П.В. Чулков

Занятие 1. Ситуативная логика.

1.1. Федя всегда говорит правду, а Саша всегда врёт. Им задали один и тот же вопрос, а они дали на него один и тот же ответ. Могло ли так быть?

1.2. Два путешественника подошли к реке. К берегу была привязана лодка, вмещающая одного человека. И, тем не менее, они переправились, не намокнув. Как это возможно?

1.3. Покупатели говорят с продавцом.

— Дайте мне 11, — просит первый покупатель.

— С вас 10 рублей, — отвечает продавец.

— Дайте мне 5, — просит второй.

— С вас 5 рублей, — отвечает продавец.

— Дайте мне 128, — просит третий.

— С вас 15 рублей, — отвечает продавец.

Что продается?

1.4. Ручаюсь, — сказал продавец зоомагазина, — что этот попугай будет повторять каждое услышанное им слово. Обрадованный покупатель приобрел чудо-птицу, но вскоре обнаружил, что попугай «нем как рыба». Тем не менее, продавец не лгал. Проясните ситуацию.

1.5. История произошла в XIX веке. Английский офицер, вернувшийся из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, чтобы отрубить голову, и в тот самый момент, когда сабля опускалась на шею несчастного, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же умер. В этой истории что-то не так. Что именно?

1.6. Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерских. Заглянув к одному мастеру, он увидел, что в салоне грязно, мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне другого мастера было чисто, а владелец его был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее, математик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?

1.7. Посетитель ресторана обнаружил муху в чашке кофе и, подозвав официанта, потребовал заменить её. Едва пригубив принесенную чашку, посетитель вне себя от ярости воскликнул: «Но это та же чашка!» Как он это понял?

1.8. Учитель показал листок бумаги ученику и спросил: «Сколько здесь точек?» — «Пять», — ответил ученик. «Правильно», — сказал учитель. После этого он передал тот же листок другому ученику и спросил: «Сколько здесь точек?» — «Семь», — ответил ученик. «Правильно», — сказал учитель. Проясните ситуацию

1.9. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой – чёрными. Остап уверен, что он или сведёт вничью обе партии, или одну выиграет. Возможно ли такое?

1.10. (Старинная задача) Три человека пообедали, заплатили 30 руб (по 10 руб за каждого) и ушли. Через некоторое время повар заметил, что обсчитал их на 5 руб, и послал поваренка отдать их. Поваренок отдал 3 руб (по 1 руб на каждого), а 2 руб забрал себе. Три раза по 9 руб и 2 руб у поваренка, получается 29 руб. Куда пропал рубль?

1.11. Банкир шел по улице маленького провинциального городка, как вдруг увидел на мостовой банкноту в 5 долларов. Он поднял ее, запомнил номер и пошел домой завтракать. За завтраком жена сообщила ему, что мясник прислал счет на 5 долларов. Поскольку других денег у банкира при себе не было, он отдал жене найденную банкноту, чтобы оплатить счет. Мясник отдал эту банкноту фермеру, когда покупал телёнка, тот торговцу, торговец, в свою очередь, дал ее прачке, а прачка, вспомнив, что задолжала банку 5 долларов, отнесла ее туда и погасила свой долг. Банкир узнал банкноту, которой к тому времени было оплачено долгов на 25 долларов. Через некоторое время выяснилось, что банкнота фальшивая. Кто и сколько потерял на всех этих операциях?

1.12. Шпион собрался проникнуть в расположение врага. Перед этим он спрятался в кустах недалеко от контрольного пункта. Вот, что ему удалось подслушать. Часовой, обращаясь к посетителю, называет число:

– Двадцать шесть.

Подумав, посетитель отвечает:

– Тринадцать, – и часовой его пропускает.

Диалог с другим посетителем:

– Двадцать два, – говорит часовой.

– Одиннадцать, – и часовой его тоже пропускает.

«Ага!» –догадался шпион – «Секрет в том, называемое число требуется разделить на 2» и уверенно подошёл к охране:

– Сто, – сказал часовой.

– Пятьдесят – ответил шпион, после чего был задержан охраной.

В чём секрет пароля?

1.13. Три бегуна соревновались в беге на 100 м. По окончании сезона выяснилось, что в большинстве забегов Андрей опередил Васю, Вася в большинстве забегов опередил Сашу, а Саша в большинстве забегов опередил Андрея. Могло ли так быть?

1.14. Одного человека приговорили к казни. В приговоре было сказано, что казнь должна состоятся, не позднее чем через 7 дней, но приговоренный должен узнать о дне казни лишь за сутки. Услышав это, преступник пришёл к заключению, что казнь состоять не может. В самом деле, если начинать отсчёт с понедельника, то в воскресенье казнь состояться не может, потому что уже в пятницу приговоренный будет знать об этом. Аналогично она не может состояться в субботу, пятницу, четверг и так далее. Правильны ли его рассуждения?

