - параллелограмм (рис. 5).

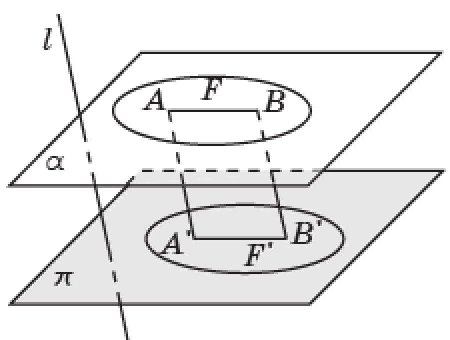

Рис. 5

Следовательно, $A'B' = AB$. Таким образом, это преобразование сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением, значит, фигуры F и F' равны.

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то её проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок. Причём, если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако, поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Приведём примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани – параллелограммы, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 6).

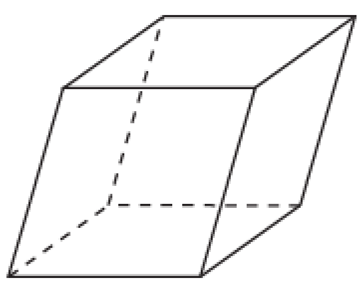

Рис. 6

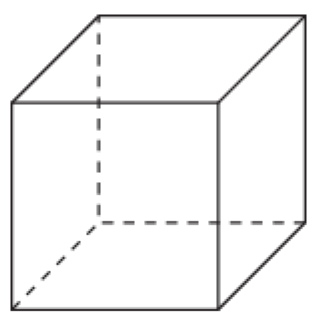

Рис. 7

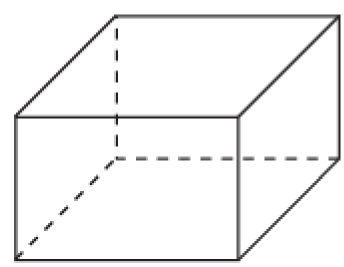

Рис. 8

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 7).

Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 8).

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 9).

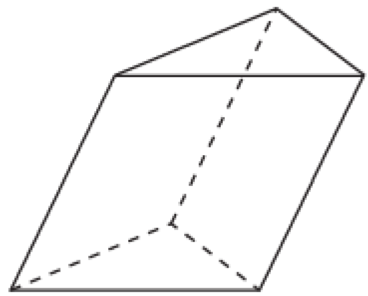

Рис. 9

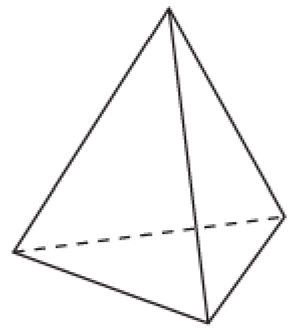

Рис. 10

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий её основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить её с вершинами многоугольника (рис. 10). Полученные отрезки будут изображать боковые рёбра пирамиды.

Ортогональное проектирование

Ортогональным проектированием называется параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проетирования.

Поскольку ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, для него справедливы все рассмотренные выше свойства параллельного проектирования.

Выясним, какая фигура является ортогональной проекцией окружности. Пусть F - окружность в пространстве, F' – её ортогональная проекция на плоскость π (рис. 11).

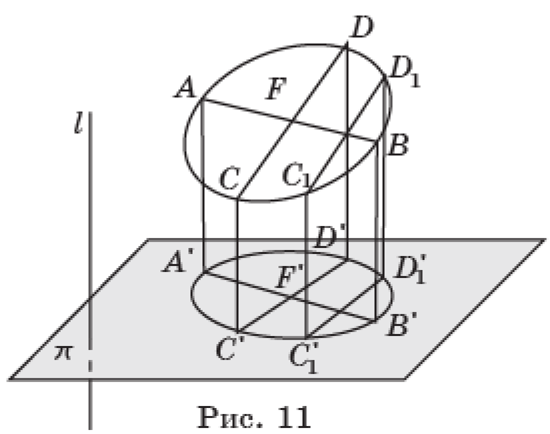

Рис. 11

Пусть AB - диаметр окружности, параллельный плоскости π и $A'B'$ его проекция на эту плоскость. Тогда $AB = A'B'$. Возьмём какой-нибудь другой диаметр CD и пусть $C'D'$ - его проекция. Обозначим отношение $C'D' : CD$ через k. Так как при ортогональном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, её проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$, и отношение $C_1'D_1' : C_1D_1$ будет равно k.

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь её диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется эллипсом. Например, на рисунке 12 изображён эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

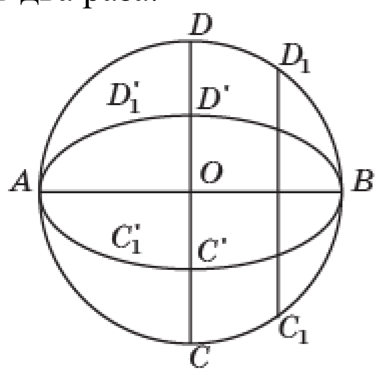

Рис. 12

Ортогональное проектирование используется для изображений цилиндра, конуса, шара, сферы и других круглых тел.

Для изображения цилиндра достаточно изобразить его основания в виде двух эллипсов, получающихся друг из друга параллельным переносом, и нарисовать две образующие, соединяющие соответствующие точки этих оснований (рис. 13).

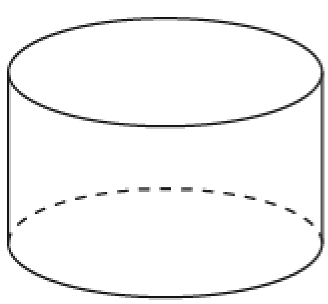

Рис. 13

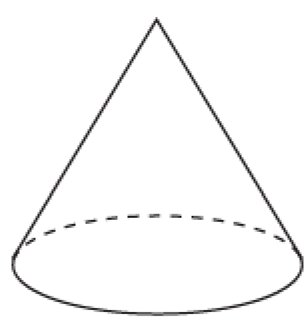

Рис. 14

Для изображения конуса достаточно изобразить его основание в виде эллипса, отметить вершину и провести через неё две образующие, являющиеся касательными к этому эллипсу (рис. 14).

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Пусть дана сфера с центром O и плоскость проектирования π. Проведём плоскость α, проходящую через центр сферы и параллельную плоскости проектирования. Поскольку плоскости α и π параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 15).

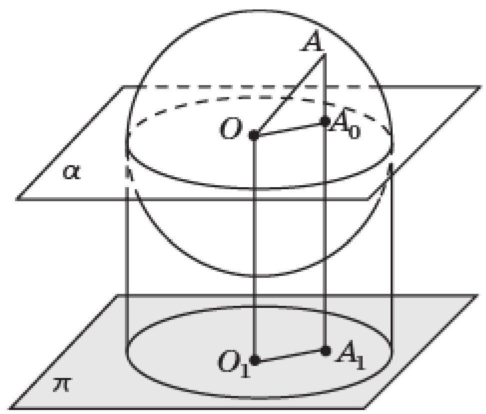

Рис. 15

Сечением сферы плоскостью α является окружность, радиус которой равен радиусу R сферы. Если A точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 её ортогональная проекция на плоскость α, то $OA_0 < OA \leq R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость α точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса.

Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют большую окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр), плоскость которой образует острый угол с направлением проектирования, и полюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется экватором. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости экватора – параллелями, прямая, проходящая через полюсы – осью, а большие окружности, проходящие через полюсы – меридианами.

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди, и построим вид сферы слева, т. е.

ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами CD и PQ (рис. 16).

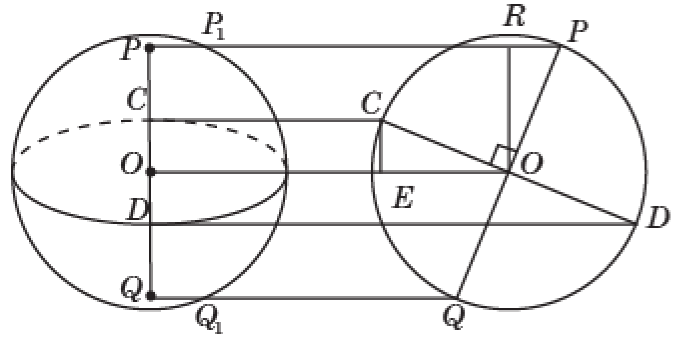

Рис. 16

Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов P и Q достаточно заметить, что прямоугольные треугольники OPR и OCE равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Кроме того, имеем $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит, $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки P и Q выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

ЗАДАЧИ

1. Куб

1. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 1.1, на который мы смотрим справа и сверху.

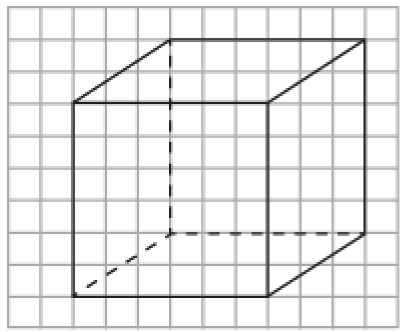

Рис. 1.1

2. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 1.2, на который мы смотрим слева и сверху.

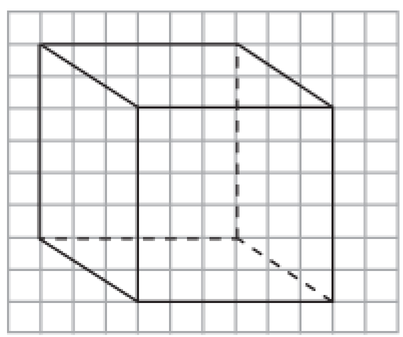

Рис. 1.2

3. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 1.3, на который мы смотрим справа и снизу.

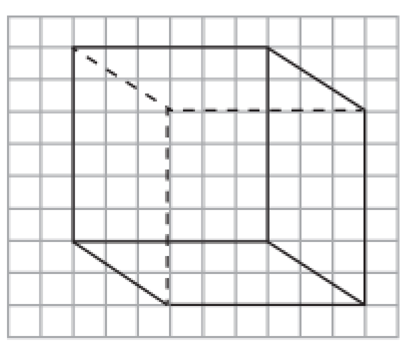

Рис. 1.3

4. Изобразите куб аналогично данному на рисунке 1.4, на который мы смотрим слева и снизу.

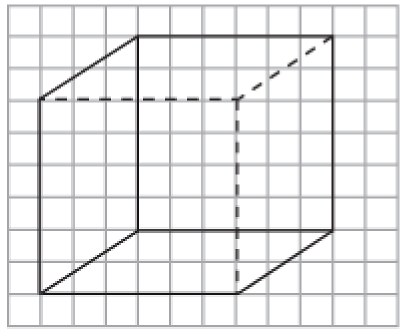

Рис. 1.4

5. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 1.5). Изобразите весь куб.

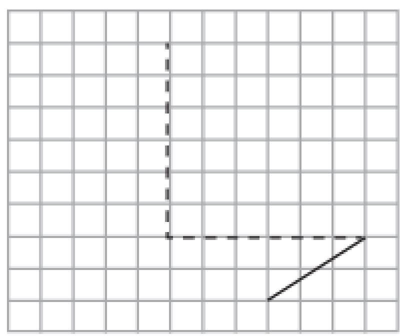

Рис. 1.5

6. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 1.6). Изобразите весь куб.

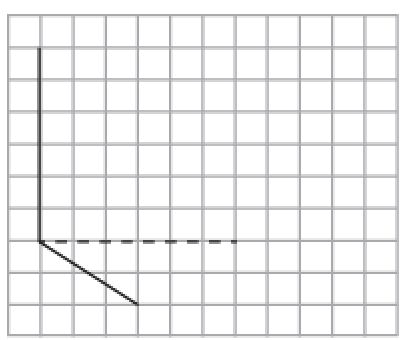

Рис. 1.6

7. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 1.7). Изобразите весь куб.

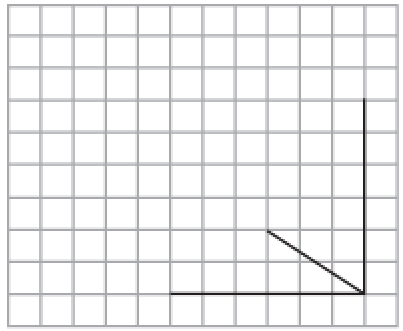

Рис. 1.7

8. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 1.8). Изобразите весь куб.

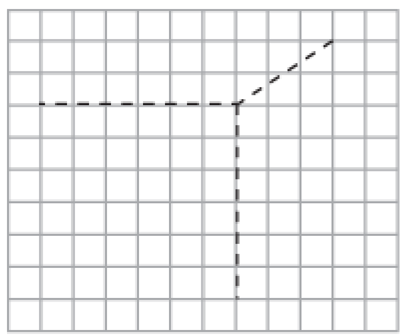

Рис. 1.8

9. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины куба (рис. 1.9). Изобразите весь куб.

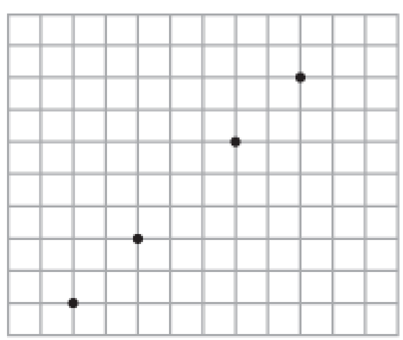

Рис. 1.9

10. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины куба (рис. 1.10). Изобразите весь куб.

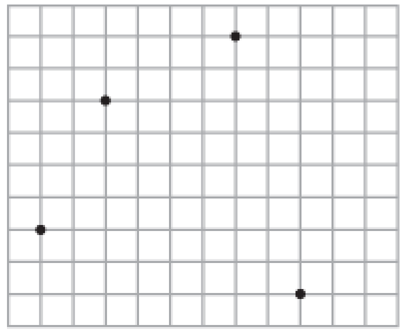

Рис. 1.10

11. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины куба (рис. 1.11). Изобразите весь куб.

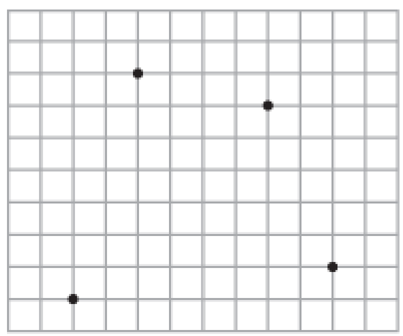

Рис. 1.11

12. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины куба (рис. 1.12). Изобразите весь куб.

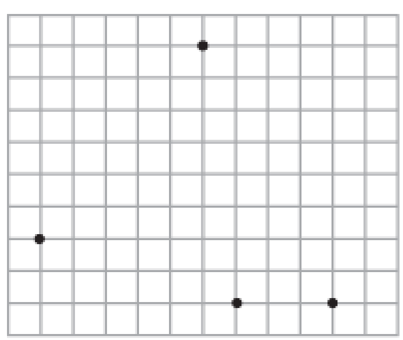

Рис. 1.12

2. Прямоугольный параллелепипед

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 2.1, на который мы смотрим справа и сверху.

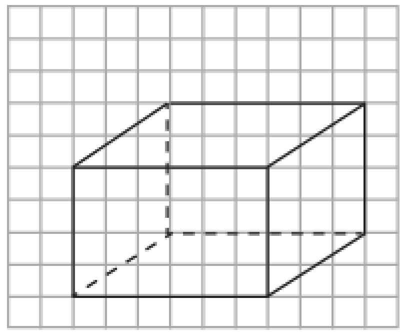

Рис. 2.1

2. Изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 2.2, на который мы смотрим слева и сверху.

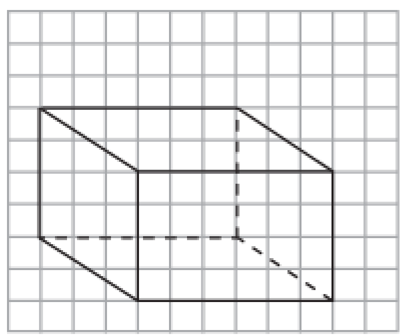

Рис. 2.2

3. Изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 2.3, на который мы смотрим справа и снизу.

