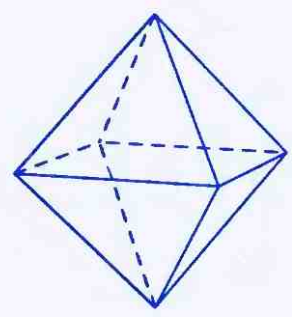
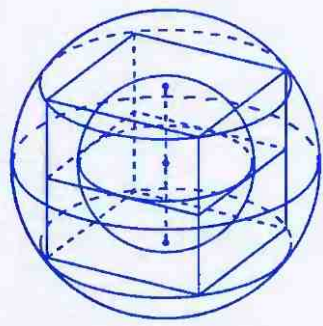
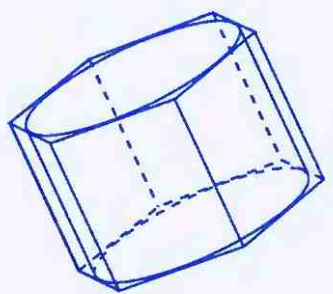
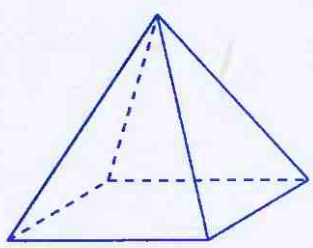


ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ. ГЕОМЕТРИЯ

Смирнов В. А.

ГЕОМЕТРИЯ



Стереометрия

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

В. А. Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ

Стереометрия

Пособие для подготовки к ЕГЭ

Под редакцией А. Л. Семёнова, И. В. Яценко

Москва
Издательство МЦНМО
2009

Смирнов В. А.

С50 Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А. Л. Семёнова, И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с. — (Готовимся к ЕГЭ).

ISBN 978-5-94057-553-5

Пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать задачи по геометрии и подготовиться к ЕГЭ по математике. Оно содержит более семисот задач, решение которых способствует выработке вычислительных навыков, развивает пространственные представления учащихся. Все задачи сопровождаются рисунками. В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал. В конце даны ответы ко всем задачам.

ББК 22.151.0

Владимир Алексеевич Смирнов

ГЕОМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ: ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

Под редакцией А. Л. Семёнова, И. В. Яценко.

Подписано в печать 11.09.2009 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 17. Тираж 5000 экз. Заказ № 18391.

Книга издана в авторской редакции

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано по StP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcme.ru

Оглавление

Введение	4
1. Расстояние между двумя точками в пространстве	6
2. Расстояние от точки до прямой в пространстве	16
3. Расстояние от точки до плоскости в пространстве	47
4. Расстояние между прямыми в пространстве	71
5. Угол между прямыми в пространстве	108
6. Угол между прямой и плоскостью в пространстве	147
7. Угол между плоскостями в пространстве	188
8. Объем фигур в пространстве	212
9. Площадь поверхности	250
Ответы	269

Введение

Как известно, в основе общего образования человека лежат умения читать, писать и считать. От того, насколько хорошо сформированы эти умения на начальном этапе школьного образования, зависят результаты всего дальнейшего обучения.

В основе школьного геометрического образования лежат аналогичные умения, а именно:

- умение «читать», т. е. воспринимать и понимать изображения геометрических фигур;
- умение «писать», т. е. изображать геометрические фигуры, проводить дополнительные построения;
- умение «считать», т. е. находить геометрические величины, элементы геометрических фигур.

Перечисленные умения составляют основу, базу геометрического образования, необходимого каждому человеку, как для повседневной жизни, так и для продолжения образования в вузе.

ЕГЭ по математике (в геометрической части), в первую очередь, направлено на проверку этих умений.

Данное пособие предназначено для всех тех, кто хочет научиться решать задачи по геометрии и подготовиться к ЕГЭ по математике.

Его целями являются:

- показ примерной тематики и уровня трудности геометрических задач, включенных в ЕГЭ;
- проверка качества знаний и умений учащихся по геометрии, их готовности к сдаче ЕГЭ;
- развитие представлений учащихся об основных геометрических фигурах и их свойствах, формирование навыков работы с рисунком;
- повышение вычислительной культуры учащихся, подготовка их к решению геометрических задач с числовым ответом.

Пособие содержит более семисот задач на вычисление расстояний и углов в пространстве, нахождение объемов и площадей поверхностей пространственных фигур. Решение этих задач не только способствует выработке соответствующих вычислительных умений и навыков, но, что более важно, развивает пространственные представления и пространственное мышление учащихся.

Все задачи разбиты на три уровня: А, В и С. Задачи уровня А, как правило, одношаговые, на непосредственное применение теорем,

свойств или формул. Они носят подготовительный характер и направлены на повторение геометрического материала, необходимого для решения более трудных задач.

Для решения задач уровня В требуются дополнительные построения или составление несложных уравнений с искомыми величинами. В этих задачах, также как и в задачах уровня А, предполагается ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Отметим, что в учебниках геометрии таких задач не так много и данное пособие восполняет этот пробел. Предлагаемые задачи группы В развивают геометрические представления, лежат в основе решения многих других задач, позволяют сформировать и отработать необходимые навыки решения задач с числовым ответом. Умения решать эти задачи во многом определяют успешность решения и других более трудных геометрических задач.

Задачи уровней А и В соответствуют геометрическим задачам части В ЕГЭ по математике.

Уровень С содержит задачи повышенной трудности, решение которых включает в себя дополнительные построения, составление и решение уравнений с неизвестными величинами. Ответ в этих задачах может иметь произвольную форму.

Задачи уровня С служат подготовке учащихся к решению геометрических задач части С ЕГЭ по математике.

Все предлагаемые в пособии задачи сопровождаются рисунками, помогающими лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, наметить план решения, при необходимости провести дополнительные построения и вычисления.

В начале каждого раздела помещен необходимый теоретический материал. В конце книги даны ответы ко всем задачам.

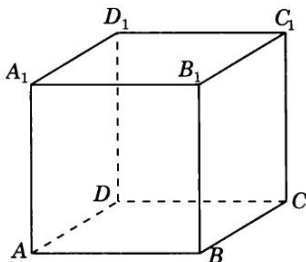
Отметим, что лучшим способом подготовки к ЕГЭ по геометрии являются систематические занятия по учебнику геометрии. Данное пособие не заменяет учебника. Оно может быть использовано в качестве дополнительного сборника задач при изучении геометрии, а также при организации обобщающего повторения или самостоятельных занятиях по геометрии.

1. Расстояние между двумя точками в пространстве

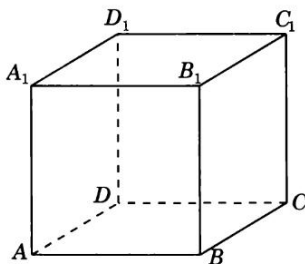
В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение длин отрезков и расстояний между точками, связанными с различными пространственными фигурами. Предлагаемые задачи носят вспомогательный характер и будут использоваться при решении задач следующих параграфов.

Задачи

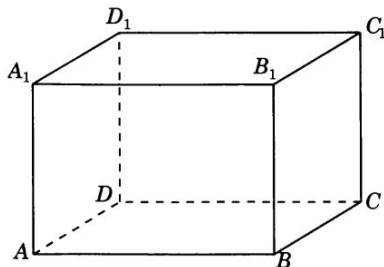
1. Найдите диагональ куба, все ребра которого равны $\sqrt{3}$.



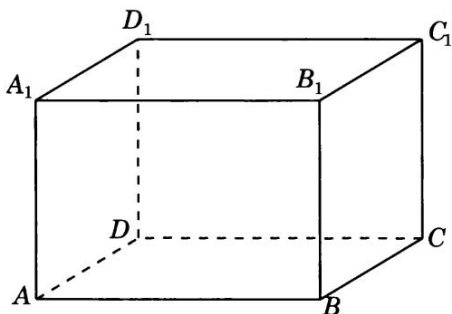
2. Найдите ребро куба, диагональ которого равна $\sqrt{3}$.



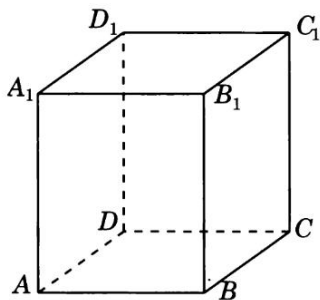
3. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 2, 3, 6.



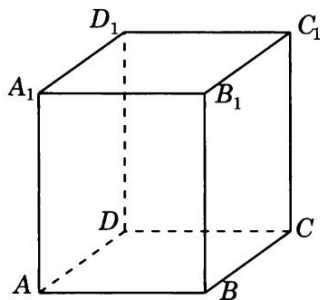
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 6, а его диагональ равна 14. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



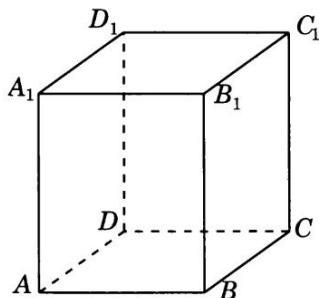
5. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 3 и острым углом 60° . Боковое ребро равно 4. Найдите меньшую диагональ призмы.



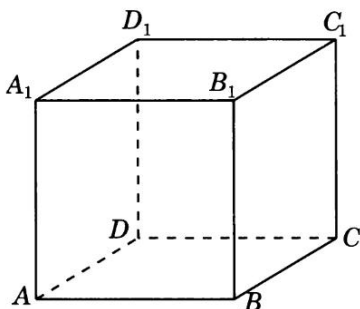
6. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 6 и острым углом 60° . Меньшая диагональ призмы равна 10. Найдите боковое ребро.



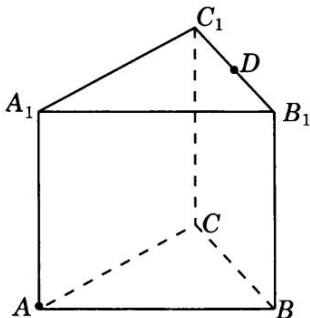
7. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной $\sqrt{3}$ и острым углом 60° . Боковое ребро равно 4. Найдите большую диагональ призмы.



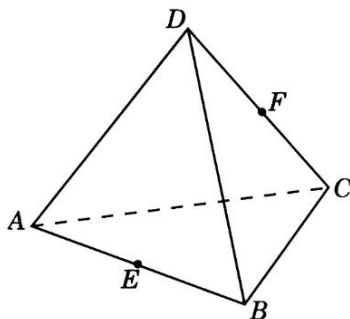
8. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с острым углом 60° . Боковое ребро равно 1, а большая диагональ — 2. Найдите сторону основания призмы.



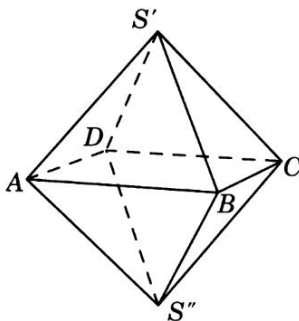
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $\sqrt{3}$, боковые ребра равны 2. Точка D — середина ребра B_1C_1 . Найдите расстояние между точками A и D .



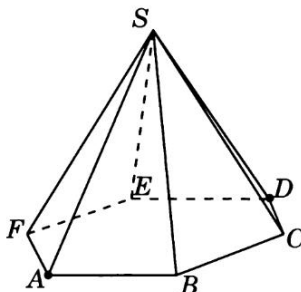
10. В правильном тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между серединами противоположных ребер AB и CD .



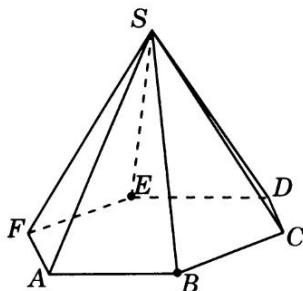
11. Найдите расстояние между противоположными вершинами октаэдра, ребра которого равны $\sqrt{2}$.



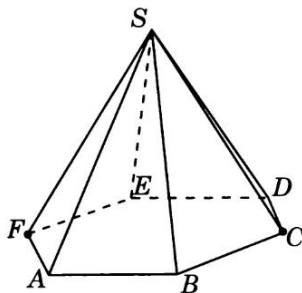
12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками A и D .



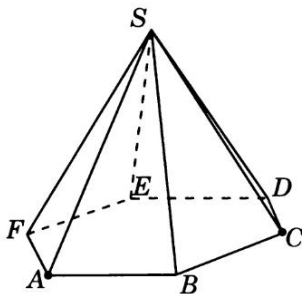
13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками B и E .



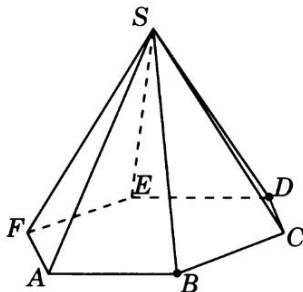
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками C и F .



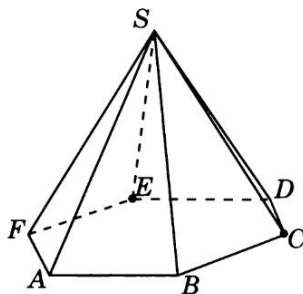
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками A и C .



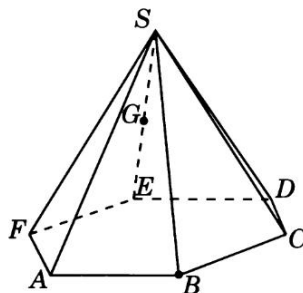
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками B и D .



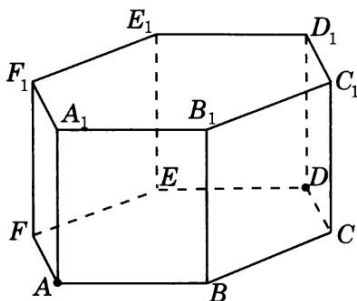
17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками C и E .



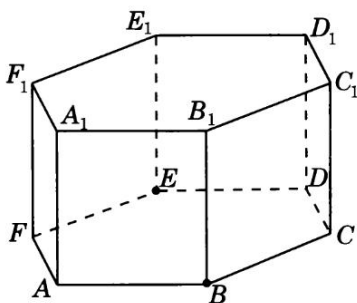
18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка G — середина ребра SE . Найдите расстояние между точками B и G .



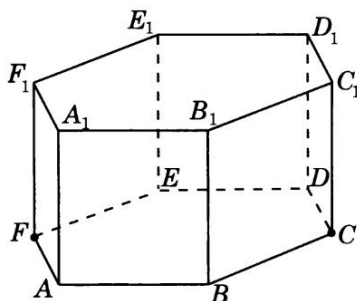
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками A и D .



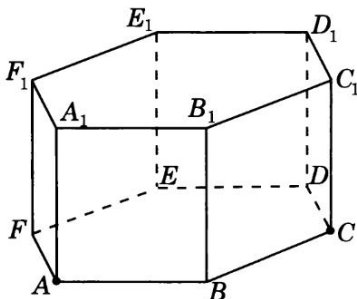
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками B и E .



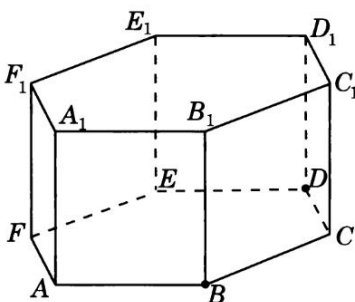
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками C и F .



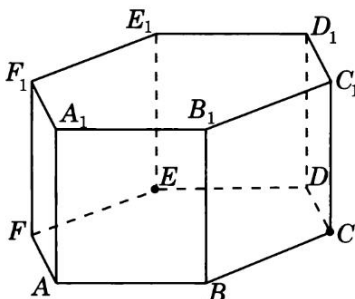
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между точками A и C .



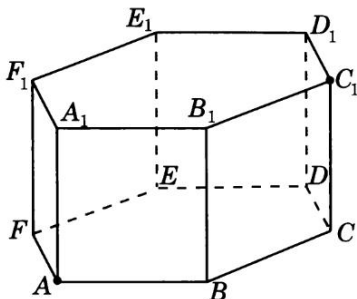
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между точками B и D .



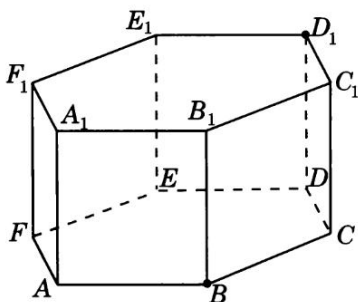
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между точками C и E .



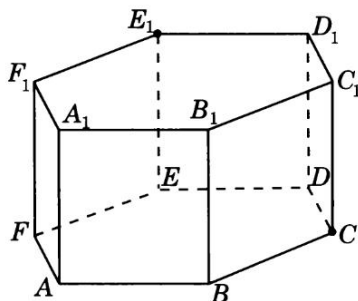
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками A и C_1 .



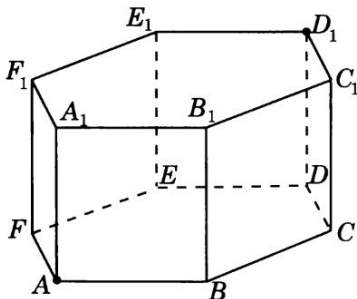
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками B и D_1 .



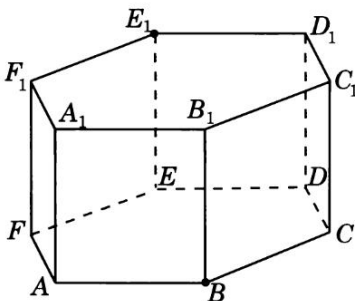
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками C и E_1 .



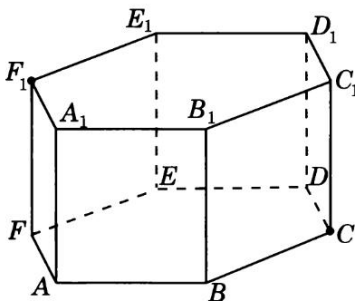
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками A и D_1 .



29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками B и E_1 .



30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками C и F_1 .

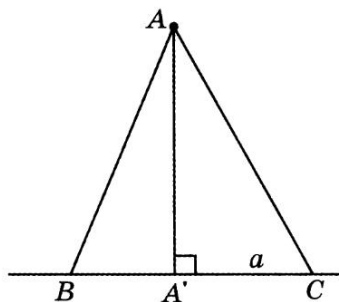
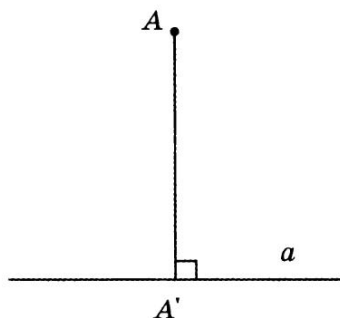


2. Расстояние от точки до прямой в пространстве

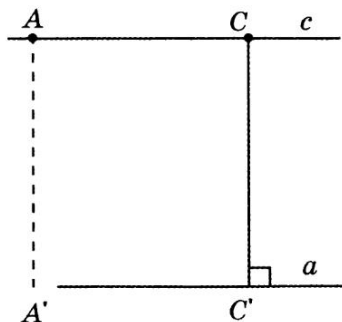
В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве. При этом используются теорема Пифагора, свойства равнобедренного треугольника, подобие треугольников, тригонометрические функции углов треугольника и др.

Общие сведения

Определение. Расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

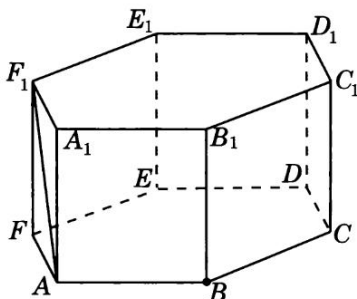


Для нахождения расстояния от точки A до прямой a сначала находят основание A' перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую a . Если нахождение длины перпендикуляра AA' не вытекает непосредственно из условия задачи, то на прямой a выбирают какие-нибудь точки B, C и рассматривают треугольник ABC , в котором AA' является высотой. Для нахождения высоты AA' используют теорему Пифагора или другие теоремы и формулы.

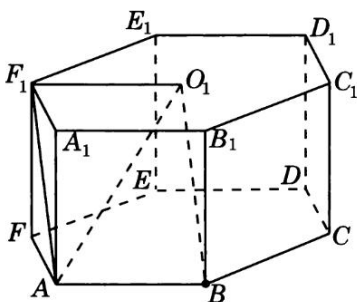


Если точка A' находится вне участка прямой a , данного в задаче, то через точку A проводят прямую c , параллельную прямой a , и выбирают на ней более удобную точку C , ортогональная проекция которой C' принадлежит данному участку прямой a . Длина отрезка CC' будет равна искомому расстоянию от точки A до прямой a .

В качестве примера для правильной шестиугольной призмы $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдем расстояние от точки B до прямой AF_1 .



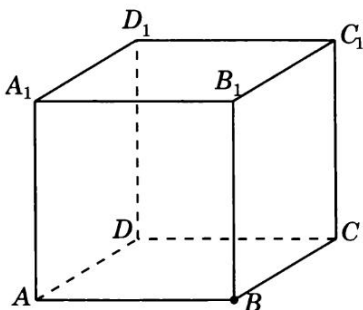
Пусть O_1 — центр верхнего основания призмы. Прямая BO_1 параллельна AF_1 и, следовательно, расстояние от точки B до прямой AF_1 равно расстоянию от точки O_1 до прямой AF_1 . В треугольнике AO_1F_1 имеем $AO_1 = AF_1 = \sqrt{2}$, $O_1F_1 = 1$. По теореме Пифагора находим, что высота этого треугольника, опущенная на сторону O_1F_1 , равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Используя формулу площади треугольника, получаем, что для высоты h этого треугольника, опущенной на сторону AF_1 , выполняется равенство $\sqrt{2} \cdot h = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и, следовательно, искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{14}}{4}$.



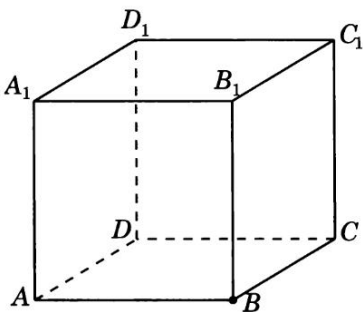
Задачи

Уровень А

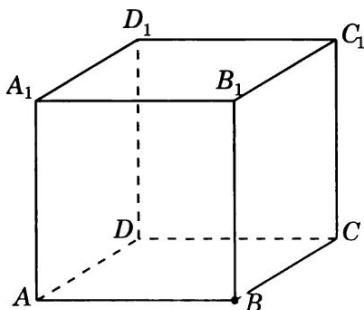
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD .



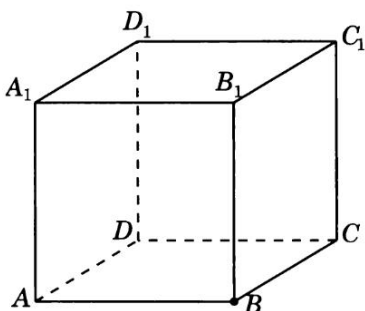
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой CD .



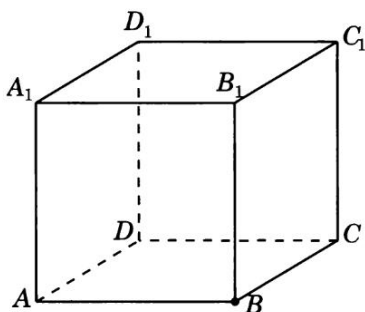
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AA_1 .



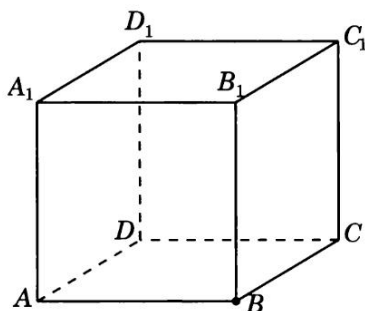
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой CC_1 .



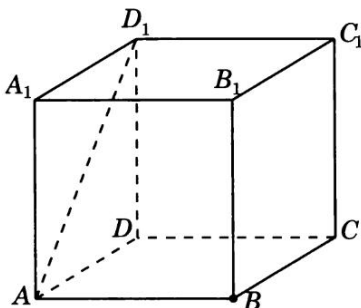
5. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1B_1 .



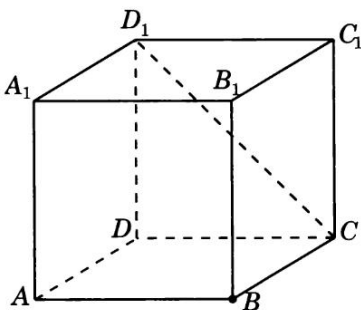
6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой B_1C_1 .



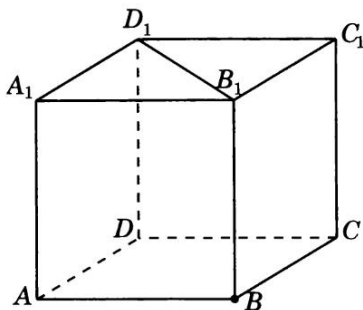
7. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD_1 .



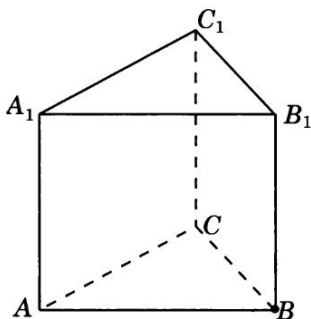
8. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой CD_1 .



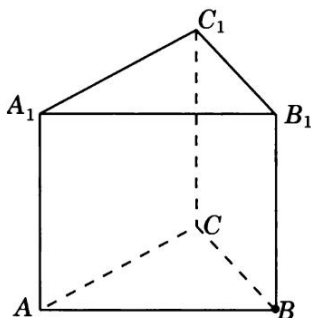
9. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой B_1D_1 .



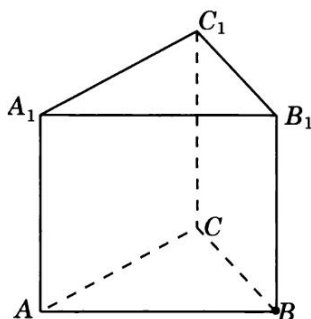
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AA_1 .



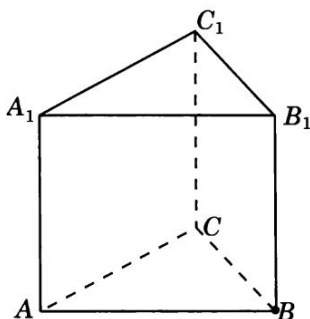
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CC_1 .



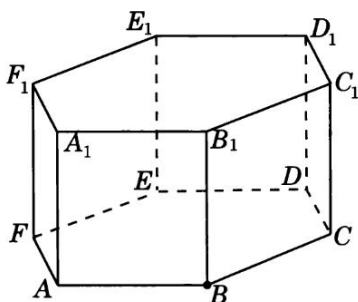
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1B_1 .



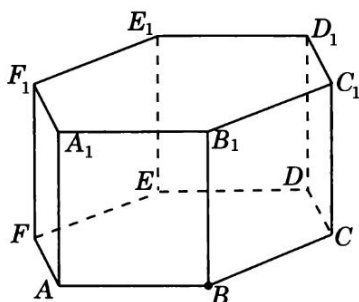
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой B_1C_1 .



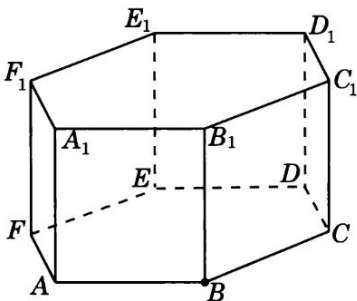
14. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AA_1 .



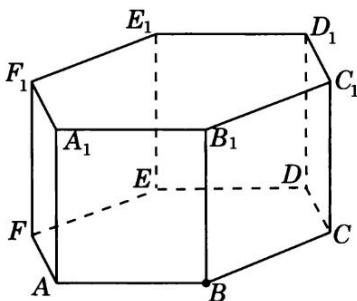
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CC_1 .



16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1B_1 .

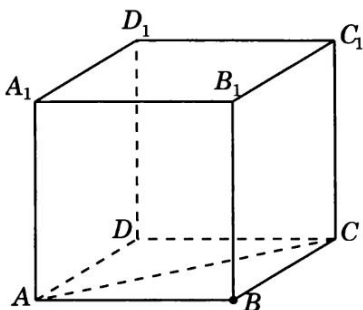


17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой B_1C_1 .

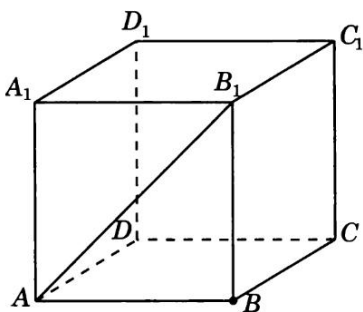


Уровень В

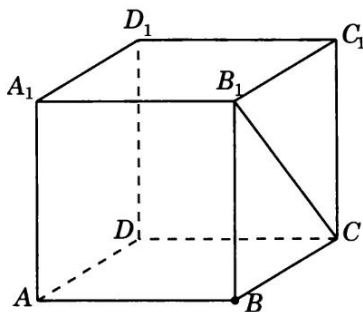
1. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AC .



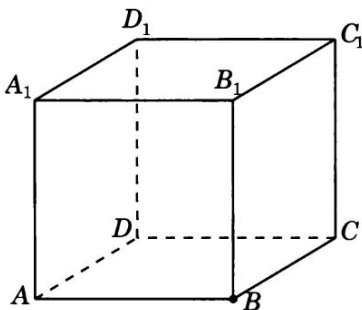
2. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1 .



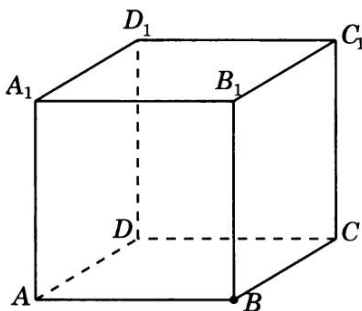
3. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой CB_1 .



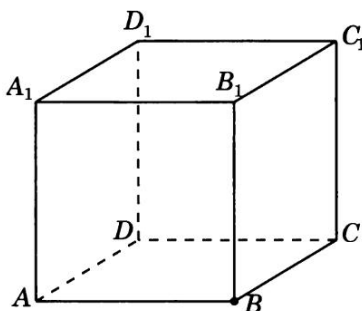
4. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1 .



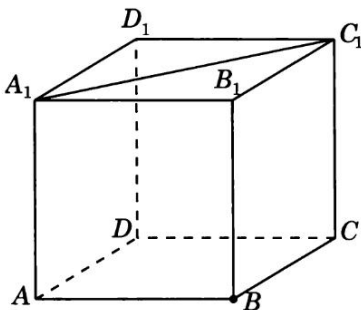
5. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой C_1D_1 .



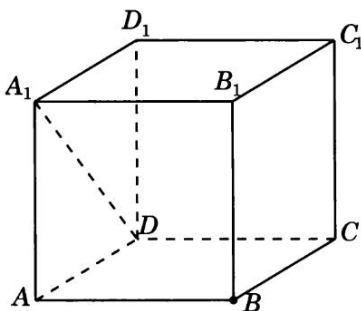
6. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой DD_1 .



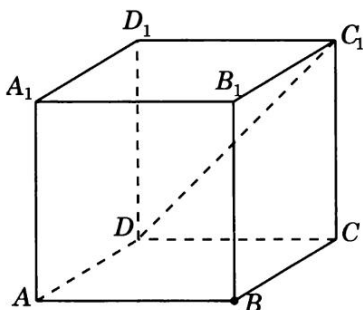
7. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{6}$, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1 .



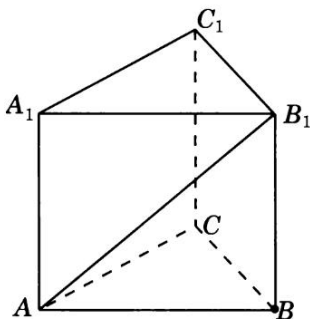
8. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{6}$, найдите расстояние от точки B до прямой DA_1 .



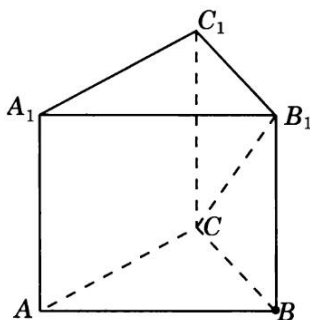
9. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны $\sqrt{6}$, найдите расстояние от точки B до прямой DC_1 .



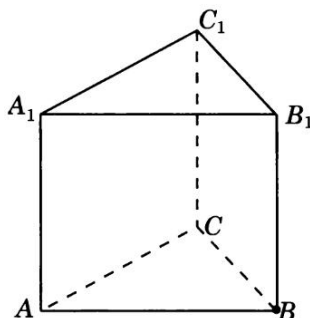
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1 .



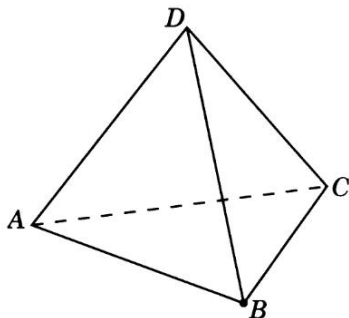
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой CB_1 .



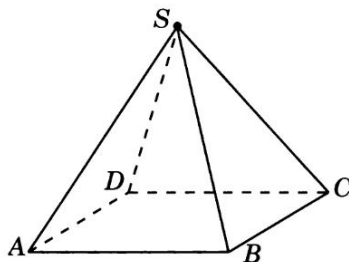
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{7}$, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1 .



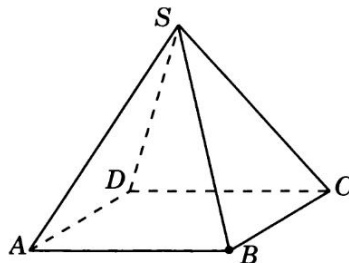
13. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой CD .



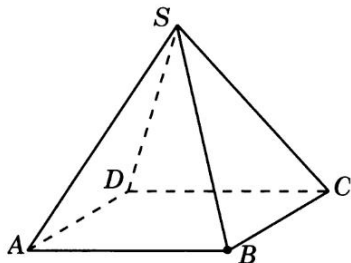
14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки S до прямой BC .



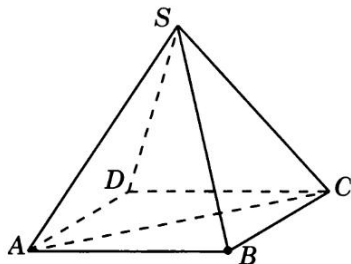
15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой SA .



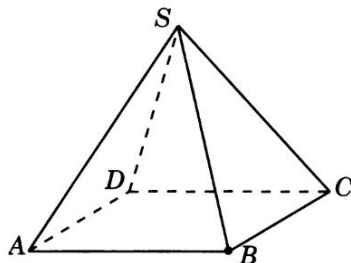
16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой SC .



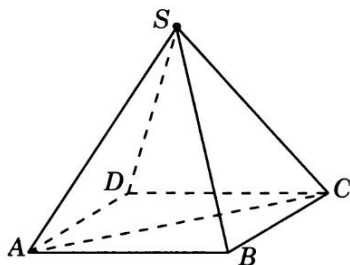
17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AC .



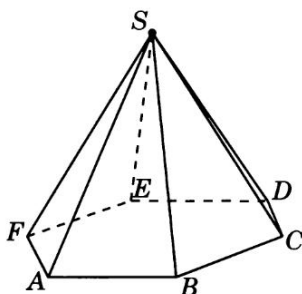
18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой SD .



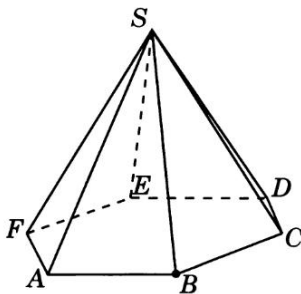
19. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки S до прямой AC .



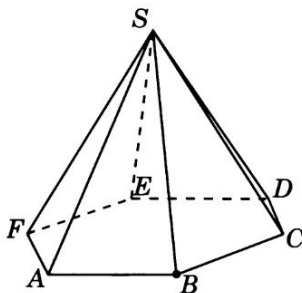
20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 10, а боковые ребра равны 13, найдите расстояние от точки S до прямой AB .



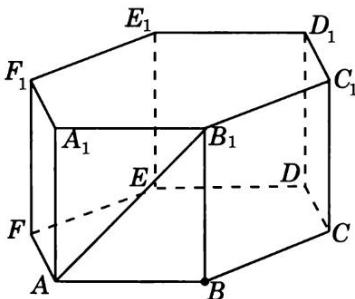
21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой AF .



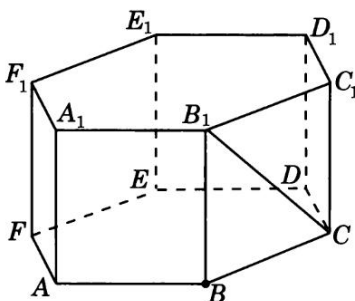
22. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой EF .



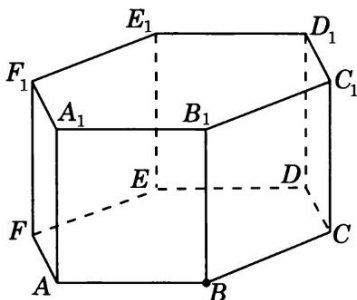
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1 .



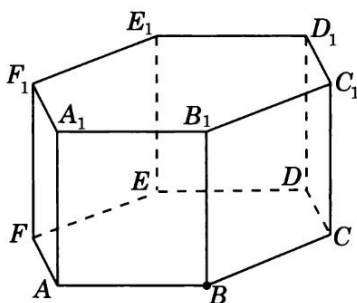
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до прямой CB_1 .



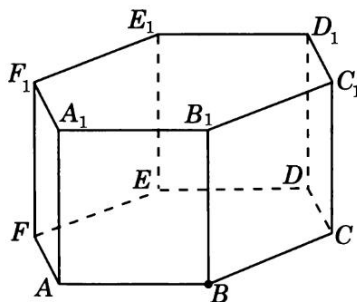
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой AF .



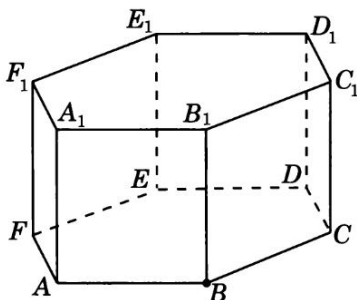
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой FE .



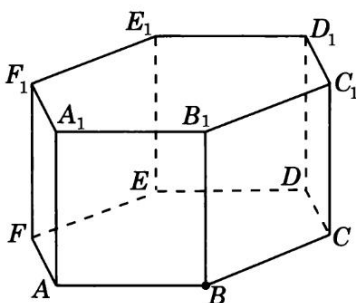
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой DE .



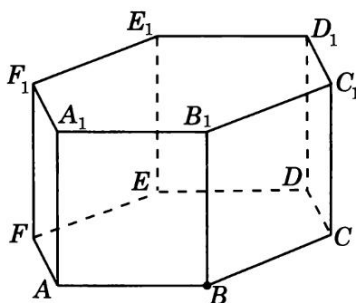
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой EE_1 .



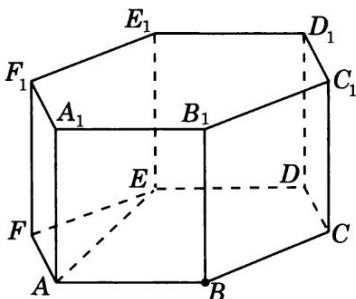
29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1 .