1.15. Однажды в караван-сарае встретились три погонщика, причём двое из них смертельно ненавидели третьего. Не сговариваясь друг с другом, они решили его убить. Ночью один из погонщиков встал и подлил в бурдюк с водой яд. Затем проснулся второй погонщик и проделал в его бурдюке дырку, в результате чего вся вода постепенно вытекла, и третий погонщик умер от жажды. Кто виноват в его смерти?

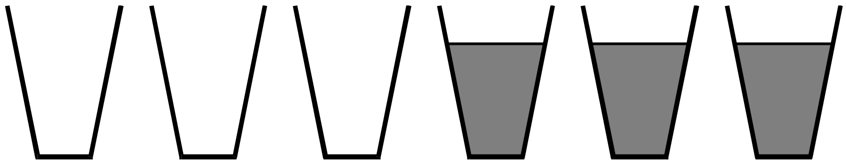
1.16. Солдату приказали брить всех солдат, кроме тех, кто бреется сам. Что Вы об этом думаете?

1.17. Три черепахи ползут по дорожке друг за другом. Первая говорит: «Сзади меня ползут две черепахи». Вторая говорит: «Впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна». Третья говорит: «Впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна». Проясните ситуацию.

1.18. В Анчурии и Гвайясуэле денежная единица именуется долларом, и в обеих странах первоначально все доллары котировались одинаково. Однажды правительство Гвайясуэлы постановило впредь приравнять анчурийский доллар к девяноста гвайясуэльским центам. На следующий день подобный курс был введен для гвайясуэльского доллара в Анчурии. В Анчурии, вблизи границы живет человек, который приходит в трактир выпить кружку пива за 10 центов. Любитель пива уплачивает анчурийский доллар и получает сдачу гвайасуэльский. Затем он переходит границу, покупает кружку пива, расплачивается гвайасуэльским долларом и получает взамен анчурийский. Вернувшись, он оказывается при своих деньгах. Кто платит за пиво?

Занятие 2. Затруднительные ситуации.

2.1. На столе стоят в ряд шесть стаканов: три пустых и три с кофе. Их нужно расположить так, чтобы пустые стаканы чередовались с наполненными стаканами. Как это сделать, если брать в руки разрешается только один стакан?



2.2. Предположим, что если человек не будет 7 суток есть или 7 суток спать, то он умрет. Пусть человек неделю не ел и не спал. Посоветуйте, что он должен сделать в первую очередь к концу седьмых суток: поесть или поспать, чтобы остаться в живых?

2.3. Два разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на две равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?

2.4. Путешественник попал в плен к кровожадным дикарям. По законам племени, всякого иноземца спрашивают о цели визита. Если он при этом скажет правду, – его съедят, а если солжет, – утопят в море. Как путешественнику остаться в живых?

2.5. Больному требуется принять за два приема две таблетки лекарства A и две таблетки лекарства B, которые выглядят совершенно одинаково. Трудность в том, что таблетки перепутались, а выглядят совершенно одинаково. Принимать их необходимо одновременно. Подскажите больному, как поступить, чтобы не нарушить предписаний врача.

2.6. На столе лежат 100 монет, среди них 6 монет лежат гербом вверх. Вам завязывали глаза и просят разделить все монеты на две группы, в которых число монет гербом вверх одинаково. При этом вы можете некоторые монеты перевернуть. Как это сделать?

2.7. Король решил уволить в отставку своего министра, но не хотел его обижать, да и повода не было. Наконец он придумал вот что. Однажды, когда министр пришел к королю, тот сказал: «В портфель я положил два листа бумаги. На одном из них написано «*Останьтесь*», на другом – «*Уходите*». Листок, который Вы, не глядя, вытяните из портфеля, решит Вашу судьбу». Министр догадался, что на обоих листках написано «*Уходите*». Помогите ему избежать отставки.

2.8. Старый жадный богач заказал у бедного художника свой портрет, но заказ забирать отказался. «Это не я, а какой-то шут гороховый» – сказал он и не заплатил ни копейки. Однако через неделю он сам пришёл к художнику и выкупил портрет втридорога. Как художник этого добился?

2.9. В гостиницу приехал путешественник. Денег он не имел, а обладал лишь серебряной цепочкой, состоящей из 6 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки, при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Как путешественнику распилить цепочку, чтобы иметь возможность ежедневно расплачиваться с хозяином? Как изменится ответ, если в цепочке будет 7 звеньев?

2.10. Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

2.11. На почте имеются конверты в пачках по 100 штук в каждой. За 5 секунд продавец может отсчитать 5 конвертов. Ему требуется отсчитать 90 конвертов. За какое время он этот сделает?

2.12. На столе лежат четыре карточки, на верхней стороне которых написано А, Б, 4, 5. Какое наименьшее количество карточек требуется перевернуть, чтобы убедиться в истинности утверждения: «Если на одной стороне гласная, то на другой – чётное число»?

2.13. Согласно легенде царь обещал изобретателю шахмат Сете дать зерна столько, сколько тот пожелает. Сета же попросил в награду столько пшеничных зерен, сколько получится, если на первую клетку доски положить 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4 зерна и так далее до последней 64-ой клетки, увеличивая каждый раз количество зёрен в 2 раза. Однако вскоре выяснилось, что такого количества зерна нет на всей Земле. Выполнить такое желание нельзя. Но царю необходимо было «не потерять лицо». Как Вы думаете, что посоветовали царю мудрые советники?

