

В. А. Смирнов

# ЕГЭ 2011

## Математика

**C1**

**C2**

**C3**

**C4**

**C5**

**C6**

### Задача C2

Геометрия  
Стереометрия

Под редакцией  
А. Л. Семенова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

В. А. Смирнов

ЕГЭ 2011. Математика  
Задача С2

Геометрия. Стереометрия

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Яценко

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
С50

**Смирнов В. А.**

С50 ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2011. — 64 с.

ISBN 978-5-94057-664-8

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2011. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи С2.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по стереометрии.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72



ISBN 978-5-94057-664-8

© Смирнов В. А., 2011.  
© МЦНМО, 2011.

# Введение

Данное пособие предназначено для подготовки к выполнению задания С2 ЕГЭ по математике. Его целями являются:

— показ примерной тематики и уровня трудности геометрических задач, включенных в содержание ЕГЭ;

— проверка качества знаний и умений учащихся по геометрии, их готовность к сдаче ЕГЭ;

— развитие представлений учащихся об основных геометрических фигурах и их свойствах, формирование навыков работы с рисунком, умений проводить дополнительные построения;

— повышение вычислительной культуры учащихся.

Пособие содержит задачи на нахождение углов между прямыми в пространстве, прямой и плоскостью, двумя плоскостями; нахождение расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, между двумя прямыми. Наличие рисунков помогает лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, провести дополнительные построения и вычисления.

Для решения предлагаемых задач требуются знание определений тригонометрических функций, формул для нахождения элементов треугольника, теоремы Пифагора, теоремы косинусов, умение проводить дополнительные построения, владение координатным и векторным методами геометрии.

Каждая задача оценивается исходя из двух баллов. Один балл начисляется за правильное построение или описание искомого угла или расстояния. Также один балл начисляется за правильно проведенные вычисления и правильный ответ.

Вначале предлагается диагностическая работа на нахождение углов и расстояний для различных многогранников. Для тех, кто хочет проверить правильность решения предложенных задач или убедиться в верности полученного ответа, приводятся решения задач, как правило, двумя различными способами и даются ответы. Затем, для закрепления рассмотренных методов решения задач, предлагаются тренировочные работы на нахождение углов и расстояний для каждого из рассмотренных в диагностической работе видов фигур.

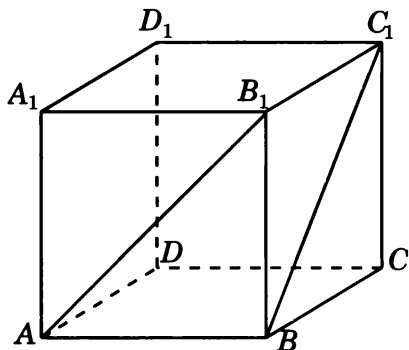
В случае успешного решения этих задач можно переходить к выполнению заключительных диагностических работ, содержащих задачи разных типов.

В конце пособия даны ответы ко всем задачам, а также помещены два приложения. Первое содержит задачи на изображение сечений многогранников и нахождение их площадей. Второе — задачи на изображение тел вращения и нахождения их объемов и площадей поверхностей. Предлагаемые задачи предназначены для углубленного изучения геометрии. Их целью является развитие пространственных представлений учащихся, выработка умений проводить дополнительные построения на изображениях пространственных фигур, находить площади плоских фигур в пространстве, находить объемы и площади поверхности пространственных фигур. К каждой задаче предлагается рисунок, который помогает лучше понять условие задачи, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, провести дополнительные построения и вычисления.

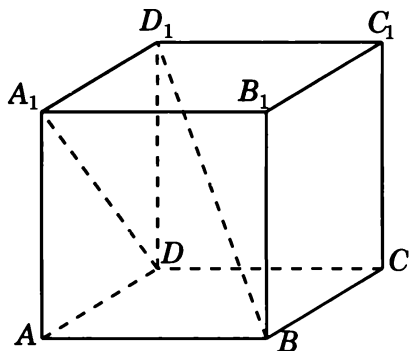
Отметим, что лучшим способом подготовки к ЕГЭ по геометрии являются систематические занятия по учебнику геометрии. Данное пособие не заменяет учебника. Оно может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии в 10—11 классах, а также при организации обобщающего повторения или самостоятельных занятиях геометрией.

## Диагностическая работа

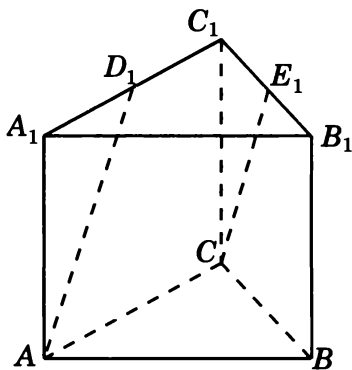
1.1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .



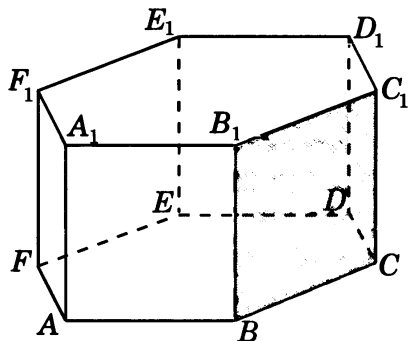
1.2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$ .



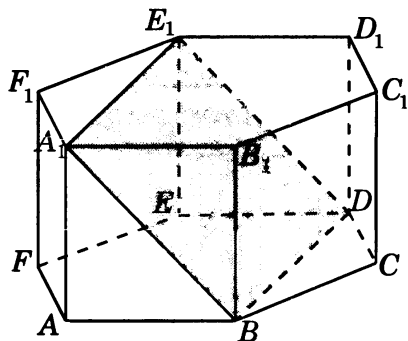
1.3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$ , где  $D_1$  и  $E_1$  — соответственно середины ребер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$ .



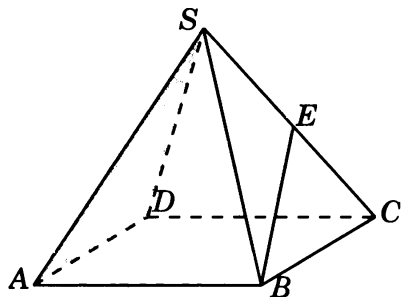
2.1. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AF$  и плоскостью  $BCC_1$ .



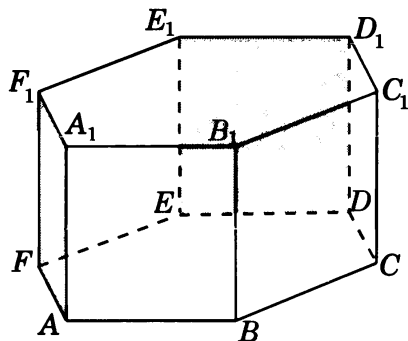
2.2. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $CC_1$  и плоскостью  $BDE_1$ .



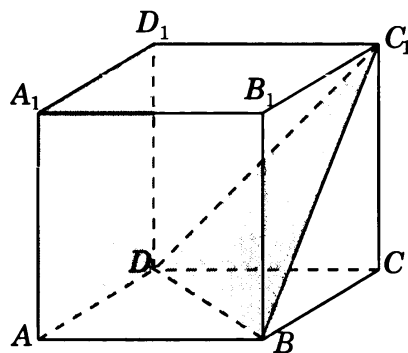
2.3. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$ , где  $E$  — середина ребра  $SC$ .



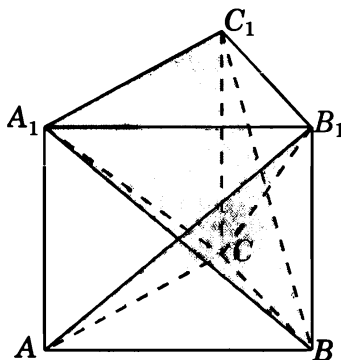
3.1. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $AFF_1$  и  $DEE_1$ .



3.2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между плоскостями  $ADD_1$  и  $BDC_1$ .

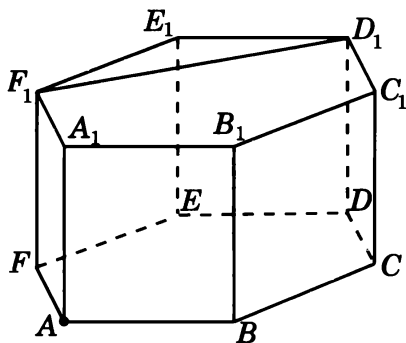


3.3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1D_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $ACB_1$  и  $BA_1C_1$ .

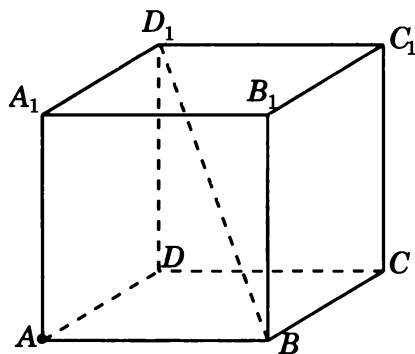




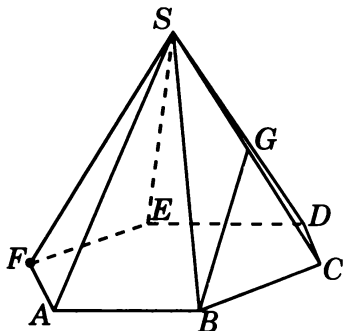
4.1. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $D_1F_1$ .



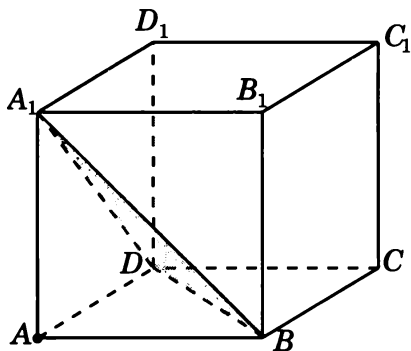
4.2. В единичном кубе  $A\dots D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD_1$ .



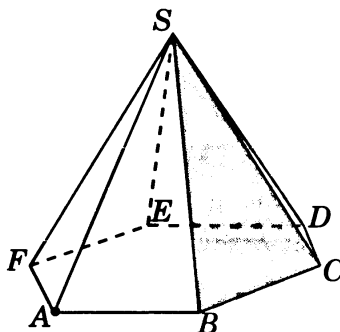
4.3. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $F$  до прямой  $BG$ , где  $G$  — середина ребра  $SC$ .



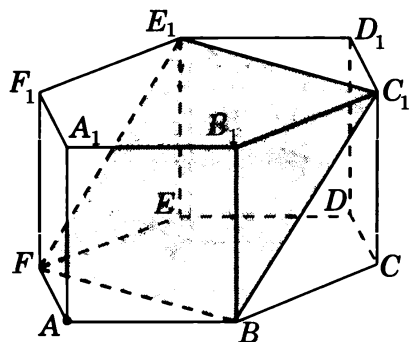
5.1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BDA_1$ .



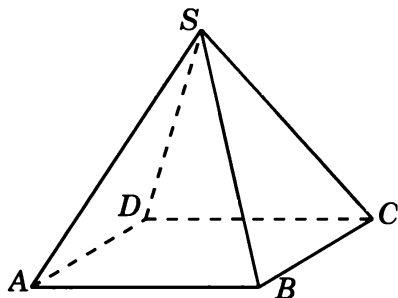
5.2. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBC$ .



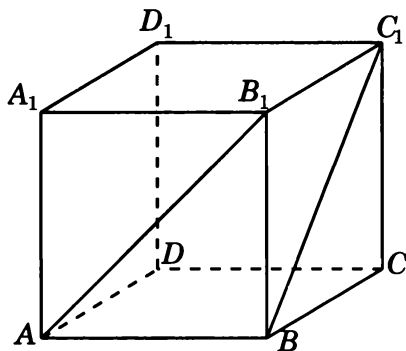
5.3. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$ .



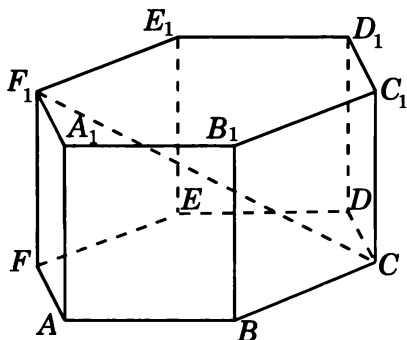
6.1. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $BC$ .



6.2. В единичном кубе  $A\dots D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .

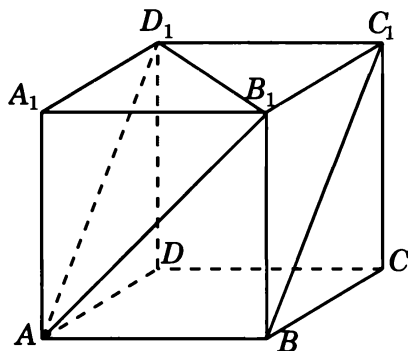


6.3. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $CF_1$ .

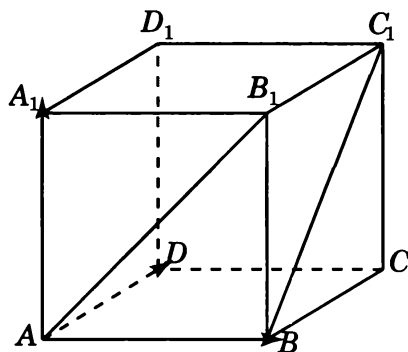


## Решения задач 1.1—1.3 диагностической работы

1.1. *Первое решение.* Прямая  $AD_1$  параллельна прямой  $BC_1$  и, следовательно, угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен углу  $B_1AD_1$ . Треугольник  $B_1AD_1$  равносторонний и, значит, угол  $B_1AD_1$  равен  $60^\circ$ .

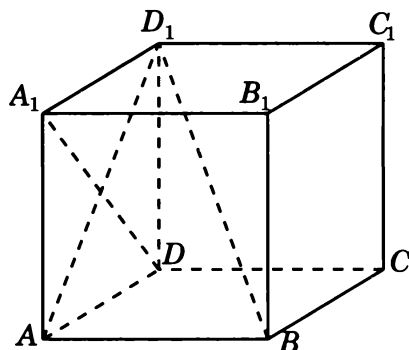


*Второе решение.* Введем систему координат, считая началом координат точку A, осями координат — прямые  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$ . Вектор  $\vec{AB}_1$  имеет координаты  $(1, 0, 1)$ . Вектор  $\vec{BC}_1$  имеет координаты  $(0, 1, 1)$ . Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}_1$  и  $\vec{BC}_1$ . Получим  $\cos \varphi = \frac{1}{2}$  и, значит, угол  $\varphi$  равен  $60^\circ$ . Следовательно, искомый угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .

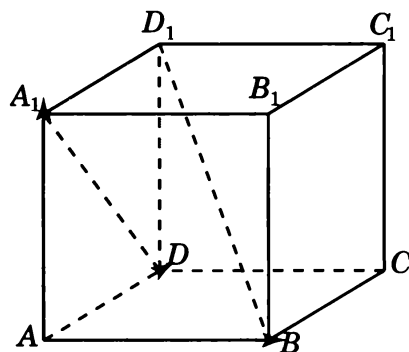


Ответ.  $60^\circ$ .

**1.2. Первое решение.** Рассмотрим ортогональную проекцию  $AD_1$  прямой  $BD_1$  на плоскость  $ADD_1$ . Прямые  $AD_1$  и  $DA_1$  перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые  $DA_1$  и  $BD_1$  также перпендикулярны, т. е. искомый угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .

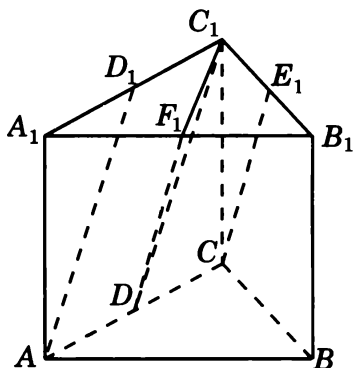


**Второе решение.** Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , осями координат — прямые  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$ . Вектор  $\vec{DA_1}$  имеет координаты  $(0, -1, 1)$ . Вектор  $\vec{BD_1}$  имеет координаты  $(-1, 1, 1)$ . Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .



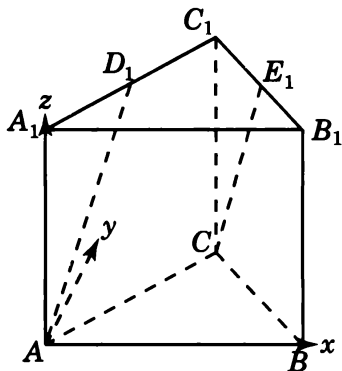
Ответ.  $90^\circ$ .

1.3. *Первое решение.* Обозначим  $D$  и  $F_1$  соответственно середины ребер  $AC$  и  $A_1B_1$ .



Прямые  $DC_1$  и  $DF_1$  будут соответственно параллельны прямым  $AD_1$  и  $CE_1$ . Следовательно, угол между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$  будет равен углу  $C_1DF_1$ . Треугольник  $C_1DF_1$  равнобедренный,  $C_1D = DF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Используя теорему косинусов, получаем  $\cos \angle C_1DF_1 = 0,7$ .

*Второе решение.* Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , как показано на рисунке. Точка  $C$  имеет координаты  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ , точка  $D_1$  имеет координаты  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$ , точка  $E_1$  имеет координаты  $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$ . Вектор  $\vec{AD}_1$  имеет координаты  $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$ . Вектор  $\vec{CE}_1$  имеет координаты  $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$ . Косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$  равен косинусу угла между векторами  $\vec{AD}_1$  и  $\vec{CE}_1$ . Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла  $\varphi$  между векторами. Получим  $\cos \varphi = 0,7$ .

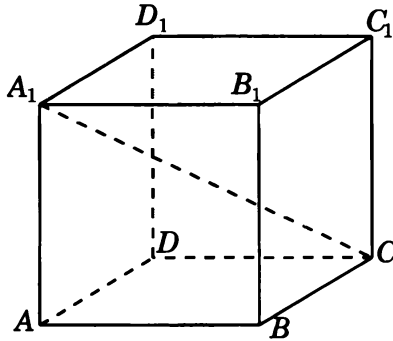


Ответ. 0,7.

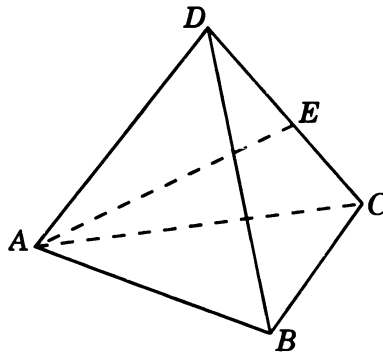
# Тренировочная работа 1.

## Угол между прямыми

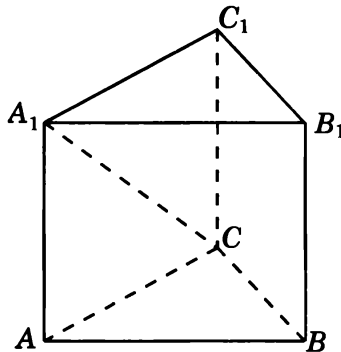
1. В кубе  $A...D_1$  найдите косинус угла между прямыми  $AB$  и  $CA_1$ .



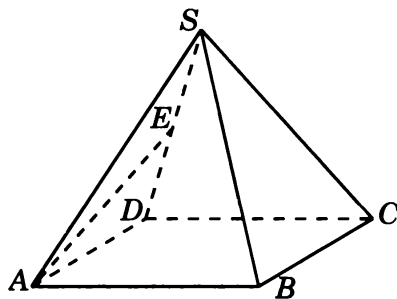
2. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $E$  — середина ребра  $CD$ . Найдите косинус угла между прямыми  $BC$  и  $AE$ .



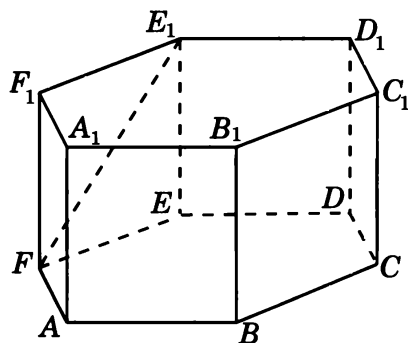
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB$  и  $CA_1$ .



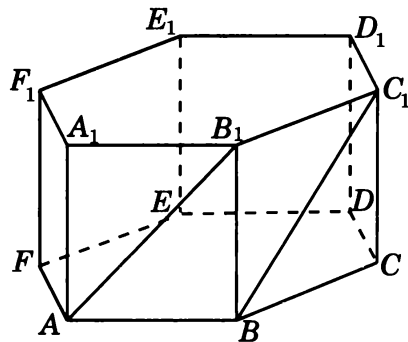
4. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  — середина ребра  $SD$ . Найдите тангенс угла между прямыми  $SB$  и  $AE$ .



5. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB$  и  $FE_1$ .

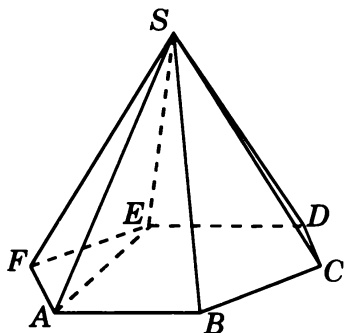


6. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .

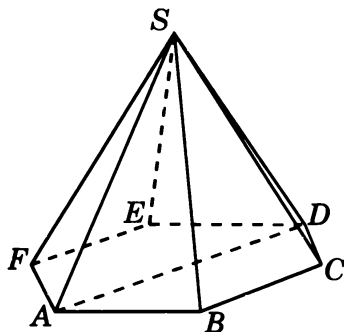




7. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми  $SB$  и  $AE$ .

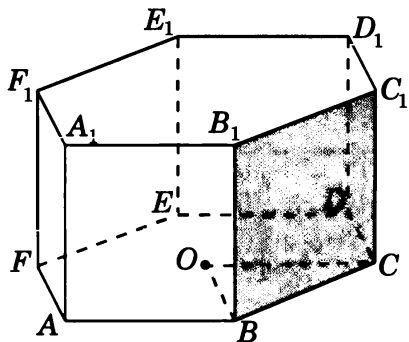


8. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми  $SB$  и  $AD$ .



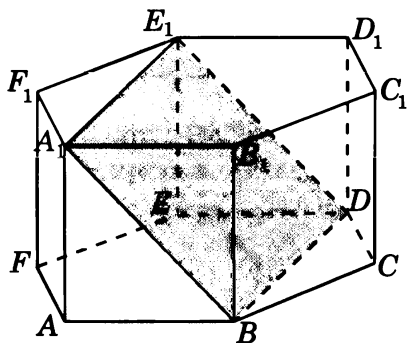
## Решения задач 2.1—2.3 диагностической работы

**2.1. Решение.** Пусть  $O$  — центр нижнего основания призмы. Прямая  $BO$  параллельна  $AF$ . Так как плоскости  $ABC$  и  $BCC_1$  перпендикулярны, то искомым углом будет угол  $OBC$ . Так как треугольник  $OBC$  равносторонний, то этот угол будет равен  $60^\circ$ .



Ответ.  $60^\circ$ .

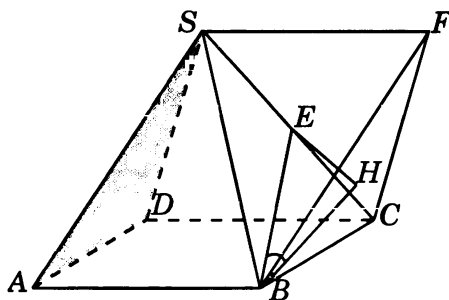
**2.2. Решение.** Так как прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  параллельны, то искомым углом будет равен углу между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $BDE_1$ . Прямая  $BD$ , через которую проходит плоскость  $BDE_1$ , перпендикулярна плоскости  $ABB_1$  и, значит, плоскость  $BDE_1$  перпендикулярна плоскости  $ABB_1$ . Следовательно, искомым углом будет равен углу  $A_1BB_1$ , т. е. равен  $45^\circ$ .