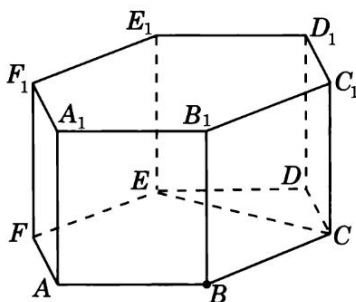
30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой D_1E_1 .



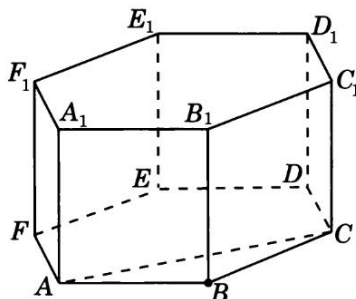
31. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE .



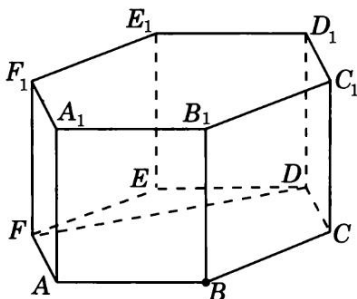
32. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CE .



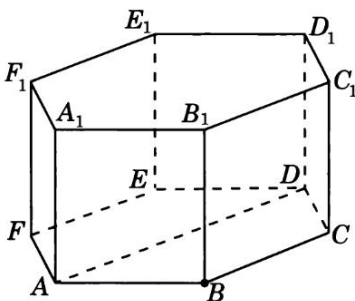
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC .



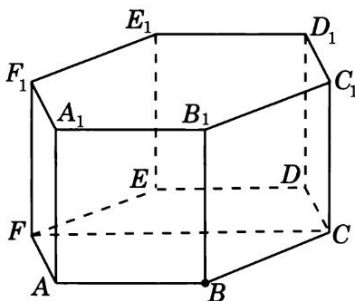
34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DF .



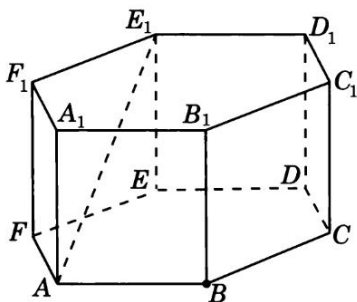
35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой AD .



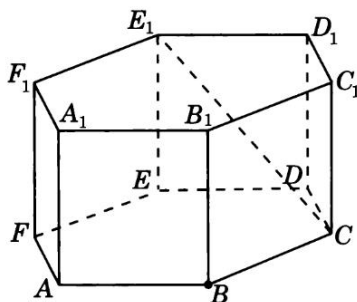
36. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до прямой CF .



37. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE_1 .

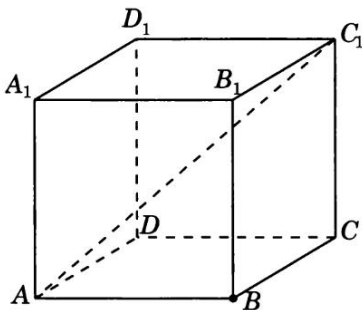


38. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CE_1 .

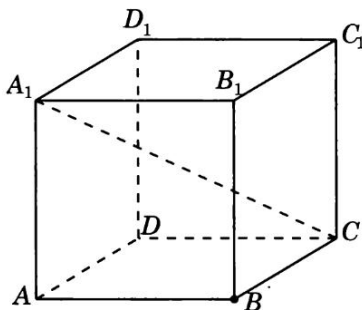


Уровень С

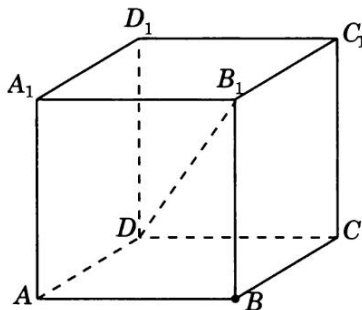
1. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .



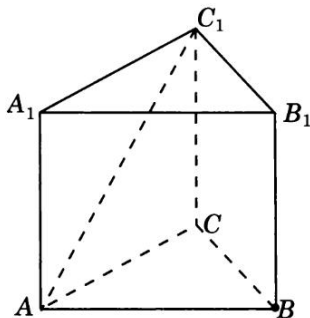
2. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CA_1 .



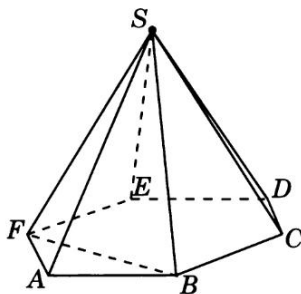
3. В кубе $A...D_1$, все ребра которого равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DB_1 .



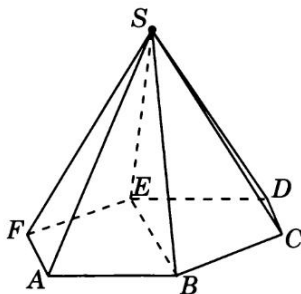
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .



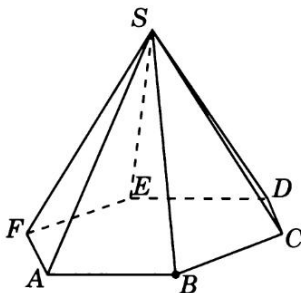
5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой BF .



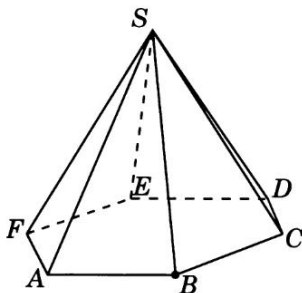
6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой BE .



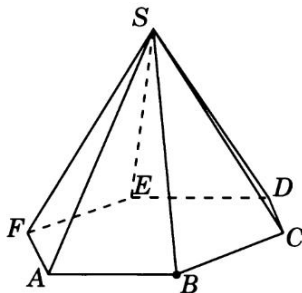
7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой SA .



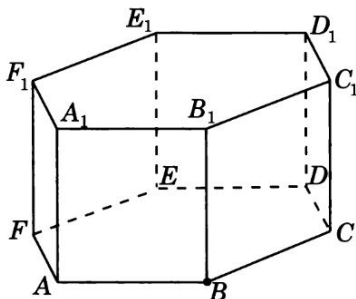
8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой SD .



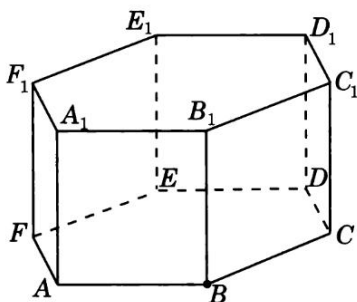
9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой SE .



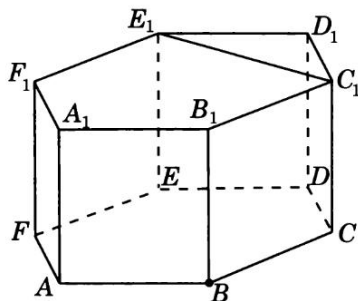
10. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1 .



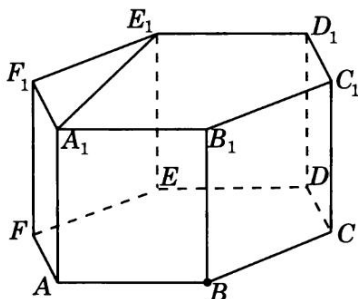
11. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой C_1D_1 .



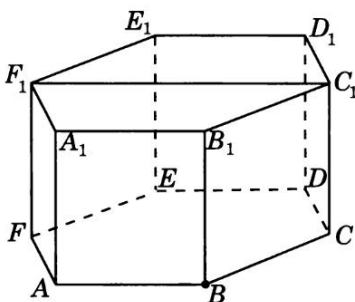
12. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой C_1E_1 .



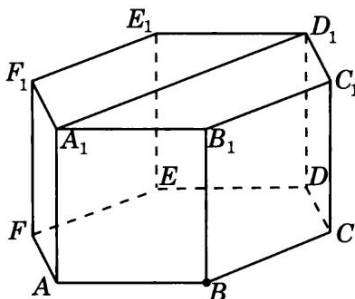
13. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1E_1 .



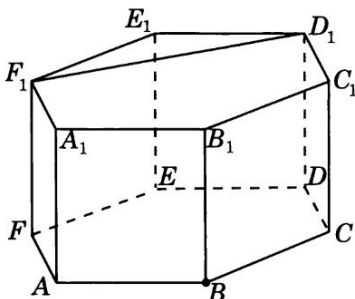
14. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой C_1F_1 .



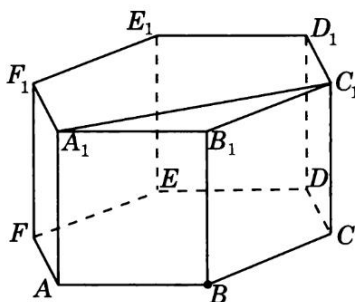
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1 .



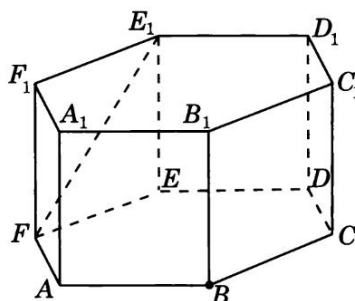
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой D_1F_1 .



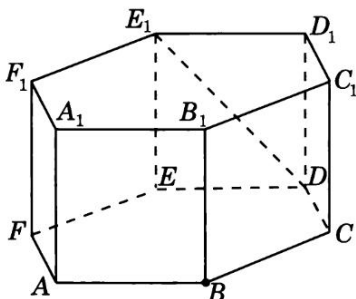
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1 .



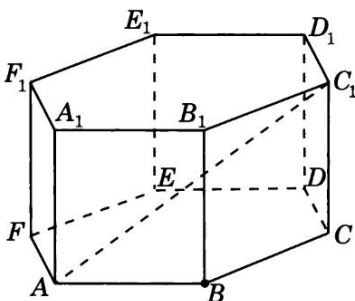
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FE_1 .



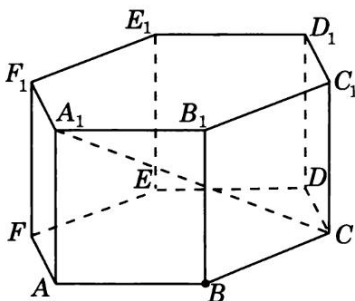
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DE_1 .



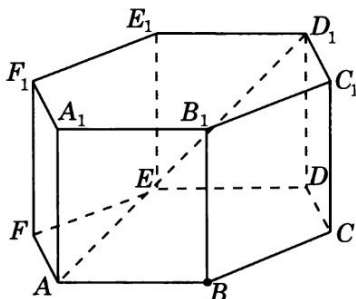
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .



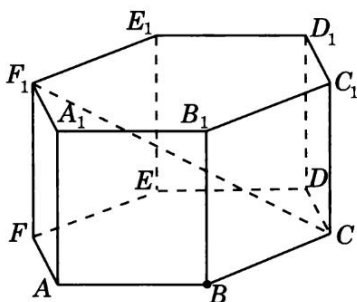
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CA_1 .



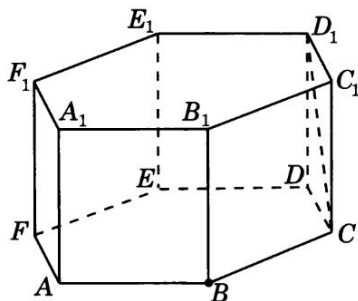
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AD_1 .



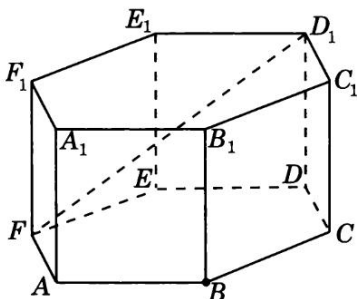
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CF_1 .



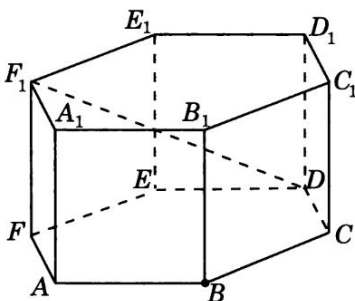
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CD_1 .



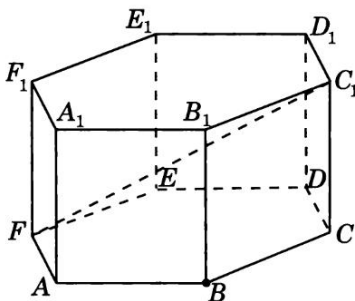
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FD_1 .



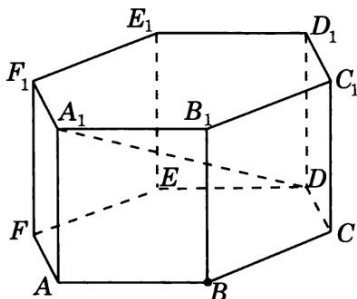
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DF_1 .



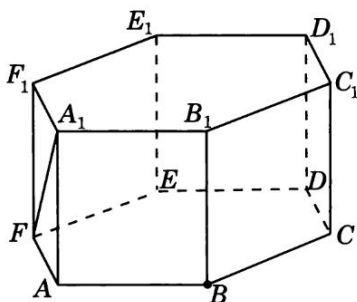
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FC_1 .



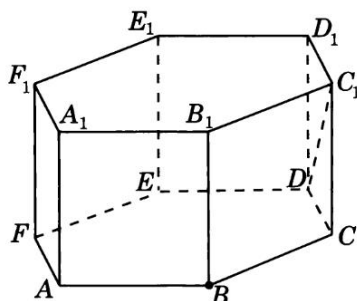
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DA_1 .



29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FA_1 .



30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DC_1 .

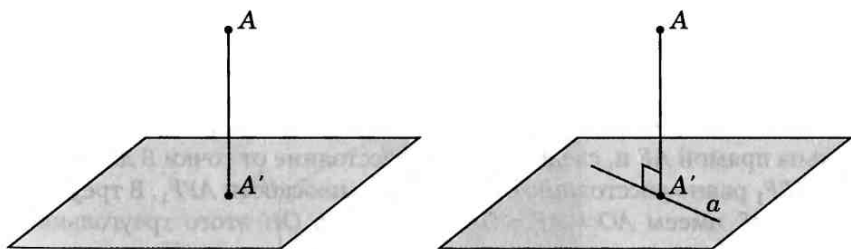


3. Расстояние от точки до плоскости в пространстве

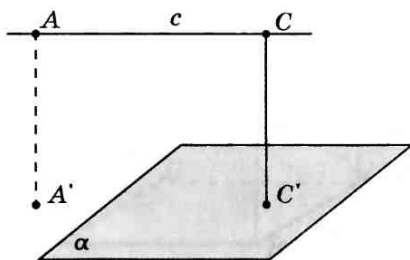
В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости в пространстве. При этом используются теорема Пифагора, свойства равнобедренного треугольника, подобие треугольников, тригонометрические функции углов треугольника и др.

Общие сведения

Определение. Расстоянием от точки до плоскости, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

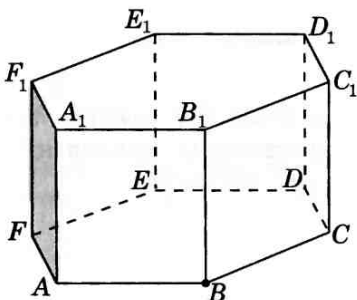


Для нахождения расстояния от точки A до плоскости α находят перпендикуляр AA' , опущенный из точки A на плоскость α . Если нахождение длины перпендикуляра AA' не вытекает непосредственно из условия задачи, то на плоскости α выбирают какую-нибудь прямую a , проходящую через точку A' , и находят длину перпендикуляра AA' , опущенного из точки A на прямую a . Для этого используют теорему Пифагора или другие теоремы и формулы.

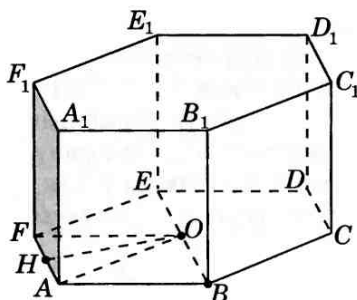


Если точка A' находится вне участка плоскости α , указанного в задаче, то через точку A проводят прямую s , параллельную плоскости α , и выбирают на ней более удобную точку C , ортогональная проекция которой C' принадлежит данному участку плоскости α . Длина отрезка CC' будет равна искомому расстоянию от точки A до плоскости α .

В качестве примера для правильной шестиугольной призмы $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдем расстояние от точки B до плоскости AFF_1 .



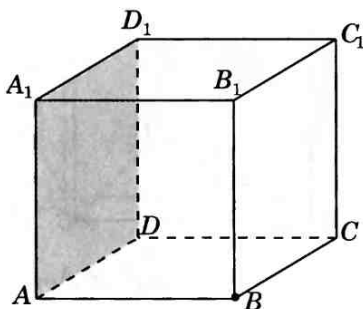
Пусть O — центр нижнего основания призмы. Прямая BO параллельна прямой AF и, следовательно, расстояние от точки B до плоскости AFF_1 равно расстоянию от точки O до плоскости AFF_1 . В треугольнике AOF имеем $AO = AF = OF = 1$. Высота OH этого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



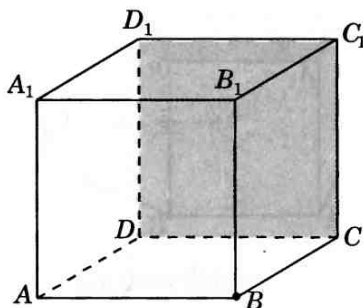
Задачи

Уровень А

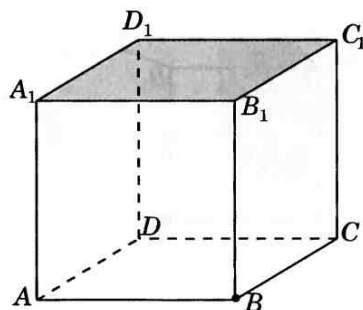
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1 .



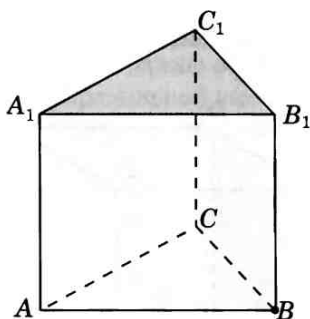
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости CDD_1 .



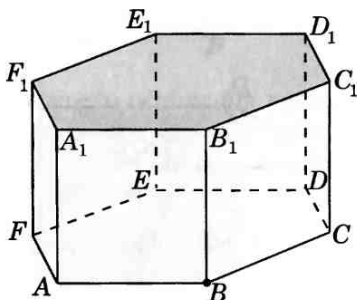
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$.



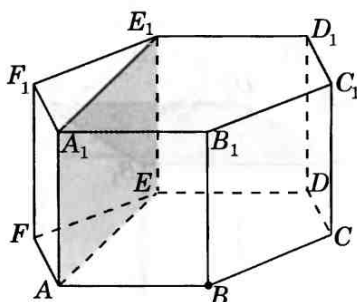
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$.



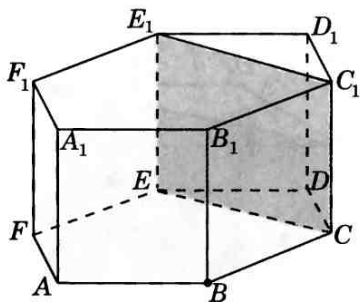
5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$.



6. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AEE_1 .

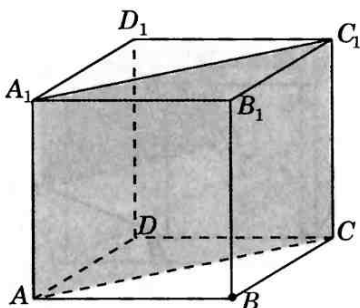


7. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CEE_1 .

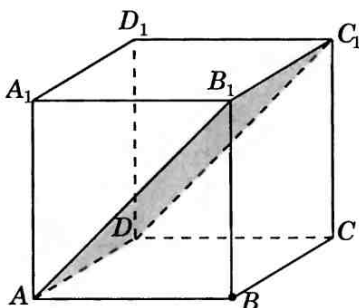


Уровень В

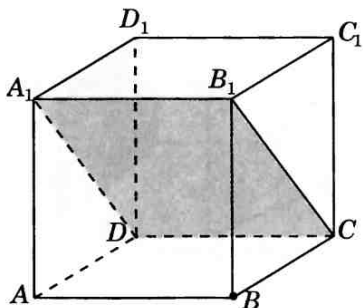
1. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1 .



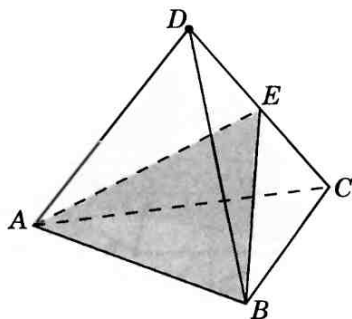
2. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C_1 .



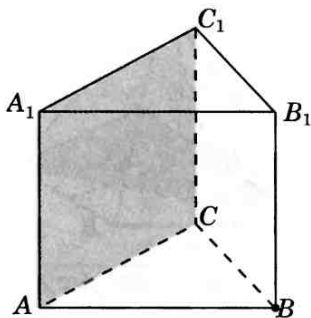
3. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CDA_1 .



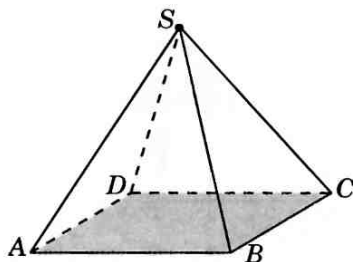
4. В единичном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра CD . Найдите расстояние от точки D до плоскости ABE .



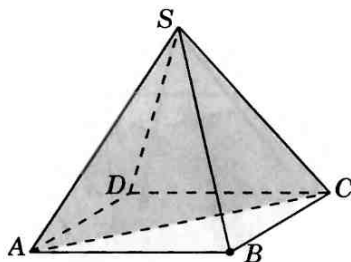
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1 .



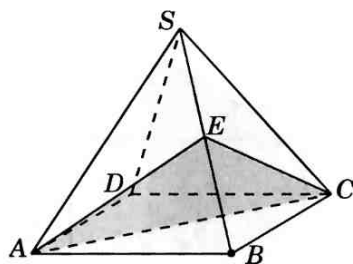
6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC .



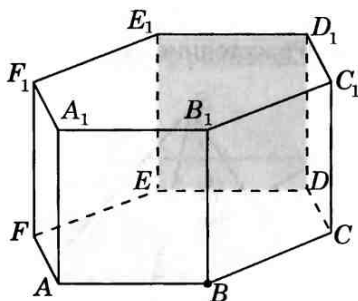
7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC .



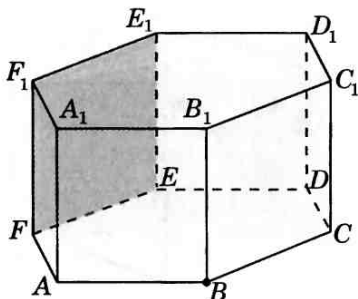
8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SB . Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE .



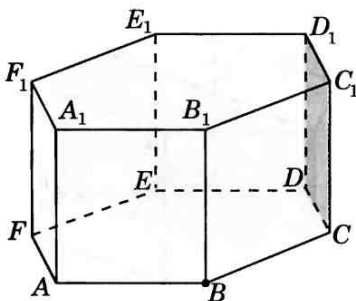
9. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости DEE_1 .



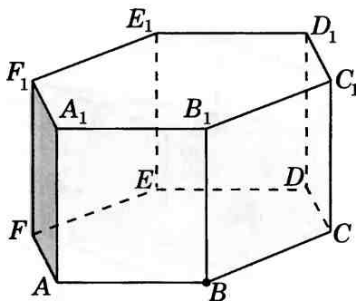
10. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равна $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости EFF_1 .



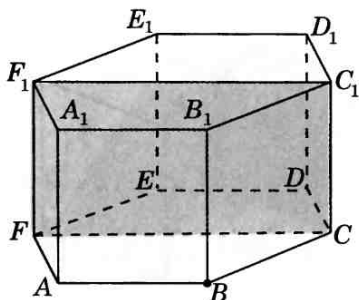
11. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равна $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CDD_1 .



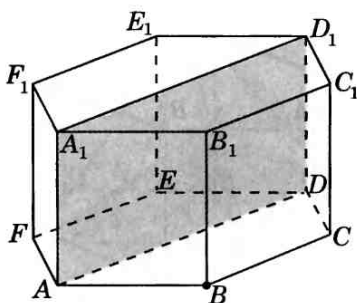
12. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равна $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости AFF_1 .



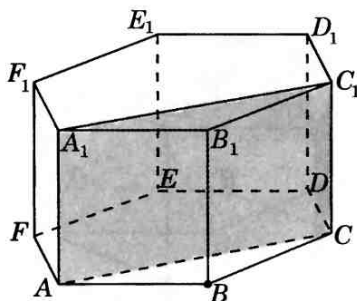
13. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равна $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CFF_1 .



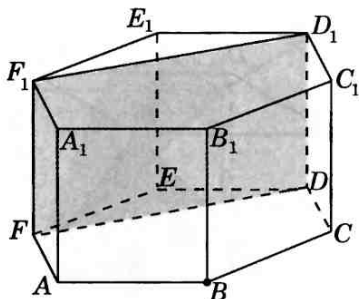
14. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равна $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1 .



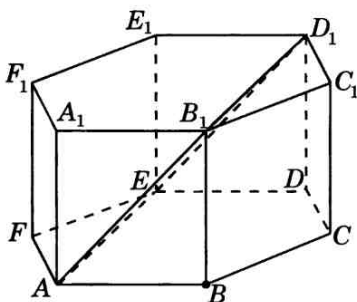
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1 .



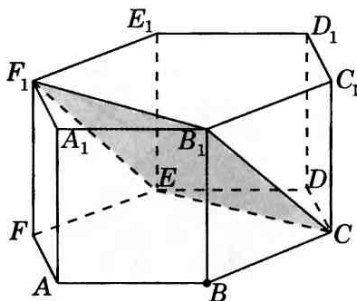
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DD_1F_1 .



17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости AED_1 .

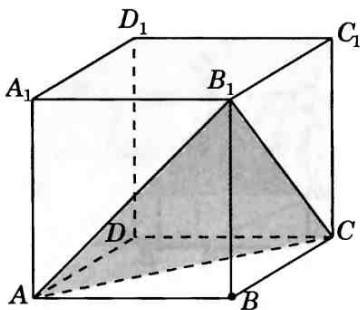


18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние от точки B до плоскости CEF_1 .

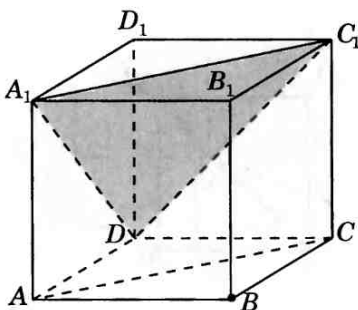


Уровень С

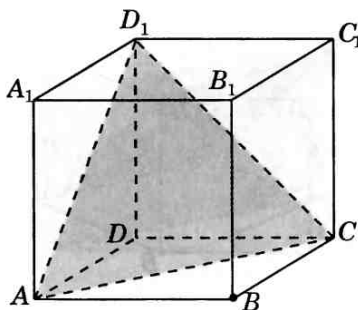
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1 .



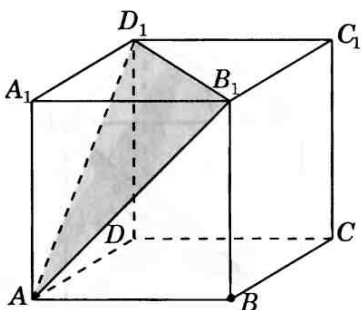
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости DA_1C_1 .



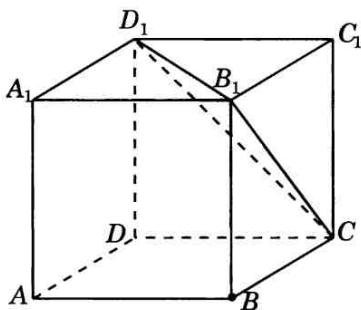
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1 .



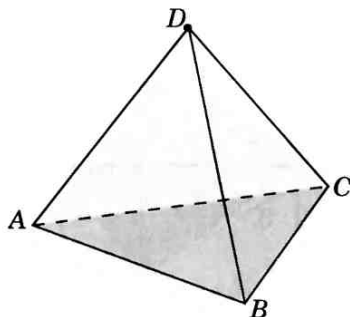
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1 .



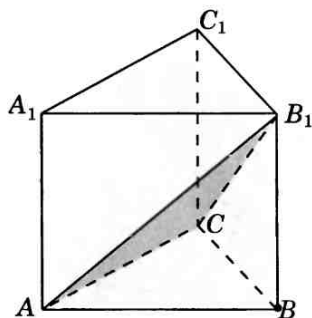
5. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости CB_1D_1 .



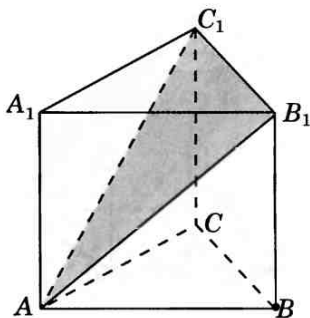
6. В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .



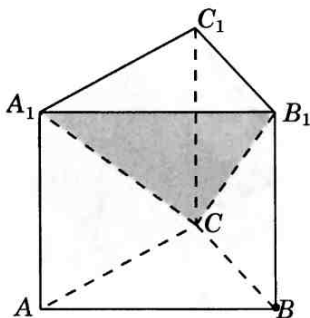
7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1 .



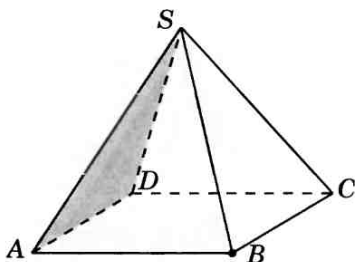
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C_1 .



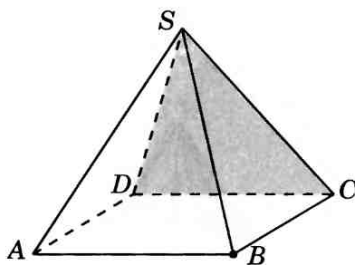
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CA_1B_1 .



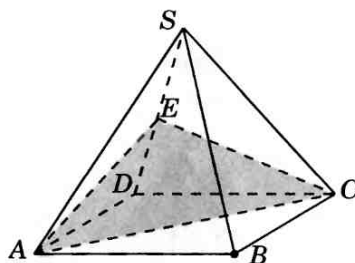
10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости SAD .



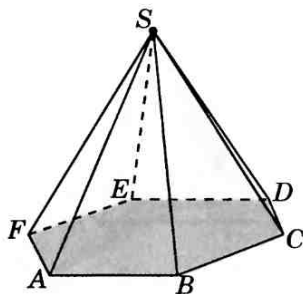
11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости SCD .



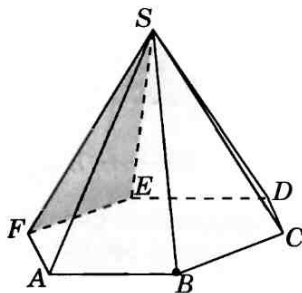
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SD . Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE .



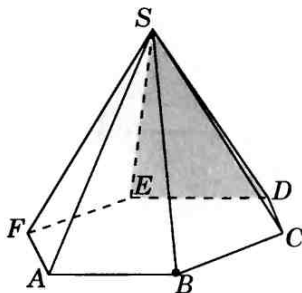
13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до плоскости ABC .



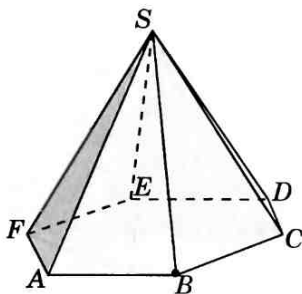
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SEF .



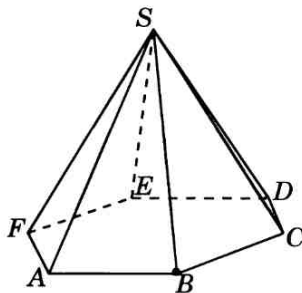
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SDE .



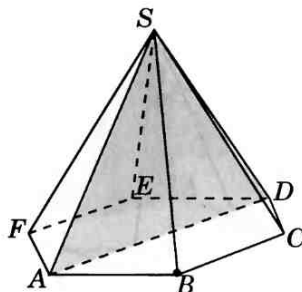
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SAF .



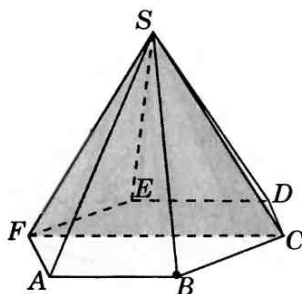
17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCD .



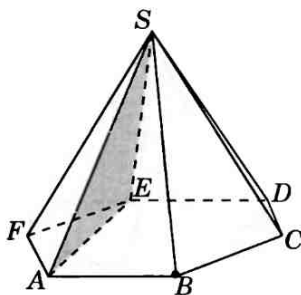
18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SAD .



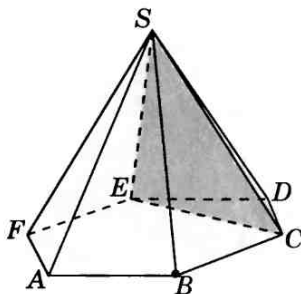
19. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCF .



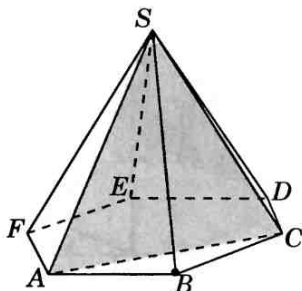
20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SAE .



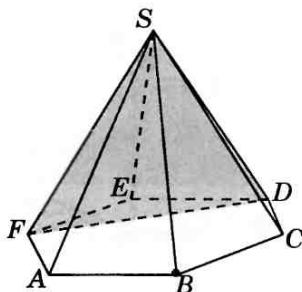
21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SCE .



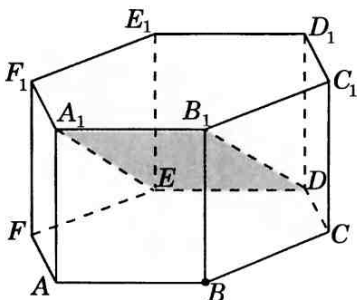
22. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SAC .



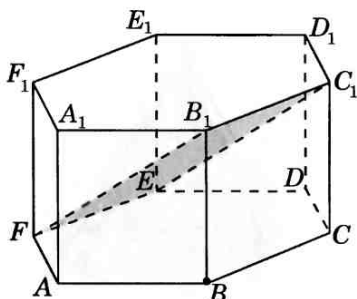
23. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости SDF .



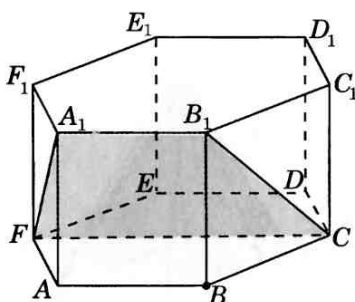
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1 .



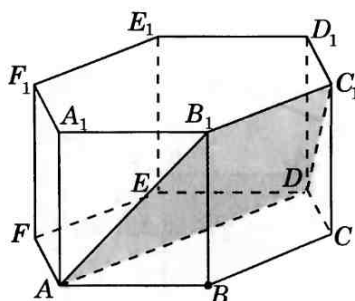
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости EFB_1 .



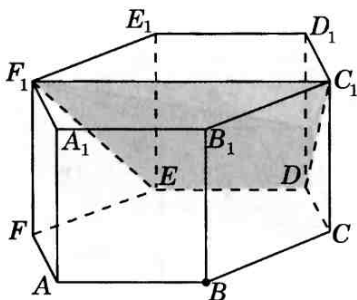
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CFA_1 .



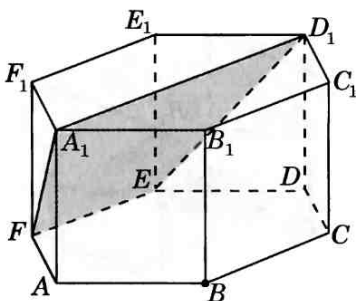
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADC_1 .



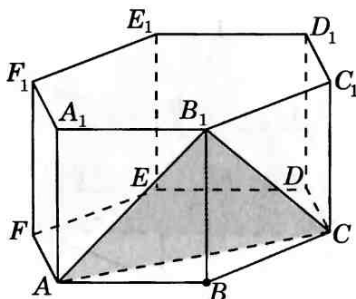
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEF_1 .



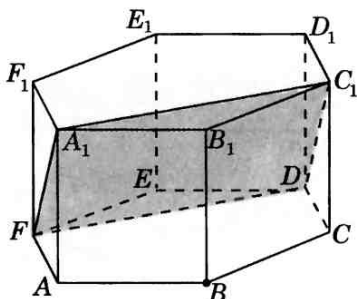
29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости EFA_1 .



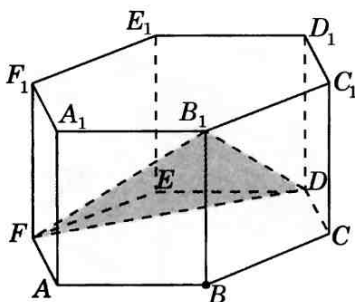
30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1 .



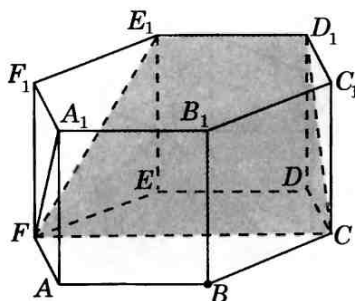
31. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DFA_1 .



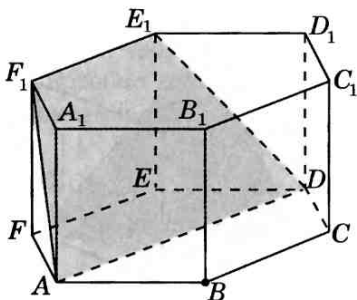
32. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DFB_1 .



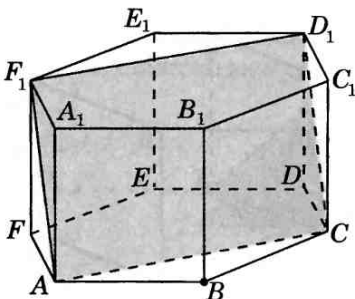
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CFE_1 .



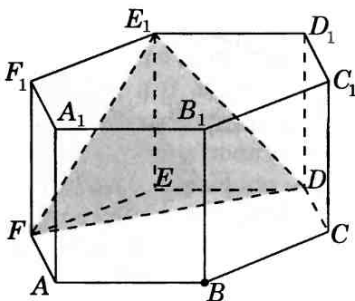
34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADE_1 .



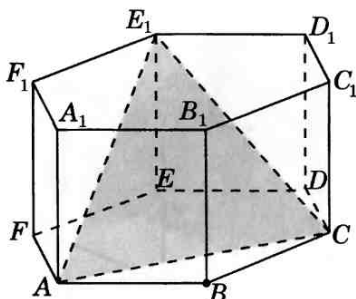
35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1 .



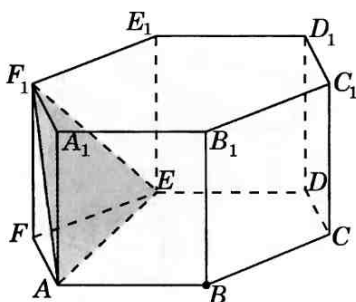
36. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DFE_1 .