2.14. В комнате имеются три лампочки, к которым присоединены три выключателя, расположенные в коридоре, при этом какой выключатель соответствует какой лампочке неизвестно. Разрешается, произведя какие-то манипуляции с выключателями, затем зайти в комнату. Можно ли после этого установить, какой выключатель соответствует какой лампочке?

2.15. Эту историю рассказывают про знаменитого философа Канта. Как-то вечером он обнаружил, что его настенные часы остановились. Чтобы узнать время, он отправился в гости к одному из своих друзей. Пробыв там некоторое время, он вернулся домой и поставил правильно стрелки часов. Как ему это удалось?

2.16. (Старинная задача) Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $2/3$ имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей $1/3$, а жене $2/3$». Родилась двойня – сын и дочь. Как разделить наследство?

2.17. В заповедном и дремучем страшном Муромском лесу из-под земли бьют ключи – источники волшебной воды. Из первых девяти источников воду может взять каждый, но последний источник находится в пещере Кощея Бессмертного, и никто, кроме самого Кощея, не может набрать там воды. На вкус и цвет волшебная вода ничем не отличается от обыкновенной воды, но, если человек выпьет из волшебного источника, он умрет (волшебная вода смертельна даже для самого Кощея). Спасти может только одно: запить эту воду водой из волшебного источника, номер которого больше. Если же выпить воды из десятого источника, то уже ничего не поможет.

Иван-царевич вызвал Кощея на поединок. Условия простые: каждый приносит с собой кружку с водой и даёт ее выпить противнику. Кощей согласился. Он рассуждал так: «Если я дам Ивану-царевичу воды из десятого источника, то он погибнет. Его яд я запью той же водой из десятого источника и спасусь». Помогите Иван победить в поединке.

2.18. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время президентских выборов. В стране 20 млн. избирателей, из которых только 1% (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. В стране демократическая система голосования: избирателей разбивают на несколько равных групп, каждая затем опять разбивается на несколько равных групп и так далее. В самых мелких группах выбирают представителя группы – выборщика – для голосования в большей группе, затем выборщики выбирают выборщика для этой большей группы и так далее. Наконец выборщики из самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес сам делит избирателей на группы. При равенстве голосов побеждает оппозиция. Как Мирафлоресу победить на выборах?

Занятие 3. Простые алгоритмы.

3.1. (Задача Алкуина) Требуется перевезти через реку волка, козу и кочан капусты. На лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трёх. Как перевезти их, чтобы коза не съела капусту, а волк не съел козу?

3.2. (Задача Пуассона) Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить половину своему другу. Но у него нет сосуда в 6 пинт, а есть два сосуда в 8 пинт и 5 пинт. Каким образом он мог бы налить 6 пинт вина в сосуд емкостью 8 пинт?

3.3. На сковороде помещается два кусочка хлеба. На поджаривание одного кусочка с одной стороны требуется минута Можно ли поджарить три кусочка хлеба с обеих сторон быстрее, чем за 4 мин?

3.4. Как при помощи чашечных весов без гирь рассыпать 24 кг сахарного песка в мешки весом 9 кг и 15 кг?

3.5. В кабине лифта двадцатиэтажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую – опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

3.6. Как с помощью двух песочных часов (на 7 мин и на 11 мин) отмерить промежуток времени в 15 мин?

3.7. С числом, записанным на доске, можно производить следующие операции: заменить его удвоенным, или стереть его последнюю цифру. Как с помощью нескольких операций получить из числа 458 число 14?

3.8. Как с помощью прямоугольной плитки размером 7×9 см начертить на листе бумаги отрезок в 1 см?

3.9. Три разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы все остались довольны?

3.10. Имеется два шнура, которые могут гореть. Каждый из шнуров полностью сгорает за 1 час. Как с помощью этих шнуров отмерить 45 минут, если шнуры горят неравномерно?

3.11. С натуральным числом, записанным в десятичной системе, разрешается проделать операции: 1) приписать на конце цифру 4; 2) приписать на конце цифру 0; 3) разделить на 2 (если число четно). Можно ли из числа 4 получить 2007?

3.12. У Змея Горыныча 2000 голов. Сказочный богатырь одним ударом отрубает 1, 17, 21 или 33 головы, но при этом, соответственно, отрастают 10, 14, 0 или 48 голов. Если все головы отрублены, то новые не отрастают. Как богатырю победить Змея?

3.13. На пути к сокровищам Али-Баба должен открыть, еще один – электронный – замок. В настоящий момент на экране замка высвечены четыре числа 1, 2, 3, 4. Чтобы открыть замок, требуется получить на экране числа 2, 0, 0, 7. За один шаг можно а) умножить одно из чисел на 2; б) одновременно вычесть из каждого числа по 1. Сможет ли Али-Баба открыть замок? Ответ объясните.