Ответ.  $45^\circ$ .

**2.3. Решение.** Через вершину  $S$  проведем прямую, параллельную прямой  $AB$ , и отложим на ней отрезок  $SF$ , равный отрезку  $AB$ . В тетраэдре  $SBCF$  все ребра равны 1 и плоскость  $BCF$  параллельна плоскости  $SAD$ . Перпендикуляр  $EH$ , опущенный из точки  $E$  на плоскость  $BCF$ ,

равен половине высоты тетраэдра, т. е. равен  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . Угол между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$  равен углу  $EBH$ , синус которого равен  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

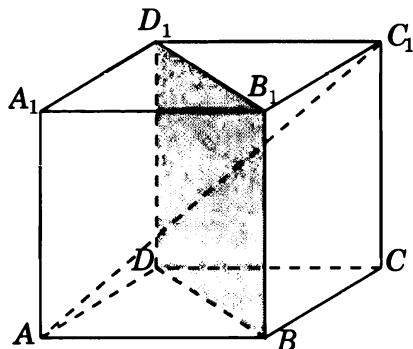


Ответ.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

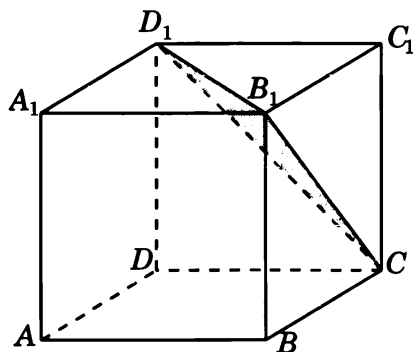
## Тренировочная работа 2.

### Угол между прямой и плоскостью

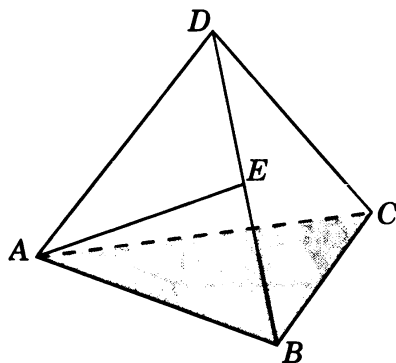
1. В кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $BDD_1$ .



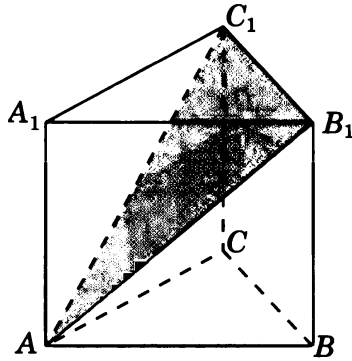
2. В кубе  $A...D_1$  найдите синус угла между прямой  $AB$  и плоскостью  $CB_1D_1$ .



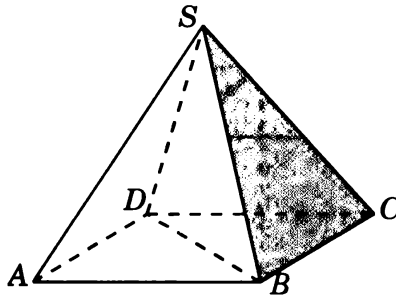
3. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $E$  — середина ребра  $BD$ . Найдите синус угла между прямой  $AE$  и плоскостью  $ABC$ .



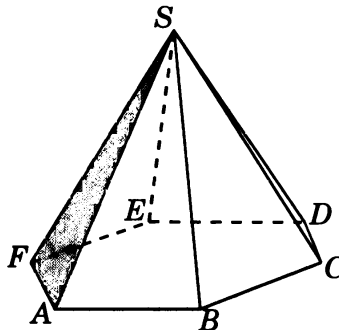
4. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $AB_1C_1$ .



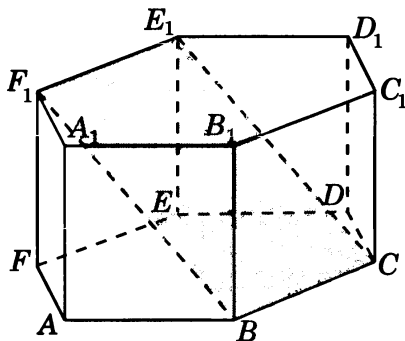
5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $BD$  и плоскостью  $SBC$ .



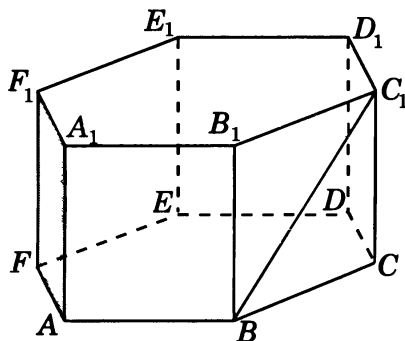
6. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой  $BC$  и плоскостью  $SAF$ .



7. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BCE_1$ .

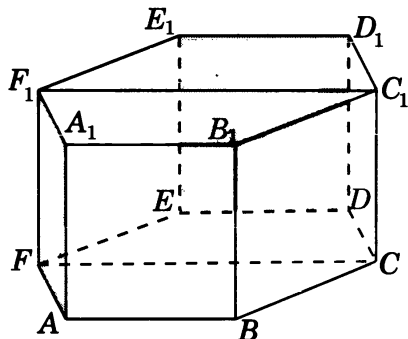


8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $AFF_1$ .

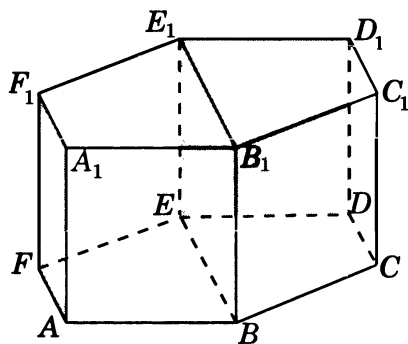


## Решения задач 3.1—3.3 диагностической работы

**3.1. Первое решение.** Так как плоскость  $FCC_1$  параллельна плоскости  $DEE_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $AFF_1$  и  $FCC_1$ . Так как плоскости  $AFF_1$  и  $FCC_1$  перпендикулярны плоскости  $ABC$ , то соответствующим линейным углом будет угол  $AFC$ , который равен  $60^\circ$ .



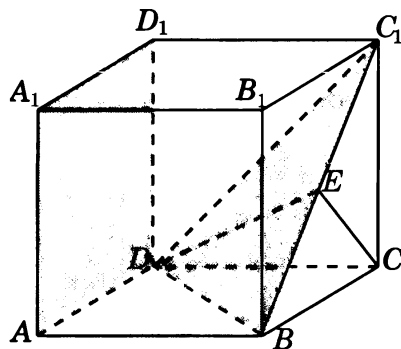
**Второе решение.** Так как плоскость  $AFF_1$  параллельна плоскости  $BEE_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $BEE_1$  и  $DEE_1$ . Так как плоскости  $BEE_1$  и  $DEE_1$  перпендикулярны плоскости  $ABC$ , то соответствующим линейным углом будет угол  $BED$ , который равен  $60^\circ$ .



Ответ.  $60^\circ$ .

**3.2. Решение.** Так как плоскость  $ADD_1$  параллельна плоскости  $BCC_1$ , то искомый угол равен углу между плоскостями  $BCC_1$  и  $BDC_1$ . Пусть  $E$  — середина отрезка  $BC_1$ . Тогда прямые  $CE$  и  $DE$  будут перпендикулярны прямой  $BC_1$  и, следовательно, угол  $CED$  будет линейным углом между плоскостями  $BCC_1$  и  $BDC_1$ . Треугольник  $CED$  прямоугольный, катет  $CD$  равен 1, катет  $CE$  равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle CED = \sqrt{2}.$$

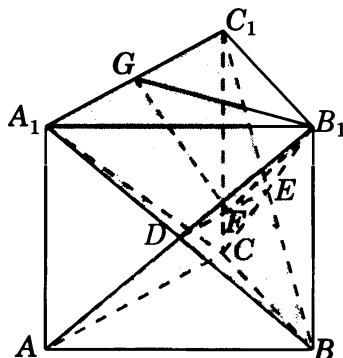


Ответ.  $\sqrt{2}$ .

3.3. Пусть  $DE$  — линия пересечения данных плоскостей,  $F$  — середина отрезка  $DE$ ,  $G$  — середина отрезка  $A_1C_1$ . Угол  $GFB_1$  является линейным углом между данными плоскостями. В треугольнике  $GFB_1$  имеем:

$$FG = FB_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad GB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов находим  $\cos \angle GFB_1 = \frac{1}{7}$ .

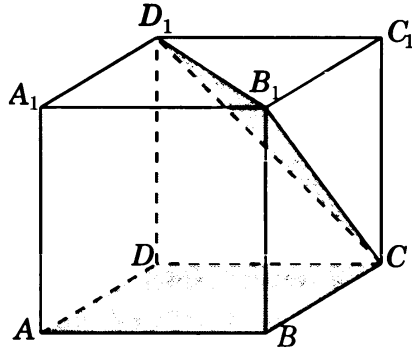


Ответ.  $\frac{1}{7}$ .

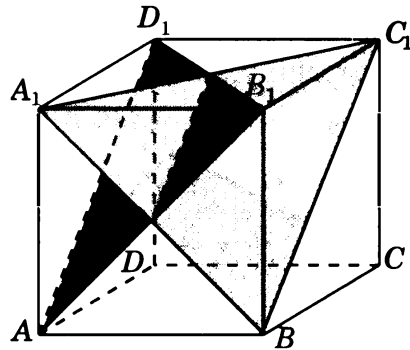


### Тренировочная работа 3. Угол между двумя плоскостями

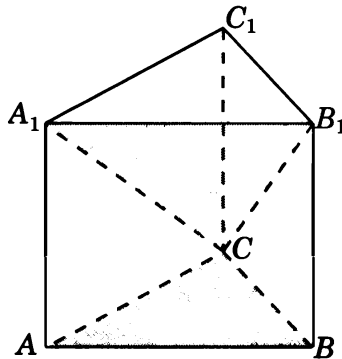
1. В кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $CB_1D_1$ .



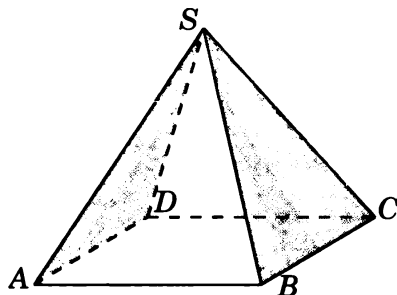
2. В кубе  $A...D_1$  найдите косинус угла между плоскостями  $BA_1C_1$  и  $AB_1D_1$ .



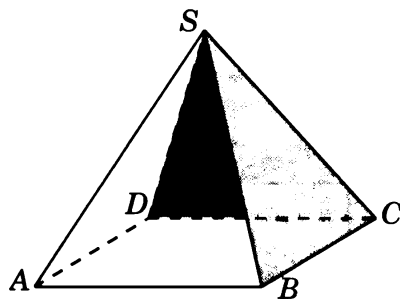
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $CA_1B_1$ .



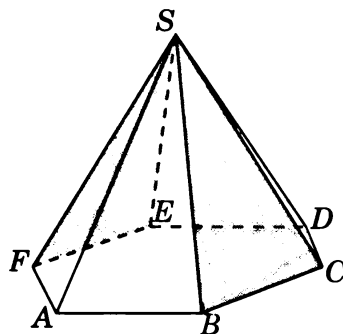
4. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $SAD$  и  $SBC$ .



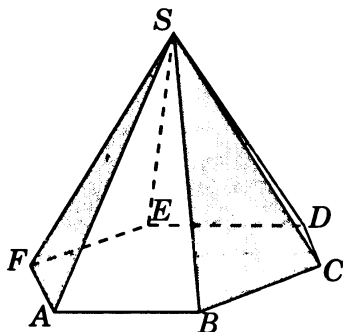
5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями  $SBC$  и  $SCD$ .



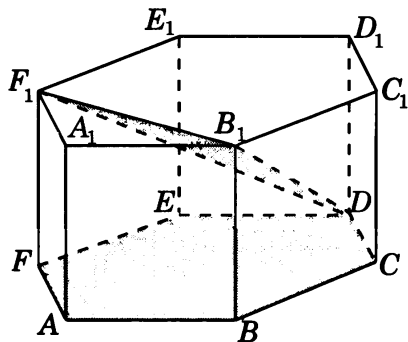
6. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями  $SBC$  и  $SEF$ .



7. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями  $SAF$  и  $SBC$ .

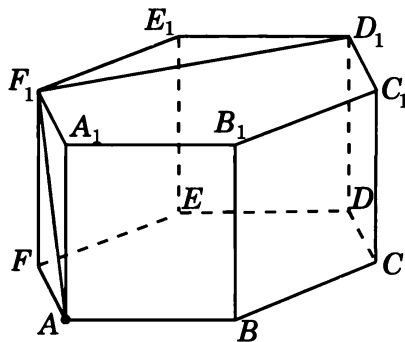


8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1F_1$ .



## Решения задач 4.1—4.3 диагностической работы

4.1. *Решение.* Так как прямая  $D_1F_1$  перпендикулярна плоскости  $AFF_1$ , то отрезок  $AF_1$  будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  на прямую  $D_1F_1$ . Его длина равна  $\sqrt{2}$ .



Ответ.  $\sqrt{2}$ .

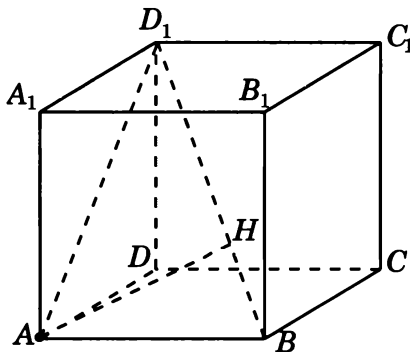
4.2. *Первое решение.* Искомым перпендикуляром является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $ABD_1$ , в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Для площади  $S$  этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AB \cdot AD_1 = BD_1 \cdot AH.$$

Откуда находим  $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .



*Второе решение.* Искомым перпендикуляром является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $ABD_1$ , в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Треугольники  $BAD_1$  и  $BHA$  подобны по трем углам. Следовательно,

$$AD_1 : BD_1 = AH : AB.$$

Откуда находим  $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Третье решение. Искомым перпендикуляром является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $ABD_1$ , в котором

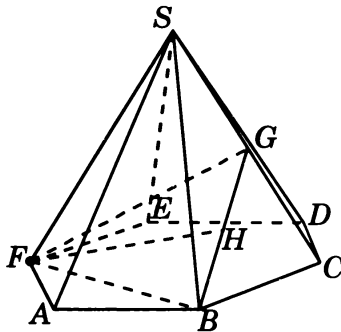
$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Откуда  $\sin \angle ABD_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$  и, следовательно,

$$AH = AB \cdot \sin \angle ABH = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

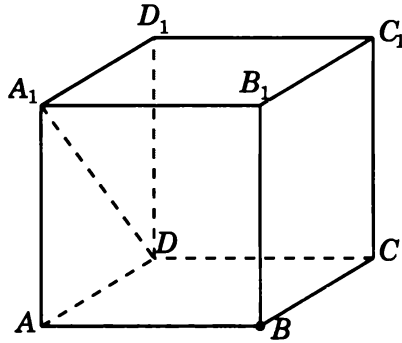
Ответ.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

4.3. Искомое расстояние от точки  $F$  до прямой  $BG$  равно высоте  $FH$  треугольника  $FBG$ , в котором  $FB = FG = \sqrt{3}$ ,  $BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . По теореме Пифагора находим  $FH = \frac{\sqrt{42}}{4}$ .

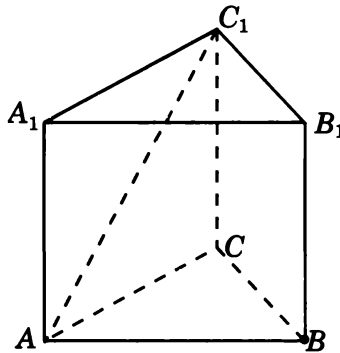


## Тренировочная работа 4. Расстояние от точки до прямой

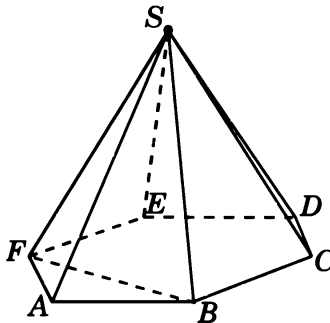
1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $DA_1$ .



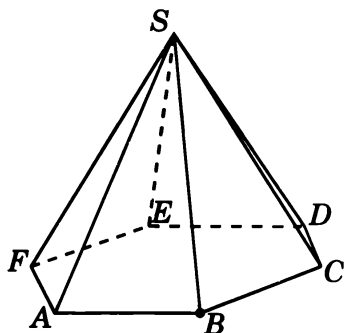
2. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .



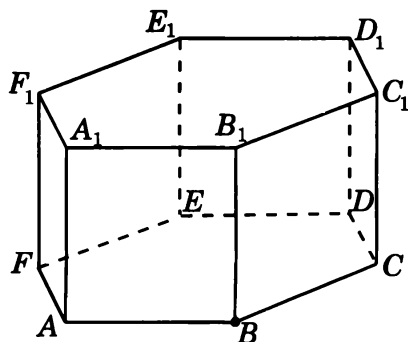
3. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $S$  до прямой  $BF$ .



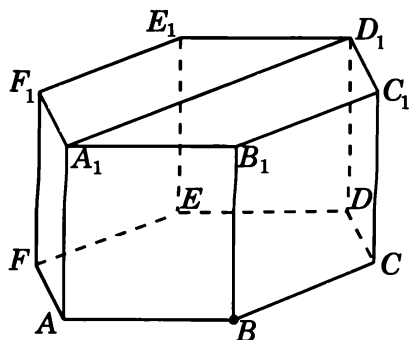
4. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $SA$ .



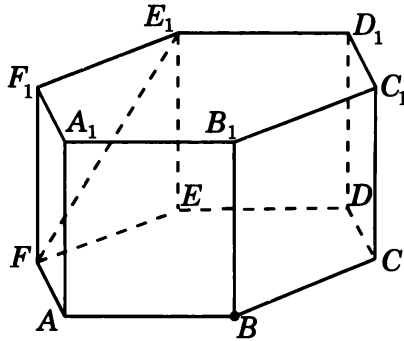
5. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $A_1F_1$ .



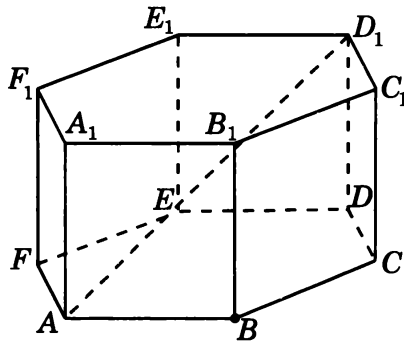
6. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $A_1D_1$ .



7. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $FE_1$ .



8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AD_1$ .





## Решения задач 5.1—5.3 диагностической работы

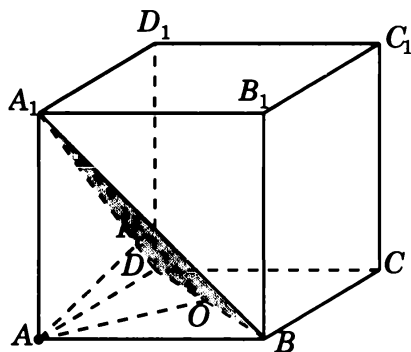
**5.1. Первое решение.** Пусть  $O$  — середина отрезка  $BD$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $AOA_1$ . Следовательно, плоскости  $BDA_1$  и  $AOA_1$  перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $BDA_1$ , является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $AOA_1$ , в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Для площади  $S$  этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AO \cdot AA_1 = OA_1 \cdot AH.$$

Откуда находим  $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .



**Второе решение.** Пусть  $O$  — середина отрезка  $BD$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $AOA_1$ . Следовательно, плоскости  $BDA_1$  и  $AOA_1$  перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $BDA_1$ , является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $AOA_1$ , в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Треугольники  $AOA_1$  и  $HOA$  подобны по трем углам. Следовательно,  $AA_1 : OA_1 = AH : AO$ . Откуда находим  $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Третье решение.** Пусть  $O$  — середина отрезка  $BD$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $AOA_1$ . Следовательно, плоскости  $BDA_1$  и  $AOA_1$  перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  на плоскость  $BDA_1$ , является высота  $AH$  прямоугольного треугольника  $AOA_1$ , в котором

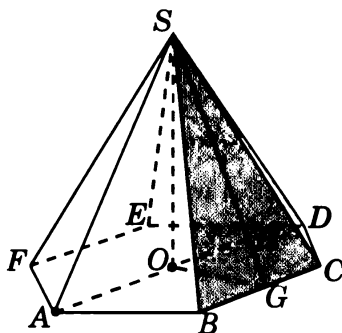
$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Откуда  $\sin \angle O A A_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$  и, следовательно,

$$A H = A O \cdot \sin \angle A O H = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**5.2. Первое решение.** Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Прямая  $AO$  параллельна прямой  $BC$  и, значит, параллельна плоскости  $SBC$ . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки  $O$  до плоскости  $SBC$ . Пусть  $G$  — середина отрезка  $BC$ . Тогда прямая  $OG$  перпендикулярна  $BC$  и искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $O$  на плоскость  $SBC$ , является высота  $OH$  прямоугольного треугольника  $SOG$ . В этом треугольнике  $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ,  $SO = \sqrt{3}$ . Для площади  $S$  этого треугольника имеют место равенства  $2S = OG \cdot SO = SG \cdot OH$ . Откуда находим  $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .



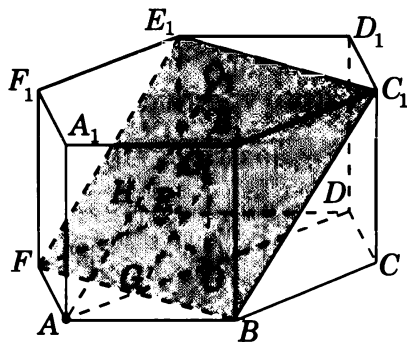
**Второе решение.** Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Прямая  $AO$  параллельна прямой  $BC$  и, значит, параллельна плоскости  $SBC$ . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки  $O$  до плоскости  $SBC$ . Пусть  $G$  — середина отрезка  $BC$ . Тогда прямая  $OG$  перпендикулярна  $BC$  и искомым перпендикуляром, опущенным из точки  $O$  на плоскость  $SBC$ , является высота  $OH$  прямоугольного треугольника  $SOG$ . В этом треугольнике

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad SG = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad SO = \sqrt{3}.$$

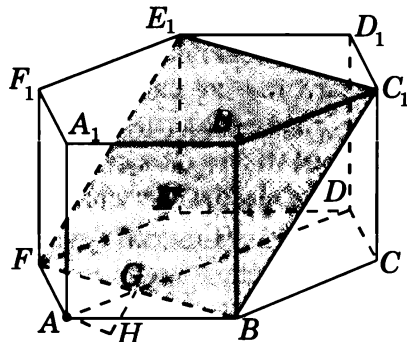
Треугольники  $SOG$  и  $OHG$  подобны по трем углам. Следовательно,  $SO : SG = OH : OG$ . Откуда находим  $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .

Ответ.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

**5.3. Первое решение.** Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры оснований призмы. Прямая  $AO_1$  параллельна плоскости  $BFE_1$  и, следовательно, расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$  равно расстоянию от прямой  $AO_1$  до плоскости  $BFE_1$ . Плоскость  $AOO_1$  перпендикулярна плоскости  $BFE_1$  и, следовательно, расстояние от прямой  $AO_1$  до плоскости  $BFE_1$  равно расстоянию от прямой  $AO_1$  до линии пересечения  $GG_1$  плоскостей  $AOO_1$  и  $BFE_1$ . Треугольник  $AOO_1$  прямоугольный,  $AO = OO_1 = 1$ ,  $GG_1$  — его средняя линия. Следовательно, расстояние между прямыми  $AO_1$  и  $GG_1$  равно половине высоты  $OH$  треугольника  $AOO_1$ , т. е. равно  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .