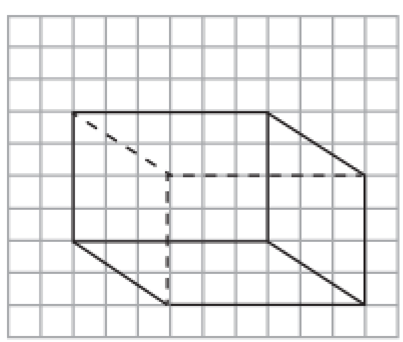

Рис. 2.3

4. Изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 2.4, на который мы смотрим слева и снизу.

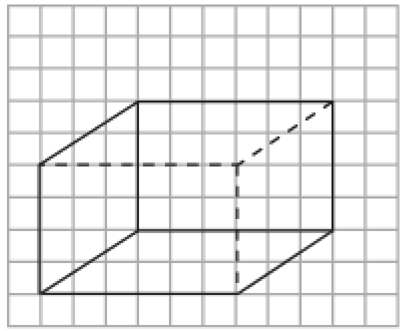

Рис. 2.4

5. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.5). Изобразите весь параллелепипед.

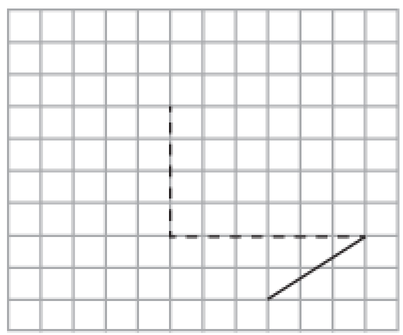

Рис. 2.5

6. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.6). Изобразите весь параллелепипед.

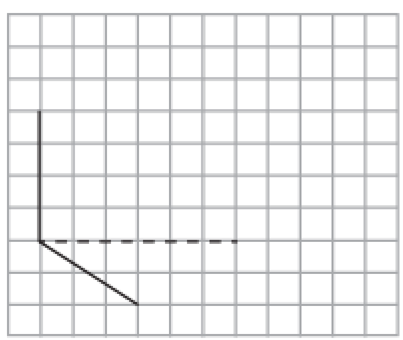

Рис. 2.6

7. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.7). Изобразите весь параллелепипед.

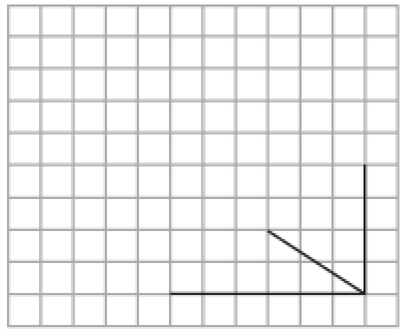

Рис. 2.7

8. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.8). Изобразите весь параллелепипед.

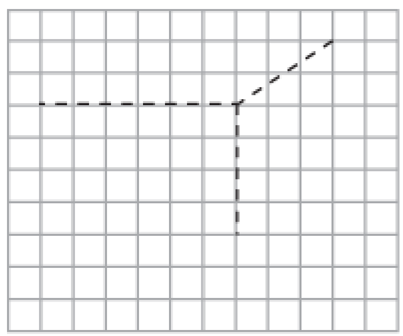

Рис. 2.8

9. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.9). Изобразите весь параллелепипед.

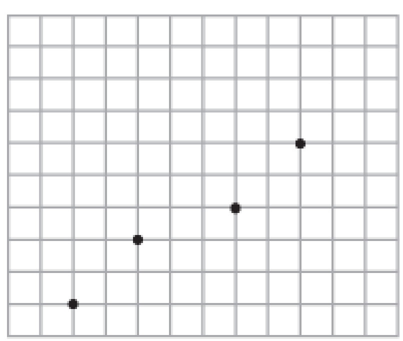

Рис. 2.9

10. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.10). Изобразите весь параллелепипед.

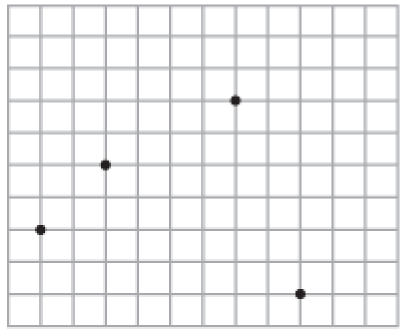

Рис. 2.10

11. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.11). Изобразите весь параллелепипед.

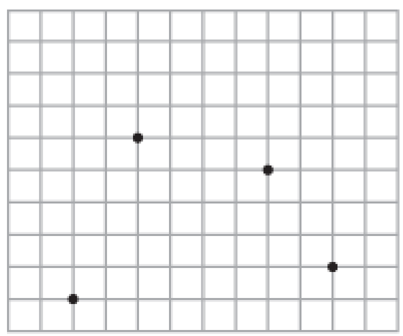

Рис. 2.11

12. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.12). Изобразите весь параллелепипед.

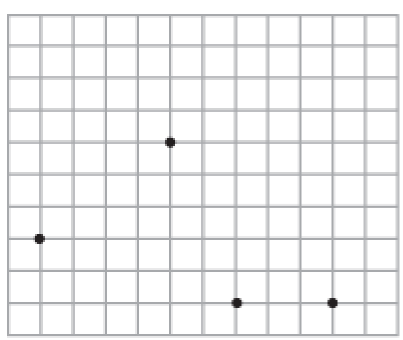

Рис. 2.12

3. Параллелепипед

1. Изобразите параллелепипед аналогично данному на рисунке 3.1, на который мы смотрим справа и сверху.

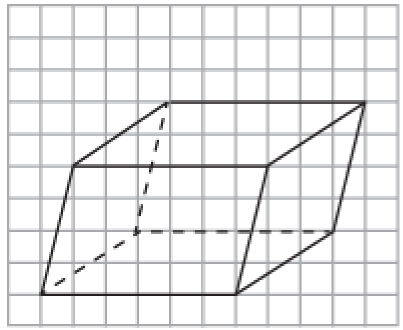

Рис. 3.1

2. Изобразите параллелепипед аналогично данному на рисунке 3.2, на который мы смотрим слева и сверху.

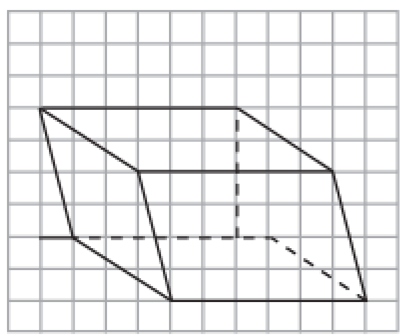

Рис. 3.2

3. Изобразите параллелепипед аналогично данному на рисунке 3.3, на который мы смотрим справа и снизу.

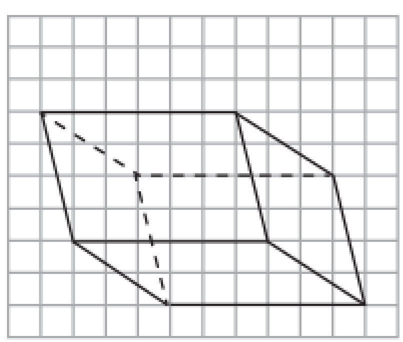

Рис. 3.3

4. Изобразите параллелепипед аналогично данному на рисунке 3.4, на который мы смотрим слева и снизу.

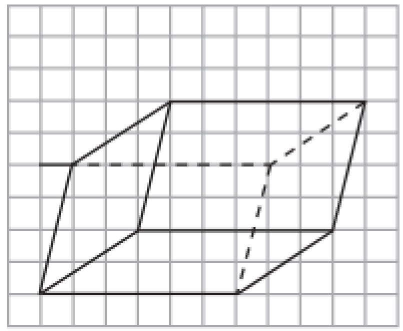

Рис. 3.4

5. На клетчатой бумаге изображены три ребра параллелепипеда (рис. 3.5). Изобразите весь параллелепипед.

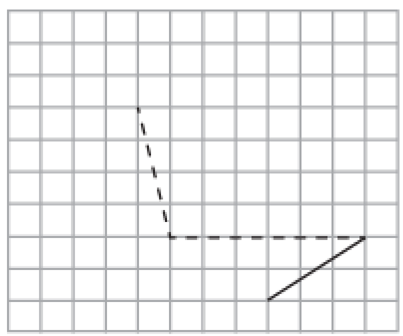

Рис. 3.5

6. На клетчатой бумаге изображены три ребра параллелепипеда (рис. 3.6). Изобразите весь параллелепипед.

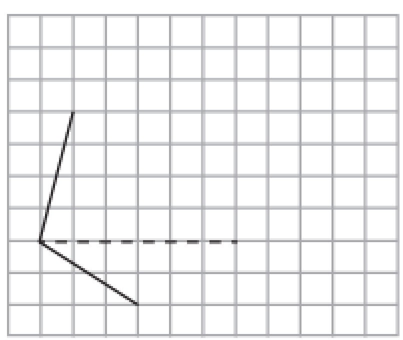

Рис. 3.6

7. На клетчатой бумаге изображены три ребра параллелепипеда (рис. 3.7). Изобразите весь параллелепипед.

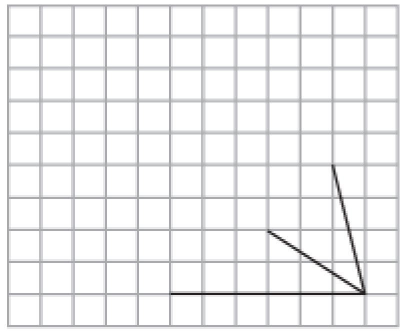

Рис. 3.7

8. На клетчатой бумаге изображены три ребра параллелепипеда (рис. 3.8). Изобразите весь параллелепипед.

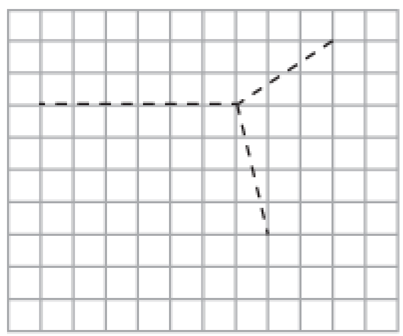

Рис. 3.8

9. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.9). Изобразите весь параллелепипед.

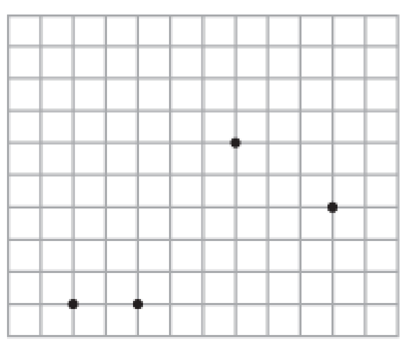

Рис. 3.9

4. Треугольная призма

1. Изобразите правильную треугольную призму, аналогично данной на рисунке 4.1, на которую мы смотрим сверху.

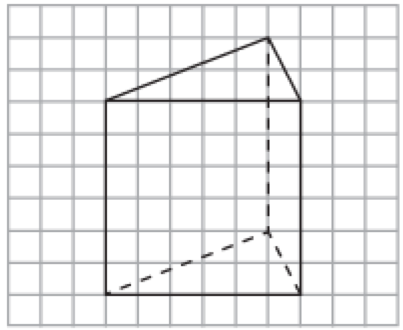

Рис. 4.1

2. Изобразите правильную треугольную призму аналогично данной на рисунке 4.2, на которую мы смотрим снизу.

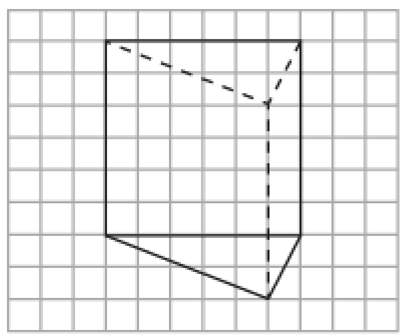

Рис. 4.2

3. Изобразите треугольную призму аналогично данной на рисунке 4.3, на которую мы смотрим сверху.

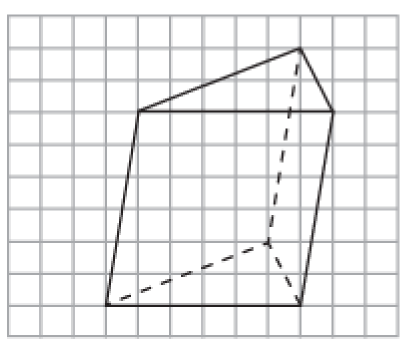

Рис. 4.3

4. Изобразите треугольную призму аналогично данной на рисунке 4.4, на которую мы смотрим снизу.

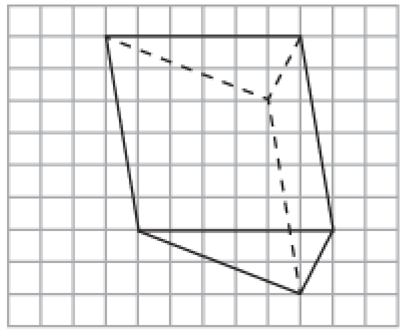

Рис. 4.4

5. На клетчатой бумаге изображены три ребра правильной треугольной призмы (рис. 4.5). Изобразите всю призму.

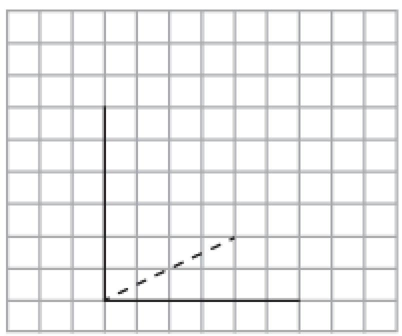

Рис. 4.5

6. На клетчатой бумаге изображены три ребра правильной треугольной призмы (рис. 4.6). Изобразите всю призму.

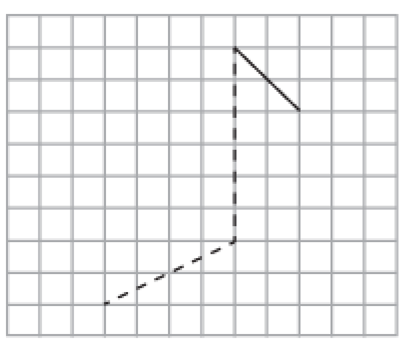

Рис. 4.6

7. На клетчатой бумаге изображены три ребра треугольной призмы (рис. 4.7). Изобразите всю призму.

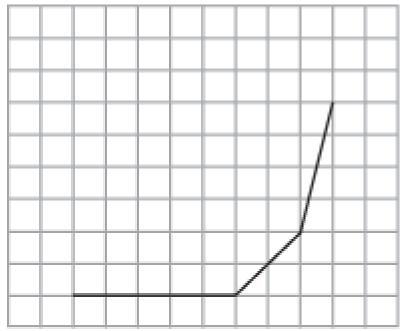

Рис. 4.7

8. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины правильной треугольной призмы (рис. 4.8). Изобразите всю призму.

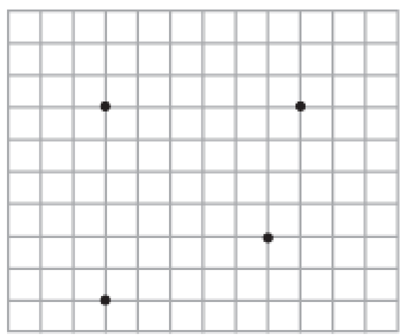

Рис. 4.8

9. На клетчатой бумаге изображены четыре вершины треугольной призмы (рис. 4.9). Изобразите всю призму.

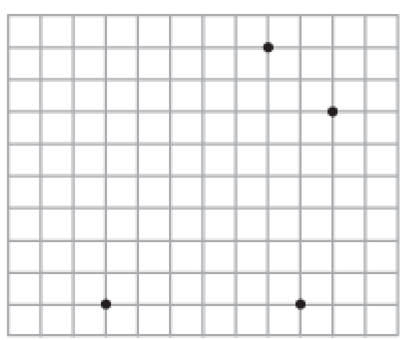

Рис. 4.9

5. Шестиугольная призма

1. Изобразите правильную шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 5.1, на которую мы смотрим справа и сверху.

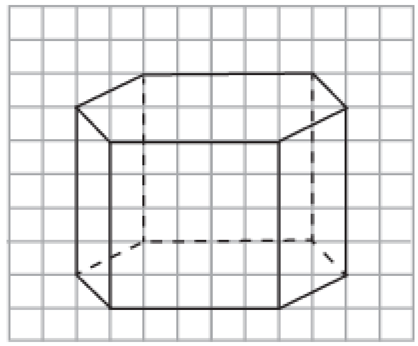

Рис. 5.1

2. Изобразите правильную шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 5.2, на которую мы смотрим слева и сверху.