3.14. В школьном кабинете химии имеются три банки с серной кислотой емкостью 1, 2 и 3 литра. Концентрация кислоты в этих банках неизвестна (скорее всего, она различна - но в точности этого никто не знает). Требуется перелить кислоту в три пустые банки такой же емкости, но так, чтобы концентрация кислоты во всех банках была одинакова. Как это сделать?

3.15. На склад привезли 99 полных бочек серной кислоты неизвестной (возможно различной) концентрации. По условиям контракта необходимо, чтобы концентрация кислоты во всех бочках была одинакова. Как этого добиться, если в вашем распоряжении еще одна, пустая, бочка и прибор, позволяющий переливать любое количество жидкости из бочки в бочку?

3.16. У сейфа – 16 ручек, которые расположены в 4 ряда по 4 ручки в ряду. Каждая ручка может находиться в одном из двух положений: горизонтальном либо вертикальном. При повороте любой ручки поворачиваются все ручки в том ряду и в том столбце, где она находится. Сейф открывается, если все ручки находятся в горизонтальном положении. Верно ли, что при любом исходном положении ручек сейф можно открыть?

3.17. Али-Баба хочет попасть пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, в крышке которой имеется 4 отверстия образующие квадрат. Под отверстиями находится по кувшину, в каждом из которых торчит селёдка хвостом вверх либо хвостом вниз.

Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положения селёдок и повернуть одну или обе по своему усмотрению. Если хвосты селёдок окажутся направленными в одну сторону, то дверь пещеры открывается.

После того, как Али-Баба вынет руки из отверстий, бочка поворачивается, причём Али-Баба не может соотнести новое положение бочки по отношению к старому. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

3.18. На столе лежат 17 монет. Некоторые лежат «орлом» вверх, некоторые — «орлом» вниз. За первый ход можно перевернуть шестнадцать монет, за второй — пятнадцать, за третий — четырнадцать, и так далее, за шестнадцатый — одну монету. Докажите, что можно действовать таким образом, что в конце все монеты будут лежать одинаковым образом («решкой» вверх или «орлом» вверх).

Занятие 4. Наглядная геометрия.

4.1. Можно ли в тетрадном листе прорезать дыру такую, чтобы сквозь неё мог пролезть человек?

4.2. В Вашем распоряжении несколько кирпичей и линейка. Как измерить диагональ кирпича?

4.3. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшилась вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска мыла?

4.4. Из бумаги склеили куб. Его поверхность состоит их 6 одинаковых квадратов. Можно разрезать её на 12 одинаковых квадратов?

4.5. Путешественник выходит из некоторой точки земного шара и идет 1 км на юг, 1 км на восток и 1 км на север. Мог ли он вернуться в ту же самую точку, откуда вышел? Если, сколько всего таких точек существует?

4.6. Известно, что больше половины поверхности Земли занимают моря. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположных точки поверхности, занятых морями.

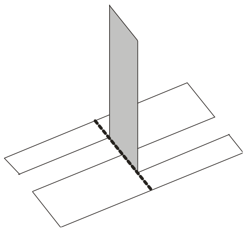
4.7. Вдоль экватора Земли протянули веревку, которую затем удлинили на 1 м, а образовавшийся зазор равномерно распределили по всей длине верёвки. Сможет ли кошка пролезть в этот зазор?

4.8. На глобусе провели 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделилась поверхность глобуса?

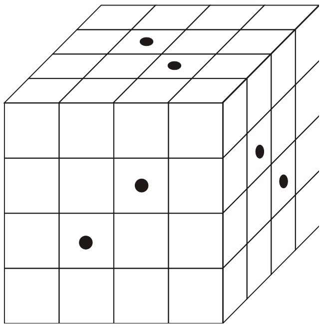
4.9. Из Москвы вылетел вертолет, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток. Где он оказался: южнее Москвы, севернее Москвы или на той же широте? Восточнее Москвы, западней Москвы или на той же долготе?

4.10. Можно ли разрезать арбуз на 4 куска так, чтобы после еды осталось 5 корок?

4.11. Можно ли из целого прямоугольного листа бумаги сделать фигуру, изображенную на рисунке?



4.12. Большой кубик склеен из маленьких деревянных кубиков. В нем просверлили 6 сквозных отверстий параллельных ребрам куба. Сколько маленьких кубиков осталось неповрежденными?



4.13. Можно ли так сцепить три верёвочных кольца, чтобы при разрезании любого из них конструкция распадается?

4.14. Покрышка футбольного мяча состоит из пятиугольников и шестиугольников, причём в каждой вершине сходится по три ребра. Сколько пятиугольников?

4.15. В пространстве находится точечный источник света. Можно ли его закрыть четырьмя шарами?

4.16. Можно ли сложить квадратный лист бумаги так, чтобы затем одним взмахом ножниц разрезать его на четыре квадратика?

4.17. Можно ли расставить на столе четыре одинаковых стакана так, чтобы все попарные расстояния между донышками были равны? За расстояния между донышками приняты расстояния между их центрами.