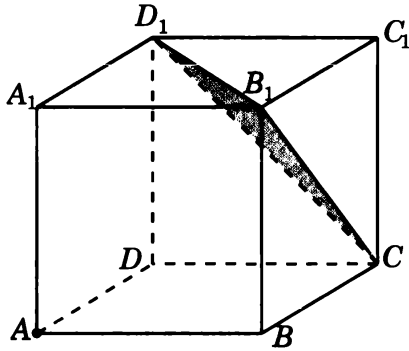
**Второе решение.** Пусть  $G$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BF$ . Угол между прямой  $AD$  и плоскостью  $BFE_1$  равен углу между прямыми  $BC$  и  $BC_1$  и равен  $45^\circ$ . Перпендикуляр  $AH$ , опущенный из точки  $A$  на плоскость  $BFE_1$ , равен  $AG \cdot \sin 45^\circ$ . Так как  $AG = 0,5$ , то  $AH = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .



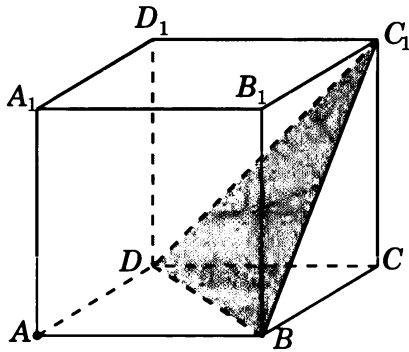
Ответ.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

## Тренировочная работа 5. Расстояние от точки до плоскости

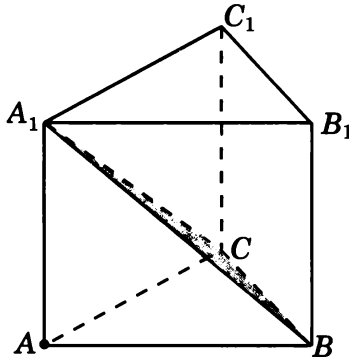
1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CB_1D_1$ .



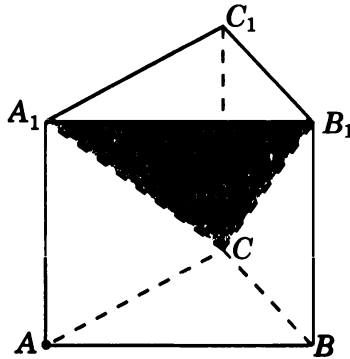
2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BDC_1$ .



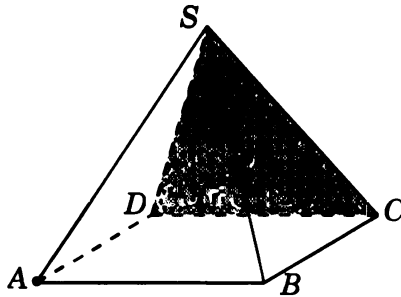
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $B_1CA_1$ .



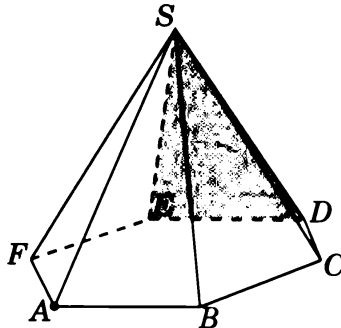
4. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CA_1B_1$ .



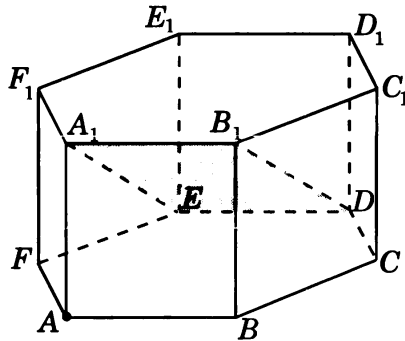
5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SCD$ .



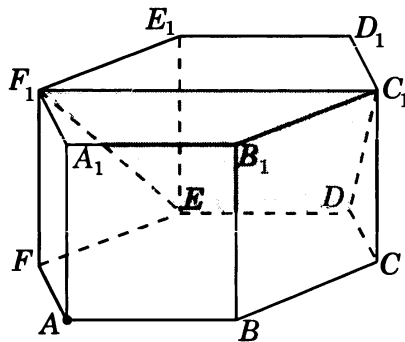
6. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SDE$ .



7. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $DEA_1$ .



8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $DEF_1$ .

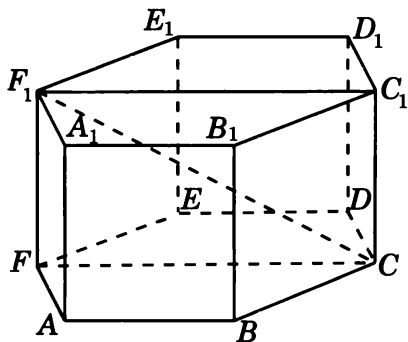




Диагональ  $CA_1$  куба перпендикулярна этим плоскостям. Обозначим  $E$  и  $F$  точки пересечения диагонали  $CA_1$  соответственно с плоскостями  $AB_1D_1$  и  $BDC_1$ . Длина отрезка  $EF$  будет равна расстоянию между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ . Пусть  $O$  и  $O_1$  соответственно центры граней  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  куба. В треугольнике  $ACE$  отрезок  $OF$  параллелен  $AE$  и проходит через середину  $AC$ . Следовательно,  $OF$  — средняя линия треугольника  $ACE$  и, значит,  $EF = FC$ . Аналогично доказывается, что  $O_1E$  — средняя линия треугольника  $A_1C_1F$  и, значит,  $A_1E = EF$ . Таким образом,  $EF$  составляет одну треть диагонали  $CA_1$ , т. е.  $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Ответ.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**6.3. Решение.** Расстояние между скрещивающимися прямыми  $AA_1$  и  $CF_1$  равно расстоянию между параллельными плоскостями  $ABB_1$  и  $CFF_1$ , в которых лежат эти прямые. Оно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

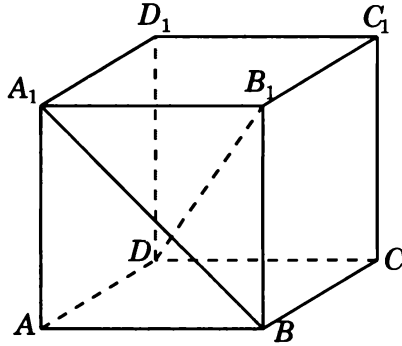


Ответ.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

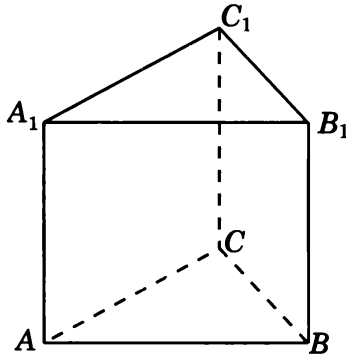


## Тренировочная работа 6. Расстояние между двумя прямыми

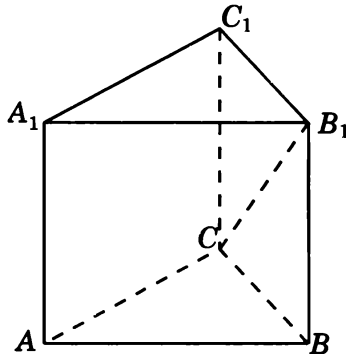
1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ .



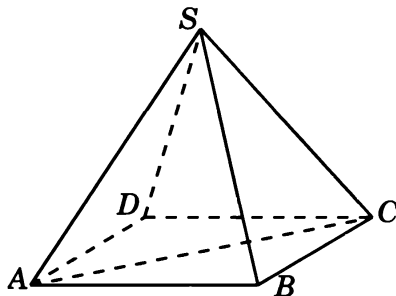
2. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $CC_1$  и  $AB$ .



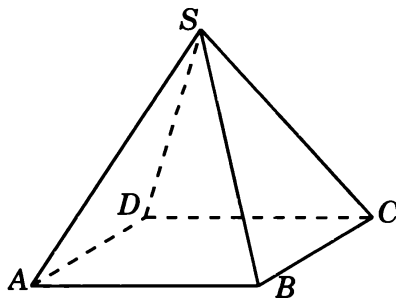
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CB_1$ .



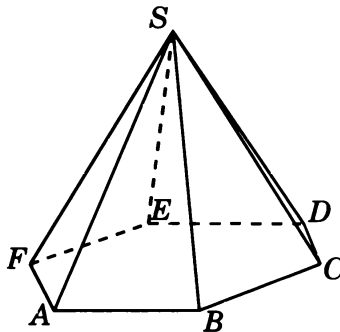
4. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $SB$  и  $AC$ .



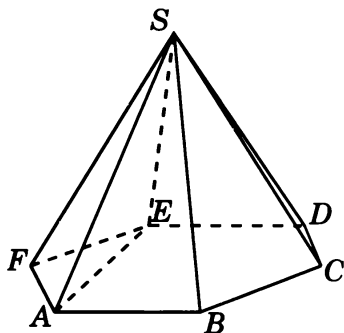
5. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $CD$ .



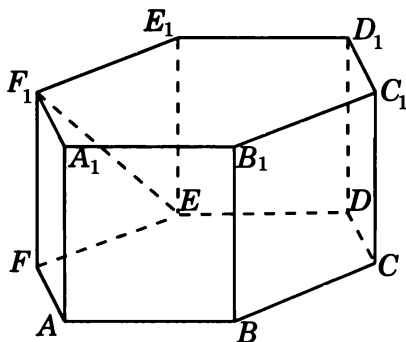
6. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми  $SB$  и  $AF$ .



7. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми  $SB$  и  $AE$ .

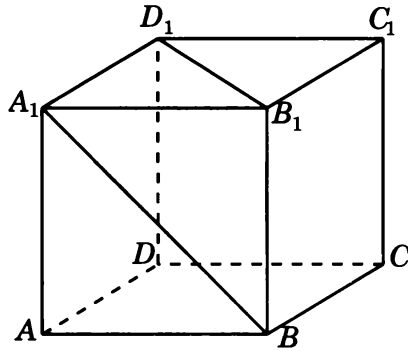


8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $BB_1$  и  $EF_1$ .

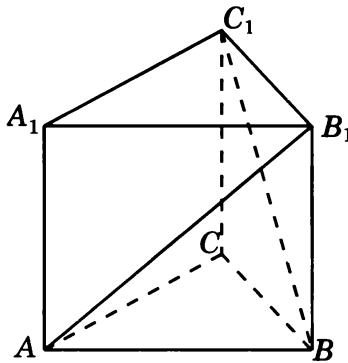


# Диагностическая работа 1

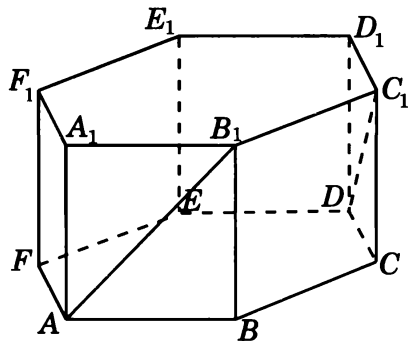
1. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $B_1D_1$ .



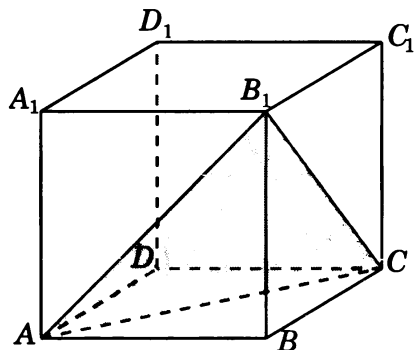
2. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .



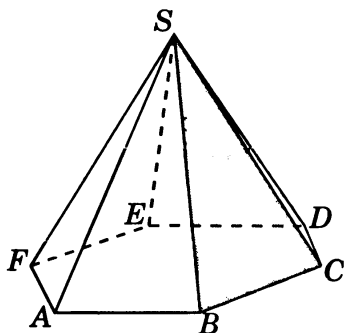
3. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $DC_1$ .



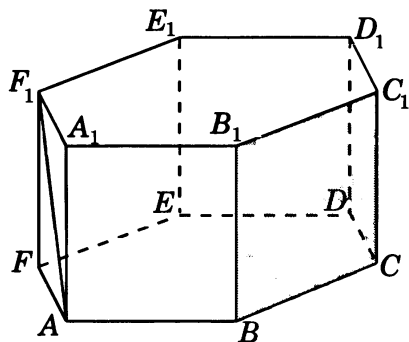
4. В кубе  $A...D_1$  найдите синус угла между прямой  $A_1D_1$  и плоскостью  $ACB_1$ .



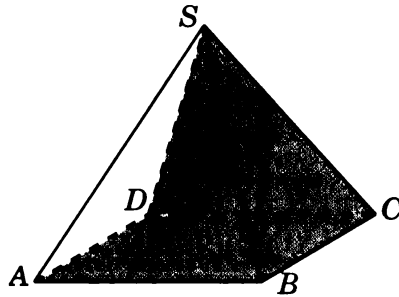
5. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой  $AB$  и плоскостью  $SBC$ .



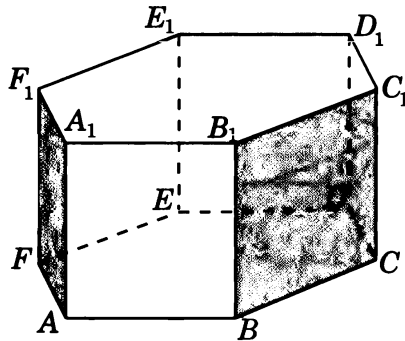
6. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $AF_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .



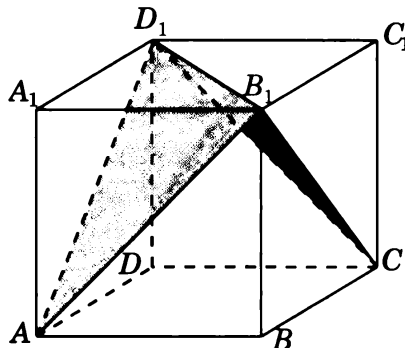
7. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $ABC$  и  $SCD$ .



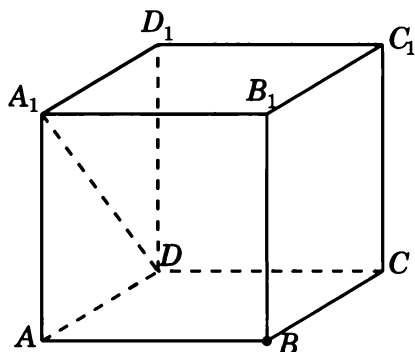
8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  найдите угол между плоскостями  $AFF_1$  и  $BCC_1$ .



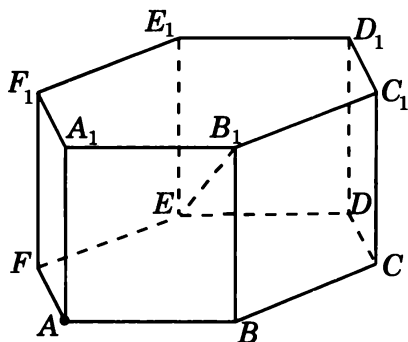
9. В кубе  $A...D_1$  найдите косинус угла между плоскостями  $AB_1D_1$  и  $CB_1D_1$ .



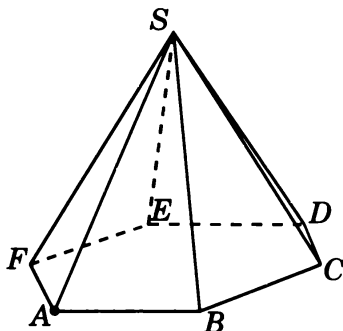
10. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $DA_1$ .



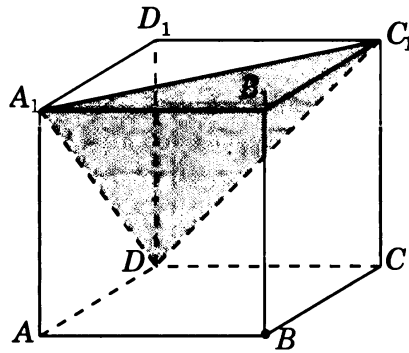
11. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $EB_1$ .



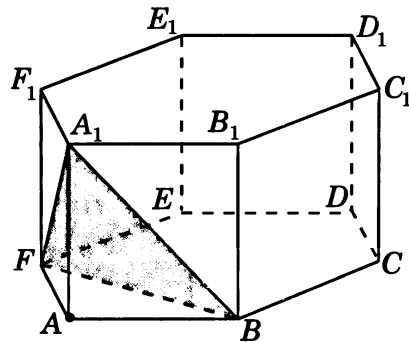
12. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SD$ .



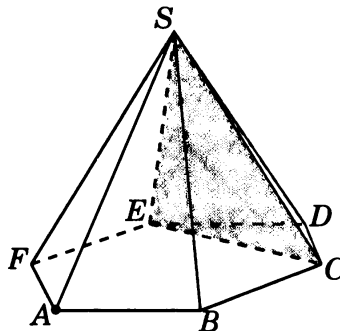
13. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $DA_1C_1$ .



14. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BFA_1$ .

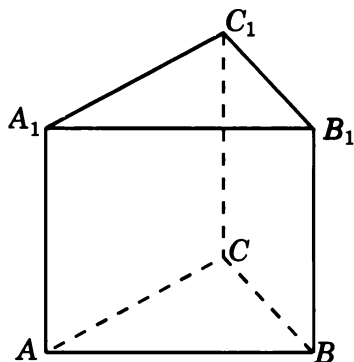


15. В правильной шестиугольной пирамиде  $SAB CDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SCE$ .

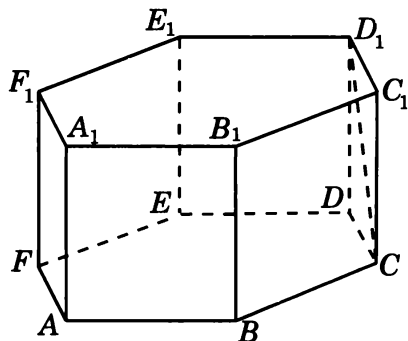




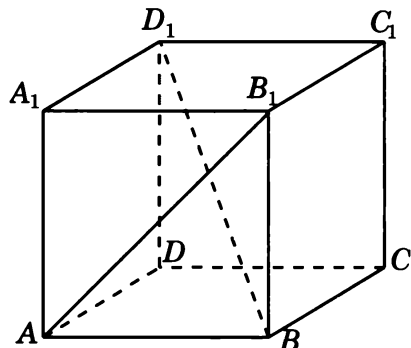
16. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .



17. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $BB_1$  и  $CD_1$ .

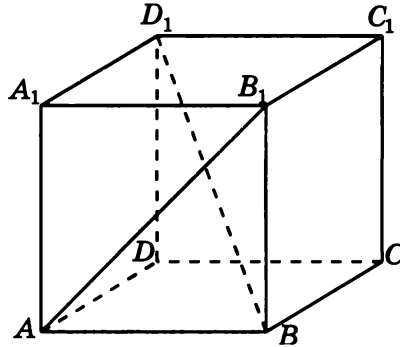


18. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ .

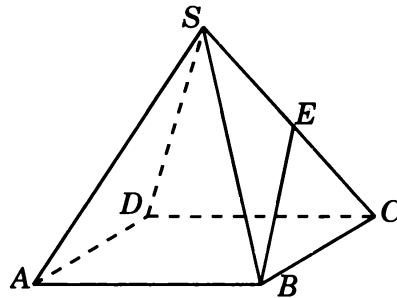


## Диагностическая работа 2

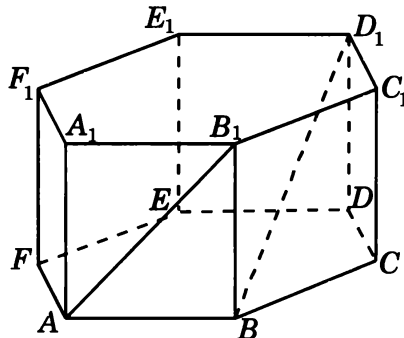
1. В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ .



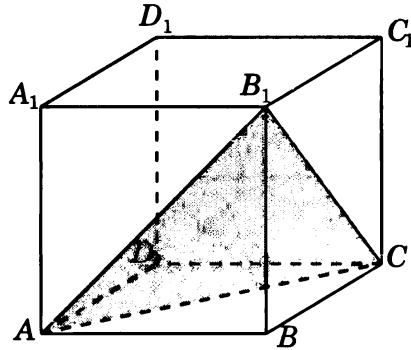
2. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  — середина ребра  $SC$ . Найдите тангенс угла между прямыми  $SA$  и  $BE$ .



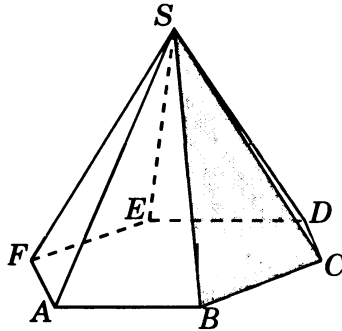
3. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ .



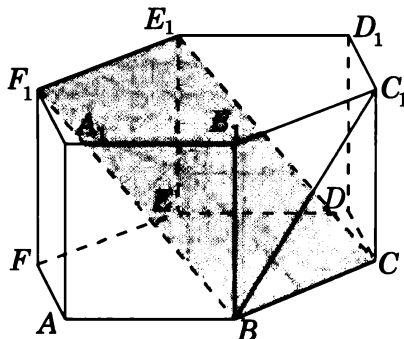
4. В кубе  $A...D_1$  найдите синус угла между прямой  $DD_1$  и плоскостью  $ACB_1$ .



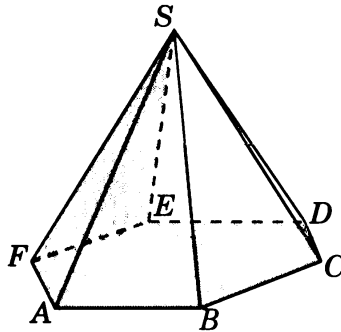
5. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой  $AF$  и плоскостью  $SBC$ .



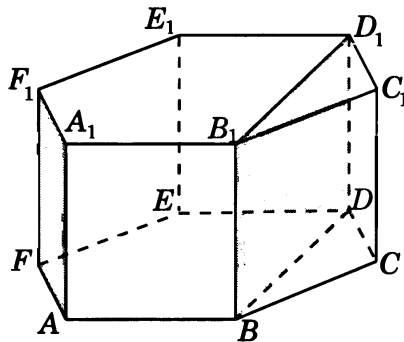
6. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $BCE_1$ .



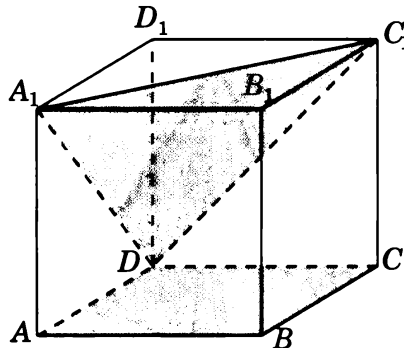
7. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями  $ABC$  и  $SEF$ .



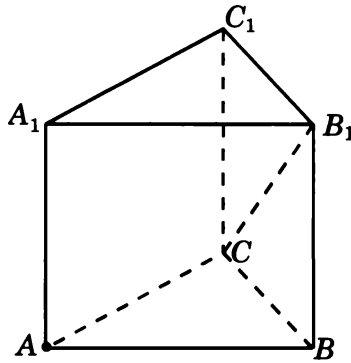
8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  найдите угол между плоскостями  $AFF_1$  и  $BDD_1$ .