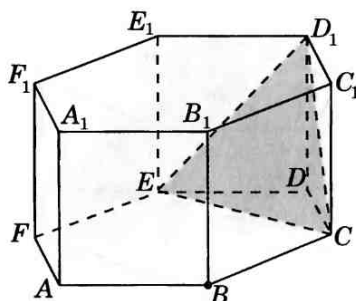
37. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACE_1 .



38. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AEF_1 .



39. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CED_1 .



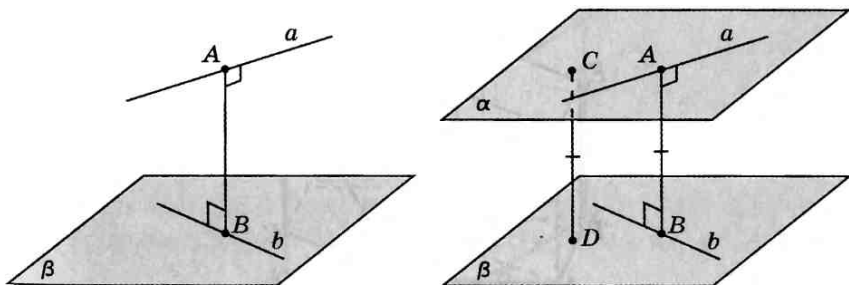
4. Расстояние между прямыми в пространстве

В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение расстояния между параллельными и скрещивающимися прямыми в пространстве. При этом используются теорема Пифагора, свойства равнобедренного треугольника, подобие треугольников, тригонометрические функции углов треугольника и др.

Общие сведения

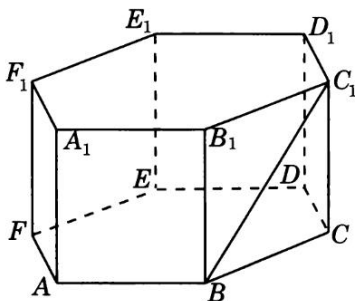
Определение. Расстоянием между двумя непересекающимися прямыми в пространстве называется длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым.

Если одна из двух данных скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая — параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью.

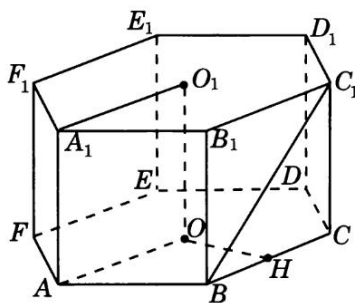


Если данные скрещивающиеся прямые a и b лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β , то расстояние между прямыми a и b равно расстоянию между плоскостями α и β . В этом случае длина перпендикуляра CD , опущенного из произвольной точки C плоскости α на плоскость β , будет равна расстоянию между прямыми a и b .

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения расстояния между прямыми AA_1 и BC_1 для правильной шестиугольной призмы $A...F_1$, все ребра которой равны 1.

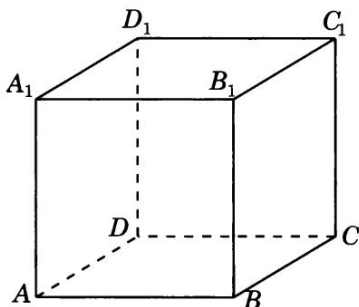


Пусть O и O_1 — центры оснований призмы. Плоскость AOO_1 , в которой лежит прямая AA_1 , параллельна плоскости BCC_1 , в которой лежит прямая BC_1 . Из точки O опустим перпендикуляр OH на плоскость BCC_1 . Его длина равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно, искомое расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

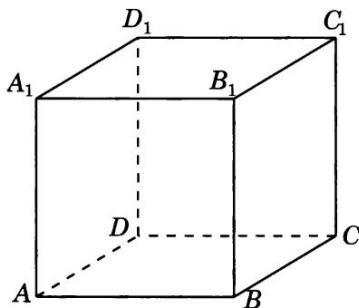


Задачи**Уровень А**

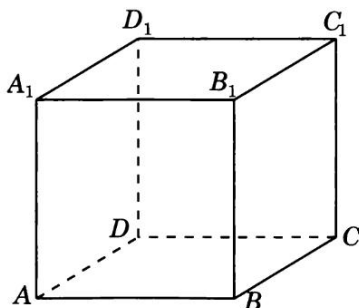
1. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CD .



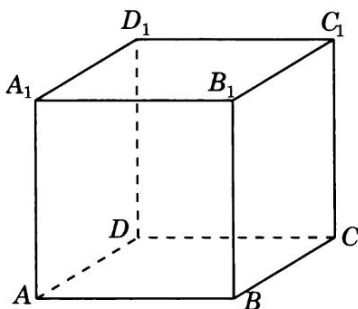
2. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и A_1B_1 .



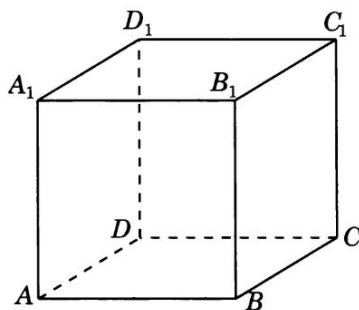
3. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CC_1 .



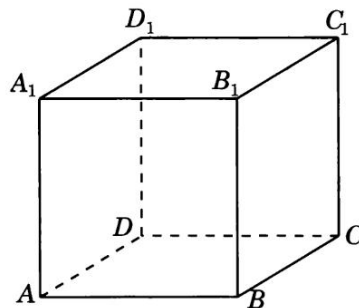
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и DD_1 .



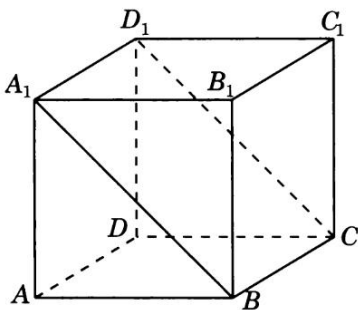
5. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1 .



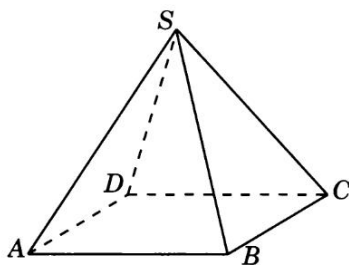
6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и A_1D_1 .



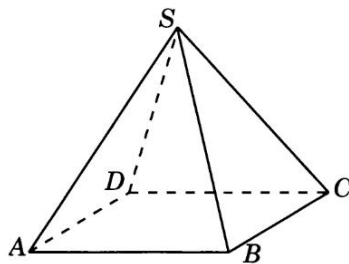
7. В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и CD_1 .



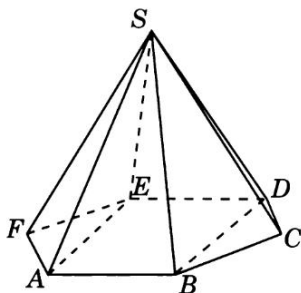
8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AD и BC .



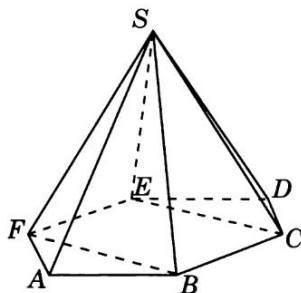
9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CD .



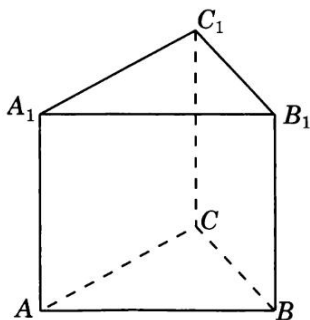
10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и AE .



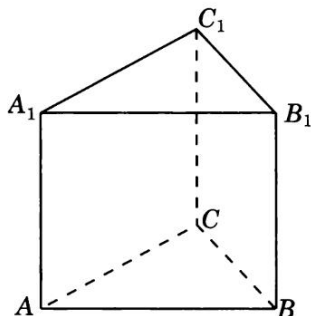
11. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BF и CE .



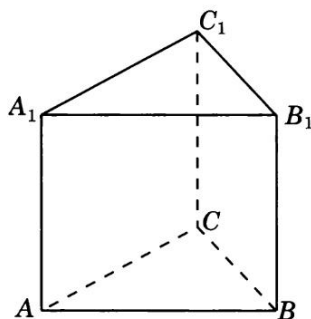
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AC и A_1C_1 .



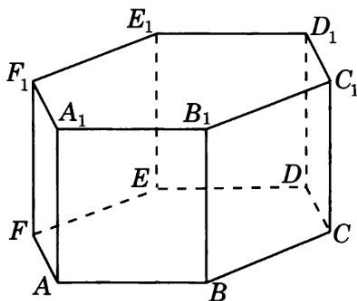
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BB_1 .



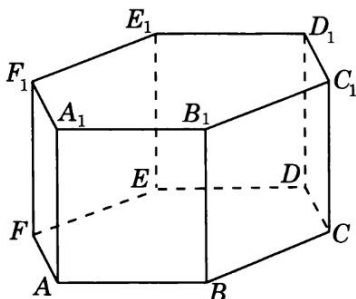
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CC_1 .



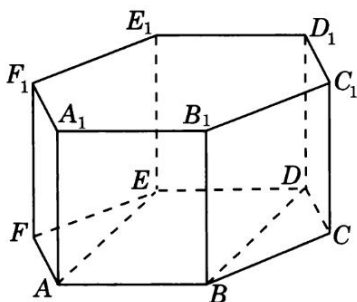
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BB_1 .



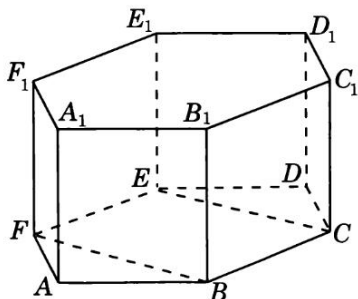
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и B_1C_1 .



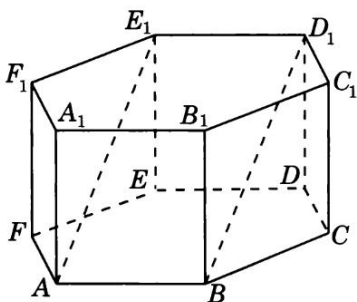
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и AE .



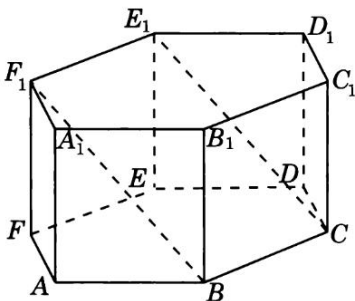
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BF и CE .



19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD_1 и AE_1 .

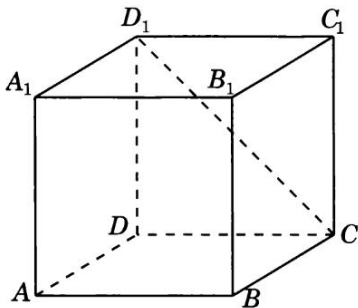


20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BF_1 и CE_1 .

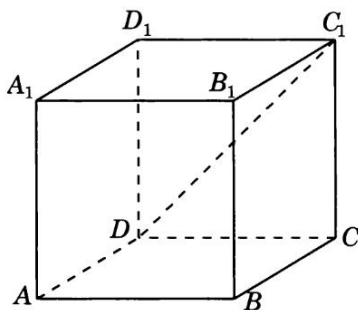


Уровень В

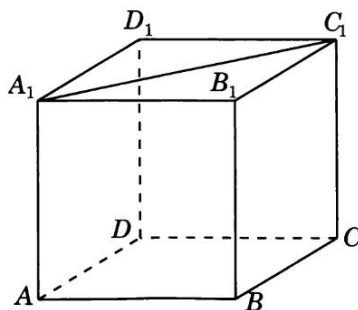
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и CD_1 .



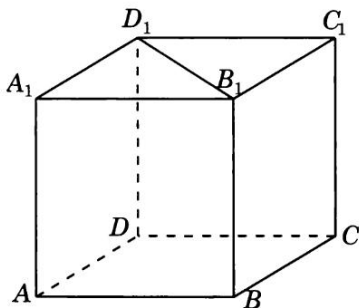
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и DC_1 .



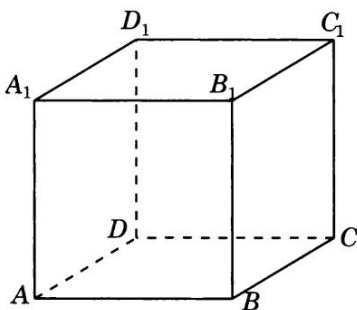
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 .



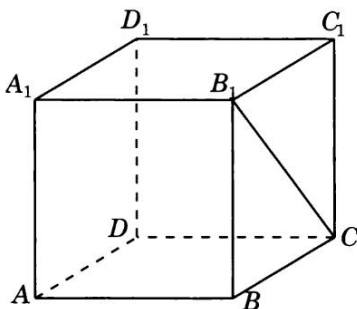
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и B_1D_1 .



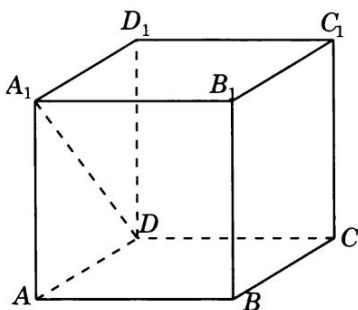
5. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и C_1D_1 .



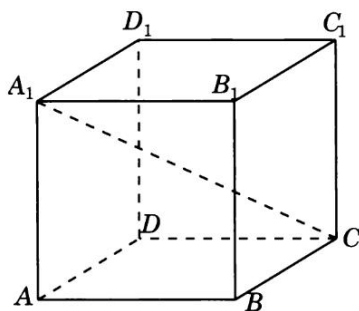
6. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1 .



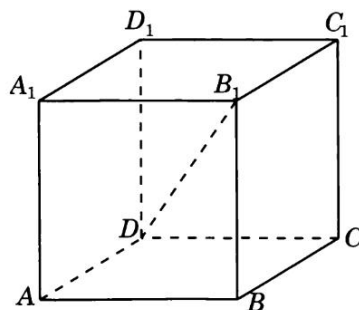
7. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и DA_1 .



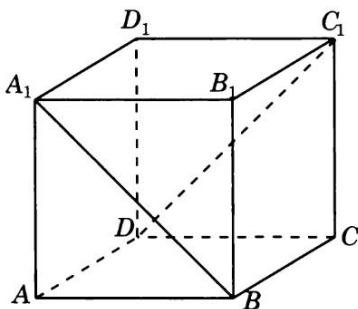
8. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и CA_1 .



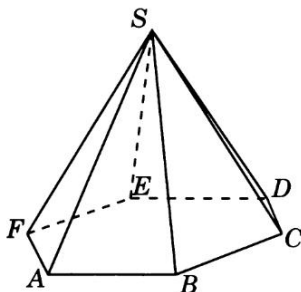
9. В кубе $A...D_1$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между прямыми AB и DB_1 .



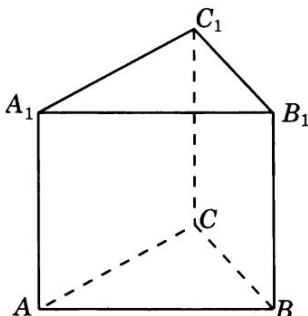
10. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DC_1 .



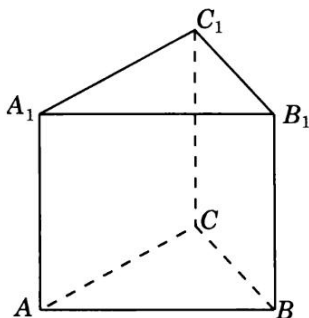
11. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BC и EF .



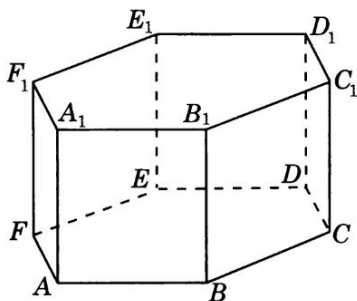
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1 .



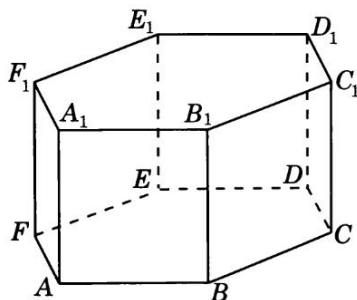
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1C_1 .



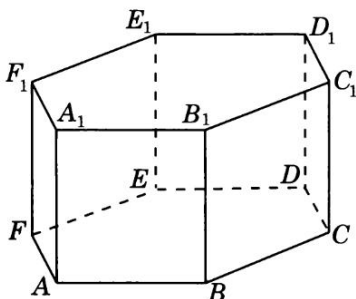
14. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и C_1D_1 .



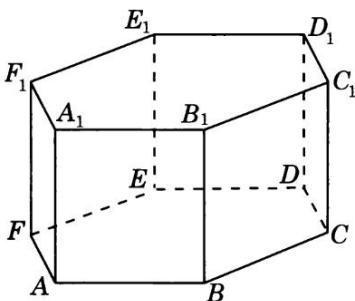
15. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и D_1E_1 .



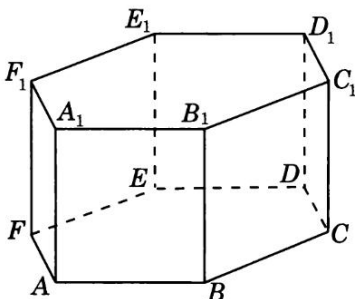
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и E_1F_1 .



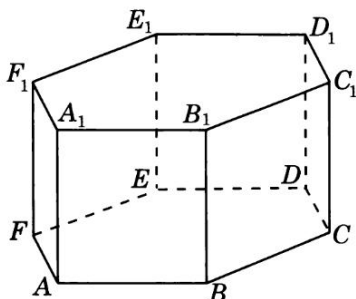
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1F_1 .



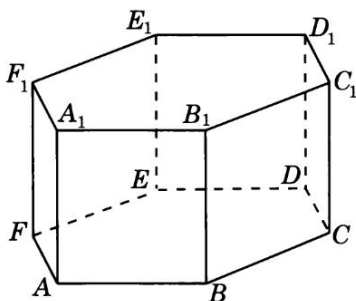
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и A_1B_1 .



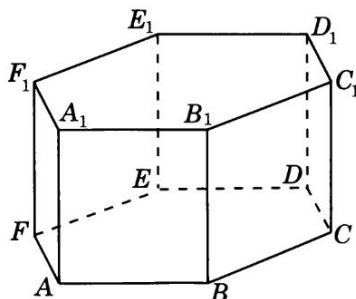
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BC и EF .



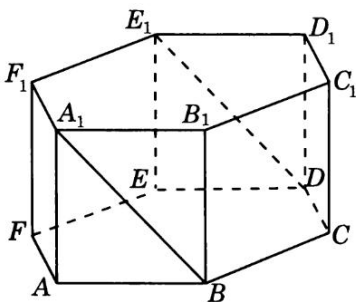
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DD_1 .



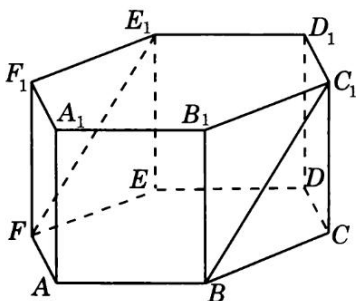
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EE_1 .



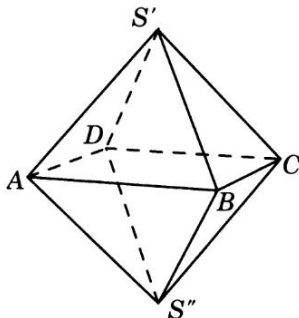
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BA_1 и DE_1 .



23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между прямыми BC_1 и FE_1 .

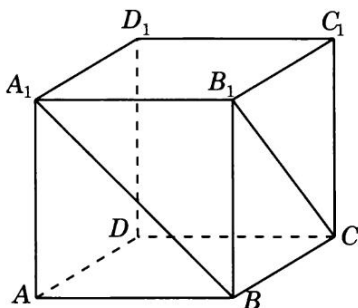


24. Ребро октаэдра равно 1. Найдите расстояние между его противоположными ребрами.

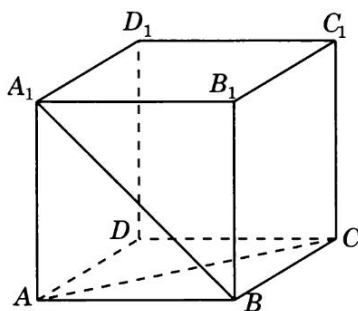


Уровень С

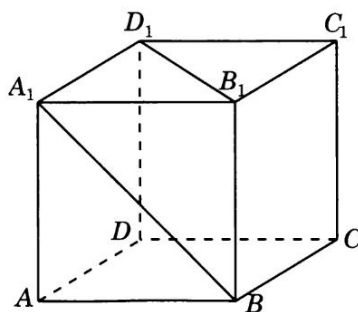
1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 .



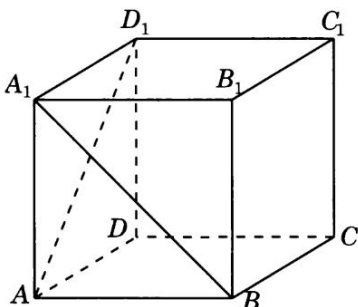
2. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC .



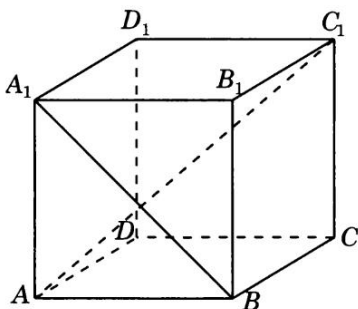
3. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и B_1D_1 .



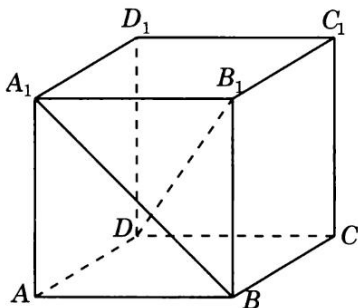
4. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и AD_1 .



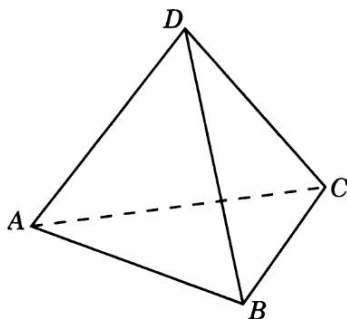
5. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 .



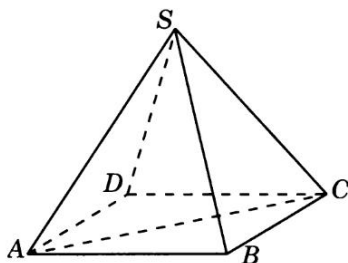
6. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1 .



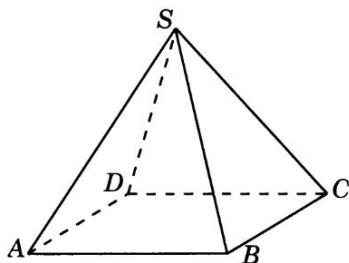
7. В единичном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние между прямыми AD и BC .



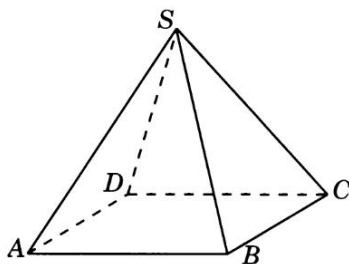
8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SB и AC .



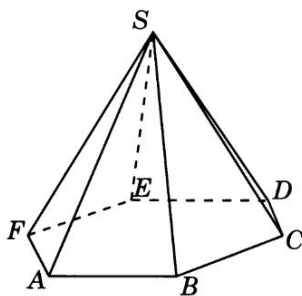
9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SB и AD .



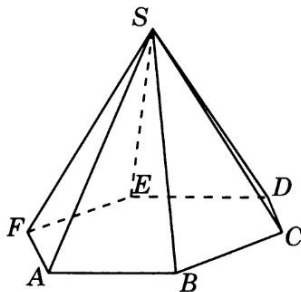
10. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SB и CD .



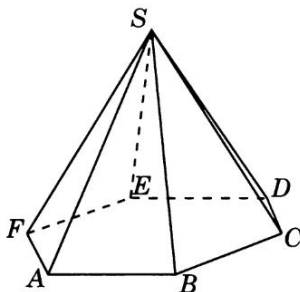
11. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и AF .



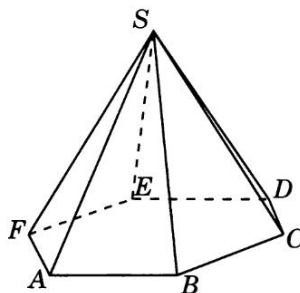
12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и EF .



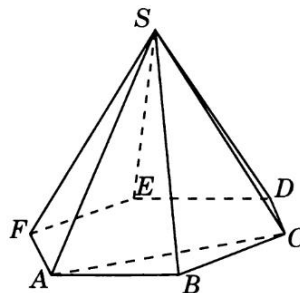
13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и CD .



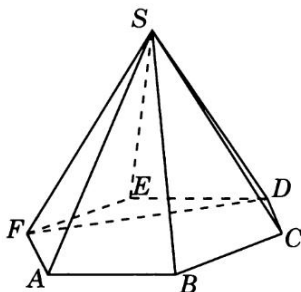
14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и DE .



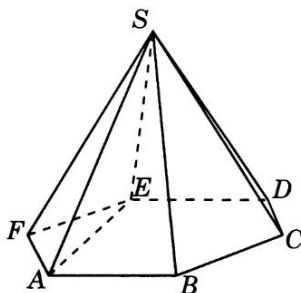
15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и AC .



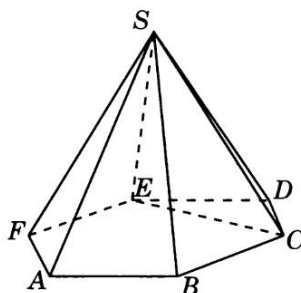
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и DF .



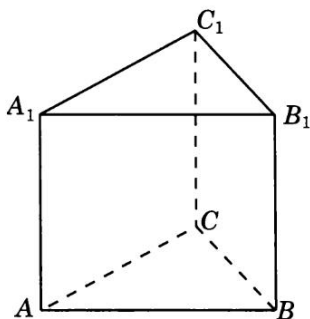
17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и AE .



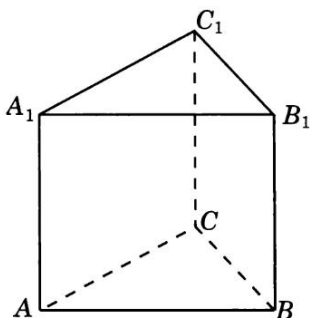
18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и CE .



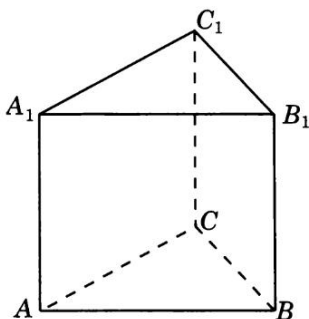
19. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CC_1 и AB .



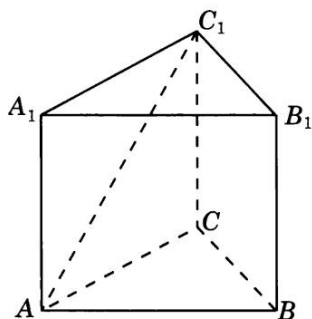
20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC .



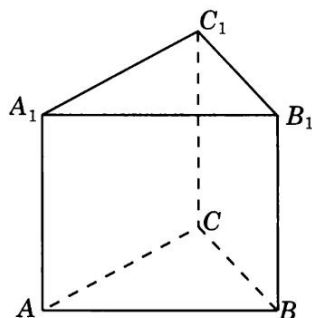
21. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC .



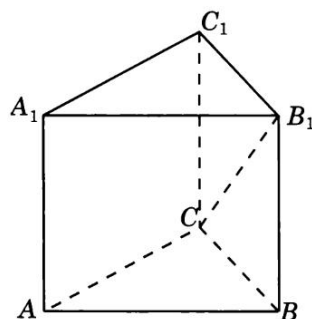
22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC_1 .



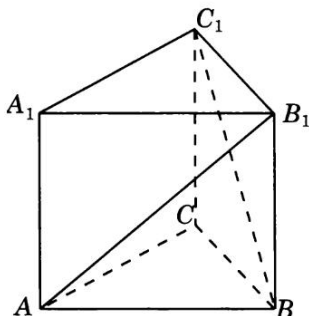
23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и A_1C_1 .



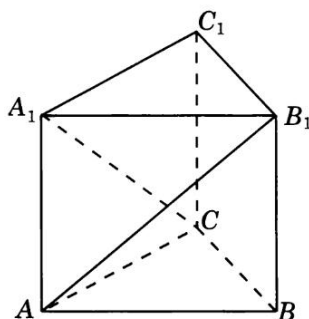
24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1 .



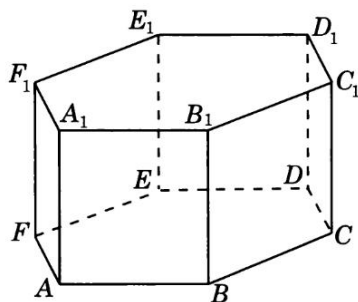
25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 .



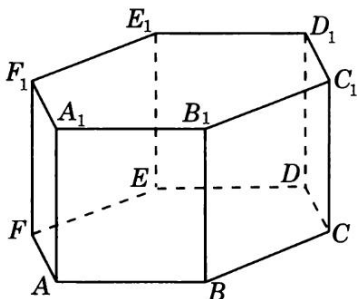
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и CA_1 .



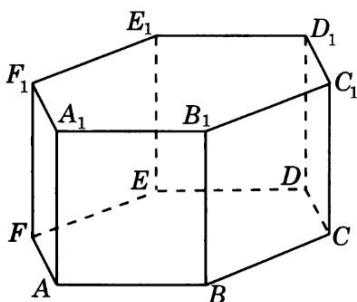
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и EE_1 .



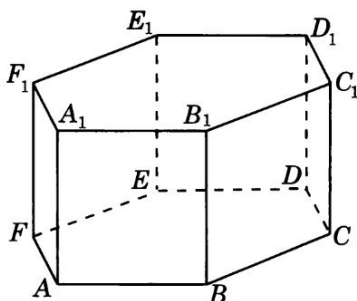
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и C_1D_1 .



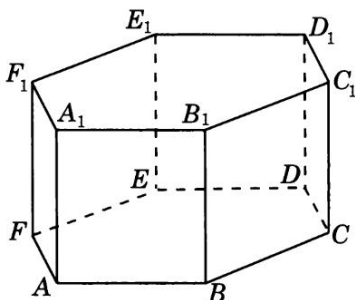
29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и D_1E_1 .



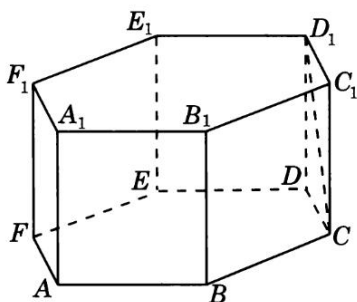
30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и E_1F_1 .



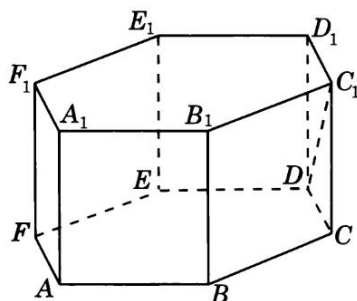
31. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и A_1F_1 .



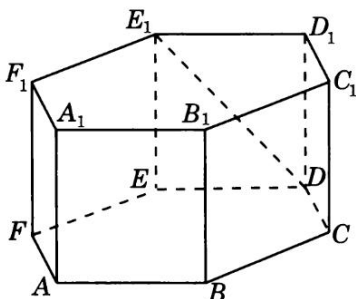
32. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CD_1 .



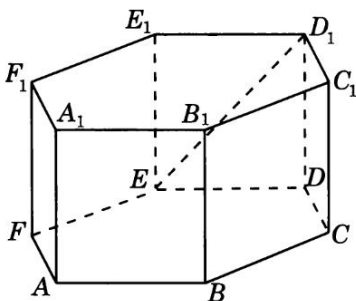
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DC_1 .



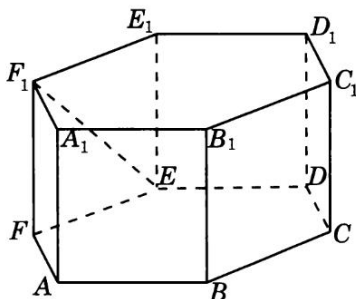
34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DE_1 .



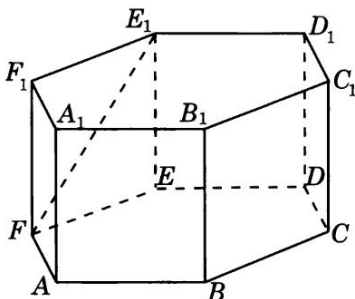
35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и ED_1 .



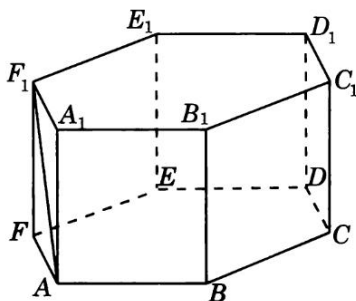
36. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EF_1 .



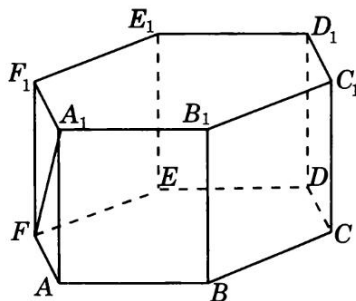
37. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и FE_1 .



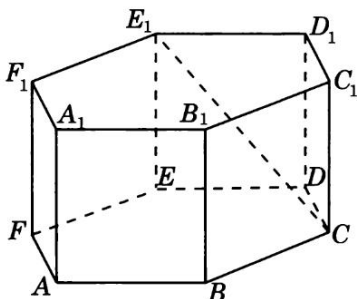
38. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AF_1 .



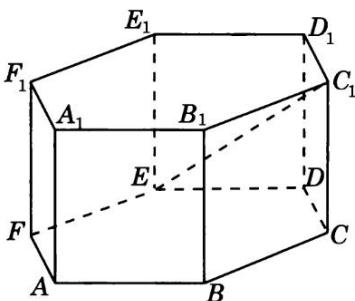
39. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и FA_1 .



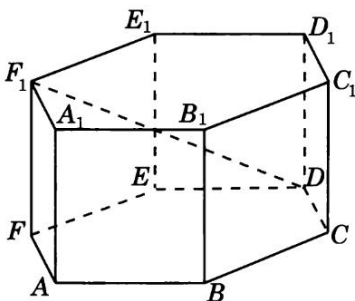
40. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CE_1 .



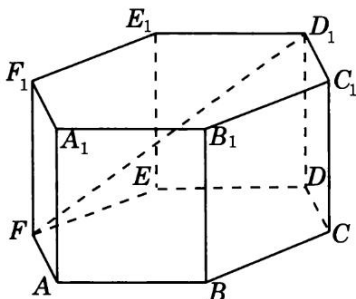
41. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EC_1 .



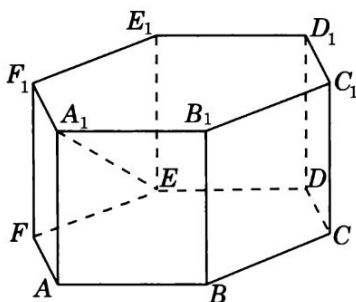
42. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DF_1 .



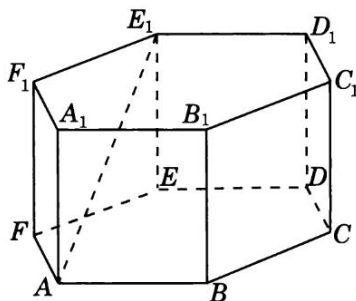
43. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и FD_1 .



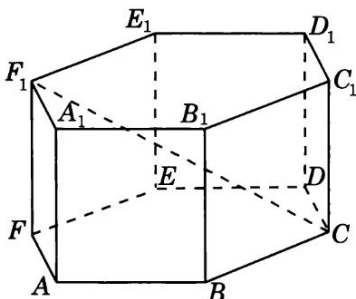
44. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и EA_1 .



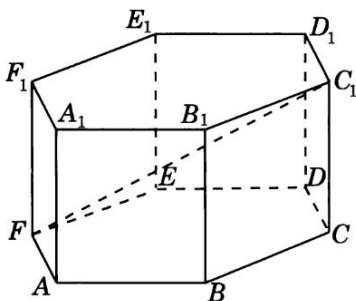
45. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AE_1 .



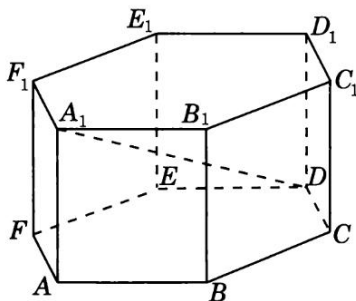
46. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CF_1 .



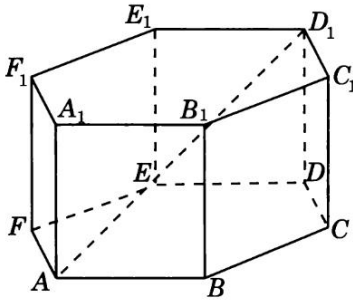
47. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и FC_1 .



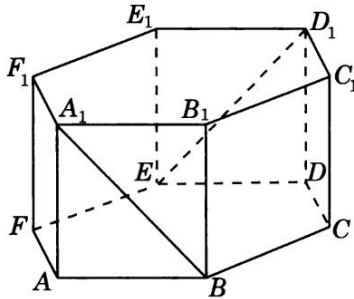
48. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и DA_1 .



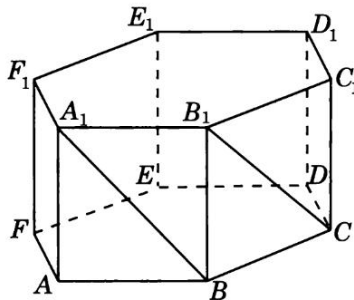
49. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AD_1 .



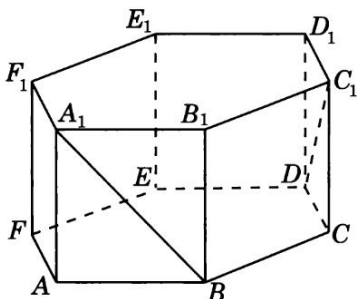
50. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и ED_1 .



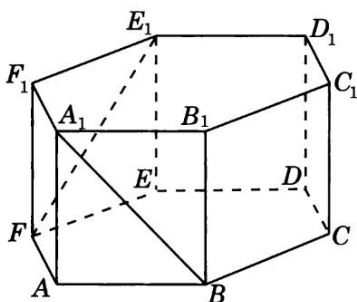
51. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 .



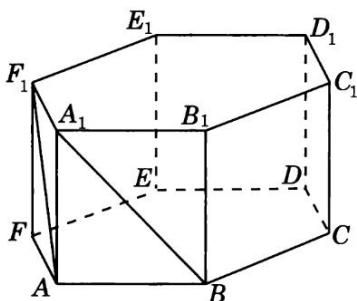
52. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и DC_1 .



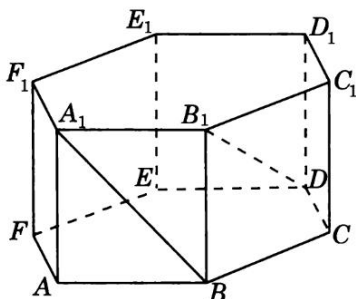
53. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и FE_1 .