4.18. Муравей забрался в банку из-под сахара, имеющую форму куба. Сможет ли он последовательно обойти все ребра куба, не проходя дважды по одному ребру?

Занятие 5. Чётные и нечётные числа

5.1. Директор школы в своем отчете указал, что в школе 3688 учащихся, причем мальчиков на 373 человека больше, чем девочек. Докажите, что в отчёте допущена ошибка.

5.2. Можно ли стенку размером 2007 × 2007 покрыть плитками размером 1 × 2?

5.3. Можно ли в таблицу 2011 × 2011 расставить числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была чётной, а в каждом столбце нечётной?

5.4. В наборе 23 гири: 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 23 кг. Можно ли гири разложить на две равные по весу кучки, если гиря в 21 кг потеряна?

5.5. Можно ли разменять 25 руб десятью купюрами достоинством 1 руб, 3 руб и 5 руб?

5.6. Можно ли числа $1, 2, \ldots, 21$ разбить на группы так, чтобы в каждой из групп наибольшее число равнялось сумме всех остальных?

5.7. Федя утверждает, что придумал пример на деление с остатком так, чтобы делимое, делитель, неполное частное и остаток оканчивались на 9, 7, 3 и 1 (в некотором порядке), а Маша говорит, что так быть не может. Кто же из них прав?

5.8. Федя написал на доске равенство:

$$1*2*3*4*5*6*7*8*9=20$$

(вместо знака $*$ в неизвестном порядке написаны знаки «+» и «–»). Докажите, что в равенстве допущена ошибка.

5.9. Можно ли соединить 113 городов дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?

5.10. Вася сказал, что умеет решать уравнение $19x^2+97x=1997$ в натуральных числах. Докажите, что Вася ошибся.

5.11. Числа a и b – целые. Известно, что $a+b=2012$. Может ли сумма $7a+3b$ равняться 6799?

5.12. Чётно или нечётно число S, если

$S=1+2+\ldots+2007$?

5.13. Кузнечик прыгает по координатной прямой: длина первого прыжка – 1, длина второго 2 и так далее. Сможет ли он вернуться на прежнее место, сделав ровно 2007 прыжков?

5.14. Сумму двух натуральных чисел умножили на произведение. Могло ли в результате получиться число 2013?

5.15. Вася утверждает, что придумал три натуральных числа, попарные суммы которых равны 2010, 2011 и 2012. Возможно ли такое?

5.16. В вершинах равностороннего треугольника написаны числа 1, 2, 3. Можно ли сложить несколько таких треугольников в стопку так, чтобы сумма чисел в каждой вершине равнялась 2011?

5.17. Федя купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы по порядку от 1 до 192. Хулиган Вася вырвал из тетради 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Могло ли у него в сумме получиться 2012?

5.18. На доске записаны 2007 чисел, каждое из которых равно либо 1, либо –1. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в группах были равны?

Занятие 6. Делители и кратные

6.1. Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение цифр которого равно 6552. Подумайте, может ли это быть правдой?

6.2. Проверьте, утверждения:

а) $10^n + 2$ кратно 3; б) $10^n + 8$ кратно 9;

в) $44\ldots44$ кратно 8; г) $11\ldots11$ кратно 37.

6.3. Ковбой Джо зашел в бар. Он купил бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и девять коробок непромокаемых спичек. Бармен сказал: «С вас 11 долларов 80 центов за всё». Вместо ответа Джо выхватил револьвер. Почему он решил, что его пытаются надуть?

6.4. Верно ли, что сумма $1+2+\ldots+1993$ кратна 1993?

6.5. Можно ли натуральные числа от 1 до 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждом из четырёх столбцов была одна и та же?

6.6. Можно ли натуральные числа от 1 до 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждой из трёх строк была одна и та же?

6.7. В двух шкатулках лежит 70 монет. Известно, что в первой шкатулке $5/9$ от числа всех монет – золотые, а остальные серебряные, во второй $7/17$ от числа монет – серебряные, а остальные золотые. Сколько монет лежит в каждой шкатулке?

6.8. Про трехзначное число известно, что если от него отнять 7, то результат разделится на 7, если от него отнять 8, то результат разделится на 8, а если отнять 9, то результат разделится на 9. Что это за число?

6.9. Найдите число кратное 50 и имеющее ровно 10 натуральных делителей. Сколько таких чисел существует?

6.10. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от 1 до 10.

6.11. Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел от 1 до 100?

6.12. Шестизначное число делится на 7. Его первую цифру стёрли, а затем написали ее в конце числа. Верно ли, что получившееся шестизначное число делится на 7?

6.13. Известно, что если сумма цифр числа кратна 3 или 9, то само число кратно 3 или 9. Верно ли, что если сумма цифр числа кратно 27, то число кратно 27?

6.14. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

6.15. Докажите, что существует 2012 идущих подряд составных чисел.

6.16. Автобусные билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет называется счастливым, если у него сумма первых трех цифр равна сумме трех последних. Докажите, что сумма всех счастливых билетов кратна 9, 13, 37 и 1001.