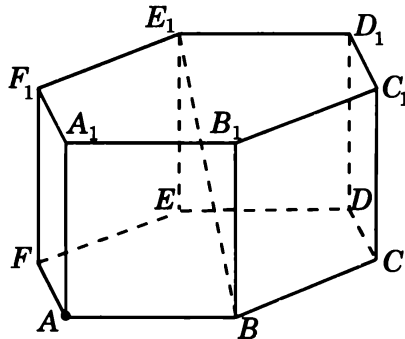
9. В кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DA_1C_1$ .



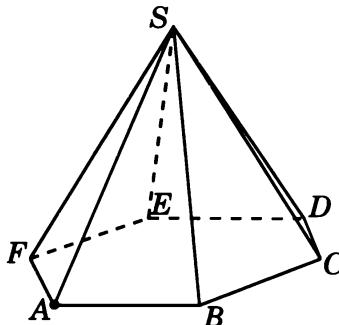
10. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CB_1$ .



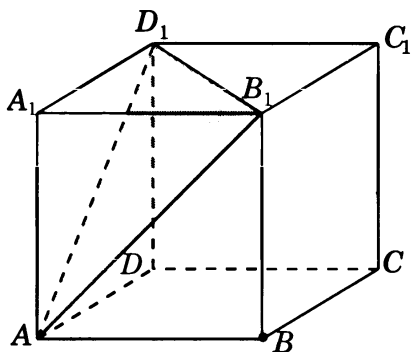
11. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BE_1$ .



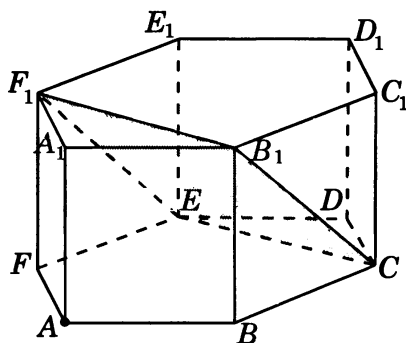
12. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SC$ .



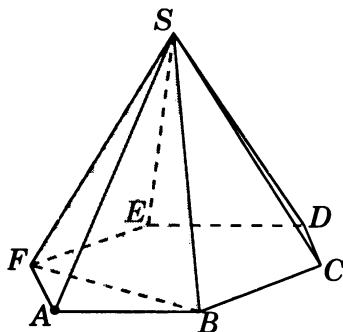
13. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $AB_1D_1$ .



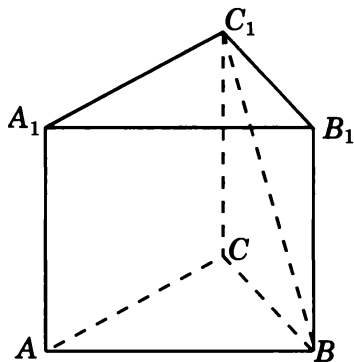
14. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CEF_1$ .



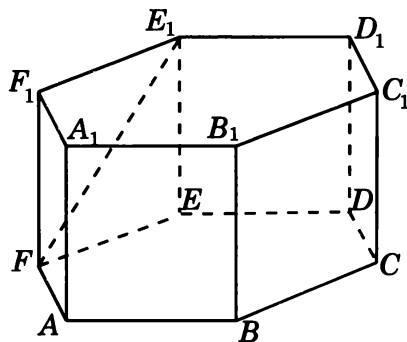
15. В правильной шестиугольной пирамиде  $SAB CDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBF$ .



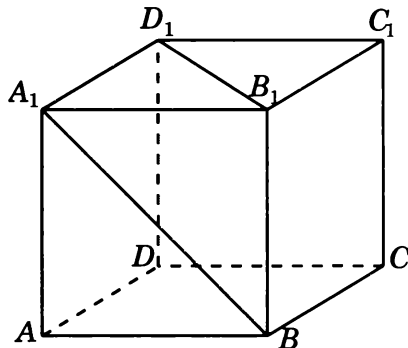
16. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .



17. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $BB_1$  и  $FE_1$ .

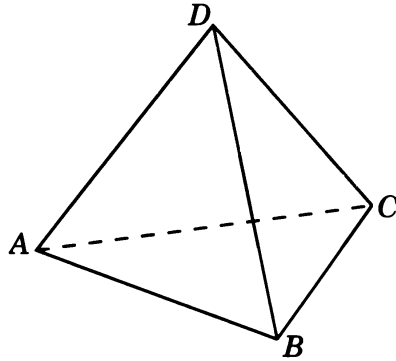


18. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $B_1D_1$ .

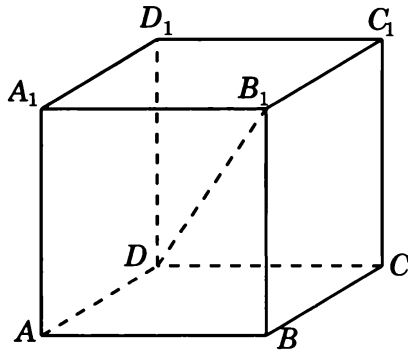


### Диагностическая работа 3

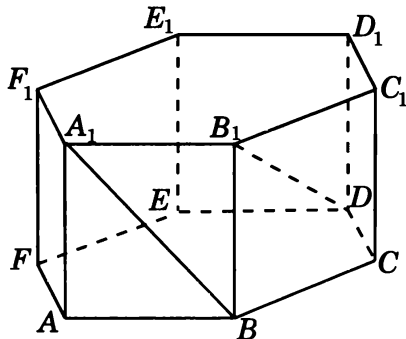
1. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .



2. В кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между прямыми  $AB$  и  $DB_1$ .

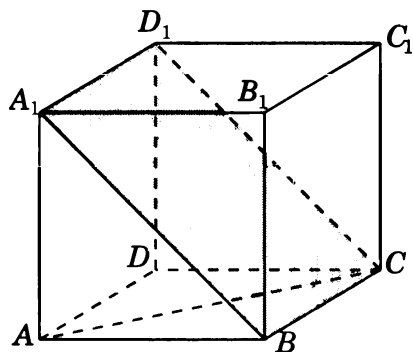


3. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ .

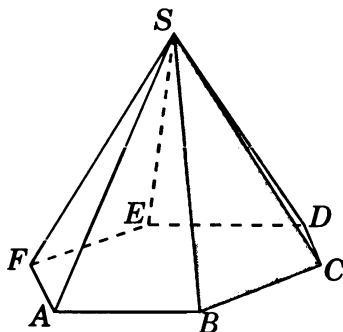




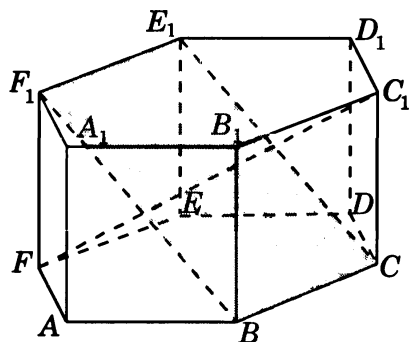
4. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямой  $AC$  и плоскостью  $BCD_1$ .



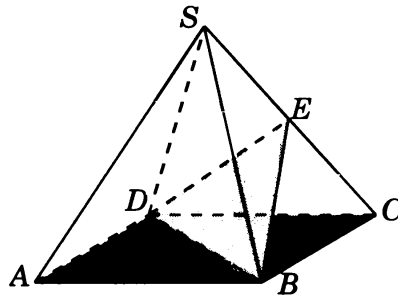
5. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBC$ .



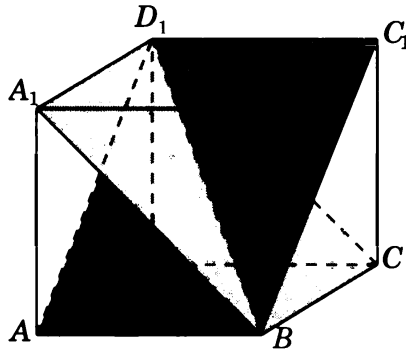
6. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $FC_1$  и плоскостью  $BCE_1$ .



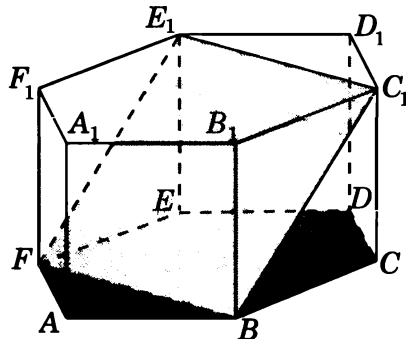
7. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  — середина ребра  $SC$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BDE$ .



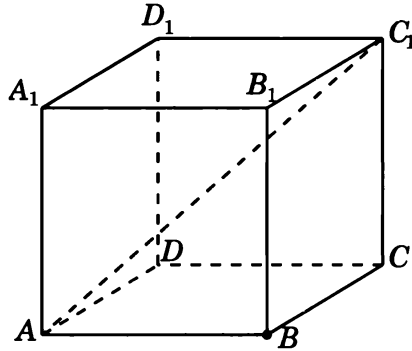
8. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $BCD_1$ .



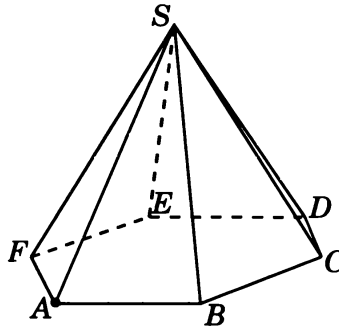
9. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BFE_1$ .



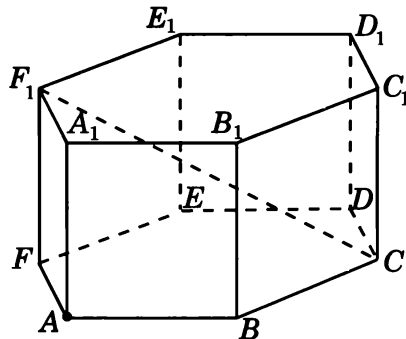
10. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .



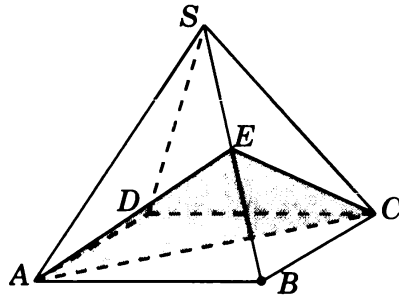
11. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $SB$ .



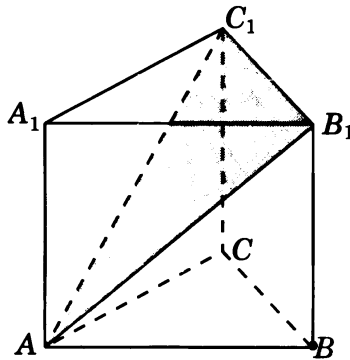
12. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CF_1$ .



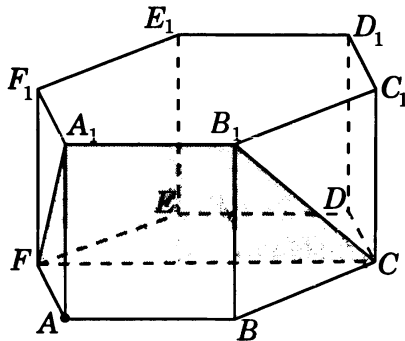
13. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  — середина ребра  $SB$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ACE$ .



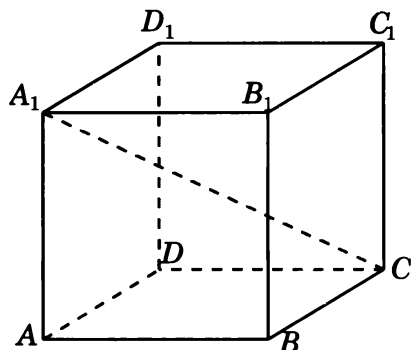
14. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $AB_1C_1$ .



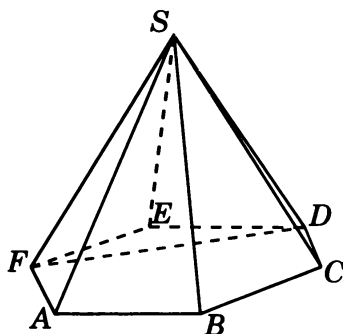
15. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CFA_1$ .



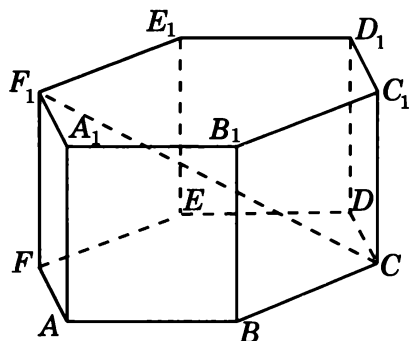
16. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CA_1$ .



17. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми  $SB$  и  $DF$ .



18. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $BB_1$  и  $CF_1$ .



# Ответы

## Тренировочная работа 1

1.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 2.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . 3.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 4.  $\sqrt{2}$ . 5.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 6.  $\frac{3}{4}$ . 7.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . 8.  $\frac{1}{4}$ .

## Тренировочная работа 2

1.  $\sqrt{2}$ . 2.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 3.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . 4.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 5.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 6.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . 7. 60. 8.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

## Тренировочная работа 3

1.  $\sqrt{2}$ . 2.  $\frac{1}{3}$ . 3.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 4.  $\frac{1}{3}$ . 5.  $-\frac{1}{3}$ . 6. 0,6. 7. 0,2. 8.  $\frac{2}{3}$ .

## Тренировочная работа 4

1.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . 2.  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ . 3.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ . 4.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ . 5.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ . 6.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ . 7.  $\sqrt{3}$ . 8.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

## Тренировочная работа 5

1.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 2.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 3.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 4.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 5.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 6.  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ . 7.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 8.  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ .

## Тренировочная работа 6

1.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . 2.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 3.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 4. 0,5. 5.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 6.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 7.  $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ . 8.  $\sqrt{3}$ .

## Диагностическая работа 1

1.  $60^\circ$ . 2.  $\frac{1}{4}$ . 3.  $\frac{3}{4}$ . 4.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 5.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . 6.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . 7.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 8. 60. 9.  $\frac{1}{3}$ . 10.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .  
11.  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ . 12.  $\sqrt{3}$ . 13.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 14.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . 15.  $\frac{3\sqrt{39}}{13}$ . 16.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 17.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 18.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

## Диагностическая работа 2

1.  $90^\circ$ . 2.  $\sqrt{2}$ . 3.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 4.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 5.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . 6.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . 7.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . 8. 30. 9.  $\sqrt{2}$ .  
10.  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ . 11.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ . 12.  $\frac{\sqrt{39}}{4}$ . 13.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 14.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ . 15.  $\frac{\sqrt{39}}{13}$ . 16.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 17.  $\sqrt{3}$ .  
18.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Диагностическая работа 3**

1.  $90^\circ$ . 2.  $\sqrt{2}$ . 3.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 4.  $30^\circ$ . 5.  $\frac{\sqrt{15}}{10}$ . 6.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . 7.  $45^\circ$ . 8.  $60^\circ$ . 9.  $45^\circ$ .  
10.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 11.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ . 12.  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ . 13. 0,5. 14.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 15.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 16.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 17.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ .  
18.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

# Приложение 1

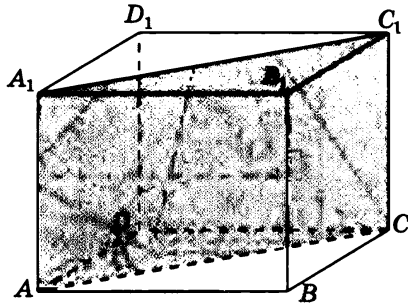
## Сечения многогранников



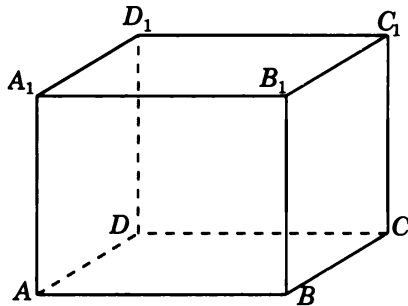


# Диагностическая работа 1

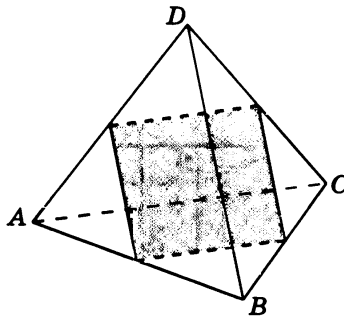
1. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины  $A$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $C_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребрами  $AB=4$ ,  $AD=3$ ,  $AA_1=4$ .



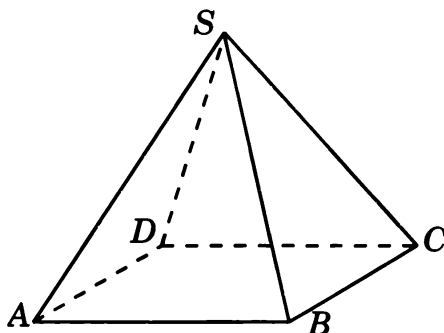
2. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер  $AD$ ,  $BC$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребрами  $AB=4$ ,  $AD=4$ ,  $AA_1=3$ .



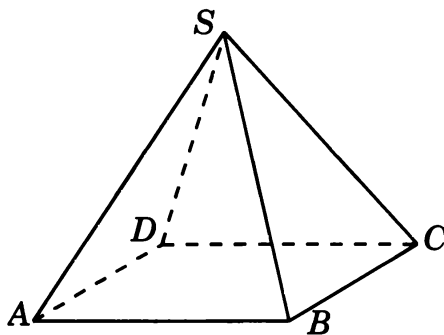
3. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  единичного тетраэдра  $ABCD$ .



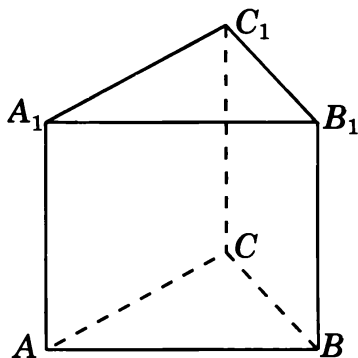
4. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются вершины  $S$ ,  $B$ ,  $D$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  с ребрами, равными 1.



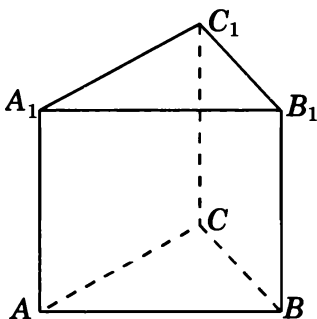
5. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  с ребрами, равными 1.



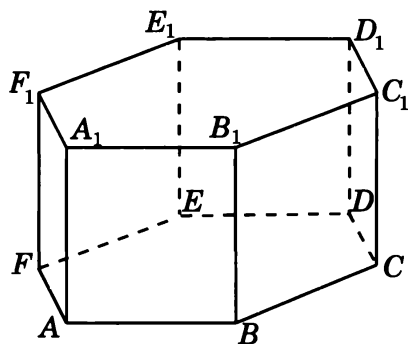
6. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер  $AC$ ,  $BC$ ,  $A_1C_1$ ,  $B_1C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  с ребрами, равными 1.



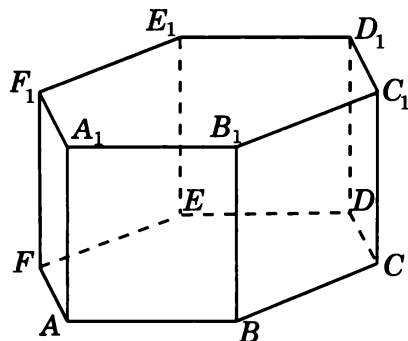
7. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются вершины  $A_1, C_1, B$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  со стороной основания 2 и боковым ребром 1.



8. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины  $B, E, B_1, E_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  с ребрами, равными 1.

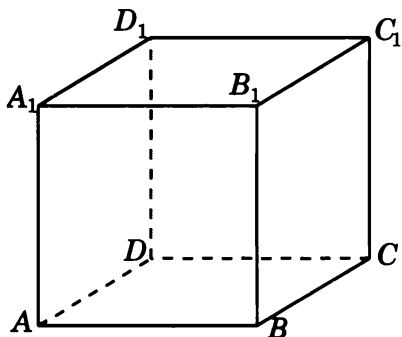


9. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины  $B, D, B_1, D_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{3}$ .

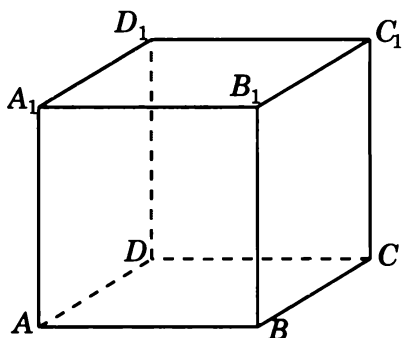


## Диагностическая работа 2

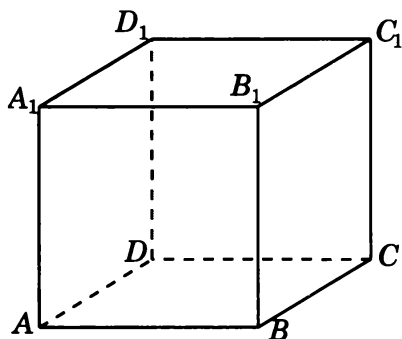
1. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $B_1C_1$ . Найдите его площадь.



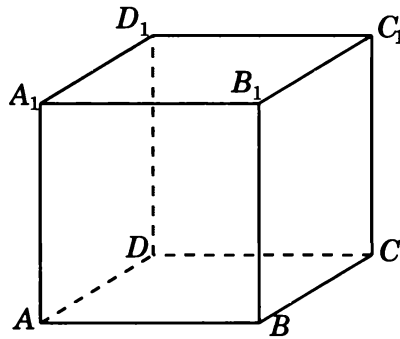
2. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $A$  и середины ребер  $BB_1$ ,  $DD_1$ . Найдите его площадь.



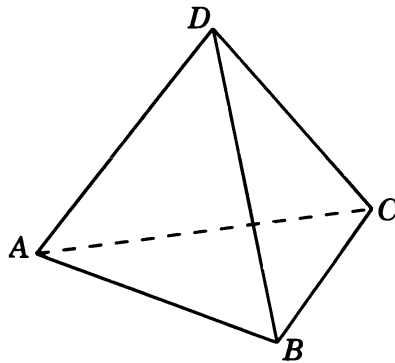
3. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $C_1D_1$ . Найдите его площадь.



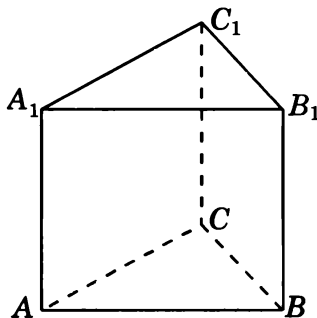
4. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AA_1$ ,  $CC_1$  и точку на ребре  $AB$ , отстоящую от вершины  $A$  на  $0,75$ . Найдите его площадь.



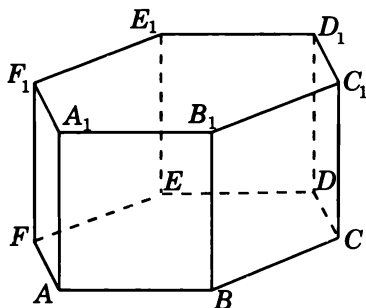
5. Изобразите сечение единичного тетраэдра  $ABCD$ , проходящее через середины ребер  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . Найдите его площадь.