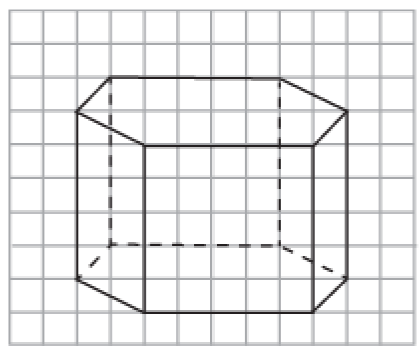

Рис. 5.2

3. Изобразите правильную шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 5.3, на которую мы смотрим справа и снизу.

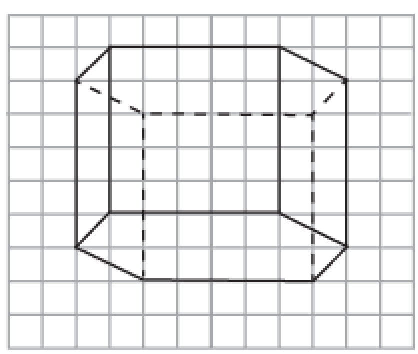

Рис. 5.3

4. Изобразите правильную шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 5.4, на которую мы смотрим слева и снизу.

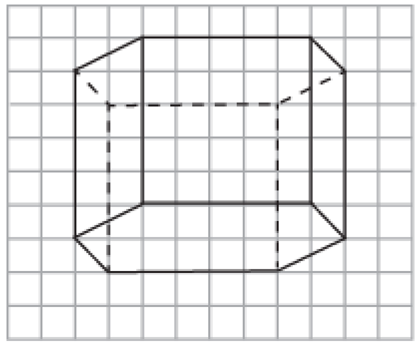

Рис. 5.4

5. На клетчатой бумаге изображены четыре ребра правильной шестиугольной призмы (рис. 5.5). Изобразите всю призму.

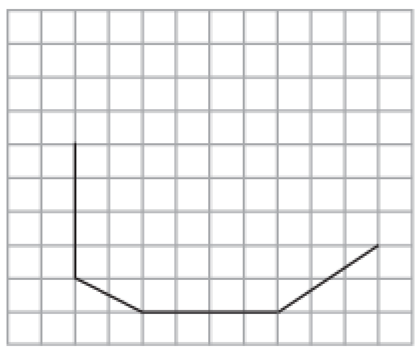

Рис. 5.5

6. На клетчатой бумаге изображены четыре ребра правильной шестиугольной призмы (рис. 5.6). Изобразите всю призму.

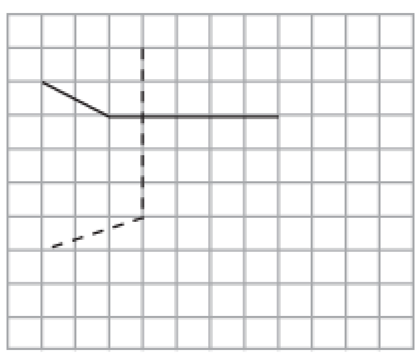

Рис. 5.6

6. Четырёхугольная пирамида

1. Изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 6.1, на которую мы смотрим справа и сверху.

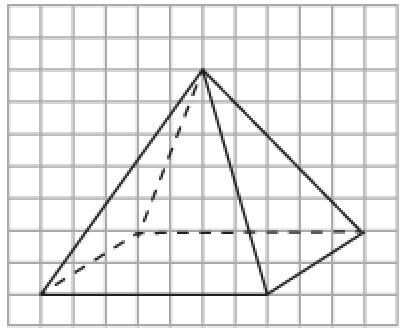

Рис. 6.1

2. Изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 6.2, на которую мы смотрим слева и сверху.

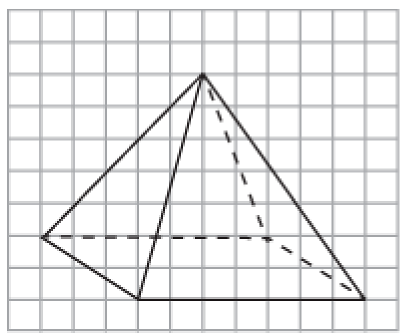

Рис. 6.2

3. Изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 6.3, на которую мы смотрим справа и снизу.

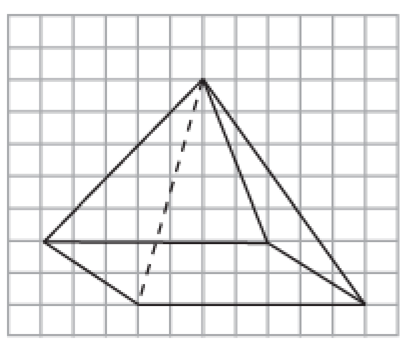

Рис. 6.3

4. Изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 6.4, на которую мы смотрим слева и снизу. Проведите её высоту.

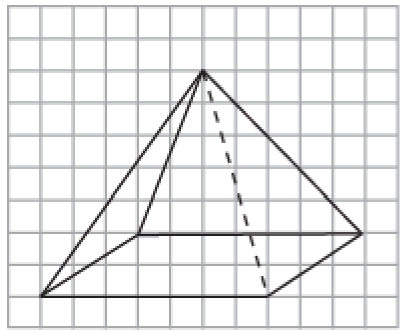

Рис. 6.4

5. На клетчатой бумаге изображены три ребра правильной четырёхугольной пирамиды (рис. 6.5). Изобразите всю пирамиду.

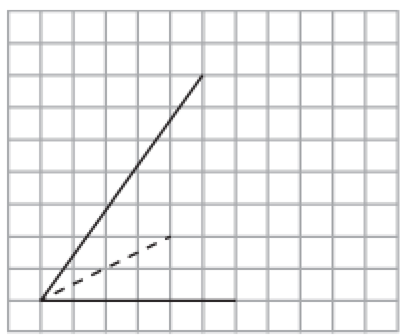

Рис. 6.5

6. На клетчатой бумаге изображены три ребра правильной четырёхугольной пирамиды (рис. 6.6). Изобразите всю пирамиду.

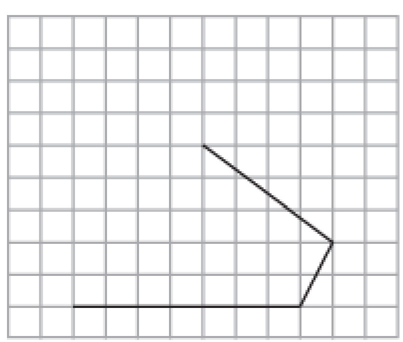

Рис. 6.6

7. Шестиугольная пирамида

1. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 7.1, на которую мы смотрим справа и сверху. Проведите её высоту.

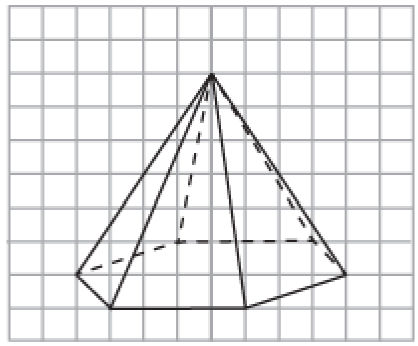

Рис. 7.1

2. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 7.2, на которую мы смотрим слева и сверху. Проведите её высоту.

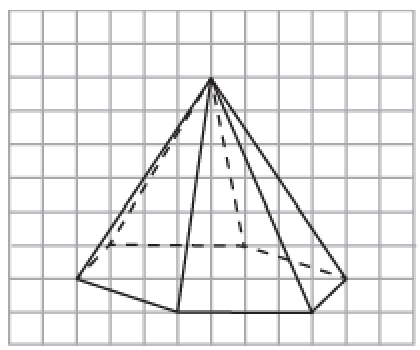

Рис. 7.2

3. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 7.3, на которую мы смотрим справа и снизу. Проведите её высоту.

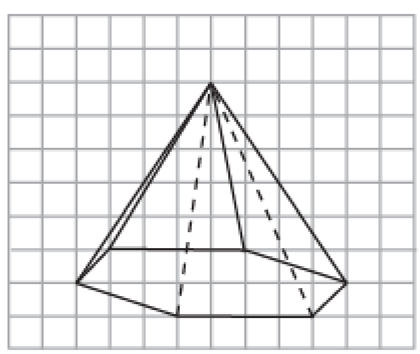

Рис. 7.3

4. Изобразите правильную шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 7.4, на которую мы смотрим слева и снизу. Проведите её высоту.

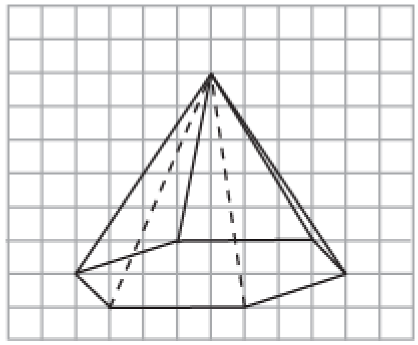

Рис. 7.4

5. На клетчатой бумаге изображены четыре ребра правильной шестиугольной пирамиды (рис. 7.5). Изобразите всю пирамиду.

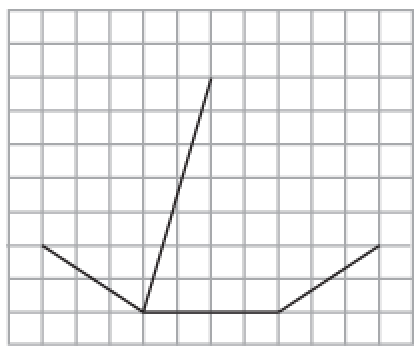

Рис. 7.5

6. На клетчатой бумаге изображены четыре ребра правильной шестиугольной пирамиды (рис. 7.6). Изобразите всю пирамиду.

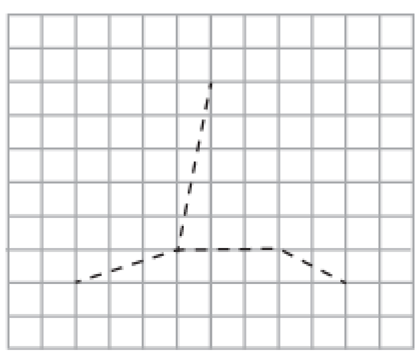

Рис. 7.6

8. Усечённая пирамида

1. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.1, на которую мы смотрим сверху.

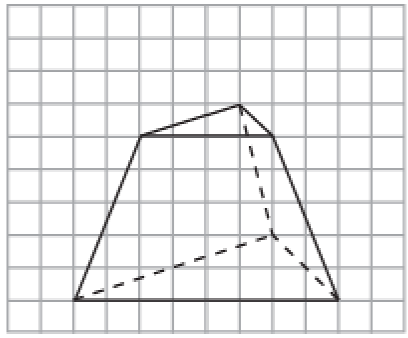

Рис. 8.1

2. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.2, на которую мы смотрим снизу.

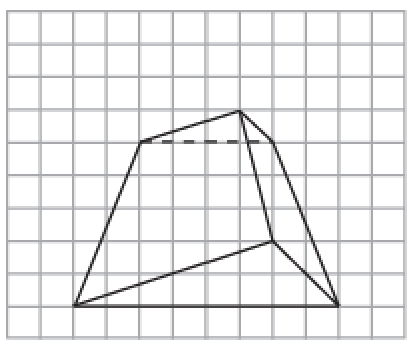

Рис. 8.2

3. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.3, на которую мы смотрим справа и сверху.

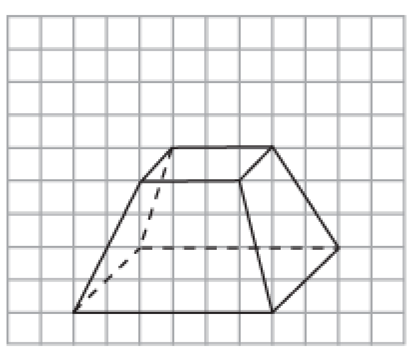

Рис. 8.3

4. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.4, на которую мы смотрим слева и сверху.

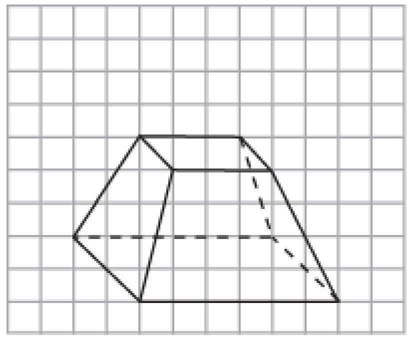

Рис. 8.4

5. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.5, на которую мы смотрим справа и сверху.

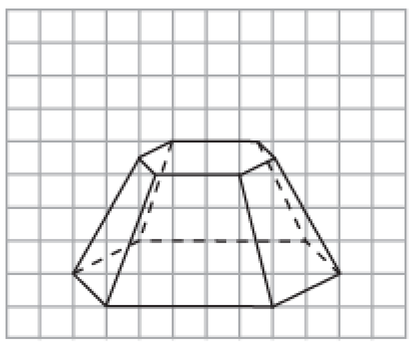

Рис. 8.5

6. На клетчатой бумаге изобразите усечённую пирамиду, аналогичную данной на рисунке 8.6, на которую мы смотрим слева и сверху.

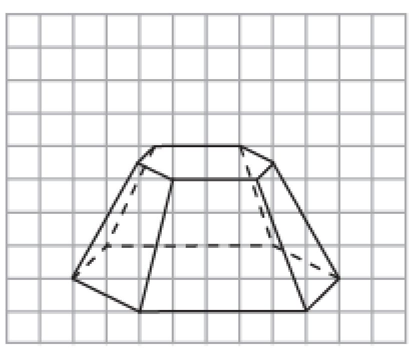

Рис. 8.6

9. Правильные многогранники

1. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 4.2.

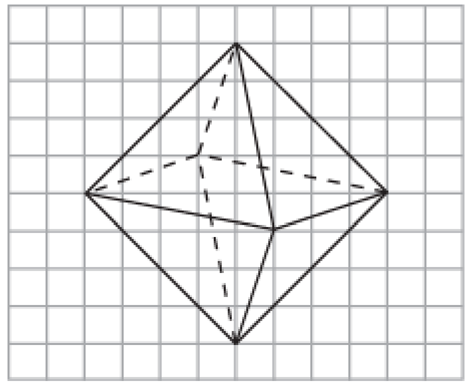

Рис. 9.1

2. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 9.2.

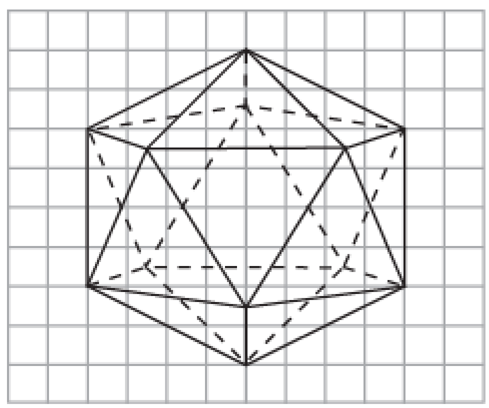

Рис. 9.2

3. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 9.3.

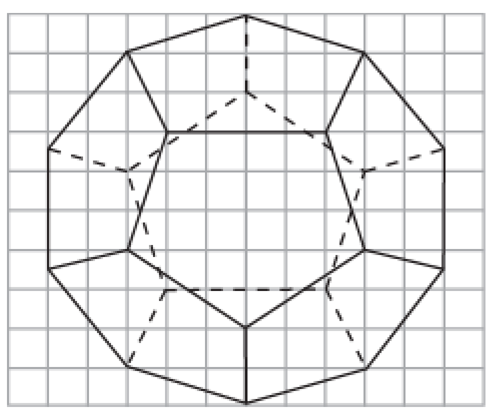

Рис. 9.3

4. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 9.4. Отметьте середины его рёбер. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

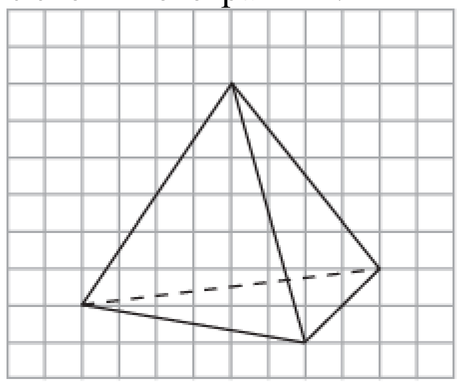

Рис. 9.4

5. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 9.5. Отметьте центры его граней. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

Рис. 9.5

6. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 9.6. Отметьте центры его граней. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

Рис. 9.6

7. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 9.7. Отметьте центры его граней. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

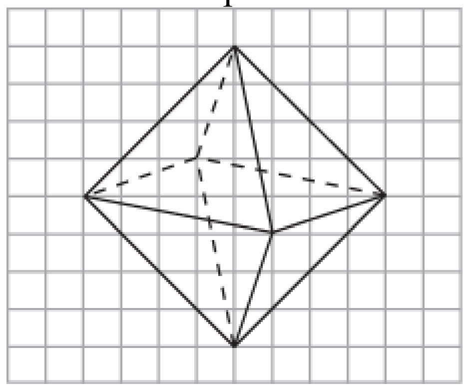

Рис. 9.7

8. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 9.8. Отметьте центры его граней. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

Рис. 9.8

9. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 9.9. Отметьте центры его граней. Вершинами какого многогранника они являются? Изобразите этот многогранник.