6.17. Существует ли число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 58 раз? 57 раз?

6.18. В равенстве $109^{10} = 23673{*}{*}67459211723401$ заменить звездочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.

6.19. Верна ли теорема: "Число $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n"?

6.20. В школе 25 первоклассников. У каждого из них есть три воздушных шарика: красный, синий и желтый. Смогут ли они так поменяться шариками, чтобы у каждого все три шарика оказались одноцветными?

6.21. Докажите, что число $11\ldots11$ (состоящее из 243 единиц) кратно 243.

6.22. Коля написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стёр цифры и заменил их буквами (одинаковые цифры – одинаковыми, а разные – разными). Получилось равенство: $\overline{ДО} \times \overline{МИ} = \overline{АББА}$. Докажите, что он ошибся.

Занятие 7. Делимость и остатки

7.1. Как может измениться частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?

7.2. Вася разделил некоторое нечетное число на 2007 и в остатке получил 99. Какой остаток получится, если разделить Васино число на 18?

7.3. Существует ли такое натуральное число, которое при делении на 9 дает остаток 2, а при делении на 6 остаток 1?

7.4. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 – остаток 1. Найдите остаток от деления числа a на 15.

7.5. Найдите число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 4 даёт в остатке 3, а при делении на 5 даёт в остатке 4.

7.6. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

7.7. Проверьте, может ли сумма 12 последовательных натуральных чисел быть кратна 4.

7.8. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 6 – остаток 5, при делении на 7 – остаток 6, при делении на 8 – остаток 7, при делении на 9 – остаток 8, при делении на 10 – остаток 9.

7.9. У числа 2^{100} определите

а) последнюю цифру; б) предпоследнюю цифру; в) третью цифру с конца.

7.10. Проверьте равенство $3^{100}+7^{100}=8^{100}$.

7.11. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots11}_{\text{n цифр}}-n$ кратно 9.

7.12. Сумму цифр числа N обозначим $S(N)$. Известно, что $S(N)=S(2N)$. Докажите, что N кратно 9.

7.13. Для каких простых чисел p числа $2p+1$ и $4p+1$ тоже простые?

7.14. Какой остаток дает число 2^{99} при делении на 7?

7.15. У каждого из чисел от 1 до 199920002001 вычислили сумму цифр. У получившихся чисел снова вычислили сумму цифр. И так далее, до тех пор, пока не получились однозначные числа. Каких чисел в итоге получилось больше: 1 или 9?

7.16. Существует ли натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 1994?

7.17. Докажите, что числа вида $4k+3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов.

7.18. Выпишем несколько первых степеней тройки. Получаются числа, у которых в разряде десятков — чётная цифра. Верно ли, что так будет всегда?

Занятие 8. Логические задачи

8.1. На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: «Я мальчик». Женя говорит: «Я девочка». Если, по крайней мере, один из детей врёт, то кто из них мальчик, а кто девочка?

8.2. Один из четырёх мальчиков разбил стекло. Андрей утверждает, что стекло разбил Боря, Боря говорит, что это сделал Гена, Вася берёт вину на себя, а Гена говорит, что Боря врёт. Правду сказал только один. Кто?

8.3. Один из четырех гангстеров украл чемодан с деньгами. На допросе Алекс сказал, что чемодан украл Луи, Луи утверждал, что виновник Том, Том заверял следователя, что Луи лжет. Жорж настаивал только на том, что он не виноват. В ходе следствия выяснилось, что только один из гангстеров сказал правду. Кто?

8.4. Показания трех подозреваемых по делу противоречат друг другу, причем Смит обвиняет во лжи Брауна, Браун – Джонса, а Джонс говорит, что не следует верить ни Брауну, ни Смиту. Кого бы Вы, будучи следователем, допросили первым?

8.5. Известно, что из шести гангстеров ровно двое участвовали в ограблении. На вопрос, кто участвовал в ограблении, они дали следующие ответы:

1) Гарри: Чарли и Джордж; 2) Джеймс: Дональд и Том; 3) Дональд: Том и Чарли; 4) Джордж: Гарри и Чарли; 5) Чарли: Дональд и Джеймс. Поймать Тома не удалось. Кто участвовал в ограблении, если известно, что четверо верно назвали одного из участников ограбления, а один назвал неверно оба имени?

8.6. Рассматривается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления.

Браун: 1) Я не преступник; 2) Джонс – тоже.

Джонс: 1) Браун не преступник; 2) Преступник – Смит.

Смит: 1) Преступник – Браун; 2. Я не преступник.

В процессе следствия было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий – один раз солгал и один раз – сказал правду. Кто совершил преступление?

8.7. Из протокола допроса трех известных гангстеров A, B и C (фамилии гангстеров скрыты в интересах следствия).

A: 1) Это не Я; 2) В этот день меня не было в городе; 3. Преступник – C.

B: 1) Преступник – C; 2) Если бы я совершил преступление, я бы не сознался; 3) У меня и так много денег.

C: 1) Я не совершал преступления; 2) Я давно ищу хороший портфель; 3. A не было в городе в день преступления.