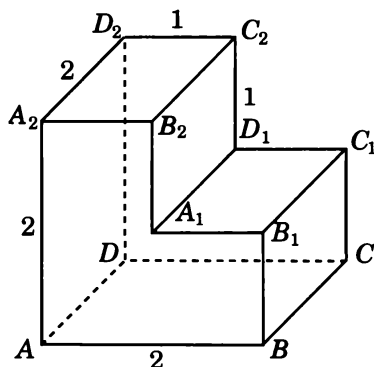
6. Изобразите сечение правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , проходящее через середины ребер  $AB$ ,  $BC$ ,  $A_1B_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



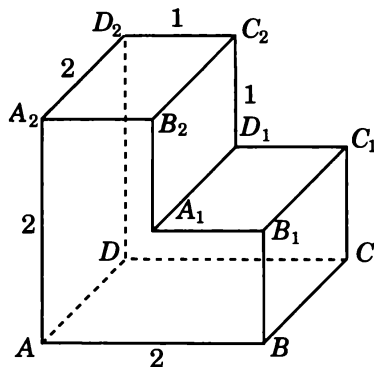
7. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $D$  и  $C_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



8. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

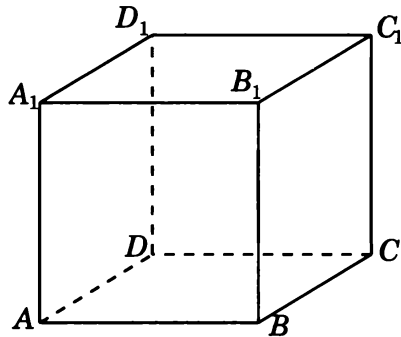


9. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $A_1$  и  $D_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

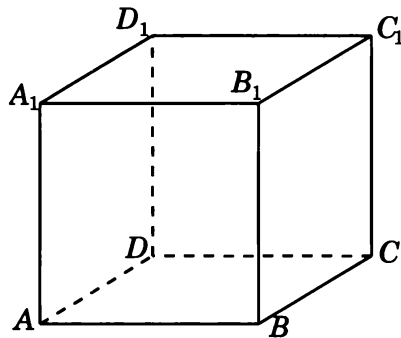


# Тренировочная работа 1

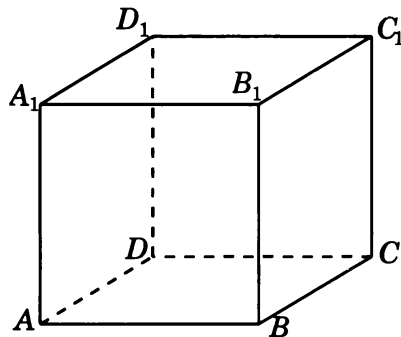
1. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $A_1B_1$ . Найдите его площадь.



2. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $B$  и середины ребер  $AA_1$ ,  $CC_1$ . Найдите его площадь.

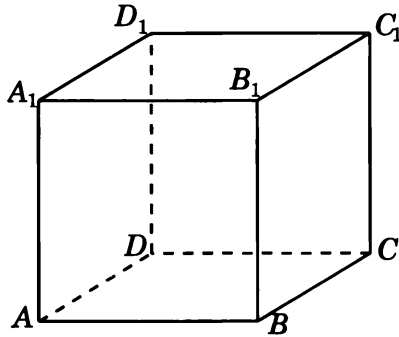


3. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершины  $A_1$ ,  $B$  и середину ребра  $CC_1$ . Найдите его площадь.

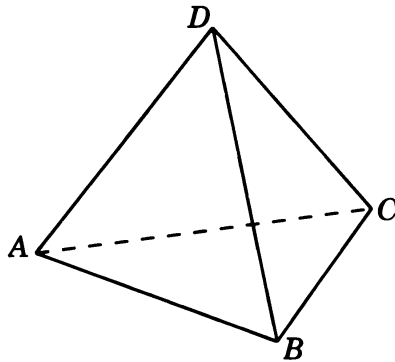




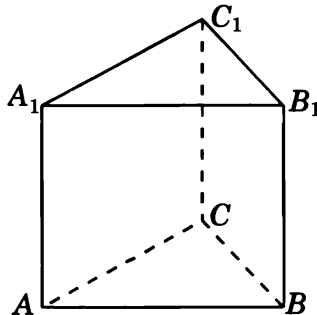
4. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $D_1$  и середины ребер  $AB$ ,  $BC$ . Найдите его площадь.



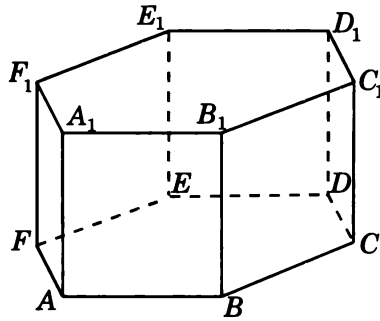
5. Изобразите сечение единичного тетраэдра  $ABCD$ , проходящее через середины ребер  $AD$ ,  $BD$  и  $BC$ . Найдите его площадь.



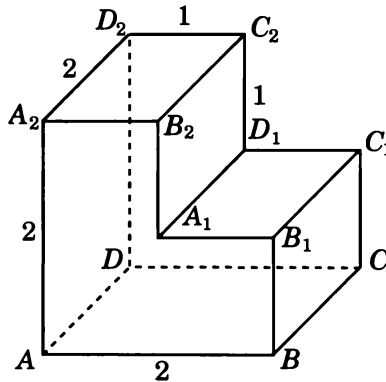
6. Изобразите сечение правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , проходящее через вершины  $A_1$ ,  $B_1$  и середину ребра  $AC$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



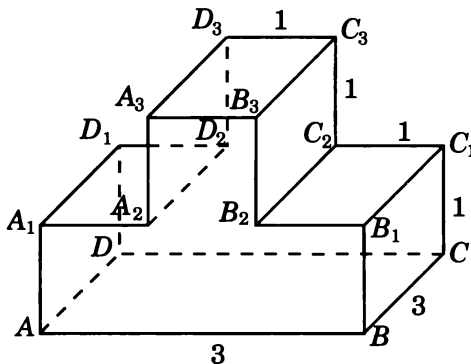
7. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $C$  и  $D_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



8. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $A_2$  и  $C_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

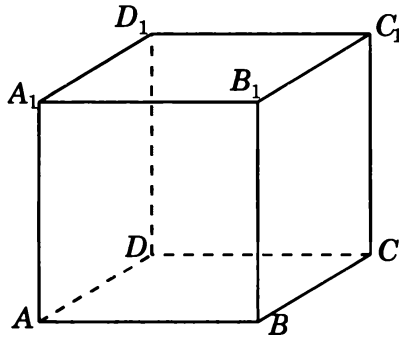


9. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C_3$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

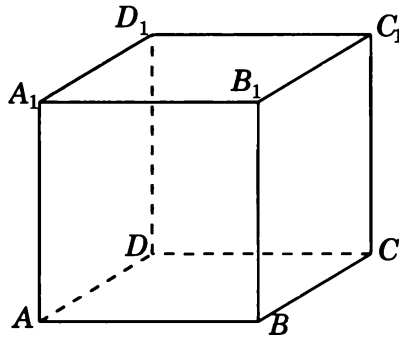


## Тренировочная работа 2

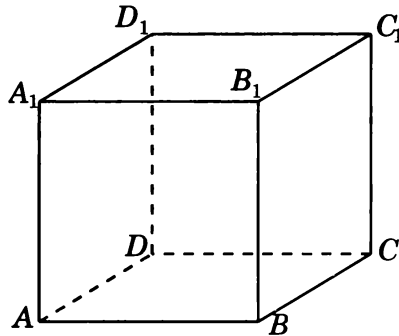
1. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $A$  и середины ребер  $BC$ ,  $B_1C_1$ . Найдите его площадь.



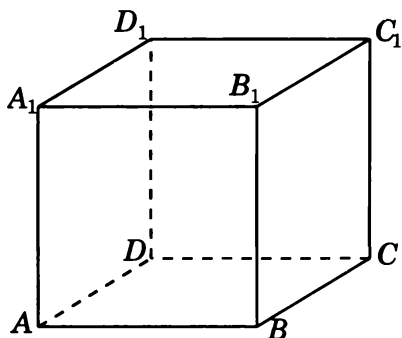
2. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AA_1$ ,  $CC_1$  и точку на ребре  $BB_1$ , отстоящую от вершины  $B$  на  $0,25$ . Найдите его площадь.



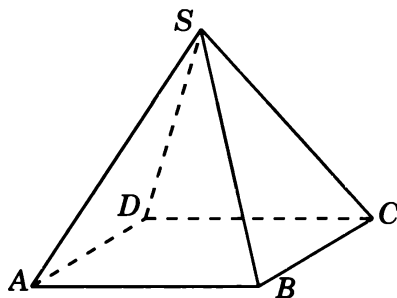
3. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $A$  и середины ребер  $CD$ ,  $A_1D_1$ . Найдите его площадь.



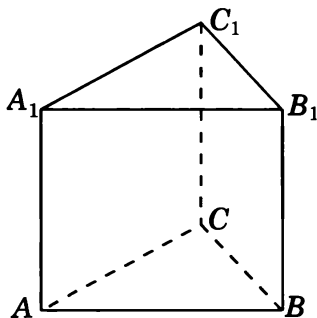
4. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $BB_1$ ,  $DD_1$  и точку на ребре  $AB$ , отстоящую от вершины  $A$  на  $0,75$ . Найдите его площадь.



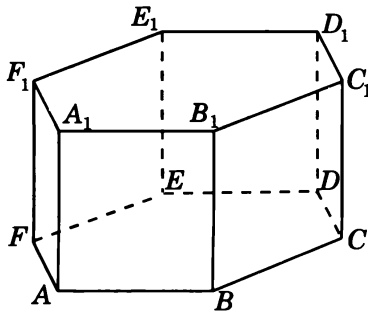
5. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $SC$ . Все ребра пирамиды равны  $1$ . Найдите его площадь.



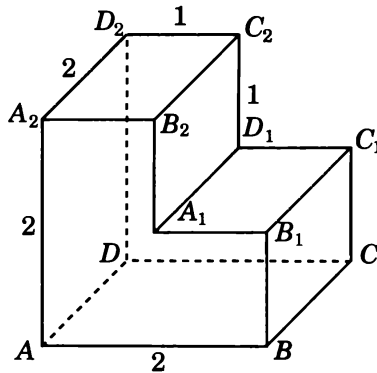
6. Изобразите сечение правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , проходящее через середины ребер  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $A_1C_1$ . Все ребра призмы равны  $1$ . Найдите его площадь.



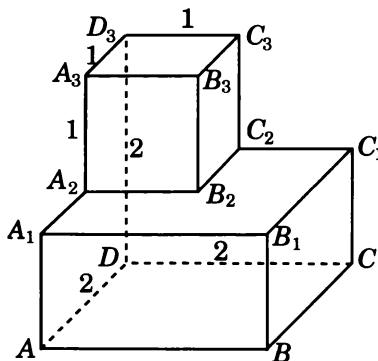
7. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и  $D_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



8. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

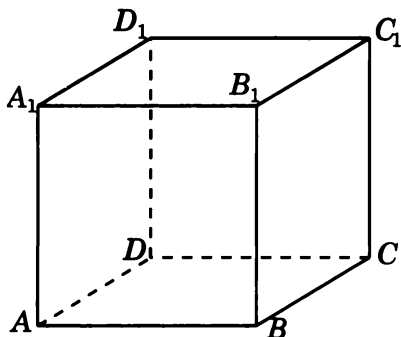


9. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C_3$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.

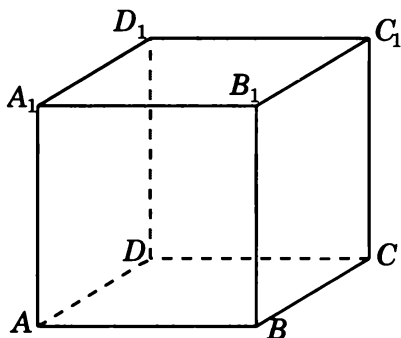


### Диагностическая работа 3

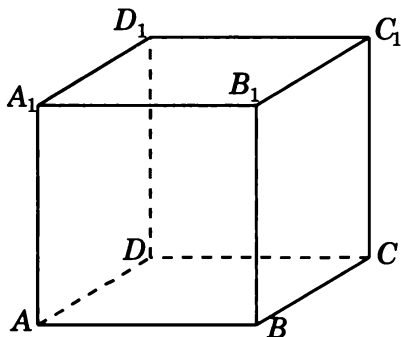
1. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $C$  и середины ребер  $AD$ ,  $A_1D_1$ . Найдите его площадь.



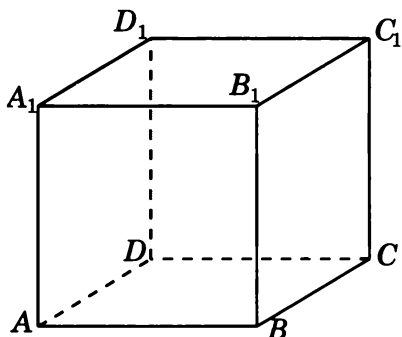
2. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $A_1B_1$ ,  $CD$  и точку на ребре  $AB$ , отстоящую от вершины  $A$  на 0,25. Найдите его площадь.



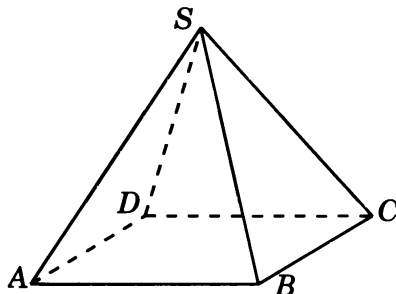
3. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершины  $A_1$ ,  $C_1$  и середину ребра  $AD$ . Найдите его площадь.



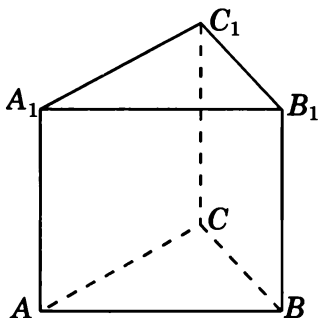
4. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AA_1$ ,  $CC_1$  и точку на ребре  $AB$ , отстоящую от вершины  $A$  на  $0,25$ . Найдите его площадь.



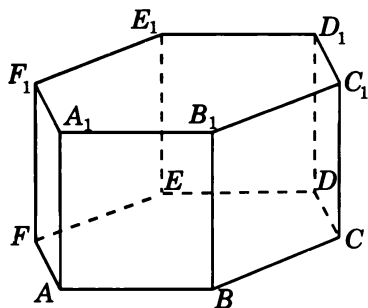
5. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , проходящее через вершины  $B$ ,  $C$  и середину ребра  $SA$ . Все ребра пирамиды равны  $1$ . Найдите его площадь.



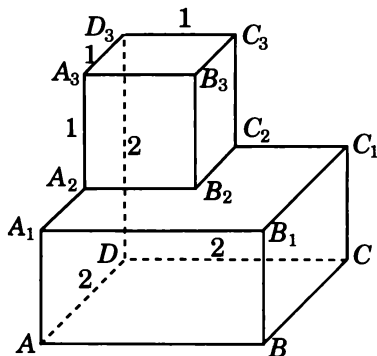
6. Изобразите сечение правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , проходящее через вершины  $B$ ,  $B_1$  и середину ребра  $AC$ . Все ребра призмы равны  $1$ . Найдите его площадь.



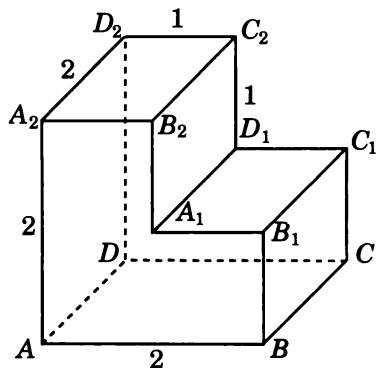
7. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , проходящее через вершины  $B$ ,  $D$  и  $E_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



8. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.



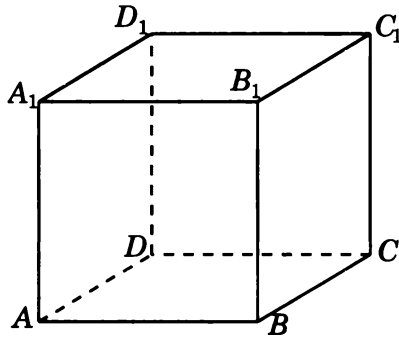
9. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A$ ,  $C$  и  $A_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.



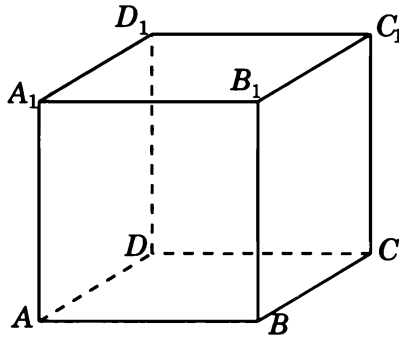


## Диагностическая работа 4

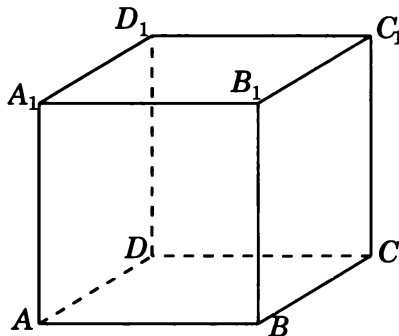
1. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершины  $B, C, D_1$ . Найдите его площадь.



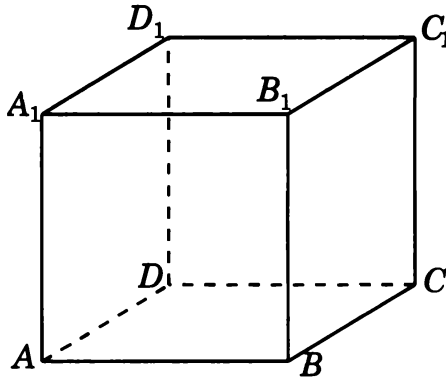
2. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AD, B_1C_1$  и точку на ребре  $BC$ , отстоящую от вершины  $B$  на  $0,25$ . Найдите его площадь.



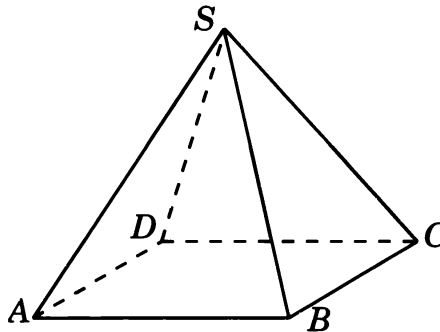
3. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через середины ребер  $AB, BC, CC_1$ . Найдите его площадь.



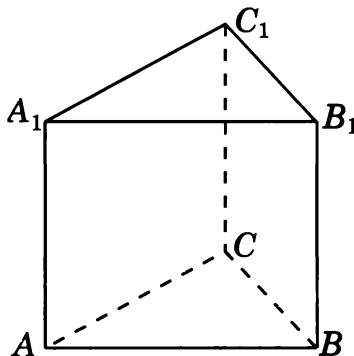
4. Изобразите сечение единичного куба  $A...D_1$ , проходящее через вершину  $B_1$  и середины ребер  $AD$ ,  $CD$ . Найдите его площадь.



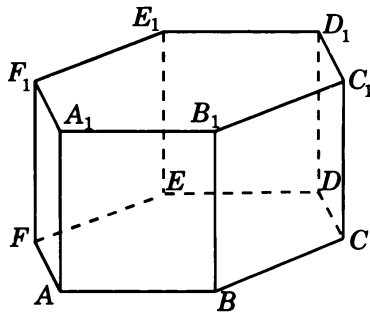
5. Изобразите сечение правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , проходящее через середины ребер  $AD$ ,  $BC$  и  $SD$ . Все ребра пирамиды равны 1. Найдите его площадь.



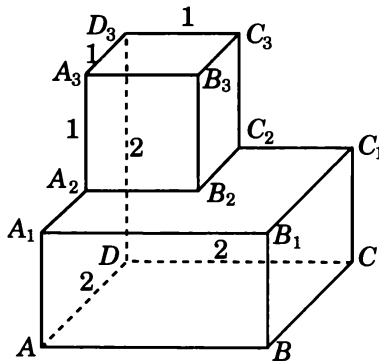
6. Изобразите сечение правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , проходящее через вершины  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $A_1C_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



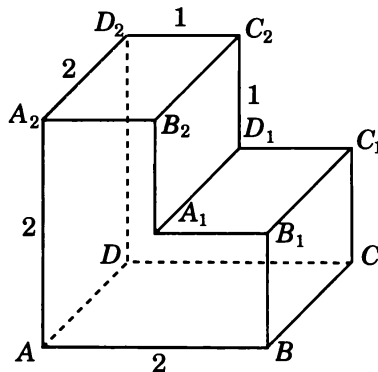
7. Изобразите сечение правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , проходящее через вершины  $C, F$  и  $E_1$ . Все ребра призмы равны 1. Найдите его площадь.



8. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A, A_1$  и  $C_3$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найти его площадь.



9. Изобразите сечение многогранника, изображенного на рисунке, проходящее через вершины  $A, A_1$  и  $C_2$ . Все двугранные углы многогранника прямые. Найдите его площадь.



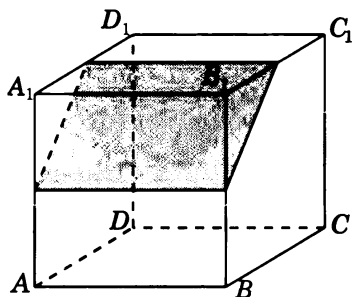
# Ответы и решения

## Диагностическая работа 1

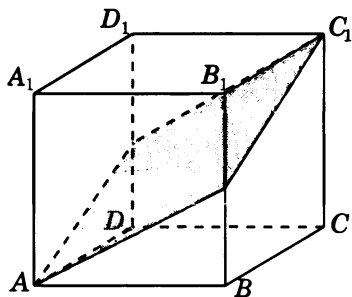
1. 20. 2. 10. 3. 0,25. 4. 0,5. 5. 0,5. 6. 0,5. 7. 2. 8. 2. 9. 3.

## Диагностическая работа 2

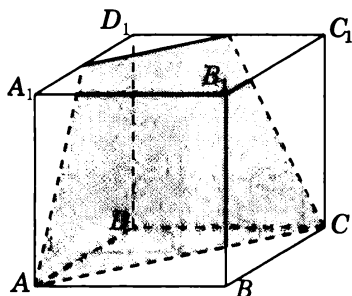
1. Сечением является прямоугольник, площадь которого равна  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



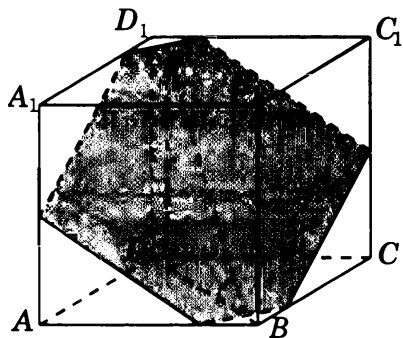
2. Сечением является ромб, площадь которого равна  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .



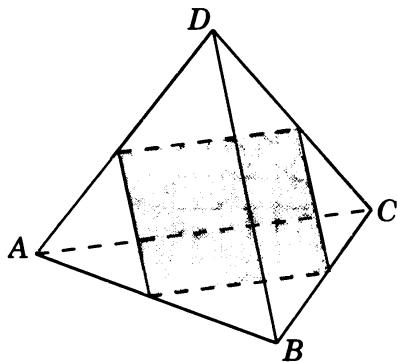
3. Сечением является трапеция, площадь которой равна  $1\frac{1}{8}$ .



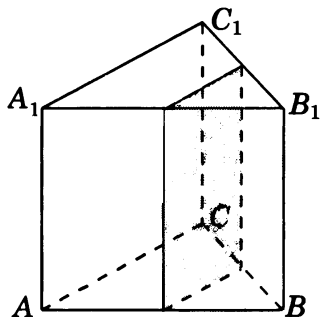
4. Сечением является шестиугольник. Площадь его ортогональной проекции на плоскость  $ABC$  равна  $\frac{15}{16}$ , косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$  равен  $\frac{3}{\sqrt{17}}$ . Площадь сечения равна  $\frac{5\sqrt{17}}{16}$ .



5. Сечением является прямоугольник, площадь которого равна 0,25.