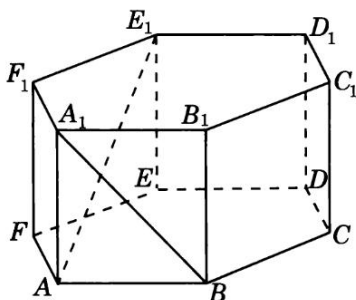
54. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и AF_1 .



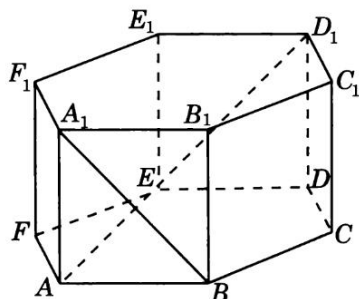
55. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1 .



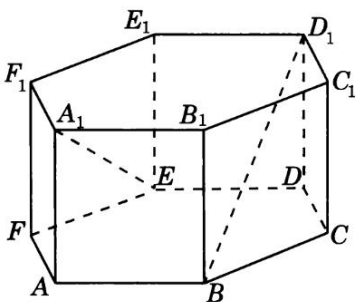
56. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и AE_1 .



57. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BA_1 и AD_1 .



58. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD_1 и EA_1 .

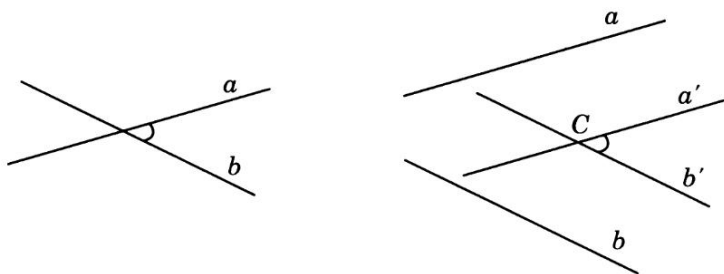


5. Угол между прямыми в пространстве

В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение углов между двумя прямыми в пространстве. При этом используются теорема о трех перпендикулярах, признак перпендикулярности прямой и плоскости, тригонометрические функции углов треугольника и теорема косинусов. В ответах будем указывать только численные значения величин углов без знака градуса.

Общие сведения

Определение 1. Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



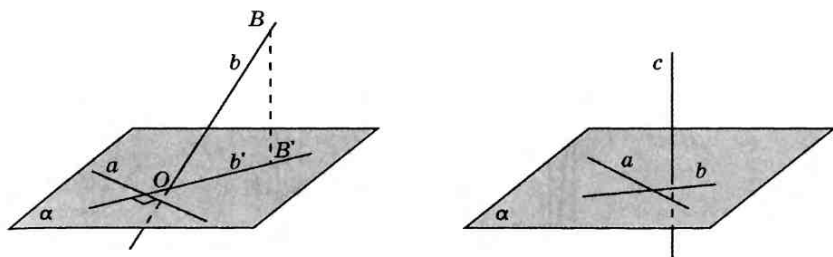
Для того чтобы найти угол между двумя пересекающимися прямыми, выбирают какой-нибудь треугольник, одним из углов которого является искомый угол. Если этот треугольник прямоугольный, то для нахождения угла используют тригонометрические функции, если треугольник произвольный, то используют теорему косинусов.

Определение 2. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Определение 3. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°

Теорема 1. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпен-

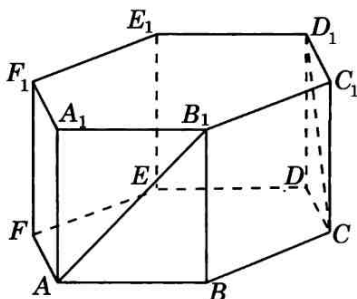
дикулярна и самой наклонной.



Теорема 2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

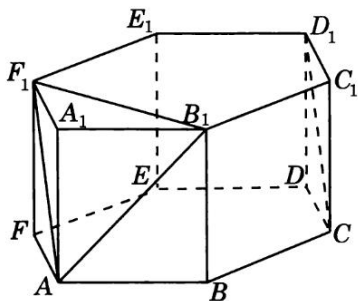
Для того чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми a и b , выбирают какую-нибудь точку C и проводят через нее прямые a' , b' , соответственно параллельные a , b . Искомый угол будет равен углу между пересекающимися прямыми a' и b' .

В качестве примера для правильной шестиугольной призмы $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдем угол между прямыми AB_1 и CD_1 .



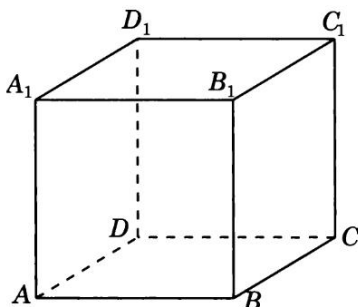
Заметим, что прямая AF_1 параллельна прямой CD_1 и, следовательно, искомый угол равен углу B_1AF_1 . В треугольнике B_1AF_1 $AB_1 = AF_1 = \sqrt{2}$, $B_1F_1 = \sqrt{3}$. По теореме косинусов получаем, что косинус искомо-

го угла равен $\frac{1}{4}$.

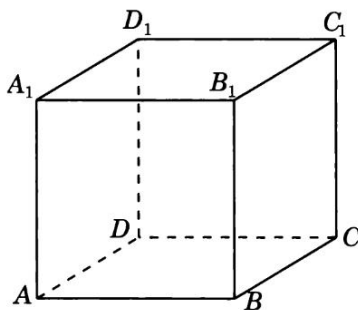


Задачи**Уровень А**

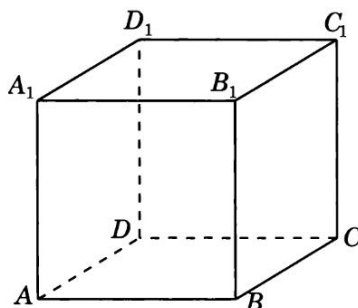
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CC_1 .



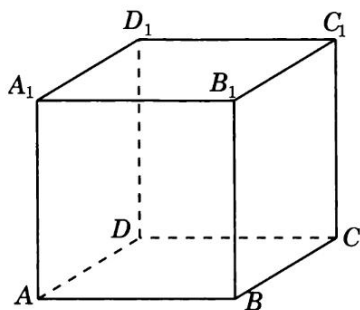
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и B_1C_1 .



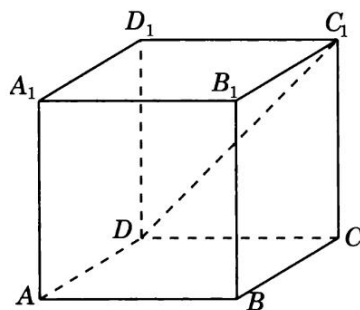
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DD_1 .



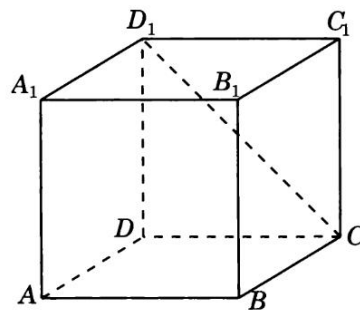
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и A_1D_1 .



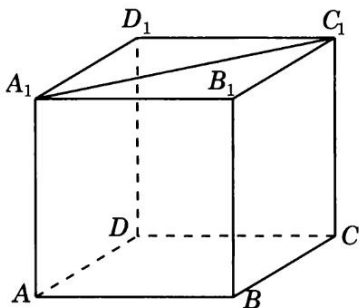
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DC_1 .



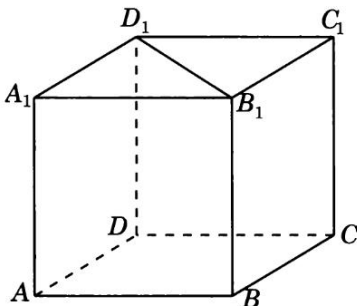
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CD_1 .



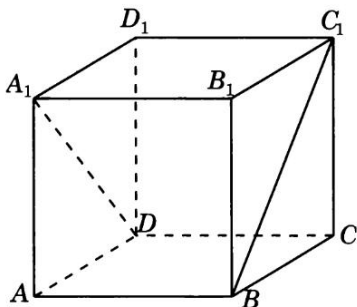
7. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и A_1C_1 .



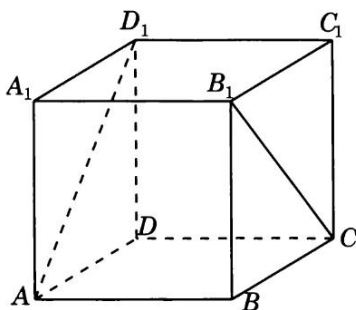
8. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и B_1D_1 .



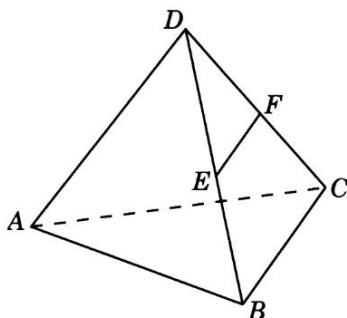
9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и DA_1 .



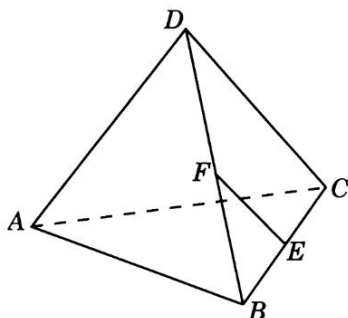
10. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CB_1 и AD_1 .



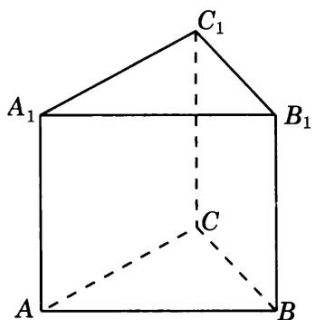
11. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BD и CD . Найдите угол между прямыми AB и EF .



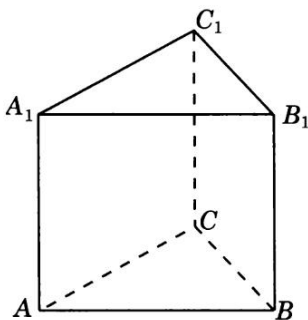
12. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BC и BD . Найдите угол между прямыми AD и EF .



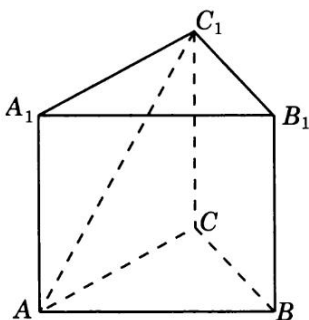
13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C_1 .



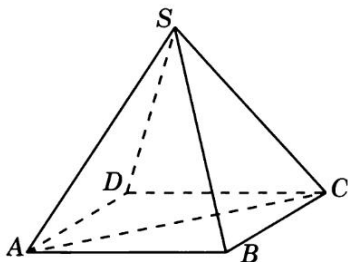
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и AC .



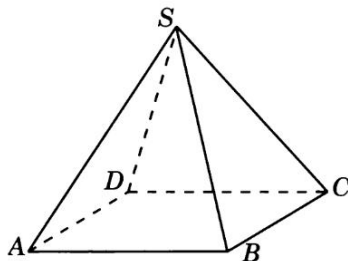
15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 .



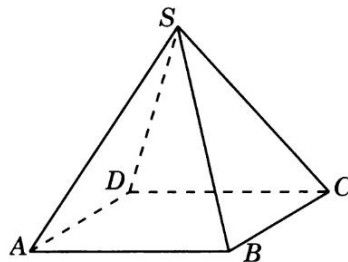
16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол SAC .



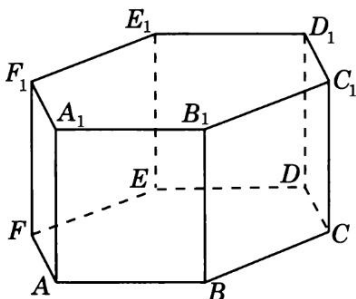
17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SB и AD .



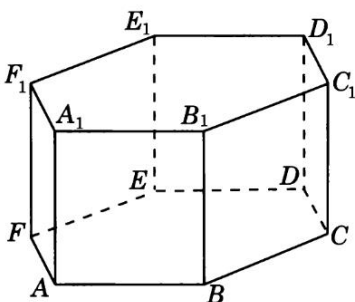
18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SC и AB .



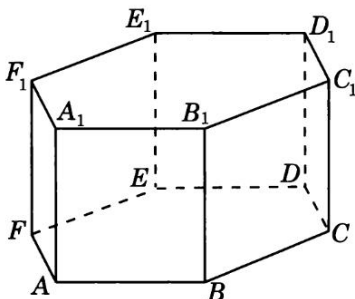
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и B_1C_1 .



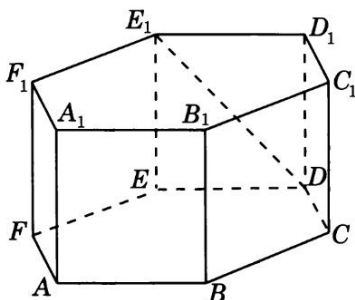
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и C_1D_1 .



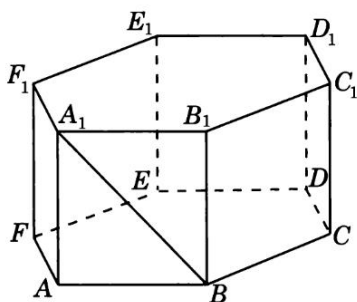
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и CC_1 .



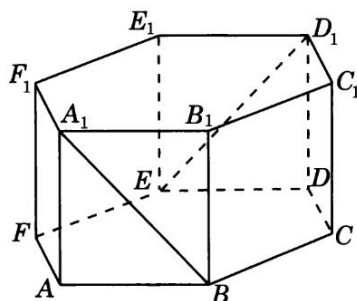
22. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и DE_1 .



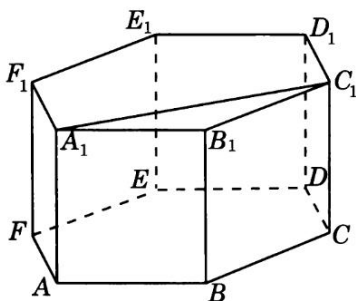
23. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и CC_1 .



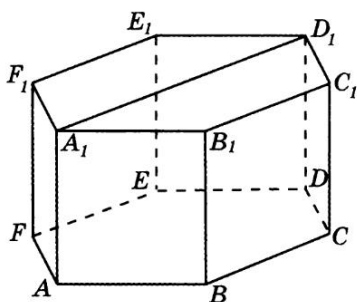
24. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и ED_1 .



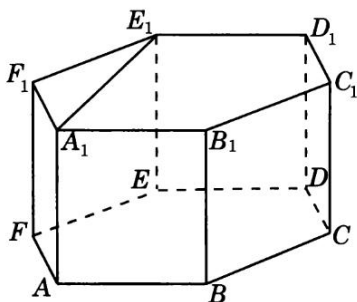
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C_1 .



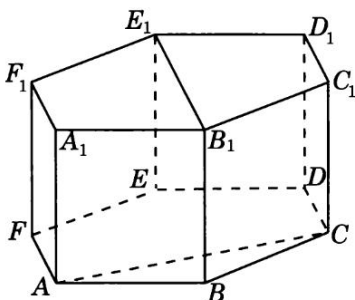
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1D_1 .



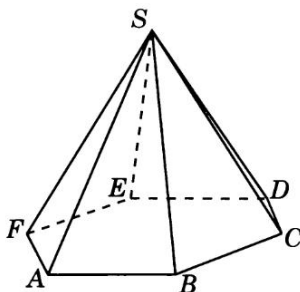
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1E_1 .



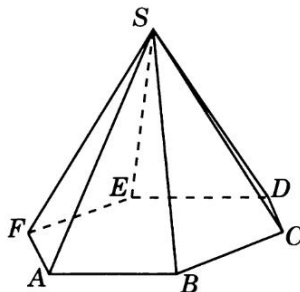
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1E_1 .



29. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол ASD .

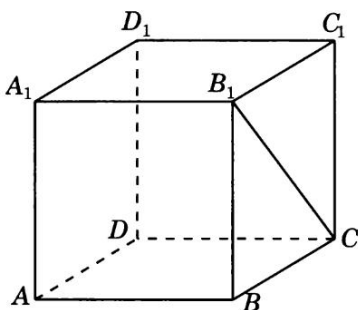


30. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SA и BC .

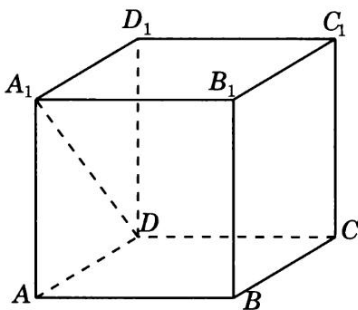


Уровень В

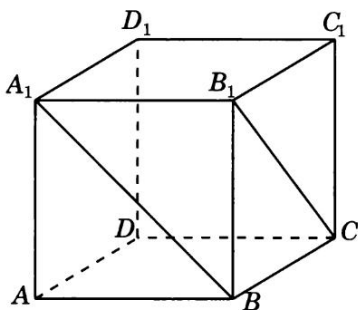
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CB_1 .



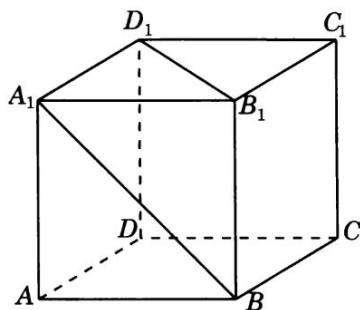
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DA_1 .



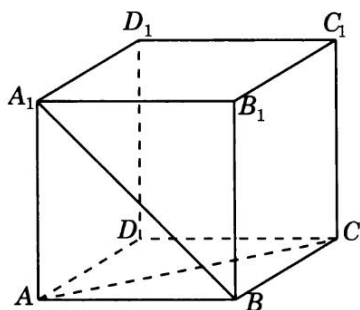
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и CB_1 .



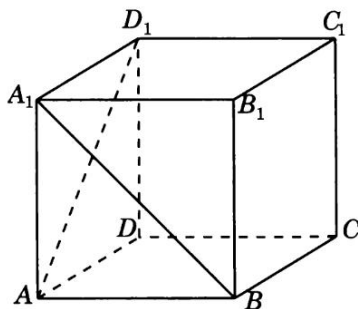
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1 .



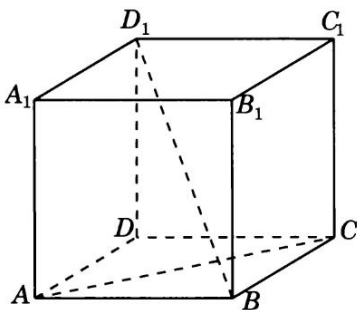
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AC .



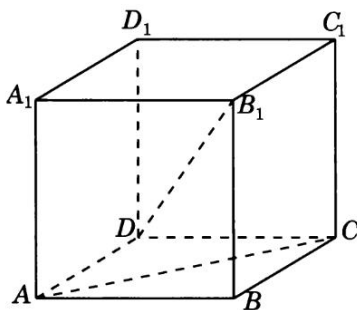
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AD_1 .



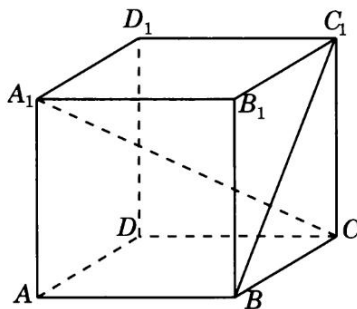
7. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1 .



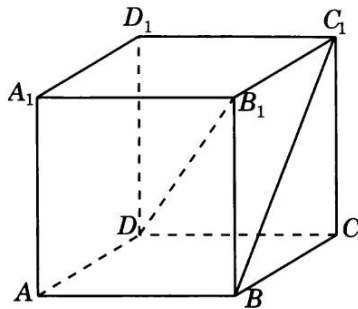
8. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и DB_1 .



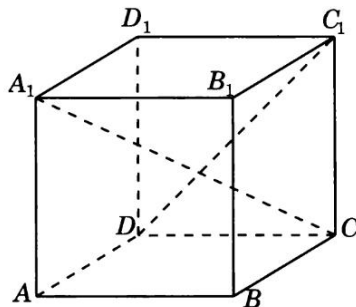
9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и CA_1 .



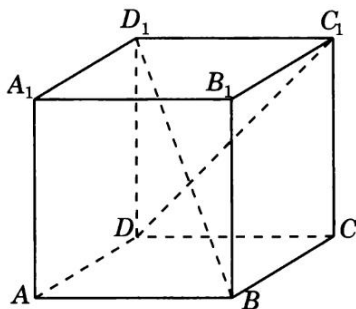
10. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и DB_1 .



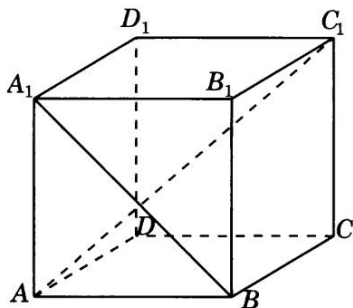
11. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CA_1 и DC_1 .



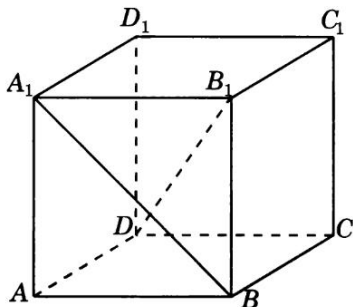
12. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BD_1 и DC_1 .



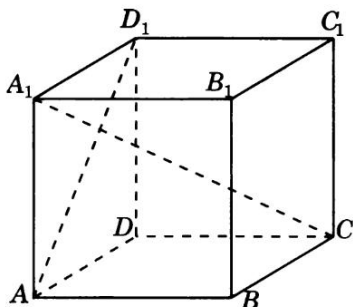
13. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и AC_1 .



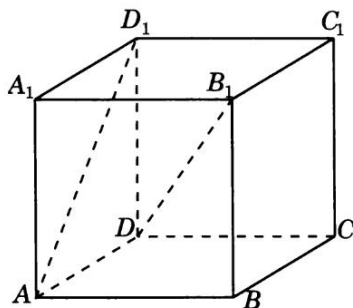
14. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1 .



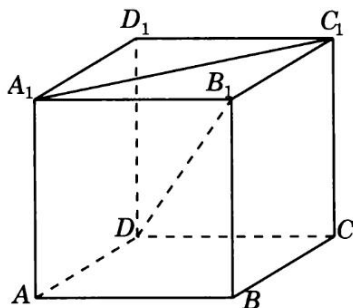
15. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и CA_1 .



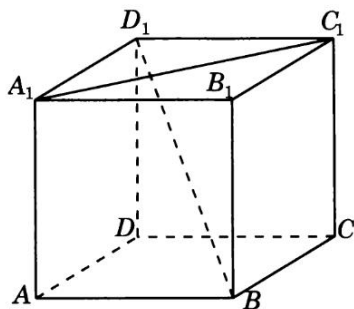
16. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DB_1 .



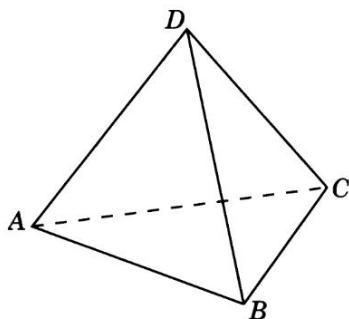
17. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и DB_1 .



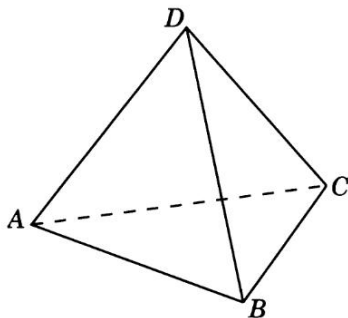
18. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и BD_1 .



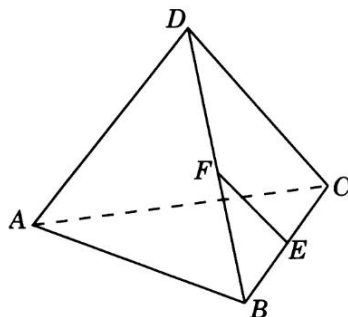
19. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AB и CD .



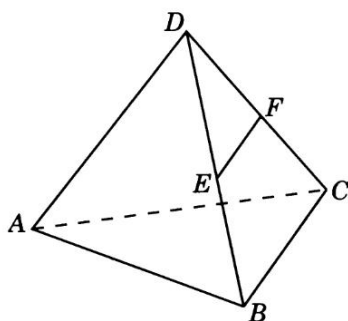
20. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AC и BD .



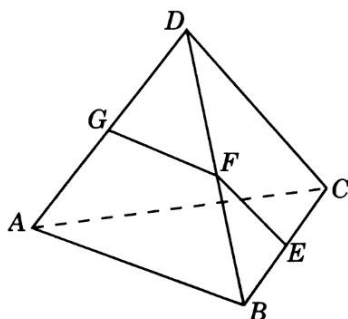
21. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BC и BD . Найдите угол между прямыми AB и EF .



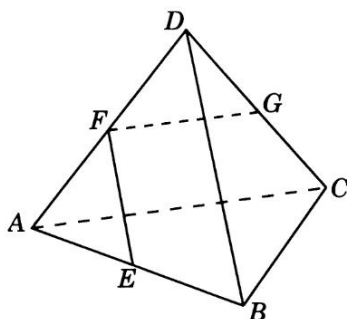
22. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно BD и CD . Найдите угол между прямыми AD и EF .



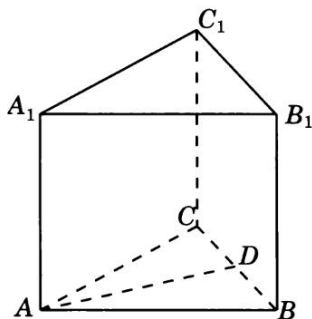
23. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G — середины ребер соответственно BC, BD, AD . Найдите угол EFG .



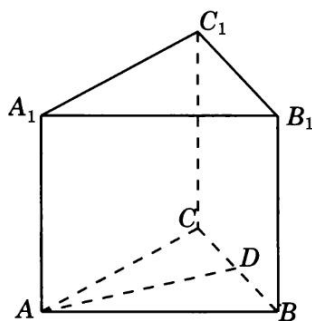
24. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G — середины ребер соответственно AB, AD, CD . Найдите угол EFG .



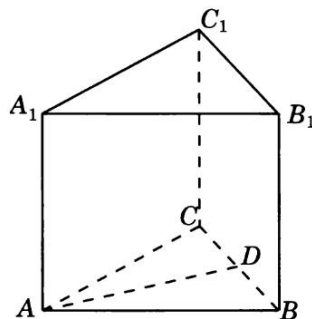
25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC . Найдите угол между прямыми BB_1 и AD .



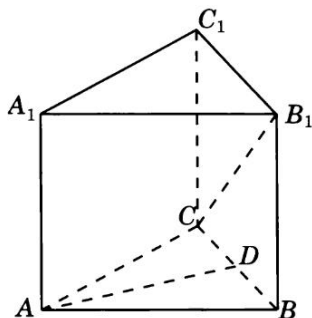
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC . Найдите угол между прямыми A_1C_1 и AD .



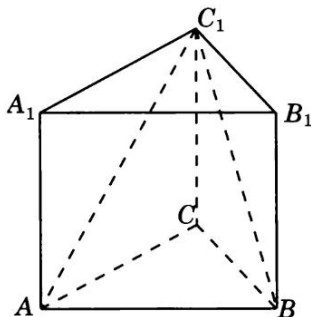
27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC . Найдите угол между прямыми B_1C_1 и AD .



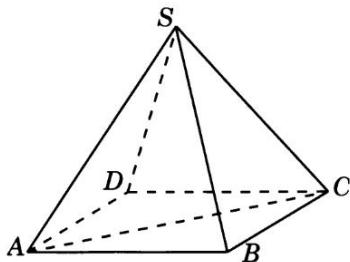
28. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра BC . Найдите угол между прямыми CB_1 и AD .



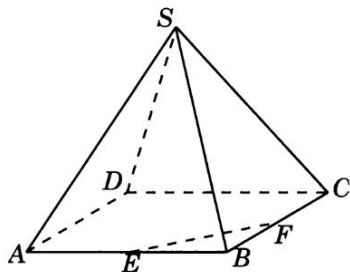
29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла AC_1B .



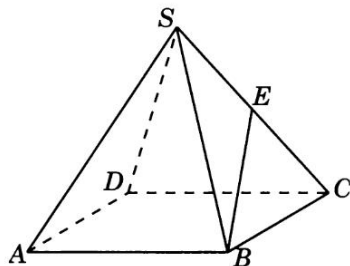
30. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SB и AC .



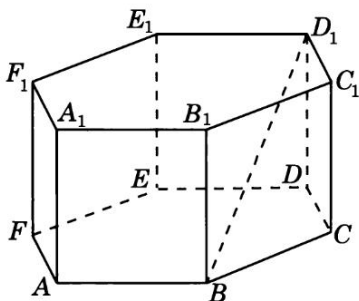
31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно AB, BC . Найдите угол между прямыми SA и EF .



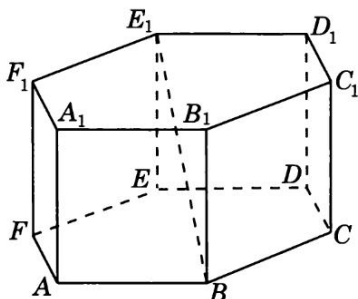
32. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC . Найдите угол между прямыми AD и BE .



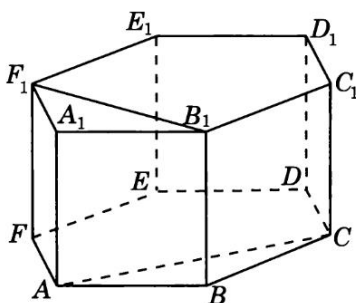
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол ABD_1 .



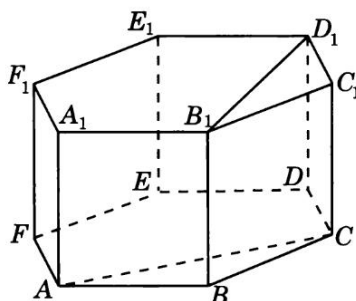
34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла ABE_1 .



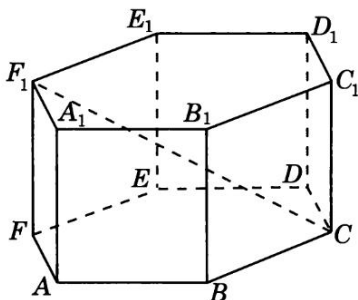
35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1F_1 .



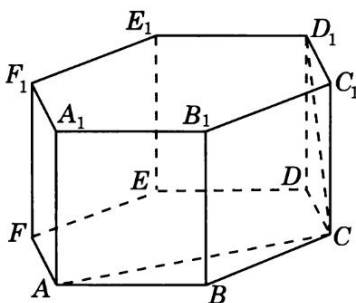
36. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1D_1 .



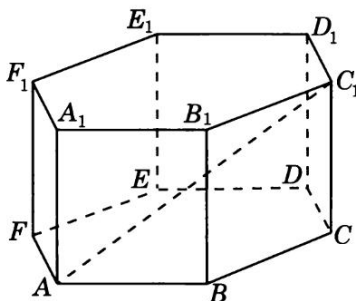
37. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми AB и CF_1 .



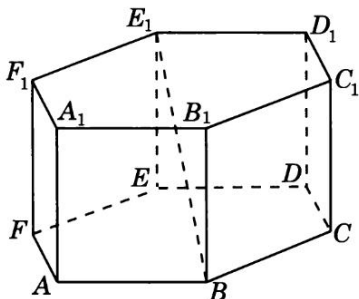
38. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол ACD_1 .



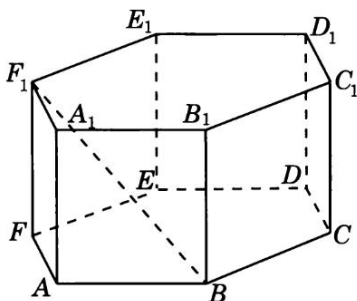
39. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол AC_1D_1 .



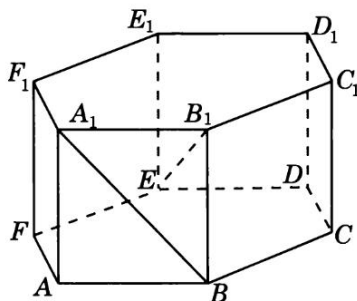
40. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямыми CC_1 и BE_1 .



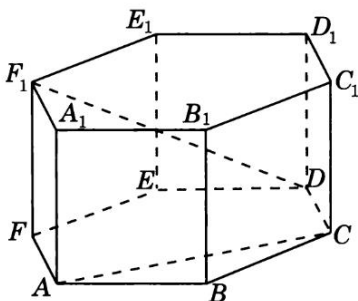
41. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BF_1 и CC_1 .



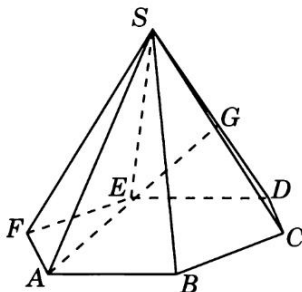
42. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и B_1E .



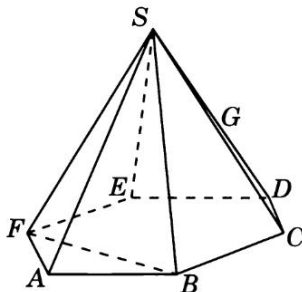
43. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и DF_1 .



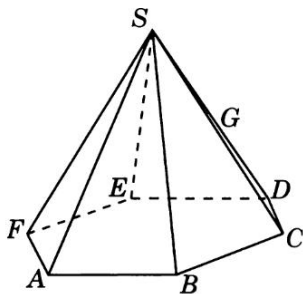
44. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка G — середина ребра SD . Найдите угол между прямыми AG и BC .



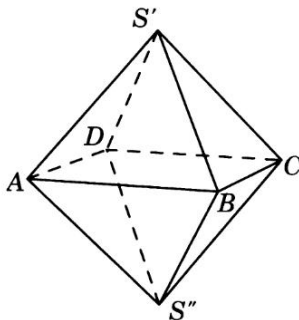
45. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SA и BF .



46. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SA и DE .

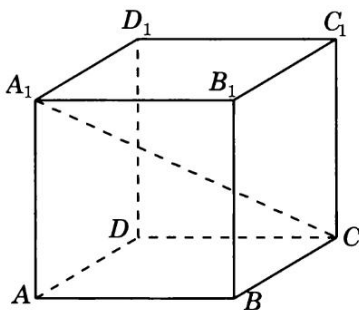


47. Найдите угол между скрещивающимися ребрами октаэдра.

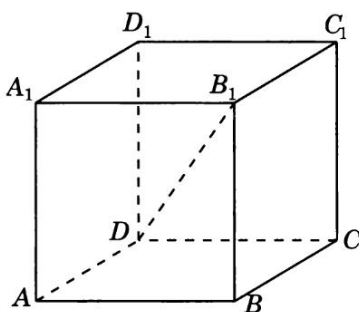


Уровень С

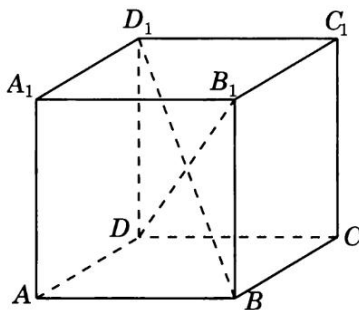
1. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1 .



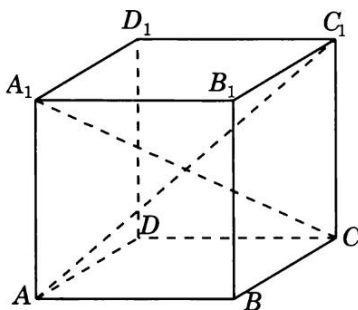
2. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямыми AB и DB_1 .



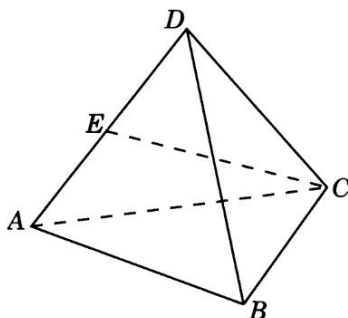
3. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между прямыми BD_1 и DB_1 .



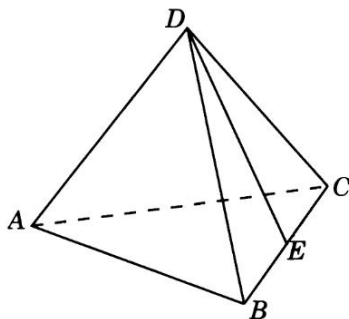
4. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между прямыми AC_1 и CA_1 .



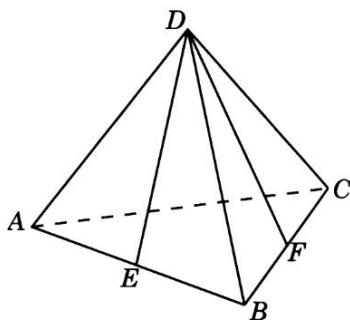
5. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD . Найдите косинус угла между прямыми AB и CE .



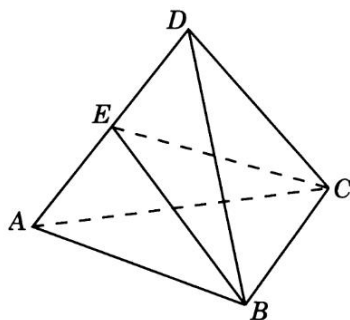
6. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BC . Найдите косинус угла между прямыми AB и DE .



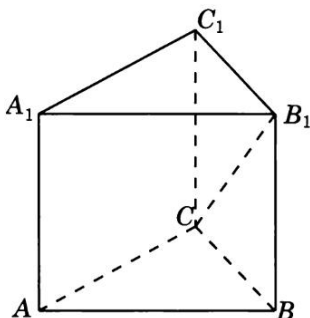
7. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F — середины ребер соответственно AB и BC . Найдите косинус угла EDF .



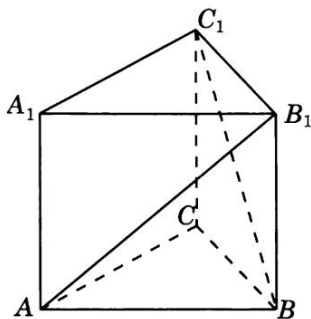
8. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD . Найдите косинус угла BEC .



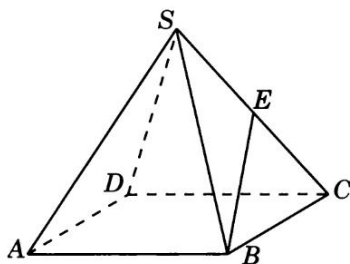
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и CB_1 .



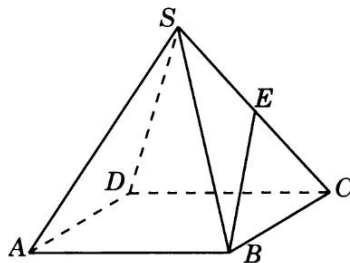
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



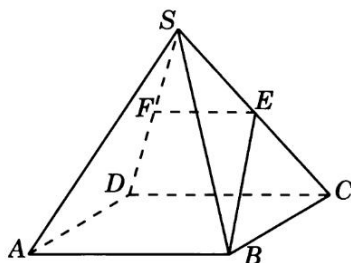
11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC . Найдите тангенс угла между прямыми SA и BE .