Рис. 9.9

10. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 9.10. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер этого куба. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)? Какие многоугольники являются его гранями?

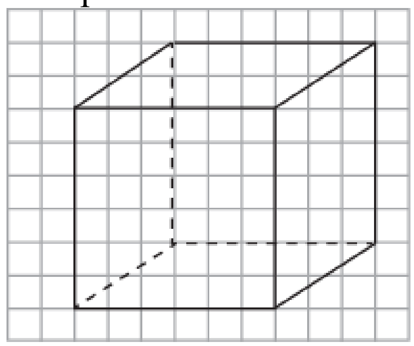

Рис. 9.10

11. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 9.11. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер этого октаэдра. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)? Какие многоугольники являются его гранями?

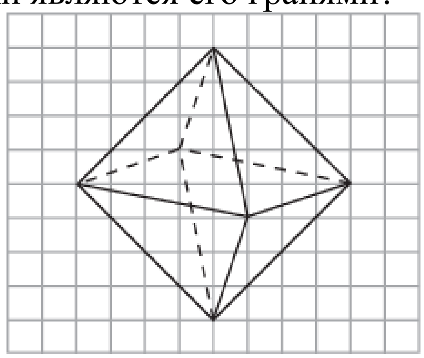

Рис. 9.11

12. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 9.12. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер этого икосаэдра. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)? Какие многоугольники являются его гранями?

Рис. 9.12

13. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 9.13. Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер этого додекаэдра. Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)? Какие многоугольники являются его гранями?

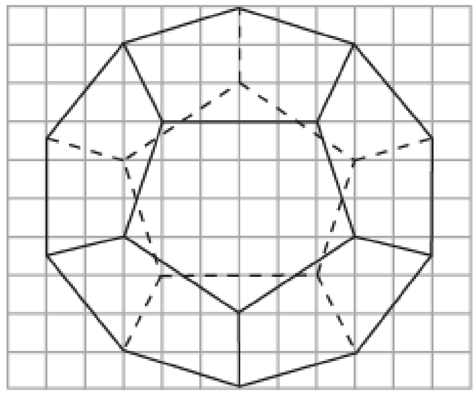

Рис. 9.13

10. Центральная симметрия

1. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 10.1. Отметьте его центр симметрии.

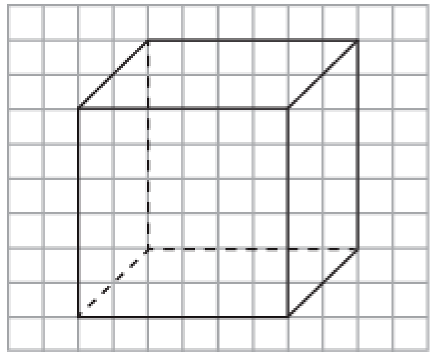

Рис. 10.1

2. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 10.2. Отметьте его центр симметрии.

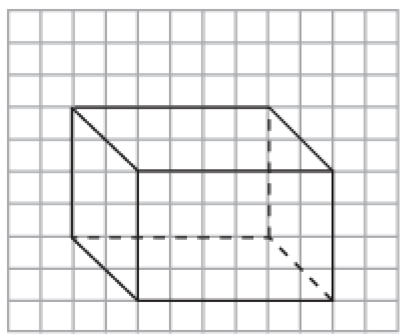

Рис. 10.2

3. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 10.3. Отметьте его центр симметрии.

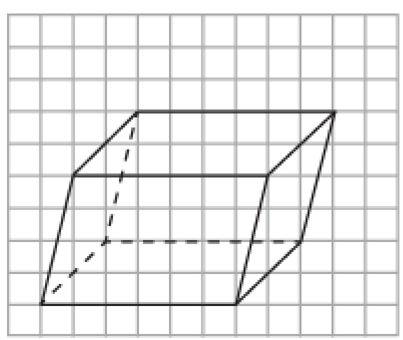

Рис. 10.3

4. На клетчатой бумаге изобразите правильную шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 10.4. Отметьте её центр симметрии.

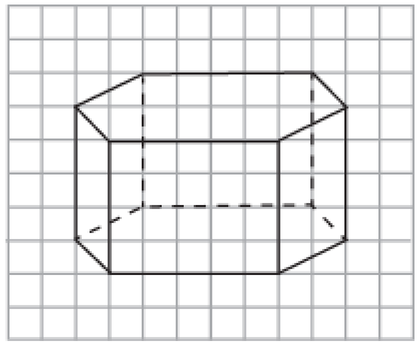

Рис. 10.4

5. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 10.5. Отметьте его центр симметрии.

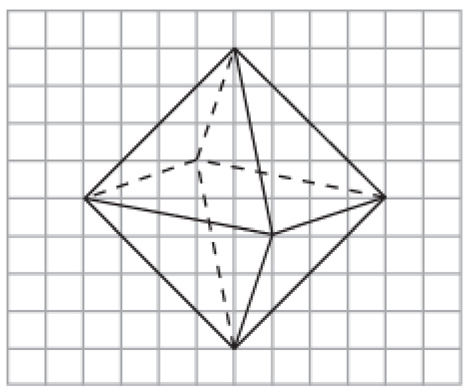

Рис. 10.5

6. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 10.6. Отметьте его центр симметрии.

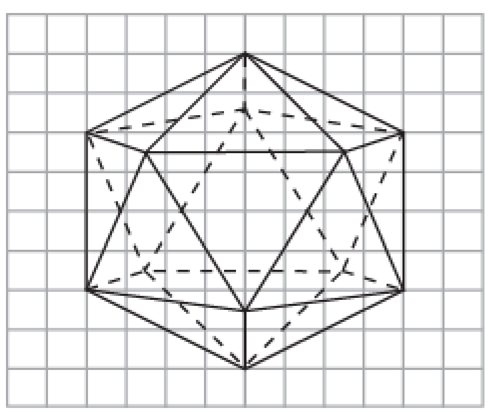

Рис. 10.6

7. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 10.7. Отметьте его центр симметрии.

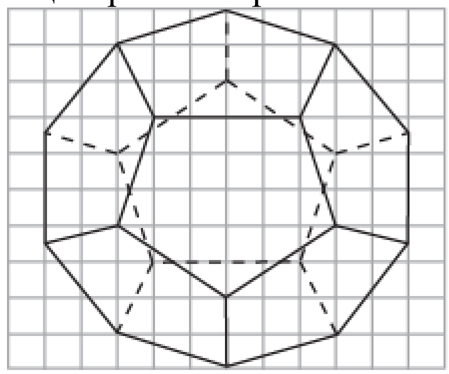

Рис. 10.7

8. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 10.8. Постройте пирамиду, симметричную данной относительно середины её высоты. Какая фигура является общей частью исходной пирамиды и симметричной?

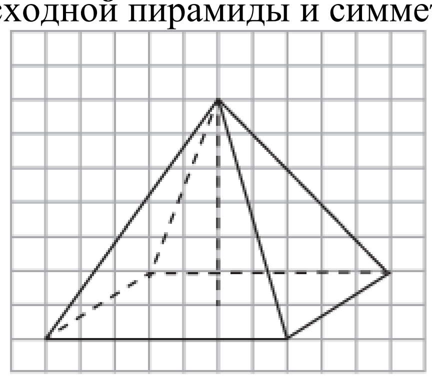

Рис. 10.8

9. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данному на рисунке 10.9. Постройте пирамиду, симметричную данной относительно середины её высоты. Какая фигура является общей частью исходной пирамиды и симметричной?

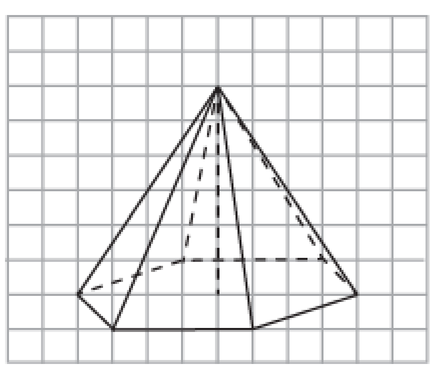

Рис. 10.9

11. Поворот. Осевая симметрия

1. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 11.1. Постройте куб, полученный поворотом данного куба вокруг прямой, проходящей через центры противолежащих граней, на угол 45°. Какая фигура является общей частью исходного куба и повёрнутого?

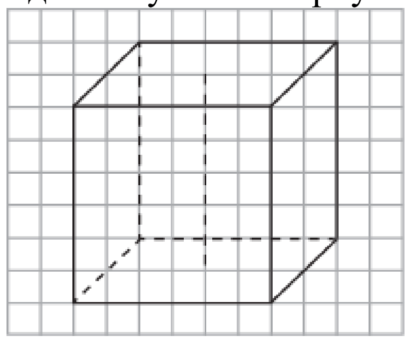

Рис. 11.1

2. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную призму аналогично данной на рисунке 11.2. Постройте призму, полученную поворотом данной призмы вокруг прямой, проходящей через центры её оснований, на угол 60°. Какая фигура является общей частью исходной призмы и повёрнутой?

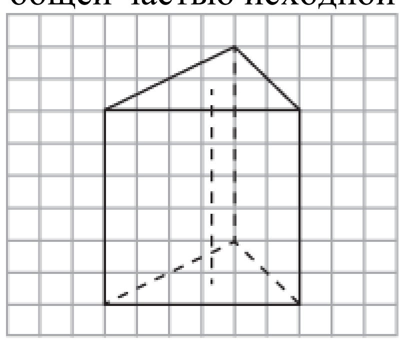

Рис. 11.2

3. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 11.3. Постройте пирамиду, полученную поворотом данной пирамиды вокруг прямой, проходящей вершину и через центр её основания, на угол 45°. Какая фигура является общей частью исходной пирамиды и повёрнутой?

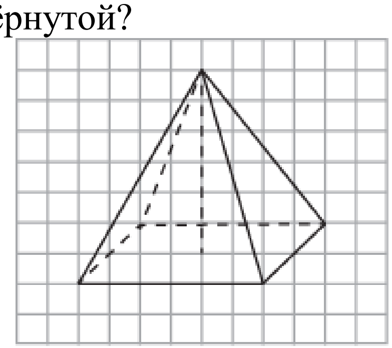

Рис. 11.3

4. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную призму аналогично данной на рисунке 11.4. Постройте призму, полученную симметрией данной призмы относительно прямой, проходящей через центры её оснований. Какая фигура является общей частью исходной призмы и симметричной?

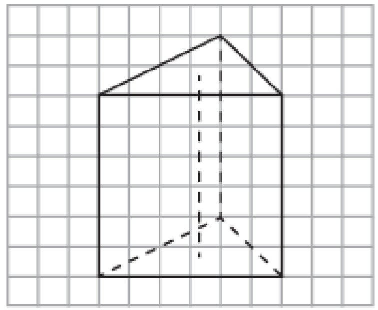

Рис. 11.4

5. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную призму аналогично данной на рисунке 11.5. Постройте призму, полученную поворотом данной призмы вокруг прямой, проходящей через середину её бокового ребра и центр противолежащей этому ребру грани, на угол 90°. Какая фигура является общей частью исходной призмы и повёрнутой?

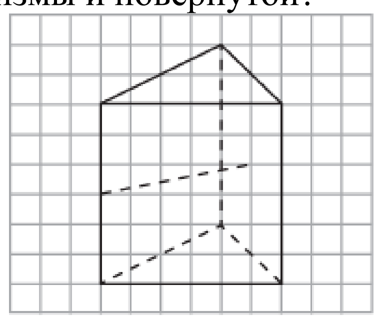

Рис. 11.5

6. На клетчатой бумаге изобразите правильный тетраэдр аналогично данному на рисунке 11.6. Постройте тетраэдр, полученный поворотом данного тетраэдра вокруг прямой, проходящей через середины его противолежащих рёбер, на угол 90°. Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого?

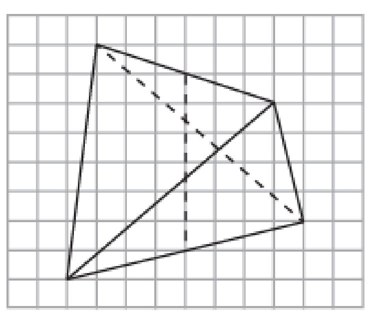

Рис. 11.6

12. Цилиндр

1. На клетчатой бумаге изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.1. Нарисуйте его ось.

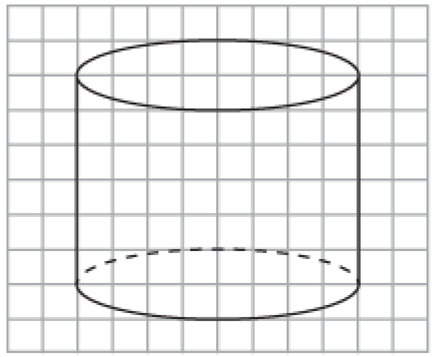

Рис. 12.1

2. На клетчатой бумаге изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.2. Нарисуйте его осевое сечение, проходящее через отмеченную точку.

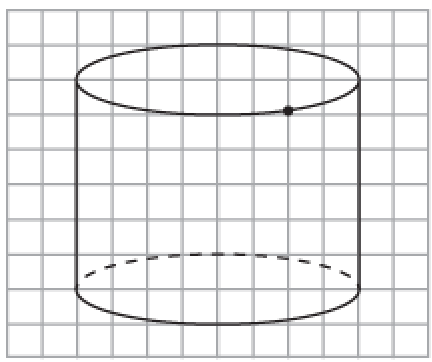

Рис. 12.2

3. На клетчатой бумаге изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.3. Нарисуйте его сечение, проходящее через отмеченные точки и параллельное оси цилиндра.

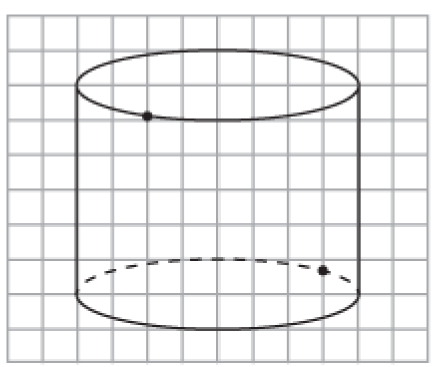

Рис. 12.3

4. На клетчатой бумаге изобразите цилиндр, аналогичный данному на рисунке 12.4. Нарисуйте его сечение плоскостью, параллельной плоскости основания и проходящей через отмеченную точку.

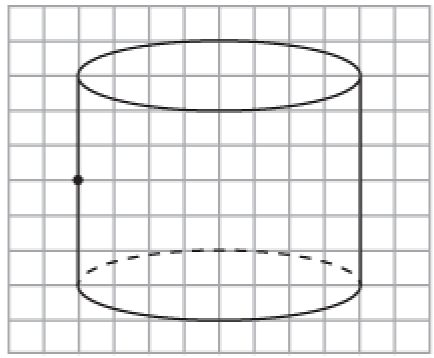

Рис. 12.4

5. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную призму, вписанную в цилиндр, аналогично данной на рисунке 12.5.