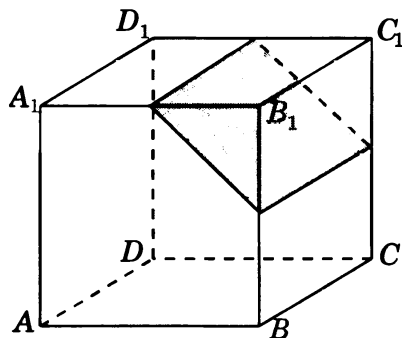
6. Сечением является прямоугольник, площадь которого равна 0,5.



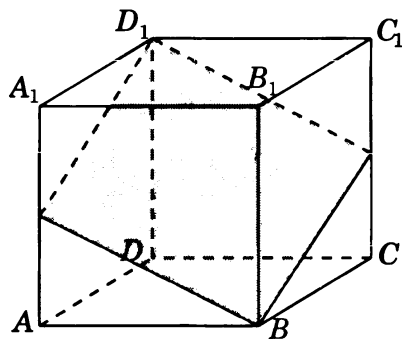


## Тренировочная работа 1

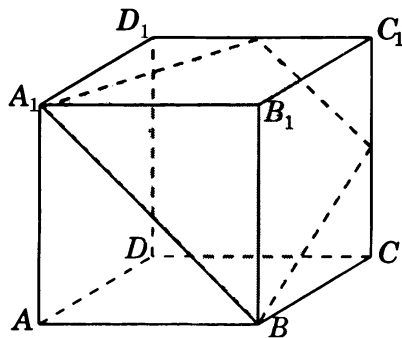
1. Ответ.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



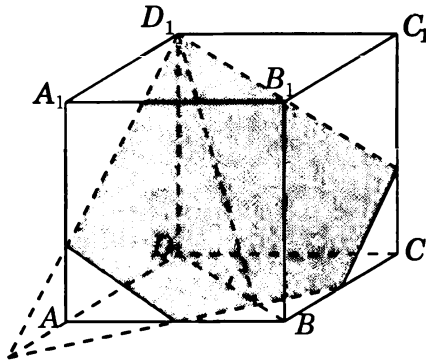
2. Ответ.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .



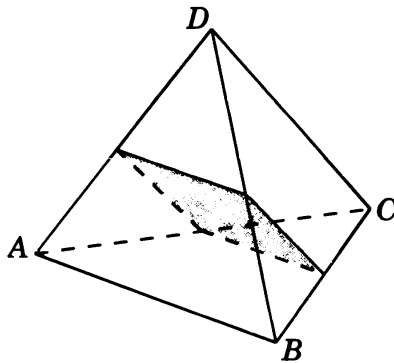
3. Ответ.  $1\frac{1}{8}$ .



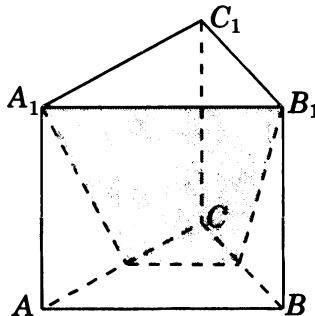
4. Ответ.  $\frac{7\sqrt{17}}{24}$ .



5. Ответ. 0,25.

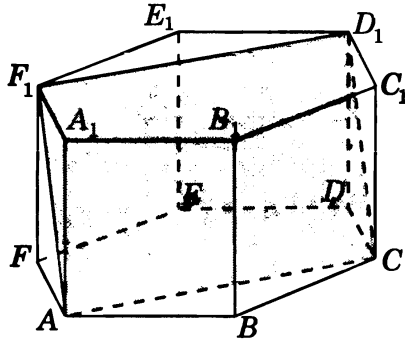


6. Ответ.  $\frac{3\sqrt{19}}{16}$ .

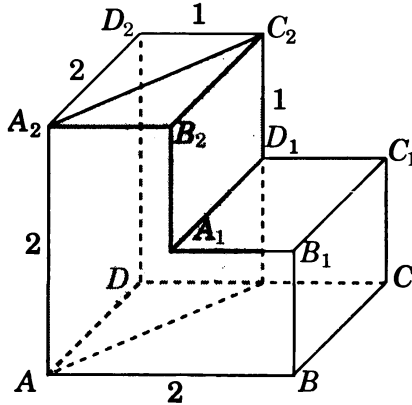




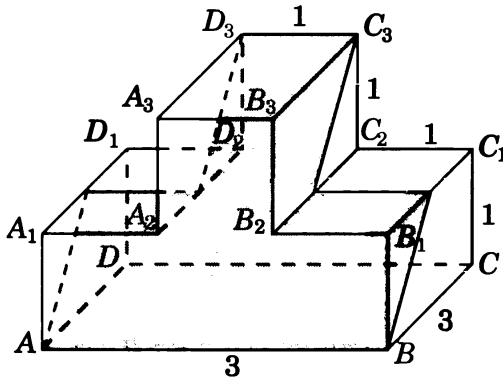
7. Ответ.  $\sqrt{6}$ .



8. Ответ.  $2\sqrt{5}$ .

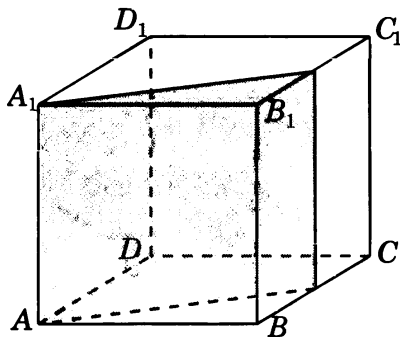


9. Ответ.  $2\sqrt{13}$ .

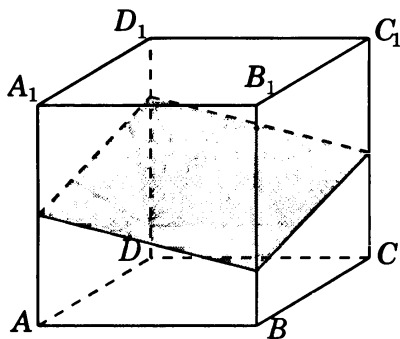


Тренировочная работа 2

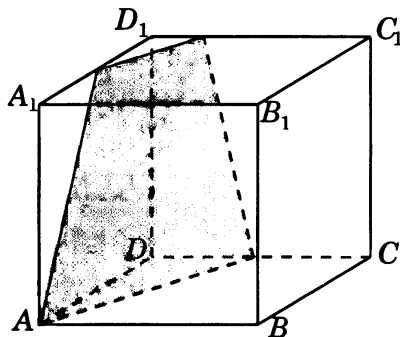
1. Ответ.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .



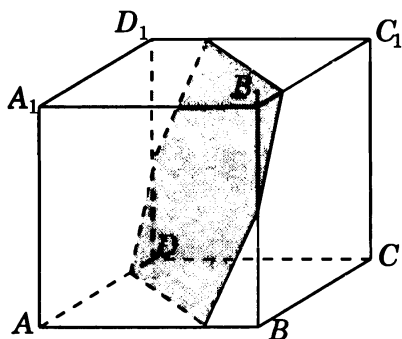
2. Ответ.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .



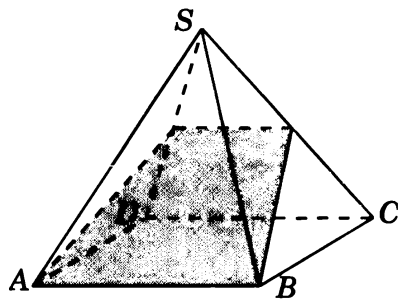
3. Ответ.  $\frac{3\sqrt{21}}{16}$ .



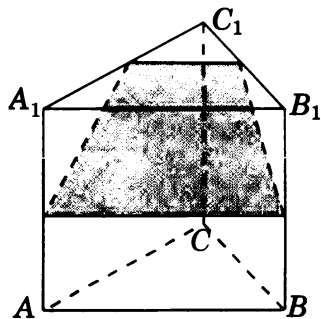
4. Ответ.  $1\frac{5}{16}$ .



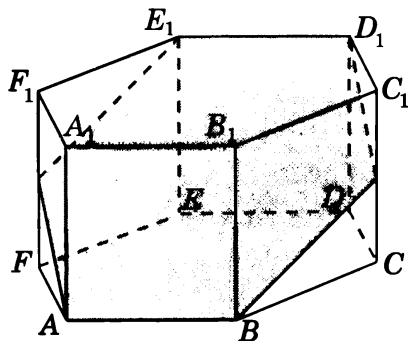
5. Ответ.  $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ .



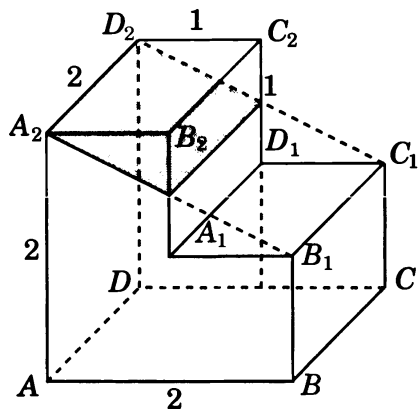
6. Ответ.  $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ .



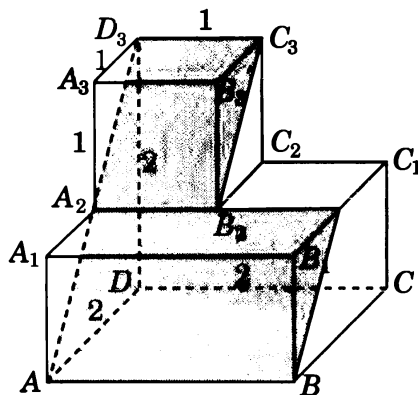
7. Ответ. 3.



8. Ответ.  $\sqrt{5}$ .

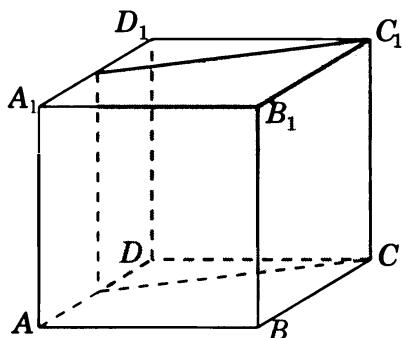


9. Ответ.  $3\sqrt{2}$ .

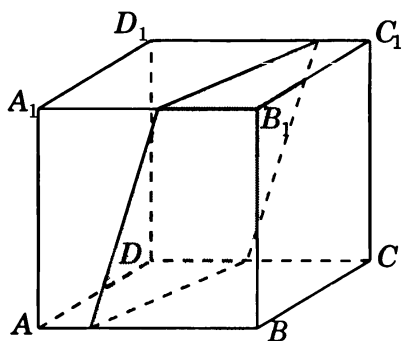


### Диагностическая работа 3

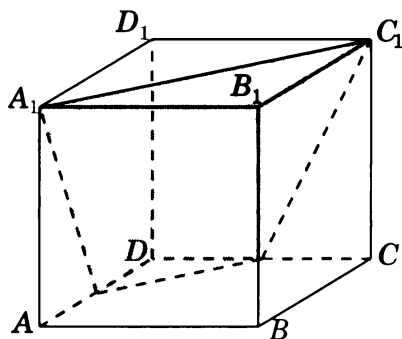
1. Ответ.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .



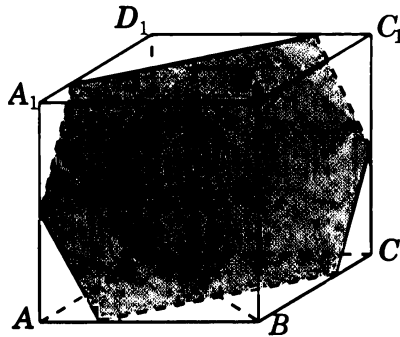
2. Ответ.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .



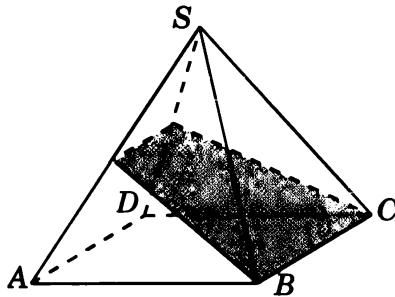
3. Ответ.  $1\frac{1}{8}$ .



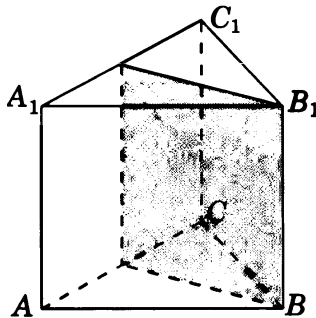
4. Ответ.  $1\frac{5}{16}$ .



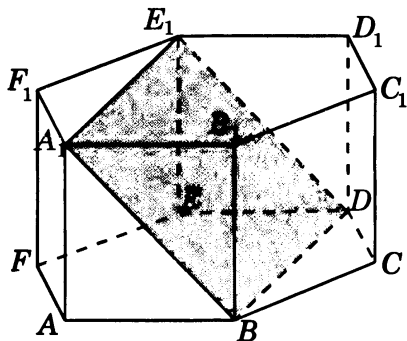
5. Ответ.  $\frac{3\sqrt{11}}{16}$ .



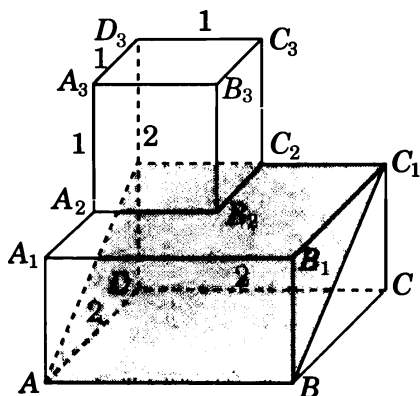
6. Ответ.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



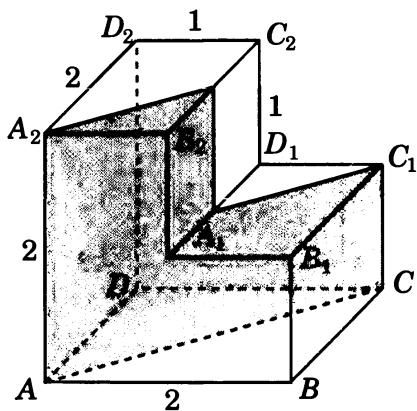
7. Ответ.  $\sqrt{6}$ .



8. Ответ.  $2\sqrt{5}$ .

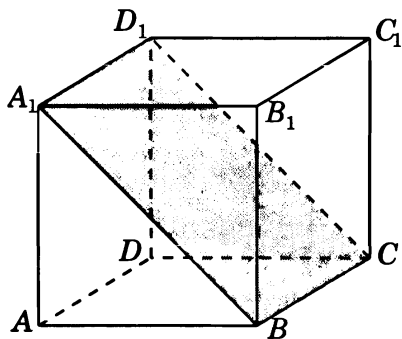


9. Ответ.  $3\sqrt{2}$ .

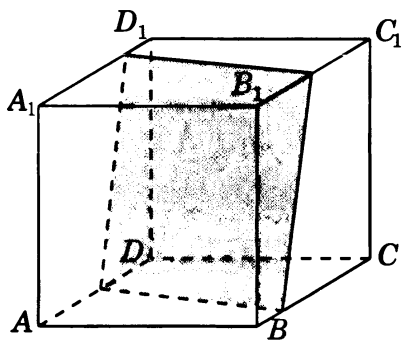


**Диагностическая работа 4**

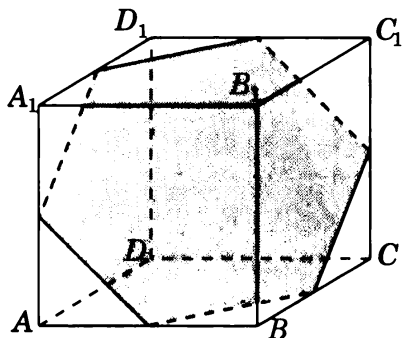
1. Ответ.  $\sqrt{2}$ .



2. Ответ.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

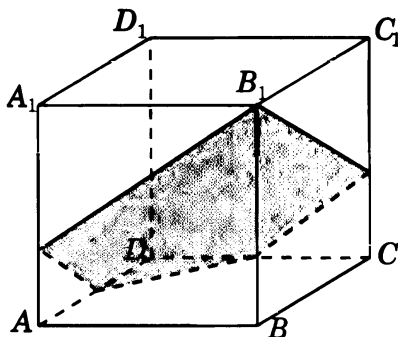


3. Ответ.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

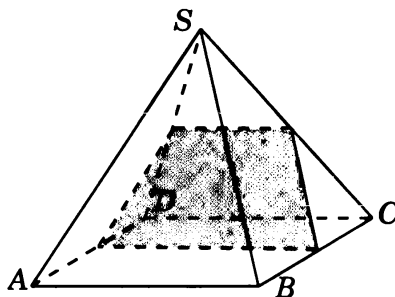




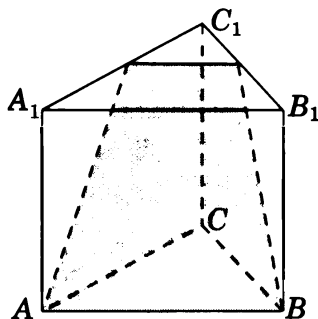
4. Ответ.  $\frac{7\sqrt{17}}{24}$ .



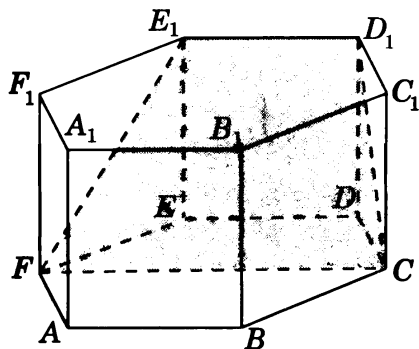
5. Ответ.  $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ .



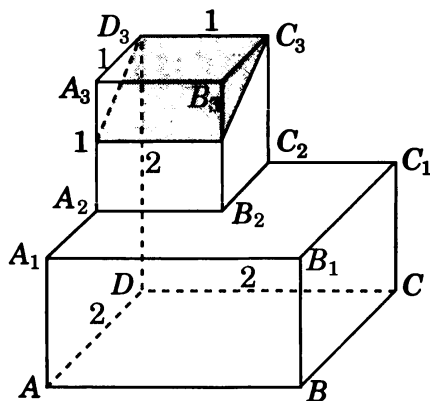
6. Ответ.  $\frac{3\sqrt{19}}{16}$ .



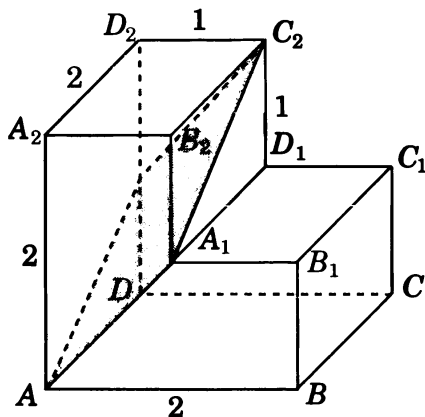
7. Ответ.  $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ .



8. Ответ.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .



9. Ответ. 3.





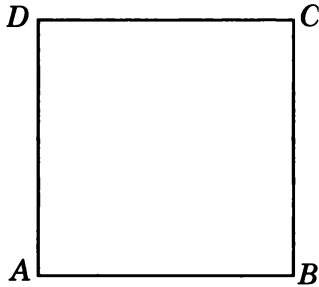
# ПРИЛОЖЕНИЕ 2

## ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

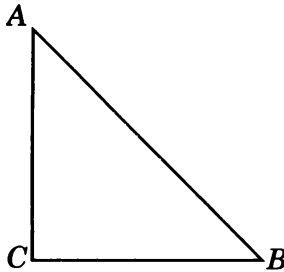


# Диагностическая работа 1

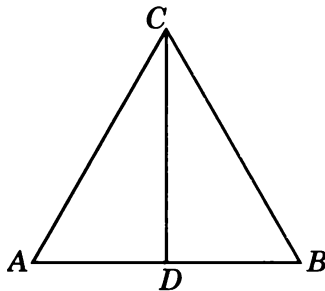
1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением единичного квадрата  $ABCD$  вокруг прямой  $AD$ .



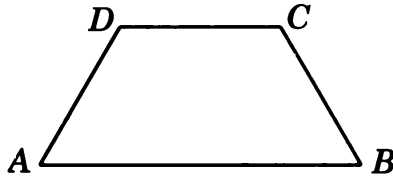
2. Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетами  $AC = BC = 1$  вокруг прямой  $AC$ .



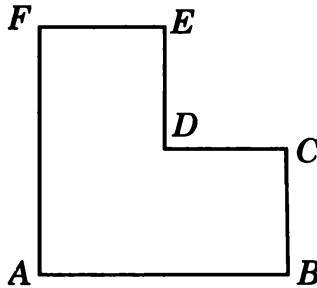
3. Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной 1 вокруг прямой, содержащей биссектрису  $CD$  этого треугольника.



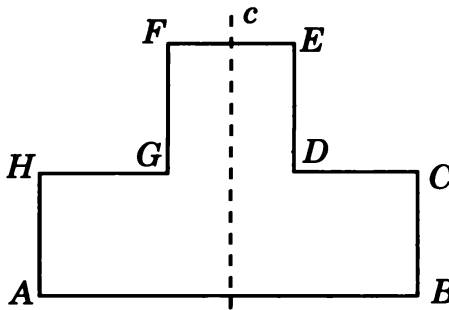
4. Найдите объем тела вращения равнобедренной трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AD$  и  $BC$ , равными 1, и основаниями  $AB$  и  $CD$ , равными соответственно 2 и 1, вокруг прямой  $AB$ .



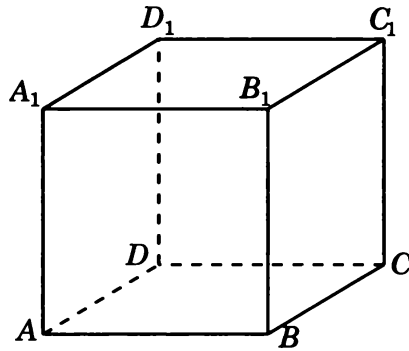
5. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEF$ , изображенного на рисунке и составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой  $AF$ .



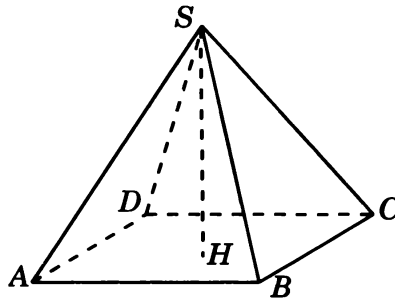
6. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEFGH$ , изображенного на рисунке и составленного из четырех единичных квадратов, вокруг прямой  $c$ , проходящей через середины сторон  $AB$  и  $EF$ .



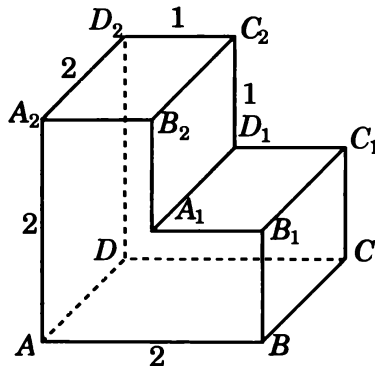
7. Найдите объем тела вращения единичного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  вокруг прямой  $AA_1$ .



8. Найдите объем тела вращения правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей высоту  $SH$  этой пирамиды.



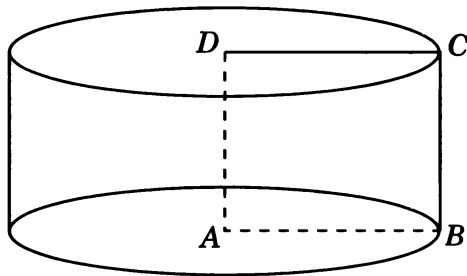
9. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке, прямые. Найдите объем тела вращения этого многогранника вокруг прямой  $AD$ .