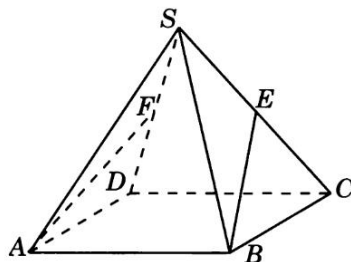
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC . Найдите косинус угла ABE .



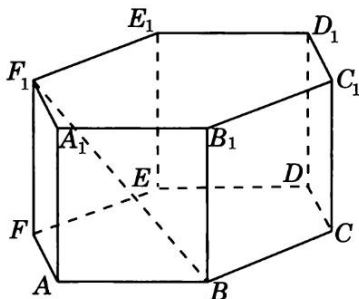
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно SC и SD . Найдите косинус угла BEF .



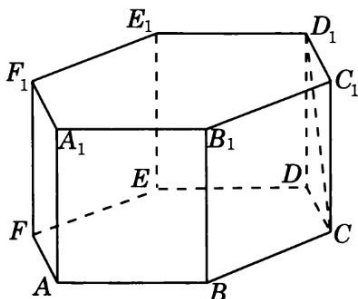
14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F — середины ребер соответственно SC и SD . Найдите косинус угла между прямыми AF и BE .



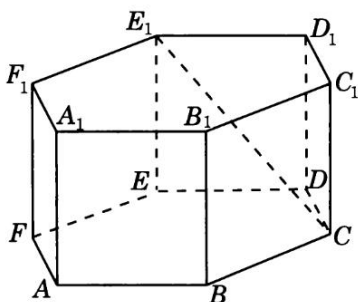
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла ABF_1 .



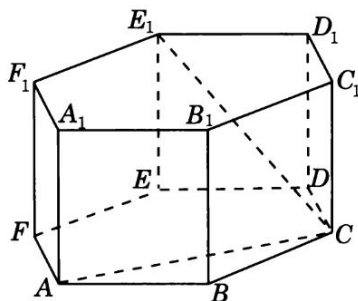
16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и CD_1 .



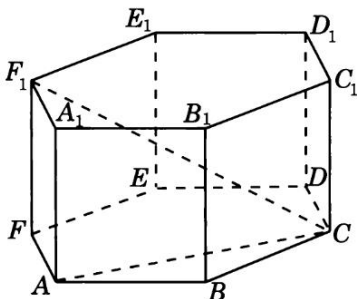
17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и CE_1 .



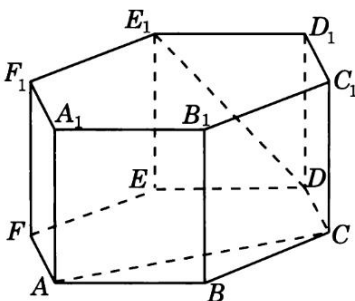
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла ACE_1 .



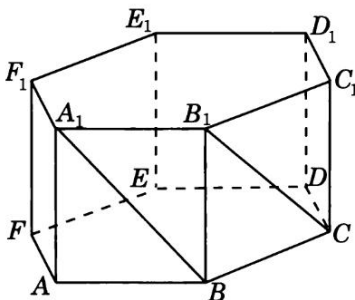
19. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла ACF_1 .



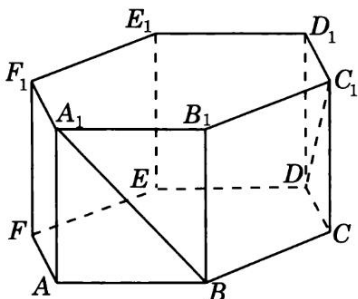
20. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC и DE_1 .



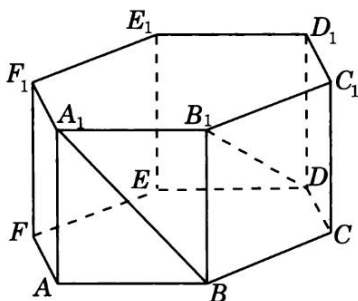
21. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и CB_1 .



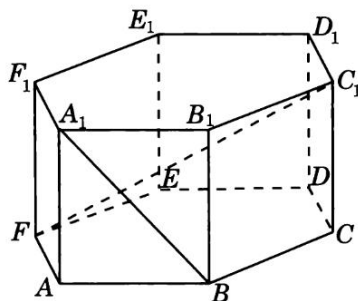
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и DC_1 .



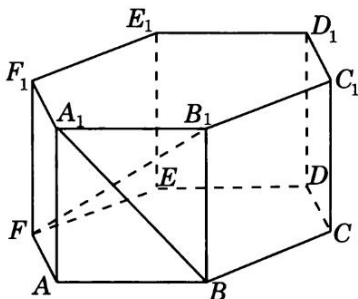
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и DB_1 .



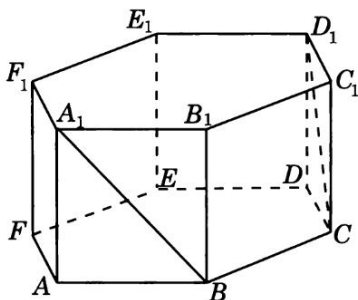
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и FC_1 .



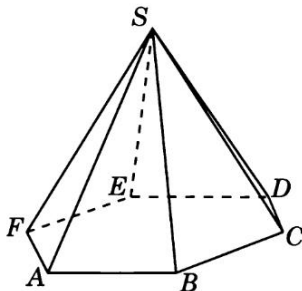
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и FB_1 .



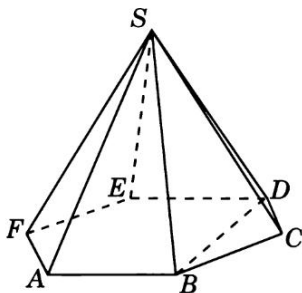
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми BA_1 и CD_1 .



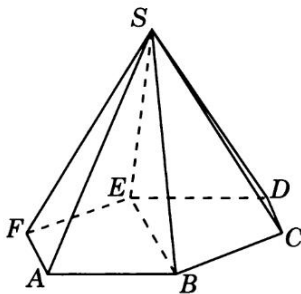
27. В правильной шестиугольной пирамиде $SAB CDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла ASC .



28. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SA и BD .



29. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SA и BE .



6. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

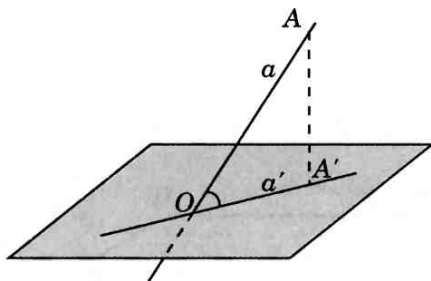
В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение углов между прямой и плоскостью в пространстве. При этом используются методы нахождения угла между пересекающимися прямыми, тригонометрические функции углов треугольника и теорема косинусов. В ответах будем указывать только численные значения величин углов без знака градуса.

Общие сведения

Определение. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.

Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.

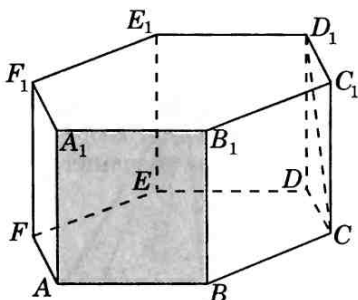
Для нахождения угла между наклонной a и плоскостью α , пересекающей эту наклонную в некоторой точке O , выбирают какую-нибудь точку A на прямой a и опускают из нее перпендикуляр AA' на плоскость α . Угол AOA' будет искомым углом между прямой a и плоскостью α . Для его нахождения можно использовать значения тригонометрических функций острых углов прямоугольного треугольника AOA' или теорему косинусов.



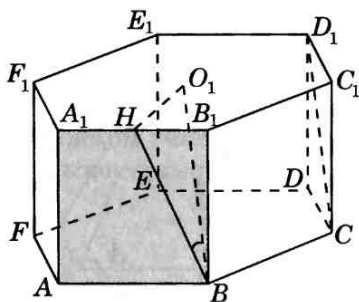
Если точка пересечения прямой a и плоскости α находится вне рисунка, данного в задаче, то выбирают какую-нибудь точку плоскости и проводят через нее прямую a' , параллельную данной. Искомый угол будет равен углу между новой прямой и плоскостью α .

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения угла между прямой CD_1 и плоскостью ABB_1 для правильной шестиугольной приз-

мы $A...F_1$, все ребра которой равны 1.



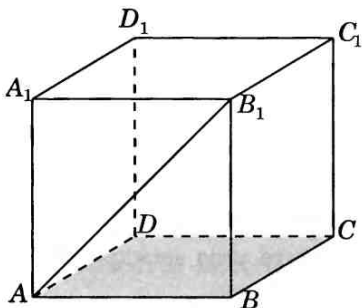
Пусть O_1 — центр верхнего основания, прямая O_1H перпендикулярна A_1B_1 . Прямая BO_1 параллельна CD_1 . Искомый угол φ равен углу HBO_1 . В прямоугольном треугольнике HBO_1 имеем $BO_1 = \sqrt{2}$, $O_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.



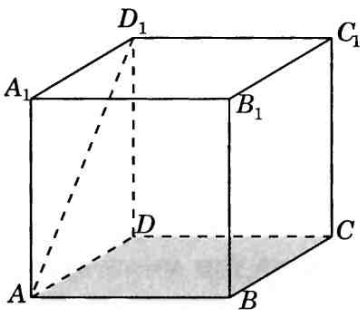
Задачи

Уровень А

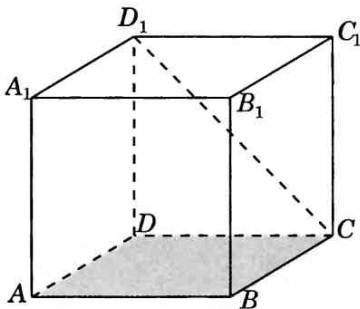
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC .



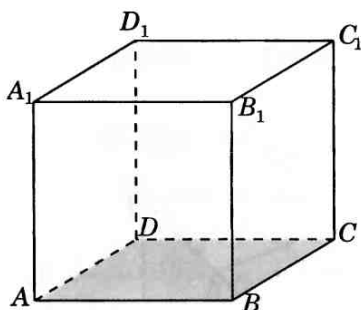
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC .



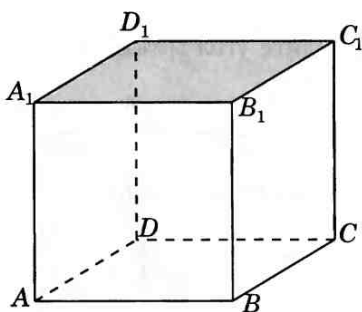
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью ABC .



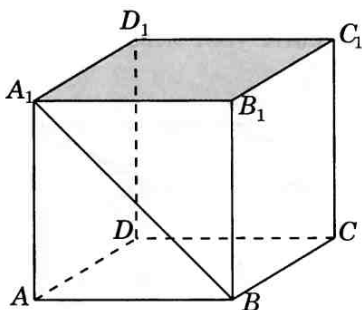
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью ABC .



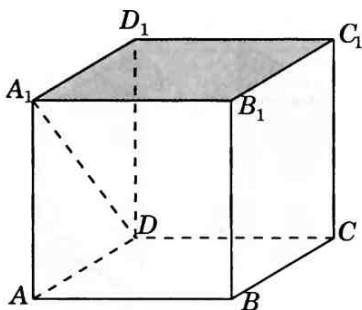
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$.



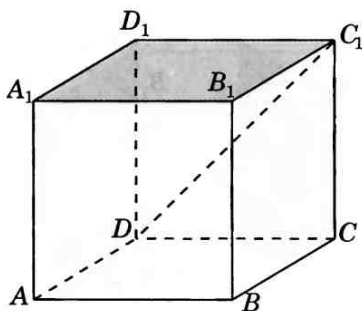
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$.



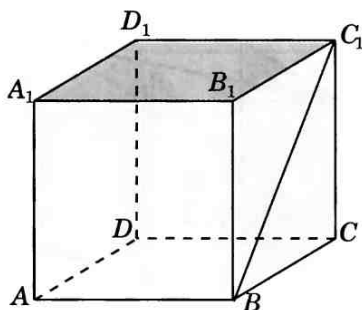
7. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DA_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$.



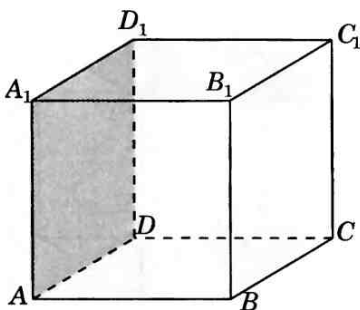
8. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$.



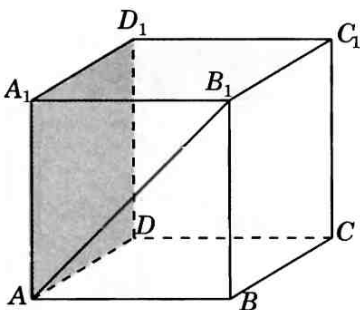
9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$.



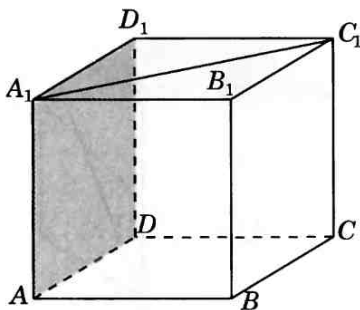
10. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью ADD_1 .



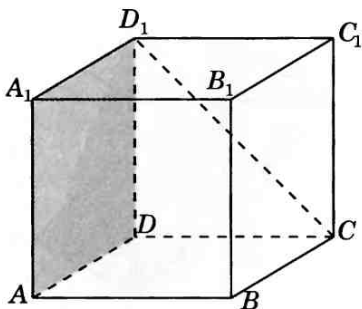
11. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ADD_1 .



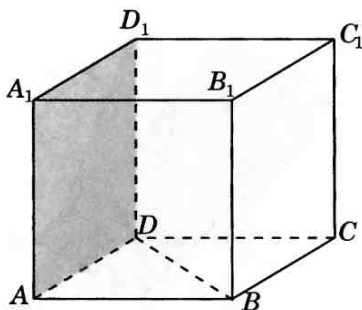
12. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1C_1 и плоскостью ADD_1 .



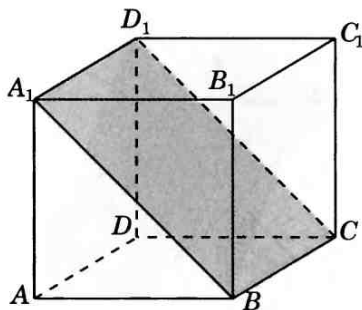
13. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью ADD_1 .



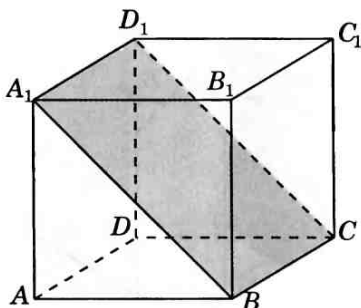
14. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DB и плоскостью ADD_1 .



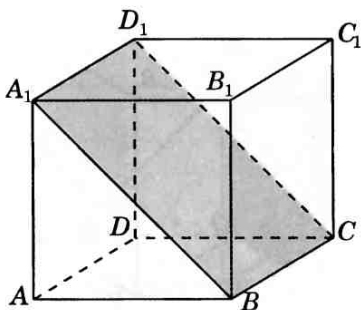
15. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью BCD_1 .



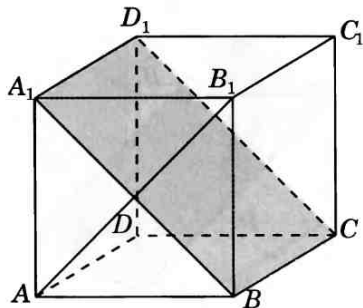
16. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BCD_1 .



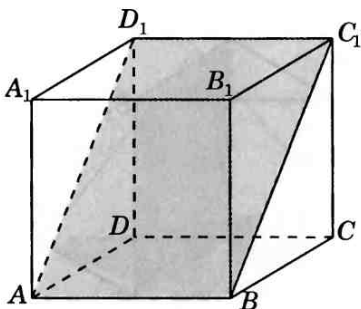
17. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BCD_1 .



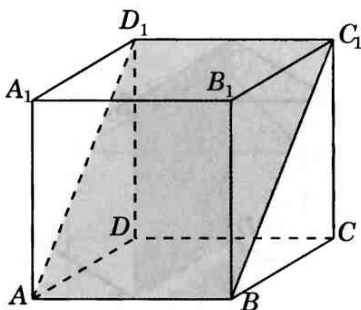
18. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCD_1 .



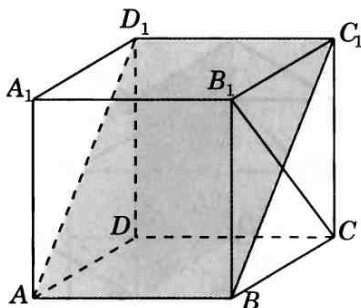
19. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1 .



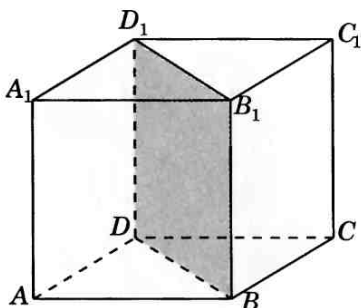
20. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BC и плоскостью ABC_1 .



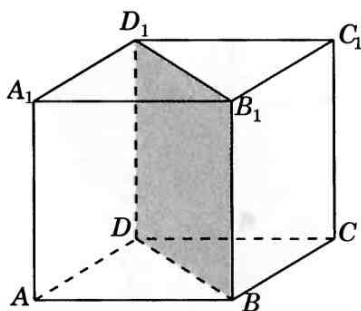
21. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью ABC_1 .



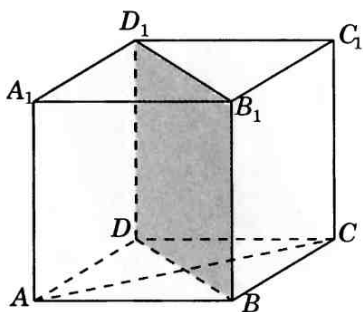
22. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью BDD_1 .



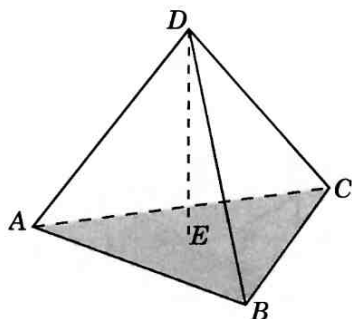
23. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой B_1C_1 и плоскостью BDD_1 .



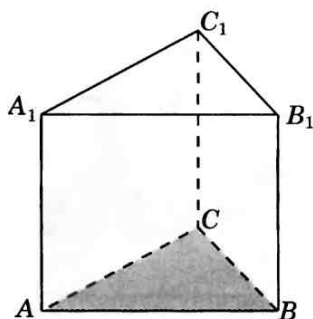
24. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BDD_1 .



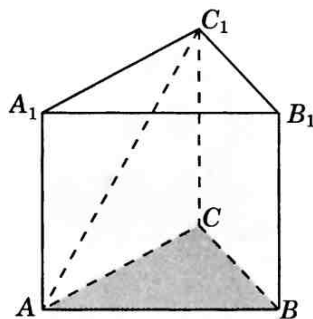
25. В правильном тетраэдре $ABCD$ E — точка пересечения медиан треугольника ABC . Найдите угол между прямой DE и плоскостью ABC .



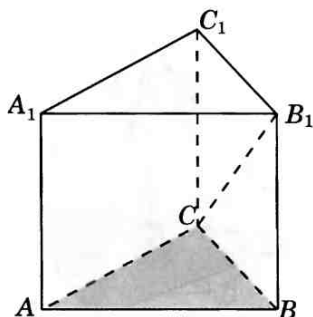
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABC .



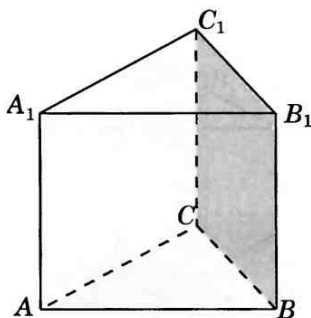
27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC .



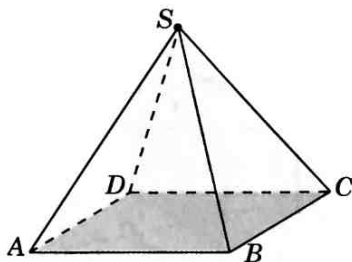
28. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью ABC .



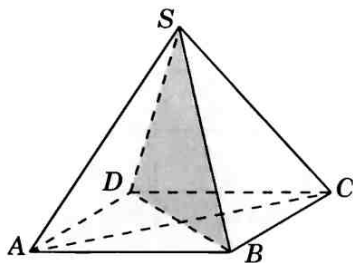
29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BCC_1 .



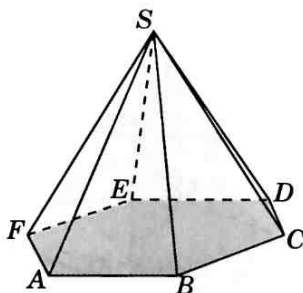
30. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SC и плоскостью ABC .



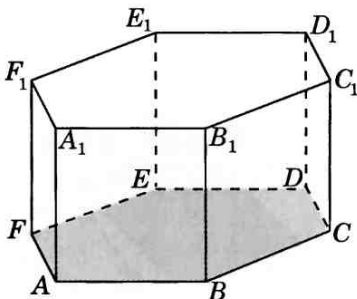
31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC и плоскостью SBD .



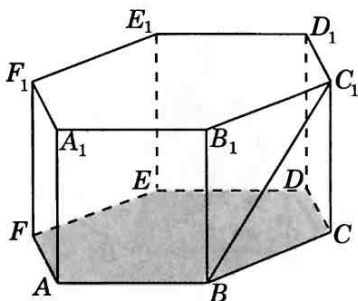
32. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC .



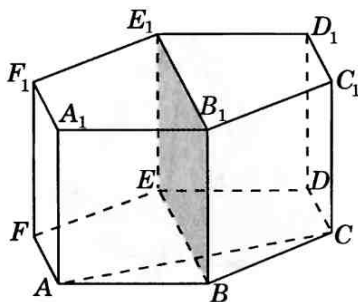
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью ABC .



34. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ABC .

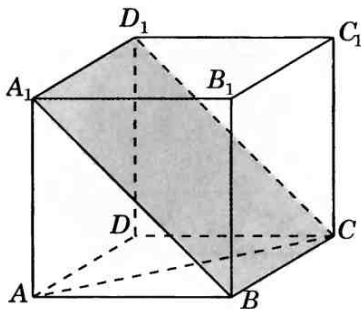


35. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BEE_1 .

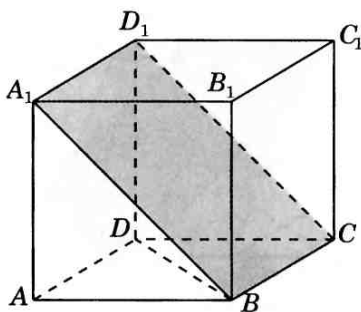


Уровень В

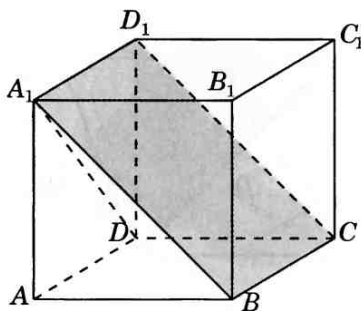
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BCD_1 .



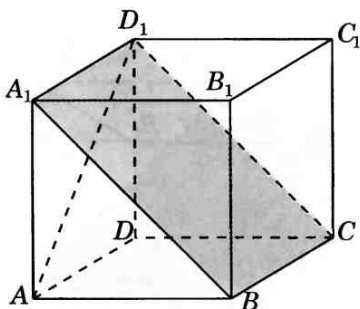
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BD и плоскостью BCD_1 .



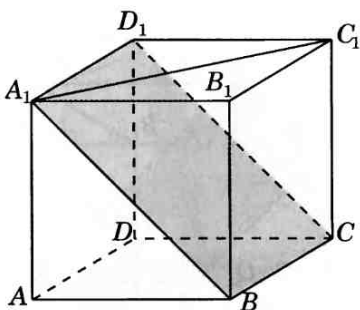
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DA_1 и плоскостью BCD_1 .



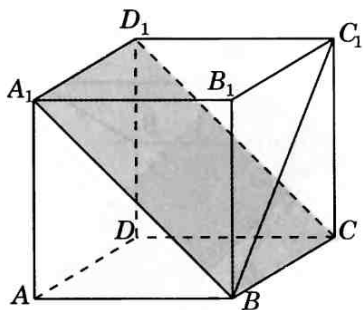
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью BCD_1 .



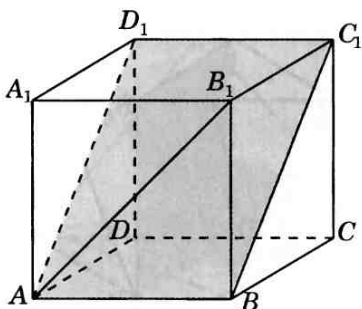
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1C_1 и плоскостью BCD_1 .



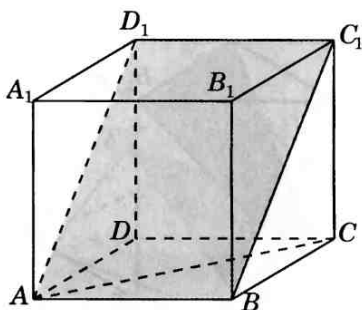
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BCD_1 .



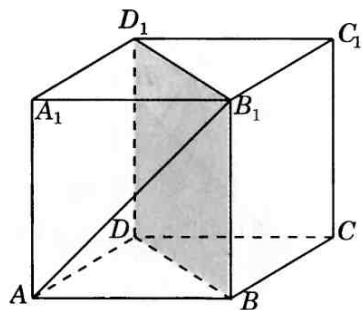
7. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .



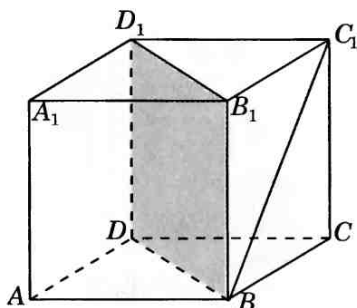
8. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью ABC_1 .



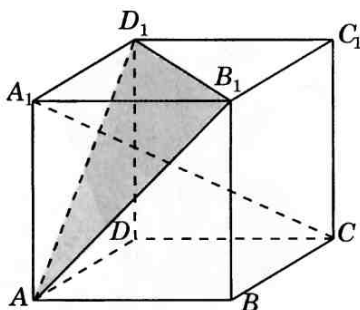
9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .



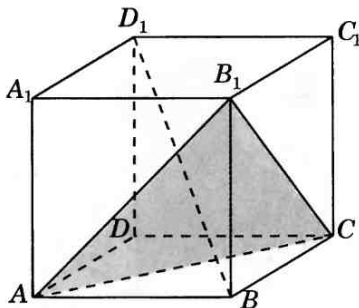
10. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDD_1 .



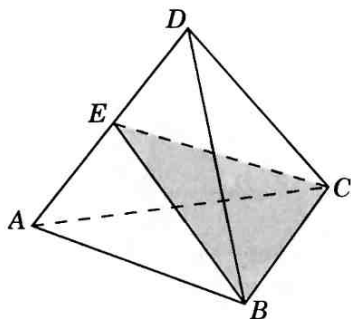
11. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью AB_1D_1 .



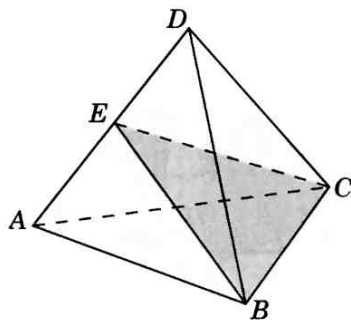
12. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью ACB_1 .



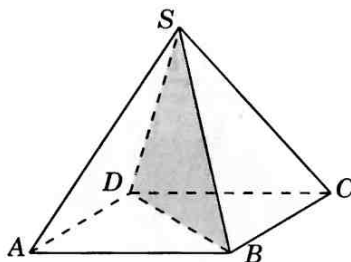
13. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD . Найдите угол между прямой AD и плоскостью BCE .



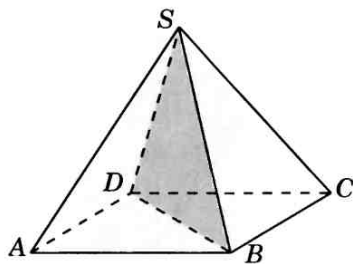
14. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, точка E — середина ребра AD . Найдите угол между прямой AB и плоскостью BCE .



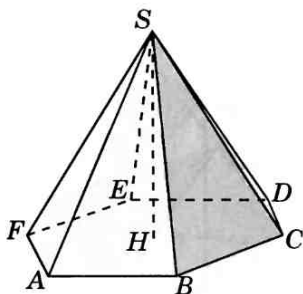
15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой SA и плоскостью SBD .



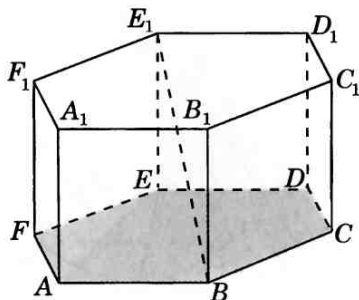
16. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью SBD .



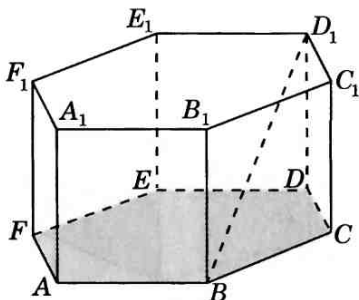
17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, боковые ребра равны 2, SH — высота. Найдите тангенс угла между прямой SH и плоскостью SBC .



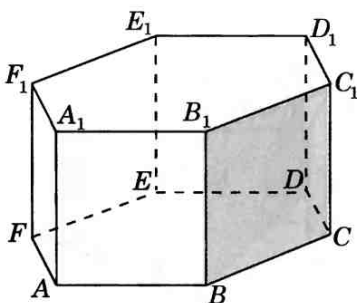
18. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BE_1 и плоскостью ABC .



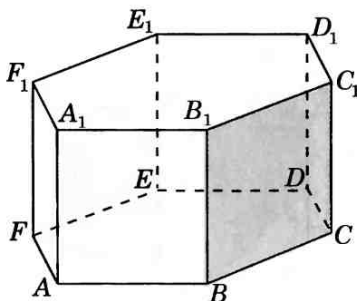
19. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью ABC .



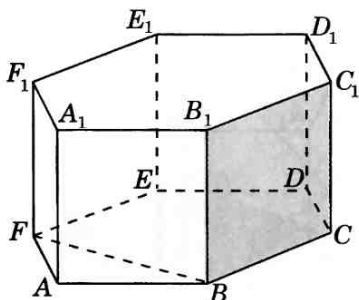
20. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BCC_1 .



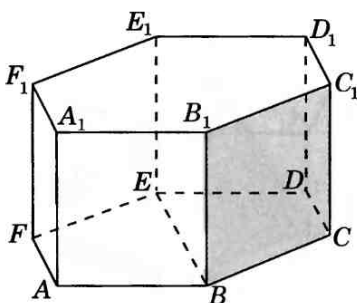
21. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1 .



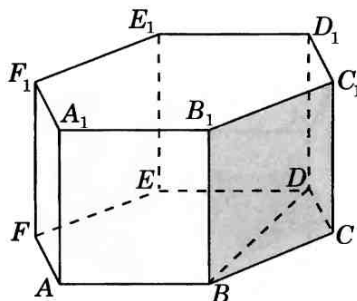
22. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BF и плоскостью BCC_1 .



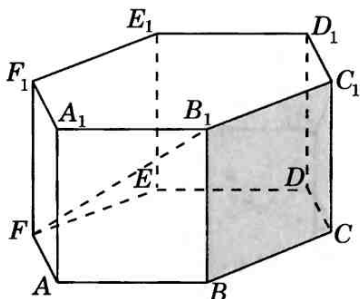
23. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BE и плоскостью BCC_1 .



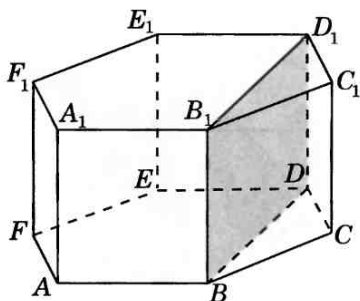
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью BCC_1 .



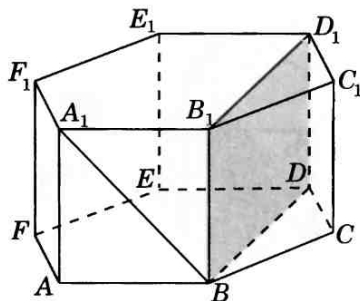
25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FB_1 и плоскостью BCC_1 .



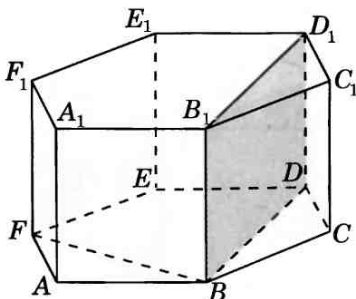
26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BDD_1 .



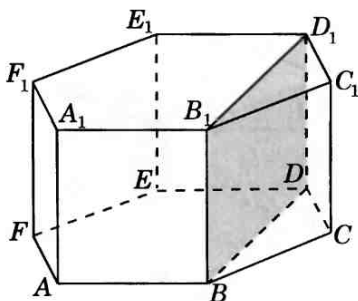
27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDD_1 .



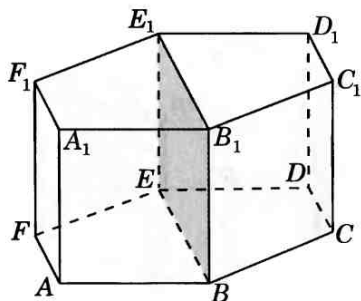
28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FB и плоскостью BDD_1 .



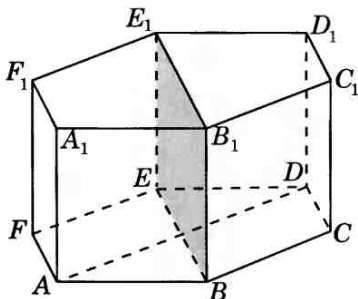
29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BDD_1 .



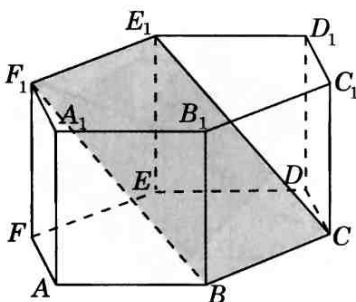
30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BEE_1 .



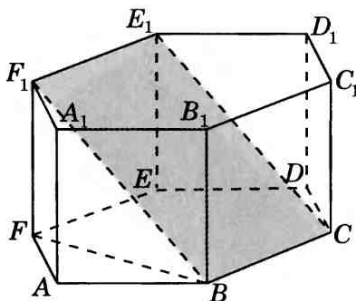
31. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AD и плоскостью BEE_1 .



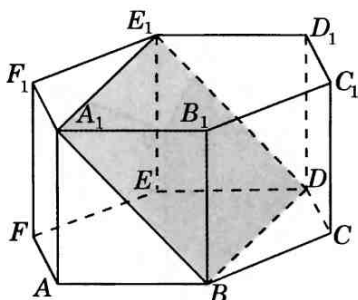
32. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью BCE_1 .



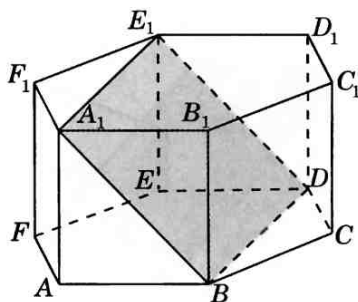
33. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BF и плоскостью BCE_1 .



34. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1 .

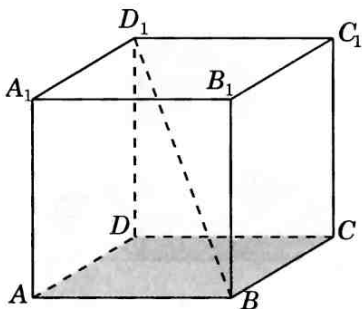


35. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью BDE_1 .

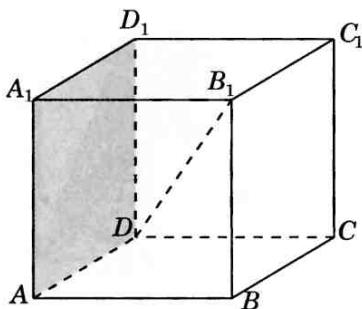


Уровень С

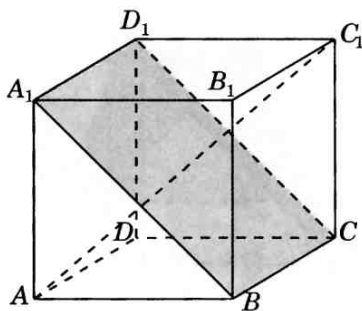
1. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой BD_1 и плоскостью ABC .



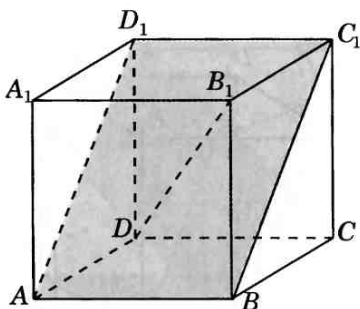
2. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между прямой DB_1 и плоскостью ADD_1 .



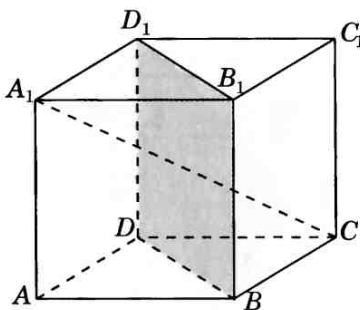
3. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью B_1CD_1 .



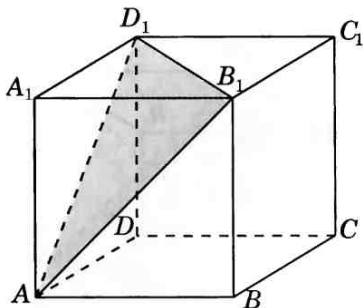
4. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой DB_1 и плоскостью ABC_1 .



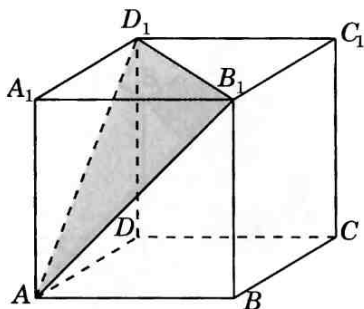
5. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой CA_1 и плоскостью BDD_1 .



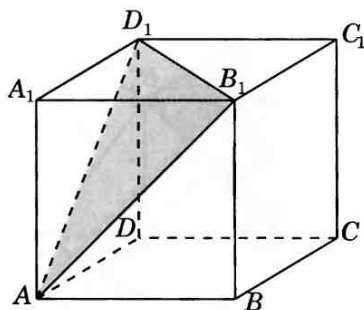
6. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой BC и плоскостью AB_1D_1 .



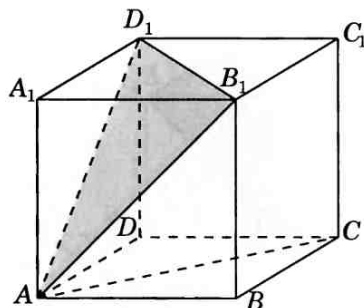
7. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой CC_1 и плоскостью AB_1D_1 .