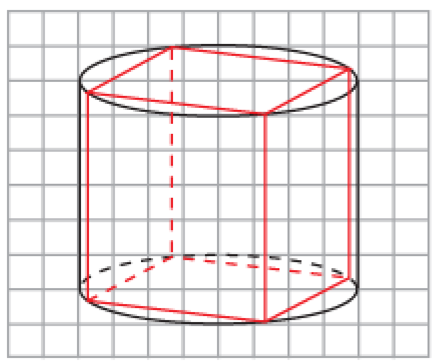

Рис. 12.5

6. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную призму, вписанную в цилиндр, аналогично данной на рисунке 12.6.

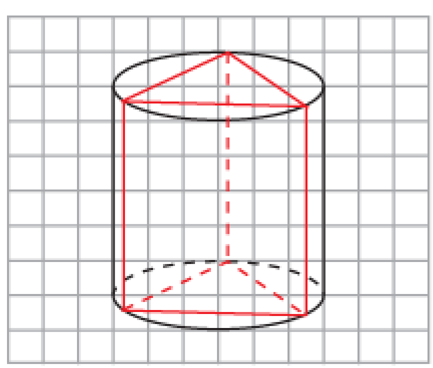

Рис. 12.6

7. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную призму, описанную около цилиндра, аналогично данной на рисунке 12.7.

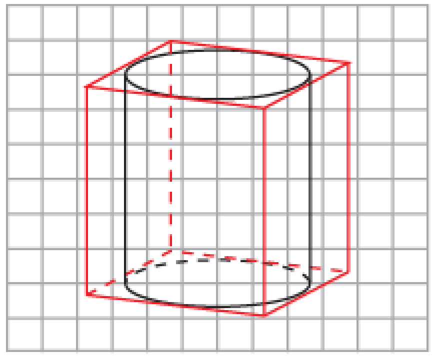

Рис. 12.7

8. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную призму, описанную около цилиндра, аналогично данной на рисунке 12.8.

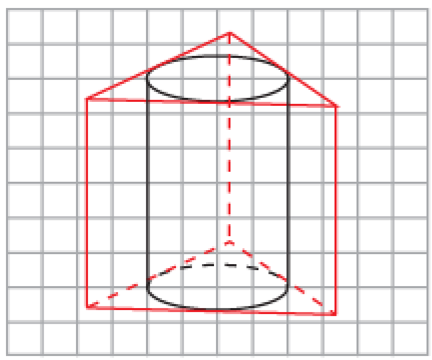

Рис. 12.8

13. Конус

1. На клетчатой бумаге изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 13.1. Нарисуйте его ось.

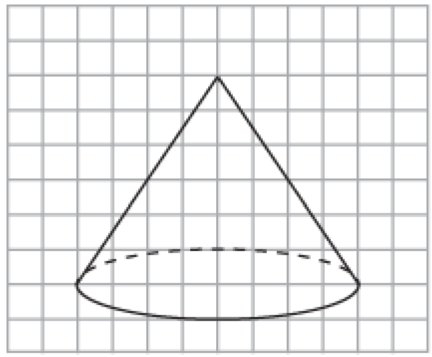

Рис. 13.1

2. На клетчатой бумаге изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 13.2. Нарисуйте его осевое сечение, проходящее через отмеченную точку.

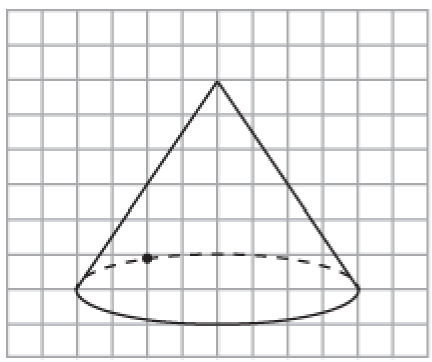

Рис. 13.2

3. На клетчатой бумаге изобразите конус, аналогичный данному на рисунке 13.3. Нарисуйте его сечение плоскостью, параллельной плоскости основания и проходящей через отмеченную точку.

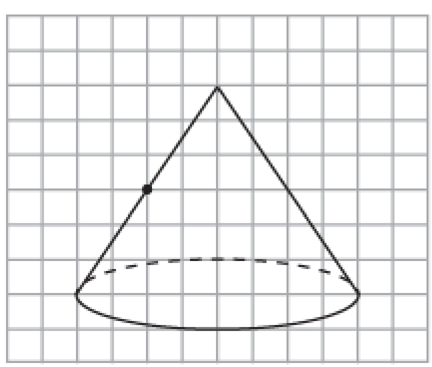

Рис. 13.3

4. Изобразите конус, основанием которого является одно из оснований цилиндра, в вершина принадлежит другому основанию этого цилиндра (рис. 13.4).

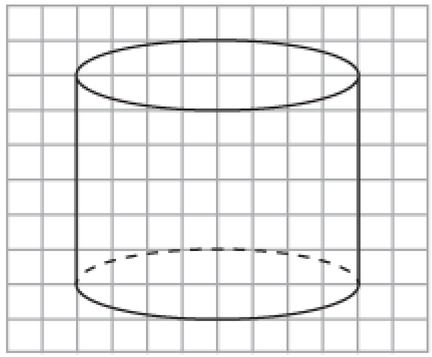

Рис. 13.4

5. Изобразите цилиндр, одно основание которого содержится в основании конуса, а второе основание касается образующей конуса в отмеченной точке (рис. 13.5).

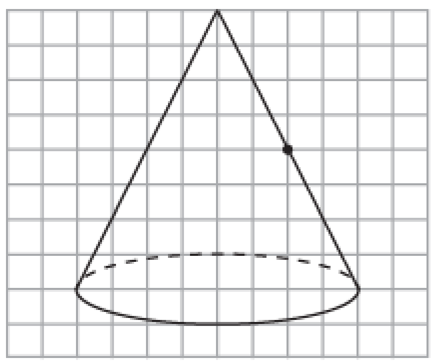

Рис. 13.5

6. На клетчатой бумаге изобразите усечённый конус, аналогичный данному на рисунке 13.6. Нарисуйте его ось.

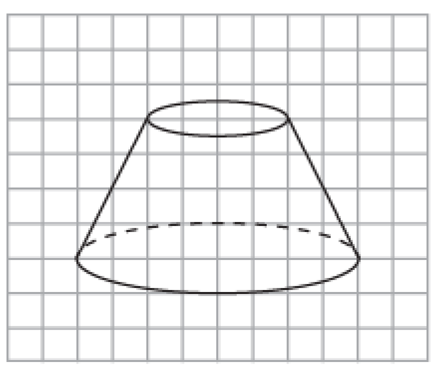

Рис. 13.6

7. На клетчатой бумаге изобразите усечённый конус, аналогичный данному на рисунке 13.7. Нарисуйте его осевое сечение, проходящее через отмеченную точку.

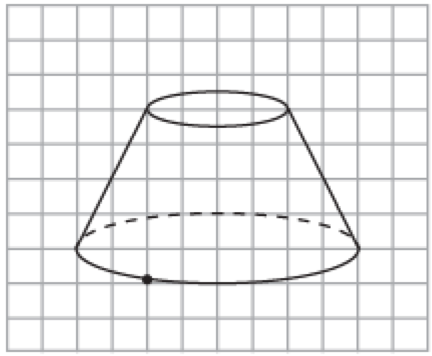

Рис. 13.7

8. На клетчатой бумаге изобразите усечённый конус, аналогичный данному на рисунке 13.8. Нарисуйте цилиндр, одним основанием которого является меньшее основание усечённого конуса, а второе основание цилиндра содержится в большем основании усечённого конуса.

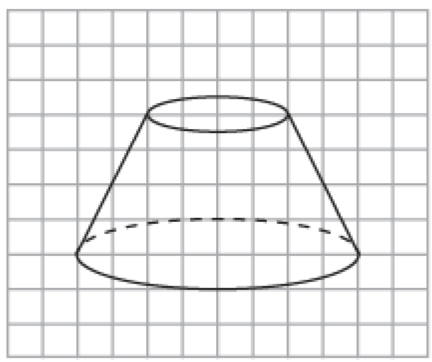

Рис. 13.8

9. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду, вписанную в конус, аналогично данной на рисунке 13.9.

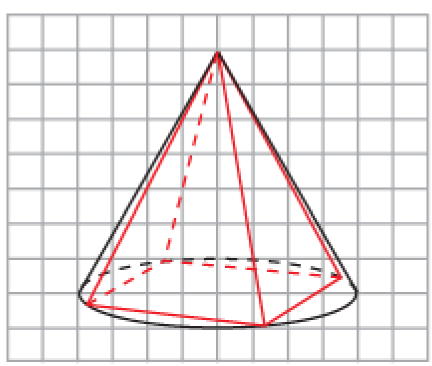

Рис. 13.9

10. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную пирамиду, вписанную в конус, аналогично данной на рисунке 13.10.

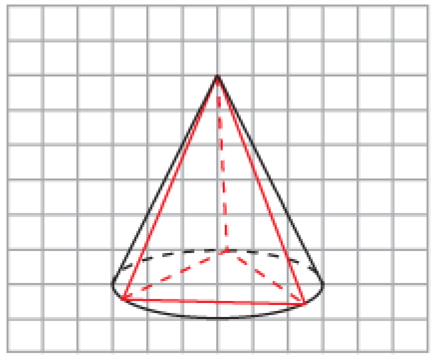

Рис. 13.10

11. На клетчатой бумаге изобразите правильную четырёхугольную пирамиду, описанную около конуса, аналогично данной на рисунке 13.11.

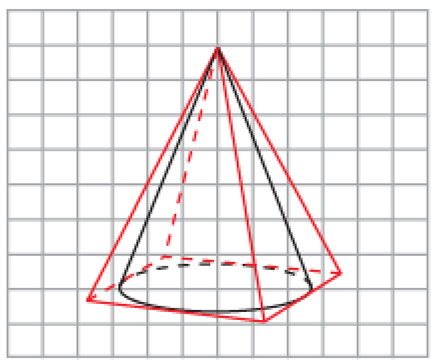

Рис. 13.11

12. На клетчатой бумаге изобразите правильную треугольную пирамиду, описанную около конуса, аналогично данной на рисунке 13.12.

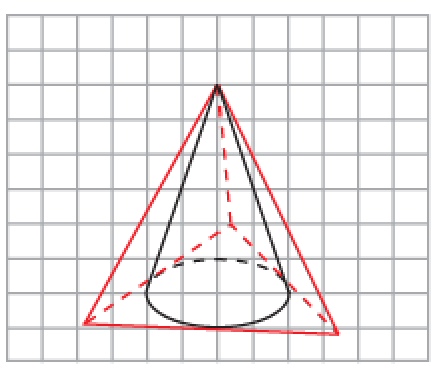

Рис. 13.12

14. Сфера

1. На клетчатой бумаге изобразите сферу с экватором, центром, осью и полусами аналогично данной на рисунке 14.1.

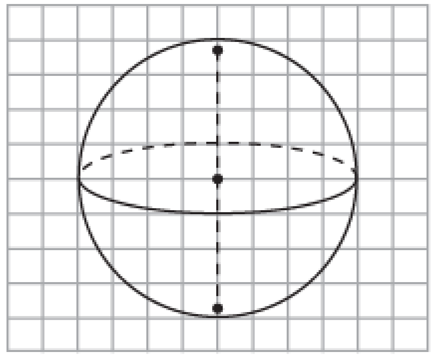

Рис. 14.1

2. Через отмеченную точку (рис. 14.2) проведите сечение сферы плоскостью, параллельной экватору (параллель).

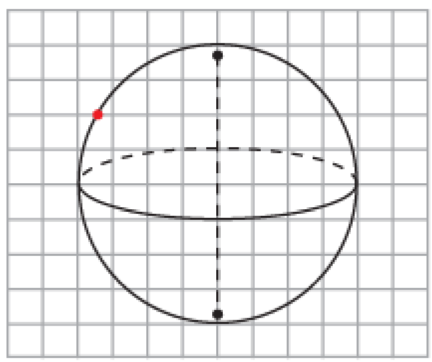

Рис. 14.2

3. Через отмеченную точку и ось сферы проведите сечение (меридиан) аналогично данному на рисунке 14.3.

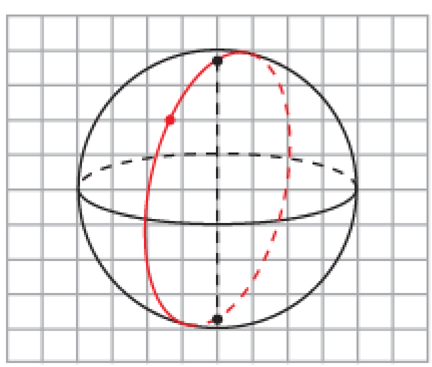

Рис. 14.3

4. Через отмеченную точку и ось сферы (рис. 14.4) проведите сечение (меридиан),

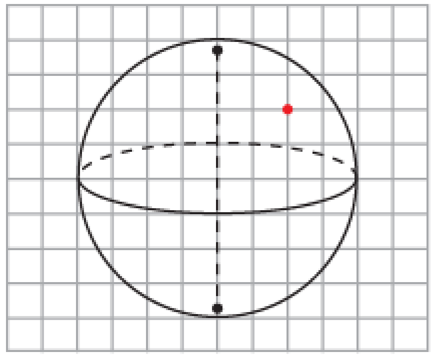

Рис. 14.4

5. На клетчатой бумаге изобразите сферу с параллелями и меридианами аналогично данной на рисунке 14.5.

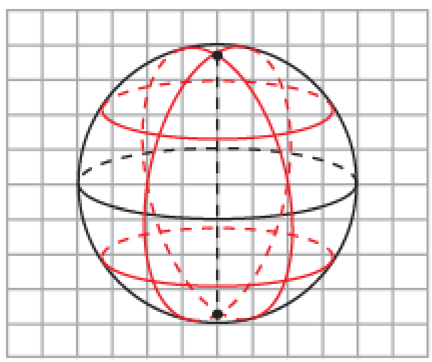

Рис. 14.5

6. Через отмеченную точку проведите сечение сферы плоскостью, параллельной плоскости данного меридиана (рис. 14.6),

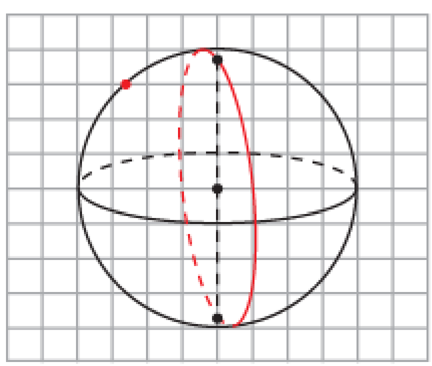

Рис. 14.6

15. Описанная сфера

1. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около цилиндра, аналогично данной на рисунке 15.1.

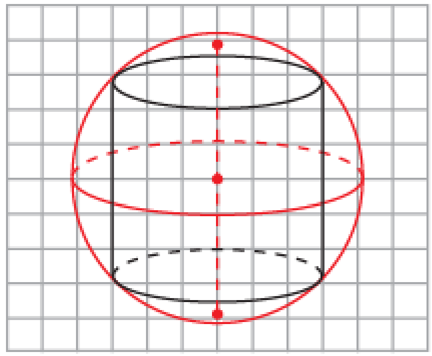

Рис. 15.1

2. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около конуса, аналогично данной на рисунке 15.2.

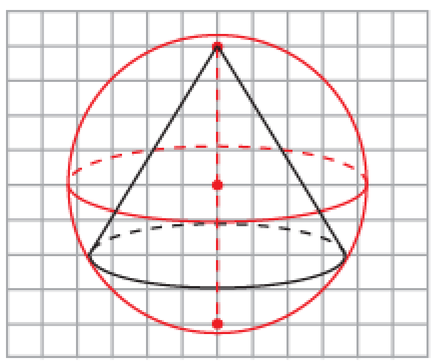

Рис. 15.2

3. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около треугольной призмы, аналогично данной на рисунке 15.3.

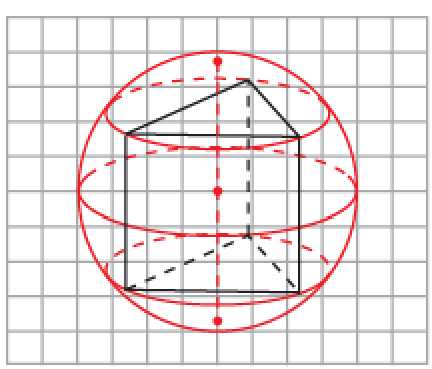

Рис. 15.3

4. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около куба, аналогично данной на рисунке 15.4.