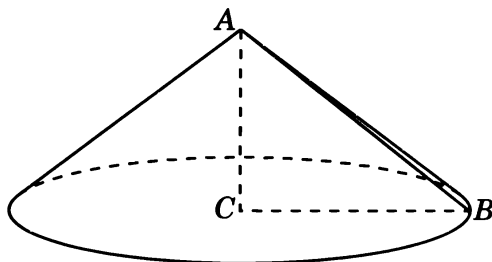


# Решения задач диагностической работы 1

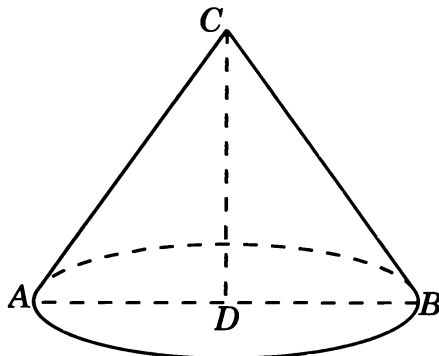
1. Искомый цилиндр изображен на рисунке. Радиус его основания и образующая равны 1. Площадь боковой поверхности этого цилиндра равна  $2\pi$ .



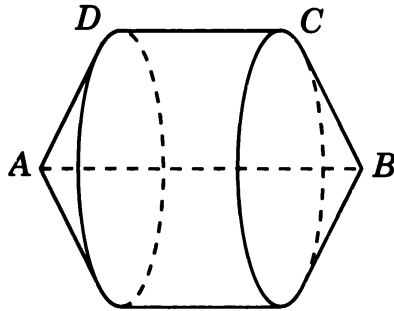
2. Искомый конус изображен на рисунке. Радиус его основания равен 1, а образующая равна  $\sqrt{2}$ . Площадь боковой поверхности этого конуса равна  $\sqrt{2}\pi$ .



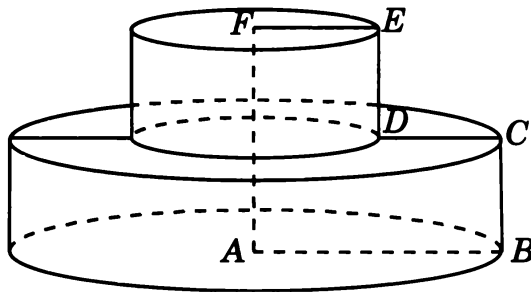
3. Искомый конус изображен на рисунке. Радиус его основания равен 0,5, а образующая равна 1. Площадь полной поверхности этого конуса равна  $\frac{3\pi}{4}$ .



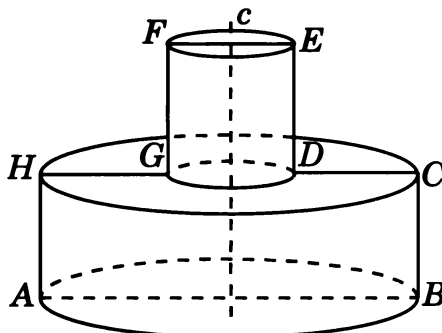
4. Искомым телом вращения является цилиндр с радиусом основания  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и высотой 1, на основаниях которого построены конусы высотой 0,5. Его объем равен  $\pi$ .



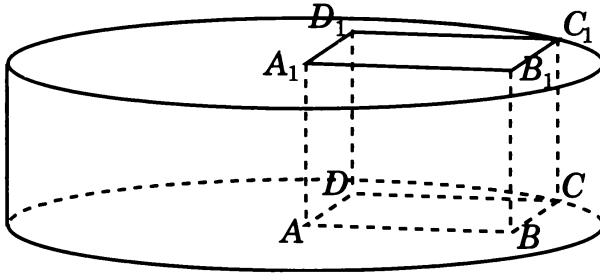
5. Искомое тело вращения состоит из двух цилиндров с основаниями радиусов 2 и 1, высотой 1. Его объем равен  $5\pi$ .



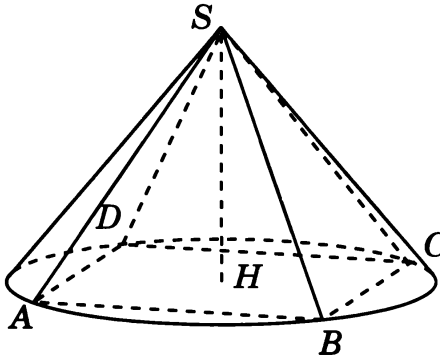
6. Искомое тело вращения составлено из двух цилиндров высотой 1 и радиусами оснований 1,5 и 0,5. Его объем равен  $2,5\pi$ .



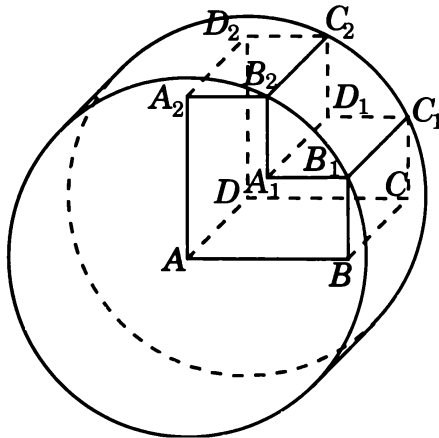
7. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен  $\sqrt{2}$ , а высота равна 1. Его объем равен  $2\pi$ .



8. Искомым телом вращения является конус, радиус основания и высота которого равны  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ .

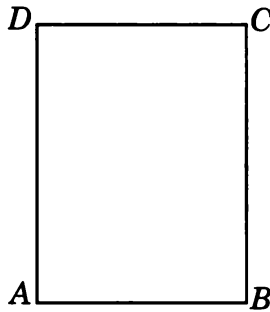


9. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен  $\sqrt{5}$ , а высота равна 2. Его объем равен  $10\pi$ .

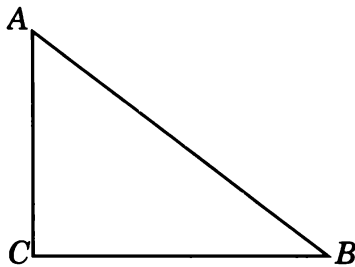


# Тренировочная работа 1

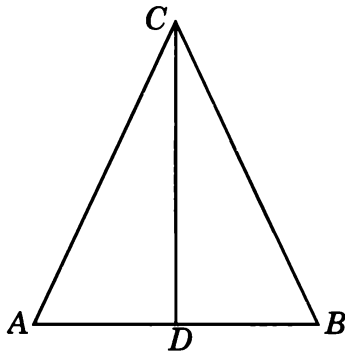
1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника  $ABCD$  со сторонами  $AB = 3$ ,  $BC = 4$  вокруг прямой  $AD$ .



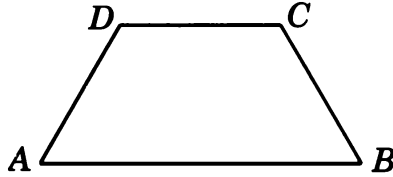
2. Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетами  $AC = 3$ ,  $BC = 4$  вокруг прямой  $AC$ .



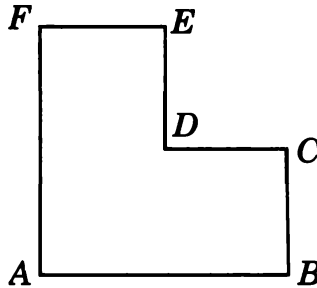
3. Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AB = 2$  и боковой стороной, равной 3, вокруг прямой, содержащей биссектрису  $CD$  этого треугольника.



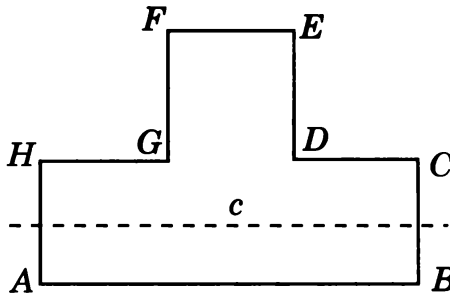
4. Найдите объем тела вращения равнобедренной трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AD$  и  $BC$ , равными 1, и основаниями  $AB$  и  $CD$ , равными соответственно 2 и 1, вокруг прямой  $CD$ .



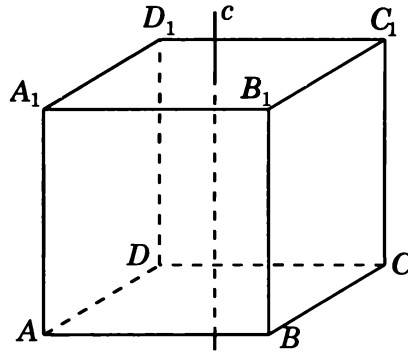
5. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEF$ , изображенного на рисунке и составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой  $DE$ .



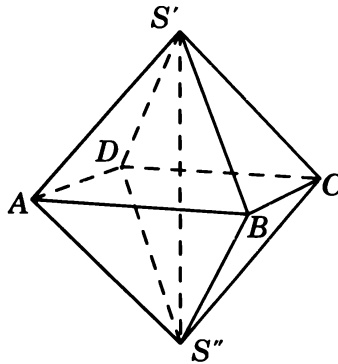
6. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEFGH$ , изображенного на рисунке и составленного из четырех единичных квадратов, вокруг прямой  $c$ , проходящей через середины сторон  $AH$  и  $BC$ .



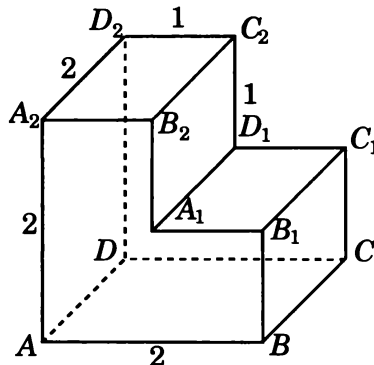
7. Найдите объем тела вращения единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вокруг прямой  $c$ , проходящей через центры граней  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .



8. Найдите объем тела вращения единичного правильного октаэдра  $S' ABCDS''$  вокруг прямой  $S'S''$ .

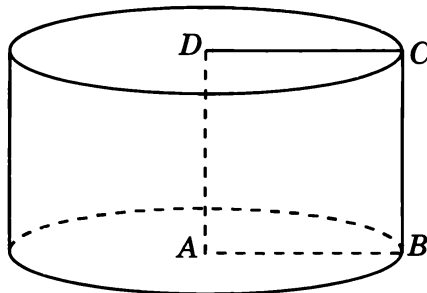


9. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке, прямые. Найдите объем тела вращения этого многогранника вокруг прямой  $CD$ .

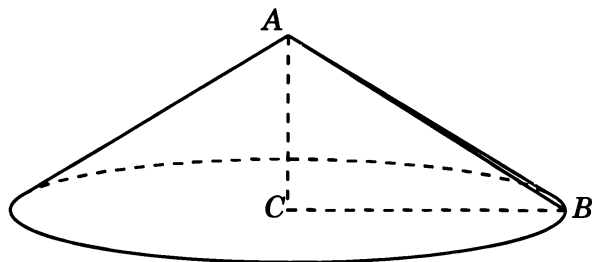


# Решения задач тренировочной работы 1

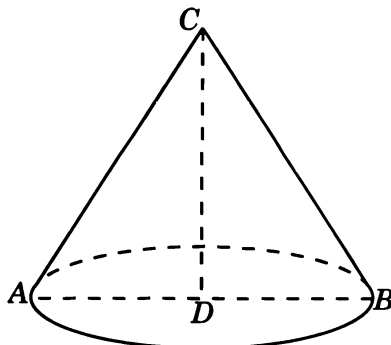
1. Искомый цилиндр изображен на рисунке. Радиус его основания равен 3, а образующая равна 4. Площадь боковой поверхности этого цилиндра равна  $24\pi$ .



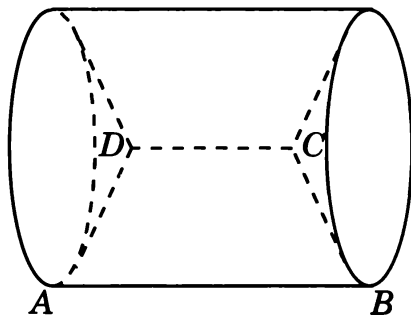
2. Искомый конус изображен на рисунке. Радиус его основания равен 4, а образующая равна 5. Площадь боковой поверхности этого конуса равна  $20\pi$ .



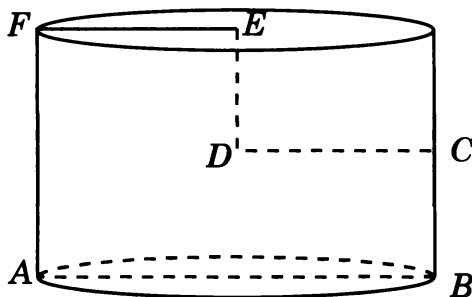
3. Искомый конус изображен на рисунке. Радиус его основания равен 1, а образующая равна 3. Площадь полной поверхности этого конуса равна  $4\pi$ .



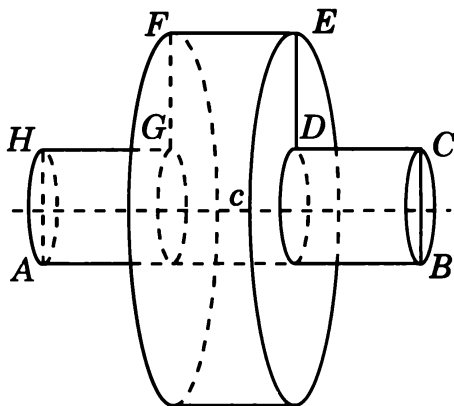
4. Искомым телом вращения является цилиндр с радиусом основания  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и высотой 2, на основаниях которого вырезаны конусы высотой 0,5. Его объем равен  $1,25\pi$ .



5. Искомое тело вращения является цилиндром с основанием радиуса 1 и высотой 2. Его объем равен  $2\pi$ .

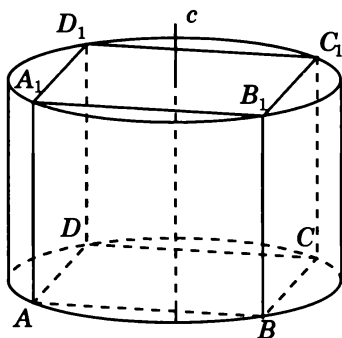


6. Искомое тело вращения является цилиндром с основанием радиуса 1,5 и высотой 1, на основании которого поставлены два цилиндра с основаниями радиуса 0,5 и высотой 1. Его объем равен  $2,75\pi$ .

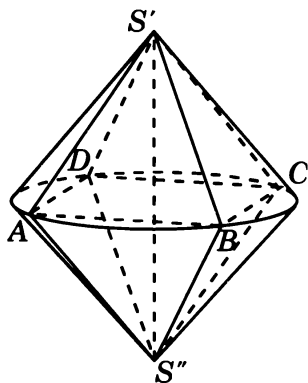




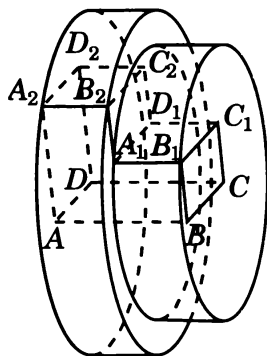
7. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , а высота равна 1. Его объем равен  $0,5\pi$ .



8. Искомое тело вращения состоит из двух конусов с общим основанием радиуса  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  и высотами, равными  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ .

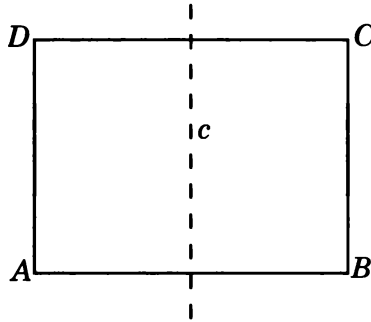


9. Искомое тело вращения составлено из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны  $2\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ , а высоты равны 1. Его объем равен  $13\pi$ .

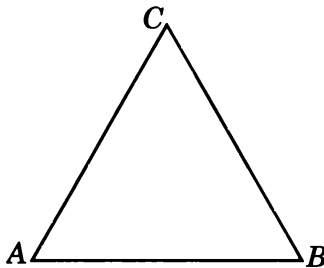


## Тренировочная работа 2

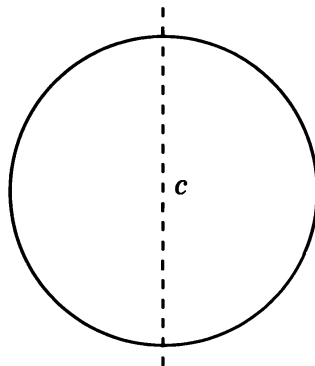
1. Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 3$  вокруг прямой, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $CD$ .



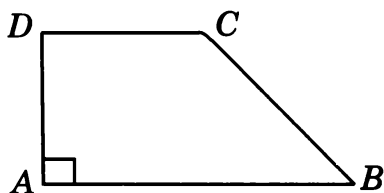
2. Найдите площадь поверхности вращения равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной 1 вокруг прямой  $AB$ .



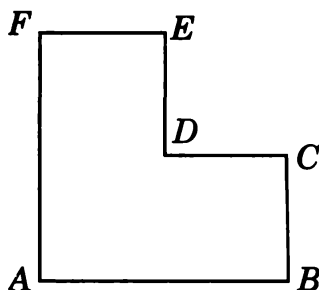
3. Найдите площадь поверхности вращения круга радиуса 2 вокруг прямой, содержащей его диаметр.



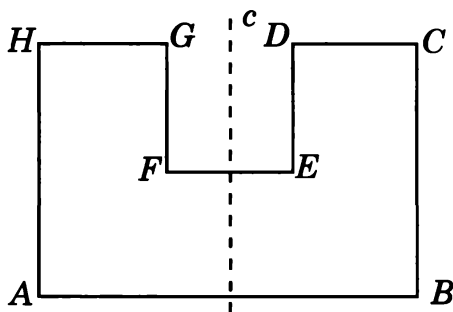
4. Найдите объем тела вращения прямоугольной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ , равными соответственно 2 и 1, и меньшей боковой стороной, равной 1, вокруг прямой  $AB$ .



5. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEF$ , изображенного на рисунке и составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой  $BC$ .



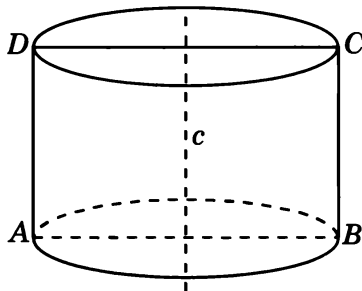
6. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEFGH$ , изображенного на рисунке и составленного из пяти единичных квадратов, вокруг прямой  $c$ , проходящей через середины сторон  $AB$  и  $EF$ .



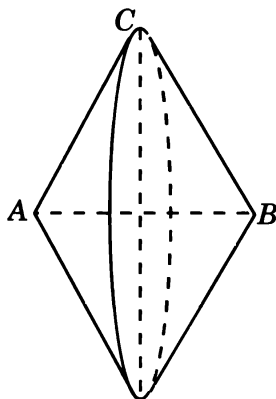


## Решения задач тренировочной работы 2

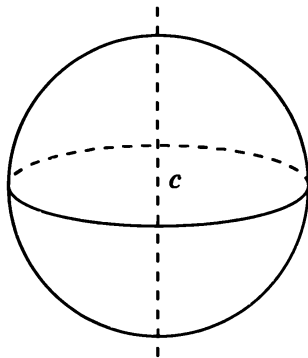
1. Искомым телом является цилиндр, радиус основания которого равен 2, а образующая равна 3. Его площадь поверхности равна  $20\pi$ .



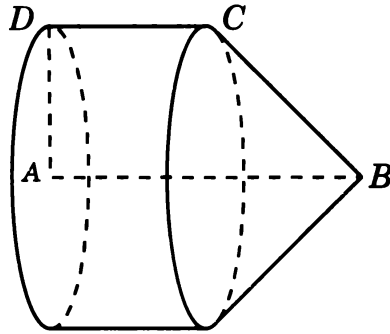
2. Искомое тело вращения составлено из двух конусов с общим основанием, радиус которого равен  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , с высотами по 0,5. Его площадь поверхности равна  $\sqrt{3}\pi$ .



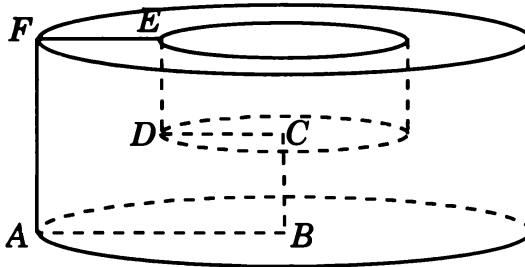
3. Искомым телом вращения является шар радиуса 2. Площадь его поверхности равна  $16\pi$ .



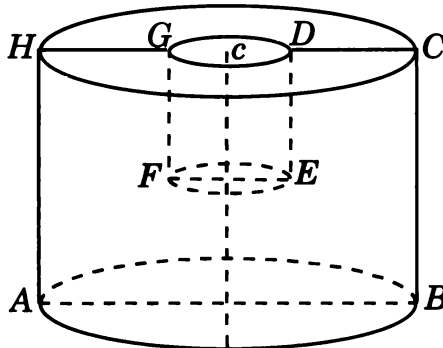
4. Искомым телом вращения является цилиндр с радиусом основания и высотой, равными 1, на основании которого построено конус высотой 1. Его объем равен  $\frac{4\pi}{3}$ .



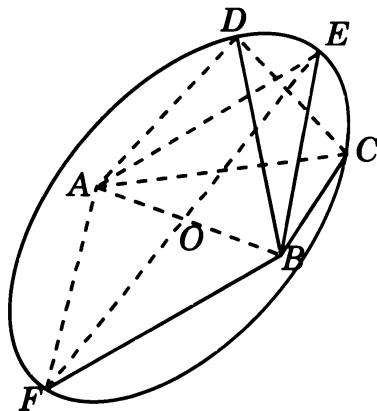
5. Искомое тело вращения является цилиндром с основанием радиуса 2 и высотой 2, из которого вырезан цилиндр с основанием радиуса 1 и высотой 1. Его объем равен  $7\pi$ .



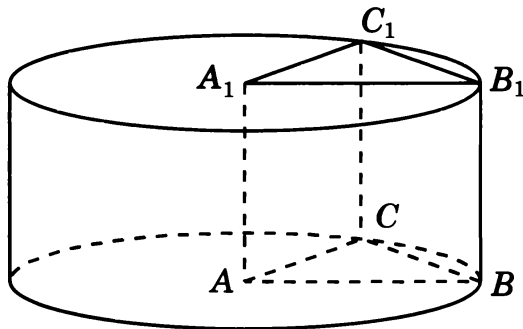
6. Искомое тело вращения является цилиндром с радиусом основания 1,5 и высотой 2, из которого вырезан цилиндр с радиусом основания 0,5 и высотой 1. Его объем равен  $4,25\pi$ .



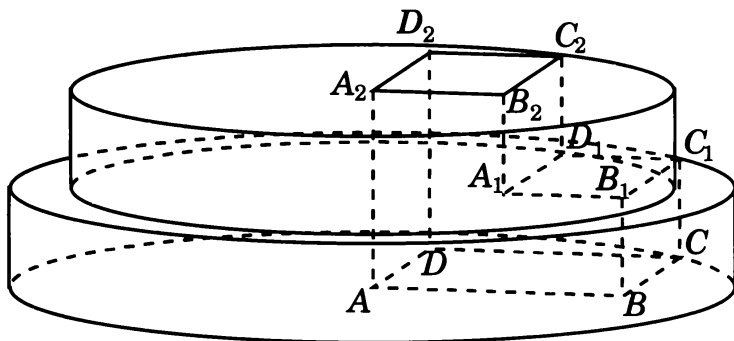
7. Искомое тело вращения составлено из двух конусов с общим основанием радиуса  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и высотой 0,5. Его объем равен  $0,25\pi$ .



8. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1. Его объем равен  $\pi$ .