Известно, что преступление мог совершить только один из них. В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто совершил преступление?

8.8. На складе совершено хищение. Следствием установлено: 1) Преступники вывезли награбленное на автомашине; 2) Преступление совершил кто-то из троих: Алекс, Виктор или Серж (может быть и все трое); 3) Серж никогда не ходит на дело без Алекса; 4) Виктор не умеет водить машину. Виновен ли Алекс?

8.9. Браун, Джонс и Смит – свидетели ограбления банка. Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике», Джонс, что это был черный «Крайслер, а Джонс, что это был «Форд», но не синий. По рассеянности, каждый из них указал правильно либо только марку, либо только цвет машины. На какой машине уехали преступники?

8.10. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

— Змея убил Добрыня Никитич, – сказал Илья Муромец.

— Змея убил Алеша Попович, – молвили Добрыня Никитич.

— Я убил змея, – признался Алеша Попович.
Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

8.11. Математик пошел к приятелю в гости, но пока шел, забыл номер его квартиры. Расспрашивая соседей, он выяснил:

1) если верно, что номер квартиры кратен 2, то он больше 50, но меньше, чем 59;

2) если верно, что этот номер не кратен 3, то он больше 60, но меньше, чем 69;

3) если верно, что этот номер не кратен 4, то он больше 70, но меньше, чем 79.

Известно, что Математик сумел определить номер квартиры по этим данным. Попробуйте и Вы.

8.12. Среди четырех утверждений: 1) «число a делится на 2»; 2) «число a делится на 4»; 3) «число a делится на 12», 4) «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

8.13. Николай сказал: «Я поймал рыб столько же, сколько мой сын». Петр сказал: «Я поймал рыб втрое больше, чем мой сын». Известно, что никого, кроме упомянутых лиц, на рыбалке не было, а всего поймано 49 рыб. Могли ли оба высказывания быть правдивыми? Ответ объясните.

8.14. Вася сказал: «Если от двузначного номера моей квартиры отнять число, образующееся после перестановки его цифр, то получится номер дома, в котором я живу». Известно, что Лена, зная номер Васиного дома, сумела по этим данным определить номер Васиной квартиры. Определите его и Вы.

8.15. Встретились два математика. Вот их диалог: – У тебя два сына? – Да, маленькие, в школу не ходят. Кстати, произведение их лет равно числу голубей возле нас. – Этих данных недостаточно. – А старшего сына я назвал твоим именем. – Теперь я знаю, сколько им лет. Сколько лет сыновьям?

8.16. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

8.17. Найдите четырехзначное число, все цифры которого различны, если известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат по две цифры, принадлежащие искомому числу, однако ни одна из них не стоит в них на том же месте, что и в искомом числе.

8.18. В коробке лежат карточки на противоположных сторонах которых написаны соседние натуральные числа: на первой – 1 и 2, на второй – 2 и 3 и так далее. Два математика Андрей и Василий, сидящие друг напротив друга, показывают одну из карточек (каждый видит свою сторону). Происходит следующий разговор.

Андрей: Я не знаю, что на Вашей стороне.

Василий: Я тоже не знаю, что на Вашей стороне.

Андрей: Тогда Я знаю, что на Вашей стороне.

Василий: Тогда Я тоже знаю, что на Вашей стороне.

Что было написано на карточке?

8.19. Некий владыка, желая испытать трех своих мудрецов, сказал им: «Перед Вами пять колпаков: три черных и два белых. Вам наденут по колпаку. Тот из вас, кто первым догадается какого цвета на нем колпак, тот получит награду». Затем мудрецам завязали глаза, и надели им на голову по колпаку. После того как с них сняли повязки, мудрецы долго молчали. Наконец, один из них сказал: "На мне черный колпак! " Как рассуждал этот мудрец?

8.20. Три дамы Анна, Вера и Света сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными в саже лицами и смеются. Вдруг одна из них перестает смеяться. Почему?

Занятие 9. В стране рыцарей и лжецов

9.1. Однажды, прогуливаясь по стране рыцарей и лжецов**,** я встретил человека, который сказал про себя: «Я – лжец». Кем мог быть человек, которого я встретил?

9.2. Перед нами два жителя страны рыцарей и лжецов. Андре говорит: «Я – лжец, а Виктор – не лжец». Кто из них рыцарь, и кто – лжец?

9.3. За круглым столом собралось 100 человек — каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все кроме одного сказали: «99 из нас — лжецы». Сколько лжецов могло собраться за столом?

9.4. Перед нами три жителя страны рыцарей и лжецов. Андре говорит: «Мы все лжецы». Виктор говорит: «Ровно один из нас лжец». Кто Серж – рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто Виктор?

9.5. На острове рыцарей и лжецов было совершено преступление. К суду были привлечены три жителя страны. На вопрос судьи Андре ответил неразборчиво. Когда судья переспросил двух оставшихся, то Виктор сказал, что Андре утверждает, что он рыцарь, а Серж сказал, что Андре назвал себя лжецом. Кем являются Виктор и Серж?