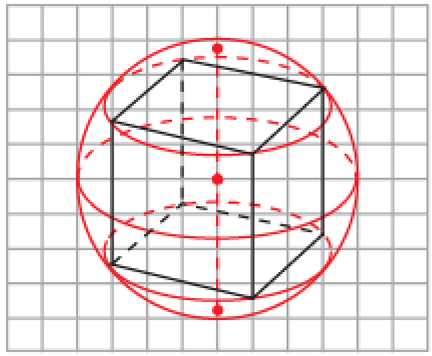

Рис. 15.4

5. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около шестиугольной призмы, аналогично данной на рисунке 15.5.

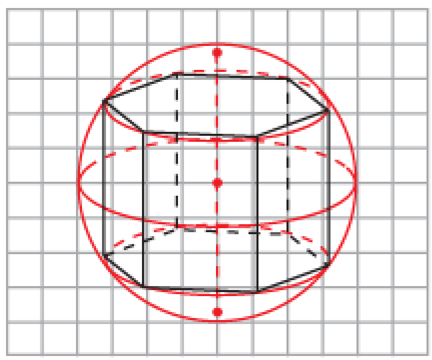

Рис. 15.5

6. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около правильной треугольной пирамиды, аналогично данной на рисунке 15.6.

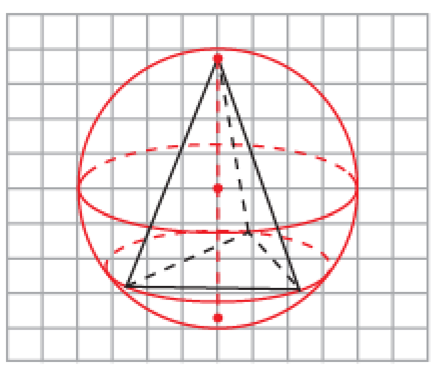

Рис. 15.6

7. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около правильной четырёхугольной пирамиды, аналогично данной на рисунке 15.7.

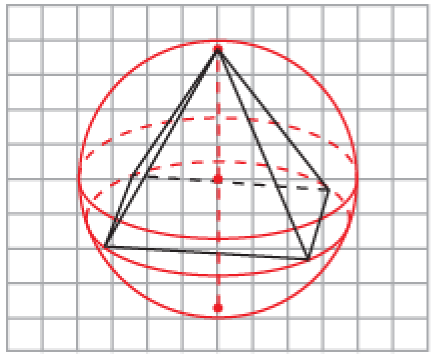

Рис. 15.7

8. На клетчатой бумаге изобразите сферу, описанную около шестиугольной пирамиды, аналогично данной на рисунке 15.8.

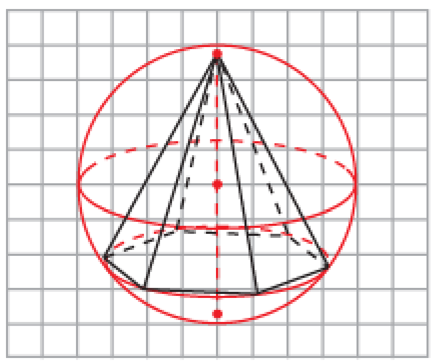

Рис. 15.8

16. Вписанная сфера

1. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в цилиндр, аналогично данной на рисунке 16.1.

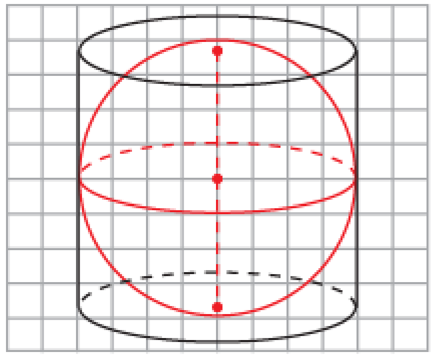

Рис. 16.1

2. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в конус, аналогично данной на рисунке 16.2.

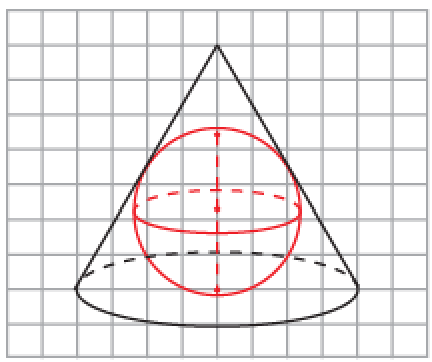

Рис. 16.2

3. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в правильную треугольную призму, аналогично данной на рисунке 16.3.

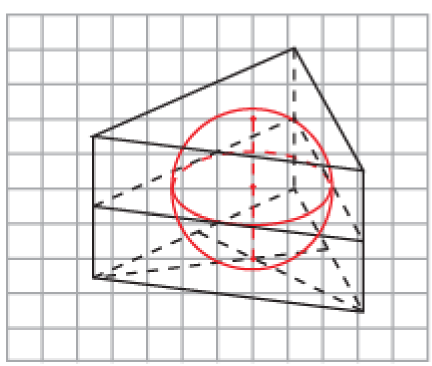

Рис. 16.3

4. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в куб, аналогично данной на рисунке 16.4.

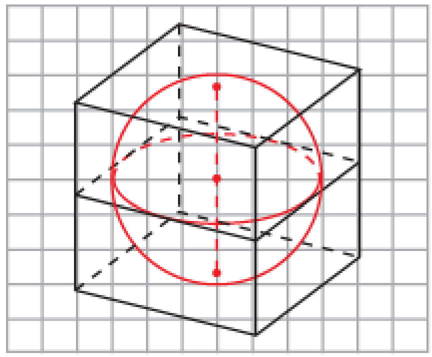

Рис. 16.4

5. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в правильную шестиугольную призму, аналогично данной на рисунке 16.5.

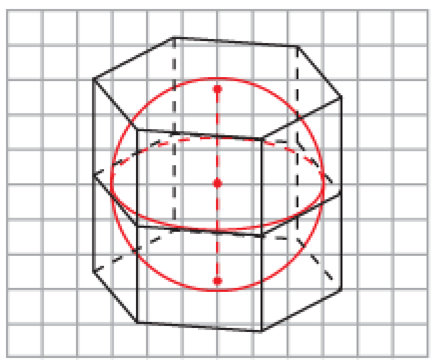

Рис. 16.5

6. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в правильную треугольную пирамиду, аналогично данной на рисунке 16.6.

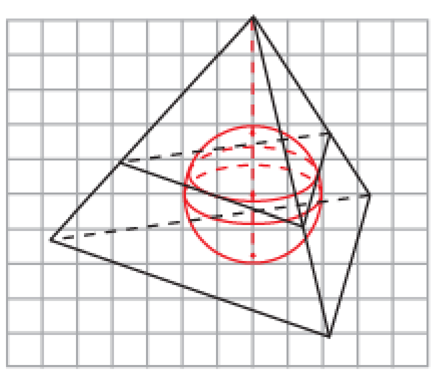

Рис. 16.6

7. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в правильную четырёхугольную пирамиду, аналогично данной на рисунке 16.7.

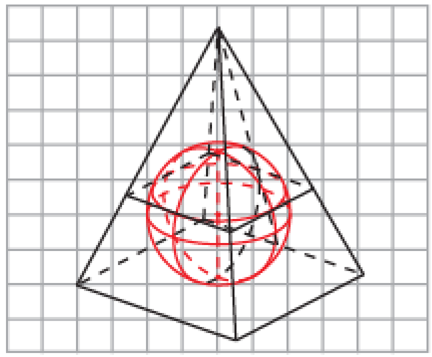

Рис. 16.7

8. На клетчатой бумаге изобразите сферу, вписанную в правильную шестиугольную пирамиду, аналогично данной на рисунке 16.8.

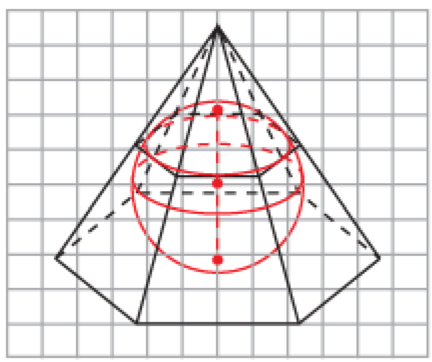

Рис. 16.8

ОТВЕТЫ

1. Куб

5. Искомый куб изображён на рисунке 1.

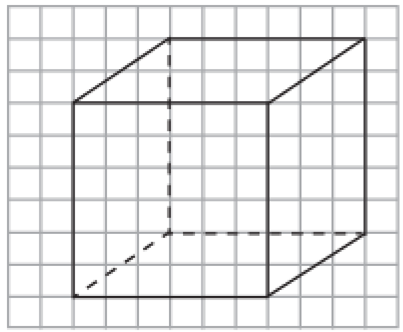

Рис. 1

6. Искомый куб изображён на рисунке 2.

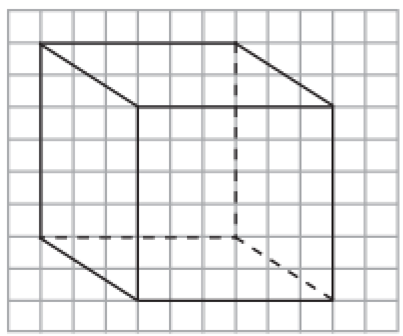

Рис. 2

7. Искомый куб изображён на рисунке 3.

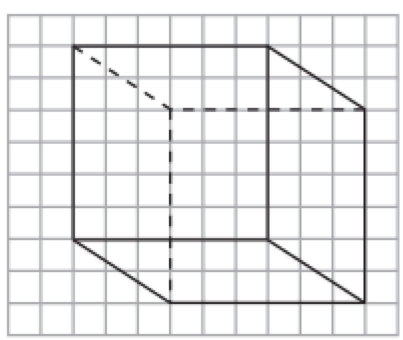

Рис. 3

8. Искомый куб изображён на рисунке 4.

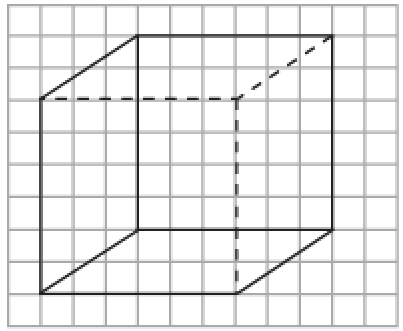

Рис. 4

9. Искомый куб изображён на рисунке 5.

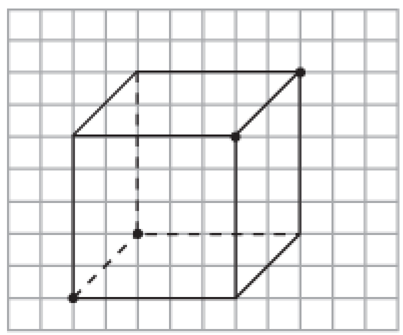

Рис. 5

10. Искомый куб изображён на рисунке 6.

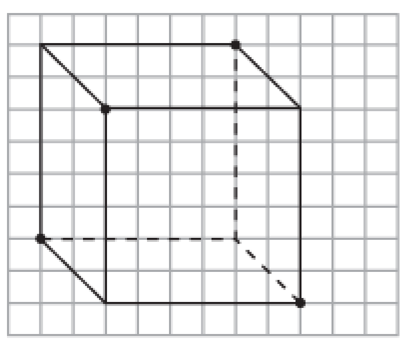

Рис. 6

11. Искомый куб изображён на рисунке 7.

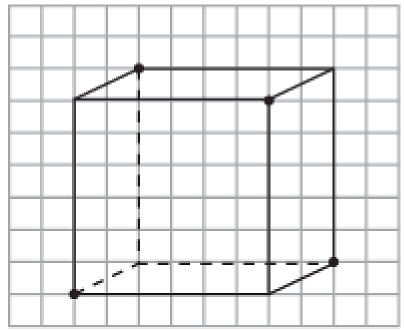

Рис. 7

12. Искомый куб изображён на рисунке 8.

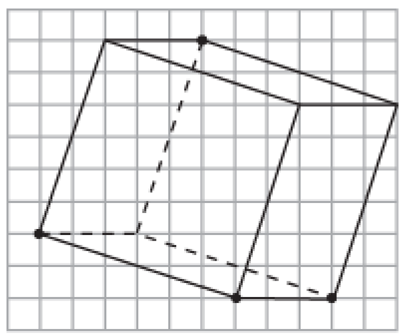

Рис. 8

2. Прямоугольный параллелепипед

5. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 9.

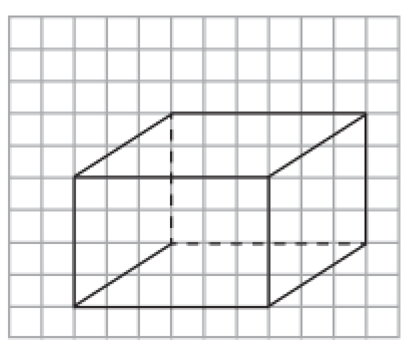

Рис. 9

6. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 10.

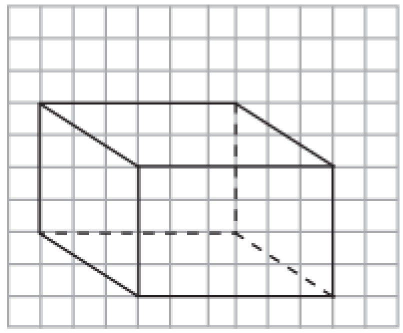

Рис. 10

7. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 11.

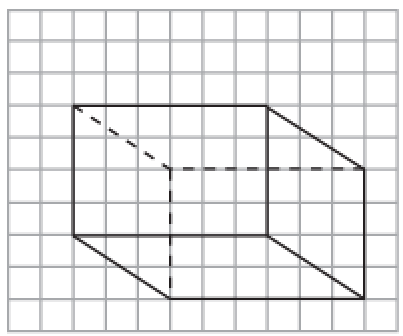

Рис. 11

8. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 12.

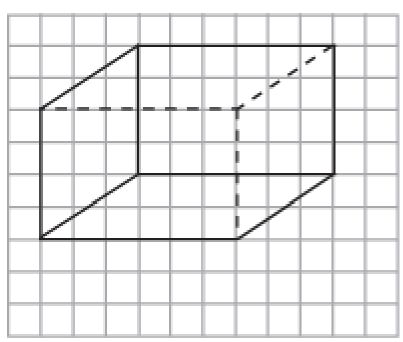

Рис. 12

9. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 13.

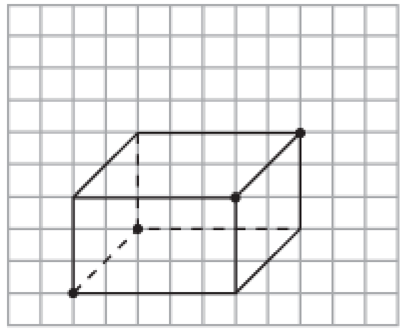

Рис. 13

10. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 14.

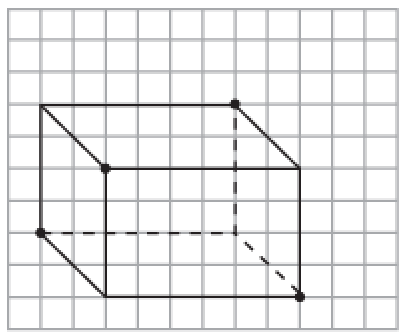

Рис. 14

11. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 14.

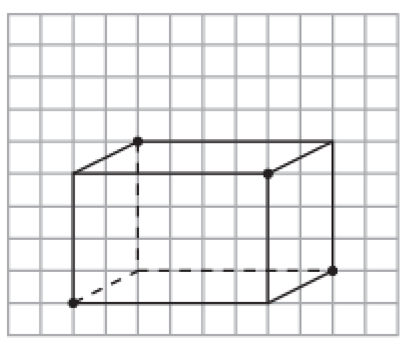

Рис. 15

12. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 15.

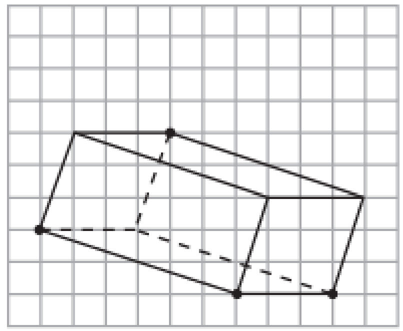

Рис. 16

3. Параллелепипед

5. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 17.