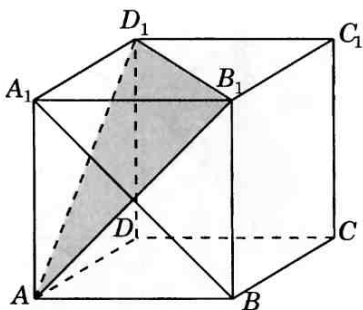
8. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой CD и плоскостью AB_1D_1 .



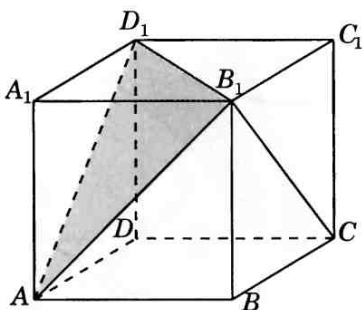
9. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой AC и плоскостью AB_1D_1 .



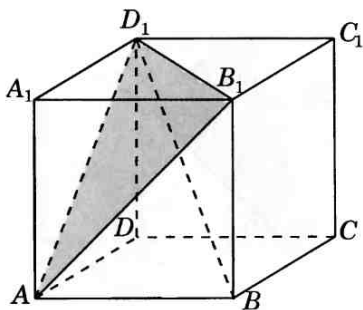
10. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью AB_1D_1 .



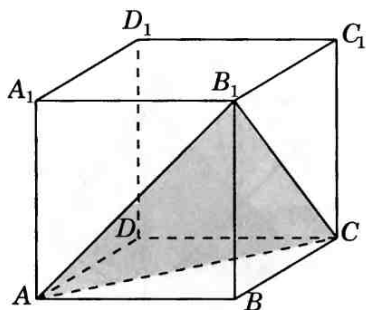
11. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой CB_1 и плоскостью AB_1D_1 .



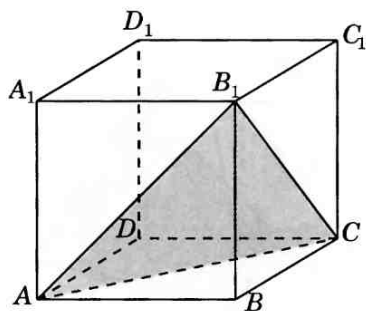
12. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой BD_1 и плоскостью AB_1D_1 .



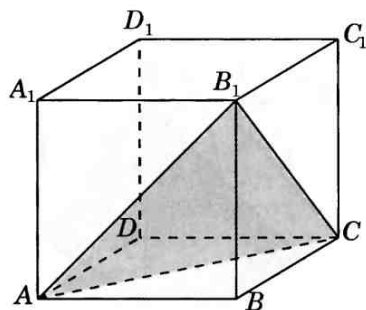
13. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой DD_1 и плоскостью ACB_1 .



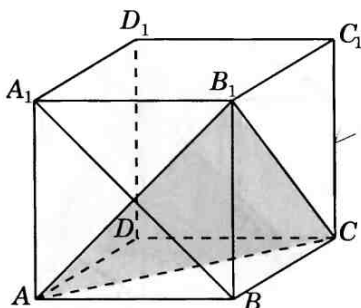
14. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой A_1D_1 и плоскостью ACB_1 .



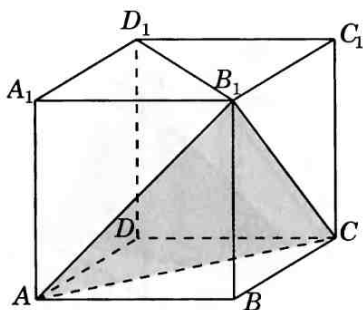
15. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой C_1D_1 и плоскостью ACB_1 .



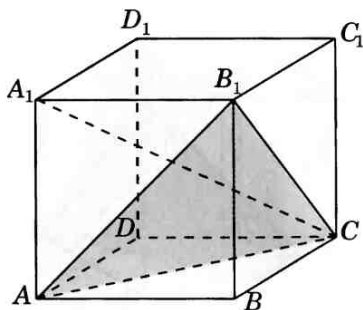
16. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью ACB_1 .



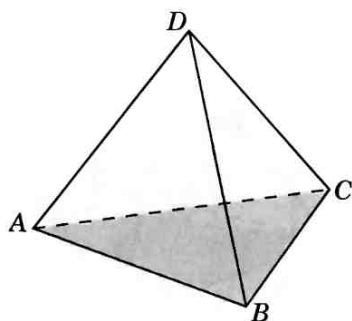
17. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой B_1D_1 и плоскостью ACB_1 .



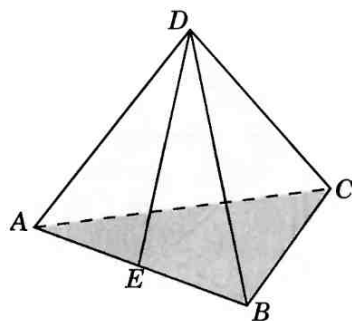
18. В кубе $A...D_1$ найдите синус угла между прямой CA_1 и плоскостью ACB_1 .



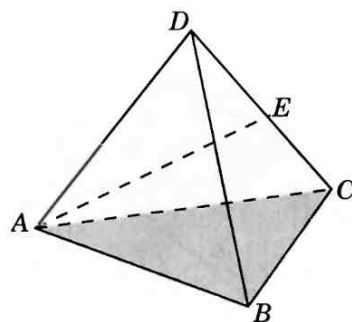
19. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите косинус угла между прямой AD и плоскостью ABC .



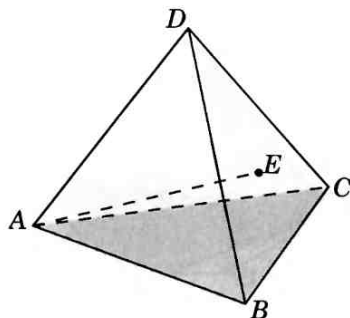
20. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AB . Найдите косинус угла между прямой DE и плоскостью ABC .



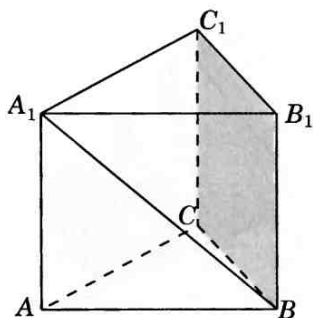
21. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра CD . Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC .



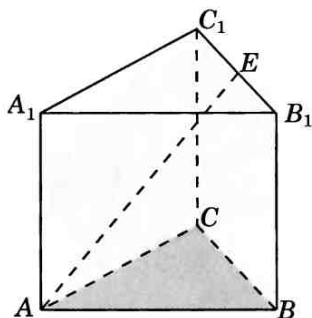
22. В правильном тетраэдре $ABCD$ E — точка пересечения медиан треугольника BCD . Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью ABC .



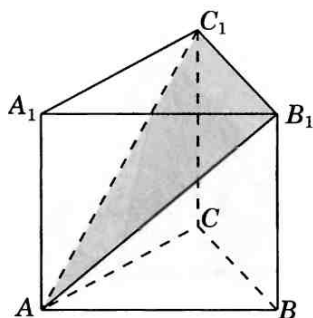
23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1 .



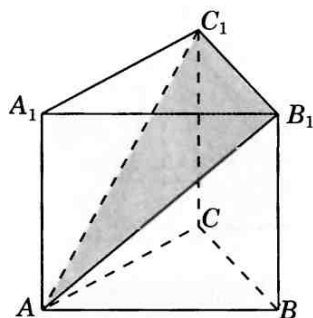
24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра B_1C_1 . Найдите тангенс угла между прямой AE и плоскостью ABC .



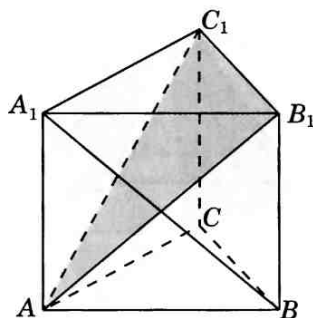
25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 .



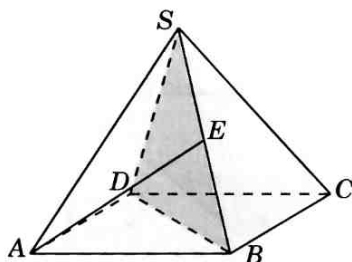
26. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1C_1 .



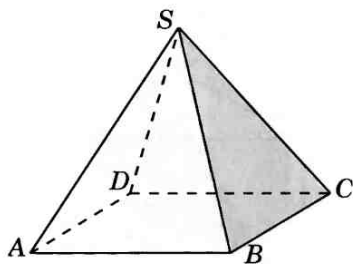
27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью AB_1C_1 .



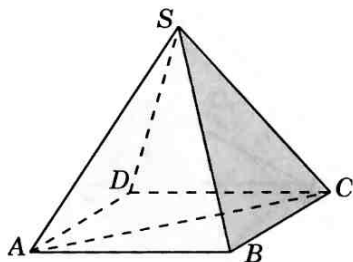
28. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SB . Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью SBD .



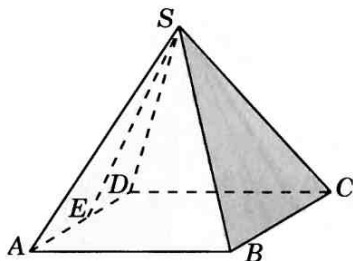
29. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SBC .



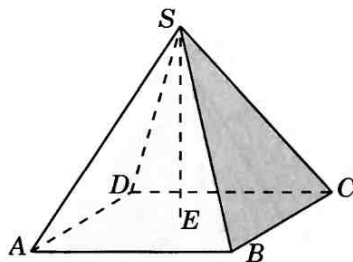
30. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AC и плоскостью SBC .



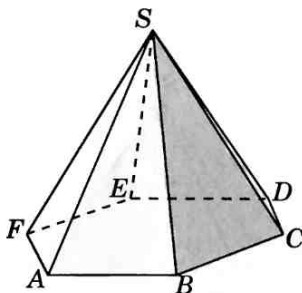
31. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра AD . Найдите косинус угла между прямой SE и плоскостью SBC .



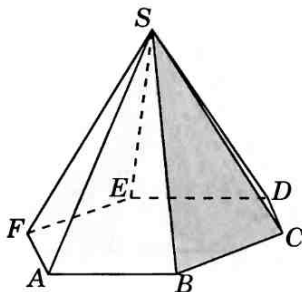
32. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, SE — высота. Найдите синус угла между прямой SE и плоскостью SBC .



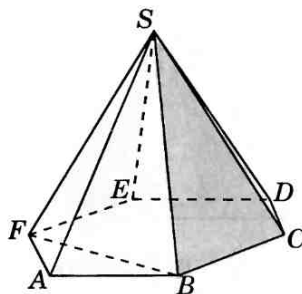
33. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SBC .



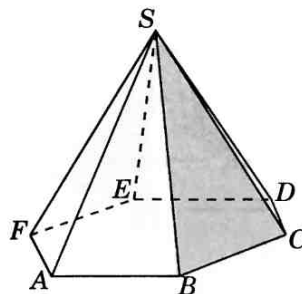
34. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямой AF и плоскостью SBC .



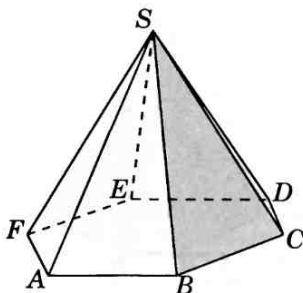
35. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямой BF и плоскостью SBC .



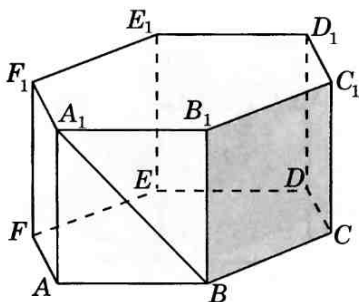
36. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой SA и плоскостью SBC .



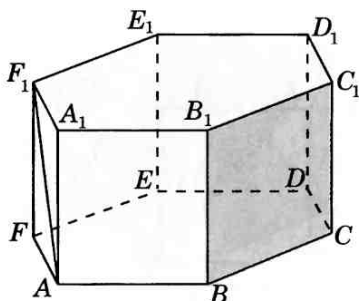
37. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой SF и плоскостью SBC .



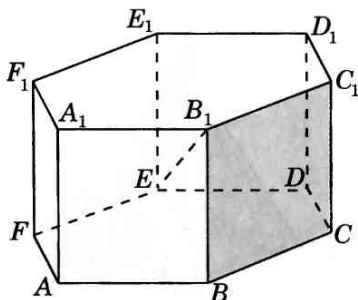
38. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1 .



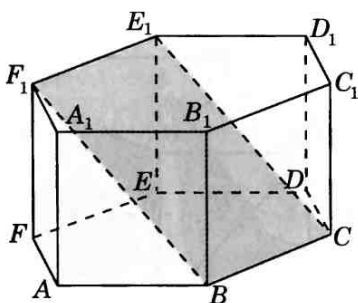
39. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AF_1 и плоскостью BCC_1 .



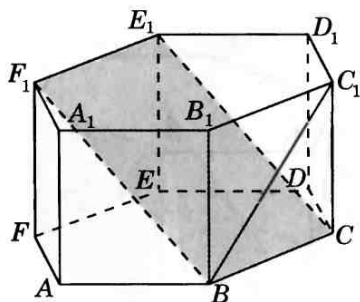
40. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой B_1E и плоскостью BCC_1 .



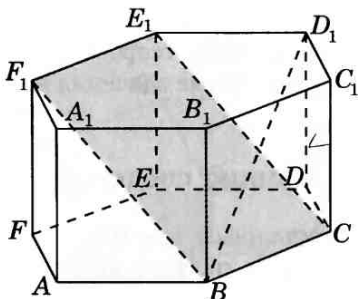
41. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой AB и плоскостью BCE_1 .



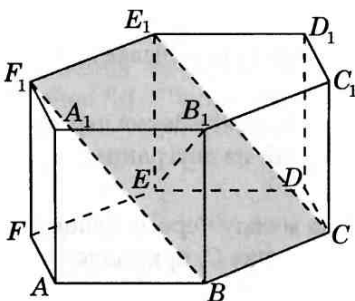
42. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BCE_1 .



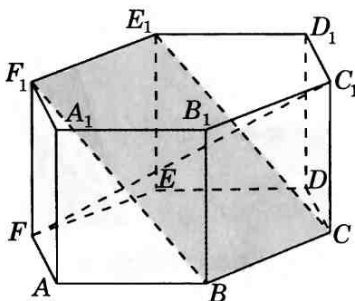
43. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BD_1 и плоскостью BCE_1 .



44. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой B_1E и плоскостью BCE_1 .



45. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой FC_1 и плоскостью BCE_1 .



7. Угол между плоскостями в пространстве

В этом параграфе рассмотрены задачи на нахождение углов между двумя плоскостями в пространстве. При этом используются методы нахождения углов между пересекающимися прямыми, тригонометрические функции углов треугольника, теорема косинусов и др. В ответах будем указывать только численные значения величин углов без знака градуса.

Общие сведения

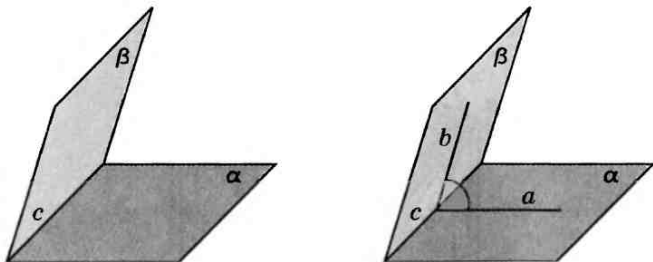
Определение 1. *Двугранным углом* в пространстве называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой.

Определение 2. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, образованный лучами с вершиной на граничной прямой, стороны которого лежат на гранях двугранного угла и перпендикулярны граничной прямой.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Определение 3. *Углом между двумя пересекающимися плоскостями* называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

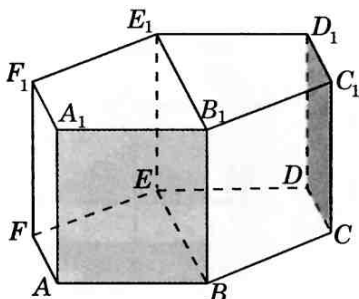
Для нахождения угла между пересекающимися плоскостями α и β выбирают какую-нибудь точку C , принадлежащую линии c их пересечения, и восстанавливают перпендикуляры a и b к линии c , лежащие в плоскостях α и β соответственно. Угол между прямыми a и b будет искомым углом между плоскостями α и β .



Если линия пересечения плоскостей α и β , указанных в задаче, не дана или находится вне данного рисунка, то для нахождения угла между плоскостями α и β выбирают какие-нибудь плоскости α' и β' соответственно параллельные α и β , линия пересечения которых расположена на рисунке. При этом одна из плоскостей α' или β' может

совпадать соответственно с α или β . После этого находят угол между плоскостями α' и β'

В качестве примера для правильной шестиугольной призмы $A\dots F_1$ найдем угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1 .

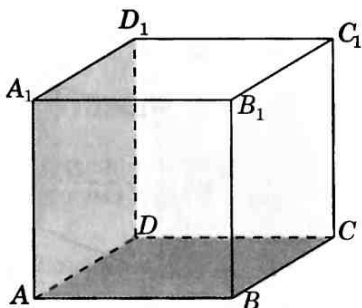


Плоскость CDD_1 параллельна плоскости BEE_1 , следовательно, угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1 равен углу между плоскостями ABB_1 и BEE_1 . Прямая BB_1 является линией пересечения этих плоскостей, AB и BE перпендикулярны BB_1 . Таким образом, искомый угол равен углу ABE и равен 60° .

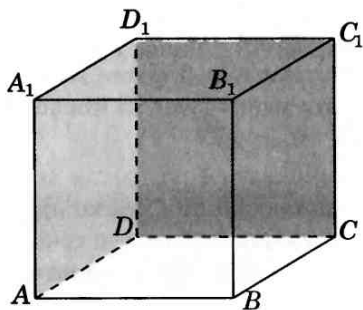
Задачи

Уровень А

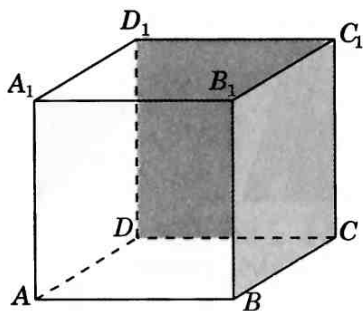
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ADD_1 .



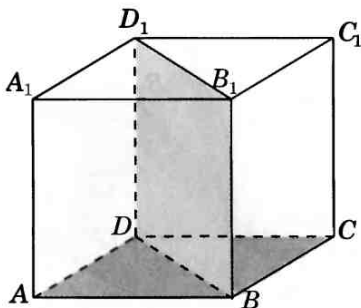
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ADD_1 и CDD_1 .



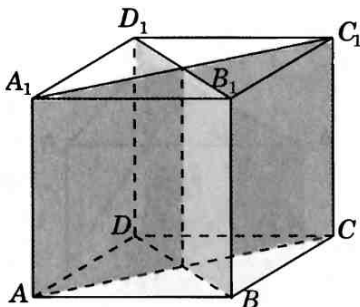
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями BCC_1 и CDD_1 .



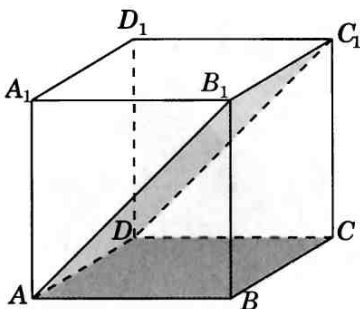
4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDD_1 .



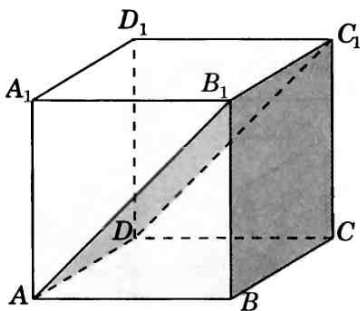
5. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1 .



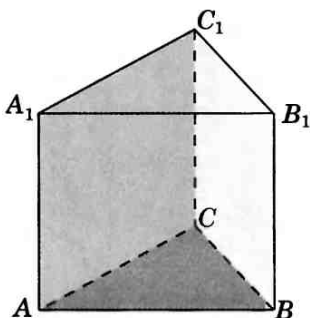
6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и AB_1C_1 .



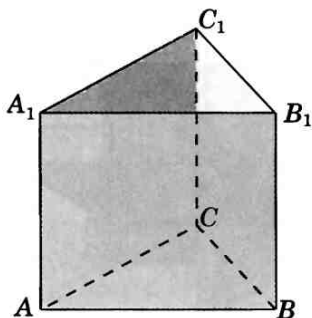
7. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и BCC_1 .



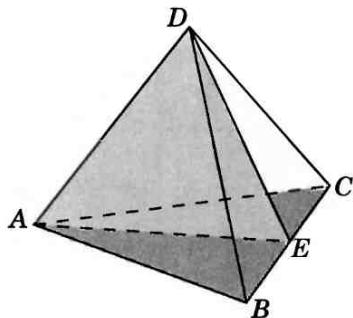
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ACC_1 .



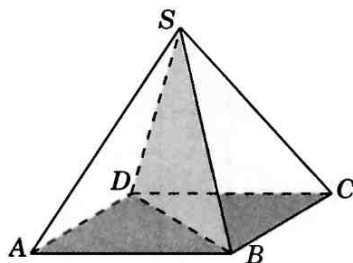
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и ACC_1 .



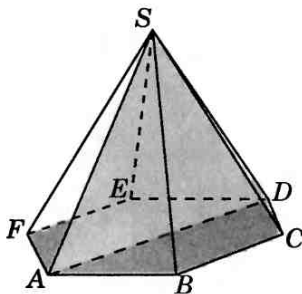
10. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра BC . Найдите угол между плоскостями ABC и ADE .



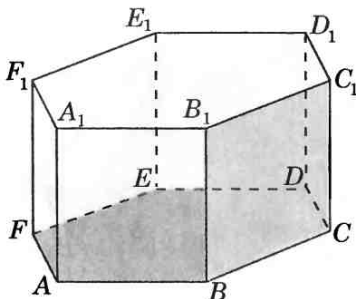
11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ найдите угол между плоскостями ABC и SBD .



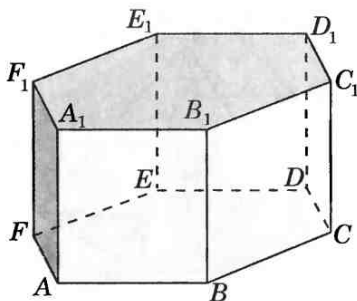
12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями ABC и SAD .



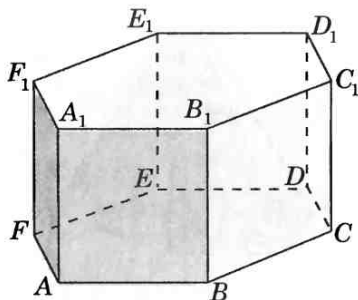
13. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BCC_1 .



14. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и AFF_1 .

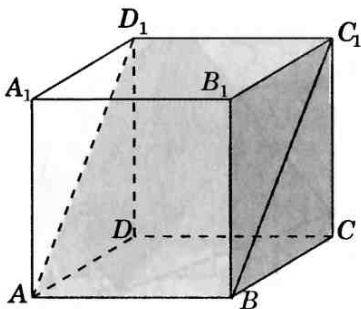


15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите двугранный угол, образованный гранями ABB_1A_1 и AFF_1A_1 .

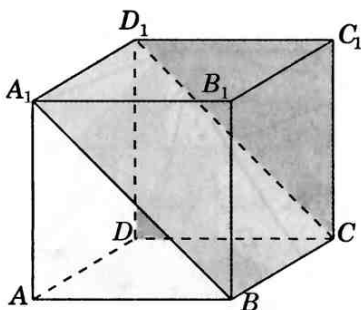


Уровень В

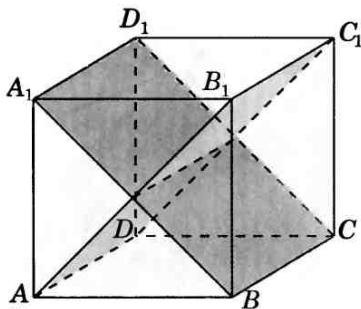
1. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCC_1 .



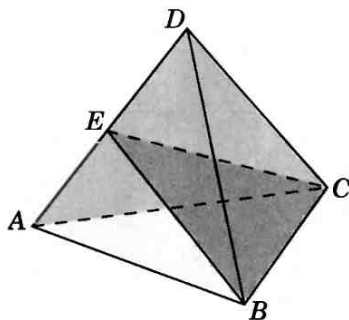
2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями CDD_1 and BCD_1 .



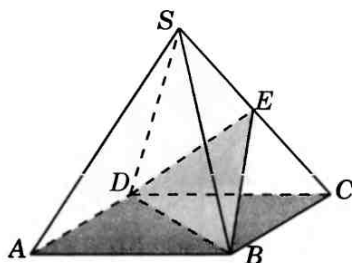
3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 and BCD_1 .



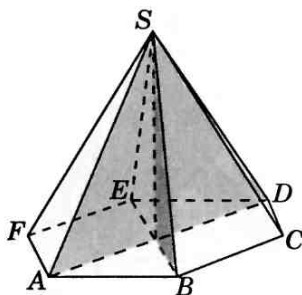
4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E — середина ребра AD . Найдите угол между плоскостями ACD и BCE .



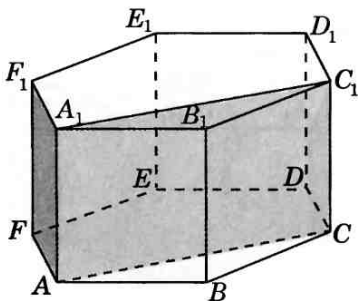
5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями ABC и BDE .



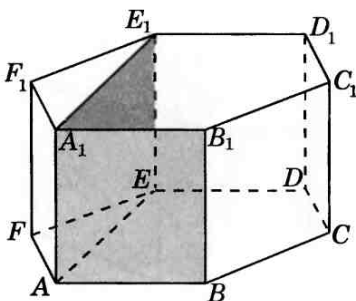
6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите угол между плоскостями SAD и SBE .



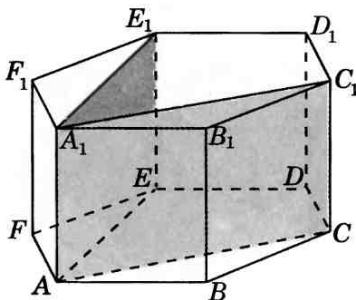
7. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и ACC_1 .



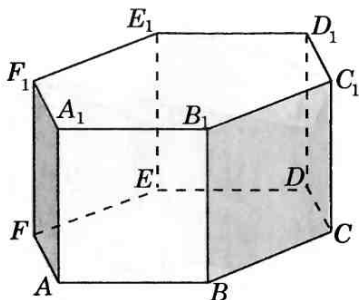
8. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и AEE_1 .



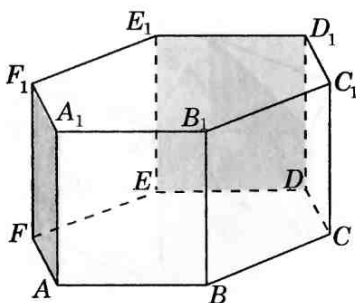
9. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1 .



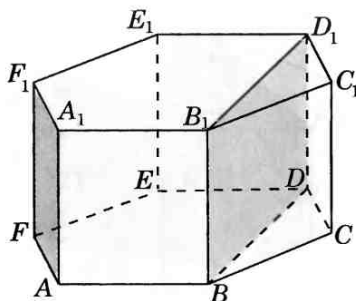
10. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BCC_1 .



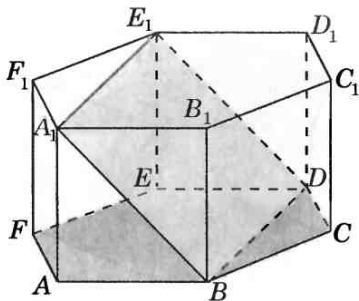
11. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1 .



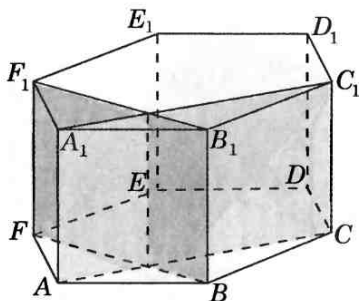
12. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1 .



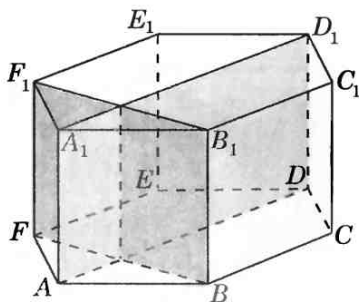
13. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDE_1 .



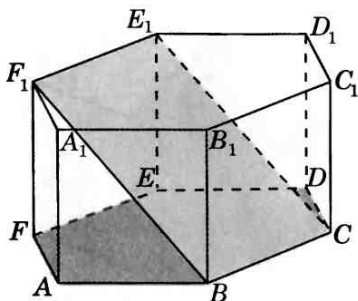
14. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BFF_1 .



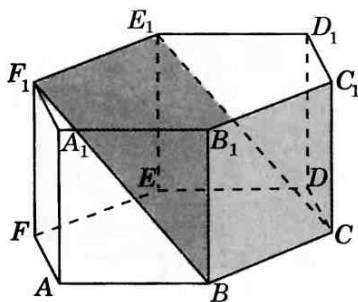
15. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ найдите угол между плоскостями ADD_1 и BFF_1 .



16. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCE_1 .

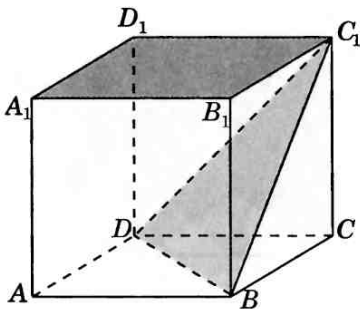


17. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCE_1 и BCC_1 .

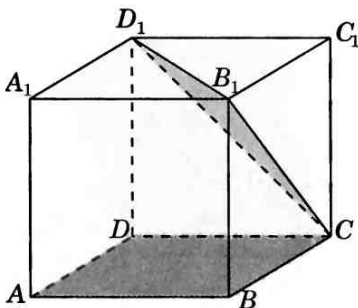


Уровень С

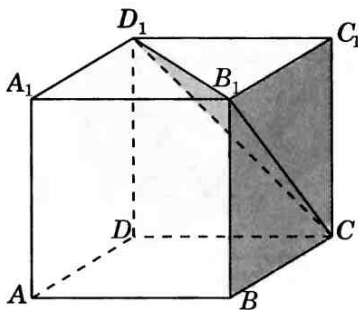
1. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и BDC_1 .



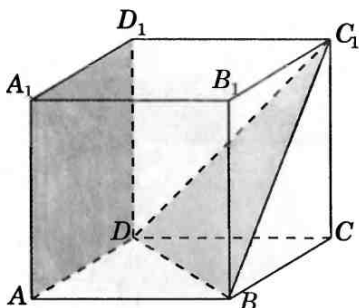
2. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CB_1D_1 .



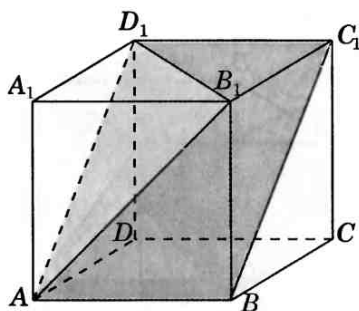
3. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями BCC_1 и CB_1D_1 .



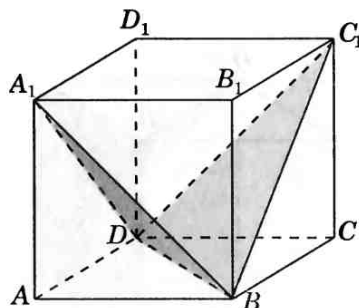
4. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ADD_1 и BDC_1 .



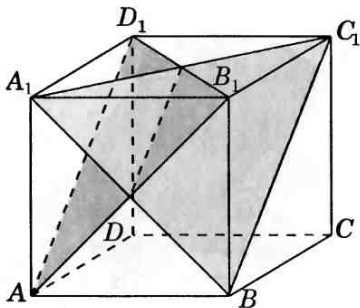
5. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABC_1 и AB_1D_1 .



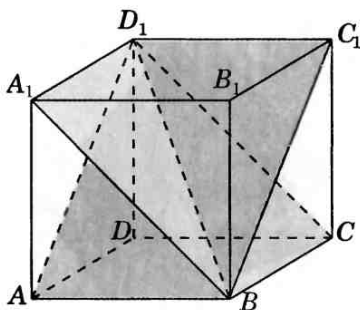
6. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BDA_1 и BDC_1 .



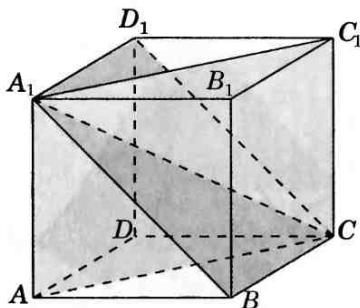
7. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и AB_1D_1 .



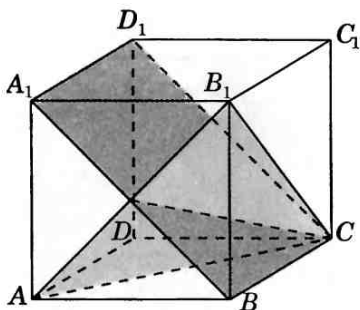
8. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCD_1 .



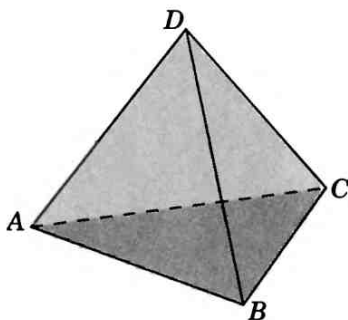
9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями VCD_1 и ACC_1 .



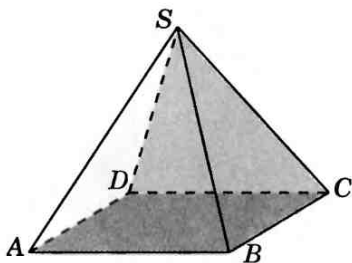
10. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ACB_1 и BCD_1 .



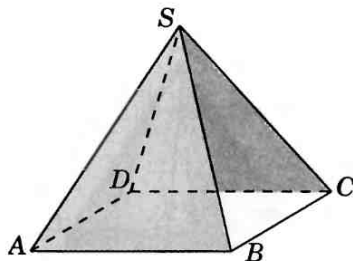
11. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и ACD .



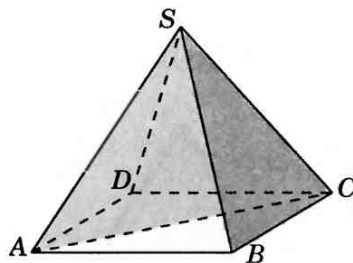
12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SCD .



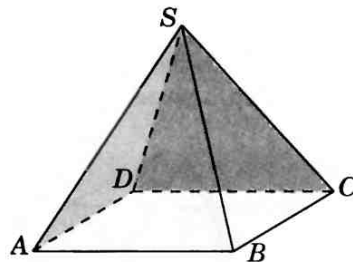
13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAB и SCD .



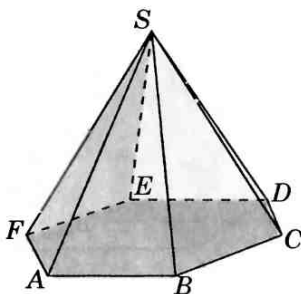
14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями SAC и SBC .



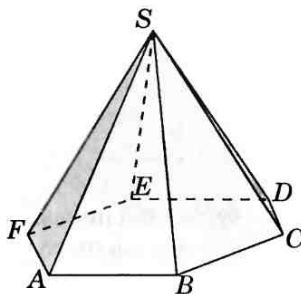
15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAD и SCD .



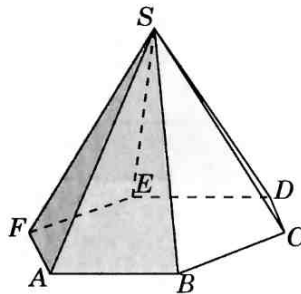
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SEF .



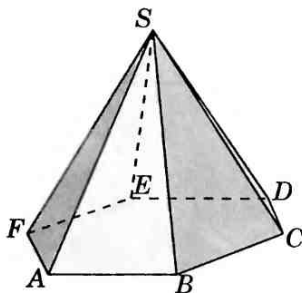
17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SCD .



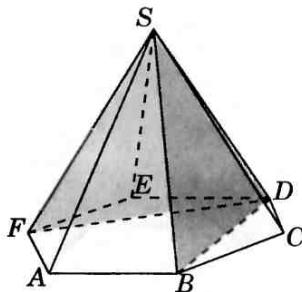
18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAB и SAF .



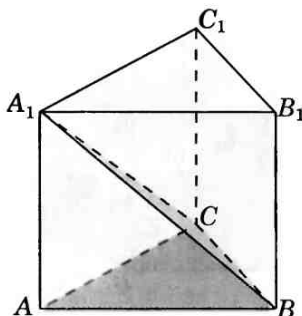
19. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBC .



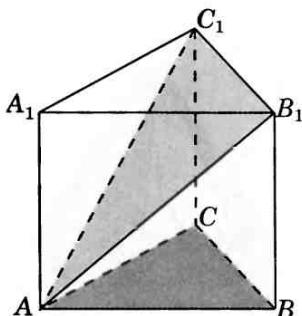
20. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SBD и SDF .



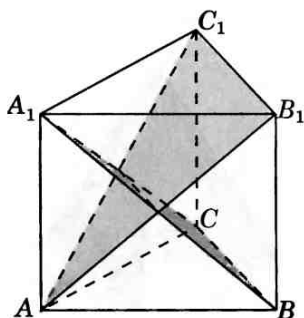
21. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и B_1CA_1 .



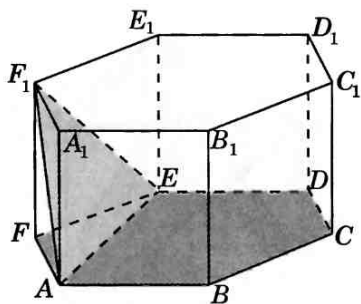
22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и AB_1C_1 .



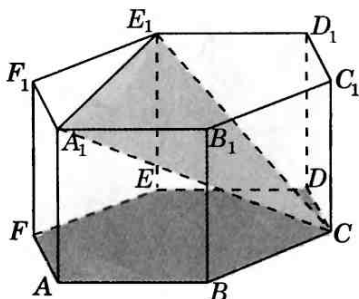
23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями B_1CA_1 и AB_1C_1 .



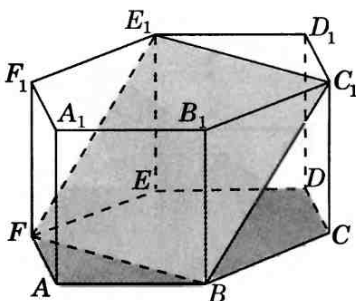
24. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и AEF_1 .



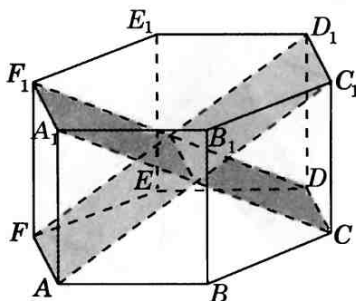
25. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CA_1E_1 .