9.6. Однажды между четырьмя жителями страны рыцарей и лжецов произошел интересный разговор.

Андре сказал: «По крайней мере, один из нас – лжец».

Виктор сказал: «По крайней мере, двое из нас – лжецы».

Серж сказал: «По крайней мере, трое из нас – лжецы».

Джон сказал: «Среди нас нет лжецов».

Но среди них все же были лжецы. Кто?

9.7. В страну рыцарей и лжецов приехал турист. Первый островитянин, которого он встретил, утверждал, что является рыцарем. Турист обрадовался, и нанял его себе в проводники. Через некоторое время они встретили еще одного местного жителя. Турист отправил проводника спросить у него рыцарь он или лжец. Проводник вернулся и ответил, что абориген утверждает, что он рыцарь. Кем был проводник, рыцарем или лжецом?

9.8. В стране живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

9.9. На заседании Парламента страны рыцарей и лжецов, часть из присутствующих отстаивала точку зрения, что число и лжецов, и рыцарей среди депутатов Госдумы нечётно. Остальные, в свою очередь, доказывали, что это число чётно. Председательствующий, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего депутатов 213 человек. Кто он, рыцарь или лжец?

9.10. За круглым столом сидят восемь человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. На вопрос, кто их соседи, каждый из них ответил: «Мои соседи – лжец и рыцарь царь». Сколько среди них было лжецов? Как изменился бы ответ, если бы за столом сидело девять человек?

9.11. В правительстве страны рыцарей и лжецов 12 министров. Некоторые из них лжецы, а остальные рыцари. Однажды, на заседании правительства были высказаны следующие мнения: первый из министров сказал: «Здесь нет ни одного рыцаря», второй: «Здесь не более одного рыцаря», третий: «Здесь не более двух рыцарей» и так далее до двенадцатого, который сказал: «Здесь не более одиннадцати рыцарей». Сколько лжецов входят в правительство?

9.12. За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Мартышка обошла всех попугаев (по часовой стрелке) задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является ваш сосед справа – рыцарем или лжецом?» Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «Мой сосед справа – лжец». Следующие два: «Мой сосед справа – рыцарь», следующие два: «Мой сосед справа – лжец» и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 рыцарей». Сколько рыцарей было на самом деле?

9.13. В комнате собрались лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Из комнаты послышались голоса. Первый голос: 1) нас в комнате не более трех человек; 2) все мы лжецы; Второй голос: 1) нас в комнате не более четырех человек; 2) не все мы лжецы. Третий голос: 1) нас в комнате пятеро; 2) трое из нас лжецы. Кого в комнате больше: рыцарей или лжецов?

9.14. На острове рыцарей и лжецов принят закон: рыцари разрешили лгать, но только в день своего рождения. В остальные дни они обязаны говорить правду. Пьер и Джон – рыцари. На вопрос: «Когда Ваш день рождения?», заданный 23 января, Пьер ответил: «Он был вчера», а Джон: «Он будет завтра». На следующий день (24 января), на тот же вопрос, каждый из них ответил то же самое. Определите, если возможно, дату рождения каждого из них.

9.15. По подозрению в совершении преступления задержаны 5 человек: некоторые из них рыцари (всегда говорят правду), а остальные – лжецы (всегда лгут). Допрашивали их по одному. Два первых подозреваемых утверждали одно и то же: «Среди остальных задержанных не менее половины – лжецы». Показания ещё двух тоже совпали: «Среди остальных задержанных не менее половины – рыцари». Один из задержанных от показаний отказался. Выясните, если возможно: а) сколько среди задержанных рыцарей? б) кто отказался от показаний – рыцарь или лжец?

9.16. В парламенте страны рыцарей и лжецов представлены три политические партии. Правые: «Любители правды», левые: «Объединенные лжецы» и центристы – партия «И те, и эти». Каждому депутату парламента (а их 100 человек) задали по три вопроса: 1) Являетесь ли Вы членом партии «Любители правды»? 2) Являетесь ли Вы членом партии «Объединенные лжецы»? 3) Являетесь ли Вы членом партии «И те, и эти»? В результате оказалось, что на первый вопрос положительно ответили 72 человека, на второй – 47 человек, а на третий – 31 человек. Сколько лжецов в парламенте страны?

9.17. На поляне расположились пятеро жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) и заезжий путешественник (не рыцарь и не лжец). Между жителями острова завязался разговор:

– Ровно половина присутствующих – лжецы, – сказал первый житель острова.

– Более четверти из присутствующих – рыцари – заметил второй.

– Более трети из присутствующих – лжецы – сказал третий.

– Рыцарей и лжецов среди присутствующих поровну – сказал четвертый.

– Вы все лжете! – сказал пятый. Сколько из них лжецов?

9.18. В сенате страны рыцарей и лжецов – 100 сенаторов. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Известно, что:

1. По крайней мере, один из сенаторов –рыцарь.

2. Из двух произвольно выбранных сенаторов, по крайней мере, один – лжец. Определите, сколько в сенате рыцарей и сколько лжецов?