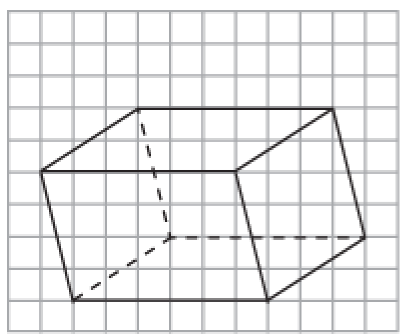

Рис. 17

6. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 18.

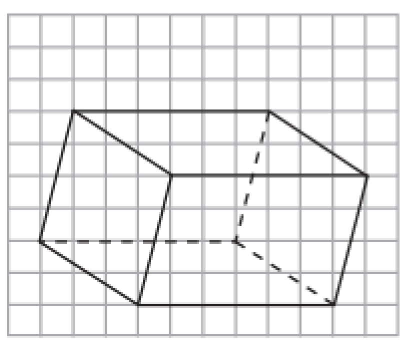

Рис. 18

7. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 19.

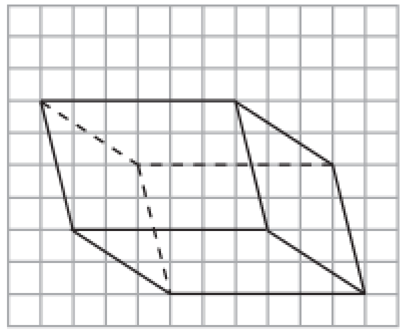

Рис. 19

8. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 20.

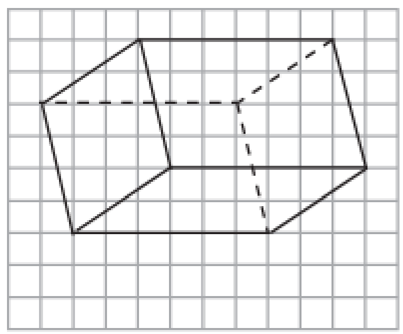

Рис. 20

9. Искомый параллелепипед изображён на рисунке 21.

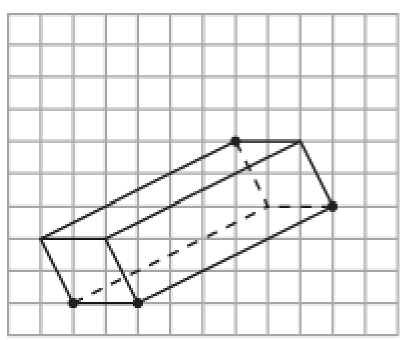

Рис. 21

4. Треугольная призма

5. Искомая призма изображена на рисунке 22.

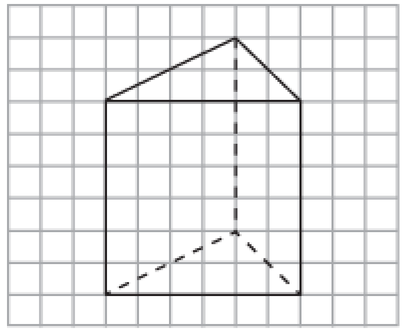

Рис. 22

6. Искомая призма изображена на рисунке 23.

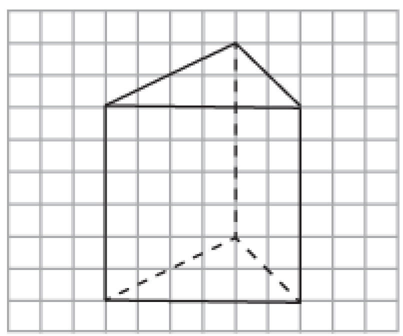

Рис. 23

7. Искомая призма изображена на рисунке 24.

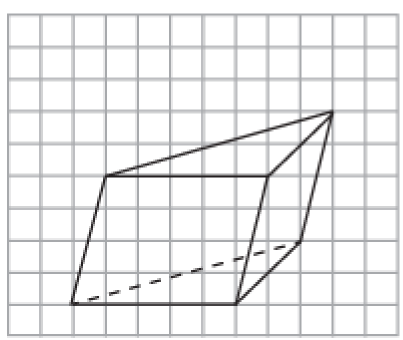

Рис. 24

8. Искомая призма изображена на рисунке 25.

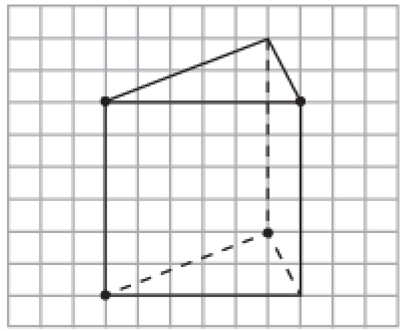

Рис. 25

9. Искомая призма изображена на рисунке 26.

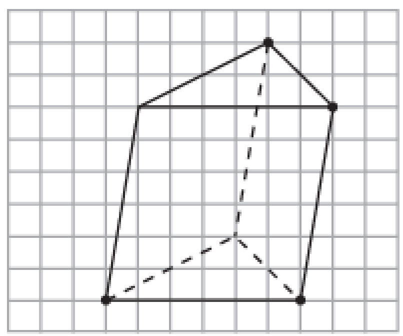

Рис. 26

5. Шестиугольная призма

5. Искомая призма изображена на рисунке 27.

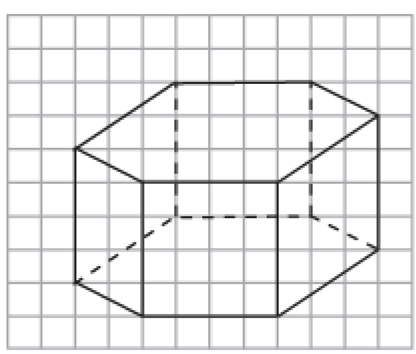

Рис. 27

6. Искомая призма изображена на рисунке 28.

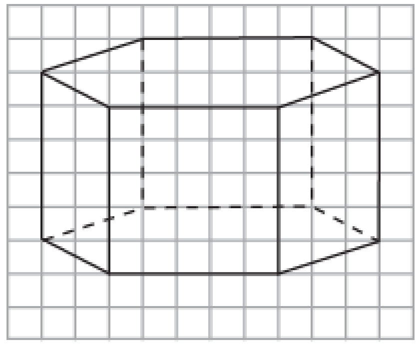

Рис. 28

6. Четырёхугольная пирамида

5. Искомая пирамида изображена на рисунке 29.

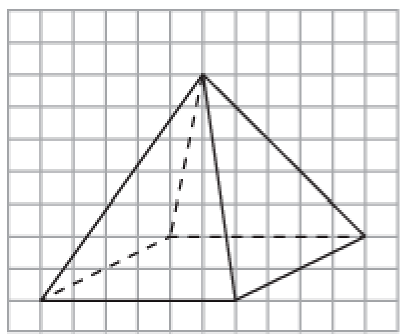

Рис. 29

6. Искомая пирамида изображена на рисунке 30.

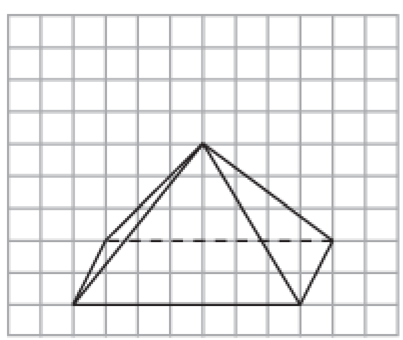

Рис. 30

7. Шестиугольная пирамида

5. Искомая пирамида изображена на рисунке 31.

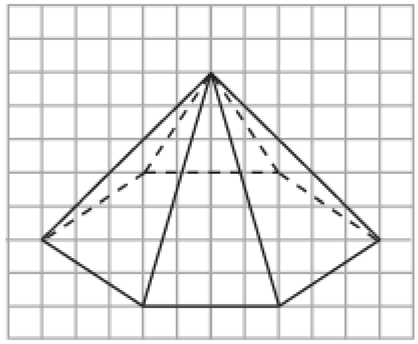

Рис. 31

6. Искомая пирамида изображена на рисунке 32.

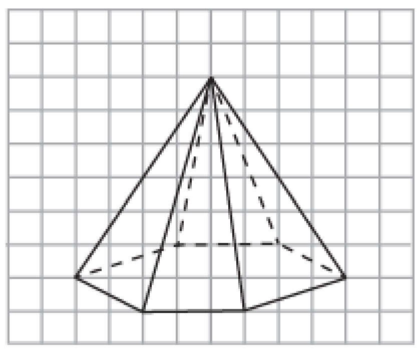

Рис. 32

9. Правильные многогранники

4. Искомым многогранником является октаэдр (рис. 33).

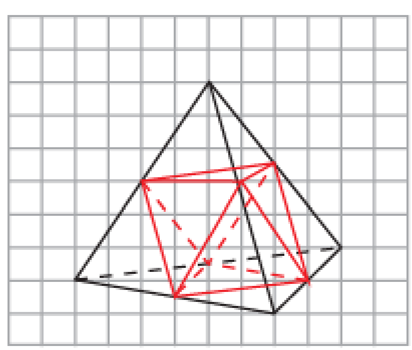

Рис. 33

5. Искомым многогранником является тетраэдр (рис. 34).

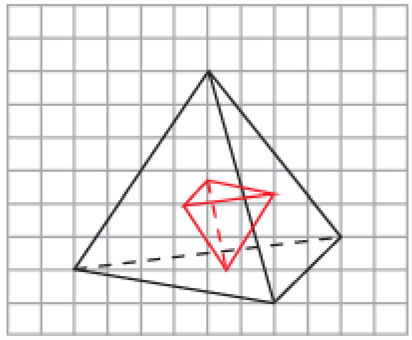

Рис. 34

6. Искомым многогранником является октаэдр (рис. 35).

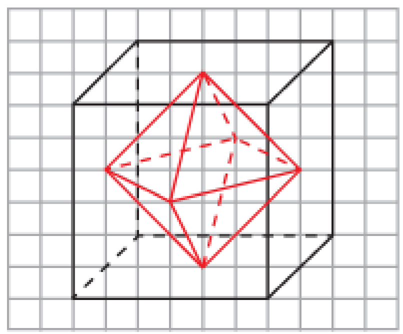

Рис. 35

7. Искомым многогранником является куб (рис. 36).

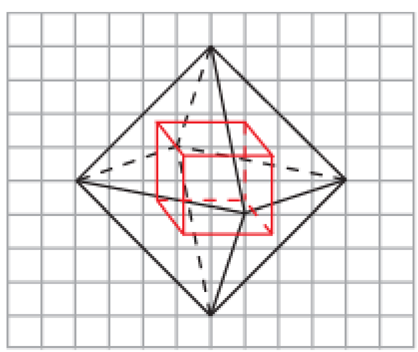

Рис. 36

8. Искомым многогранником является додекаэдр (рис. 37).

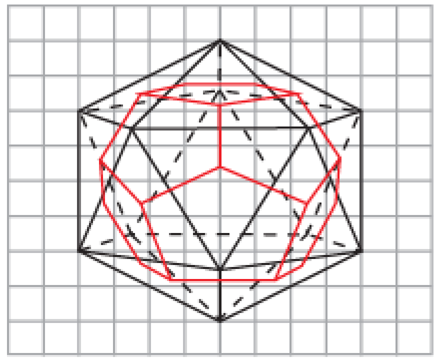

Рис. 37

9. Искомым многогранником является икосаэдр (рис. 38).

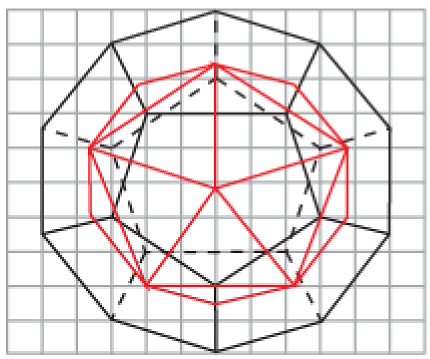

Рис. 38

10. Для искомого многогранника (рис. 39) В = 12, Р = 24, Г = 14. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников и шести квадратов.

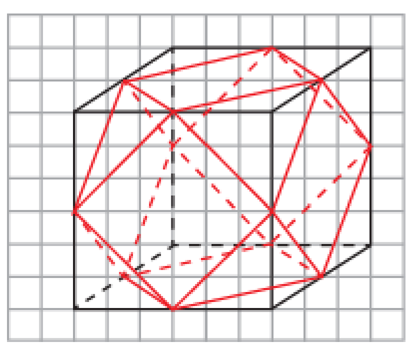

Рис. 39

11. Для искомого многогранника (рис. 40) В = 12, Р = 24, Г = 14. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников и шести квадратов.

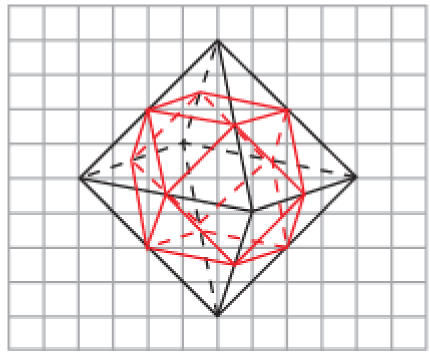

Рис. 40

12. Для искомого многогранника (рис. 41) В = 30, Р = 60, Г = 32. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников и двенадцати правильных пятиугольников.

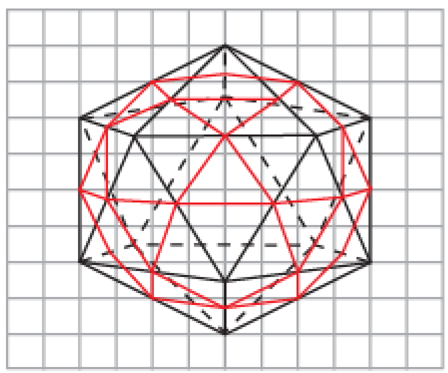

Рис. 41

13. Для искомого многогранника (рис. 42) В = 30, Р = 60, Г = 32. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников и двенадцати правильных пятиугольников.

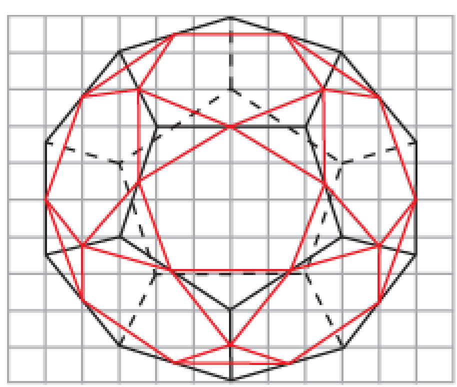

Рис. 42

10*. Центральная симметрия

1. Центр симметрии изображён на рисунке 43.

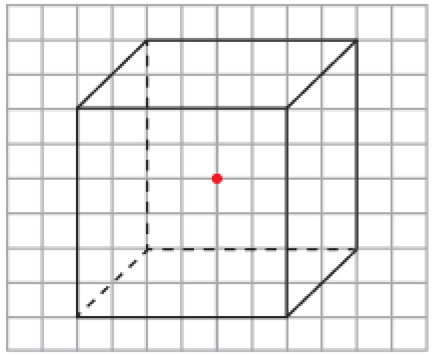

Рис. 43

2. Центр симметрии изображён на рисунке 44.

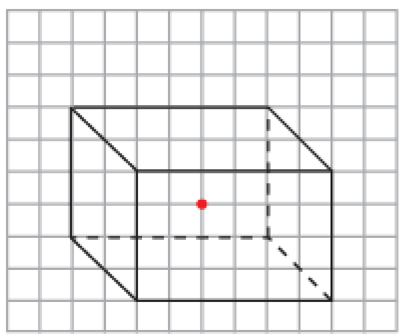

Рис. 44

3. Центр симметрии изображён на рисунке 45.

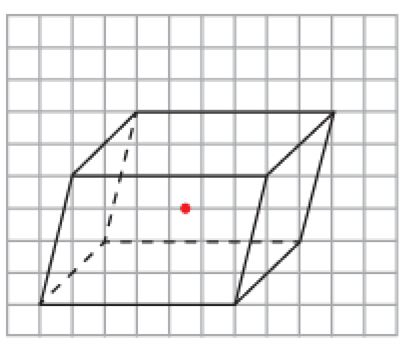

Рис. 45

4. Центр симметрии изображён на рисунке 46.