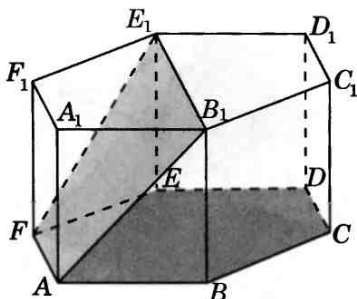
26. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BFE_1 .



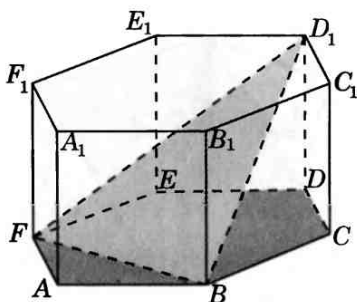
27. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFD_1 и CDF_1 .



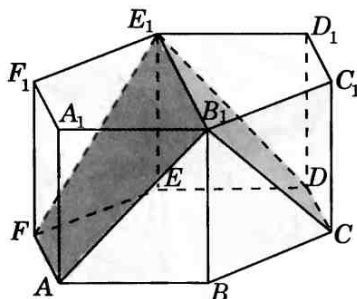
28. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и AFE_1 .



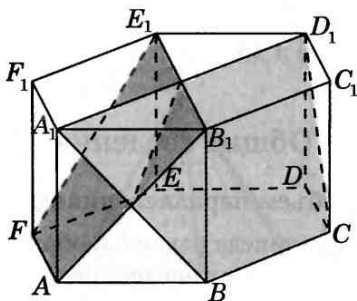
29. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и BFD_1 .



30. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями AFE_1 и CDE_1 .



31. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями AFE_1 и BCD_1 .



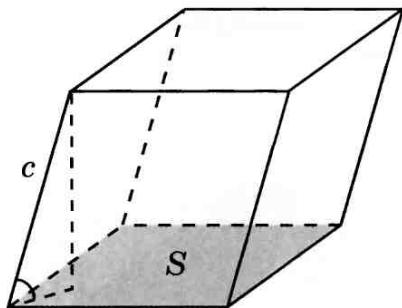
8. Объем фигур в пространстве

В этом параграфе рассмотрены задачи на вычисление объемов фигур в пространстве. При этом используются формулы объемов параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара, отношения объемов подобных фигур и др.

Общие сведения

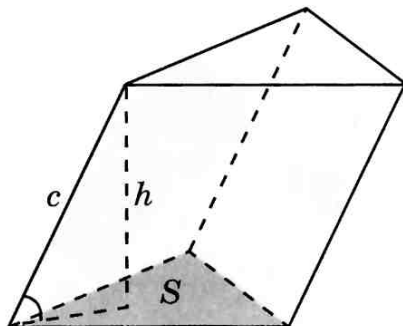
Объем параллелепипеда

Если ребро параллелепипеда равно c и образует с его гранью площади S угол ψ , то объем V параллелепипеда выражается формулой $V = S \cdot c \cdot \sin \psi$.



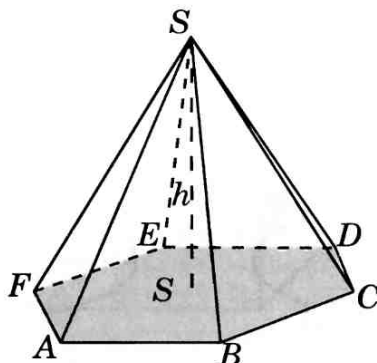
Объем призмы

Если боковое ребро призмы равно c и наклонено к плоскости основания под углом φ , то объем V призмы вычисляется по формуле $V = S \cdot c \cdot \sin \varphi$, где S — площадь основания призмы.



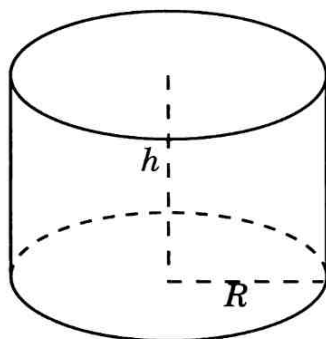
Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула $V = \frac{1}{3}S \cdot h$.



Объем цилиндра

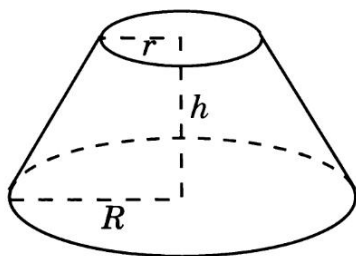
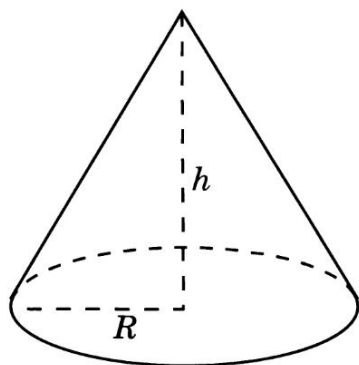
Объем цилиндра, высота которого равна h и радиус основания равен R , вычисляется по формуле $V = \pi R^2 h$.



Объем конуса

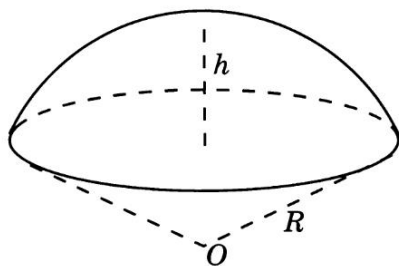
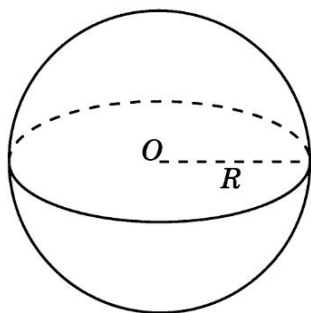
Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту. В частности, для конуса, в основании которого — круг радиуса R , и высота которого равна h , имеет место формула $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Объем усеченного конуса, основания которого — круги радиусов R и r , а высота равна h , выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$.



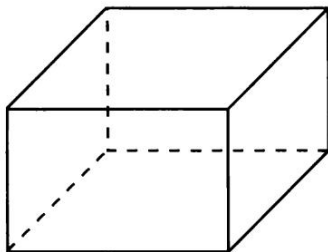
Объем шара

Объем V шара радиуса R выражается формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Объем V шарового сегмента высоты h , отсекаемого от шара радиуса R , выражается формулой $V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right)$.

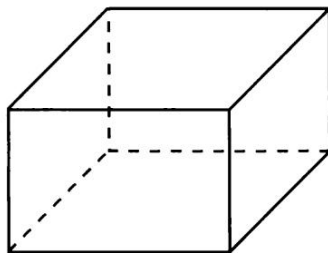


Задачи**Уровень А**

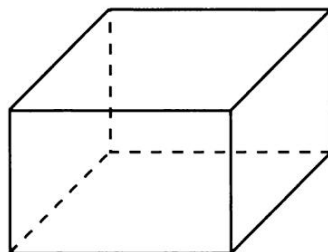
1. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



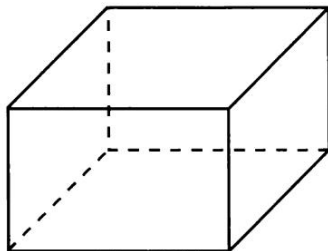
2. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.



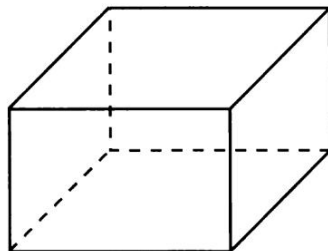
3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 60. Площадь одной его грани равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное этой грани.



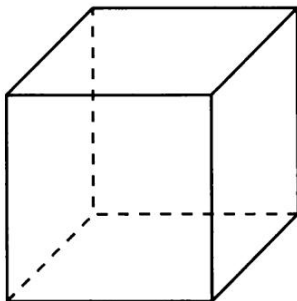
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



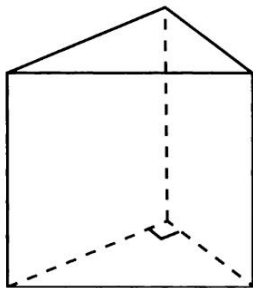
5. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.



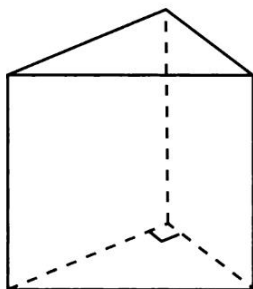
6. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?



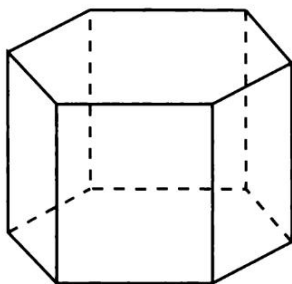
7. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.



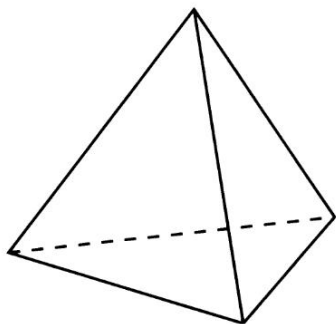
8. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.



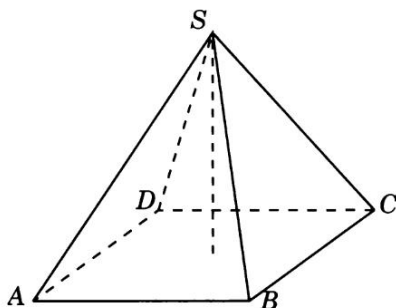
9. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.



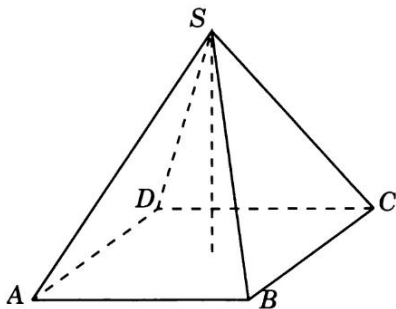
10. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



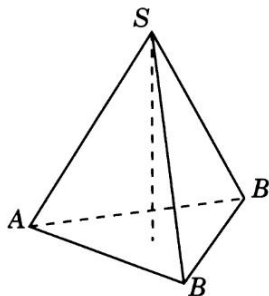
11. Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание — прямоугольник со сторонами 3 и 4.



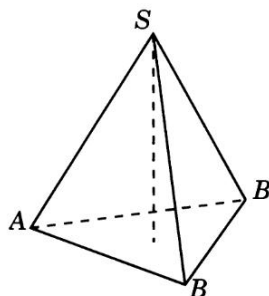
12. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



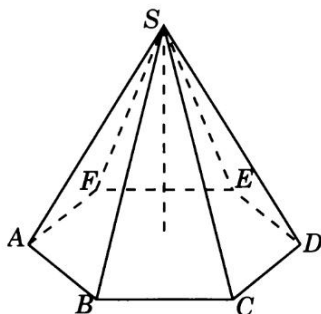
13. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.



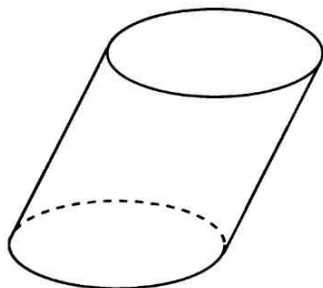
14. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.



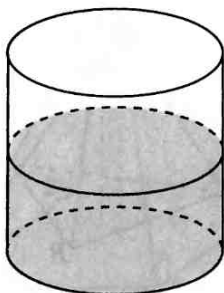
15. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



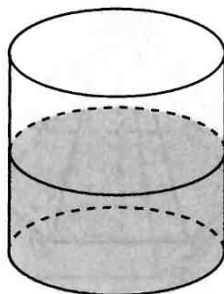
16. Найдите объем цилиндра, площадь основания которого равен 1, а образующая равна 6 и наклонена к плоскости основания под углом 30°



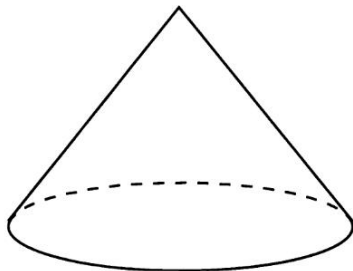
17. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?



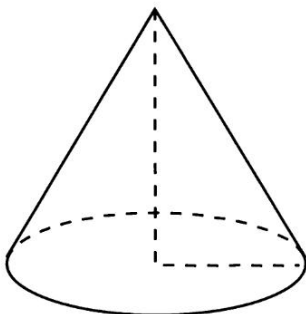
18. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3 раза больше первого?



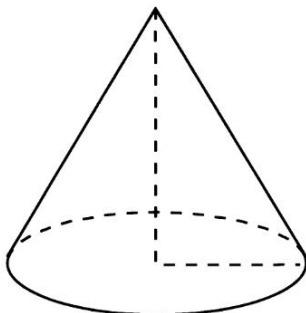
19. Найдите объем конуса, площадь основания которого равна 2, а образующая равна 6 и наклонена к плоскости основания под углом 30°



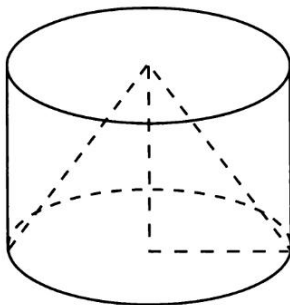
20. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 3 раза?



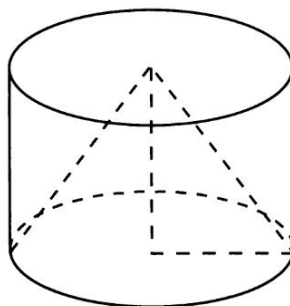
21. Во сколько раз увеличится объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза?



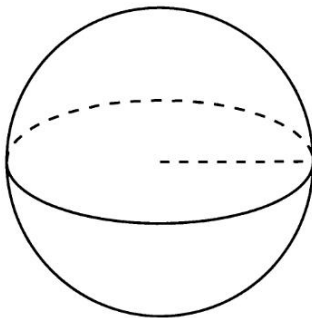
22. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 10.



23. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

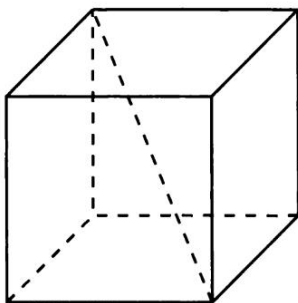


24. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

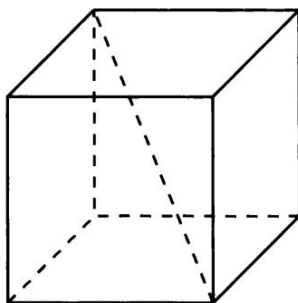


Уровень В

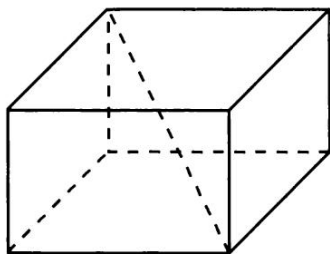
1. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.



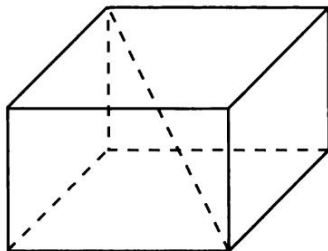
2. Объем куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.



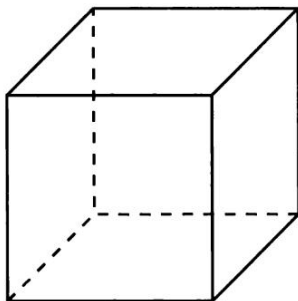
3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.



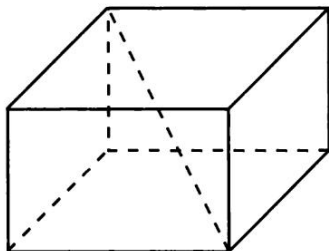
4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 3. Объем параллелепипеда равен 36. Найдите его диагональ.



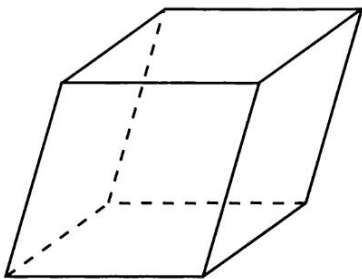
5. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.



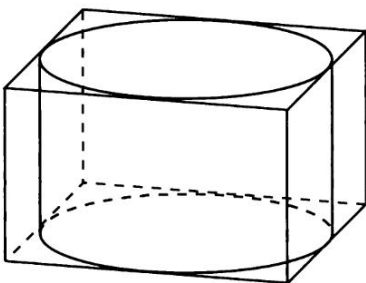
6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{6}$ и образует углы 30° , 45° и 60° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



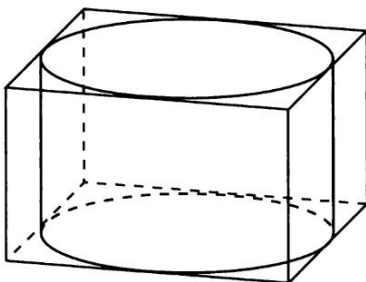
7. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



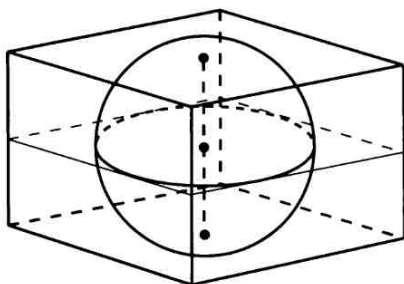
8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объем параллелепипеда.



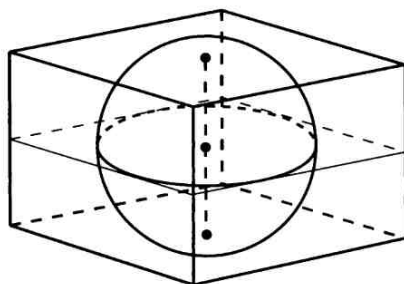
9. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объем параллелепипеда равен 8. Найдите высоту цилиндра.



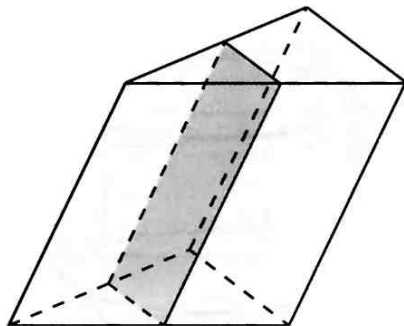
10. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его объем.



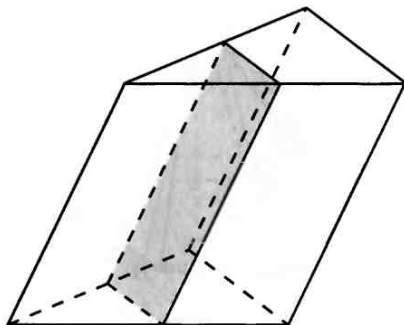
11. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



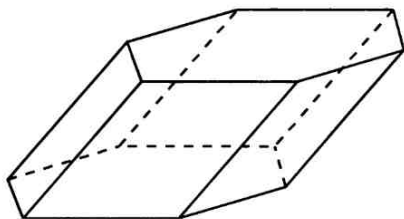
12. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



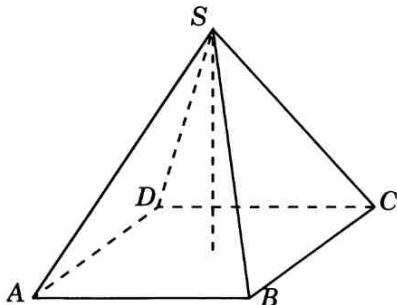
13. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.



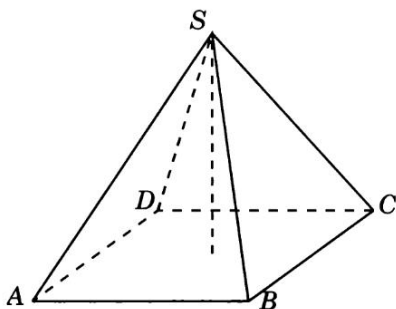
14. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°



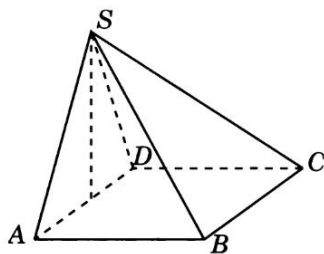
15. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



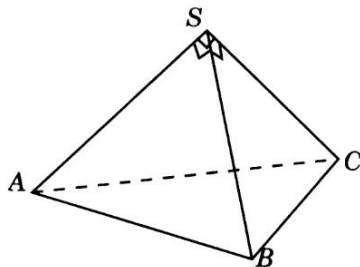
16. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



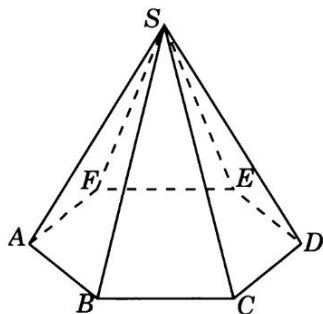
17. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



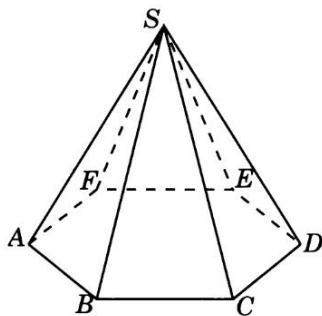
18. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



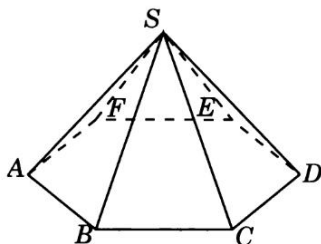
19. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.



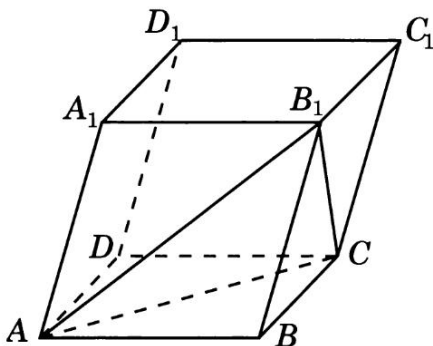
20. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



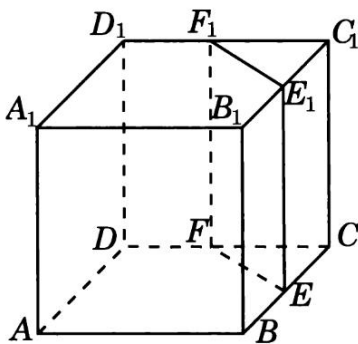
21. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объем пирамиды.



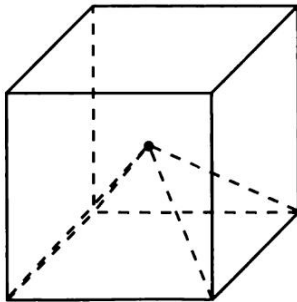
22. Объем параллелепипеда $A...D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC .



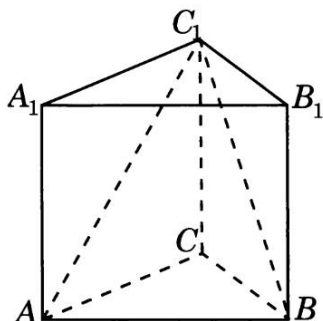
23. Объем куба $A...D_1$ равен 12. Точки E, F, E_1, F_1 — середины ребер соответственно BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 . Найдите объем треугольной призмы $CEFC_1E_1F_1$.



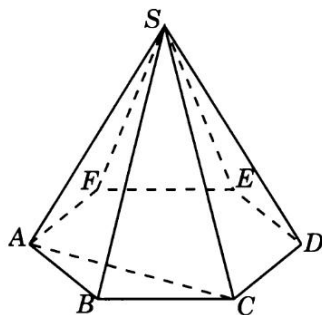
24. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



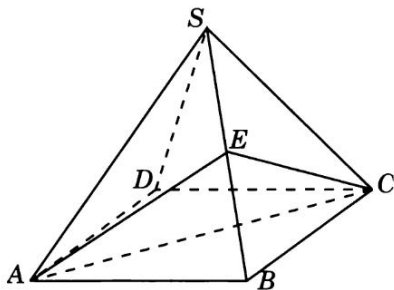
25. От призмы $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 6, отсечена треугольная пирамида C_1ABC . Найдите объем оставшейся части.



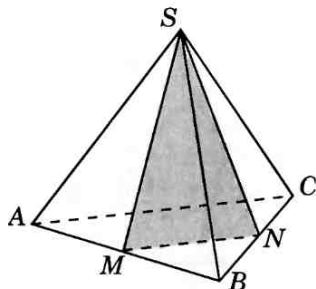
26. Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



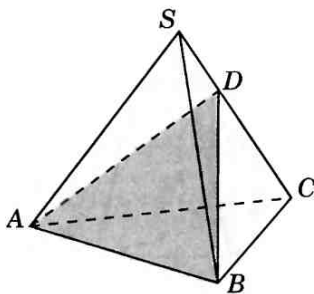
27. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.



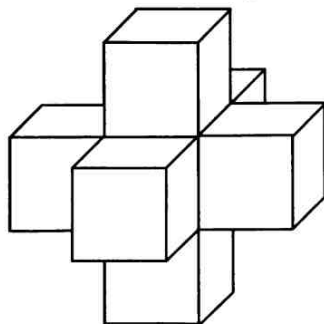
28. От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



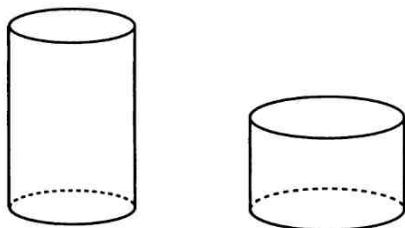
29. Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 15. Плоскость проходит через сторону AB основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке D , делящей ребро SC в отношении $1:2$, считая от вершины S . Найдите объем пирамиды $DABC$.



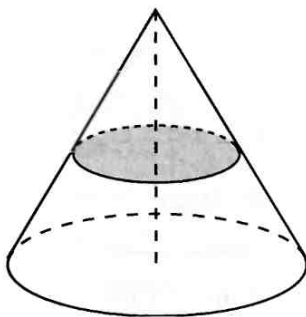
30. Найдите объем пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.



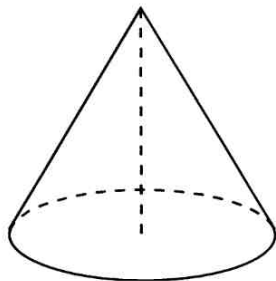
31. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



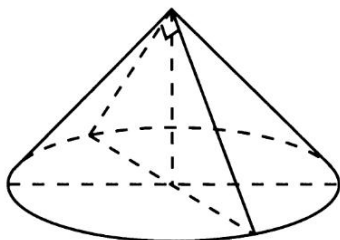
32. Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите объем отсеченного конуса.



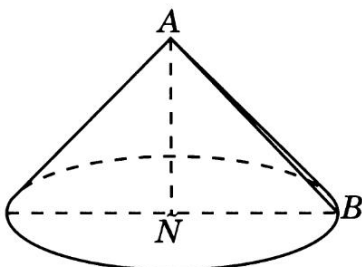
33. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π .



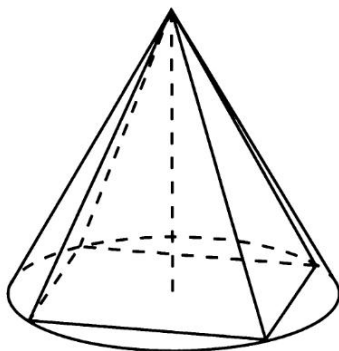
34. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .



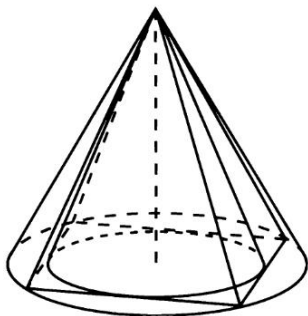
35. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .



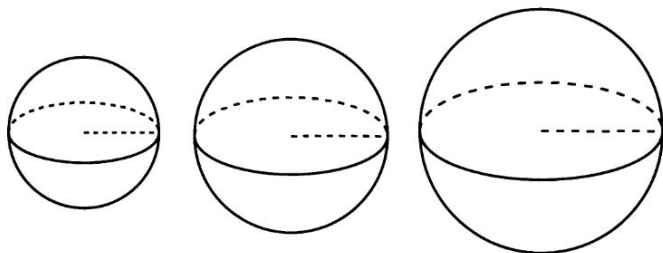
36. Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π .



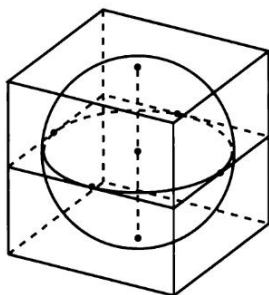
37. Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?



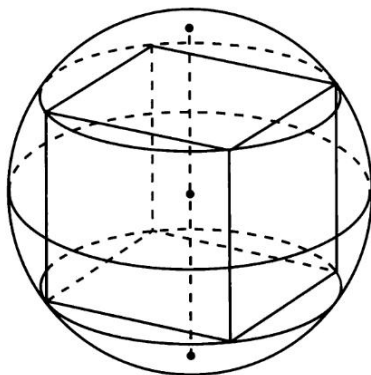
38. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.



39. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

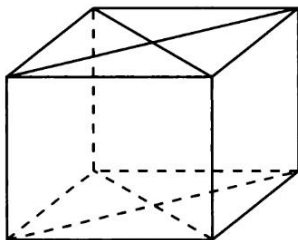


40. Около куба с ребром $\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

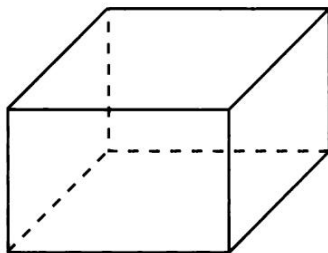


Уровень С

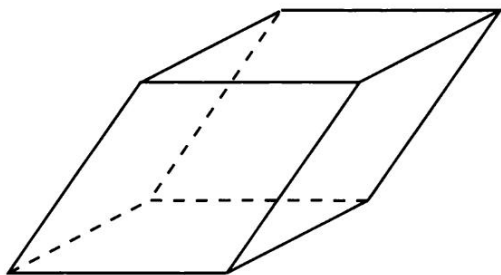
1. Основание прямой призмы — ромб, площадь которого равна 3. Площади диагональных сечений равны 8 и 12. Найдите объем призмы.



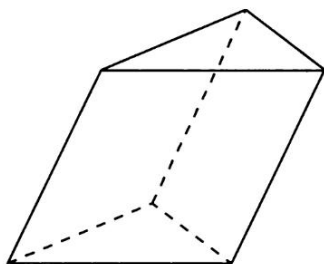
2. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3, 6. Найдите объем параллелепипеда.



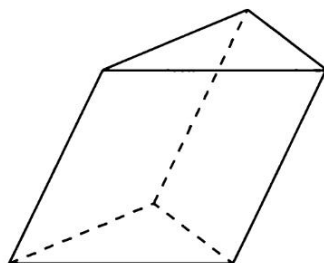
3. В параллелепипеде две грани имеют площади 4 и 6, их общее ребро равно 2, и они образуют между собой двугранный угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.



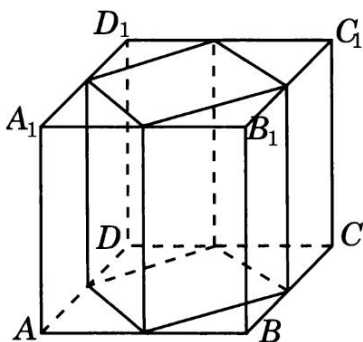
4. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна 12, а расстояние от нее до противоположного ребра равно 3. Найдите объем призмы.



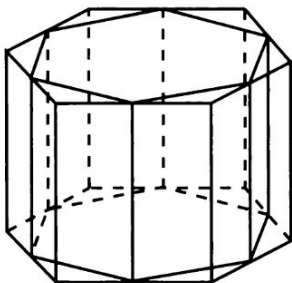
5. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное 2. Площади этих граней равны 4 и 6. Найдите объем призмы.



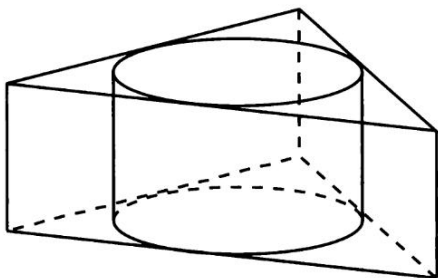
6. От куба $A...D_1$, ребра которого равны 3, отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$ параллельно ребру AA_1 . Найдите объем оставшейся части.



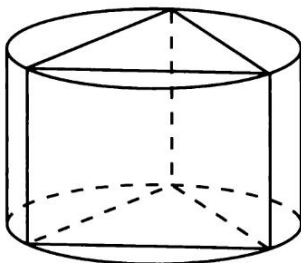
7. Объем правильной шестиугольной призмы равен 12. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.



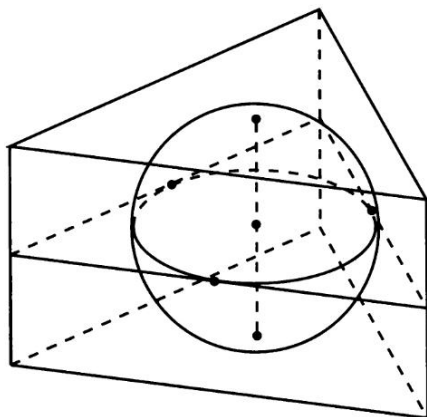
8. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$.



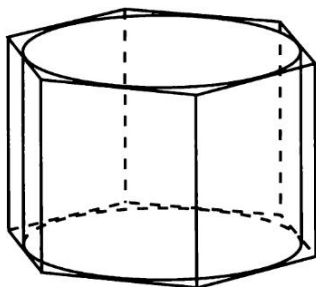
9. Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны $2\sqrt{3}$.



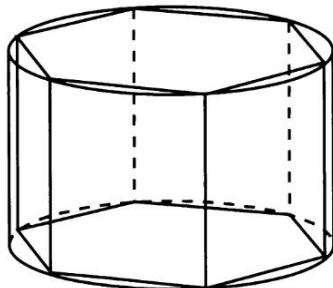
10. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около сферы, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



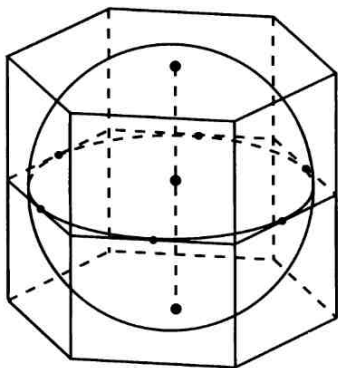
11. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$.



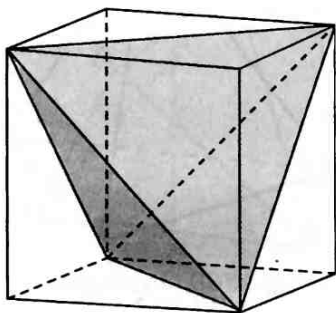
12. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны $\sqrt{3}$.



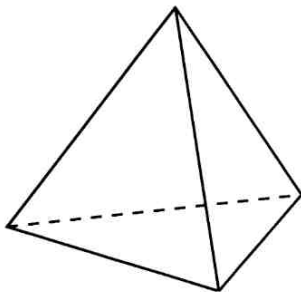
13. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около сферы, радиус которой равен $\sqrt{3}$.



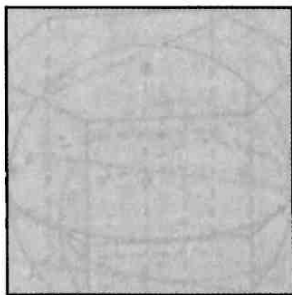
14. В куб с ребром 6 вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.



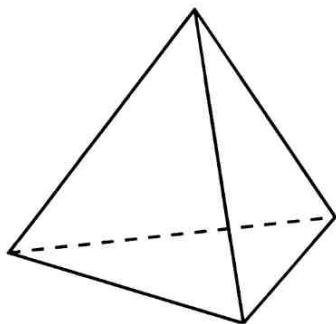
15. Одно ребро тетраэдра равно 3. Все остальные ребра равны 2. Найдите объем тетраэдра.



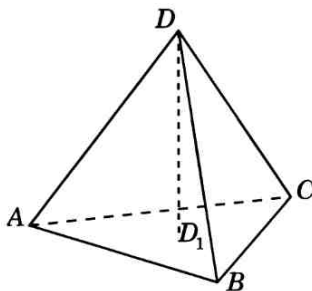
16. Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 6. Найдите объем этой пирамиды.



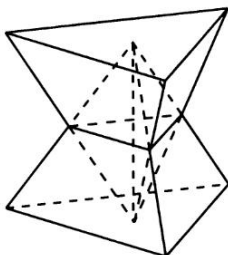
17. Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3 и 4. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.



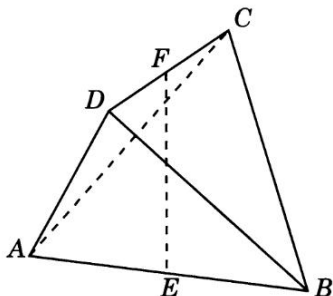
18. Единичный тетраэдр $ABCD$ повернут на 60° вокруг высоты DD_1 . Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.



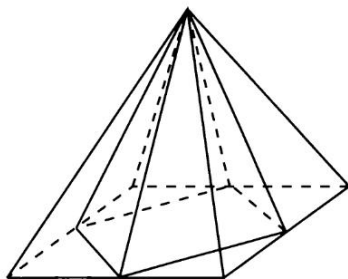
19. Два правильных единичных тетраэдра имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



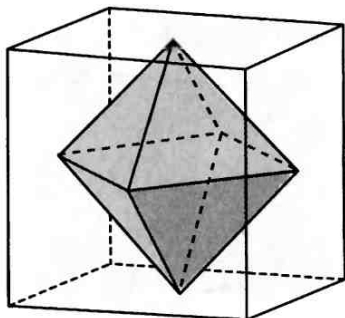
20. Единичный тетраэдр $ABCD$ повернут на 90° вокруг прямой EF , соединяющего середины двух противоположных ребер. Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.



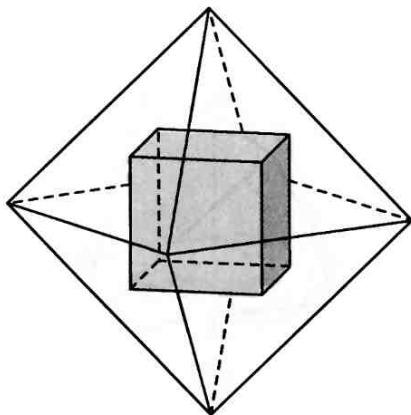
21. От четырехугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечены четыре треугольные пирамиды плоскостями, проходящими через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Найдите объем оставшейся части пирамиды.



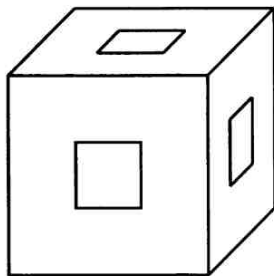
22. Центры граней куба, ребро которого равно 6, служат вершинами октаэдра. Найдите его объем.



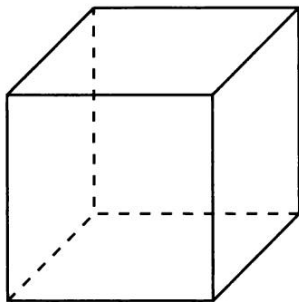
23. Найдите объем куба, вписанного в октаэдр, ребра которого равны 3.