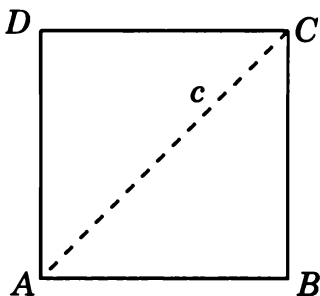


9. Искомое тело вращения составлено из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны  $2\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ , а высоты равны 1. Его объем равен  $13\pi$ .

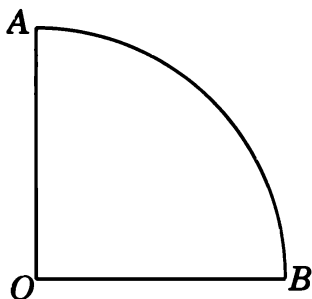


## Диагностическая работа 2

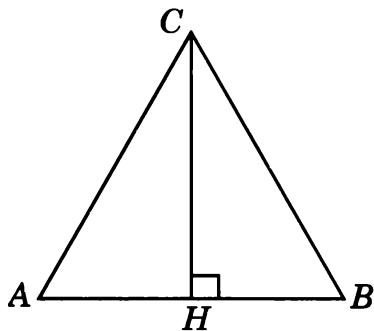
1. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата  $ABCD$  вокруг прямой  $AC$ .



2. Найдите площадь поверхности вращения четверти круга радиуса 2 вокруг прямой  $OA$ .

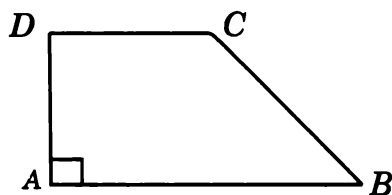


3. Найдите объем тела вращения равностороннего треугольника  $ABC$  со сторонами, равными 1, вокруг прямой, содержащей высоту  $CH$  этого треугольника.

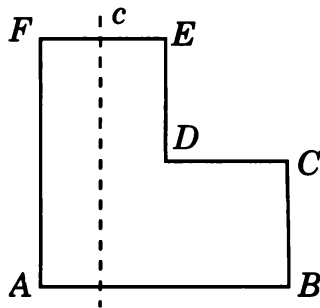




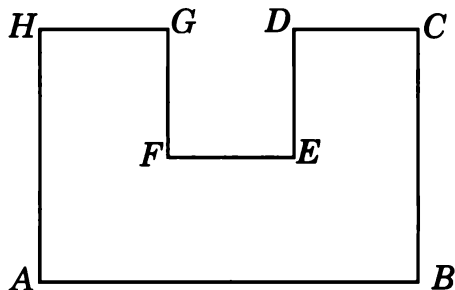
4. Найдите объем тела вращения прямоугольной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ , равными соответственно 2 и 1, и меньшей боковой стороной, равной 1, вокруг прямой  $AD$ .



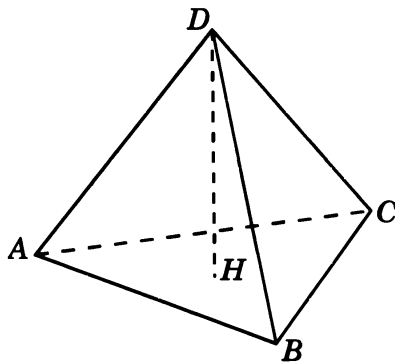
5. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEF$ , изображенного на рисунке и составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой  $c$ , проходящей через середину стороны  $FE$  и параллельной прямой  $AF$ .



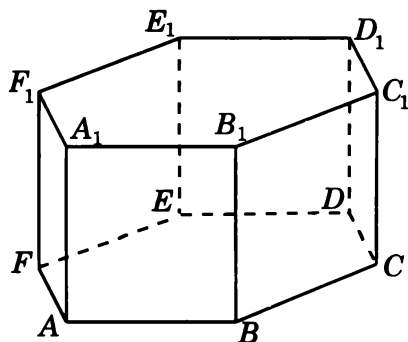
6. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEFGH$ , изображенного на рисунке и составленного из пяти единичных квадратов, вокруг прямой  $AB$ .



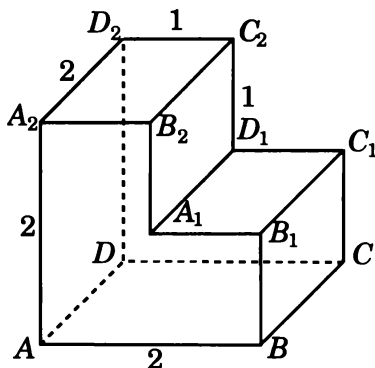
7. Найдите объем тела вращения единичного тетраэдра  $ABCD$  вокруг прямой  $s$ , содержащей высоту  $DH$  этого тетраэдра.



8. Найдите объем тела вращения правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра которой равны 1, вокруг прямой  $AA_1$ .

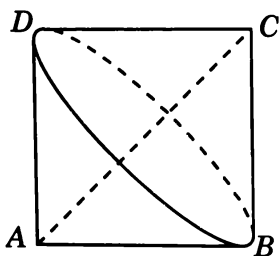


9. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке, прямые. Найдите объем тела вращения этого многогранника вокруг прямой  $DD_2$ .

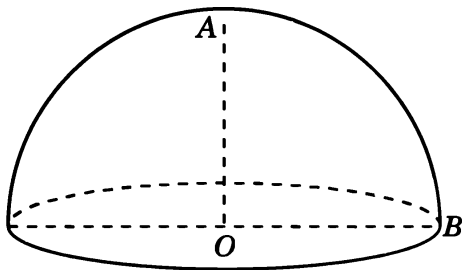


## Решения задач диагностической работы 2

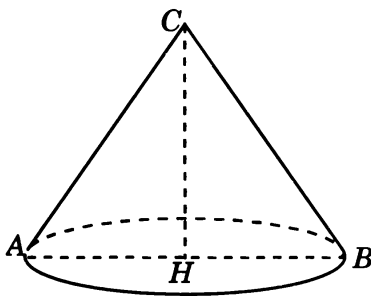
1. Искомым телом вращения является объединение двух конусов, радиус основания которых и высоты равны  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Его площадь поверхности равна  $\sqrt{2}\pi$ .



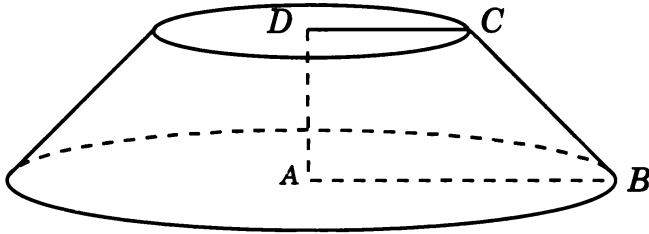
2. Искомым телом является полушар радиуса 2. Площадь его поверхности равна  $12\pi$ .



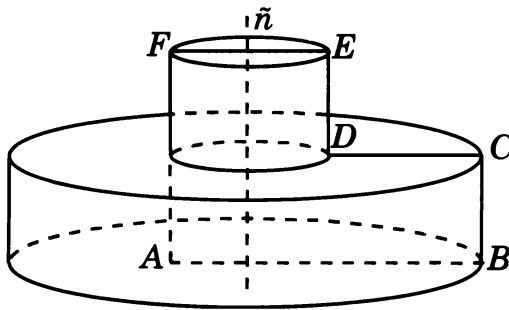
3. Искомым телом вращения является конус, радиус основания которого равен 0,5, а высота —  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ .



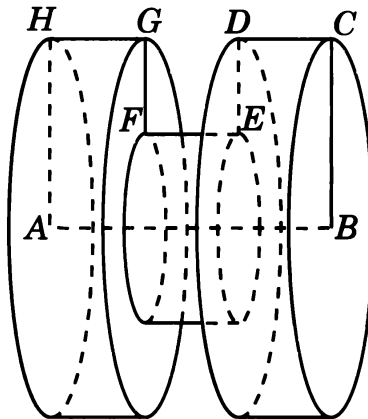
4. Искомым телом вращения является усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, а высота равна 1. Его объем равен  $\frac{7\pi}{3}$ .



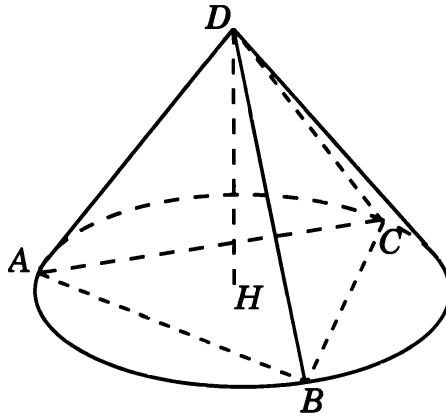
5. Искомое тело вращения состоит из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны 1,5 и 0,5, а высоты равны 1. Его объем равен  $2,5\pi$ .



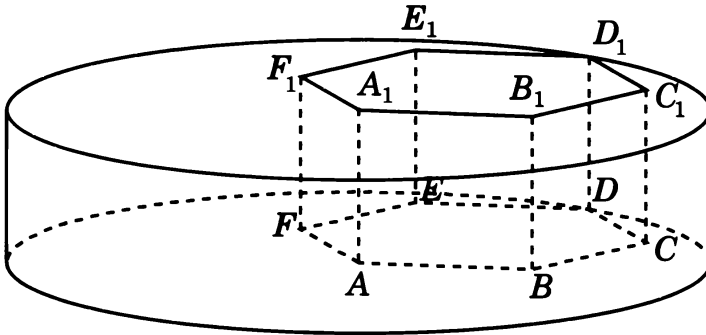
6. Искомое тело вращения состоит из трех цилиндров с основаниями радиусов 2, 1, 2 и высотами, равными 1. Его объем равен  $9\pi$ .



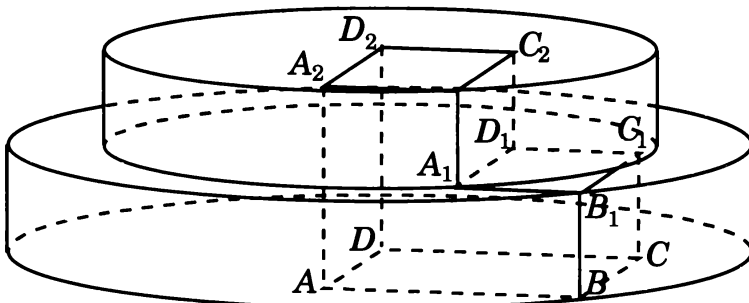
7. Искомым телом вращения является конус, радиус основания которого равен  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , а высота равна  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ .



8. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен 2, а высота равна 1. Его объем равен  $4\pi$ .

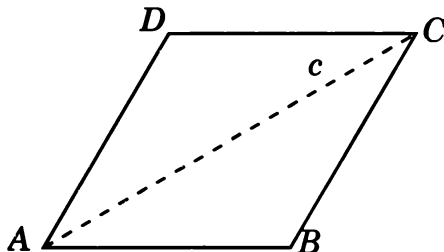


9. Искомое тело вращения составлено из двух цилиндров, радиусы оснований которых равны  $2\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ , а высоты равны 1. Его объем равен  $13\pi$ .

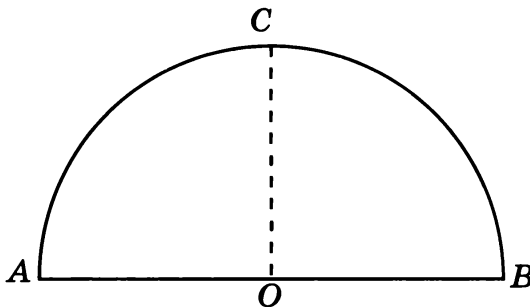


### Диагностическая работа 3

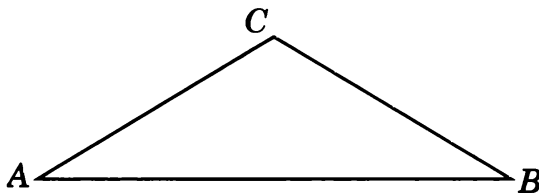
1. Найдите площадь поверхности тела вращения ромба  $ABCD$  со сторонами, равными 1, и острым углом  $60^\circ$ , вокруг прямой  $AC$ .



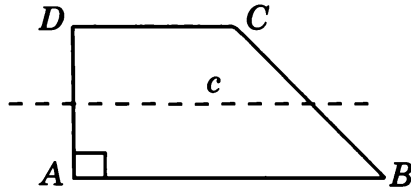
2. Найдите площадь поверхности вращения полукруга радиуса 3 вокруг прямой  $OC$ , перпендикулярной диаметру  $AB$ .



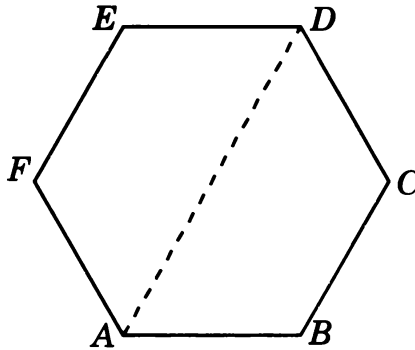
3. В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AC = BC = 1$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Найдите объем тела вращения этого треугольника вокруг прямой  $AB$ .



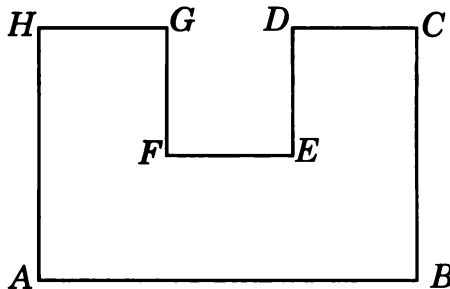
4. Найдите объем тела вращения прямоугольной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ , равными соответственно 2 и 1, и меньшей боковой стороной, равной 1, вокруг прямой  $s$ , содержащей среднюю линию этой трапеции.



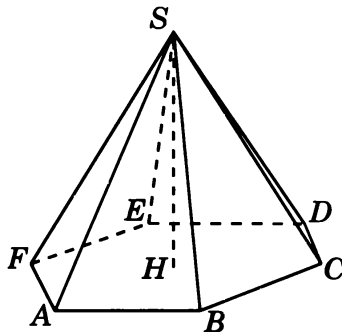
5. Найдите объем тела вращения правильного шестиугольника  $ABCDEF$  со стороной 1 вокруг прямой  $AD$ .



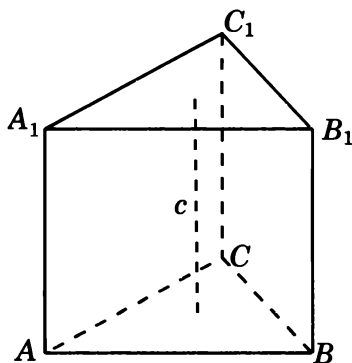
6. Найдите объем тела вращения многоугольника  $ABCDEFGH$ , изображенного на рисунке и составленного из пяти единичных квадратов, вокруг прямой  $EF$ .



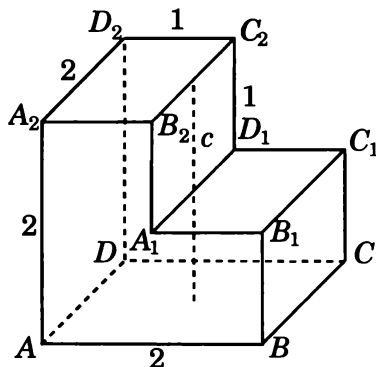
7. Найдите объем тела вращения правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, вокруг прямой  $s$ , содержащей высоту  $SH$  этой пирамиды.



8. Найдите объем тела вращения правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, вокруг прямой  $s$ , проходящей через центры граней  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .



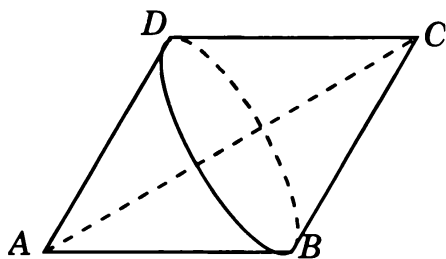
9. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке, прямые. Найдите объем тела вращения этого многогранника вокруг прямой  $s$ , проходящей через середины ребер  $A_1D_1$  и  $B_2C_2$ .



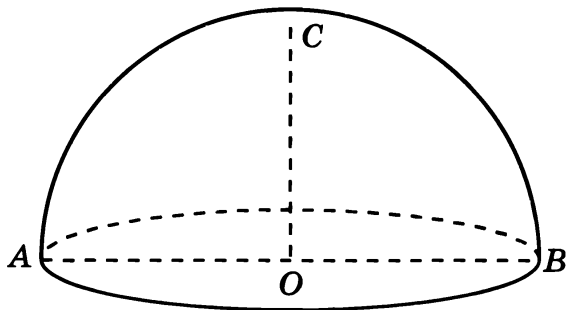


### Решения задач диагностической работы 3

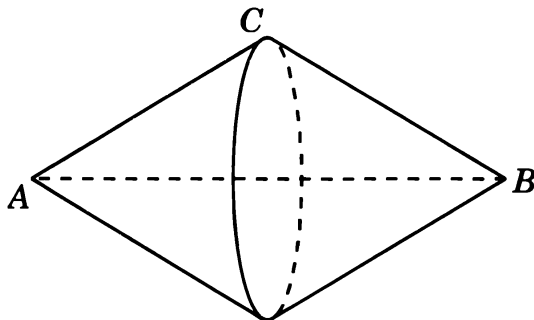
1. Искомым телом вращения является объединение двух конусов с общим основанием радиуса 0,5, высоты которых равны  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Его площадь поверхности равна  $\pi$ .



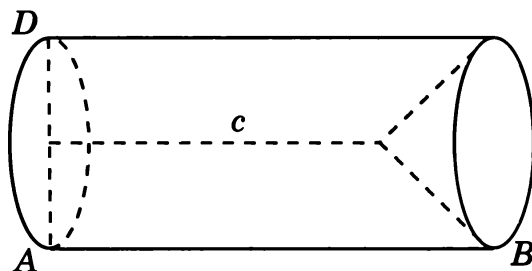
2. Искомым телом является полушар радиуса 3. Площадь его поверхности равна  $27\pi$ .



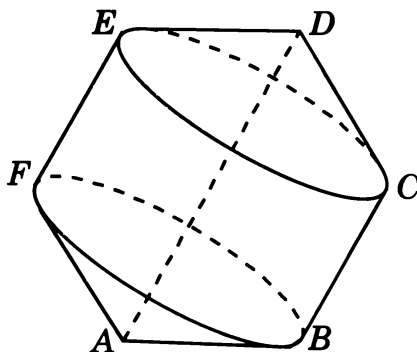
3. Искомое тело вращения составлено из двух конусов с общим основанием, радиус которого равен 0,5, а высоты равны  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ .



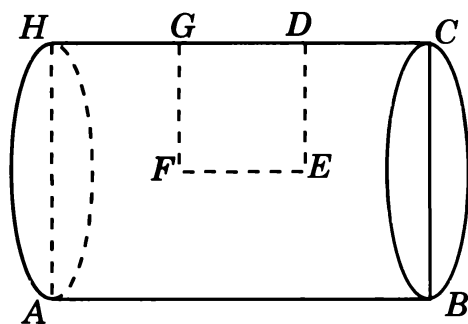
4. Искомым телом вращения является цилиндр с радиусом основания 0,5 и высотой 2, из которого вырезан конус, радиус основания и высота которого равны 0,5. Его объем равен  $\frac{11\pi}{24}$ .



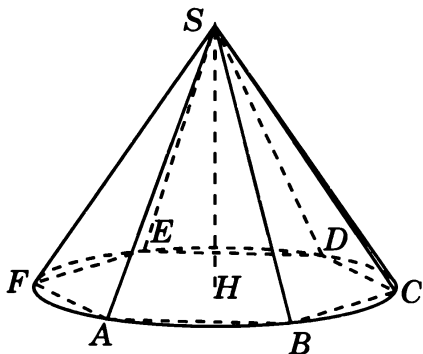
5. Искомое тело вращения состоит из цилиндра, радиус основания которого равен  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , а высота равна 1, и двух конусов с основаниями радиуса  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и высотой 0,5. Его объем равен  $\pi$ .



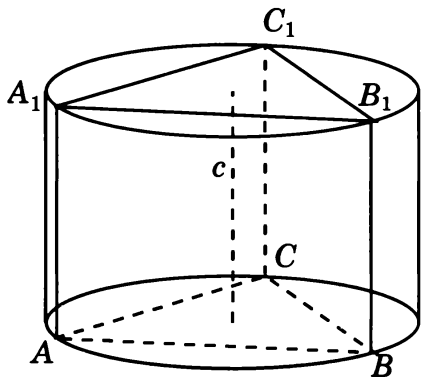
6. Искомое тело вращения является цилиндром с основанием радиуса 1 и высотой 3. Его объем равен  $3\pi$ .



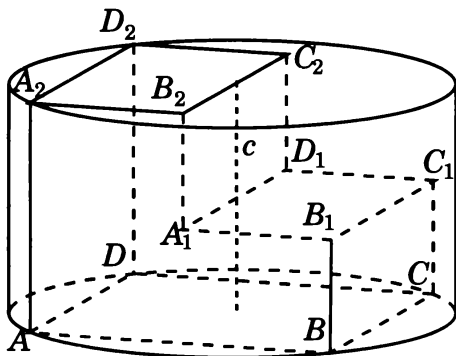
7. Искомым телом вращения является конус, радиус основания которого равен 1, а высота —  $\sqrt{3}$ . Его объем равен  $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ .



8. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , а высота равна 1. Его объем равен  $\frac{\pi}{3}$ .



9. Искомым телом вращения является цилиндр, радиус основания которого равен  $\sqrt{2}$ , а высота равна 2. Его объем равен  $4\pi$ .



# Содержание

Введение . . . . .	3
Диагностическая работа . . . . .	5
Решения задач 1.1—1.3 диагностической работы . . . . .	11
Тренировочная работа 1. Угол между прямыми . . . . .	14
Решения задач 2.1—2.3 диагностической работы . . . . .	17
Тренировочная работа 2. Угол между прямой и плоскостью . . . . .	19
Решения задач 3.1—3.3 диагностической работы . . . . .	22
Тренировочная работа 3. Угол между двумя плоскостями . . . . .	24
Решения задач 4.1—4.3 диагностической работы . . . . .	27
Тренировочная работа 4. Расстояние от точки до прямой . . . . .	29
Решения задач 5.1—5.3 диагностической работы . . . . .	32
Тренировочная работа 5. Расстояние от точки до плоскости . . . . .	35
Решения задач 6.1—6.3 диагностической работы . . . . .	38
Тренировочная работа 6. Расстояние между двумя прямыми . . . . .	40
Диагностическая работа 1 . . . . .	43
Диагностическая работа 2 . . . . .	49
Диагностическая работа 3 . . . . .	55
Ответы . . . . .	61
<b>Приложение 1. Сечения многогранников . . . . .</b>	<b>63</b>
Диагностическая работа 1 . . . . .	65
Диагностическая работа 2 . . . . .	68
Тренировочная работа 1 . . . . .	71
Тренировочная работа 2 . . . . .	74
Диагностическая работа 3 . . . . .	77
Диагностическая работа 4 . . . . .	80
Ответы и решения . . . . .	83
<b>Приложение 2. Тела и поверхности вращения . . . . .</b>	<b>99</b>
Диагностическая работа 1 . . . . .	101
Решения задач диагностической работы 1 . . . . .	104
Тренировочная работа 1 . . . . .	107
Решения задач тренировочной работы 1 . . . . .	110

---

Тренировочная работа 2 . . . . .	113
Решения задач тренировочной работы 2 . . . . .	116
Диагностическая работа 2 . . . . .	119
Решения задач диагностической работы 2 . . . . .	122
Диагностическая работа 3 . . . . .	125
Решения задач диагностической работы 3 . . . . .	128

*Смирнов Владимир Алексеевич*

ЕГЭ 2011. МАТЕМАТИКА. ЗАДАЧА С2. ГЕОМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Яценко

Подписано в печать 4.08.2010 г. Формат 60 × 90  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 8,5. Доп. тираж 10 000 экз. Заказ № 1183.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru)

---