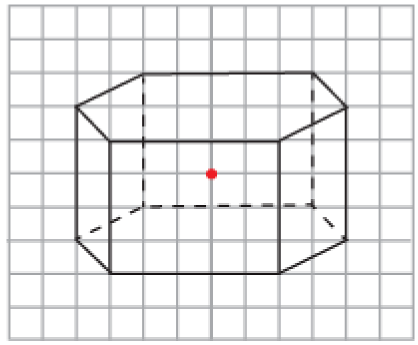

Рис. 46

5. Центр симметрии изображён на рисунке 47.

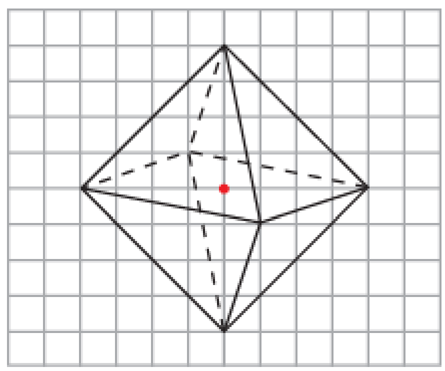

Рис. 47

6. Центр симметрии изображён на рисунке 48.

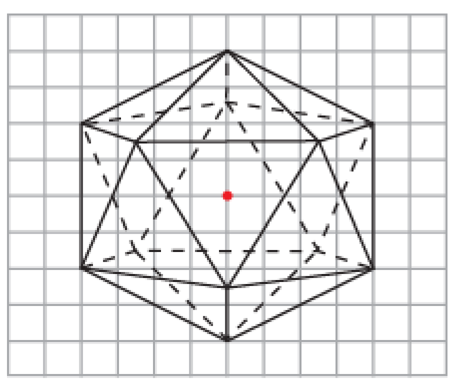

Рис. 48

7. Центр симметрии изображён на рисунке 49.

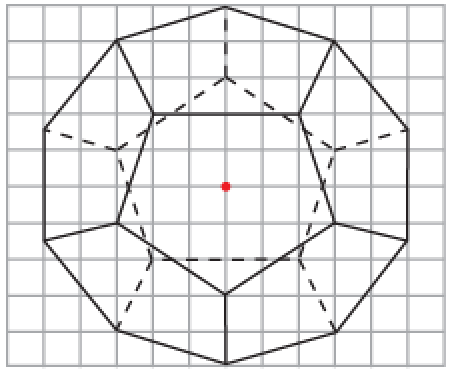

Рис. 49

8. Искомая пирамида изображена на рисунке 50. Общей частью является правильная четырёхугольная бипирамида.

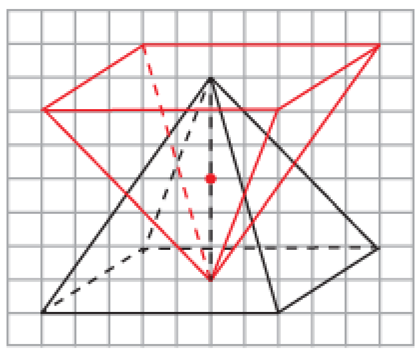

Рис. 50

9. Искомая пирамида изображена на рисунке 51. Общей частью является правильная шестиугольная бипирамида.

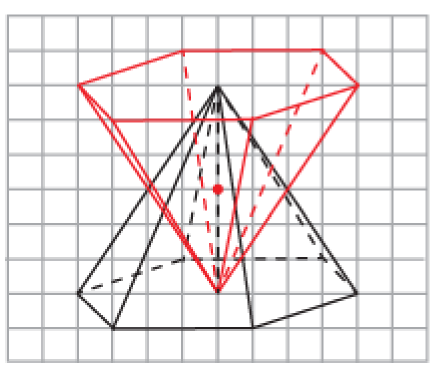

Рис. 51

11*. Поворот. Осевая симметрия

1. Искомый куб изображён на рисунке 52. Общей частью является правильная восьмиугольная призма.

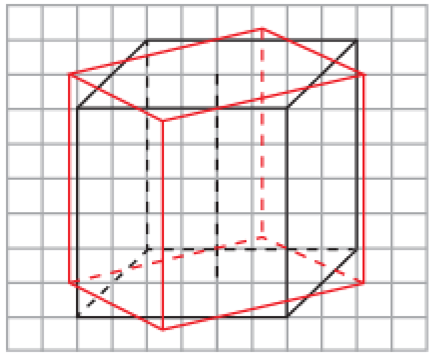

Рис. 52

2. Искомая призма изображена на рисунке 53. Общей частью является правильная шестиугольная призма.

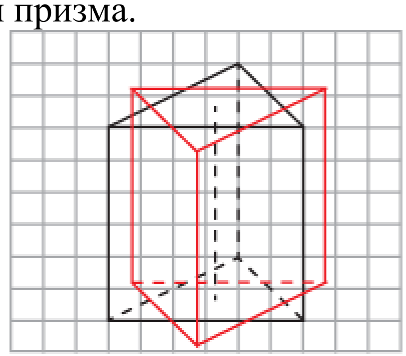

Рис. 53

3. Искомая пирамида изображена на рисунке 54. Общей частью является правильная восьмиугольная пирамида.

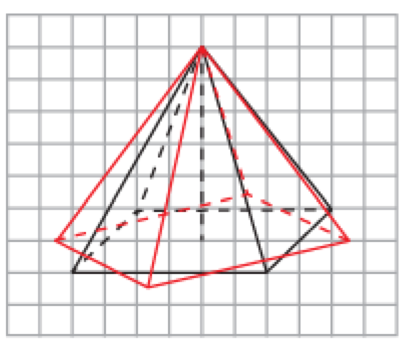

Рис. 54

4. Искомая призма изображена на рисунке 55. Общей частью является правильная шестиугольная призма.

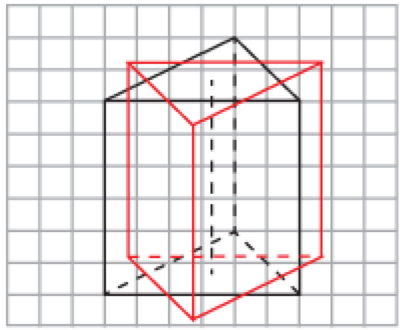

Рис. 55

5. Искомая призма изображена на рисунке 56. Общей частью является правильная четырёхугольная пирамида.

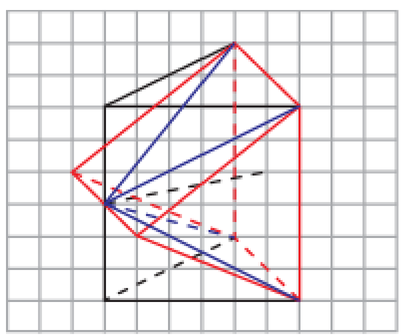

Рис. 56

6. Искомый тетраэдр изображён на рисунке 57. Общей частью является октаэдр.

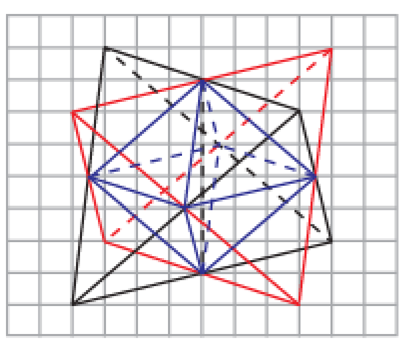

Рис. 57

12. Цилиндр

1. Искомая ось изображена на рисунке 58.

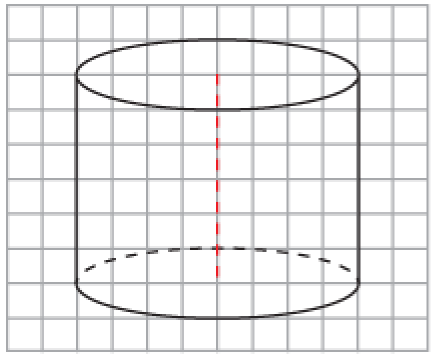

Рис. 58

2. Искомое сечение изображено на рисунке 59.

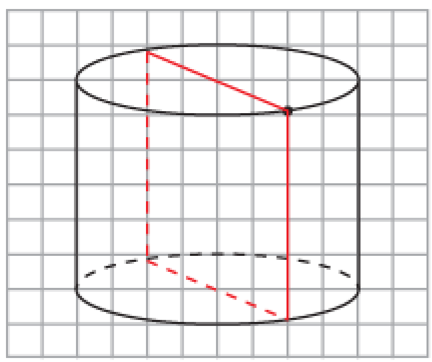

Рис. 59

3. Искомое сечение изображено на рисунке 60.

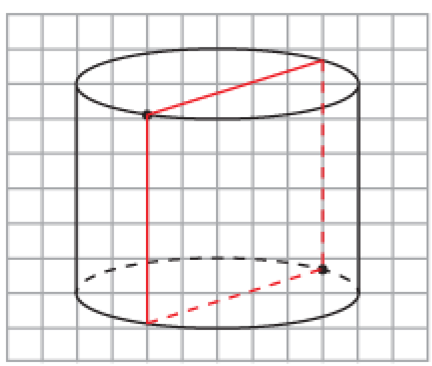

Рис. 60

4. Искомое сечение изображено на рисунке 61.

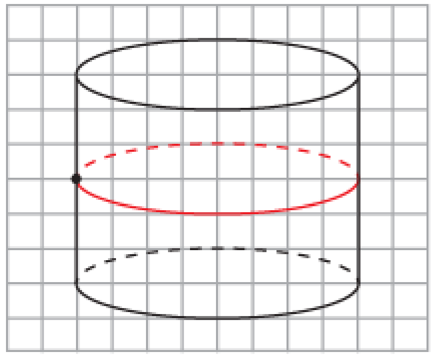

Рис. 61

13. Конус

1. Искомая ось изображена на рисунке 62.

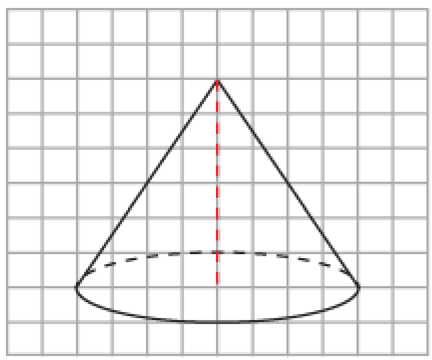

Рис. 62

2. Искомое сечение изображено на рисунке 63.

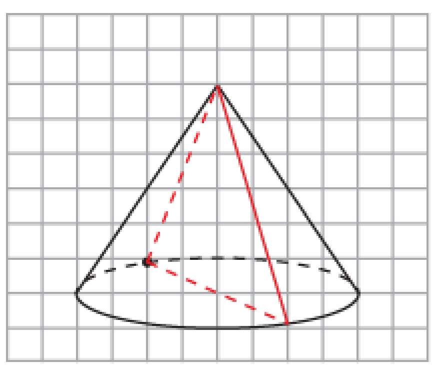

Рис. 63

3. Искомое сечение изображено на рисунке 64.

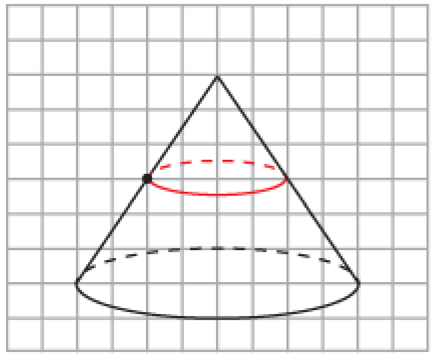

Рис. 64

4. Искомый конус изображён на рисунке 65.

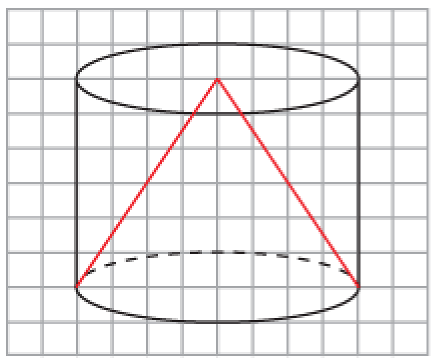

Рис. 65

5. Искомый цилиндр изображён на рисунке 66.

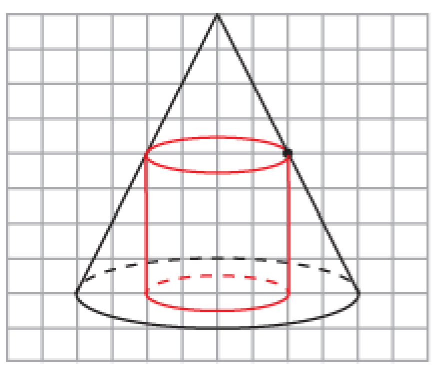

Рис. 66

6. Искомая ось изображена на рисунке 67.

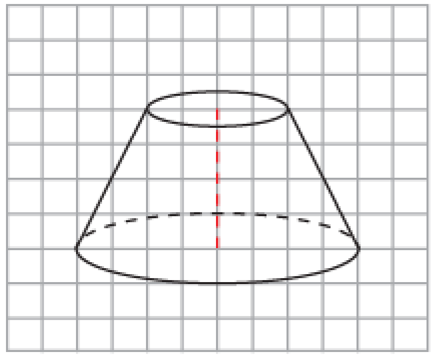

Рис. 67

7. Искомое сечение изображено на рисунке 68.

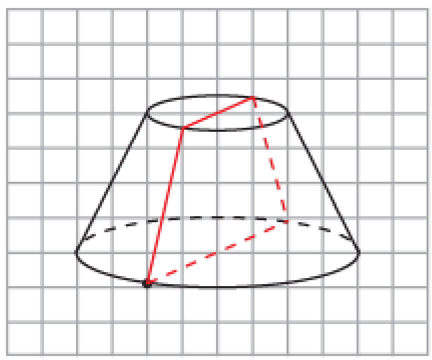

Рис. 68

8. Искомый цилиндр показан на рисунке 69.

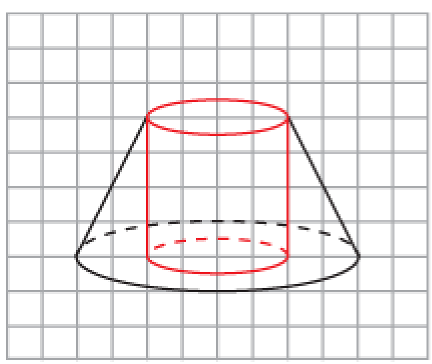

Рис. 69

14. Сфера

2. Искомое сечение показано на рисунке 70.

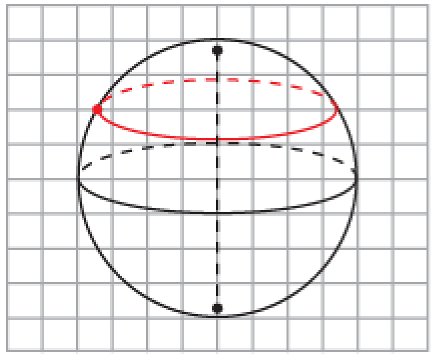

Рис. 70

4. Искомое сечение показано на рисунке 71.

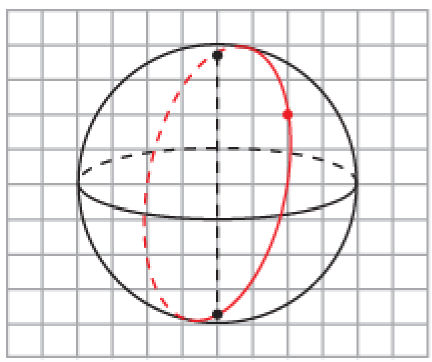

Рис. 71

6. Искомое сечение показано на рисунке 72.

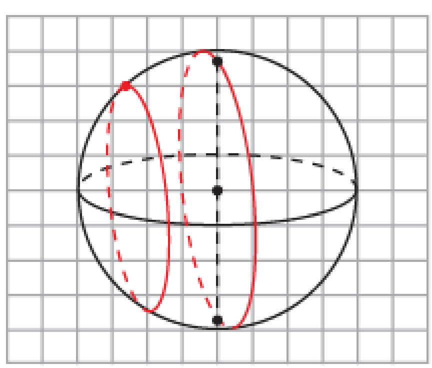

Рис. 72

ОГЛАВЛЕНИЕ