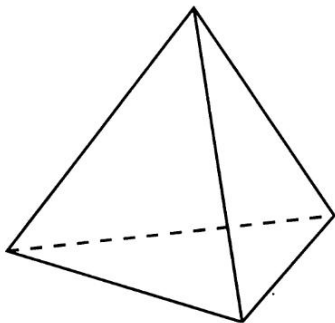
24. В каждой грани куба с ребром 6 проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 2. Найдите объем оставшейся части.



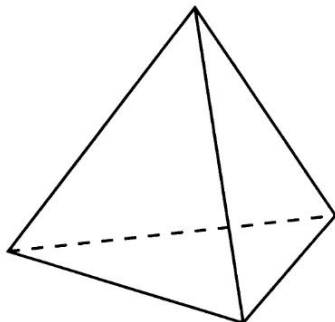
25. Через каждое ребро единичного куба, перпендикулярно плоскости, проходящей через это ребро и центр куба, проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.



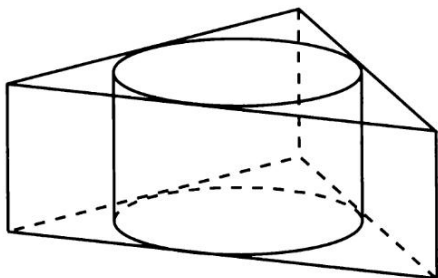
26. Через каждое ребро единичного тетраэдра параллельно противоположному ребру проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.



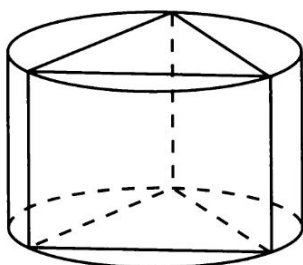
27. Через каждую вершину тетраэдра, объем которого равен 1, параллельно противоположной грани проведена плоскость. Найдите объем многогранника, ограниченного этими плоскостями.



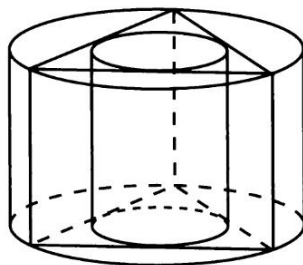
28. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 4. Боковые ребра призмы равны 6. Найдите объем цилиндра, вписанного в данную призму.



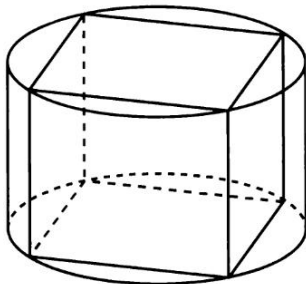
29. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Боковые ребра призмы равны 6. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



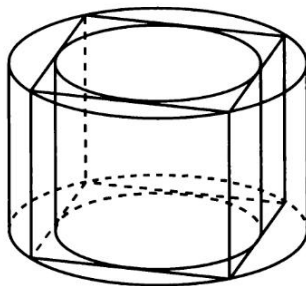
30. Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной треугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?



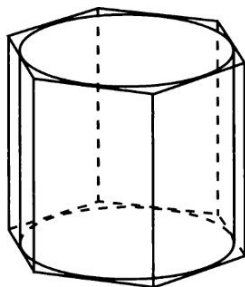
31. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Боковые ребра равны 4. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



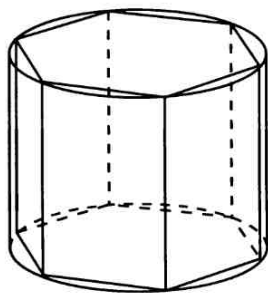
32. Во сколько раз объем цилиндра, вписанного в правильную четырехугольную призму, больше объема цилиндра, описанного около этой же призмы?



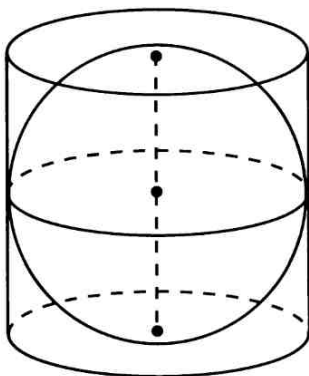
33. В правильную шестиугольную призму со стороной основания 1 и боковым ребром 6 вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.



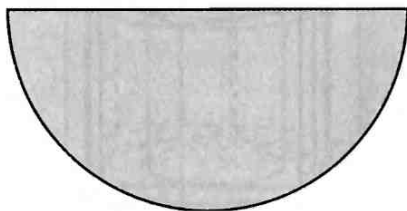
34. Около правильной шестиугольной призмы со стороной основания 1 описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 6. Найдите объем этого цилиндра.



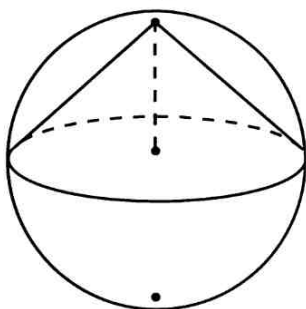
35. Найдите объем цилиндра, описанного около шара, объем которого равен 1.



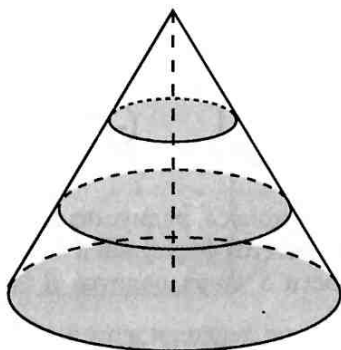
36. Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиуса 1. Найдите объем конуса.



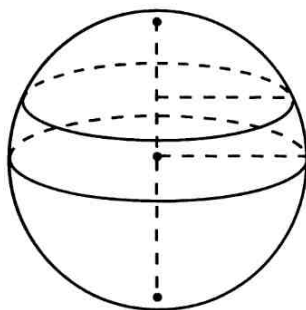
37. Объем шара равен 12. Найдите объем конуса, основанием которого является большой круг данного шара, а высотой — радиус, перпендикулярный плоскости этого круга.



38. Радиус основания конуса равен 1. Его высота, равная 3, разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.



39. Шар, радиус которого равен 5, пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 2 от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.



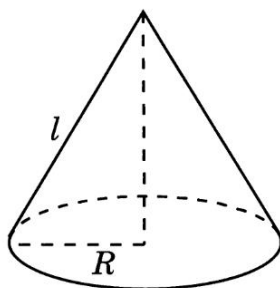
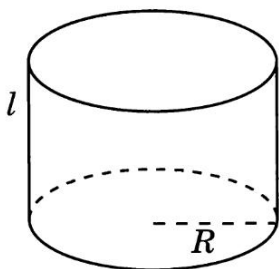
9. Площадь поверхности

В этом параграфе рассмотрены задачи на вычисление площадей поверхностей фигур в пространстве. При этом используются формулы площадей поверхностей многогранников, цилиндра, конуса, шара, отношения площадей поверхностей подобных фигур и др.

Общие сведения

Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

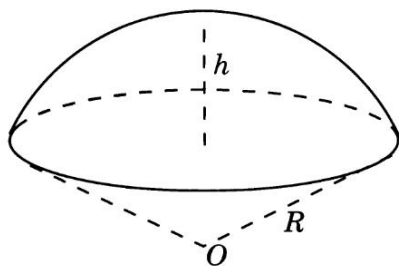
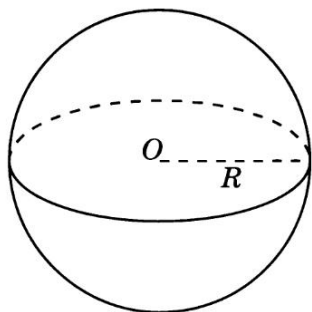
Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен R , а образующая — l , выражается формулой $S = 2\pi R(R + l)$.



Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R , а образующая — l , выражается формулой $S = \pi R(R + l)$.

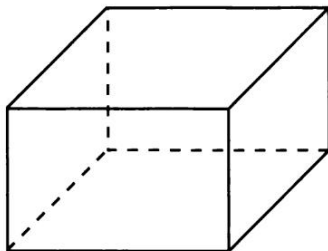
Площадь поверхности S шара радиуса R выражается формулой $S = 4\pi R^2$.

Площадь боковой поверхности шарового сегмента, радиуса R и высотой h , выражается формулой $S = 2\pi Rh$.

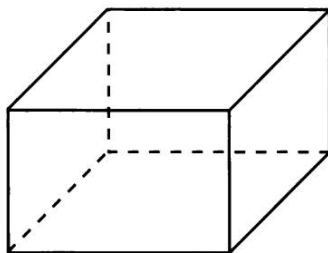


Задачи**Уровень А**

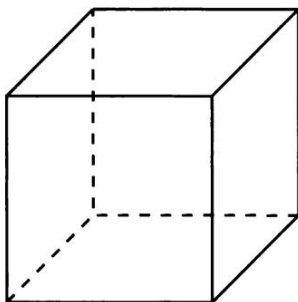
1. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите площадь его поверхности.



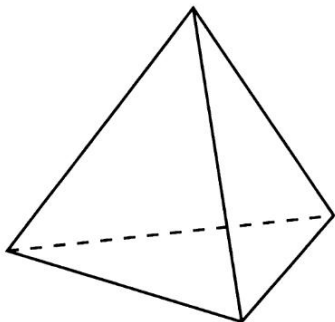
2. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 52. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



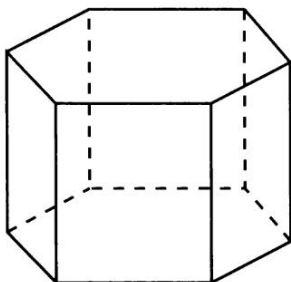
3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в три раза?



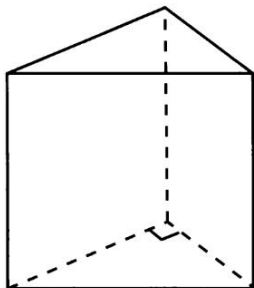
4. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



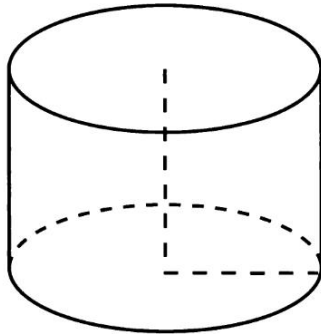
5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3, а высота — 6.



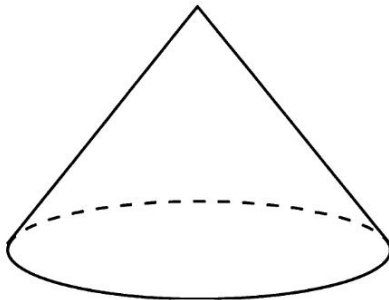
6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, высота призмы равна 10. Найдите площадь ее поверхности.



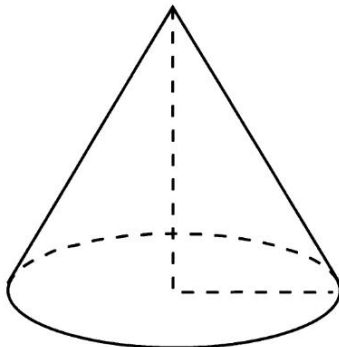
7. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



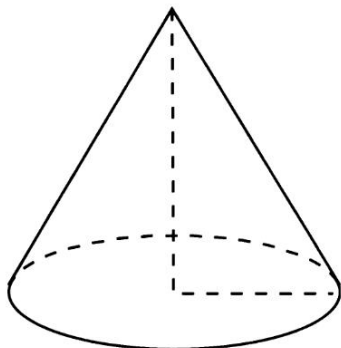
8. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



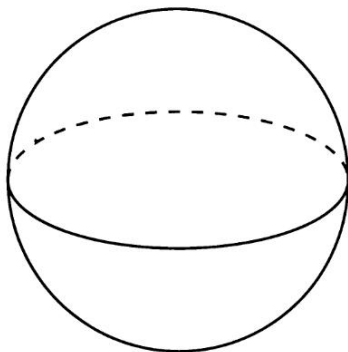
9. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 3 раза?



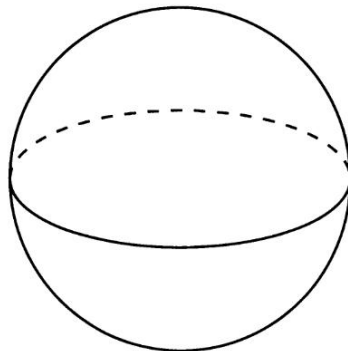
10. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?



11. Площадь большого круга шара равна 1. Найдите площадь поверхности шара.

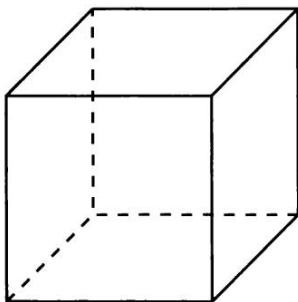


12. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в два раза?

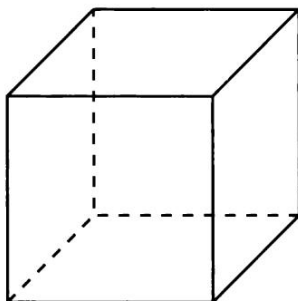


Уровень В

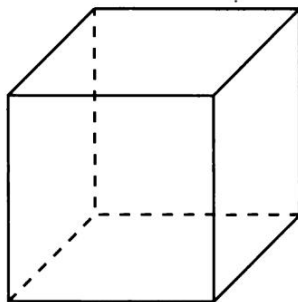
1. Диагональ куба равна 1. Найдите площадь его поверхности.



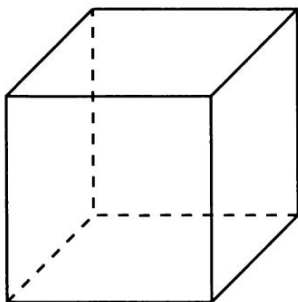
2. Площадь поверхности куба равна 8. Найдите его диагональ.



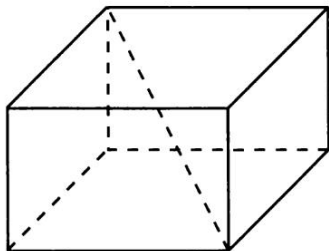
3. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.



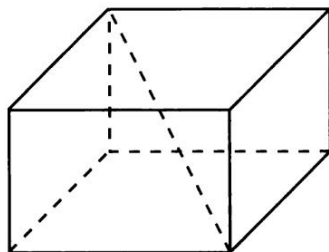
4. Объем куба равен 27. Найдите площадь его поверхности.



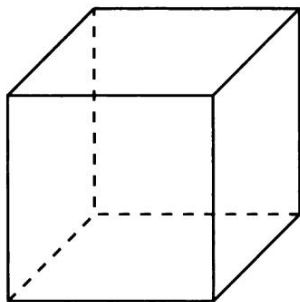
5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.



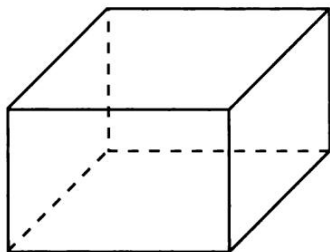
6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.



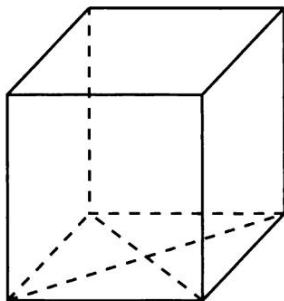
7. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 30. Найдите ребро куба.



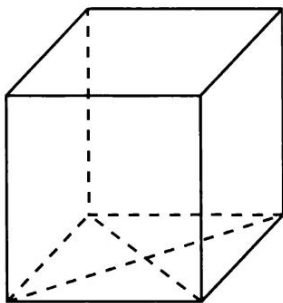
8. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 6. Найдите площадь его поверхности.



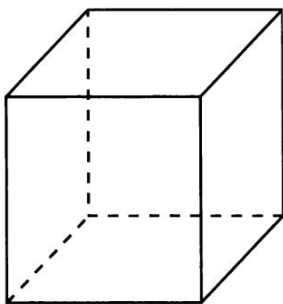
9. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, и боковым ребром, равным 5.



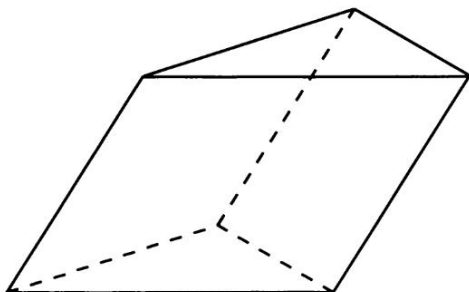
10. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



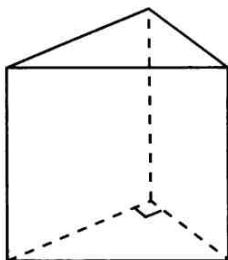
11. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если стороны ее основания равны 3, а площадь поверхности равна 66.



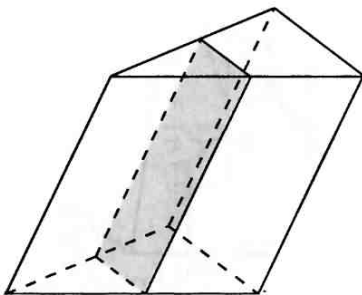
12. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 10 и отстоит от других боковых ребер на 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.



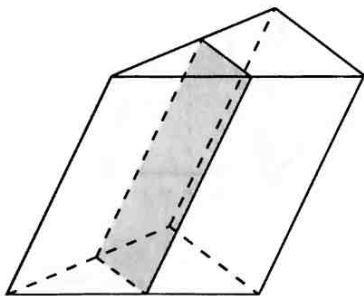
13. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



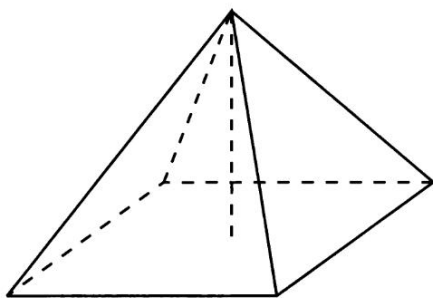
14. Через среднюю линию основания треугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 12, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.



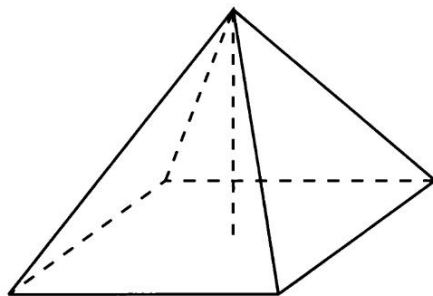
15. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



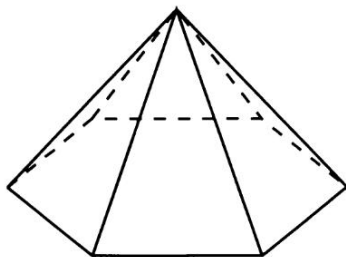
16. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



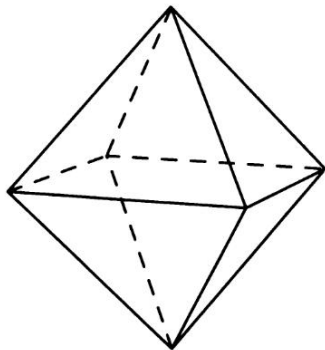
17. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.



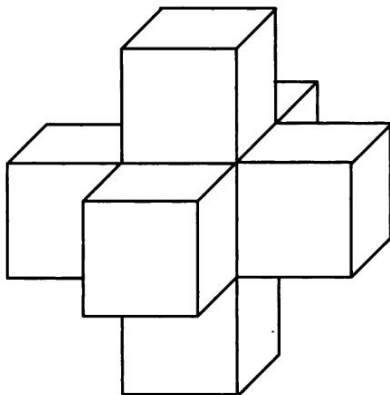
18. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



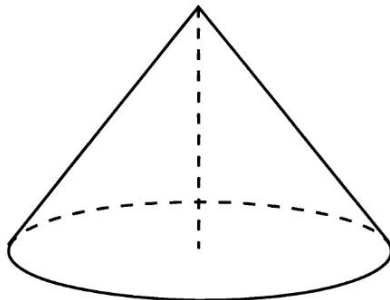
19. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



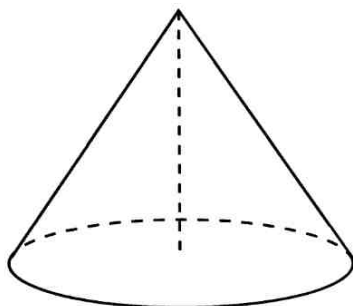
20. Найдите площадь поверхности пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.



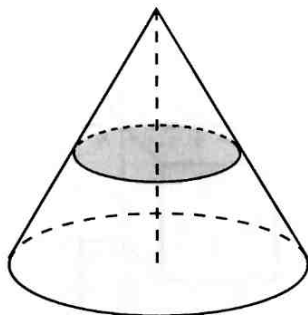
21. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его поверхности, деленную на π .



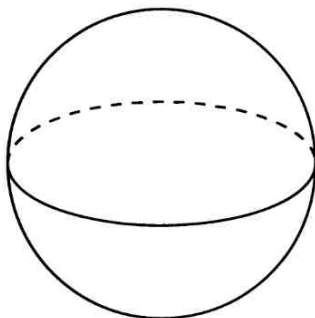
22. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.



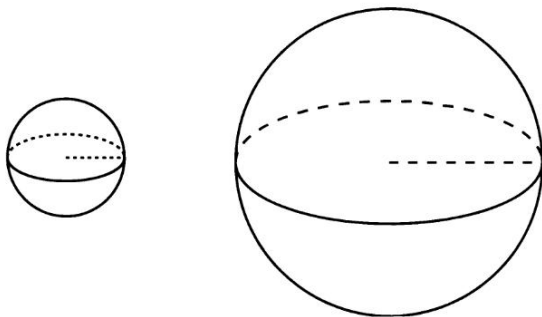
23. Площадь поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь поверхности отсеченного конуса.



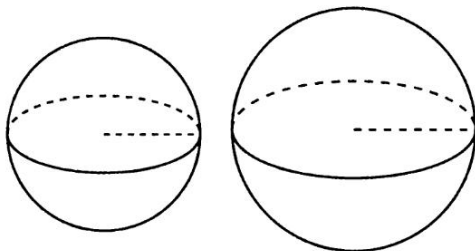
24. Объем шара равен 36π . Найдите площадь его поверхности, деленную на π .



25. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

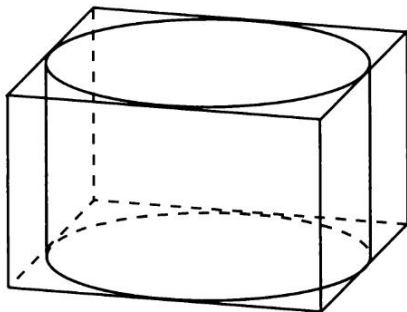


26. Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

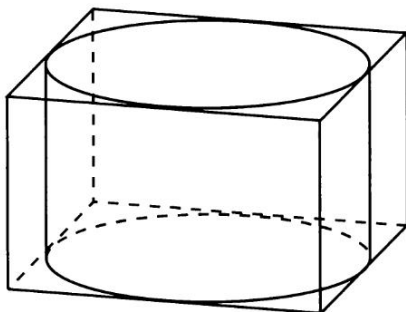


Уровень С

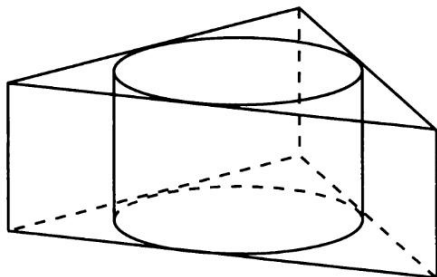
1. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



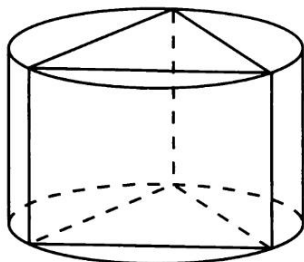
2. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.



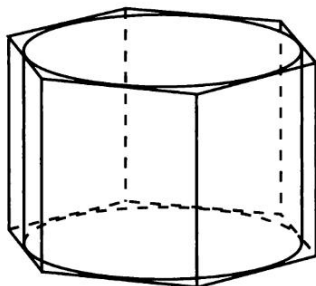
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.



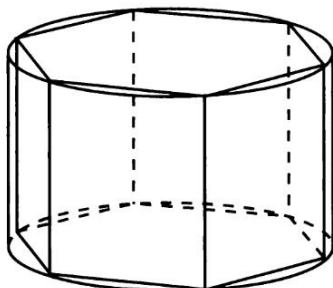
4. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.



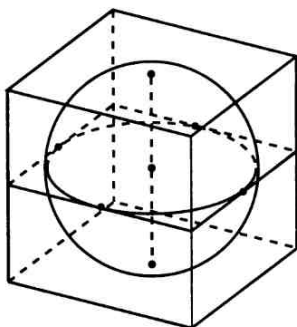
5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.



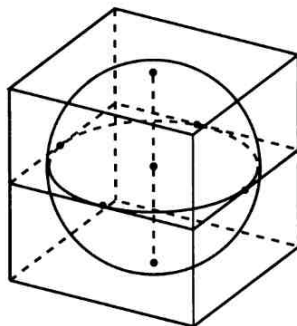
6. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания и высота которого равны 3.



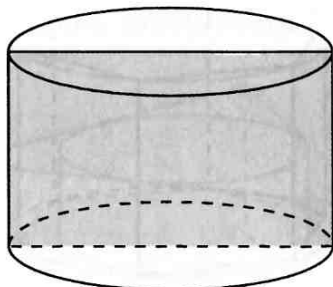
7. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его площадь поверхности.



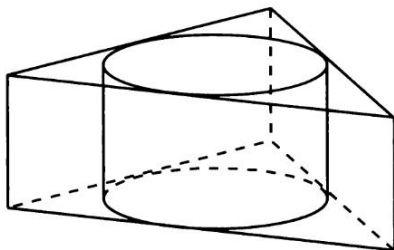
8. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равна 54. Найдите радиус сферы.



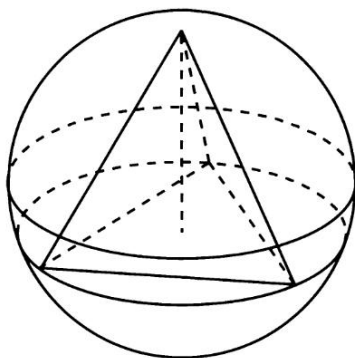
9. Площадь осевого сечения цилиндра равна 1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



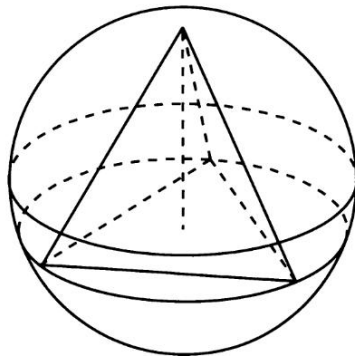
10. Площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму, равна 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около этой призмы.



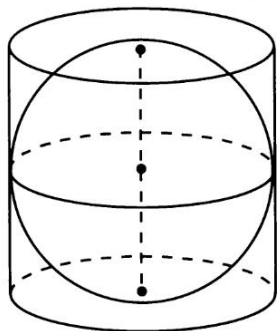
11. Высота правильного тетраэдра равна 4. Найдите площадь поверхности шара, описанного около этого тетраэдра.



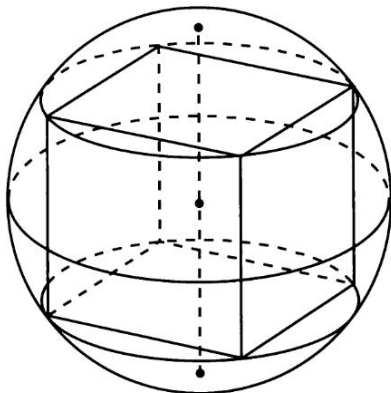
12. Площадь поверхности шара, описанного около правильного тетраэдра, равна 9. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в этот тетраэдр.



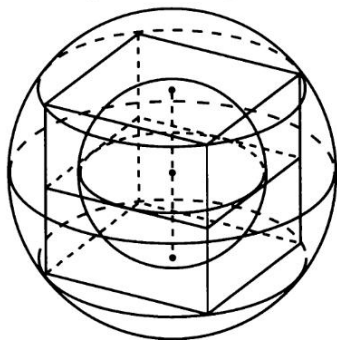
13. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 9. Найдите площадь поверхности шара.



14. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2, 4 и 6, описан шар. Найдите площадь его поверхности.



15. Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?



ОТВЕТЫ

1. Расстояние между двумя точками в пространстве

1. 3. 2. 1. 3. 7. 4. 12. 5. 5. 6. 8. 7. 5. 8. 1. 9. 2,5. 10. 1. 11. 2.
12. 2. 13. 2. 14. 2. 15. $\sqrt{3}$. 16. $\sqrt{3}$. 17. $\sqrt{3}$. 18. $\sqrt{3}$. 19. 2. 20. 2.
21. 2. 22. 3. 23. 3. 24. 3. 25. 2. 26. 2. 27. 2. 28. 5. 29. 5. 30. 5.

2. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Уровень А

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 1. 5. 1. 6. 1. 7. 1. 8. 1. 9. 1. 10. 1. 11. 1. 12. 1.
13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. 1. 17. 1.

Уровень В

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 2. 5. 2. 6. 2. 7. 3. 8. 3. 9. 3. 10. 1. 11. 1.
12. 3,5. 13. 1,5. 14. 1,5. 15. 1,5. 16. 1,5. 17. 1. 18. 1. 19. 1. 20. 12.
21. 1,5. 22. 3. 23. 1. 24. 1. 25. 1,5. 26. 3. 27. 3. 28. 2. 29. 2. 30. 2.
31. 1. 32. 1. 33. 0,5. 34. 1,5. 35. 1,5. 36. 1,5. 37. 1. 38. 1.

Уровень С

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 3. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. 5. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. 6. $\sqrt{3}$. 7. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. 8. $\frac{\sqrt{39}}{4}$.
9. $\sqrt{3}$. 10. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 11. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 12. $\sqrt{2}$. 13. $\sqrt{2}$. 14. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 15. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 16. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
17. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 18. $\sqrt{3}$. 19. $\sqrt{3}$. 20. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 21. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 22. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 23. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 24. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.
25. $\frac{\sqrt{39}}{4}$. 26. $\frac{\sqrt{39}}{4}$. 27. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. 28. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. 29. $\frac{\sqrt{30}}{4}$. 30. $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

3. Расстояние от точки до плоскости в пространстве

Уровень А

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 1. 5. 1. 6. 1. 7. 1.

Уровень В

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 0,5. 5. 1,5. 6. 1. 7. 1. 8. 0,5. 9. 3. 10. 3. 11. 1,5.
12. 1,5. 13. 1,5. 14. 1,5. 15. 0,5. 16. 1,5. 17. 1. 18. 1.

Уровень С

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 6. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 8. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 9. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.
10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 12. 0,5. 13. $\sqrt{3}$. 14. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 15. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 16. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 17. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

18. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 19. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 20. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 21. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 22. $\frac{\sqrt{39}}{13}$. 23. $\frac{3\sqrt{39}}{13}$. 24. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 27. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 28. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 29. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 30. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 31. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 32. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.
 33. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 34. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 35. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 36. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 37. $\frac{\sqrt{13}}{13}$. 38. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 39. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. Расстояние между прямыми в пространстве

Уровень А

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 1. 5. 1. 6. 1. 7. 1. 8. 1. 9. 1. 10. 1. 11. 1. 12. 1.
 13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. 1. 17. 1. 18. 1. 19. 1. 20. 1.

Уровень В

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 1. 5. 2. 6. 1. 7. 1. 8. 1. 9. 1. 10. 1. 11. 3. 12. 1.
 13. 1. 14. 1. 15. 1. 16. 1. 17. 1. 18. 1. 19. 3. 20. 3. 21. 2. 22. 3.
 23. 3. 24. 1.

Уровень С

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 6. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. 0,5. 9. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 16. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 17. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.
 18. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. 19. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 20. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 21. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 22. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 23. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 24. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 25. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 26. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 27. $\sqrt{3}$. 28. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 29. $\sqrt{3}$. 30. $\sqrt{3}$. 31. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 32. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 33. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 34. $\sqrt{3}$. 35. $\sqrt{3}$. 36. $\sqrt{3}$. 37. $\sqrt{3}$. 38. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 39. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 40. 1. 41. 1. 42. 1,5.
 43. 1,5. 44. 1. 45. 1. 46. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 47. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 48. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 49. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 50. $\sqrt{3}$.
 51. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 52. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 53. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 54. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 55. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 56. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 57. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. 58. 1.

5. Угол между прямыми в пространстве

Уровень А

1. 90. 2. 90. 3. 90. 4. 90. 5. 45. 6. 45. 7. 45. 8. 45. 9. 90. 10. 90.
 11. 60. 12. 60. 13. 60. 14. 90. 15. 45. 16. 45. 17. 60. 18. 60. 19. 60.
 20. 60. 21. 90. 22. 45. 23. 45. 24. 90. 25. 30. 26. 60. 27. 90. 28. 90.
 29. 60. 30. 60.

Уровень В

1. 90. 2. 90. 3. 60. 4. 60. 5. 60. 6. 60. 7. 90. 8. 90. 9. 90. 10. 90.
 11. 90. 12. 90. 13. 90. 14. 90. 15. 90. 16. 90. 17. 90. 18. 90. 19. 90.
 20. 90. 21. 90. 22. 90. 23. 90. 24. 90. 25. 90. 26. 30. 27. 90. 28. 90.
 29. 0,75. 30. 90. 31. 45. 32. 30. 33. 90. 34. 2. 35. 60. 36. 60. 37. 0,5.
 38. 90. 39. 90. 40. 2. 41. 60. 42. 90. 43. 30. 44. 30. 45. 90. 46. 0,25. 47. 60.

Уровень С

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $\sqrt{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 6. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 7. $\frac{5}{6}$. 8. $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 10. $\frac{1}{4}$.
 11. $\sqrt{2}$. 12. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 13. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$. 14. $\frac{5}{6}$. 15. 0,75. 16. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 17. $\frac{3}{4}$. 18. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
 19. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. 20. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 21. $\frac{3}{4}$. 22. $\frac{1}{4}$. 23. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 24. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 25. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 26. $\frac{3}{4}$.
 27. $\frac{5}{8}$. 28. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 29. $\frac{1}{4}$.

6. Угол между прямой и плоскостью в пространстве

Уровень А

1. 45. 2. 45. 3. 45. 4. 90. 5. 90. 6. 45. 7. 45. 8. 45. 9. 45. 10. 90.
 11. 45. 12. 45. 13. 45. 14. 45. 15. 45. 16. 45. 17. 45. 18. 90. 19. 45.
 20. 45. 21. 90. 22. 45. 23. 45. 24. 90. 25. 90. 26. 90. 27. 45. 28. 45.
 29. 60. 30. 45. 31. 90. 32. 60. 33. 90. 34. 45. 35. 90.

Уровень В

1. 30. 2. 30. 3. 30. 4. 30. 5. 30. 6. 30. 7. 30. 8. 30. 9. 30. 10. 30.
 11. 90. 12. 90. 13. 90. 14. 30. 15. 45. 16. 45. 17. 0,5. 18. 0,5. 19. 30.
 20. 60. 21. 60. 22. 90. 23. 60. 24. 30. 25. 60. 26. 90. 27. 45. 28. 60.
 29. 30. 30. 60. 31. 60. 32. 60. 33. 30. 34. 45. 35. 45.

Уровень С

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 3. $\sqrt{2}$. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\sqrt{2}$. 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 8. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 9. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 12. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 17. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 18. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 19. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 20. $\frac{1}{3}$. 21. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 22. $\frac{1}{3}$. 23. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 24. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 26. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 27. $\frac{\sqrt{42}}{7}$. 28. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 29. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 30. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 31. $\frac{1}{3}$. 32. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 33. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.
 34. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 35. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 36. $\frac{\sqrt{15}}{10}$. 37. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 38. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 39. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 40. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 41. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
 42. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 43. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 44. $\frac{\sqrt{15}}{10}$. 45. $\frac{3}{5}$.

7. Угол между плоскостями в пространстве

Уровень А

1. 90. 2. 90. 3. 90. 4. 90. 5. 90. 6. 45. 7. 45. 8. 90. 9. 60. 10. 90.
 11. 90. 12. 90. 13. 90. 14. 90. 15. 120.

Уровень В

1. 90. 2. 90. 3. 90. 4. 90. 5. 45. 6. 60. 7. 90. 8. 90. 9. 60. 10. 60.
 11. 60. 12. 30. 13. 45. 14. 60. 15. 90. 16. 30. 17. 60.

Уровень С

1. $\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{2}$. 3. $\sqrt{2}$. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\frac{1}{3}$. 8. 90. 9. 60. 10. 90.
11. $\frac{1}{3}$. 12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 13. $\frac{1}{3}$. 14. $\sqrt{2}$. 15. $-\frac{1}{3}$. 16. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 17. 0,6. 18. -0,6.
19. 0,2. 20. $\frac{5}{13}$. 21. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 22. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 23. $\frac{1}{7}$. 24. 2. 25. $\frac{2}{3}$. 26. 45.
27. 60. 28. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 29. $\frac{2}{3}$. 30. $\frac{1}{7}$. 31. $\frac{1}{7}$.

8. Объем фигур в пространстве

Уровень А

1. 48. 2. 8. 3. 5. 4. 4. 5. 6. 6. 27. 7. 120. 8. 4. 9. 4,5. 10. 8.
11. 24. 12. 4. 13. 0,25. 14. 3. 15. 4. 16. 3. 17. 3. 18. 2. 19. 2. 20. 3.
21. 2,25. 22. 30. 23. 50. 24. 27.

Уровень В

1. 8. 2. 6. 3. 32. 4. 7. 5. 2. 6. 4,5. 7. 1,5. 8. 32. 9. 2. 10. 64.
11. 3. 12. 8. 13. 20. 14. 18. 15. 256. 16. 13. 17. 48. 18. 4,5. 19. 12.
20. 7. 21. 48. 22. 2. 23. 1,5. 24. 2. 25. 4. 26. 6. 27. 3. 28. 3.
29. 10. 30. 7. 31. 1,125. 32. 1,5. 33. 128. 34. 9. 35. 72. 36. 16. 37. 2.
38. 12. 39. 4,5. 40. 4,5.

Уровень С

1. 12. 2. 6. 3. 6. 4. 18. 5. 6. 6. 13,5. 7. 9. 8. 27. 9. 54. 10. 54.
11. 18. 12. 13,5. 13. 36. 14. 72. 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 16. 9. 17. 4. 18. $\frac{\sqrt{2}}{18}$. 19. $\frac{\sqrt{2}}{48}$.
20. $\frac{\sqrt{2}}{24}$. 21. 6. 22. 36. 23. $2\sqrt{2}$. 24. 160. 25. 2. 26. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 27. 27.
28. 8π . 29. 8π . 30. 4. 31. 2π . 32. 2. 33. $\frac{9\pi}{2}$. 34. 6π . 35. 1,5. 36. $\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$.
37. 3. 38. $\frac{7\pi}{27}$. 39. 36π .

9. Площадь поверхности

Уровень А

1. 22. 2. 2. 3. 9. 4. 4. 5. 108. 6. 288. 7. 6. 8. 3. 9. 3. 10. 1,5.
11. 4. 12. 4.

Уровень В

1. 2. 2. 2. 3. 8. 4. 54. 5. 64. 6. 3. 7. 2. 8. 22. 9. 62. 10. 10. 11. 4.
12. 240. 13. 10. 14. 6. 15. 16. 16. 84. 17. 96. 18. 72. 19. 9. 20. 30.
21. 144. 22. 60. 23. 3. 24. 36. 25. 9. 26. 10.

Уровень С

1. 32. 2. 3. 3. 54. 4. 27. 5. 36. 6. 54. 7. 96. 8. 1,5. 9. π . 10. 12.
11. 36π . 12. 1. 13. 6. 14. 56π . 15. 3.